KATUGAMPOLA KESİRLİ İNTEGRALİ İLE
ELDE EDİLEN BAZI BULGULAR

Yakup TAŞDAN

Yüksek Lisans Tezi

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

Dr. Öğr. Üyesi Mustafa GÜRBÜZ

AĞRI-2019

T.C.
AĞRI İBRAHİM ÇEÇEN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Yakup TAŞDAN

KATUGAMPOLA KESİRLİ İNTEGRALİ İLE ELDE EDİLEN BAZI BULGULAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

TEZ DANIŞMANI
Dr. Öğr. Üyesi Mustafa GÜRBÜZ

AĞRI – 2019

Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğine göre hazırlamış olduğum "KATUGAMPOLA KESİRLİ İNTEGRALİ İLE ELDE EDİLEN BAZI BULGULAR" adlı tezin tamamen kendi çalışmam olduğunu ve her alıntıya kaynak gösterdiğimi taahhüt eder, tezimin kâğıt ve elektronik kopyalarının Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü arşivlerinde aşağıda belirttiğim koşullarda saklanmasına izin verdiğimi onaylarım.

Lisansüstü Eğitim-Öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca gereğinin yapılmasını arz ederim.

☒ Tezimin tamamı her yerden erişime açılabilir.

☐ Tezim sadece Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi yerleşkelerinden erişime açılabilir.

☐ Tezimin …… yıl süreyle erişime açılmasını istemiyorum. Bu sürenin sonunda uzatma için başvuruda bulunmadığım takdirde, tezimin tamamı her yerden erişime açılabilir.

T.C.
AĞRI İBRAHİM ÇEÇEN ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü

TEZ ONAY FORMU

KATUGAMPOLA KESİRLİ İNTEGRALİ İLE ELDE EDİLEN BAZI BULGULAR

Dr. Öğr. Üyesi Mustafa GÜRBÜZ danışmanlığında, Yakup TAŞDAN tarafından hazırlanan bu çalışma, 22/02/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından MATEMATİK Anabilim Dalı ANALİZ VE FONKSİYONLAR TEORİSİ Bilim Dalı'nda Yüksek Lisans tezi olarak **oybirliği / oy çokluğu** (…/…) ile kabul edilmiştir.

Başkan : Doç. Dr. Çetin YILDIZ — İmza :

Üye : Doç. Dr. Ahmet O. AKDEMİR — İmza :

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Mustafa GÜRBÜZ — İmza :

Yukarıdaki sonuç;

Enstitü Yönetim Kurulu …/…/201.. tarih ve …. / ……. nolu kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. İbrahim HAN
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildiriş, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

KATUGAMPOLA KESİRLİ İNTEGRALİ İLE ELDE EDİLEN BAZI BULGULAR

YAKUP TAŞDAN

Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Mustafa GÜRBÜZ

Bu tez dört ana bölümden oluşmaktadır. Bu bölümlerin birincisi giriş bölümü olup eşitsizlik kavramı, konveks fonksiyonlar ve kesirli analizin tarihçesi detaylı bir şekilde araştırılmış ve gerekli bilgiler verilmiştir. İkinci bölümde literatürde iyi bilinen bazı fonksiyon çeşitleri, konveks fonksiyon sınıfları ve kesirli analiz konusunda bazı farklı yaklaşımlara yer verilmiştir. Üçüncü bölümde, çalışmalarda sıkça kullanılan Hermite-Hadamard ve Ostrowski eşitsizlikleri ile bazı lemma ve eşitsizlikler verilmiştir. Bulgular bölümü olan dördüncü bölümde ise Riemann-Liouville kesirli integral operatörü kullanılarak elde edilen bazı lemmalar genelleştirilerek Katugampola kesirli integral operatörü içeren lemmalar elde edilmiştir. Elde edilen bu lemmalar kullanılarak $p-$ konveks fonksiyon sınıfı için Hermite-Hadamard ve Ostrowski tipli yeni eşitsizlikler bulunmuştur.

2019, 45 sayfa

Anahtar Kelimeler: Hermite-Hadamard eşitsizliği, Ostrowski eşitsizliği, Konveks fonksiyon, $p-$ konveks fonksiyon, Riemenn–Liouville kesirli integrali, Katugampola kesirli integrali

ABSTRACT

SOME PROBLEMS OBTAINED BY KATUGAMPOLA INSULATED INTEGRAL

YAKUP TAŞDAN

Ağrı İbrahim Çeçen University
Institute for Graduate Studies in Science and Technology
Department of Mathematics
Master Thesis

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Mustafa GÜRBÜZ

This thesis consists of four main parts.

The first of these chapters is the introductory chapter, in which the notion of inequality, convex functions, and the history of fractional analysis are explored in detail and necessary information is given. In the second part, some types of functions, convex function classes and some different approaches on fractional analysis well-known in the literature are given. In the third chapter, Hermite-Hadamard and Ostrowski inequalities and some lemma and inequalities which are frequently used in studies are given. In the fourth section which is finding section, lemmas containing Katugampola fractional integral operator have been obtained by using Riemann-Liouville fractional integral operator. Using these lemmas, new inequalities of Hermite-Hadamard and Ostrowski type were found for p - convex function class.

2019, 45 pages

Key Words: Hermite-Hadamard inequality, Ostrowski inequality, Convex function, p −convex function, Riemenn-Liouville fractional integrals, Katugampola fractional integrals

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans çalışmamdan önce ne yapmam konusunda beni yüreklendiren, çalışmam esnasında tez konumu belirlememe yardımcı olarak bu konuda çalışmamı sağlayan, engin bilgileri ile sürekli bana yol gösteren, boş zamanlarını bile benim çalışmam için ayıran, benim için bir ağabey gibi olan, saygı kelimesini sonuna kadar hak eden saygıdeğer danışman hocam,

Sayın Dr. Öğr. Üyesi Mustafa GÜRBÜZ'e,

Öğrenim hayatım boyunca bana maddi ve manevi desteklerini hiç bir zaman eksiltmeyen ve beni ayakta tutan en değerli kavram olan sevgili

AİLEM'e

Öğrenimim boyunca benden manevi desteklerini hiçbir zaman eksik etmeyen amcam

Sayın Cimşit TAŞDAN'a

Yüksek lisans sürecinde bana sürekli destek olan sevgili arkadaşım Mukaddes GÜRBÜZ'e ve sevgili yeğenim Çiğdem ULUÇ'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Yüksek lisans çalışmasını yapmamı en çok isteyen fakat şuan aramızda olamayan Sevgili Kardeşim,

Halil SEZER'e

atfediyorum.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\Gamma(x)$	Gamma fonksiyonu
$\beta(m,n)$	Beta fonksiyonu
$\beta_x(m,n)$	Tamamlanmamış Beta fonksiyonu
${}_2F_1\ (a,b;c,z)$	Hipergeometrik fonksiyon
${}_p\tilde{F}_q\ [a_1,\dots,a_p;b_1,\dots,b_q;z]$	Düzenlenmiş hipergeometrik fonksiyon
$<$	Küçüktür
$>$	Büyüktür
$\leq$	Küçük veya eşittir
$\geq$	Büyük veya eşittir
$\in$	Elemanıdır
$\subset$	Alt Küme
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
I	$\mathbb{R}$'de bir aralık
I°	I kümesinin içi
$L_1([a,b])$	$[a,b]$ aralığında türevlenebilen fonksiyonların kümesi
f'	f Fonksiyonunun birinci mertebeden türevi
f''	f Fonksiyonunun ikinci mertebeden türevi
$SX(h,I)$	$h-$ konveks fonksiyonların sınıfı
$SV(h,I)$	$h-$ konkav fonksiyonların sınıfı
$K_m(b)$	$m-$ konveks fonksiyonların sınıfı
$K_m^\alpha(b)$	$(\alpha,m)-$ konveks fonksiyonların sınıfı
K_s^2	İkinci anlamda $s-$konveks fonksiyonların sınıfı
max	Maksimum
min	Minimum

$X_c^p(a,b)$	$[a,b]$aralığında kompleks değerli Lebesque anlamında ölçülebilir fonksiyonların kümesi
$J_{a+}^{\alpha}f(x)$	Sol Riemann – Liouville kesirli integrali
$J_{b-}^{\alpha}f(x)$	Sağ Riemann – Liouville kesirli integrali
$I_{\alpha}^{a}f(x)$	Sağ Uyumlu kesirli integrali
${}^{b}I_{\alpha}\ f(x)$	Sağ Uyumlu kesirli integrali
$I_{a^+}^{\alpha}f(x)$	Sol Hadamard kesirli integrali
${}^{\rho}I_{b-}^{\alpha}f(x)$	Sağ Katugampola kesirli integrali
${}^{\rho}I_{a+}^{\alpha}f(x)$	Sol Katugampola kesirli integrali

ŞEKİLLER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Matematiğin bütün alanlarında önemli bir rol alan ve aktif bir araştırma alanına sahip olan Eşitsizlik kavramı, birçok araştırmacının ilgi odağı haline gelmiştir. Özellikle 19. yüzyıldan sonra matematikte önemli bir alana sahip olmaya başlamıştır. Hardy *et al.* (1952) tarafından yazılan Inequalities adlı kitap bu alanda yapılan ilk temel çalışmadır. Fizik, mühendislik gibi alanlarda çeşitli bilim dallarında uygulamaları olan eşitsizlik teorisi özellikle birçok araştırmacı tarafından yoğun bir çalışma alanı olmuştur. Yıllar içerisinde eşitsizlik teorisi ile ilgili Inequalities (Hardy *et al.* 1952), Classical and New Inequalities in Analysis (Mitrinovic *et al.* 1993), Analytic Inequalities (Mitrinovic and Vasic 1970), Convex Functions Partial Orderings and Statistical Applications (Pečarić and Tong, 1992), Mathematical Inequalities (Pachpate, 2005), Selected Topics on Hermite – Hadamard Inequalities Applications (Dragomir and Pearce, 2000) isimli kitaplar yazılmış olup çeşitli araştırmacılar tarafından günümüzde de yeni kitaplar yazılmaktadır. Konveks fonksiyonlar eşitsizlik teorisinin gelişmesinde önemli rol oynayan kavramlardan biridir.

Başlangıcı M.Ö. 250 yılında Archimedes'in ünlü π değerini hesaplamasına dayanan Konveks fonksiyonların başlangıcı 19. yüzyılın sonu olarak belirtilmektedir. 1881 yılında Hermite tarafından bulunan bir sonucun, Mathesis isimli dergide yayınlanmasıyla konvekslik kavramı ilk kez ortaya çıkmıştır. 1893 yılında Hadamard'ın çalışmalarında da konvekslik kavramına rastlansa da J.L.W.V. Jensen tarafından 1905-1906 yıllarında yapılan çalışmalarda konveks fonksiyonlarla ilgili sistematik olarak ilk çalışmalara rastlanmaktadır.

Matematiksel eşitsizliklerin amacı değeri bilinmeyen bazı fonksiyonları değerini bildiğimiz bazı fonksiyonlarla alttan ve üstten sınırlamaktır. Böylece bu fonksiyonların istenilen noktalardaki yaklaşık değerinin bulunması sağlanır.

Bu çalışmada kullanılacak olan bir başka konuda kesirli hesaptır. Matematik analizin hem eski hem de modern bir araştırma konusu olan kesirli analizin başlangıcı diferansiyellenme teorisinin ortaya çıkışına dayanmaktadır. Klasik analizin bir genellemesidir. Fakat klasik analiz gibi yorumlanamaması ve yapısındaki karmaşıklıktan dolayı bu alandaki çalışmaları ertelenmiştir. Kesirli analizin yerel ve noktasal bir büyüklükle ilgilenmemesi kesirli analizin dikkat çekici bir konu haline gelmesini sağlamıştır. Doğanın gerçekliğini daha iyi ifade eder. Doğanın daha iyi yorumlanması ve ifade edilebilmesi için bu konunun bilim ve mühendislikte ön plana çıkarılması gerekir.

Kesirli analiz kavramı ilk kez Leibniz'e L'Hospital tarafından 1965 yılında yazılan bir mektupta $\frac{d^n y}{dx^n}$ notasyonunun $n = \frac{1}{2}$ için ne olacağını sormuş bunun üzerine Leibniz "Bunun bir paradoksa yol açacağını, ama birgün mutlaka önemli sonuçlar vereceğini" ifade etmiştir. Bu yazışmalarla beraber kesirli analiz başlamıştır.

Kesirli analiz için çalışmalar Leibniz ve L'Hospital'in ilk çalışmalarından sonra devam etmiştir. Fourier, Abel, Euler, Laplace Lacroix, Riemann, Liouville, Grünwald, Letnikov gibi öncü birçok matematikçi kesirli analiz ve matematiksel sonuçlarıyla ilgilenmişlerdir.

L'Hospital'in sorusundan motive olarak, kesirli türev ve kesirli integral kavramını ilk ortaya atan matematikçi olarak Liouville gösterilir. 1819 yılında Lacroix tarafından kesirli türev düşüncesi ile ilgili ilk makale yayımlanmıştır. Daha sonra Euler, kesirli türevi yeniden tanımlamıştır. 17. yüzyıldan itibaren birçok matematikçinin kesirli türev ve kesirli integrasyon kavramlarını genelleştirmesiyle bu konuda geniş bir çalışma sahası açılmıştır.

Geçmişte tamsayı mertebeden modellerin kullanılmasının nedeni kesirli diferansiyel denklemlerin çözümlerinin bulunmamasıydı. Fakat artık kesirli türev ve integrallerin dahil olduğu problemleri çözmek için geniş çapta çalışmalar yapılmıştır. Kesirli mertebeden türev, tamsayı mertebeli diferansiyel denklemlerin bazı fiziksel olayları açıklamadaki eksik kalan yanlarını kapatmakla beraber fiziksel olayların karakterinin anlaşılmasında da büyük rol sahibidir. Yapılan araştırmalar neticesinde keyfi mertebeli türev ve integral kavramının gerçek dünyada karşımıza çıkan bir cismi veya modeli tanımlamakta tamsayı modellere göre daha doğru sonuçlar verdiği tespit edilmiştir. Kesirli türevlerin bu avantajı, nesnelerin elektriksel ve mekanik özelliklerinin matematiksel modellemelerinde, elektro – analitik kimya, akışkanlar teorisi, elektrik devreleri, gibi birçok alanda kullanılmaktadır.

