

**T.C.**  
**GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ**  
**MÜHENDİSLİK ve FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**FRAKSİYONEL MERTEBELİ DİFERANSİYEL**  
**DENKLEM İÇİN GENELLEŞTİRİLMİŞ KUASİLİNEERİZASYON**  
**METOD**

**EMİNE ATICI**  
**YÜKSEK LİSANS TEZİ**  
**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**GEBZE**  
**2013**

**T.C.**  
**GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ**  
**MÜHENDİSLİK ve FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**FRAKSİYONEL MERTEBELİ DİFERANSİYEL**  
**DENKLEM İÇİN GENELLEŞTİRİLMİŞ**  
**KUASİLİNEERİZASYON METOD**

**EMİNE ATICI**  
**YÜKSEK LİSANS TEZİ**  
**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**DANIŞMANI**  
**DOÇ. DR. COŞKUN YAKAR**

**GEBZE**  
**2013**



**GEBZE YÜKSEK  
TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ**

## YÜKSEK LİSANS JÜRİ ONAY FORMU

GYTE Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 10/10/2013 tarih ve 2013/55 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından 23/10/2013 tarihinde tez savunma sınavı yapılan Emine ATICI'nın tez çalışması Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

### JÜRİ

ÜYE

(TEZ DANIŞMANI) : DOÇ. DR. COŞKUN YAKAR

ÜYE

: PROF. DR. MANSUR İSMAİLOV

ÜYE

: YRD. DOÇ. DR. H. GÜLAY ALGÜL

### ONAY

GYTE Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun  
..... tarih ve ...../..... sayılı kararı.

İMZA/MÜHÜR

## ÖZET

Bu çalışmada fraksiyonel mertebeli Caputo manada diferansiyel denklemler için uygulanan başlangıç zamanı farklı kuasilineerizasyon tekniği; lineer fraksiyonel mertebeli Caputo manada diferansiyel denklemlerin çözümleri olan fonksiyon dizileri oluşturulup, başlangıç zamanları ve pozisyonları farklı alt ve üst çözümler kullanılarak sağ tarafında biri konveks, diğeri konkav olma koşulundan daha zayıf birbirlerinden farklı iki fonksiyonun toplamı olarak verilen fraksiyonel mertebeli Caputo manada lineer olmayan bir başlangıç değer probleminin çözümüne ulaşmak adına yeniden incelenmiştir. Üstelik seçilen bu fonksiyon dizileri lineer olmayan fraksiyonel mertebeli Caputo manadaki diferansiyel denklemlerin tek çözümüne düzgün ve monoton yakınsarlar. Ayrıca bu yakınsama kuadrattır.

**Anahtar Kelimeler: Caputo Kesirli Mertebeli Diferansiyel Denklemler, Kuasilineerizasyon Metod, Başlangıç Zaman Farkı, Kuadratik Yakınsaklık.**

## SUMMARY

In this work, the technique of the quasilinearization in Caputo's sense nonlinear initial time problem given as the sum of two monotone functions the one on the right side as convex condition and the other as weaker condition than concave, is applied to obtain lower and upper sequences in terms of the solutions of linear fractional order differential equations in Caputo's sense starting at different initial times and initial positions. These sequences of monotone functions convergence to the unique solution of the Caputo nonlinear fractional differential equations as uniformly and monotonically. Besides that, this convergence is quadratic.

**Key Words: Caputo's Sense Fractional Order Differential Equation, Quasilinearization, Initial Time Difference, Quadratic Convergence.**

## TEŞEKKÜR

Öncelikle, bu tez çalışmamda bilgi ve deneyimleriyle bana destek olan tez danışmanım Sayın Doç. Dr. Coşkun YAKAR'a, teőekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Yüksek lisans eğitimim süresince yardımını, ilgisini, yol göstericiliğini ve tecrübelerini esirgemeyen, eğitimliliğini kendime örnek aldığım saygıdeğer hocam Sayın Prof. Dr. Mansur İSMAİLOV'a ve jüri üyesi saygıdeğer hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. H. Gülay ALGÜL'e teőekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Tanıőtıđım ilk günden bu yana arkadaşılığını ve kardeőliliđini esirgemeyen kadim dostum Sayın Şafak UZUN'a teşekkür ederim. Tez yazım sürecinde desteklerini eksik etmeyen, çalışma arkadaşım Sayın Esra YILMAZ'a ve Sayın Arő. Gör. Ayőe TİRYAKİOğLU'na ayrıca teşekkür ederim.

Son olarak, başta kardeőim Sayın Dr. Adem ATICI olmak üzere, vermiş oldukları her türlü desteklerinden dolayı varlıklarından güç aldığım sevgili aileme ayrıca teőekkürü bir borç bilirim.

# İÇİNDEKİLER

	<b><u>Sayfa</u></b>
ÖZET	iv
SUMMARY	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIMLAR	3
2.1. Fraksiyonel Analizde Bazı Temel Fonksiyonlar	3
2.1.1. Gamma Fonksiyonu	3
2.1.2. Beta Fonksiyonu	5
2.1.3. Mittag-Leffler Fonksiyonu	5
2.2. Türev ve İntegral Arasındaki İlişkiler	7
2.2.1. Kullanılan Notasyon ve Tanımlar	7
2.2.2. Bir Fonksiyonun n. Mertebeden Türevi	10
2.2.3. n-Ardışık İntegralin Genel Gösterimi	12
2.2.4. Tamsayı Mertebeli Türev ve İntegral Arasındaki İlişki	13
2.3. Fraksiyonel Türev ve İntegraller	14
2.3.1. Grünwald-Letnikov Fraksiyonel Türevi	14
2.3.2. Riemann-Liouville (R-L) Fraksiyonel Türevi	16
2.3.3. Caputo Manada Fraksiyonel Türev	30
3. KARŞILAŞTIRMA TEOREMLERİ ve KUASİLİNEERİZASYON	34
METOT	
3.1. Fraksiyonel Diferansiyel Denklemler için Karşılaştırma Sonuçları ve Bazı Temel Teoremler	34
3.2. Kuasilineerizasyon Metodu	44
3.2.1. Temel Kuasilineerizasyon Metodu	46
3.2.2. Genelleştirilmiş Kuasilineerizasyon Metodu	53
4. BAŞLANGIÇ ZAMANI FARKLI KARŞILAŞTIRMA TEOREMLERİ ve KUASİLİNEERİZASYON METOT	63

4.1. Başlangıç Zamanı Farklı Karşılaştırma ve Varlık Teoremleri	63
4.2. Başlangıç Zamanı Farklı Kuasilineerizasyon Metodu	71
4.2.1. Başlangıç Zamanı Farklı Temel Kuasilineerizasyon Metodu	71
4.2.2. Başlangıç Zamanı Farklı Genelleştirilmiş Kuasilineerizasyon Metodu	80
5. SONUÇLAR	93
KAYNAKLAR	94
ÖZGEÇMİŞ	96

# 1. GİRİŞ

Keyfi mertebeden türev olarak bilinen Fraksiyonel türev, matematiksel analizin bir kolu olarak, türev ve integral kavramlarının reel, rasyonel veya kompleks mertebelerine genişletilmiş şeklidir. Fraksiyonel türev kavramı diferansiyel hesaplama kadar eski olup başlangıcı XVII. yüzyıl olarak gösterilir. Bu durumun varlığı Leibnitz tarafından 1695'te L'Hospital'a gönderilen mektupta "Tam sayı mertebeden türevler, kesirli mertebeden türevlere genelleştirilebilir mi?" sorusu ile bilinmektedir [1]. XIX. yüzyılın son dönemlerine gelindiğinde ise Leibnitz'in yanı sıra Liouville, Riemann, Grünwald ve Letnikov gibi birçok ünlü matematikçi tarafından yapılan önemli çalışmalar neticesinde fraksiyonel mertebeli türev ve integral üzerinde yapılan teorik çalışmalar neredeyse tamamlanmış bulunmaktaydı. Fakat bu çalışmaların tamamen teorikte kaldığı gerçek hayat problemleri üzerinde uygulanılamayacağı düşünülüyordu. Buna karşın yakın geçmişte yapılan çalışmalar fraksiyonel türev ve integral kavramının bir çok problemi modellemede kullanılan klasik türev ve integral kavramından daha uygun ve daha elverişli olduğunu göstermiştir. Bu bağlamda ilk kez kaleme alınan Oldham ve Spanier çalışması [2], fraksiyonel hesaplamanın fizik, kimya, mühendislik (elektrik, mekanik, petrol mühendisliği gibi) ve diğer alanlarda uygulanabilirliğini göstermesi bakımından çok önemlidir. İlerleyen zamanlarda bu çalışmaya ek olarak yeni çalışmalar ve basılan kitaplar da olmuştur [3]-[5]. Fakat fraksiyonel diferansiyel denklemler kavramının bağımsız bir çalışma olarak sunulmasını sağlayan V. Lakshmikantham, S. Leela ve J. Vasundhara Devi ortak çalışması [6] bu alanda yazılan ilk kitaptır.

Kuasilineerizasyon metodu ilk olarak Bellman ve Kalaba tarafından çalışılmış [7], daha sonraları Lakshmikantham tarafından geliştirilmiştir [8], [9]. Kuasilineerizasyon metodu lineer olmayan diferansiyel denklemlerin çözümleri için teorik bir yaklaşım sağlamaya çalışır. Bu metot, esas olarak verilen lineer olmayan diferansiyel denklemin tek çözümüne düzgün, kuadratik yakınsayan ve elemanlarından her biri lineer diferansiyel denklemlerin çözümlerine karşılık gelen monoton diziler oluşturmayı amaçlar. Bu metotta verilen fonksiyonun konveks ya da konkav oluşu temel şart gibi düşünülürken zaman içinde bu şart zayıflatılarak kuasilineerizasyon tekniğinin daha geniş uygulama alanlarına taşınabileceği gözlemlenmiştir [10]-[13].

2010'da Dr. Ali YAKAR tarafında çalışılan doktora tezinde

*“Fraksiyonel türev ve integral kavramının gelişimine bağlı olarak integral ve diferansiyel eşitsizlikler varlık ve teklik teoremleri yeniden ele alınmıştır [3], [6], [14], [15]. Bu doğrultuda klasik anlamda lineer olmayan problemler için uyguladığımız Kuasilineerizasyon Tekniği, Monoton İterativ Tekniği, Stabilite ve Lyapunov stabilite gibi konular ise fraksiyonel dinamik sistemler konseptinde yerini almıştır [6], [16]-[22].”*

olduğu belirtilir [25].

Tez dört ana bölümden oluşmaktadır.

İkinci bölümde; fraksiyonel analizde kullanılan bazı temel fonksiyonlara, başlıca fraksiyonel türev ve integral olarak bilinen Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville ve Caputo tanımlarına ve bu tanımlar arasındaki ilişkilere yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde; fraksiyonel diferansiyel denklemler için  $0 < q < 1$  olmak üzere  $q$ . mertebeden Riemann-Liouville türevi ile verilen bir başlangıç değer problemi üzerinde bazı temel tanımlar verilmiş olup, ayrıca karşılaştırma ve varlık teoremleri ifade ve ispat edilmiştir. Bölüm 3.2'de Caputo manada fraksiyonel türevli lineer olmayan bir başlangıç değer probleminin çözümüne ulaşmak adına başlangıç zamanları aynı olan alt ve üst çözümler kullanılarak kuasilineerizasyon tekniği uygulanmıştır. Bir sonraki adımda bu teknik geliştirilerek uygulanabilirliği yeniden değerlendirilmiştir.