Bu alanda çalışma yapan yazarlar genelde kendi özel gösterim ve kavramları kullanmışlardır. Kesirli analizde fazlaca kavram ve tanımlar elde edilmiştir. Riemann-Liouville kesirli integral, Uyumlu kesirli integral, Katugampola kesirli integral bu kavramlarda en çok bilinenlerdir.

Günümüzde kesirli analiz sayısal analiz, ısı iletimi, elektrik bilimi, mekanik, fraktallar gibi pek çok alanda uygulamalara sahiptir.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1 Genel Kavramlar

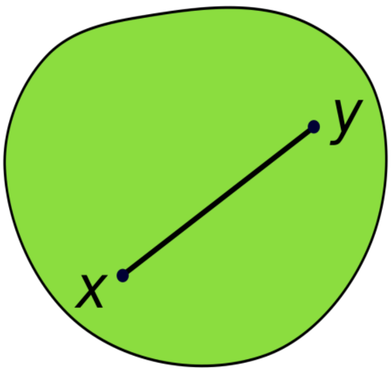
Bu bölümde çalışmamız esnasında bize yol gösterecek bazı tanımlara yer verilecektir.

Tanım 2.1.1. Konveks Küme:

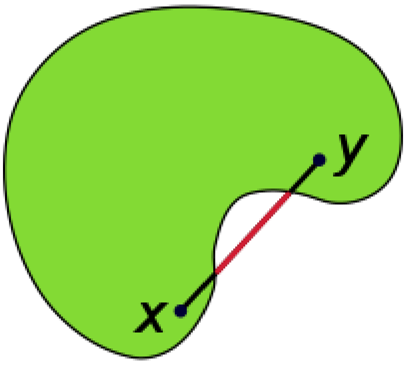
L bir lineer uzay $A \subseteq L$, x ve y, A kümesinin keyfi elemanları olmak üzere

$$B = \{z \in L: z = \alpha x + (1-\alpha)y, \quad 0 \leq \alpha \leq 1\} \subseteq A$$

oluyorsa A kümesine konveks küme denir. Eğer $z \in B$ ise $\alpha x + (1-\alpha)y$ eşitliğindeki x ve y'nin katsayıları için $\alpha + (1-\alpha) = 1$ bağıntısı her zaman geçerlidir. Bu nedenle konveks küme tanımındaki $\alpha + (1-\alpha) = 1$ bağıntısı yerine $\alpha + \beta = 1$ eşitliğini sağlayan ve negatif değerler olmayan α, β reel sayıları yazılabilir. Geometrik olarak yorumladığımızda bir kümeden alınan herhangi iki elemanı uç noktaları kabul eden doğru parçası bu kümenin içinde kalıyorsa konveks küme denir (Bayraktar, 2000).



Şekil 1 Konveks küme



Şekil 2 Konveks olmayan küme

Tanım 2.1.2. $\boldsymbol{X_c^p(a,b)}$ **Uzayı :**

$X_c^p(a,b)$ uzayı $(c \in \mathbb{R},\ 1 \le p \le \infty)$ karmaşık değerli Lebesque değerli f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında olsun. $\|f\|x_c^p < \infty$ normunun tanımı

$$\|f\|x_c^p - \left(\int_a^b |t^c f(t)|^p \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

şeklindedir. Burada $1 \le p \le \infty, c \in \mathbb{R}$ ve $p = \infty$ için

$$\|f\|x_c^p = ess \sup_{a \le t \le b} [t^c |f(t)|] \qquad (c \in \mathbb{R})$$

şeklindedir (Kilbas, 2001).

Tanım 2.1.3. Gamma Fonksiyonu:

Euler'e göre gamma fonksiyonu

$n > 0$ için

$$\Gamma(\mathrm{n}) = \int_0^\infty e^{-u} u^{n-1} du$$

şeklinde ifade edilir (Kannappan, 2009).

Bu integral $n > 0$ için yakınsaktır. Gamma fonksiyonunun en önemli özelliklerinden biri $n > 0$ ve $n = 0,1,2, \dots \dots$ için

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(\mathrm{n}) = \mathrm{n}!$$

şeklindedir (Samko *et al.* 1993).

Tanım 2.1.4. Beta Fonksiyonu:

Beta fonksiyonu,

$$\beta(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt, \qquad x,y > 0$$

şeklindedir (Dragomir *et al.* 2000).

Bu eşitlik Euler tipli Beta fonksiyonu ya da birinci çeşit Euler integrali olarak adlandırılır.

Gamma ve Beta fonksiyonları arasında bulunan

$$\beta(m,n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \quad m,n > 0$$

ilişkisi literatürde sıkça kullanılmaktadır (Rainville, 1973).

Tanım 2.1.5. Tamamlanmamış Beta Fonksiyonu:

$m,n > 0$ ve $0 < x \leq 1$ için

$$\beta_x(m,n) = \beta(x;m,n) = \frac{1}{\beta(m,n)} \int_0^x t^{m-1}(1-t)^{n-1}dt$$

Şeklinde tanımlanan β fonksiyonuna tamamlanmamış Beta fonksiyonu denir (Majumder and Bhattcharjee, 1973).

Erdélyi *et al.* (1981), Whittaker'in tanımladığı hipergeometrik fonksiyonu Tanım 2.1.6'daki gibi ifade etti:

Tanım 2.1.6. Hipergeometrik Fonksiyon:

$$
{}_2F_1\ (a,b;c,z)
$$
$$
= \frac{1}{\beta(b,b-c)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a}dt\,,\ \ c>b>0,\ \ |z|<1
$$

şeklinde tanımlanır (Erdélyi *et al.* 1981).

Tanım 2.1.7. Düzenlenmiş Hipergeometrik Fonksiyon:

$$
{}_p\tilde{F}_q\ \left[a_1,\dots,a_p;b_1,\dots,b_q;z\right] \equiv \frac{{}_pF_q\ \left[a_1,\dots,a_p;b_1,\dots,b_q;z\right]}{\Gamma(\mathrm{b}_1)\dots\Gamma\left(\mathrm{b}_\mathrm{q}\right)}
$$

şeklinde tanımlanır (Shiba and Takayanagi, 2014).

2.2 Bazı Konveks Fonksiyon Sınıfları

Bu bölümde literatürde iyi bilinen bazı konveks fonksiyon sınıflarının tanımları verilecektir.

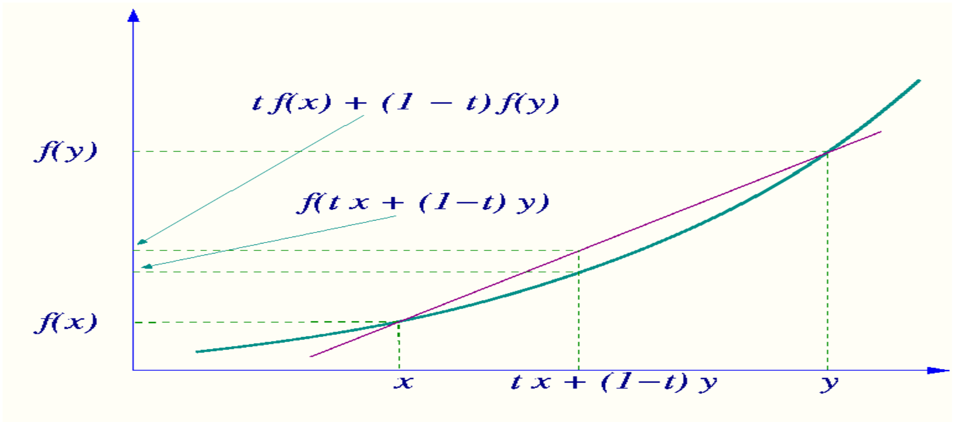
Tanım 2.2.1. Konveks Fonksiyon:

$I,\mathbb{R}$'de bir aralık ve $f: I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere her $x,y \in I$ ve $\alpha \in [0,1]$ için,

$$
f(\alpha x+(1-\alpha)y) \leq \alpha f(x)+(1-\alpha)f(y)
$$

şartını sağlayan fonksiyona konveks fonksiyon denir (Pečarić and Tong 1992).

Konveks fonksiyonun geometrik ifadesi Şekil 3'te gösterilmiştir.



Şekil 3 Konveks fonksiyon

Şekil 3'e göre konveks fonksiyonun tanım kümesinden (ℝ'de bir aralık) seçilen herhangi iki elemanın lineer bileşiminin görüntüsü, bu iki elemanın görüntülerinin lineer bileşiminden küçük veya eşit olmak zorundadır.

Teorem 2.2.1. f, (a, b) aralığında türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Bu fonksiyonun (a, b) aralığında konveks olması için gerek ve yeter şart f' fonksiyonunun artan olmasıdır (Pečarić *et al.* 1992).

Teorem 2.2.2. f fonksiyonunun I açık aralığında ikinci türevi varsa, f fonksiyonunun bu aralık üzerinde konveks olması için gerek ve yeter şart $x \in I$ için

$$f''(x) \geq 0$$

olmasıdır (Mitrinovic and Vasic, 1970).

Tanım 2.2.2. J – Konveks Fonksiyon:

I, ℝ'de bir aralık olmak üzere her $x, y \in I$ için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

şartını sağlayan fonksiyona $J-$konveks fonksiyon denir (Mitrinovic and Vasic, 1970).

Tanım 2.2.3. Quasi Konveks Fonksiyon:

$f: S \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $S \subset \mathbb{R}$ boştan farklı konveks küme olsun. $\forall x, y \in$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq max\{f(x), f(y)\}$$

oluyorsa f fonksiyonuna $quasi -$ konveks fonksiyon denir (Dragomir, 1998).

Tanım 2.2.4. $\boldsymbol{m} -$ Konveks Fonksiyon:

$f: [0,1] \to \mathbb{R}$ ve $b > 0$ olsun. Her $x, y \in [0, b], t \in [0,1]$ ve $m \in [0,1]$ için

$$f(tx + m(1-t)y) \leq tf(x) + m(1-t)f(y)$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna $m -$ konveks fonksiyon denir (Toader, 1984).

$f(0) \leq 0$ için $[0, b]$ aralığında tanımlı tüm $m -$ konveks fonksiyonların sınıfı $K_m(b)$ ile gösterilir. Eğer $m = 1$ alınırsa $[0, b]$ üzerinde f fonksiyonu konveks fonksiyon tanımına dönüşür.

Tanım 2.2.5. $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{m}) -$ Konveks Fonksiyon:

$f: [0, b] \to \mathbb{R}$ ve $b > 0$ olsun. Her $x, y \in [0, b], t \in [0,1]$ ve $(\alpha, m) \epsilon [0,1]^2$ için

$$f(tx + m(1-t)y) \leq t^{\alpha} f(x) + m(1-t^{\alpha})f(y)$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna $(\alpha, m) -$konveks fonksiyon denir (Miheşan, 1993).

$f(0) \leq 0$ için $[0, b]$ aralığında tanımlı tüm $(\alpha, m) -$ konveks fonksiyonların sınıfı $K_m^{\alpha}(b)$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.6. Godunova–Levin Fonksiyonu:

$f: I \to \mathbb{R}$ negatif olmayan bir fonksiyon $x, y \in I, \lambda \in (0,1)$ olmak üzere

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \frac{f(x)}{\lambda} + \frac{f(y)}{1-\lambda}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna Godunova – Levin fonksiyonu denir. Godunova – Levin fonksiyonu $Q(I)$ ile gösterilir (Gudunova and Levin, 1985).

Tanım 2.2.7. Birinci Anlamda $s -$ Konveks Fonksiyon:

$\alpha, \beta \geq 0,\ \alpha^s + \beta^s = 1$ ve $s \in (0,1]$ olmak üzere $u, v \in \mathbb{R}_+$ için $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f(\alpha u + \beta v) \leq \alpha^s f(u) + \beta^s f(v)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna birinci anlamda $s -$ konveks fonksiyon denir. Bu fonksiyonlar K_s^1 ile gösterilir. Eşitsizlik yön değiştirirse f fonksiyonu birinci anlamda $s -$ konkav fonksiyon olur (Albrycht and Orlicz, 1962).

Tanım 2.2.8. İkinci Anlamda $s -$ Konveks Fonksiyon:

$\alpha, \beta \geq 0,\ \alpha + \beta = 1$ ve $s \in (0,1]$ olmak üzere tüm $u, v \in \mathbb{R}_+$ için $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f(\alpha u + \beta v) \leq \alpha^s f(u) + \beta^s f(v)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna ikinci anlamda $s -$ konveks fonksiyon denir. Bu fonksiyonların sınıfı K_s^2 ile gösterilir. Eşitsizlik yön değiştirdiği taktirde f fonksiyonuna ikinci anlamda $s -$ konkav fonksiyon denir (Breckner, 1978).

Tanım 2.2.9. *P* – Fonksiyonu:

$f: I \to \mathbb{R}$ negatif olmayan bir fonksiyon, $x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f(tx + (1-t)y) \leq f(x) + f(y)$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna P – fonksiyonu veya $P(I)$ sınıfına aittir denir (Dragomir *et al.* 1995).

Tanım 2.2.10. $\boldsymbol{p-}$ **Konveks Fonksiyon:**

$I \subset (0,\infty)$ ve $p \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $f: I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f\left([tx^p + (1-t)y^p]^{\frac{1}{p}}\right) \le tf(x) + (1-t)f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa $f -$ fonksiyonuna $p -$ konveks fonksiyon denir (İşcan, 2016).

$P -$ fonksiyonla $p -$ konveks fonksiyon karıştırılmamalıdır. Burada $p -$ konveksliğin $p = 1$ için pozitif bir kümede tanımlı konveks fonksiyon tanımına, $p = -1$ için pozitif bir kümede tanımlı harmonik konveks fonksiyon tanımına indirgendiği kolayca görülür.

Tanım 2.2.11. $\boldsymbol{h}$ **- Konveks Fonksiyon:**

$h: J \to \mathbb{R}$ negatif değerler almayan bir fonksiyon ve $h \neq 0$ olmak üzere. $f: I \to \mathbb{R}$ negatif olmayan fonksiyonu her $x, y \in I$ ve $\alpha \in (0,1)$ için

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \le h(\alpha)f(x) + h(1-\alpha)f(y)$$

şartını sağlıyorsa f fonksiyonuna h - konveks fonksiyon veya $SX(h, I)$ sınıfına aittir denir (Varošanec, 2007).

Tanım 2.2.12. Logaritmik Konveks Fonksiyon:

$I, \mathbb{R}$' de bir aralık $f: I \to [0,\infty)$ bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in I$ ve $\alpha \in [0,1]$ için,

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \le [f(x)]^{\alpha}[f(y)]^{1-\alpha}$$

eşitsizliği sağlanırsa, f fonksiyonuna log – konvekstir denir. $f = exp(\log f)$ olduğundan log – konveks fonksiyon konvekstir. Fakat tersi her zaman doğru değildir (Pečarić and Tong, 1992).

Tanım 2.2.13. Geometrik Konveks Fonksiyon:

$f: I \subset \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ fonksiyonu verilsin. Eğer f fonksiyonu, her $x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f(x^t y^{1-t}) \leq [f(x)]^t [f(y)]^{1-t}$$

eşitsizliği sağlanırsa, f fonksiyonuna geometrik konveks fonksiyon denir (Zhang, *et al.* 2012).

2.3 Kesirli Analize Farklı Yaklaşımlar

Bu bölümde kesirli analiz alanında çalışma yapmış ünlü matematikçilerin çalışmaları hakkında bilgi verilmiştir.

Tanım 2.3.1. (Abel'e Göre İntegral Tanımı)

Kesirli operatörlerin ilk kullanımı 1823 yılında Abel tarafından verilmiştir. Abel Tautochrone probleminin formülasyonundan ortaya çıkan bir integral denkleminin çözümünde kesirli hesaplamaları uygulamıştır.

Bu problem sürtünmesiz bir eğri üzerinde kayan bir cismin iniş süresinin o cismin başlangıç noktasından bağımsız olduğunu belirtir.

Abel'in birinci ve n. tip integral denklemleri sırasıyla

$$f(x) = \int_0^x \frac{u(t)}{\sqrt{x-t}} dt$$

ve

$$u(x) = f(x) + \int_0^x \frac{u(t)}{\sqrt{x-t}} dt$$

şeklinde ifade edilir. Burada $f(x)$ sürekli bir fonksiyon ve T sabit olmak üzere $0 \leq x, t \leq T$ dir. Bununla birlikte Abel'in $0 < \alpha < 1$ olmak üzere genelleştirilmiş birinci ve n. tip integral denklemleri sırasıyla

$$f(x) = \int_0^x \frac{u(t)}{(x-t)^\alpha} dt$$

ve

$$u(x) = f(x) + \int_0^x \frac{u(t)}{(x-t)^\alpha} dt$$

şeklinde ifade edilir. Bu genelleştirilmiş denklemler ise kesirli integral olarak göz önüne alınabilir (Ross, 1977).

Tanım 2.3.2. (Liouville'ye Göre Kesirli İntegral Tanımı)

Kesirli analiz konusunda ilk çalışmaları yapan Liouville'dir. İki tanım üzerinden gitmiştir:

1.tanım bazı γ lar için yakınsak olması gereken sonsuz serileri içermektedir. Bu tanımda Liouville keyfi γ mertebeden türevleri yorumlamış fakat serilerin yakınsak olması koşulu bu tanımı kısıtlamıştır.

2.tanım da ise Liouville, gamma integralinden yararlanarak $x\ ve\ \alpha$ sayılarının pozitif olması koşulu ile $x^{-\alpha}$ fonksiyonunun kesirli türevini almayı başarmıştır. Bu tanımda

$$\int_0^\infty u^{-\alpha} e^{-xu} du$$

integralinde $t = xu$ değişken dönüşümü yapıldığında

$$\int_0^\infty u^{-\alpha} e^{-xu} du = \int_0^\infty \left(\frac{t}{x}\right)^{\alpha-1} e^{-t} \frac{1}{x} dt = \frac{1}{x^\alpha} \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt$$

integrali elde edilir. $\Gamma(\alpha)$ integrali uyarınca bu denklem

$$x^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty u^{-\alpha} e^{-xu} du$$

şeklinde yazılabilir (El-Nabulsi and Torres, 2007).

Tanım 2.3.3. (Cauchy'e Göre Kesirli İntegral Tanımı)

Cauchy'nin kesirli integral tanımı

$$f_{+}^{(\alpha)} = \int f(x)\frac{(t-x)^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)}dx = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\int (t-x)^{-\alpha-1}f(x)dx$$

şeklindedir (Baeumer and Meerschaert, 2001).

Tanım 2.3.4. (Weyl'e Göre Kesirli İntegral Tanımı)

Weyl'in kesirli integral tanımları ise ileriye doğru ve geriye doğru integrasyon olmak üzere sırasıyla

$$
\begin{aligned}
{}_{x}W_{\infty}^{\alpha} &= \left({}_{x}I_{\infty}^{\alpha}\right)f(x) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{x}^{\infty}(u-x)^{\alpha-1}f(u)du
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
{}_{-\infty}W_{x}^{\alpha} &= \left({}_{-\infty}I_{x}^{\alpha}\right)f(x) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-\infty}^{x}(x-u)^{\alpha-1}f(u)du
\end{aligned}
$$

şeklinde tanımlanır (Miller, 1975).

Tanım 2.3.5. (Riemann – Liouville Kesirli İntegrali)

$f \in L_1[a,b]$ olmak şartıyla $J_{a+}^{\alpha}f$ ve $J_{b-}^{\alpha}f$ Riemann-Liouville kesirli integrallerinin $\alpha > 0$ ve $a \geq 0$ için tanımları sırasıyla

$$J_{a+}^{\alpha}f = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{a}^{x}(x-t)^{\alpha-1}f(t)dt, \qquad x > a$$

ve

$$J_{b-}^{\alpha}f = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{x}^{b}(t-x)^{\alpha-1}f(t)dt, \qquad x < b$$

dir. Burada $\Gamma(\alpha) = \int_{0}^{\infty} e^{-t}u^{\alpha-1}du$

$$J_{a+}^{0}f(x) = f(x)$$

ve

$$J_{b-}^{0} f(x) = f(x)$$

eşitlikleri geçerlidir (Kilbas *et al*. 2006).

Örnek 2.3.1 $\mu > 1$ olmak üzere $f(t) = t^{\mu}$ fonksiyonu için

$$ {}_0D_t^{-v} = \frac{1}{\Gamma(v)} \int_0^t (t-\xi)^{v-1} f(\xi) d\xi$$

$$= \frac{1}{\Gamma(v)} \int_0^t (t-\xi)^{v-1} \xi^{\mu} d\xi$$

$$= \frac{t^{v-1}}{\Gamma(v)} \int_0^t \left(1-\frac{\xi}{t}\right)^{v-1} \xi^{\mu} d\xi$$

$$= \frac{t^{v}}{\Gamma(v)} \int_0^t \left(1-\frac{\xi}{t}\right)^{v-1} \xi^{\mu} \frac{1}{t} d\xi$$

$$= \frac{t^{v+\mu}}{\Gamma(v)} \int_0^t (1-y)^{v-1} \left(\frac{\xi}{t}\right)^{\mu} dy$$

$$= \frac{t^{v+\mu}}{\Gamma(v)} \int_0^t (1-y)^{v-1} (y)^{\mu} dy$$

$$= \frac{\Gamma(\mathrm{v})\Gamma(\mu+1)\mathrm{t}^{\mathrm{v}+\mu}}{\Gamma(\mathrm{v}+\mu+1)\Gamma(\mathrm{v})} \int_0^t \frac{\Gamma(\mathrm{v}+\mu+1)}{\Gamma(\mathrm{v})\Gamma(\mu+1)} (1-y)^{v-1} y^{\mu} dy$$

$$= \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mathrm{v}+\mu+1)} \mathrm{t}^{\mathrm{v}+\mu}$$

eşitliği geçerli olur (Miller, 2003).

Tanım 2.3.6. (Uyumlu (Conformable) Kesirli İntegral)

$\alpha \in (n, n+1], n = 0, 1, 2, \dots \dots, \beta = \alpha - n$ $a, b \in R$ ve $a < b$ ve $f \in L[a, b]$ olsun. $\alpha > 0$ için α. mertebeden sol uyumlu kesirli integral

$$(I_{\alpha}^{a} f)(t) = \frac{1}{n!} \int_a^t (t-x)^n (x-a)^{\beta-1} f(x) dx, \qquad t > a$$

şeklinde ve α. mertebeden sağ uyumlu kesirli integral

$$\left({}^{b}I_{\alpha}\, f\right)(t) = \frac{1}{n!}\int_{t}^{b}(x-t)^{n}(b-x)^{\beta-1}f(x)dx, \qquad t<b$$

şeklinde tanımlanır (Abdeljawad, 2015).

Tanım 2.3.7. (Caputo Kesirli Türev)

n sayısı α dan büyük en küçük tamsayı olmak üzere

$${}_{a}^{C}D_{t}^{\alpha}f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{a}^{t}\frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}}d\tau, \quad (n-1\leq\alpha<n)$$

ifadesi Caputo'nun kesirli türev tanımıdır (Caputo, 1967).

Tanım 2.3.8. (Local Kesirli İntegraller)

$f(x)\in C_{\alpha}(a,b)$ olmak üzere $f(x)$ fonksiyonunun α. mertebeden $[a,b]$ aralığında local kesirli integrali

$$I_{b}^{(\alpha)}f(x) = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{a}^{b}f(t)(dt)^{a} = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\lim_{\Delta t\to 0}\sum_{j=0}^{N-1}f(t_j)(\Delta t_j)^{a}$$

şeklindedir (Yang, 2011).

Tanım 2.3.9. (Üstel Çekirdekli Kesirli İntegraller)

$a,b\in\mathbb{R},\ a<b$ ve $f\in L[a,b]$ olsun. $\alpha\in(0,1)$ için α. mertebeden sol ve sağ üstel çekirdekli integralleri sırasıyla

$$I_{a}^{\alpha}f(x) = \frac{1}{\alpha}\int_{a}^{x}exp\left\{-\frac{1-\alpha}{\alpha}(x-s)\right\}f(s)ds, \qquad x>a$$

ve

$$I_{b}^{\alpha}f(x) = \frac{1}{\alpha}\int_{x}^{b}exp\left\{-\frac{1-\alpha}{\alpha}(s-x)\right\}f(s)ds, \qquad x<b$$

şeklinde tanımlanır (Kirane and Torabek, 2016).

Tanım 2.3.10. (Hadamard Kesirli İntegrali)

Hadamard kesirli integralinin $\alpha \in \mathbb{R}^+$ için sağ ve sol taraflı tanımları sırasıyla

$$\mathfrak{I}_{a+}^{\alpha}\varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{\varphi(t)}{\left(In\frac{x}{t}\right)^{1-\alpha}}\frac{dt}{t}, \qquad x > a > 0$$

$$\mathfrak{I}_{b-}^{\alpha}\varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b \frac{\varphi(t)}{\left(In\frac{t}{x}\right)^{1-\alpha}}\frac{dt}{t}, \qquad 0 < x < b.$$

şeklindedir. Burada Γ gamma fonksiyonudur (Kilbas *et al.* 2006).

Tanım 2.3.11. (Katugampola Kesirli İntegrali)

$[a, b] \subset \mathbb{R}$ sonlu aralık, $\alpha > 0$ ve $f \in X_c^p(a, b)$ olsun. Sağ ve sol taraflı Katugampola kesirli integral operatörleri $a < x < b$ ve $\rho > 0$ için sırasıyla

$${}^{\rho}I_{a+}^{\alpha}f(x) = \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{t^{\rho-1}}{(x^{\rho} - t^{\rho})^{1-\alpha}}f(t)dt$$

ve

$${}^{\rho}I_{b-}^{\alpha}f(x) = \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b \frac{t^{\rho-1}}{(t^{\rho} - x^{\rho})^{1-\alpha}}f(t)dt$$

şeklindedir (Katugampola, 2011; Katugampola, 2014).

Katugampola, 2014'te yapmış olduğu çalışmasında Teorem 2.3.1'i elde etti.

Teorem 2.3.1. $\alpha > 0$ ve $\rho > 0$ ise $x > a$ için,

$$\lim_{\rho \to 1} {}^{\rho}I_{a+}^{\alpha}f(x) = J_{a+}^{\alpha}f(x)$$

$$\lim_{\rho \to 0} {}^{\rho}I_{a+}^{\alpha}f(x) = \mathfrak{I}_{a+}^{\alpha}f(x)$$

benzer sonuçlar sağ taraflı operatörler içinde geçerlidir (Katugampola, 2014).

Bu tanımlar, yineli integral yaklaşımları, diferansiyel denklem yaklaşımı, karmaşık değişken yaklaşımı ve Weyl dönüşümü ile çeşitli şekillerde türetilmiştir. (Miller *et al*. 1993).

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde, çalışmamızda kullanılacak olan bazı teoremler, lemmalar, sonuç ve eşitsizlikler verilecektir.

3.1. Literatürde Mevcut Bazı Eşitsizlikler

Teorem 3.1.1. Hermite – Hadamard Eşitsizliği:

I, $\mathbb{R}$'de bir aralık, $a, b \in I$ ve $a < b$ olmak üzere $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bir konveks fonksiyon olsun. Bu şartlar altında

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

eşitsizliği literatürde Hermite – Hadamard eşitsizliği olarak bilinir (Pečarić and Tong 1992).