Dördüncü bölümde; başlangıç zaman ve pozisyonları farklı olarak verilen alt ve üst çözümler için karşılaştırma teoremleri ve varlık teoremi yeniden ifade ve ispat edilmiştir. Bölüm 4.2'de Caputo manada fraksiyonel türevli lineer olmayan diferansiyel denklem için alt ve üst çözümler başlangıç zaman ve pozisyon farkıyla verilmesi ve diferansiyel denklemin sağ tarafında yer alan fonksiyon konveks olma koşulundan daha zayıf bir fonksiyon olarak seçilmesi durumunda kuasilineerizasyon tekniği uygulanmıştır. Son olarak, bu kez sağ tarafında biri konveks olma koşulundan, diğeri konkav olma koşulundan daha zayıf birbirlerinden farklı iki fonksiyonun toplamı olarak verilen, Caputo manada lineer olmayan bir fraksiyonel diferansiyel denklem için başlangıç zaman ve pozisyonları farklı alt ve üst çözümlerin kullanılması ile geliştirilmiş kuasilineerizasyon tekniğinin çalışabilirliği incelenmiştir.

Beşinci bölümde; buradaki çalışmanın sonuçları değerlendirilmiştir.

## 2. TEMEL TANIMLAR

### 2.1. Fraksiyonel Analizde Bazı Temel Fonksiyonlar

Fraksiyonel (Kesirli) hesabın tanımları ve kullanımını anlamak için bazı matematik tanımlarını iyi bilmek gerekmektedir. Bu nedenle, fraksiyonel diferansiyel denklemler teorisi ve fraksiyonel analizde önemli bir oynayan bazı özel fonksiyonlara yer verilecektir. Bunlar öncelikle Gamma fonksiyonları, Beta fonksiyonları ve Mittag-Leffler fonksiyonlarıdır [2]-[6].

#### 2.1.1. Gamma Fonksiyonu

Fraksiyonel analizdeki temel fonksiyonlardan biri olarak bilinen Euler'in Gamma fonksiyonu, matematikte faktöriyel fonksiyonunun kompleks ve kesirli sayılar için genelleştirilmesidir.  $\Gamma$  simgesiyle gösterilen Gamma fonksiyonları bütün  $x$  değerleri için aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır.

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{z(z+1) \dots (z+n)} \quad (2.1)$$

Aynı zamanda integral dönüşüm tanımı ise

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad (2.2)$$

şeklinde ifade edilir ve bu fonksiyon kompleks düzlemin sağ yarısı için yakınsaktır.

Gamma fonksiyonunun temel özelliklerinden biri,

$$\Gamma(z+1) = z \Gamma(z) \quad (2.3)$$

şeklindedir. Bu temel özellik kısmi integrasyon yöntemi kullanılarak kolayca elde edilebilir.

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^z dt = [-e^{-t} t^z]_{t=0}^{\infty} + z \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = z\Gamma(z) \quad (2.4)$$

Buradan açıkça görülmektedir ki  $\Gamma(1) = 1$  dir. Aynı zamanda (2.3) eşitliği kullanılarak  $z = 1, 2, 3, \dots$  değerleri için

$$\Gamma(2) = 1 \Gamma(1) = 1 = 1!$$

$$\Gamma(3) = 2 \Gamma(2) = 2.1! = 2!$$

$$\Gamma(4) = 3 \Gamma(3) = 3.2! = 3!$$

...

...

$$\Gamma(n+1) = n \Gamma(n) = n(n-1)! = n! \quad (2.5)$$

olduğu görülür.

Gamma fonksiyonunun diğer özelliklerini ise aşağıdaki şekilde verebiliriz.

i)  $\Gamma(0) = \infty, \Gamma(\infty) = 0$

ii)  $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

iii)  $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$

### 2.1.2. Beta Fonksiyonu

Gamma fonksiyonu ile yakından ilişkili olan Beta fonksiyonu, iki parametrelili pozitif değerler için aşağıdaki integral ile ifade edilmektedir.

$$\beta(z, w) = \int_0^1 t^{z-1} (1-t)^{w-1} dt, \quad \text{Re}(z), \text{Re}(w) > 0 \quad (2.6)$$

Beta fonksiyonunun Gamma fonksiyonu türünden ifadesi

$$\beta(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)} \quad (2.7)$$

şeklindedir. Ayrıca (2.7) eşitliği kullanılarak Beta fonksiyonun simetrik olduğunu söylemek de mümkündür.

$$\beta(z, w) = \beta(w, z) \quad (2.8)$$

### 2.1.3. Mittag-Leffler Fonksiyonu

Fraksiyonel diferansiyel denklemlerde çok yaygın kullanım alanlarına sahip Mittag-Leffler fonksiyonu, tamsayı mertebeden diferansiyel denklemler teorisi için önem arz eden üstel fonksiyonun ( $e^z$ ) bir çeşit genellemesidir.

$\alpha > 0$  olmak üzere  $E_\alpha$  notasyonu ile gösterilen bir parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu

$$E_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + 1)} \quad (2.9)$$

şeklinde ifade edilmektedir.

$\alpha > 0$  ve  $\beta > 0$  olmak üzere iki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu ise

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + \beta)} \quad (2.10)$$

biçiminde tanımlanır. Bu fonksiyon, ilk olarak Agarwal ve Humbert tarafından Laplace dönüşüm tekniği kullanılarak yapılmış olup, fraksiyonel mertebeden diferansiyel hesaplamada önemli bir yere sahiptir.  $\alpha$  ve  $\beta$  parametrelerinin özel seçimleri durumunda  $E_{\alpha,\beta}$  fonksiyonu bildiğimiz bazı fonksiyonları verecektir. Örneğin;

$$E_{1,1}(z) = E_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z \quad (2.11)$$

$$E_{1,2}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(n+2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)!} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{e^z - 1}{z} \quad (2.12)$$

$$E_{1,3}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(n+3)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+2)!} = \frac{1}{z^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+2}}{(n+2)!} = \frac{e^z - 1 - z}{z^2} \quad (2.13)$$

ve en genel haliyle

$$E_{1,k}(z) = \frac{1}{z^{k-1}} \left[ e^z - \sum_{n=0}^{k-2} \frac{z^n}{n!} \right] \quad (2.14)$$

şeklinde olacaktır.

Mittag-Leffler fonksiyonunun özel birer durumu olarak ifade edilen hiperbolik sinüs ve hiperbolik kosinüs fonksiyonları aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$E_{2,1}(z^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{\Gamma(2n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} = \cosh(z) \quad (2.15)$$

$$E_{2,2}(z^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{\Gamma(2n+2)} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{\sinh(z)}{z} \quad (2.16)$$

Mittag-Leffler fonksiyonu kullanılarak,  $n$ . dereceden hiperbolik ve  $n$ . dereceden trigonometrik fonksiyonların sırasıyla en genel halleri ise

$$h_r(z, k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{kn+r-1}}{(kn+r-1)!} = z^{r-1} E_{k,r}(z^k), \quad (r = 1, 2, \dots, n) \quad (2.17)$$

$$m_r(z, k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{kn+r-1}}{(kn+r-1)!} = z^{r-1} E_{k,r}(-z^k), \quad (r = 1, 2, \dots, n) \quad (2.18)$$

şeklinde verilir [2]-[6].

## 2.2. Türev ve İntegral Arasındaki İlişkiler

### 2.2.1. Kullanılan Notasyon ve Tanımlar

Fraksiyonel (kesirli) türev ve integralleri tek çatı altında diferintegraller (türevin integrale uygulanması durumu) olarak ifade etmeden önce, tamsayı değerleri ( $n$ ) için türev ve integralin ortak yazımı verilecektir. Burada  $n$ ,  $N$  pozitif tamsayıları,  $q$  ve  $p$  ise herhangi bir sayıyı göstermektedir. Bir fonksiyonun  $n$ . türevi genelde

$$\frac{d^n x}{dt^n} \quad (2.19)$$

olarak gösterilir ve integral de türevin tersi bir işlem olduğundan,

$$\frac{d^{-1}x}{dt^{-1}} = \int_0^t x(t_0)dt_0 \quad (2.20)$$

notasyonu elde edilir. Bu notasyon ile ardışık integralleri aşağıdaki gibi ifade etmek mümkündür.

$$\frac{d^{-2}x}{dt^{-2}} = \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} x(t_0)dt_0 \quad (2.21)$$

...

...

$$\frac{d^{-n}x}{dt^{-n}} = \int_0^t dt_{n-1} \int_0^{t_{n-1}} dt_{n-2} \cdots \int_0^{t_2} dt_1 \int_0^{t_1} x(t_0)dt_0 \quad (2.22)$$

Alt sınırın sıfırdan farklı olduğu durumlarda ise integral gösterimlerimiz

$$\frac{d^{-1}x}{d(t-a)^{-1}} = \int_a^t x(t_0)dt_0 \quad (2.23)$$

...

...

$$\frac{d^{-n}x}{d(t-a)^{-n}} = \int_a^t dt_{n-1} \int_a^{t_{n-1}} dt_{n-2} \cdots \int_a^{t_2} dt_1 \int_a^{t_1} x(t_0)dt_0 \quad (2.24)$$

şeklinde olacaktır. Burada türev için aşağıdaki eşitliğin

$$\frac{d^n}{d(t-a)^n} = \frac{d^n}{dt^n} \quad (2.25)$$

sağlanmasına karşın, integraller söz konusu olduğunda

$$\frac{d^{-n}}{d(t-a)^{-n}} \neq \frac{d^{-n}}{dt^{-n}} \quad (2.26)$$

aynı durumun geçerli olmadığı görülmektedir.

$n$ . mertebeden türev ve  $n$ -ardışık integrali için yaygın olarak kullanılan gösterimlerden bir diğeri ise sırasıyla

$$x^{(n)}(t) \quad (2.27)$$

$$x^{(-n)} = \int_{a_n}^t dt_{n-1} \int_{a_{n-2}}^{t_{n-1}} dt_{n-2} \cdots \int_{a_2}^{t_2} dt_1 \int_{a_1}^{t_1} x(t_0) dt_0 \quad (2.28)$$

şeklindedir. Türev ve integrallerin literatürde kullanılan en genel gösterimleri aşağıdaki gibi verilmektedir.

$$\frac{d^q x(t)}{[dt]^q} = \frac{d^q x(t)}{dt^q} = x^{(q)}(t) \quad (2.29)$$

Aynı zamanda bu gösterimlerin farklı kullanımları da

$$\frac{d^q x(t)}{d(t-a)^q} = D_a^q x(t) = {}_a D_t^q x(t) \quad (2.30)$$

şeklinde verilir.