Teorem 3.1.2. Ostrowski Eşitsizliği:

$f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I° da türevlenebilir bir fonksiyon, $f' \in L[a,b]$ olacak şekilde I sınırlı olsun. $|f'(x)| \leq M$ ise $a < b$ ve $a, b \in I$ için,

$$\left|f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right| \leq M(b-a)\left[\frac{1}{4} + \frac{\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2}{(b-a)^2}\right]$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizliğe Ostrowski eşitsizliği denir. Burada $\frac{1}{4}$ bilinen en iyi sabittir (Ostrowski, 1938).

Teorem 3.1.3. İntegraller için Hölder Eşitsizliği:

$p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. f ve g, $[a,b]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar, $|f|^p$ ve $|g|^q$, $[a,b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir (Mitrinovic *et al.* 1993).

Hölder eşitsizliği

$$f(x)g(x) = \underbrace{f^{\frac{1}{p}}(x)}_{r(x)}\underbrace{f^{\frac{1}{q}}(x)g(x)}_{s(x)}$$

şeklinde seçilen r ve s fonksiyonlarına uygulanırsa Sonuç 3.1.1 elde edilir.

Sonuç 3.1.1. Power Mean Eşitsizliği:

$q \geq 1$ olsun. f ve g , $[a, b]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar $|f|$ ve $|g|^q, [a, b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|dx\right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |f(x)||g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir (Mitrinovic *et al.* 1993).

Teorem 3.1.4. Üçgen Eşitsizliği:

Herhangi x, y reel sayıları için

$$|x + y| \leq |x| + |y|,$$

$$\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|,$$

$$\big||x| - |y|\big| \leq |x + y|$$

ve tümevarım yöntemiyle

$$|x_1 + \cdots + x_n| \leq |x_1| + \cdots + |x_n|$$

eşitsizlikleri geçerlidir (Mitrinovic *et al.* 1993).

Teorem 3.1.5. İntegraller için Üçgen Eşitsizliği:

$f, [a, b]$ aralığında reel değerli sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx \qquad (a < b)$$

eşitsizliği geçerlidir (Mitrinovic *et al.* 1993).

3.2. Literatürde Mevcut Bazı Lemmalar ve Bu Lemmalar Yardımıyla Elde Edilen Eşitsizlikler

Alomari *et al.* 2010 yapmış oldukları çalışmalarda Ostrowski tipli sonuçlar veren Lemma 3.2.1'i elde etmişlerdir.

Lemma 3.2.1. $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, I^{\circ}$ üzerinde türevlenebilir bir fonksiyon, $a, b \in I$ ve $a < b$ olsun. $f' \in L[a,b]$ ise $x \in [a,b]$ için

$$f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

$$= \frac{(x-a)^2}{b-a}\int_0^1 tf'(tx+(1-t)a)dt - \frac{(b-x)^2}{b-a}\int_0^1 tf'(tx+(1-t)b)dt$$

eşitliği geçerlidir (Alomari *et al.* 2010).

Set, 2012 de yaptığı çalışmada Ostrowski tipli sonuçlar veren Lemma 3.2.2'yi elde etmiştir.

Lemma 3.2.2. $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, (a,b) üzerinde türevlenebilir fonksiyon ve $a < b$ olsun. Eğer $f' \in L[a,b]$ ise her $x \in [a,b]$ ve $\alpha > 0$ için

$$\frac{f(x)}{b-a}[(x-a)^{\alpha} - (b-x)^{\alpha}] - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{b-a}\left[J_{x^-}^{\alpha}f(a) + J_{x^+}^{\alpha}f(b)\right]$$

$$= \frac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a}\int_0^1 t^{\alpha}f'(tx+(1-t)a)dt - \frac{(b-x)^{\alpha+1}}{b-a}\int_0^1 t^{\alpha}f'(tx+(1-t)b)dt$$

eşitliği geçerlidir (Set, 2012).

Teorem 3.2.1. $f: [a,b] \subset [0,\infty) \to \mathbb{R}$, (a,b) üzerinde türevlenebilir fonksiyon, $a < b$ ve $f' \in L[a,b]$ olsun. Eğer $[a,b]$ aralığında $s \in (0,1]$ için $|f'|$ fonksiyonu ikinci anlamda s- konveks fonksiyon, $|f'(x)| \leq M$, $x \in [a,b]$ ve $\alpha > 0$ olmak şartıyla aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\left|\left(\frac{(x-a)^{\alpha}+(b-x)^{\alpha}}{b-a}\right)f(x)-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{b-a}\left[J_{x^-}^{\alpha}f(a)+J_{x^+}^{b}f(b)\right]\right|$$

$$\leq \frac{M}{b-a}\left(1+\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(s+1)}{\Gamma(\alpha+s+1)}\right)\left[\frac{(x-a)^{\alpha+1}+(b-x)^{\alpha+1}}{\alpha+s+1}\right].$$

Burada Γ Euler'in gamma fonksiyonudur (Set, 2012).

Teorem 3.2.2. $f:[a,b]\subset[0,\infty)\to\mathbb{R}$, (a,b) üzerinde türevlenebilir fonksiyon, $a<b$ ve $f'\in L[a,b]$ olsun. Eğer $[a,b]$ aralığında $s\in(0,1]$ için $|f'|^{q}$ fonksiyonu ikinci anlamda s- konveks fonksiyon, $|f'(x)|\leq M,\ x\in[a,b],\ q\geq 1$ ve $\alpha>0$ olmak şartıyla sıradaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\left|\left(\frac{(x-a)^{\alpha}+(b-x)^{\alpha}}{b-a}\right)f(x)-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{b-a}\left[J_{x^-}^{\alpha}f(a)+J_{x^+}^{b}f(b)\right]\right|$$

$$\leq M\left(\frac{1}{1+\alpha}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\frac{1}{\alpha+s+1}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\times\left(1+\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(s+1)}{\Gamma(\alpha+s+1)}\right)^{\frac{1}{q}}\left[\frac{(x-a)^{\alpha+1}+(b-x)^{\alpha+1}}{b-a}\right]$$

Burada Γ Euler'in gamma fonksiyonudur (Set, 2012).

Kavurmacı *et al.* (2011) yapmış oldukları çalışmada Lemma 3.2.3'ü elde etmişlerdir.

Lemma 3.2.3. $f:I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}, I^{\circ}$ üzerinde türevlenebilir fonksiyon, $a,b\in I$ ve $a<b$ olsun. Eğer $f'\in L[a,b]$ ise her $x\in[a,b]$ için

$$\frac{(x-a)f(a)+\ (b-x)f(b)}{b-a}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

$$=\frac{(x-a)^2}{b-a}\int_0^1(t-1)f'(tx+(1-t)a)dt$$

$$+\frac{(b-x)^2}{b-a}\int_0^1(1-t)f'(tx+(1-t)b)dt$$

eşitliği geçerlidir (Kavurmacı *et al.*, 2011).

Özdemir *et al.* 2012 yapmış oldukları çalışmada Lemma 3.2.4'ü buldular.

Lemma 3.2.4. $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, I^{\circ}$ üzerinde türevlenebilir fonksiyon, $a, b \in I$ ve $a < b$ olsun. Eğer $f' \in L[a,b]$ ise her $x \in [a,b]$ ve $\alpha > 0$ için

$$\frac{(x-a)^{\alpha} f(a) + (b-x)^{\alpha} f(b)}{b-a} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{b-a}\left[J_{x^-}^{\alpha} f(a) + J_{x^+}^{\alpha} f(b)\right]$$

$$= \frac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a} \int_0^1 (t^{\alpha}-1) f'(tx+(1-t)a)\,dt$$

$$+ \frac{(b-x)^{\alpha+1}}{b-a} \int_0^1 (1-t^{\alpha}) f'(tx+(1-t)b)\,dt$$

eşitliği geçerlidir (Özdemir *et al.*, 2012).

Teorem 3.2.3. $f: I \subset [0,\infty) \to \mathbb{R}, I^{\circ}$ üzerinde türevlenebilir bir fonksiyon, $f' \in L[a,b]$, $a, b \in I$ ve $a < b$ olsun. Eğer $[a,b]$ kapalı aralığında $s \in (0,1]$ için $|f'|$ fonksiyonu ikinci anlamda $s-$ konveks fonksiyon oluyorsa her $x \in [a,b]$ ve $\alpha > 0$ için sıradaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\left|\frac{(x-a)^{\alpha} f(a) + (b-x)^{\alpha} f(b)}{b-a} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{b-a}\left[J_{x^-}^{\alpha} f(a) + J_{x^+}^{\alpha} f(b)\right]\right|$$

$$\leq \frac{\alpha}{(s+1)(\alpha+s+1)}\left[\frac{(x-a)^{\alpha+1} + (b-x)^{\alpha+1}}{b-a}\right] |f'(x)|$$

$$+ \left[\frac{1}{s+1} - \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(s+1)}{\Gamma(\alpha+s+2)}\right]\left[\frac{(x-a)^{\alpha+1}|f'(a)| + (b-x)^{\alpha+1}|f'(b)|}{b-a}\right].$$

Burada Γ gamma fonksiyonudur (Özdemir *et al.*, 2012).

4. BULGULAR

Bu bölümde, Bölüm 3'te verilen lemmalar baz alınarak önce Ostrowski ve Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler veren lemmalar bulunmuştur. Ardından bu lemmalar kullanılarak yeni teoremler oluşturulmuştur. Çalışma boyunca bize kolaylık sağlayacak ifadeler aşağıda verilmiştir.

$$Y_f(\alpha,\rho;a,x,b)=\frac{\rho f(x)}{b-a}\left[(x^\rho-a^\rho)^\alpha+(b^\rho-x^\rho)^\alpha\right]$$
$$-\frac{\rho^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)}{b-a}\left[\,{}^\rho I_{x-}^\alpha f(a)+\,{}^\rho I_{x+}^\alpha f(b)\,\right]$$

$$T_f(\alpha,\rho;a,x,b)=\frac{\rho f(x)}{b-a}\left[(x^\rho-a^\rho)^\alpha f(a)+(b^\rho-x^\rho)^\alpha f(b)\right]$$

$$-\frac{\rho^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)}{b-a}\left[\,{}^\rho I_{x-}^\alpha f(a)+\,{}^\rho I_{x+}^\alpha f(b)\,\right]$$

4.1. Ostrowski Tipli Lemma ve Eşitsizlikler

Lemma 4.1.1. $f: I\subset(0,\infty)\to\mathbb{R}$, I° üzerinde türevlenebilir fonksiyon, $a,b\in I$ ve $a<b$ olsun. Eğer $f'\in L[a,b]$, $\alpha>0$ ve $\rho>0$ ise $x\in[a,b]$ için aşağıdaki eşitlik geçerlidir.

$$Y_f(\alpha,\rho;a,x,b)=\frac{(x^\rho-a^\rho)^{\alpha+1}}{b-a}\int_0^1\frac{t^\alpha f'\left(\left[tx^\rho+(1-t)a^\rho\right]^{\frac{1}{\rho}}\right)}{\left(tx^\rho+(1-t)a^\rho\right)^{1-\frac{1}{\rho}}}dt$$
$$-\frac{(b^\rho-x^\rho)^{\alpha+1}}{b-a}\int_0^1\frac{t^\alpha f'\left(\left[tx^\rho+(1-t)b^\rho\right]^{\frac{1}{\rho}}\right)}{\left(tx^\rho+(1-t)b^\rho\right)^{1-\frac{1}{\rho}}}dt.$$

İspat. Kısmi integrasyon yardımıyla

$$I_1=\int_0^1\frac{t^\alpha f'\left(\left[tx^\rho+(1-t)a^\rho\right]^{\frac{1}{\rho}}\right)}{\left(tx^\rho+(1-t)a^\rho\right)^{1-\frac{1}{\rho}}}dt$$

$$= \frac{\rho f(x)}{x^\rho - a^\rho} - \frac{\alpha\rho}{x^\rho - a^\rho}\int_0^1 t^{\alpha-1} f\left([tx^\rho + (1-t)a^\rho]^{\frac{1}{\rho}}\right)dt \tag{4.1}$$

bulunur. $[tx^\rho + (1-t)a^\rho]^{\frac{1}{\rho}} = u$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$I_1 = \frac{\rho f(x)}{x^\rho - a^\rho} - \frac{\alpha\rho}{x^\rho - a^\rho}\int_a^x \left(\frac{u^\rho - a^\rho}{x^\rho - a^\rho}\right)^{\alpha-1} \frac{\rho u^{\rho-1}}{x^\rho - a^\rho} f(u)du$$

$$= \frac{\rho f(x)}{x^\rho - a^\rho} - \frac{\alpha\rho^2}{(x^\rho - a^\rho)^{\alpha+1}}\int_a^x \frac{u^{\rho-1}}{(u^\rho - a^\rho)^{1-\alpha}} f(u)du$$

$$= \frac{\rho f(x)}{x^\rho - a^\rho} - \frac{\alpha\rho^2\Gamma(\alpha)}{(x^\rho - a^\rho)^{\alpha+1}\rho^{1-\alpha}}\ {}^\rho I_{x-}^\alpha f(a)$$

$$= \frac{\rho f(x)}{x^\rho - a^\rho} - \frac{\rho^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)}{(x^\rho - a^\rho)^{\alpha+1}}\ {}^\rho I_{x-}^\alpha f(a) \tag{4.2}$$

bulunur.

Benzer şekilde kısmi integrasyon yardımıyla

$$I_2 = \int_0^1 \frac{t^\alpha f'\left([tx^\rho + (1-t)b^\rho]^{\frac{1}{\rho}}\right)}{(tx^\rho + (1-t)b^\rho)^{1-\frac{1}{\rho}}}dt$$

$$= \frac{\rho f(x)}{x^\rho - b^\rho} - \frac{\alpha\rho}{x^\rho - b^\rho}\int_0^1 t^{\alpha-1} f'\left([tx^\rho + (1-t)b^\rho]^{\frac{1}{\rho}}\right)dt$$

bulunur. $[tx^\rho + (1-t)a^\rho]^{\frac{1}{\rho}} = u$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$I_2 = \frac{\rho f(x)}{x^\rho - b^\rho} - \frac{\alpha\rho}{x^\rho - b^\rho}\int_b^x \left(\frac{u^\rho - b^\rho}{x^\rho - b^\rho}\right)^{\alpha-1} \frac{\rho u^{\rho-1}}{x^\rho - b^\rho} f(u)du$$

$$= -\frac{\rho f(x)}{b^\rho - x^\rho} + \frac{\alpha\rho^2}{(b^\rho - x^\rho)^{\alpha+1}}\int_x^b \frac{u^{\rho-1}}{(b^\rho - u^\rho)^{1-\alpha}} f(u)du$$

$$= -\frac{\rho f(x)}{b^\rho - x^\rho} + \frac{\alpha\rho^2\Gamma(\alpha)}{(b^\rho - x^\rho)^{\alpha+1}\rho^{1-\alpha}}\ {}^\rho I_{x+}^\alpha f(b)$$

$$= -\frac{\rho f(x)}{b^\rho - x^\rho} + \frac{\rho^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)}{(b^\rho - x^\rho)^{\alpha+1}}\ {}^\rho I_{x+}^\alpha f(b) \tag{4.3}$$

bulunur. (4.2) ifadesi $\frac{(x^\rho - a^\rho)^{\alpha+1}}{b-a}$ ve (4.3) ifadesi $-\frac{(b^\rho - x^\rho)^{\alpha+1}}{b-a}$ çarpılır ve taraf tarafa toplanırsa

$$\frac{(x^\rho - a^\rho)^{\alpha+1}}{b-a}\int_0^1 \frac{t^\alpha f'\left([tx^\rho + (1-t)a^\rho]^{\frac{1}{\rho}}\right)}{(tx^\rho + (1-t)a^\rho)^{1-\frac{1}{\rho}}}dt$$

$$-\frac{(b^\rho - x^\rho)^{\alpha+1}}{b-a}\int_0^1 \frac{t^\alpha f'\left([tx^\rho + (1-t)b^\rho]^{\frac{1}{\rho}}\right)}{(tx^\rho + (1-t)b^\rho)^{1-\frac{1}{\rho}}}dt$$

$$=\frac{\rho f(x)(x^\rho - a^\rho)^\alpha}{b-a} - \frac{\rho^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)\, {}^\rho I_{x-}^\alpha f(a)}{b-a}$$

$$+\frac{\rho f(x)(b^\rho - x^\rho)^\alpha}{b-a} - \frac{\rho^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)\, {}^\rho I_{x+}^\alpha f(b)}{b-a}$$

elde edilir. İfade düzenlenirse

$$\frac{\rho f(x)}{b-a}[(x^\rho - a^\rho)^\alpha + (b^\rho - x^\rho)^\alpha] - \frac{\rho^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)}{b-a}\left[{}^\rho I_{x-}^\alpha f(a) + {}^\rho I_{x+}^\alpha f(b) \right]$$

$$=\frac{(x^\rho - a^\rho)^{\alpha+1}}{b-a}\int_0^1 \frac{t^\alpha f'\left([tx^\rho + (1-t)a^\rho]^{\frac{1}{\rho}}\right)}{(tx^\rho + (1-t)a^\rho)^{1-\frac{1}{\rho}}}dt$$

$$-\frac{(b^\rho - x^\rho)^{\alpha+1}}{b-a}\int_0^1 \frac{t^\alpha f'\left([tx^\rho + (1-t)b^\rho]^{\frac{1}{\rho}}\right)}{(tx^\rho + (1-t)b^\rho)^{1-\frac{1}{\rho}}}dt$$

elde edilir. Bulunan bu ifadeyle ispat tamamlanmış olur.

Hatırlatma 4.1.1. Lemma 4.1.1'de $\rho = 1$ alınırsa, Set'in (2012) elde ettiği Lemma 3.2.2'ye ulaşılır.

Hatırlatma 4.1.2. Lemma 4.1.1'de $\rho = 1$ ve $\alpha = 1$ alınırsa, Alomari *et al.* (2010)'nin elde ettiği Lemma 3.2.1'e ulaşılır.

Teorem 4.1.1. $f: I \subset (0,\infty) \to \mathbb{R}, I^\circ$ üzerinde türevlenebilir fonksiyon, $a, b \in I$, $a < b$ ve $f' \in L[a,b]$ olsun. I üzerinde $|f'|$ fonksiyonu $p-$konveks fonksiyon ve $|f'(x)| \leq M$ ise her $x \in I$ için sıradaki eşitsizlik yazılır.

$$\left|Y_f(\alpha,\rho;a,x,b)\right|$$

$$\leq M\frac{(x^\rho - a^\rho)^{\alpha+1}}{b-a}\{R(a)+S(a)\} + M\frac{(b^\rho - x^\rho)^{\alpha+1}}{b-a}\{R(b)+S(b)\}.$$

Burada

$$R(\lambda) = \frac{\lambda^{1-\rho}}{\alpha+2}\ {}_2F_1\ \left(\alpha+2, \frac{\rho-1}{\rho}; \alpha+3; 1-\frac{x^\rho}{\lambda^\rho}\right)$$

$$S(\lambda)=\frac{\lambda^{1-\rho}}{(\alpha+1)(\alpha+2)}\begin{bmatrix}(\alpha+2)\ {}_2F_1\ \left(\alpha+1,\frac{\rho-1}{\rho};\alpha+2;1-\frac{x^\rho}{\lambda^\rho}\right)\\ -(\alpha+1)\ {}_2F_1\ \left(\alpha+2,\frac{\rho-1}{\rho};\alpha+3;1-\frac{x^\rho}{\lambda^\rho}\right)\end{bmatrix}$$

ve $\rho>0,\alpha>0$ reel sayılarıdır.

İspat. Lemma 4.1.1 ve integraller için üçgen eşitsizliği kullanılarak

$$\left|Y_f(\alpha,\rho;a,x,b)\right|\le\ \frac{(x^\rho-a^\rho)^{\alpha+1}}{b-a}\int_0^1\frac{t^\alpha\left|f'\left([tx^\rho+(1-t)a^\rho]^{\frac{1}{\rho}}\right)\right|}{(tx^\rho+(1-t)a^\rho)^{1-\frac{1}{\rho}}}dt$$

$$+\frac{(b^\rho-x^\rho)^{\alpha+1}}{b-a}\int_0^1\frac{t^\alpha\left|f'\left([tx^\rho+(1-t)b^\rho]^{\frac{1}{\rho}}\right)\right|}{(tx^\rho+(1-t)b^\rho)^{1-\frac{1}{\rho}}}dt$$

bulunur.

$|f'|$ fonksiyonunun $p-$ konveksliği kullanılırsa

$$\left|Y_f(\alpha,\rho;a,x,b)\right|\le\ \frac{(x^\rho-a^\rho)^{\alpha+1}}{b-a}\int_0^1\frac{t^\alpha[t|f'(x)|+(1-t)|f'(a)|]}{(tx^\rho+(1-t)a^\rho)^{1-\frac{1}{\rho}}}dt$$

$$+\frac{(b^\rho-x^\rho)^{\alpha+1}}{b-a}\int_0^1\frac{t^\alpha[t|f'(x)|+(1-t)|f'(b)|]}{(tx^\rho+(1-t)b^\rho)^{1-\frac{1}{\rho}}}dt$$

$$=\frac{(x^\rho-a^\rho)^{\alpha+1}}{b-a}$$

$$\times\begin{Bmatrix}|f'(x)|\int_0^1 t^{\alpha+1}(tx^\rho+(1-t)a^\rho)^{\frac{1}{\rho}-1}\,dt\\ +|f'(a)|\int_0^1(t^\alpha-t^{\alpha+1})\,(tx^\rho+(1-t)a^\rho)^{\frac{1}{\rho}-1}dt\end{Bmatrix}$$

$$+\frac{(b^\rho-x^\rho)^{\alpha+1}}{b-a}$$

$$\times\begin{Bmatrix}|f'(x)|\int_0^1 t^{\alpha+1}(tx^\rho+(1-t)b^\rho)^{\frac{1}{\rho}-1}\,dt\\ +|f'(b)|\int_0^1(t^\alpha-t^{\alpha+1})\,(tx^\rho+(1-t)b^\rho)^{\frac{1}{\rho}-1}dt\end{Bmatrix}$$

elde edilir. Gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$\left|Y_f(\alpha,\rho;a,x,b)\right| \leq \frac{(x^\rho - a^\rho)^{\alpha+1}}{b-a}\{|f'(x)|R(a) + |f'(a)|S(a)\}$$
$$+\frac{(b^\rho - x^\rho)^{\alpha+1}}{b-a}\{|f'(x)|R(b) + |f'(b)|S(b)\}$$

$|f'(x)| \leq M$ ifadesi kullanılırsa

$$\left|Y_f(\alpha,\rho;a,x,b)\right|$$
$$\leq M\frac{(x^\rho - a^\rho)^{\alpha+1}}{b-a}\{R(a)+S(a)\} + M\frac{(b^\rho - x^\rho)^{\alpha+1}}{b-a}\{R(b)+S(b)\}.$$

Bulunan bu ifade ile ispat tamamlanmış olur.

Hatırlatma 4.1.3. Teorem 4.1.1'de $\rho = 1$ ve Set (2012)'in elde ettiği Teorem 3.2.1'de $s = 1$ alındığında aynı eşitsizlikler elde edilir.

Teorem 4.1.2. $f: I \subset (0,\infty) \to \mathbb{R}$, I° üzerinde türevlenebilir fonksiyon, $a,b \in I$, $a < b$ ve $f' \in L[a,b]$ olsun. I üzerinde $|f'|^q$ fonksiyonu p −konveks fonksiyon ve $|f'(x)| \leq M$ ise her $x \in I$ için sıradaki eşitsizlik yazılabilir.

$$\left|Y_f(\alpha,\rho;a,x,b)\right| \leq \frac{M}{b-a}\left(\frac{1}{\alpha q+1}\right)^{\frac{1}{q}}\left[(x^\rho - a^\rho)^{\alpha+1}K^{\frac{1}{r}}(a) + (b^\rho - x^\rho)^{\alpha+1}K^{\frac{1}{r}}(b)\right].$$

Burada

$$K(\lambda) = \frac{\rho(\lambda x)^{-\rho r}(-\lambda^{\rho+r}x^{\rho r} + \lambda^{\rho r}x^{\rho+r})}{\big(r-\rho(r-1)\big)(x^\rho - \lambda^\rho)}$$

ve $\rho > 0, \alpha > 0, r > 1, \frac{1}{r} + \frac{1}{q} = 1.$

İspat. Lemma 4.1.1 ve integraller için üçgen eşitsizliği kullanılırsa

$$\left|Y_f(\alpha,\rho;a,x,b)\right| \leq \frac{(x^\rho - a^\rho)^{\alpha+1}}{b-a}\int_0^1 \frac{t^\alpha\left|f'\left([tx^\rho + (1-t)a^\rho]^{\frac{1}{\rho}}\right)\right|}{(tx^\rho + (1-t)a^\rho)^{1-\frac{1}{\rho}}}dt$$

$$+\frac{(b^{\rho}-x^{\rho})^{\alpha+1}}{b-a}\int_0^1 \frac{t^{\alpha}\left|f'\left([tx^{\rho}+(1-t)b^{\rho}]^{\frac{1}{\rho}}\right)\right|}{(tx^{\rho}+(1-t)b^{\rho})^{1-\frac{1}{\rho}}}dt$$

bulunur. Hölder eşitsizliği kullanılırsa

$$\left|Y_f(\alpha,\rho;a,x,b)\right|$$

$$\leq \frac{(x^{\rho}-a^{\rho})^{\alpha+1}}{b-a}\left(\int_0^1 \left((tx^{\rho}+(1-t)a^{\rho})^{\frac{1}{\rho}-1}\right)^r dt\right)^{\frac{1}{r}}$$

$$\times\left(\int_0^1 t^{\alpha q}\left|f'\left([tx^{\rho}+(1-t)a^{\rho}]^{\frac{1}{\rho}}\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\frac{(b^{\rho}-x^{\rho})^{\alpha+1}}{b-a}\left(\int_0^1 \left((tx^{\rho}+(1-t)b^{\rho})^{\frac{1}{\rho}-1}\right)^r dt\right)^{\frac{1}{r}}$$

$$\times\left(\int_0^1 t^{\alpha q}\left|f'\left([tx^{\rho}+(1-t)b^{\rho}]^{\frac{1}{\rho}}\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

elde edilir. $|f'|^q$ fonksiyonu I üzerinde $p-$konveks olduğundan

$$\left|Y_f(\alpha,\rho;a,x,b)\right|$$

$$\leq \frac{(x^{\rho}-a^{\rho})^{\alpha+1}}{b-a}K^{\frac{1}{r}}(a)$$

$$\times\left(\int_0^1 t^{\alpha q+1}|f'(x)|^q dt+\int_0^1 t^{\alpha q}(1-t)|f'(a)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\frac{(b^{\rho}-x^{\rho})^{\alpha+1}}{b-a}K^{\frac{1}{r}}(b)$$

$$\times\left(\int_0^1 t^{\alpha q+1}|f'(x)|^q dt+\int_0^1 t^{\alpha q}(1-t)|f'(b)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

elde edilir. $|f'(x)|\leq M$ ifadesi kullanılırsa

$$\left|Y_f(\alpha,\rho;a,x,b)\right| \leq \frac{(x^\rho - a^\rho)^{\alpha+1}}{b-a} K^{\frac{1}{r}}(a)\left(M^q \frac{1}{\alpha q+2} + M^q \frac{1}{(\alpha q+1)(\alpha q+2)}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\frac{(b^\rho - x^\rho)^{\alpha+1}}{b-a} K^{\frac{1}{r}}(b)\left(M^q \frac{1}{\alpha q+2} + M^q \frac{1}{(\alpha q+1)(\alpha q+2)}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \frac{M}{b-a}\left(\frac{1}{\alpha q+1}\right)^{\frac{1}{q}}\left[(x^\rho - a^\rho)^{\alpha+1} K^{\frac{1}{r}}(a) + (b^\rho - x^\rho)^{\alpha+1} K^{\frac{1}{r}}(b)\right]$$

bulunur. Bulunan bu sonuçla ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.1.3. $f: I \subset (0,\infty) \to \mathbb{R}, I^{\circ}$ üzerinde türevlenebilir fonksiyon, $a, b \in I$, $a < b$ ve $f' \in L[a,b]$ olsun. I üzerinde $|f'|^q$ fonksiyonu $p-$konveks fonksiyon ve $|f'(x)| \leq M$ ise her $x \in I$ için sıradaki eşitsizlik yazılabilir.