### 2.2.2. Bir Fonksiyonun $n$ . Mertebeden Türevi

Türevin limit tanımı kullanılarak bir fonksiyonun birinci mertebeden türevi

$$\frac{d^1 x}{dt^1} = \frac{dx(t)}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t) - x(t-h)}{h} \quad (2.31)$$

bağıntısıyla verilir. Benzer şekilde ikinci ve üçüncü mertebeden türevleri

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t) - 2x(t-h) + x(t-2h)}{(h)^2} \quad (2.32)$$

$$\frac{d^3 x}{dt^3} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t) - 3x(t-h) + 3x(t-2h) - x(t-3h)}{(h)^3} \quad (2.33)$$

şeklinde ifade edilir. Burada zıt işaretlerle verilen katsayıların binom katsayıları olduğu göz önünde bulundurulursa  $n$ . türev için eşitlik

$$\frac{d^n x}{dt^n} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} x(t-jh)}{(h)^n} \quad (2.34)$$

şeklinde tanımlanacaktır.  $h$ 'ın sıfıra sürekli olarak (aradaki bütün değerleri de alacak şekilde) yaklaşması integral ile ortak tanım yapabilmek adına sınırlandırılmış bir limit işlemini gerektirecektir. Bunun için  $[a, t]$  aralığı  $N$  eşit parçaya bölündüğünde

$$h_N = \frac{[t-a]}{N} \quad N = 1, 2, 3, \dots \quad (2.35)$$

olmak üzere (2.34) de verilen bağıntı

$$\frac{d^n x}{dt^n} = \lim_{h_N \rightarrow 0} \frac{\sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} x(t - jh_N)}{(h_N)^n} \quad (2.36)$$

şekline dönüşecektir.  $\binom{n}{j}$  olarak gösterilen binom katsayıları  $j > n$  değerleri için sıfır olacağından toplamın sınırı  $N - 1$ 'e kadar alınabilir.

$$\frac{d^n x}{dt^n} = \lim_{h_N \rightarrow 0} \frac{\sum_{j=0}^{N-1} (-1)^j \binom{n}{j} x(t - jh_N)}{(h_N)^n} \quad (2.37)$$

Buradan limitin sürekli durumlarda var olduğu anlayışı ile  $n$ . mertebeden türev

$$\frac{d^n x}{dt^n} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j=0}^{N-1} (-1)^j \binom{n}{j} x(t - j(\frac{t-a}{N}))}{(\frac{t-a}{N})^n} \quad (2.38)$$

şeklinde ifade edilmektedir.

### 2.2.3. $n$ -Ardışık İntegralin Genel Gösterimi

Bir fonksiyonun integrali,  $[a, t]$  kapalı aralığı üzerinde sürekli  $x$  fonksiyon eğrisinin altında kalan alana veya Riemann toplamı olarak bilinen  $h_N \sum_{j=0}^{N-1} x(t - jh_N)$  ifadesinin limit değerine eşittir.

$$\begin{aligned}
 \frac{d^{-1}x}{d(t-a)^{-1}} &= \int_a^t x(t_0) dt_0 \\
 &= \lim_{h_N \rightarrow 0} h_N [x(t) + x(t - h_N) + x(t - 2h_N) + \dots + x(a + h_N)] \\
 &= \lim_{h_N \rightarrow 0} h_N \sum_{j=0}^{N-1} x(t - jh_N)
 \end{aligned} \tag{2.39}$$

Daha önce olduğu gibi burada da  $h_N = \frac{[t-a]}{N}$  eşitliği kullanılmıştır. Bu yazımın ikili integrali

$$\begin{aligned}
 \frac{d^{-2}x}{d(t-a)^{-2}} &= \int_a^t dt_1 \int_a^{t_1} x(t_0) dt_0 \\
 &= \lim_{h_N \rightarrow 0} (h_N)^2 \left[ x(t) + 2x(t - h_N) + 3x(t - 2h_N) + \dots + Nx(a + h_N) \right] \\
 &= \lim_{h_N \rightarrow 0} (h_N)^2 \sum_{j=0}^{N-1} (j+1)x(t - jh_N)
 \end{aligned} \tag{2.40}$$

şeklinde ve üçlü integrali ise

$$\begin{aligned}
 \frac{d^{-3}x}{d(t-a)^{-3}} &= \int_a^t dt_2 \int_a^{t_2} dt_1 \int_a^{t_1} x(t_0) dt_0 \\
 &= \lim_{h_N \rightarrow 0} (h_N)^3 \sum_{j=0}^{N-1} \frac{(j+1)(j+2)}{2} x(t - jh_N)
 \end{aligned} \tag{2.41}$$

biçimindedir. Dolayısıyla  $n$ -ardışık integralinin genel hali aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\begin{aligned} \frac{d^{-n}x}{d(t-a)^{-n}} &= \lim_{h_N \rightarrow 0} (h_N)^n \sum_{j=0}^{N-1} \binom{j+n-1}{j} x(t-jh_N) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{t-a}{N} \right)^n \sum_{j=0}^{N-1} \binom{j+n-1}{j} x\left(t-j\left(\frac{t-a}{N}\right)\right) \end{aligned} \quad (2.42)$$

(2.42) eşitliğinde verilen toplam ifadesindeki katsayılar (2.38) eşitliğindeki toplamdan farklı olarak  $\binom{j+n-1}{j}$  şeklinde devam etmektedir ve bütün terimler artı işaretlidir.

#### 2.2.4. Tamsayı Mertebeli Türev ve İntegral Arasındaki İlişki

Gamma fonksiyonlarının

$$(-1)^j \binom{n}{j} = \binom{j-n-1}{j} = \frac{\Gamma(j-n)}{\Gamma(-n)\Gamma(j+1)} \quad (2.43)$$

ilişkisi kullanılarak, tamsayı değerler için türev ve integrali aşağıdaki gibi tek bir formül ile ifade edebiliriz.

$$\frac{d^n x}{d(t-a)^n} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{t-a}{N}\right)^{-n}}{\Gamma(-n)} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\Gamma(j-n)}{\Gamma(j+1)} x\left(t-j\left(\frac{t-a}{N}\right)\right) \quad (2.44)$$

Burada  $n$ 'nin pozitif değerleri için türevin (2.38), negatif değerleri için ise integralin (2.42) genel tanımına ulaşabiliriz [2]-[6], [23].

## 2.3. Fraksiyonel Türev ve İntegraller

### 2.3.1. Grünwald-Letnikov Fraksiyonel Türevi

Bir önceki bölümde verilen (2.44) eşitliğinde türev ve integral kavramlarının keyfi mertebeden bir  $q$  (reel veya kompleks) sayısı için tanımlı olduğunu düşünürsek, fraksiyonel türev ve integralin Grünwald-Letnikov tarafından verilmiş en genel tanımını aşağıdaki gibi ifade edebiliriz.

$${}_a D_t^q x = \frac{d^q x}{d(t-a)^q} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{t-a}{N}\right)^{-q}}{\Gamma(-q)} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\Gamma(j-q)}{\Gamma(j+1)} x\left(t - j\left(\frac{t-a}{N}\right)\right) \quad (2.45)$$

Bu tanımın en büyük avantajı, verilen bir fonksiyonun diferintegralinin o fonksiyonun türevlerine veya integrallerine gerek duyulmadan, sadece kendisinin aldığı değerler ile bulunabilmesidir. (2.45) tanımında  $\Gamma(-q)$ ,  $q$ 'nin pozitif değerleri için sonsuz olmasına karşın  $\frac{\Gamma(j-q)}{\Gamma(j+1)}$  oranı sonlu bir sayıdır.

Grünwald-Letnikov tanımına bağlı olarak  $n$ 'nin pozitif tamsayı ve  $q$ 'nin bütün değerleri arasındaki ilişkiyi aşağıdaki şekilde belirtmek mümkündür.

$$\frac{d^n}{dt^n} \frac{d^q x}{d(t-a)^q} = \frac{d^{n+q} x}{d(t-a)^{n+q}} \quad (2.46)$$

Bu ilişkinin gerçekleştiğini gösterebilmek adına  $n = 1$  olduğu durumu inceleyelim. Öncelikle  $h_N = \frac{[t-a]}{N}$  eşitliğini kullanarak

$$\frac{d^q x}{d(t-a)^q} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(h_N)^{-q}}{\Gamma(-q)} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\Gamma(j-q)}{\Gamma(j+1)} x(t - j h_N) \quad (2.47)$$

şeklinde yazabiliriz.  $a \leq s \leq t - h_N$  aralığı  $N - 1$  eşit parçaya bölündüğünde  $(t - h_N)$

noktasındaki  $\frac{d^q x}{d(t-a)^q}$  türevi aşağıdaki şekilde olacaktır.

$$\begin{aligned} \frac{d^q x}{d(t-a)^q}(t-h_N) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(h_N)^{-q}}{\Gamma(-q)} \sum_{j=0}^{N-2} \frac{\Gamma(j-q)}{\Gamma(j+1)} x(t-h_N-jh_N) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(h_N)^{-q}}{\Gamma(-q)} \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\Gamma(j-q-1)}{\Gamma(j)} x(t-jh_N) \end{aligned} \quad (2.48)$$

Türev tanımı kullanılarak (2.47) eşitliğinin yeniden türevi alındığında ifade

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{d^q x}{d(t-a)^q} &= \lim_{N \rightarrow \infty} (h_N)^{-1} \left[ \frac{d^q x}{d(t-a)^q}(t) - \frac{d^q x}{d(t-a)^q}(t-h_N) \right] \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(h_N)^{-q-1}}{\Gamma(-q)} \Gamma(-q) x(t) \\ &\quad + \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(h_N)^{-q-1}}{\Gamma(-q)} \left[ \sum_{j=1}^{N-1} \left\{ \frac{\Gamma(j-q)}{\Gamma(j+1)} - \frac{\Gamma(j-q-1)}{\Gamma(j)} \right\} x(t-jh_N) \right] \end{aligned} \quad (2.49)$$

şekline dönüşecektir. Gamma fonksiyonları arasındaki

$$\frac{\Gamma(j-q)}{\Gamma(j+1)} - \frac{\Gamma(j-q-1)}{\Gamma(j)} = \frac{\Gamma(-q)}{\Gamma(-q-1)} \frac{\Gamma(j-q-1)}{\Gamma(j+1)} \quad (2.50)$$

bağıntı (2.49) ifadesinde kullanıldığında

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{d^q x}{d(t-a)^q} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(h_N)^{-q-1}}{\Gamma(-q-1)} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\Gamma(j-q-1)}{\Gamma(j+1)} x(t-jh_N) \\ &= \frac{d^{q+1} x}{d(t-a)^{q+1}} \end{aligned} \quad (2.51)$$

eşitliği elde edilir. Sonuç olarak  $n = 1$  için (2.46) ilişkisi doğrudur. Genel formüle ise induksiyon yöntemi kullanılarak ulaşılır [2]-[6], [23].