$$\left|Y_f(\alpha,\rho;a,x,b)\right| \leq \frac{M}{b-a}(x^\rho - a^\rho)^{\alpha+1} L^{1-\frac{1}{q}}(a)\big(R(a)+S(a)\big)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\frac{M}{b-a}(b^\rho - x^\rho)^{\alpha+1} L^{1-\frac{1}{q}}(b)\big(R(b)+S(b)\big)^{\frac{1}{q}}.$$

Burada

$$R(\lambda) = \frac{\lambda^{1-\rho}}{\alpha+2}\ {}_2F_1\ \left(\alpha+2, \frac{\rho-1}{\rho}; \alpha+3; 1-\frac{x^\rho}{\lambda^\rho}\right)$$

$$S(\lambda) = \frac{\lambda^{1-\rho}}{(\alpha+1)(\alpha+2)}\begin{bmatrix} (\alpha+2)\ {}_2F_1\ \left(\alpha+1, \dfrac{\rho-1}{\rho}; \alpha+2; 1-\dfrac{x^\rho}{\lambda^\rho}\right) \\ -(\alpha+1)\ {}_2F_1\ \left(\alpha+2, \dfrac{\rho-1}{\rho}; \alpha+3; 1-\dfrac{x^\rho}{\lambda^\rho}\right)\end{bmatrix}$$

$$L(\lambda) = \frac{\lambda^{1-\rho}}{\alpha+1}\ {}_2F_1\ \left(\alpha+1, \frac{\rho-1}{\rho}; \alpha+2; 1-\frac{x^\rho}{\lambda^\rho}\right)$$

ve $\rho > 0, \alpha > 0, q \geq 1,\ {}_2F_1\ (.,.;.;.)$ hipergeometrik fonsiyondur.

İspat. Lemma 4.1.1 ve integraller için üçgen eşitsizliği kullanılırsa

$$\left|Y_f(\alpha,\rho;a,x,b)\right|$$

$$\leq \frac{(x^\rho - a^\rho)^{\alpha+1}}{b-a}\int_0^1 \frac{t^\alpha \left|f'\left([tx^\rho + (1-t)a^\rho]^{\frac{1}{\rho}}\right)\right|}{(tx^\rho + (1-t)a^\rho)^{1-\frac{1}{\rho}}}dt$$

$$+\frac{(b^\rho - x^\rho)^{\alpha+1}}{b-a}\int_0^1 \frac{t^\alpha \left|f'\left([tx^\rho + (1-t)b^\rho]^{\frac{1}{\rho}}\right)\right|}{(tx^\rho + (1-t)b^\rho)^{1-\frac{1}{\rho}}}dt$$

bulunur. Power – Mean eşitsizliği kullanılırsa

$$\left|Y_f(\alpha,\rho;a,x,b)\right|$$

$$\leq \frac{(x^\rho - a^\rho)^{\alpha+1}}{b-a}\left(\int_0^1 t^\alpha (tx^\rho + (1-t)a^\rho)^{\frac{1}{\rho}-1}dt\right)^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\times\left(\int_0^1 t^\alpha (tx^\rho + (1-t)a^\rho)^{\frac{1}{\rho}-1}\left|f'\left([tx^\rho + (1-t)a^\rho]^{\frac{1}{\rho}}\right)\right|^q\ dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\frac{(b^\rho - x^\rho)^{\alpha+1}}{b-a}\left(\int_0^1 t^\alpha (tx^\rho + (1-t)b^\rho)^{\frac{1}{\rho}-1}dt\right)^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\times\left(\int_0^1 t^\alpha (tx^\rho + (1-t)b^\rho)^{\frac{1}{\rho}-1}\left|f'\left([tx^\rho + (1-t)b^\rho]^{\frac{1}{\rho}}\right)\right|^q\ dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

bulunur.$|f'|^q$ fonksiyonunun $p-$ konveksliği kullanılırsa

$$\left|Y_f(\alpha,\rho;a,x,b)\right|$$

$$\leq \frac{(x^\rho - a^\rho)^{\alpha+1}L^{1-\frac{1}{q}}(a)}{b-a}$$

$$\times\begin{pmatrix} \int_0^1 t^{\alpha+1}\,(tx^\rho + (1-t)a^\rho)^{\frac{1}{\rho}-1}|f'(x)|^q dt \\ +\int_0^1 (t^\alpha - t^{\alpha+1})(tx^\rho + (1-t)a^\rho)^{\frac{1}{\rho}-1}|f'(a)|^q dt \end{pmatrix}^{\frac{1}{q}}$$

$$+\frac{(b^\rho - x^\rho)^{\alpha+1}L^{1-\frac{1}{q}}(b)}{b-a}$$

$$\times \left(\begin{array}{c} \int_0^1 t^{\alpha+1} \, (tx^\rho + (1-t)b^\rho)^{\frac{1}{\rho}-1} |f'(x)|^q dt \\ + \int_0^1 (t^\alpha - t^{\alpha+1})(tx^\rho + (1-t)b^\rho)^{\frac{1}{\rho}-1} |f'(b)|^q dt \end{array} \right)^{\frac{1}{q}}$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\left|Y_f(\alpha,\rho;a,x,b)\right| \leq \frac{(x^\rho - a^\rho)^{\alpha+1} L^{1-\frac{1}{q}}(a)}{b-a} \left(|f'(x)|^q R(a) + |f'(a)|^q S(a)\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+ \frac{(b^\rho - x^\rho)^{\alpha+1} L^{1-\frac{1}{q}}(b)}{b-a} \left(|f'(x)|^q R(b) + |f'(b)|^q S(b)\right)^{\frac{1}{q}}$$

elde edilir. $|f'(x)| \leq M$ olduğundan

$$\left|Y_f(\alpha,\rho;a,x,b)\right| \leq M \frac{(x^\rho - a^\rho)^{\alpha+1} L^{1-\frac{1}{q}}(a)}{b-a} \left(R(a) + S(a)\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+ M \frac{(b^\rho - x^\rho)^{\alpha+1} L^{1-\frac{1}{q}}(b)}{b-a} \left(R(b) + S(b)\right)^{\frac{1}{q}}$$

bulunur. Bu sonuç ile ispat tamamlanmış olur.

Hatırlatma 4.1.4. Teorem 4.1.3'te $\rho = 1$ ve Set (2012)'in elde ettiği Teorem 3.2.2'de $s = 1$ alınırsa aynı eşitsizliklere ulaşılır

4.2. Hermite-Hadamard Tipli Lemma ve Eşitsizlikler

Lemma 4.2.1. $f: I \subset (0,\infty) \to \mathbb{R}$, I° üzerinde türevlenebilir fonksiyon, $a, b \in I$ ve $a < b$ olsun. Eğer $f' \in L[a,b]$ ve $\alpha > 0$, $\rho > 0$ ise $x \in [a,b]$ için sıradaki eşitlik geçerlidir.

$$T_f(\alpha,\rho;a,x,b) = \frac{(x^\rho - a^\rho)^{\alpha+1}}{b-a} \int_0^1 \frac{(t^\alpha - 1) f'\left([tx^\rho + (1-t)a^\rho]^{\frac{1}{\rho}}\right)}{(tx^\rho + (1-t)a^\rho)^{1-\frac{1}{\rho}}} dt$$

$$+ \frac{(b^\rho - x^\rho)^{\alpha+1}}{b-a} \int_0^1 \frac{(1 - t^\alpha) f'\left([tx^\rho + (1-t)b^\rho]^{\frac{1}{\rho}}\right)}{(tx^\rho + (1-t)b^\rho)^{1-\frac{1}{\rho}}} dt.$$

İspat. Kısmi integrasyon yardımıyla

$$I_1=\int_0^1 \frac{(t^\alpha-1)f'\left([tx^\rho+(1-t)a^\rho]^{\frac{1}{\rho}}\right)}{(tx^\rho+(1-t)a^\rho)^{1-\frac{1}{\rho}}}dt$$

$$=\frac{\rho f(a)}{x^\rho-a^\rho}-\frac{\alpha\rho}{x^\rho-a^\rho}\int_0^1 t^{\alpha-1}f\left([tx^\rho+(1-t)a^\rho]^{\frac{1}{\rho}}\right)dt$$

bulunur. $[tx^\rho+(1-t)a^\rho]^{\frac{1}{\rho}}=u$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$I_1=\frac{\rho f(a)}{x^\rho-a^\rho}-\frac{\alpha\rho}{x^\rho-a^\rho}\int_a^x\left(\frac{u^\rho-a^\rho}{x^\rho-a^\rho}\right)^{\alpha-1}\frac{\rho u^{\rho-1}}{x^\rho-a^\rho}f(u)du$$

$$=\frac{\rho f(a)}{x^\rho-a^\rho}-\frac{\alpha\rho^2}{(x^\rho-a^\rho)^{\alpha+1}}\int_a^x\frac{u^{\rho-1}}{(u^\rho-a^\rho)^{1-\alpha}}f(u)du$$

$$=\frac{\rho f(a)}{x^\rho-a^\rho}-\frac{\alpha\rho^2\Gamma(\alpha)}{(x^\rho-a^\rho)^{\alpha+1}\rho^{1-\alpha}}\,{}^\rho I_{x-}^\alpha f(a)$$

$$(4.4)\qquad =\frac{\rho f(a)}{x^\rho-a^\rho}-\frac{\rho^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)}{(x^\rho-a^\rho)^{\alpha+1}}\,{}^\rho I_{x-}^\alpha f(a)$$

bulunur. Benzer şekilde

$$I_2=\int_0^1 \frac{(1-t^\alpha)f'\left([tx^\rho+(1-t)b^\rho]^{\frac{1}{\rho}}\right)}{(tx^\rho+(1-t)b^\rho)^{1-\frac{1}{\rho}}}dt$$

$$I_2=\frac{\rho(1-t^\alpha)}{x^\rho-b^\rho}f\left([tx^\rho+(1-t)b^\rho]^{\frac{1}{\rho}}\right)\Big|_0^1$$

$$+\frac{\alpha\rho}{x^\rho-b^\rho}\int_0^1 t^{\alpha-1}f\left([tx^\rho+(1-t)b^\rho]^{\frac{1}{\rho}}\right)dt$$

$$=\frac{\rho f(b)}{b^\rho-x^\rho}-\frac{\alpha\rho}{x^\rho-b^\rho}\int_0^1 t^{\alpha-1}f\left([tx^\rho+(1-t)b^\rho]^{\frac{1}{\rho}}\right)dt.$$

$[tx^\rho+(1-t)b^\rho]^{\frac{1}{\rho}}=u$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$I_2=\frac{\rho f(b)}{b^\rho-x^\rho}-\frac{\alpha\rho}{b^\rho-x^\rho}\int_b^x\left(\frac{u^\rho-b^\rho}{x^\rho-b^\rho}\right)^{\alpha-1}\frac{\rho u^{\rho-1}}{x^\rho-b^\rho}f(u)du$$

$$=\frac{\rho f(b)}{b^\rho-x^\rho}-\frac{\alpha\rho^2}{(b^\rho-x^\rho)^{\alpha+1}}\int_x^b\frac{u^{\rho-1}}{(b^\rho-u^\rho)^{1-\alpha}}f(u)du$$

$$=\frac{\rho f(b)}{b^\rho-x^\rho}-\frac{\alpha\rho^2\Gamma(\alpha)}{(b^\rho-x^\rho)^{\alpha+1}\rho^{1-\alpha}}\,{}^\rho I_{x+}^\alpha f(b)$$

$$(4.5)\qquad =\frac{\rho f(b)}{b^\rho-x^\rho}-\frac{\rho^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)}{(b^\rho-x^\rho)^{\alpha+1}}\,{}^\rho I_{x+}^\alpha f(b)$$

bulunur. (4.4) ve (4.5) eşitlikleri sırasıyla $\frac{(x^\rho-a^\rho)^{\alpha+1}}{b-a}$ ve $\frac{(b^\rho-x^\rho)^{\alpha+1}}{b-a}$ ifadeleri ile çarpılır ve taraf tarafa toplanırsa

$$\frac{(x^\rho-a^\rho)^{\alpha+1}}{b-a}\int_0^1 \frac{(t^\alpha-1)f'\left([tx^\rho+(1-t)a^\rho]^{\frac{1}{\rho}}\right)}{(tx^\rho+(1-t)a^\rho)^{1-\frac{1}{\rho}}}dt$$

$$+\frac{(b^\rho-x^\rho)^{\alpha+1}}{b-a}\int_0^1 \frac{(1-t^\alpha)f'\left([tx^\rho+(1-t)b^\rho]^{\frac{1}{\rho}}\right)}{(tx^\rho+(1-t)b^\rho)^{1-\frac{1}{\rho}}}dt$$

$$=\frac{\rho f(a)(x^\rho-a^\rho)^\alpha}{b-a}-\frac{\rho^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)\,{}^\rho I_{x-}^\alpha f(a)}{b-a}$$

$$+\frac{\rho f(b)(b^\rho-x^\rho)^\alpha}{b-a}-\frac{\rho^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)\,{}^\rho I_{x+}^\alpha f(b)}{b-a}$$

elde edilir. İfade düzenlenirse

$$T_f(\alpha,\rho;a,x,b)=\frac{(x^\rho-a^\rho)^{\alpha+1}}{b-a}\int_0^1 \frac{(t^\alpha-1)f'\left([tx^\rho+(1-t)a^\rho]^{\frac{1}{\rho}}\right)}{(tx^\rho+(1-t)a^\rho)^{1-\frac{1}{\rho}}}dt$$

$$+\frac{(b^\rho-x^\rho)^{\alpha+1}}{b-a}\int_0^1 \frac{(1-t^\alpha)f'\left([tx^\rho+(1-t)b^\rho]^{\frac{1}{\rho}}\right)}{(tx^\rho+(1-t)b^\rho)^{1-\frac{1}{\rho}}}dt$$

elde edilir. Bulunan bu ifade ile ispat tamamlanmış olur.