### 2.3.2. Riemann-Liouville (R-L) Fraksiyonel Türevi

Sıkça kullanılan Riemann-Liouville tanımı Cauchy formülünden yararlanılarak elde edilir. Cauchy formülüne ulaşabilmek adına  $n > 0$  tamsayı ve  $a$  bir sabit olmak üzere aşağıdaki integralin verilmiş olduğunu kabul edelim.

$$I_n(t) = \int_a^t (t - \tau)^{n-1} x(\tau) d\tau \quad (2.52)$$

Öncelikle (2.52) integraline

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{A(t)}^{B(t)} F(t, \tau) d\tau \\ &= \int_{A(t)}^{B(t)} \frac{\partial F(t, \tau)}{\partial t} d\tau + F(t, B(t)) \frac{dB(t)}{dt} - F(t, A(t)) \frac{dA(t)}{dt} \end{aligned} \quad (2.53)$$

olarak verilen *Leibnitz Kuralı'nın* uygulanması durumunda  $I_n$  fonksiyonunun türevi

$$\frac{dI_n}{dt} = (n-1) \int_a^t (t - \tau)^{n-2} x(\tau) d\tau + \left[ (t - \tau)^{n-1} x(\tau) \right]_{\tau=t} \quad (2.54)$$

şeklinde olacaktır. Buradan  $n > 1$  değeri için (eşitliğin sağında bulunan ikinci değer sıfırdır) aşağıdaki ifadeye

$$\frac{dI_n}{dt} = (n-1)I_{n-1} \quad (2.55)$$

$n = 1$  olduğu durumda ise

$$\frac{dI_1}{dt} = x(t) \quad (2.56)$$

ifadesine ulaşırız. (2.54) denkleminin  $k$  kez türevinin alınması durumunda

$$\frac{d^k I_n}{dt^k} = (n-1)(n-2)\dots(n-k)I_{n-k} \quad (2.57)$$

eşitliği elde edilir. Bu taktirde  $k = n - 1$  değeri için yukarıdaki ifademiz

$$\frac{d^{n-1} I_n}{dt^{n-1}} = (n-1)!I_1(t) \quad (2.58)$$

şekline dönüşecektir. (2.56)'de göz önünde bulundurulduğunda aşağıdaki genel hal bulunur.

$$\frac{d^n I_n}{dt^n} = (n-1)!x(t) \quad (2.59)$$

$n \geq 1$  değeri için  $I_n(t)$  fonksiyonunun kendisi ve  $(n-1)$ 'e kadar olan bütün türevleri  $t = a$  noktasında sıfır olacağından (2.58) ve (2.59) denklemleri kullanılarak

$$I_1(t) = \int_a^t x(t_1) dt_1 \quad (2.60)$$

$$I_2(t) = \int_a^t I_1(t_2) dt_2 = \int_a^t \int_a^{t_2} x(t_1) dt_1 dt_2 \quad (2.61)$$

...

...

$$I_n(t) = (n-1)! \int_a^t \int_a^{t_n} \dots \int_a^{t_3} \int_a^{t_2} x(t_1) dt_1 dt_2 \dots dt_{n-1} dt_n \quad (2.62)$$

ifadesine ulaşılır. Bu eşitlik bize *Cauchy İntegral Formülü* olarak bilinen aşağıdaki denklemi verir.

$$\int_a^t \int_a^{t_n} \dots \int_a^{t_3} \int_a^{t_2} x(t_1) dt_1 dt_2 \dots dt_{n-1} dt_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} x(\tau) d\tau \quad (2.63)$$

Riemann-Liouville tanımına ulaşabilmek için (2.63)'de tamsayı ile sınırlı olan  $n$  yerine her değeri alabilen bir  $q$  değeri yazılarak

$$\left[ \frac{d^q x}{d(t-a)^q} \right]_{R-L} = \frac{1}{\Gamma(-q)} \int_a^t (t-s)^{-q-1} x(s) ds, \quad (q < 0) \quad (2.64)$$

ifadesi elde edilir. Bu formüldeki integral sadece  $q < 0$  değerleri için yakınsaktır. Burada  $[\dots]_{R-L}$  notasyonu diferintegralin Riemann-Liouville yöntemi ile bulunduğunu göstermektedir. (2.64) ifadesinde R-L alt yazısının kaldırılabilmesi adına bütün  $q$

değerleri için (2.45) ifadesi ile uyuşan sonuçlar verdiğini göstermek yeterli olacaktır. Öncelikle,  $q < 0$  olmak üzere  $a \leq s \leq t$  aralığında sonlu değerler alan bir  $x(t)$  fonksiyonu için, her iki tanımın da aynı sonucu verdiğini göstermek adına farklarını aşağıdaki gibi yazalım.

$$\Delta = \frac{d^q x}{d(t-a)^q} - \left[ \frac{d^q x}{d(t-a)^q} \right]_{R-L} \quad (2.65)$$

(2.45) ve (2.64) eşitlikleri kullanıldığında  $\Delta$  ifadesi

$$\Delta = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \frac{(h_N)^{-q}}{\Gamma(-q)} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\Gamma(j-q)}{\Gamma(j+1)} x(t-jh_N) \right] - \frac{1}{\Gamma(-q)} \int_0^{t-a} \frac{x(t-s)}{s^{1+q}} ds \quad (2.66)$$

şeklini alacaktır. İkinci terimdeki integral Riemann toplamı olarak yazılırsa

$$\Delta = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(h_N)^{-q}}{\Gamma(-q)} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\Gamma(j-q)}{\Gamma(j+1)} x(t-jh_N) - \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{x(t-jh_N) h_N}{\Gamma(-q) (jh_N)^{1+q}} \quad (2.67)$$

bulunur. Buradan da

$$\begin{aligned} \Delta &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(h_N)^{-q}}{\Gamma(-q)} \sum_{j=0}^{N-1} x(t-jh_N) \left[ \frac{\Gamma(j-q)}{\Gamma(j+1)} - j^{-1-q} \right] \\ &= \frac{(t-a)^{-q}}{\Gamma(-q)} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{N-1} x\left(\frac{Nt-jt+ja}{N}\right) N^q \left[ \frac{\Gamma(j-q)}{\Gamma(j+1)} - j^{-1-q} \right] \end{aligned} \quad (2.68)$$

ifadesi elde edilir. Burada  $h_N = \frac{(t-a)}{N}$  olarak alınmıştır. Sağ taraftaki toplamı önce

0'dan  $(J-1)$ 'e, sonra da  $J$ 'den  $(N-1)$ 'e olmak üzere ayırırsak

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{(t-a)^{-q}}{\Gamma(-q)} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{J-1} x\left(\frac{Nt-jt+ja}{N}\right) N^q \left[ \frac{\Gamma(j-q)}{\Gamma(j+1)} - j^{-1-q} \right] \\ &+ \frac{(t-a)^{-q}}{\Gamma(-q)} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=J}^{N-1} x\left(\frac{Nt-jt+ja}{N}\right) \left(\frac{j}{N}\right)^{-2-q} \\ &\times \left[ \frac{q(q+1)}{2N} + \frac{0(j^{-1})}{N} \right] \end{aligned} \quad (2.69)$$

eşitliği bulunacaktır. Birinci toplamda  $q < -1$  için parantez içindeki terimler sonlu olduğundan,  $N \rightarrow \infty$  limitinde  $N^q$  çarpanı ilk terimin sıfıra gitmesini sağlayacaktır. Benzer şekilde  $q \leq -2$  için, ikinci terimde  $N \rightarrow \infty$  limitinde sıfıra gidecektir. Açıkça görüldüğü gibi  $q \leq -2$  değerleri ve  $a \leq s \leq t$  aralığında sonlu değerler alan bir  $x(t)$  fonksiyonu için,  $\Delta = 0$  olacağından her iki tanım da aynı sonucu verecektir.

$$\frac{d^q x}{d(t-a)^q} = \left[ \frac{d^q x}{d(t-a)^q} \right]_{R-L}, \quad q \leq -2 \quad (2.70)$$

Riemann-Liouville tanımını bütün  $q$  değerlerinde geçerli kılmak için (2.46) ifadesinin Grünwald-Letnikov tanımında olduğu gibi burada da sağlandığı şartını koşarsak

$$\left[ \frac{d^q x}{d(t-a)^q} \right]_{R-L} = \frac{d^n}{dt^n} \left[ \frac{d^{q-n} x}{d(t-a)^{q-n}} \right]_{R-L} \quad (2.71)$$

şeklinde olacaktır. (2.71) ifadesinde bir  $q$  değeri yerine,  $q-n \leq -2$  olacak şekilde pozitif tamsayı değerleri alan bir  $n$  değeri seçer ve (2.70) sonucunu kullanırsak

$$\left[ \frac{d^q x}{d(t-a)^q} \right]_{R-L} = \frac{d^n}{dt^n} \left[ \frac{d^{q-n} x}{d(t-a)^{q-n}} \right] \quad (2.72)$$

eşitliği elde edilir. Bu da bize Grünwald-Letnikov ve Riemann-Liouville tanımlarının bütün  $q$  değerleri için sağlandığını gösteren

$$\left[ \frac{d^q x}{d(t-a)^q} \right]_{R-L} = \left[ \frac{d^{q-n} x}{d(t-a)^{q-n}} \right] \quad (2.73)$$

sonucunu verecektir. Dolayısıyla artık  $R-L$  altyazısı silinecektir.

*Tanım 2.1:* ( Riemann-Liouville İntegrali ve Türevi)  $q < 0$  olmak üzere

$${}_a D_t^q x = \frac{d^q x}{d(t-a)^q} = \frac{1}{\Gamma(-q)} \int_a^t (t-s)^{-q-1} x(s) ds \quad (2.74)$$

ifadesi Riemann-Liouville fraksiyonel integrali olarak adlandırılır iken,  $q \geq 0$  değerleri için

$${}_a D_t^q x = \frac{d^q x}{d(t-a)^q} = \frac{d^n}{dt^n} \left[ \frac{1}{\Gamma(n-q)} \int_a^t (t-s)^{-(q-n)-1} x(s) ds \right] \quad (2.75)$$

elde edilen ifade ise Riemann-Liouville fraksiyonel türevi olarak adlandırılır.

Aşağıda (2.74) da verilen  $R-L$  fraksiyonel integral operatörü ve (2.75) de verilen  $R-L$  fraksiyonel türev operatörü için bazı özellikler verilmiştir:

i) Fraksiyonel operatör lineer bir operatördür.

$${}_aD_t^q (\gamma x_1 + \mu x_2) = \gamma {}_aD_t^q x_1 + \mu {}_aD_t^q x_2 \quad (2.76)$$

ii) Fraksiyonel operatör homojen olma özelliğine sahiptir.

$${}_aD_t^q (Cx(t)) = C {}_aD_t^q x(t) \quad (2.77)$$

Burada  $C$  herhangi bir sabittir.

iii) Fraksiyonel operatörlerin birleşme özelliği mevcuttur. Diferintegrallerle yapılan işlemlerde

$$D^q D^p = D^p D^q \quad (2.78)$$

$$D^q D^p = D^{q+p} \quad (2.79)$$

$$D^q x = y \rightarrow x = D^{-q} y \quad (2.80)$$

gibi işlemler ancak belirli durumlarda geçerlidir. İkinci eşitliği göz önünde bulundurursak  $q$  ve  $p$ 'nin herhangi bir değeri alabildiği durumlarda, iki diferintegral operatörünün

$$\begin{aligned} {}_aD_t^q ({}_aD_t^p x) &= \frac{d^q}{d(t-a)^q} \frac{d^p x}{d(t-a)^p} \\ &= \frac{d^{q+p} x}{d(t-a)^{q+p}} = {}_aD_t^{q+p} x \end{aligned} \quad (2.81)$$

şeklinde birleştirilebilmesi ancak,

$$x - {}_aD_t^{-p} ({}_aD_t^p x) = 0 \quad (2.82)$$

şartını sağlayan  $x$  fonksiyonları için geçerlidir. (2.82) şartının sağlanmadığı durumlarda ise, diferintegral operatörlerinin birleştirilmesi

$${}_aD_t^q ({}_aD_t^p x) = {}_aD_t^{q+p} x - {}_aD_t^{q+p} [x - {}_aD_t^{-p} ({}_aD_t^p x)] \quad (2.83)$$

şeklinde yapılır. Buradan da görüldüğü gibi  ${}_aD_t^p$  ve  ${}_aD_t^{-p}$  operatörleri genelde birbirlerinin tersi olsalar da, bu durum her zaman geçerli değildir. Aynı zamanda buradaki sorunun  $q$  ve  $p$ 'nin kesirli değerleri ile de sınırlı olmadığını belirtmek gerekir.

$n$  ve  $N$ 'nin pozitif tamsayı olduğu durumlarda çoklu türev ve integraller için aşağıdaki özellikler geçerlidir.

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{d(t-a)^n} \left[ \frac{d^N x}{d(t-a)^N} \right] &= \frac{d^{n+N} x}{d(t-a)^{n+N}} \\ &= \frac{d^N}{d(t-a)^N} \left[ \frac{d^n x}{d(t-a)^n} \right] \end{aligned} \quad (2.84)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^{-n}}{d(t-a)^{-n}} \left[ \frac{d^{-N} x}{d(t-a)^{-N}} \right] &= \frac{d^{-n-N} x}{d(t-a)^{-n-N}} \\ &= \frac{d^{-N}}{d(t-a)^{-N}} \left[ \frac{d^{-n} x}{d(t-a)^{-n}} \right] \end{aligned} \quad (2.85)$$

Ancak,

$$\frac{d^{\pm n}}{d(t-a)^{\pm n}} \left[ \frac{d^{\mp N} x}{d(t-a)^{\mp N}} \right] \quad (2.86)$$

genel ifadesini bulmak istersek, (2.86) ifadesi her zaman

$$\frac{d^{\pm n \mp N} x}{d(t-a)^{\pm n \mp N}} \quad (2.87)$$

eşitliğini sağlamayacaktır.

$[a, b]$  aralığında sürekli bir  $x(t)$  fonksiyonunun  $N$ . türevinin var olduğunu kabul edelim ve bu  $N$ . türevin integralini alalım.

$$\int_a^t x^{(N)}(t) dt = x^{(N-1)}(t) \Big|_a^t = x^{(N-1)}(t) - x^{(N-1)}(a) \quad (2.88)$$

(2.88) ifadesi için tekrar integral alınırsa

$$\begin{aligned} \int_a^t \left( \int_a^t x^{(N)}(t) dt \right) dt &= \int_a^t \left( x^{(N-1)}(t) - x^{(N-1)}(a) \right) dt \\ &= x^{(N-2)}(t) - x^{(N-2)}(a) - (t-a)x^{(N-1)}(a) \end{aligned} \quad (2.89)$$

ve aynı işlem  $n$  defa tekrarlanırsa

$$\int_a^t \dots \int_a^t x^{(N)}(t) (dt)^n = x^{(N-n)}(t) - x^{(N-n)}(a) - (t-a)x^{(N-n-1)}(a) - \frac{(t-a)^2}{2!}x^{(N-n-2)}(a) \dots - \frac{(t-a)^{n-1}}{(n-1)!}x^{(N-1)}(a) \quad (2.90)$$

bulunacaktır. Burada eşitliğin sol tarafı

$$\frac{d^{-n}}{d(t-a)^{-n}} \left[ \frac{d^N x}{d(t-a)^N} \right] = \int_a^t \dots \int_a^t x^{(N)}(t) (dt)^n \quad (2.91)$$

olduğundan,

$$\frac{d^{-n}}{d(t-a)^{-n}} \left[ \frac{d^N x}{d(t-a)^N} \right] = x^{(N-n)}(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-a)^k}{k!} x^{(N+k-n)}(a) \quad (2.92)$$

yazabiliriz. Bu eşitlikte  $N = 0$  yazıp türevini alalım.

$$\frac{d^{-n}x}{d(t-a)^{-n}} = x^{(-n)}(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-a)^k}{k!} x^{(k-n)}(a) \quad (2.93)$$

$$\frac{d}{d(t-a)} \left[ \frac{d^{-n}x}{d(t-a)^{-n}} \right] = x^{(1-n)}(t) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(t-a)^{k-1}}{(k-1)!} x^{(k-n)}(a) \quad (2.94)$$

Türev alma işlemi  $N$  kez tekrarlanırsa

$$\frac{d^N}{d(t-a)^N} \left[ \frac{d^{-n}x}{d(t-a)^{-n}} \right] = x^{(N-n)}(t) - \sum_{k=N}^{n-1} \frac{(t-a)^{k-N}}{(k-N)!} x^{(k-n)}(a) \quad (2.95)$$

bulunacaktır. Burada  $N \geq n$  olduğu durumda alt limitin türeve katkısı olmadığından ifademiz aşağıdaki eşitliğe dönüşecektir.

$$\frac{d^{N-n}x}{d(t-a)^{N-n}} = x^{(N-n)}(t) \quad (2.96)$$

$N - n < 0$  olduğu durumda ise (2.93) eşitliği de kullanılarak

$$\frac{d^{N-n}x}{d(t-a)^{N-n}} = x^{(N-n)}(t) - \sum_{k=0}^{n-N-1} \frac{(t-a)^k}{k!} x^{(k+N-n)}(a) \quad (2.97)$$

elde edilir. Bu eşitlik (2.96) eşitliğini de içermektedir. (2.95) eşitliğinde

$$k \rightarrow k + N \quad (2.98)$$

değişikliği yapılırsa

$$\frac{d^N}{d(t-a)^N} \left[ \frac{d^{-n}x}{d(t-a)^{-n}} \right] = x^{(N-n)}(t) - \sum_{k=0}^{n+N-1} \frac{(t-a)^k}{k!} x^{(k+N-n)}(a) \quad (2.99)$$

olacaktır. Bu ifade (2.97) ile karşılaştırılırsa

$$\frac{d^N}{d(t-a)^N} \left[ \frac{d^{-n}x}{d(t-a)^{-n}} \right] = \frac{d^{N-n}x}{d(t-a)^{N-n}} \quad (2.100)$$

eşitliğine ulaşılır. Açıkça görüldüğü gibi önce integralin sonra da türevin alındığı durumlarda operatörler (2.100) eşitliğinde olduğu gibi birleştirilir.

Şimdi (2.92) eşitliğinin sağ tarafındaki toplamı

$$\begin{aligned} \frac{d^{-n}}{d(t-a)^{-n}} \left[ \frac{d^N x}{d(t-a)^N} \right] &= x^{(N-n)}(t) - \sum_{k=0}^{n-N-1} \frac{(t-a)^k}{k!} x^{(N+k-n)}(a) \\ &\quad - \sum_{k=n-N}^{n-1} \frac{(t-a)^k}{k!} x^{(N+k-n)}(a) \end{aligned} \quad (2.101)$$

şeklinde parçalı yazılır ve (2.97) denklemi ile karşılaştırılırsa

$$\frac{d^{-n}}{d(t-a)^{-n}} \left[ \frac{d^N x}{d(t-a)^N} \right] = \frac{d^{N-n} x}{d(t-a)^{N-n}} - \sum_{k=n-N}^{n-1} \frac{(t-a)^k}{k!} x^{(N+k-n)}(a) \quad (2.102)$$

bulunacaktır. Yani, önce türev ve sonra da integralin alındığı durumlarda (2.100) sonucundan farklı olarak, operatörler yukarıdaki gibi birleştirilmelidir.

iv) Fraksiyonel operatörler terim terime integre edilebilme özelliğine sahiptir. Düzgün yakınsak bir serinin diferintegral operatörünün doğrusal olma özelliği kullanılarak bütün  $q$  değerleri için

$$\begin{aligned} {}_a D_t^q \sum_{j=0}^{\infty} x_j &= \frac{d^q}{d(t-a)^q} \sum_{j=0}^{\infty} x_j \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{d^q x_j}{d(t-a)^q} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} {}_a D_t^q x_j \end{aligned} \quad (2.103)$$

şeklinde terim terime diferintegrali alınabilir. Diferintegrali alınan seri de aynı aralıkta yakınsak olacaktır.

v) Ayrıca  $x$  ve  $y$  gibi iki fonksiyonun *Leibnitz Kuralı* yani çarpımının diferintegrali genel bir  $q$  değeri için

$${}_aD_t^q(xy) = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{q}{j} ({}_aD_t^{q-j}x) ({}_aD_t^jy) \quad (2.104)$$

formülü ile hesaplanır.

Aşağıda  $R-L$  fraksiyonel operatörü kullanılarak bazı fonksiyonların diferintegral hesaplamaları verilecektir.

i) İlk olarak aşağıdaki gibi bir fonksiyonu inceleyelim:

$$(t-a)^p, p > -1.$$

Burada  $p$  değeri için  $p > -1$  olmasının dışında başka bir koşul mevcut değildir. Riemann-Liouville integral tanımını kullanarak,

$${}_aD_t^q(t-a)^p = \frac{1}{\Gamma(-q)} \int_a^t \frac{(s-a)^p ds}{(t-s)^{q+1}}, \quad q < 0 \quad (2.105)$$

yazabiliriz. Bu eşitlikte  $s-a = v$  dönüşümü yapılırsa

$${}_aD_t^q(t-a)^p = \frac{1}{\Gamma(-q)} \int_0^{t-a} \frac{v^p ds}{(t-a-v)^{q+1}} \quad (2.106)$$

olacaktır. (2.105) eşitliğinde  $v = (t - a)u$  dönüşümü uygulanırsa

$${}_aD_t^q (t - a)^p = \frac{(t - a)^{p-q}}{\Gamma(-q)} \int_0^1 u^p (1 - u)^{-q-1}, \quad q < 0 \quad (2.107)$$

denklemini elde edilir. Buradan ise, beta fonksiyonunun

$$B(p, q) = \int_0^1 \tau^{p-1} (1 - \tau)^{q-1} d\tau, \quad p > 0 < q \quad (2.108)$$

tanımını ve gamma fonksiyonu ile olan ilişkisi kullanılarak

$$\begin{aligned} {}_aD_t^q (t - a)^p &= \frac{(t - a)^{p-q}}{\Gamma(-q)} B(p + 1, -q) \\ &= \frac{\Gamma(p + 1) (t - a)^{p-q}}{\Gamma(p - q + 1)}, \quad q < 0, \quad p > -1 \end{aligned} \quad (2.109)$$

bulunur. (2.109) da elde ettiğimiz sonuç aynı zamanda  $q \geq 0$  değerleri için de geçerlidir.

ii) Şimdi sabit bir sayının diferintegralini hesaplamak adına öncelikle 1 sayısını ele alalım. Grünwald-Letnikov tanımını 1 sayısı üzerinde uygulanırsa,

$${}_aD_t^q 1 = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{N}{t - a} \right)^{qN-1} \sum_{j=0}^{qN-1} \frac{\Gamma(j - q)}{\Gamma(j + 1) \Gamma(-q)} \quad (2.110)$$

olacaktır. Bu takdirde gamma fonksiyonunun özelliği kullanılarak aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\begin{aligned}
{}_a D_t^q 1 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{N}{t-a} \right)^q \frac{\Gamma(N-q)}{\Gamma(1-q)\Gamma(N)} \\
&= \frac{(t-a)^{-q}}{\Gamma(1-q)}
\end{aligned} \tag{2.111}$$

Kolayca görüldüğü gibi, bu eşitlik  $q$ 'nun tamsayı değerler aldığı durumlarda beklenen sonuçları verecektir. Herhangi bir  $C$  sabiti için ise eşitliğimiz

$${}_a D_t^q C = C {}_a D_t^q (1) = C \frac{(t-a)^{-q}}{\Gamma(1-q)} \tag{2.112}$$

şeklinde olacaktır [2]-[6], [23].