Hatırlatma 4.2.1. Lemma 4.2.1'de verilen ifadede $\rho=1$ alınırsa, Özdemir *et al.* (2012)'nin çalışmasında elde ettikleri Lemma 3.2.4 elde edilir.

Hatırlatma 4.2.2. Lemma 4.2.1'de verilen ifadede $\rho=1$ ve $\alpha=1$ alınırsa, Kavurmacı *et al.* (2011)'nin çalışmasında elde ettikleri Lemma 3.2.3 elde edilir.

Teorem 4.2.1. $f: I\subset(0,\infty)\to\mathbb{R}$, I° üzerinde türevlenebilir fonksiyon, $a,b\in I, a<b$ ve $f'\in L[a,b]$ olsun. $[a,b]$ üzerinde $|f'|$ fonksiyonu $p-$konveks fonksiyon, $\alpha>0$ ve $\rho>0$ ise her $x\in[a,b]$ için sıradaki eşitsizlik yazılabilir.

$$\left|T_f(\alpha,\rho;a,x,b)\right|\leq\frac{(x^\rho-a^\rho)^{\alpha+1}}{b-a}\{|f'(x)|P(a)+|f'(a)|T(a)\}$$

$$+\frac{(b^\rho-x^\rho)^{\alpha+1}}{b-a}\{|f'(x)|P(b)+|f'(b)|T(b)\}.$$

Burada

$$P(t)=\frac{\rho\left(x^{1+\rho}-t^{\rho}(-t\rho+x+\rho x)\right)}{(1+\rho)(x^{\rho}-t^{\rho})^{2}}$$

$$-t^{1-\rho}\Gamma(2+\alpha)\ {}_{1}\tilde{F}_{2}\ \left(2+\alpha,\frac{\rho-1}{\rho};3+\alpha;1-\left(\frac{x}{t}\right)^{\rho}\right)$$

$$T(t)=\frac{t^{1-\rho}}{\Gamma\left(\frac{\rho-1}{\rho}\right)}\left[\frac{t^{\rho}\left(1-\frac{x}{t}\right)\Gamma\left(-\frac{1}{\rho}\right)}{x^{\rho}-t^{\rho}}\right.$$

$$+\frac{t^{\rho}\left(-\frac{x^{\rho+1}}{t}+t^{\rho}\left(\frac{x}{t}+\rho\left(\frac{x}{t}-1\right)\right)\right)\Gamma\left(-\frac{\rho+1}{\rho}\right)}{\rho(x^{\rho}-t^{\rho})^{2}}$$

$$+\Gamma\left(\frac{\rho-1}{\rho}\right)\left(-\frac{{}_{1}F_{2}\ \left(\frac{\rho-1}{\rho},1+\alpha;2+\alpha;1-\left(\frac{x}{t}\right)^{\rho}\right)}{1+\alpha}\right.$$

$$\left.\left.+\frac{{}_{1}F_{2}\ \left(\frac{\rho-1}{\rho},2+\alpha;3+\alpha;1-\left(\frac{x}{t}\right)^{\rho}\right)}{2+\alpha}\right)\right].$$

İspat. Lemma 4.2.1 ve integraller için üçgen eşitsizliği kullanılırsa

$$\left|T_{f}(\alpha,\rho;a,x,b)\right|\leq\frac{(x^{\rho}-a^{\rho})^{\alpha+1}}{b-a}\int_{0}^{1}\frac{(1-t^{\alpha})\left|f'\left([tx^{\rho}+(1-t)a^{\rho}]^{\frac{1}{\rho}}\right)\right|}{(tx^{\rho}+(1-t)a^{\rho})^{1-\frac{1}{\rho}}}dt$$

$$+\frac{(b^{\rho}-x^{\rho})^{\alpha+1}}{b-a}\int_{0}^{1}\frac{(1-t^{\alpha})\left|f'\left([tx^{\rho}+(1-t)b^{\rho}]^{\frac{1}{\rho}}\right)\right|}{(tx^{\rho}+(1-t)b^{\rho})^{1-\frac{1}{\rho}}}dt$$

elde edilir. $|f'|$ fonksiyonunun $p-$ konveksliği kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
&\left|T_f(\alpha,\rho;a,x,b)\right| \\
&\qquad\le \frac{(x^\rho-a^\rho)^{\alpha+1}}{b-a}\left\{\int_0^1 \frac{(t-t^{\alpha+1})|f'(x)|}{(tx^\rho+(1-t)a^\rho)^{1-\frac{1}{\rho}}}dt\right. \\
&\qquad\qquad\left.+\int_0^1 \frac{(1-t-t^\alpha+t^{\alpha+1})|f'(a)|}{(tx^\rho+(1-t)a^\rho)^{1-\frac{1}{\rho}}}dt\right\} \\
&\qquad+\frac{(b^\rho-x^\rho)^{\alpha+1}}{b-a}\left\{\int_0^1 \frac{(t-t^{\alpha+1})|f'(x)|}{(tx^\rho+(1-t)b^\rho)^{1-\frac{1}{\rho}}}dt\right. \\
&\qquad\qquad\left.+\int_0^1 \frac{(1-t-t^\alpha+t^{\alpha+1})|f'(b)|}{(tx^\rho+(1-t)b^\rho)^{1-\frac{1}{\rho}}}dt\right\}
\end{aligned}
$$

bulunur. İntegraller hesaplanırsa

$$
\begin{aligned}
\left|T_f(\alpha,\rho;a,x,b)\right| \le& \frac{(x^\rho-a^\rho)^{\alpha+1}}{b-a}\{|f'(x)|P(a)+|f'(a)|T(a)\} \\
&+\frac{(b^\rho-x^\rho)^{\alpha+1}}{b-a}\{|f'(x)|P(b)+|f'(b)|T(b)\}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bulunan bu ifade ile ispat tamamlanmış olur.

Hatırlatma 4.2.3. Teorem 4.2.1'de $\rho = 1$ ve Özdemir *et al.* (2012)'nin çalışmasında elde edilen Teorem 3.2.3'te $s = 1$ alınırsa aynı eşitsizliklere ulaşılır.

Teorem 4.2.2. $f: I \subset (0,\infty) \to \mathbb{R}$, I° üzerinde türevlenebilir fonksiyon, $a, b \in I, a < b$ ve $f' \in L[a,b]$ olsun. $[a,b]$ üzerinde $|f'|^q$ fonksiyonu p −konveks ise her $x \in [a,b], \alpha > 0, \rho > 0, r > 1, q > 1$ ve $\frac{1}{r}+\frac{1}{q}=1$ için

$$
\begin{aligned}
T_f(\alpha,\rho;a,x,b) \le& \frac{(x^\rho-a^\rho)^{\alpha+1}}{b-a}M^{\frac{1}{r}}(a)(|f'(x)|^q N_1+|f'(a)|^q N_2)^{\frac{1}{q}} \\
&+\frac{(b^\rho-x^\rho)^{\alpha+1}}{b-a}M^{\frac{1}{r}}(b)(|f'(x)|^q N_1+|f'(b)|^q N_2)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}
$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada

$$
M(t)=\frac{\rho(tx)^{-\rho r}(-t^{\rho+r}x^{\rho r}+t^{\rho r}x^{\rho+r})}{(\rho(1-r)+r)(x^\rho-a^\rho)}
$$

$$
N_1=\frac{\Gamma(1+\mathrm{q})\Gamma\left(\frac{2+\alpha}{\alpha}\right)}{2\Gamma\left(1+\mathrm{q}+\frac{2}{\alpha}\right)}
$$

$$N_2 = \frac{\Gamma(1+q)}{2}\left(\frac{2\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(1+q+\frac{1}{\alpha}\right)} - \frac{\Gamma\left(1+\frac{2}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(1+q+\frac{2}{\alpha}\right)}\right).$$

İspat. Lemma 4.2.1 ve integraller için üçgen eşitsizliği kullanılırsa

$$\left|T_f(\alpha,\rho;a,x,b)\right| \le \frac{(x^\rho - a^\rho)^{\alpha+1}}{b-a}\int_0^1 \frac{(1-t^\alpha)\left|f'\left([tx^\rho + (1-t)a^\rho]^{\frac{1}{\rho}}\right)\right|}{(tx^\rho + (1-t)a^\rho)^{1-\frac{1}{\rho}}}dt$$

$$+\frac{(b^\rho - x^\rho)^{\alpha+1}}{b-a}\int_0^1 \frac{(1-t^\alpha)\left|f'\left([tx^\rho + (1-t)b^\rho]^{\frac{1}{\rho}}\right)\right|}{(tx^\rho + (1-t)b^\rho)^{1-\frac{1}{\rho}}}dt$$

elde edilir. Hölder eşitsizliği kullanılırsa

$$\left|T_f(\alpha,\rho;a,x,b)\right| \le \frac{(x^\rho - a^\rho)^{\alpha+1}}{b-a}\left(\int_0^1 \left((tx^\rho + (1-t)a^\rho)^{\frac{1}{\rho}-1}\right)^r dt\right)^{\frac{1}{r}}$$

$$\times\left(\int_0^1 (1-t^\alpha)^q \left|f'\left([tx^\rho + (1-t)a^\rho]^{\frac{1}{\rho}}\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\frac{(b^\rho - x^\rho)^{\alpha+1}}{b-a}\left(\int_0^1 \left((tx^\rho + (1-t)b^\rho)^{\frac{1}{\rho}-1}\right)^r dt\right)^{\frac{1}{r}}$$

$$\times\left(\int_0^1 (1-t^\alpha)^q \left|f'\left([tx^\rho + (1-t)b^\rho]^{\frac{1}{\rho}}\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

bulunur. $|f'|^q$ fonksiyonunun $p-$ konveksliği kullanılırsa

$$\left|T_f(\alpha,\rho;a,x,b)\right|$$

$$\le \frac{(x^\rho - a^\rho)^{\alpha+1}}{b-a}\left(\int_0^1 \left((tx^\rho + (1-t)a^\rho)^{\frac{1}{\rho}-1}\right)^r dt\right)^{\frac{1}{r}}$$

$$\times\left(\int_0^1 (1-t^\alpha)^q t|f'(x)|^q dt + \int_0^1 (1-t^\alpha)^q (1-t)|f'(a)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\frac{(b^\rho - x^\rho)^{\alpha+1}}{b-a}\left(\int_0^1 \left((tx^\rho + (1-t)b^\rho)^{\frac{1}{\rho}-1}\right)^r dt\right)^{\frac{1}{r}}$$

$$\times\left(\int_0^1 (1-t^\alpha)^q t|f'(x)|^q dt + \int_0^1 (1-t^\alpha)^q (1-t)|f'(a)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

elde edilir. Gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$\left|T_f(\alpha,\rho;a,x,b)\right| \leq \frac{(x^\rho-a^\rho)^{\alpha+1}}{b-a} M^{\frac{1}{r}}(a)\left(|f'(x)|^q N_1+|f'(a)|^q N_2\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$+\frac{(b^\rho-x^\rho)^{\alpha+1}}{b-a} M^{\frac{1}{r}}(b)\left(|f'(x)|^q N_1+|f'(b)|^q N_2\right)^{\frac{1}{q}}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.2.3. $f: I \subset (0,\infty) \to \mathbb{R}, I^\circ$ üzerinde türevlenebilir fonksiyon, $a,b \in I, a < b$, ve $f' \in L[a,b]$ olsun. $[a,b]$ üzerinde $|f'|^q$ fonksiyonu p −konveks fonksiyon ise her $x \in [a,b]$, $\alpha > 0$, $\rho > 0, q \geq 1$ için

$$\left|T_f(\alpha,\rho;a,x,b)\right| \leq \frac{(x^\rho-a^\rho)^{\alpha+1}}{b-a} J^{1-\frac{1}{q}}(a)\left(|f'(x)|^q P(a)+|f'(a)|^q T(a)\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$+\frac{(b^\rho-x^\rho)^{\alpha+1}}{b-a} J^{1-\frac{1}{q}}(b)\left(|f'(x)|^q P(b)+|f'(b)|^q T(b)\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada

$$J(t)=\frac{\rho(x-t)+t\left(1-\left(\frac{x}{t}\right)^\rho\right)^{-\alpha} I_{1-\left(\frac{x}{t}\right)^\rho}\left(1+\alpha,\frac{1}{\rho}\right)}{x^\rho-t^\rho}$$

$$P(t)=\frac{\rho\left(x^{1+\rho}-t^\rho(-t\rho+x+\rho x)\right)}{(1+\rho)(x^\rho-t^\rho)^2}$$
$$-t^{1-\rho}\,\Gamma(\alpha+2)\ {}_1\tilde{F}_2\left(2+\alpha,\frac{\rho-1}{\rho};3+\alpha,1-\left(\frac{x}{t}\right)^\rho\right)$$

$$T(t)=\frac{t^{1-\rho}}{\Gamma\left(\frac{\rho-1}{\rho}\right)}\left[\frac{t^\rho\left(1-\frac{x}{t}\right)\Gamma\left(-\frac{1}{\rho}\right)}{x^\rho-t^\rho}\right.$$
$$+\frac{t^\rho\left(-\frac{x^{\rho+1}}{t}+t^\rho\left(\frac{x}{t}+\rho\left(\frac{x}{t}-1\right)\right)\right)\Gamma\left(-\frac{\rho+1}{\rho}\right)}{\rho(x^\rho-t^\rho)^2}$$
$$+\Gamma\left(\frac{\rho-1}{\rho}\right)\left(-\frac{{}_1F_2\left(\frac{\rho-1}{\rho},1+\alpha;2+\alpha,1-\left(\frac{x}{t}\right)^\rho\right)}{1+\alpha}\right.$$
$$\left.\left.+\frac{{}_1F_2\left(\frac{\rho-1}{\rho},2+\alpha;3+\alpha,1-\left(\frac{x}{t}\right)^\rho\right)}{2+\alpha}\right)\right]$$

ve $\alpha > 0, \rho > 0, q \geq 1$ eşitlikleri geçerlidir. $I_x(p,q)$ tamamlanmamış beta fonksiyonudur.