### 2.3.3. Caputo Manada Fraksiyonel Türev

Fraksiyonel diferansiyel hesaplamanın Riemann-Liouville tanımları fraksiyonel türev ve integral teorisinin gelişmesinde ve onun uygulamalarıyla ilgilenen matematiksel çalışmalarda önemli bir rol oynamıştır. Bununla birlikte fraksiyonel başlangıç değer problemleri için aşağıdaki gibi bir başlangıç koşulunu açıklamak oldukça zor bir durumdur.

$$\lim_{t \rightarrow a} {}_a D_t^{q-n} x(t) = b_n, \quad n = 1, 2, \dots \tag{2.113}$$

Burada  $b_n$  sayıları sabittir. Yukarıdaki gibi başlangıç koşullarını her ne kadar teorikte çözebiliyor olsak da çözümlerin uygulamada bir anlam ifade etmediği düşünülüyordu. Böyle bir ikilemin çözüme ulaşmasını sağlayan Caputo'nun fraksiyonel türev tanımı aşağıdaki gibi ifade edilir:

$${}^c D_t^q x(t) = \frac{1}{\Gamma(n-q)} \int_a^t (t-s)^{n-q-1} x^{(n)}(s) ds, \quad n-1 < q < n \quad (2.114)$$

Burada  $x(t)$  fonksiyonu üzerinde tanımlanan şartları korumak koşuluyla,  $q \rightarrow n$  için Caputo türevinin  $x(t)$  fonksiyonunun klasik anlamda  $n$ . mertebeden türevine dönüştüğü görülmektedir. Aslında bu ifadeyi,  $0 \leq n-1 < q < n$  olmak üzere  $x(t)$  fonksiyonun her  $T > t_0$  için  $[t_0, T]$  aralığında  $n+1$  kez sürekli ve sınırlı türevlere sahip olduğu varsayımı ile,

$$\begin{aligned} \lim_{q \rightarrow n} ({}^c D_t^q x(t)) &= \lim_{q \rightarrow n} \left( \frac{1}{\Gamma(n-q)} \int_a^t (t-s)^{n-q-1} x^{(n)}(s) ds \right) \\ &= \lim_{q \rightarrow n} \left( \frac{x^{(n)}(a)(t-a)^{n-q}}{\Gamma(n-q+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-q+1)} \int_a^t (t-s)^{n-q} x^{(n+1)}(s) ds \right) \\ &= x^{(n)}(a) + \int_a^t x^{(n+1)}(s) ds \\ &= x^{(n)}(t) \end{aligned} \quad (2.115)$$

eşitliğini elde etmek mümkündür. Burada  $n = 1, 2, \dots$  dır. Bu durum bize Grünwald-Letnikov ve Riemann-Liouville yaklaşımlarına benzer olarak Caputo yaklaşımında da türev ve integral arasında bir ilişkinin mevcut olduğunu gösterir.

Caputo yaklaşımının en temel avantajı, Caputo fraksiyonel türevlerinin klasik manada bilinen diferansiyel denklemleri ile aynı formda başlangıç koşullarına sahip olmasıdır. Başka bir ifadeyle  $t = a$  alt limitinde, bilinen bir fonksiyonun klasik anlamda türevlerinin limit değerlerini içermesidir. Diğer taraftan herhangi bir sabitin Caputo türevi sıfır iken Riemann-Liouville türevi sıfırdan farklıdır.

Bundan sonraki denklemlerimizde Grünwald-Letnikov fraksiyonel operatörü  $D_0^q$  ile, Riemann-Liouville fraksiyonel operatörü  ${}_aD_t^q$  yerine terminal değerleri kaldırılarak  $D^q$  ile,  ${}_a^cD_t^q$  şeklinde verilen Caputo fraksiyonel operatörü ise  ${}^cD^q$  ile gösterilecektir.

$0 < q < 1$  olduğu durumda, (2.114) de verilen denklemi kullanarak

$${}^cD^q x(t) = \frac{1}{\Gamma(1-q)} \int_a^t (t-s)^{-q} x'(s) ds \quad (2.116)$$

eşitliğini elde etmemiz mümkündür. Buradan

$${}^cD^q x(t) = D^q [x(t) - x(a)] \quad (2.117)$$

ya da

$${}^cD^q x(t) = D^q x(t) - \frac{x(a)(t-a)^{-q}}{\Gamma(1-q)} \quad (2.118)$$

ilişkisi elde edilir. Özellikle  $x(a) = 0$  seçilmesi durumunda

$${}^cD^q x(t) = D^q x(t) \quad (2.119)$$

sonucunu verecektir. Bu eşitlikten görüldüğü gibi Riemann-Liouville türevlerinin tanımlı olduğu, mevcut olan her fonksiyon için Caputo türevi de tanımlıdır.

Şu aşamada aşağıdaki eşitliği ifade edelim:

$$D^q E_q(\gamma(t-a)^q) = \gamma E_q(\gamma(t-a)^q), \quad \gamma \in \mathbb{R}. \quad (2.120)$$

Burada  $E_q$  (2.9) de verilen bir parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonlarını temsil etmektedir.

Eğer  $x(t)$  fonksiyonu sürekli,  $\frac{dx(t)}{dt}$  türevi mevcut ve integrallenebilir ise Grünwald-Letnikov ve Riemann-Liouville türevleri arasındaki ilişki aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$D^q x(t) = D_0^q x(t) = \frac{x(a)(t-a)^{-q}}{\Gamma(1-q)} + \frac{1}{\Gamma(1-q)} \int_a^t (t-s)^{-q} x'(s) ds \quad (2.121)$$

Benzer şekilde (2.117) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} {}^c D^q x(t) &= D^q [x(t) - x(a)] = D_0^q [x(t) - x(a)] \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-q)} \int_a^t (t-s)^{-q} \frac{d}{ds} x(s) ds \end{aligned} \quad (2.122)$$

bağıntısı elde edilecektir.

(2.122) de verilen eşdeğer ifadeler fraksiyonel diferansiyel denklemlerin çözümlerinin nitelikli çalışmalarında çok önemli bir yere sahiptir [3], [5], [6].

### 3. KARŞILAŞTIRMA TEOREMLERİ ve KUASİLİNERİZASYON METOT

#### 3.1. Fraksiyonel Diferansiyel Denklemler için Karşılaştırma Sonuçları ve Bazı Temel Teoremler

Bu bölümde fraksiyonel diferansiyel denklem teorisinde kullanılan  $q$  mertebeden ( $0 < q < 1$ ) R-L türev ve integraller ile ilgili bazı temel teoremler verilecektir [6].

Fraksiyonel diferansiyel denklemler için verilen başlangıç değer problemi aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$D^q x(t) = f(t, x) \quad x(t_0) = x^0 = x(t)(t-t_0)^{1-q} |_{t=t_0}, \quad t_0 \leq t \leq T, \quad (3.1)$$

burada  $f \in C([t_0, T] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$  dir. Ayrıca  $D^q x$ ,  $x$  değişkenine karşılık gelen  $q$ . mertebeden R-L manada türevi belirtmektedir. Bu başlangıç değer problemine karşılık gelen Volterra integral denklemi ise

$$x(t) = x^0(t) + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_{t_0}^t (t-s)^{q-1} f(s, x(s)) ds \quad (3.2)$$

şeklinde verilir. Burada  $x^0(t) = \frac{t^0 (t-t_0)^{q-1}}{\Gamma(q)}$  dir.

Öncelikle fraksiyonel diferansiyel eşitsizlikler teorisinde önemli bir yere sahip olduğu düşünülen bazı temel lemma ve notasyonlar verilecektir.

Farz edelim ki  $m \in C_p([t_0, T], \mathbb{R})$ ,  $1 - q = p$  olmak üzere bir  $m(t)$  fonksiyonu tanımlansın. Burada  $C_p([t_0, T], \mathbb{R})$  kümesi aşağıdaki gibi belirlenmiştir.

$$C_p([t_0, T], \mathbb{R}) = [u \in C([t_0, T], \mathbb{R}) \text{ ve } u(t)(t-t_0)^p \in C([t_0, T], \mathbb{R})] \quad (3.3)$$

*Lemma 3.1:* Varsayalım ki  $m \in C_p([t_0, T], \mathbb{R})$  fonksiyonu  $0 < \gamma < 1$  ve  $\gamma > q$  olmak üzere  $\gamma$ . mertebeden yerel Hölder sürekli bir fonksiyon olsun. Ayrıca herhangi bir  $t_1 \in (t_0, T]$  için

$$m(t_1) = 0 \text{ ve } m(t) \leq 0, \quad t_0 \leq t \leq t_1 \quad (3.4)$$

ifadesi gerçeklensin. Bu durumda

$$D^q m(t_1) \geq 0 \quad (3.5)$$

eşitliği doğrudur.

*İspat 3.1:* Riemann-Liouville türev tanımını kullanarak  $m(t)$  fonksiyonunun fraksiyonel türevini aşağıdaki gibi verebiliriz.

$$D^q m(t) = \frac{1}{\Gamma(p)} \frac{d}{dt} \int_{t_0}^t (t-s)^{p-1} m(s) ds \quad (3.6)$$

Bir  $G(t) = \int_{t_0}^t (t-s)^{p-1} m(s) ds$  fonksiyonu tanımlayalım. Yeterince küçük  $h > 0$  değerleri için aşağıdaki eşitliği düşünelim:

$$\begin{aligned} G(t_1) - G(t_1 - h) &= \int_{t_0}^{t_1} (t_1 - s)^{p-1} m(s) ds - \int_{t_0}^{t_1 - h} (t_1 - h - s)^{p-1} m(s) ds \\ &= \int_{t_0}^{t_1 - h} \left[ (t_1 - s)^{p-1} - (t_1 - h - s)^{p-1} \right] m(s) ds + \int_{t_1 - h}^{t_1} (t_1 - s)^{p-1} m(s) ds \\ &= I_1 + I_2. \end{aligned} \quad (3.7)$$

$t_0 \leq s \leq t_1 - h$  değerleri için  $\left[ (t_1 - s)^{p-1} - (t_1 - h - s)^{p-1} \right] < 0$  ve teoremin hipotezinden de  $m(s) \leq 0$  eşitsizliğinin gerçekleştiği gözönünde bulundurulursa ilk verilen integralin  $I_1 \geq 0$  olduğu görülmektedir. Bu durumda

$$G(t_1) - G(t_1 - h) \geq \int_{t_1 - h}^{t_1} (t_1 - s)^{p-1} m(s) ds \quad (3.8)$$

ifadesi elde edilir.

$m(t)$  yerel Hölder sürekli bir fonksiyon olduğundan aşağıdaki eşitliği sağlayan bir  $k(t_1) > 0$  sayısı vardır.

$$-k(t_1)(t_1 - s)^\gamma \leq m(t_1) - m(s) \leq k(t_1)(t_1 - s)^\gamma, \quad |s - t_1| \leq h \quad (3.9)$$

Burada  $0 < \gamma < 1$  ve  $\gamma > q$ . Yukarıdaki eşitsizliği ve (3.4) ifadesini kullanarak

$$I_2 \geq -k(t_1) \int_{t_1 - h}^{t_1} (t_1 - s)^{p-1+\gamma} ds = k(t_1) \frac{h^{p+\gamma}}{p+\gamma} \quad (3.10)$$

eşitsizliğini elde etmemiz mümkündür. Bu durum bizi yeteri kadar küçük  $h > 0$  değerleri için  $G(t_1) - G(t_1 - h) - k(t_1) \frac{h^{p+\gamma}}{p+\gamma} \geq 0$  ifadesine ulaştıracaktır.  $h \rightarrow 0$  için limit alınması durumunda  $\frac{d}{dt}G(t_1) \geq 0$  elde edilir ki bu bize  $D^q m(t_1) \geq 0$  eşitsizliğinin sağlandığını gösterir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

*Lemma 3.2:* Varsayalım ki  $\{x_\varepsilon(t)\}$  dizisi  $[t_0, T]$  kümesi üzerinde tanımlı, sürekli bir fonksiyon ailesi olsun. Ayrıca  $\forall \varepsilon > 0$  için  $D^q x_\varepsilon(t) = f(t, x_\varepsilon)$ ,  $x_\varepsilon(t_0) = x_\varepsilon(t)(t-t_0)^{1-q}|_{t=t_0}$  problemi ve  $t_0 \leq t \leq T$  olmak üzere  $|f(t, x_\varepsilon(t))| \leq M$  eşitsizliği gerçekleşsin. Bu takdirde  $\{x_\varepsilon(t)\}$  fonksiyon ailesi  $[t_0, T]$  kümesi üzerinde eş-sürekli.

*İspat 3.2:*  $t_0 \leq t_1 \leq t_2$  aralığı için

$$\begin{aligned}
& |x_\varepsilon(t_1) - x_\varepsilon^0(t_1) - x_\varepsilon(t_2) + x_\varepsilon^0(t_2)| \\
&= \frac{1}{\Gamma(q)} \left| \int_{t_0}^{t_1} (t_1 - s)^{q-1} f(s, x_\varepsilon(s)) ds - \int_{t_0}^{t_2} (t_2 - s)^{q-1} f(s, x_\varepsilon(s)) ds \right| \\
&= \frac{1}{\Gamma(q)} \left| \int_{t_0}^{t_1} [(t_1 - s)^{q-1} - (t_2 - s)^{q-1}] f(s, x_\varepsilon(s)) ds - \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{q-1} f(s, x_\varepsilon(s)) ds \right| \\
&\leq \frac{M}{\Gamma(q)} \left| \int_{t_0}^{t_1} ((t_1 - s)^{q-1} - (t_2 - s)^{q-1}) ds - \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{q-1} ds \right| \\
&\leq \frac{M}{\Gamma(q+1)} [(t_1 - t_0)^q - (t_2 - t_0)^q + 2(t_2 - t_1)^q] \\
&\leq \frac{2M}{\Gamma(q+1)} (t_2 - t_1)^q \\
&< \varepsilon
\end{aligned} \tag{3.11}$$

burada  $x_\varepsilon^0(t) = \frac{x_\varepsilon^0(t-t_0)^{q-1}}{\Gamma(q)}$  dir. Yukarıdaki ifade de  $\delta$ ,  $|t_2 - t_1| < \delta = \left[ \frac{\varepsilon \Gamma(q+1)}{2M} \right]^{\frac{1}{q}}$  olacak şekilde seçilirse istenilen elde edilmiş olur.

Aşağıda fraksiyonel diferansiyel eşitsizliklerde önem arz eden karşılaştırma teoremlerinden birisi verilecektir.

*Teorem 3.1:* Varsayalım ki  $v, w \in C_p([t_0, T], \mathbb{R})$  fonksiyonları  $0 < \gamma < 1$  ve  $\gamma > q$  olmak üzere  $\gamma$ . mertebeden yerel Hölder sürekliliği fonksiyonlar olsunlar. Ayrıca  $f \in C[[t_0, T] \times \mathbb{R}, \mathbb{R}]$  ve

$$i) D^\gamma v(t) \leq f(t, v(t)), t_0 \leq t \leq T, \tag{3.12}$$

$$ii) D^\gamma w(t) \geq f(t, w(t)), t_0 \leq t \leq T, \tag{3.13}$$

olmak üzere *i*) ve *ii*) eşitsizliklerinden herhangi biri kesin eşitsizlik olsun. O halde,  $v^0 = v(t)(t-t_0)^{1-q} |_{t=t_0}$  ve  $w^0 = w(t)(t-t_0)^{1-q} |_{t=t_0}$  olmak üzere

$$v^0 < w^0 \quad (3.14)$$

sağlandığı durumda

$$v(t) < w(t), \quad t_0 \leq t \leq T \quad (3.15)$$

eşitsizliği doğrudur.

*İspat 3.1:* Aksini varsayalım. Kabul edelim ki (3.15) eşitsizliği doğru olmasın. Bu takdirde  $v(t)(t-t_0)^{1-q} |_{t=t_0}$ ,  $w(t)(t-t_0)^{1-q} |_{t=t_0}$  fonksiyonlarının sürekli olma özelliğini ve (3.14) eşitsizliğini kullanarak, aşağıdaki denklemleri sağlayacak bir  $t_1 \in (t_0, T]$  değeri bulunur öyle ki

$$v(t_1) = w(t_1) \text{ ve } v(t) \leq w(t), \quad t_0 \leq t \leq t_1. \quad (3.16)$$

Şimdi  $m(t) = v(t) - w(t)$ ,  $t_0 \leq t \leq T$  olmak üzere bir  $m(t)$  fonksiyonu tanımlarsak, (3.16) ifadesinden  $m(t_1) = 0$  ve  $m(t) \leq 0$ ,  $t_0 \leq t \leq t_1$  olacaktır. Lemma 3.1 göz önünde bulundurulduğunda  $D^q m(t_1) \geq 0$  eşitsizliğini elde ederiz. Ayrıca *ii*)'deki eşitsizliğin kesin eşitsizlik olduğunu kabul edersek

$$f(t_1, v(t_1)) \geq D^q v(t_1) \geq D^q w(t_1) > f(t_1, w(t_1)) \quad (3.17)$$

bulunur. Bu durum (3.16)'da verilen eşitlikten dolayı çelişki oluşturur. Bu takdirde (3.15) ifadesinin doğru olduğu sonucuna ulaşılmış ve ispat tamamlanmış olur.

Aşağıdaki teorem fraksiyonel diferansiyel eşitsizliklerde fonksiyonun Lipschitz şartını sağlaması koşuluyla verilmiş bir karşılaştırma teoremidir.

*Teorem 3.2:* Varsayalım ki Teorem 3.1 'de verilen koşullar, *i*) ve *ii*)'deki eşitsizliklerden herhangi biri kesin eşitsizlik koşulu olmaksızın sağlansın.

Ayrıca  $f \in C[[t_0, T] \times \mathbb{R}, \mathbb{R}]$  fonksiyonu da Lipschitz şartını sağlasın.

$$f(t, x) - f(t, y) \leq L(x - y), \quad x \geq y \text{ ve } L > 0. \quad (3.18)$$

O halde başlangıç koşullarının  $v^0 \leq w^0$  sağlaması koşuluyla

$$v(t) \leq w(t), \quad t_0 \leq t \leq T \quad (3.19)$$

ifadesi doğrudur.

*İspat 3.2:* Bir  $w_\varepsilon(t)$  fonksiyonunu yeteri kadar küçük  $\varepsilon > 0$  değerleri için aşağıdaki şekilde tanımlayalım:

$$w_\varepsilon(t) = w(t) + \varepsilon \gamma(t), \quad (3.20)$$

burada  $\gamma(t) = (t - t_0)^{q-1} E_{q,q}[2L(t - t_0)^q]$  dir. Buradan

$$w_\varepsilon(t) (t - t_0)^{1-q} \Big|_{t=t_0} = w_\varepsilon^0 = w(t) (t - t_0)^{1-q} \Big|_{t=t_0} + \varepsilon \gamma(t) (t - t_0)^{1-q} \Big|_{t=t_0} \quad (3.21)$$

eşitliğini elde etmemiz mümkündür. Bu denklem bize

$$w_\varepsilon^0 = w^0 + \varepsilon\gamma^0 > w^0 \geq v^0 \text{ ve } w_\varepsilon(t) > w(t), t_0 \leq t \leq T \quad (3.22)$$

ifadesini verecektir.

Şimdi (3.20)'de tanımladığımız fonksiyonun her tarafından R-L manada türev alırsak

$$\begin{aligned} D^q w_\varepsilon(t) &= D^q w(t) + \varepsilon D^q \gamma(t) \\ &\geq f(t, w(t)) + 2\varepsilon L \gamma(t) \\ &\geq f(t, w_\varepsilon(t)) - \varepsilon L \gamma(t) + 2\varepsilon L \gamma(t) \\ &> f(t, w_\varepsilon(t)), t_0 \leq t \leq T \end{aligned} \quad (3.23)$$

elde ederiz. Burada  $\gamma(t)$  fonksiyonunun  $D^q \gamma(t) = 2L\gamma(t)$ ,  $\gamma(t)(t-t_0)^{1-q} |_{t=t_0} = \gamma^0 > 0$  gibi bir başlangıç değer probleminin çözümü olması, aynı zamanda (3.18)'de verilen Lipschitz koşulu ve (3.22) ifadesi kullanıldı.  $v(t)$  ve  $w_\varepsilon(t)$  fonksiyonları için Teorem 3.1 uygulandığı zaman, herhangi bir  $\varepsilon$  değeri için  $v(t) \leq w_\varepsilon(t)$ ,  $t_0 \leq t \leq T$  olacaktır. Sonuçta  $\varepsilon \rightarrow 0$  limiti için  $v(t) \leq w(t)$ ,  $t_0 \leq t \leq T$  şekline dönüşecektir. Bu da bize ispatın tamamlandığını gösterir.

Aşağıda bu teoremin önemli bir sonucu verilmiştir.

*Sonuç 3.1:*  $\sigma(t) \leq L$  Teorem 3.2'deki gibi olmak üzere,  $f \in C[[t_0, T] \times \mathbb{R}, \mathbb{R}]$  kümesi üzerinde tanımlı  $f(t, u) = \sigma(t)u$  ilişkisini sağlayan bir fonksiyon olsun. O halde aşağıdaki eşitsizlik doğrudur.

$$u(t) \leq 0, t_0 \leq t \leq T \quad (3.24)$$

*Sonuç 3.2:* Varsayalım ki  $m(t)$  fonksiyonu  $D^q m(t) \leq Lm(t)$ ,  $m(t)(t-t_0)^{1-q} |_{t=t_0} = m^0$  ilişkisini sağlayan bir fonksiyon olsun. Burada  $m \in C_p([t_0, T], \mathbb{R})$ ,  $1-q = p$  olarak belirlenmiştir. O halde Teorem 3.2'den

$$m(t) \leq m^0 (t-t_0)^{q-1} E_{q,q}[L(t-t_0)^q], \quad t_0 \leq t \leq T \quad (3.25)$$

ifadesi elde edilir.

*Tanım 3.1:* Eğer bir  $v \in C_p([t_0, T], \mathbb{R})$ ,  $1-q = p$ ,  $0 < q < 1$  fonksiyonu aşağıdaki koşulu sağlıyorsa bu fonksiyona (3.1) başlangıç değer probleminin bir alt çözümü denir.

$$D^q v(t) \leq f(t, v(t)), \quad v^0 \leq x^0 \quad (3.26)$$

Burada  $v^0 = v(t)(t-t_0)^{1-q} |_{t=t_0}$  dır.

*Tanım 3.2:* Eğer bir  $w \in C_p([t_0, T], \mathbb{R})$ ,  $1-q = p$ ,  $0 < q < 1$  fonksiyonu aşağıdaki koşulu sağlıyorsa bu fonksiyona (3.1) başlangıç değer probleminin bir üst çözümü denir.

$$D^q w(t) \geq f(t, w(t)), \quad w^0 \geq x^0 \quad (3.27)$$

Burada  $w^0 = w(t)(t-t_0)^{1-q} |_{t=t_0}$  dır.