İspat. Lemma 4.2.1 ve integraller için üçgen eşitsizliği kullanılırsa

$$\left|T_f(\alpha,\rho;a,x,b)\right| \leq \frac{(x^\rho-a^\rho)^{\alpha+1}}{b-a}\int_0^1 \frac{(1-t^\alpha)\left|f'\left(\left[tx^\rho+(1-t)a^\rho\right]^{\frac{1}{\rho}}\right)\right|}{\left(tx^\rho+(1-t)a^\rho\right)^{1-\frac{1}{\rho}}}dt$$

$$+\frac{(b^\rho-x^\rho)^{\alpha+1}}{b-a}\int_0^1 \frac{(1-t^\alpha)\left|f'\left(\left[tx^\rho+(1-t)b^\rho\right]^{\frac{1}{\rho}}\right)\right|}{\left(tx^\rho+(1-t)b^\rho\right)^{1-\frac{1}{\rho}}}dt$$

elde edilir. Power – Mean eşitsizliği kullanılırsa

$$\left|T_f(\alpha,\rho;a,x,b)\right| \leq \frac{(x^\rho-a^\rho)^{\alpha+1}}{b-a}\left(\int_0^1 \frac{1-t^\alpha}{\left(tx^\rho+(1-t)a^\rho\right)^{1-\frac{1}{\rho}}}dt\right)^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\times\left(\int_0^1 \frac{(1-t^\alpha)\left|f'\left(\left[tx^\rho+(1-t)a^\rho\right]^{\frac{1}{\rho}}\right)\right|^q}{\left(tx^\rho+(1-t)a^\rho\right)^{1-\frac{1}{\rho}}}dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\frac{(b^\rho-x^\rho)^{\alpha+1}}{b-a}\left(\int_0^1 \frac{1-t^\alpha}{\left(tx^\rho+(1-t)b^\rho\right)^{1-\frac{1}{\rho}}}dt\right)^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\times\left(\int_0^1 \frac{(1-t^\alpha)\left|f'\left(\left[tx^\rho+(1-t)b^\rho\right]^{\frac{1}{\rho}}\right)\right|^q}{\left(tx^\rho+(1-t)b^\rho\right)^{1-\frac{1}{\rho}}}dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

elde edilir. $|f'|^q$ fonksiyonunun $p-$ konveksliği kullanılırsa

$$\left|T_f(\alpha,\rho;a,x,b)\right| \leq \frac{(x^\rho-a^\rho)^{\alpha+1}}{b-a}\left(\int_0^1 \frac{1-t^\alpha}{\left(tx^\rho+(1-t)a^\rho\right)^{1-\frac{1}{\rho}}}dt\right)^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\times\left\{\begin{array}{c} |f'(x)|^q\int_0^1 (t-t^{\alpha+1})\left(tx^\rho+(1-t)a^\rho\right)^{\frac{1}{\rho}-1}dt \\ +|f'(a)|^q\int_0^1 (1-t-t^\alpha+t^{\alpha+1})\left(tx^\rho+(1-t)a^\rho\right)^{\frac{1}{\rho}-1}dt \end{array}\right\}^{\frac{1}{q}}$$

$$+\frac{(b^\rho-x^\rho)^{\alpha+1}}{b-a}\left(\int_0^1 \frac{1-t^\alpha}{\left(tx^\rho+(1-t)b^\rho\right)^{1-\frac{1}{\rho}}}dt\right)^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\times\left\{\begin{array}{c}|f'(x)|^q\int_0^1(t-t^{\alpha+1})(tx^\rho+(1-t)b^\rho)^{\frac{1}{\rho}-1}dt\\+|f'(b)|^q\int_0^1(1-t-t^\alpha+t^{\alpha+1})(tx^\rho+(1-t)b^\rho)^{\frac{1}{\rho}-1}dt\end{array}\right\}^{\frac{1}{q}}$$

bulunur. Gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$\begin{aligned}\left|T_f(\alpha,\rho;a,x,b)\right| \leq &\frac{(x^\rho-a^\rho)^{\alpha+1}}{b-a}J^{1-\frac{1}{q}}(a)(|f'(x)|^qP(a)+|f'(a)|^qT(a))^{\frac{1}{q}}\\&+\frac{(b^\rho-x^\rho)^{\alpha+1}}{b-a}J^{1-\frac{1}{q}}(b)(|f'(x)|^qP(b)+|f'(b)|^qT(b))^{\frac{1}{q}}\end{aligned}$$

bulunur. Bu ifade ile ispat tamamlanmış olur.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tezde Rieman-Liouville kesirli integrali kullanılarak elde edilen lemmalardan faydalanarak Katugampola kesirli integrali içeren yeni lemmalar elde edilmiştir. Daha sonra bu lemmalara p-konvekslik sınıfı uygulanarak Hermite-Hadamard ve Ostrowski tipli sonuçlar ihtiva eden eşitsizlikler elde edilmiştir.

Bulunan bu lemma ve eşitsizliklerde bazı değişkenlerin özel durumları sonucunda Riemann-Liouville kesirli integraline dönüştüğü alanyazın tarafından desteklenmiştir

Bu konuyla ilgili çalışma yapacak olan araştırmacılar tarafından Hermite-Hadamard ve Ostrowski tipli sonuçlar verecek yeni lemmalar elde edilebilir veya bu çalışmada elde edilen lemmalar yardımıyla farklı konveks fonksiyon sınıfları için Hermite-Hadamard veya Ostrowski tipli farklı eşitsizlikler bulunabilir. Öte yandan elde edilen eşitsizlikler yardımıyla bazı özel ortalamalar arasında yeni ilişkiler ortaya konulabilir.

KAYNAKÇA

Abdeljawad, T., 2015. On conformable fractional calculus. Jour. comp. App. Math., 279, 57-66.

Albrycht, J. and Orlicz, W., 1962. A note on modular spaces II. Bull. Polish Acad. Sci. Math, 10, 99-106.

Alomari, M., Darus, M., Dragomir, S. and Cerona, P., 2010. Ostrowski type inequalities for functions whose derivatives are s-convex in the second sense. Appl.Math.Lett., 23(9), 1071-1076.

Baeumer, B. and Meerschaert, M., 2001. Stochastic solutions for fractional Cauchy problems. Fractional Calculus and Applied Analysis, 4(4), 481-500.

Bayraktar, M., 2000. Fonksiyonel Analiz, ISBN 975-442-035-1.

Breckner, W., 1978. Stetigkeitsaussagen füreine Klasse verallgemeinerter konvexer Funktionen in topologischen linearen Räumen. Pupl.Inst.Math. , 23, 13-20.

Caputo, Michele., 1967. "Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent—II." *Geophysical Journal International* 13.5 (1967): 529-539.

Dalir, M. and Bashour, M., 2010. Applications of fractional calculus. Applied Mathematical Sciences, 4(21), 1021-1032.

Dragomir, S., Agarwall, R. and Barnett, N., 2000. Inequalities for beta and gamma functions via some classical and new integral inequalities. Journ. Ineq. Appl., 2000(2), 504054.

Dragomir, S. and Pearce, C., 2000. In Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications. Victoria University: RGMIA Monographs.

Dragomir, S., 1998. Quasi-convex functions and Hadamard's inequality,. Bull. Austral.Math. Soc., 57, 377-385.

Dragomir, S. S., Pecaric, J., and Persson, L. E. (1995). Some inequalities of Hadamard type. Soochow Jour. Math, 21(3), 335-341.

El-Nabulsi, R. and Torres, D., 2007. Necessary optimality conditions for fractional action-like integrals of variational calculus with Riemann–Liouville derivatives of order (α, β). Mathematical Methods in the Applied Sciences, 30(15), 1931-1939.

Erdelyi, A., Magnus, W., Oberhettinger, F. and Tricomi, F., 1981. Higher trancendental functions. Vol. III, based on notes by Harry Bateman, reprint of the 1955 original.

Gudunova, E. and VI Levin, (1985). Neravenstva dlja funkcii sirokogo klassa, soderzascego vypuklye, monotonnye inekotorye drugie vidy funkcii. Vycislitel.

Hardy, G., Litlewood, J. and Polya, G. 1952. Inequalities. Cambridge universty press.

İşcan, İ., 2016. Ostrowski Type Inequalities for p-Convex Functions,. New Trends in Mathematical Sciences, 3, 140-150.

Kannappan, P., 2009. Functional Equations from Information Theory. In Functional . Equ. Ineq. Appl. 403-467.

Katugampola, N., 2014. A new approach to generalized fractional derivatives. Bull.Math.Anal.Appl., 6(4), 1-15.

Katugampola, U., 2011. New approach to a generalized fractional integral. Appl.Math.Comp., 218(3), 860-865.

Kavurmacı, H., Avcı, M. and Özdemir, M., 2011. New inequalities of Hermite-Hadamard type for convex functions with applications. Jour. Ineq. Appl., 2011(1) 86.

Kilbas, A., 2001. Hadamard-type fractional calculus. Journal of the Korean Mathematical Society 38(6), 1191-1204.

Kilbas, A., Srivastava, H. and Trujillo, J. 2006. Theory and applications of fractional differential equations. North-Holland Mathematics Studies 204.

Kirane, M. and Torabek, B. 2016. Hermite-Hadamard, Hermite-Hadamard-Fejer, Dragomir-Agarwal and Pachpatte Type Inequalities for Convex Functions via Fractional Integrals. arXiv preprint arXiv, 1701,00092.

Majumder, K. and Bhattcharjee, G., 1973. Algorithm AS 63: The Incomplete Beta Integral, J. Royal Statistical Society. Series, C 22 3, 409-411.

Miheşan, V., 1993. A generalization of the convexity, Seminar on Functional Equations. Approx. Convex, cluj-Napoca.

Miller, K., 1975. The Weyl fractional calculus. In Fractional calculus and its applications . springer, Berlin, Heilderberg , 80-89.

Miller, D., A., 2003. Fractional Calculus. https://www.researchgate.net/profile/David_Miller53/publication/258109711_FRACTIONAL_CALCULUS/links/0deec526fc1a1672f2000000.pdf

Miller, Kenneth. S., and Ross, B. (1993). An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations

Mitrinovic, D. and Vasic, P., 1970. Analytic inequalities (Vol. 1). Berlin: Springer-verlag.

Mitrinovic, D., Pečarić, J. and Fink, A., 1993. Classical and New Inequalities in Analysis. Mathematics and its Applications(East Europen Series).

Ostrowski, A., 1938. Über die Absolutabweichung einer differentiierbaren Funktion von ihrem Integralmittelwert. Commentarii Mathematici Helvetici, 10(1), 226-227.

Özdemir, M., Avcı, M. and Kavurmacı, 2012. Hermite-Hadamard type inequalities for s-convex and s-concave functions via fractional integrals. arXiv preprint arXiv 1202.0380.

Pečarić, J. and Tong, Y. 1992. Convex functions, partial orderings, and statistical applications. Academic Press.

Pachpatte, B. G. (2005). Mathematical inequalities (Vol. 67). Elsevier.

Rainville, E. D., 1973. Special functions. New York: Macmillan Company.

Ross, B., 1977. Fractional calculus. Mathematics Magazine, , 50(3), 115-122.

Samko, S., Kilbas, A. and Marichev O., 1993. Fractional integrals and derivatives. theory and applications .

Schmidt, A. and Gaul, L., 2001. FE implementation of viscoelastic constitutive stress-strain relations involving fractional time derivatives. Constitutive models for rubber, 2, 79-92.

Set, E., 2012. New inequalities of Ostrowski type for mappings whose derivatives are s-convex in the second sense via fractional integrals. Computers & Mathematics with Applications, 63(7), 1147-1154.

Shiba, N. and Takayanagi, T., 2014. Volume law for the entanglement entropy in non-local QFTs. *Journal of High Energy Physics, 2014(2), 33.*

Toader, G., 1984. Some generalisations of the convexity, Proc. Colloq. Approx. Optim, ClujNapoca (Romania), 329-338.

Varošanec, S., 2007. On convexity,. J. Math. Anal. and Appl., 326, 303-311.

Yang, X., 2011. Local Fractional Functional Analysis and Its Applications. Hong Kong: Asian Academic Publisher Limited.

Zhang, K. and Wan, J., 2007. P-convex functions and their properties. Pure and Applied Mathematics, 1, 026.

Zhang, T., Y. Ji and Qi F., 2012. On Integral Inequalities of Hermite-Hadamard Type for Geometrically Convex Functions, Abstract and Applied Analysis, doi:10.1155/2012/560586.

ÖZGEÇMİŞ

1994 yılında Ağrı'da doğdu. Öğrenim hayatını Ağrı'da tamamladı. 2011 yılında Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği bölümüne girerek lisans öğrenimine başladı 2015 yılında mezun oldu. Öğrenimine sadece bir dönem ara verdikten sonra Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde lisans üstü eğitimine başladı. 2015 yılından itibaren M.E.B. bünyesinde Ağrı Merkez Murat Kız YB Ortaokulunda Matematik Öğretmeni olarak görev yapmaktadır.