Eğer  $v$  ve  $w$  fonksiyonları  $v(t) \leq w(t)$ ,  $t \in [t_0, T]$ ,  $t_0 \geq 0$  koşulunu sağlamak üzere  $D^q x(t) = f(t, x)$ ,  $x^0 = x(t)(t-t_0)^{1-q} |_{t=t_0}$  gibi bir başlangıç değer probleminin sırasıyla alt ve üst çözümleri ise aşağıdaki  $\Omega$  kapalı kümesi üzerinde bir çözümü mevcuttur.

$$\Omega = \{(t, x) : v(t) \leq x \leq w(t), t \in [t_0, T]\} \quad (3.28)$$

Aşağıdaki teorem alt ve üst çözümler ile ilgili temel bir varlık teoremidir.

*Teorem 3.3:* Varsayalım ki  $v, w \in C_p([t_0, T], \mathbb{R})$  fonksiyonları  $\gamma$ . mertebeden ( $\gamma > q$ ) yerel Hölder sürekliliği ve (3.1) başlangıç değer probleminin sırasıyla birer alt ve üst çözümü olsunlar. Ayrıca  $f \in C(\Omega, \mathbb{R})$  olmak üzere  $v(t) \leq w(t), t \in [t_0, T]$  eşitsizliği sağlansın. Bu durumda (3.1) başlangıç değer probleminin,  $v(t) \leq x \leq w(t), t \in [t_0, T]$  şartını sağlayan  $x(t)$  gibi bir çözümü mevcuttur.

*İspat 3.3:* Aşağıdaki gibi bir  $p(t)$  fonksiyonu tanımlayalım:

$$p : [t_0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$p(t, x) = \max[v(t), \min(x, w(t))]. \quad (3.29)$$

Bu durumda  $f(t, p(t, x))$  fonksiyonu  $f$  fonksiyonunun  $[t_0, T] \times \mathbb{R}$  kümesine sürekli bir genişlemesidir. Aynı zamanda  $f$  fonksiyonu  $\Omega$  kümesi üzerinde sınırlı olduğu için  $f(t, p(t, x))$  fonksiyonu da sınırlıdır. Bundan dolayı  $[t_0, T]$  üzerinde  $D^q x(t) = f(t, p(t, x)), x(t)(t - t_0)^{1-q}|_{t=t_0} = x^0$  gibi bir çözüme sahiptir.

$\varepsilon > 0$  için aşağıdaki eşitlikleri düşünelim.

$$w_\varepsilon(t) = w(t) + \varepsilon(t - t_0)^{q-1} \text{ ve } v_\varepsilon(t) = v(t) - \varepsilon(t - t_0)^{q-1} \quad (3.30)$$

Burada

$$w_\varepsilon(t)(t-t_0)^{1-q}|_{t=t_0} = w(t)(t-t_0)^{1-q}|_{t=t_0} + \varepsilon, \quad (3.31)$$

$$v_\varepsilon(t)(t-t_0)^{1-q}|_{t=t_0} = v(t)(t-t_0)^{1-q}|_{t=t_0} - \varepsilon \quad (3.32)$$

olarak verilmiştir. Bu nedenle  $w_\varepsilon^0 = w^0 + \varepsilon$ ,  $v_\varepsilon^0 = v^0 - \varepsilon$  ve  $v_\varepsilon^0 < x^0 < w_\varepsilon^0$  şeklinde yazabiliriz. Buradaki amacımız

$$v_\varepsilon(t) < x(t) < w_\varepsilon(t), \quad t \in [t_0, T] \quad (3.33)$$

ifadesinin sağlandığını göstermektir. Bunu göstermek için aksini varsayalım. Kabul edelim ki bu eşitsizlik doğru olmasın. Bu durumda aşağıdaki eşitsizliği sağlayan bir  $t_1 \in [t_0, T]$  değeri vardır.

$$x(t_1) = w_\varepsilon(t_1) \text{ ve } v_\varepsilon(t) < x(t) < w_\varepsilon(t), \quad t_0 \leq t \leq t_1. \quad (3.34)$$

Burada  $x(t_1) > w(t_1)$  olduğundan  $p(t_1, x(t_1)) = w(t_1)$  alınır. Ayrıca  $v(t_1) \leq p(t_1, x(t_1)) \leq w(t_1)$  eşitsizliğine ulaşmak da mümkündür.

$m(t) = x(t) - w_\varepsilon(t)$  olacak şekilde bir  $m(t)$  fonksiyonu tanımlarsak, denklemden  $m(t_1) = 0$  ve  $m(t) \leq 0$ ,  $t_0 \leq t \leq t_1$  olduğu görünür. Lemma 3.1'den dolayı  $D^q m(t_1) \geq 0$  sonucunu kullanırsak aşağıdaki ifadeyi elde ederiz.

$$\begin{aligned} f(t_1, w(t_1)) &= f(t_1, p(t_1, x(t_1))) = D^q x(t_1) \geq D^q w_\varepsilon(t_1) \\ &= D^q w(t_1) + \varepsilon > f(t_1, w(t_1)) \end{aligned} \quad (3.35)$$

Bu da bize bir çelişkinin oluştuğunu göstermektedir. Sonuç olarak,

$$v_\varepsilon(t) < x(t) < w_\varepsilon(t), t \in [t_0, T] \quad (3.36)$$

eşitsizliği doğrudur.  $\varepsilon \rightarrow 0$  için limit alındığında  $v(t) \leq x(t) \leq w(t), t \in [t_0, T]$  eşitsizliğine ulaşılır ve ispat tamamlanmış olur.

### 3.2. Kuasilineerizasyon Metodu

Kuasilineerizasyon metodu ilk olarak Bellman ve Kalaba tarafından çalışılmış [7], daha sonraları Lakshmikantham tarafından geliştirilmiştir [8], [9]. Kuasilineerizasyon metodu lineer olmayan diferansiyel denklemlerin çözümleri için teorik bir yaklaşım sağlamaya çalışır. Bu metot, esas olarak verilen lineer olmayan diferansiyel denklemin tek çözümüne düzgün, kuadratik yakınsayan ve elemanlarından her biri lineer diferansiyel denklemlerin çözümlerine karşılık gelen monoton diziler oluşturmayı amaçlar. Bu metotta verilen fonksiyonun konveks ya da konkav oluşu temel şart gibi düşünülürken zaman içinde bu şart zayıflatılarak kuasilineerizasyon tekniğinin daha geniş uygulama alanlarına taşınabildiği gözlemlenmiştir [10]-[13].

Fraksiyonel analiz ve fraksiyonel dinamik sistemler üzerine yapılan çalışmalara bağlı olarak bu teknik lineer olmayan fraksiyonel başlangıç değer problemine uygulanmıştır. Klasik anlamda diferansiyel denklemlerde elde edilen sonuçlara paralel olarak, fraksiyonel türevli ve lineer olmayan başlangıç değer probleminin çözümüne düzgün monoton ve kuadratik yakınsayan fonksiyon dizileri teşkil edilmiştir [6], [20], [21]. Caputo türev ile verilen fraksiyonel diferansiyel denklemin başlangıç koşulu ve klasik türev ile verilen diferansiyel denklemin başlangıç koşulu benzer yapıya sahip olduğundan, aynı zamanda her iki durumda da sabit sayının türevi sıfıra denk olduğundan kuasilineerizasyon metonunun fraksiyonel teoriye taşınmasında Caputo türevi tercih edilmiştir. Bu durumda Caputo türevi ve Riemann-Liouville türevi arasındaki ilişki aşağıdaki şekilde verilebilir.

Daha önceden de verdiğimiz Caputo ve Riemann-Liouville fraksiyonel türevlerinin tanımları sırasıyla

$${}^c D^q x(t) = \frac{1}{\Gamma(1-q)} \int_{t_0}^t (t-s)^{-q} x'(s) d(s), \quad t_0 \leq t \leq T \quad (3.37)$$

$$D^q x(t) = \frac{1}{\Gamma(p)} \left( \frac{d}{dt} \int_{t_0}^t (t-s)^{p-1} x(s) ds \right), \quad t_0 \leq t \leq T \quad (3.38)$$

şeklindedir. Burada  $p + q = 1$  eşitliğini sağlayan  $q$  değeri  $0 < q < 1$  aralığında verilmiştir. Ayrıca  $\Gamma$  Gamma fonksiyonunu temsil etmektedir. Caputo türev tanımını kullanarak

$${}^c D^q x(t) = D^q [x(t) - x(t_0)] \quad (3.39)$$

ve buradan

$${}^c D^q x(t) = D^q x(t) - \frac{x(t_0)(t-t_0)^{-q}}{\Gamma(1-q)} \quad (3.40)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik bize Caputo manada türev ile Riemann-Liouville türevi arasındaki ilişkiyi vermektedir. Özellikle  $x(t_0) = 0$  olduğu durumda ise

$${}^c D^q x(t) = D^q x(t) \quad (3.41)$$

eşitliği doğrudur.

### 3.2.1. Temel Kuasilineerizasyon Metodu

Aşağıdaki lineer olmayan başlangıç değer problemini düşünelim:

$${}^c D^q x(t) = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0 \quad (3.42)$$

burada  $f \in C[[t_0, T] \times \mathbb{R}, \mathbb{R}]$  ve  ${}^c D^q$  ise  $q$ . mertebeden ( $0 < q < 1$ ) Caputo manada fraksiyonel türev olarak verilmiştir.

(3.42) başlangıç değer problemine karşılık gelen Volterra integral denklemi ise

$$x(t) = x_0 + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_{t_0}^t (t-s)^{q-1} f(s, x(s)) ds, \quad t \in [t_0, T] \quad (3.43)$$

şeklindedir.

Aşağıdaki teoremden (3.42) başlangıç değer problemine kuasilineerizasyon metodu uygulanmıştır.

*Teorem 3.4:* Varsayalım ki;

i)  $\alpha_0, \beta_0 \in C^q [[t_0, T], \mathbb{R}]$ ,  $f \in C[[t_0, T] \times \mathbb{R}, \mathbb{R}]$  ve

$${}^c D^q \alpha_0(t) \leq f(t, \alpha_0(t)) \quad (3.44)$$

$${}^c D^q \beta_0(t) \geq f(t, \beta_0(t)), \quad \alpha_0(t) \leq \beta_0(t), \quad t \in [t_0, T] \quad (3.45)$$

burada  $\alpha_0(t_0) \leq x_0 \leq \beta_0(t_0)$ .

ii)  $f(t, x) \geq f(t, y) + f_x(t, y)(x - y)$ ,  $x \geq y$  olmak üzere aşağıdaki eşitsizliği sağlayan bir  $f_x(t, x)$  fonksiyonu mevcut olsun.

$$|f_x(t,x) - f_x(t,y)| \leq L|x-y|, \quad L > 0 \quad (3.46)$$

iii)  $f_x(t,x)$  fonksiyonu her  $t$  değeri için  $x$  de azalmayan bir fonksiyon olsun.

Bu durumda öyle  $\{\alpha_n\}$  ve  $\{\beta_n\}$  fonksiyon dizileri bulunur ki  $\alpha_n \rightarrow \rho$ ,  $\beta_n \rightarrow \sigma$  olmak üzere bu diziler (3.42) başlangıç değer probleminin  $\rho = x = \sigma$  olacak şekilde  $[t_0, T]$  kümesi üzerindeki tek çözümüne düzgün ve monoton olarak yakınsarlar. Ayrıca bu yakınsama kuadrattır.

*İspat 3.4:* Aşağıdaki lineer fraksiyonel diferansiyel denklemleri ele alalım:

$${}^c D^q \alpha_{n+1}(t) = f(t, \alpha_n) + f_x(t, \alpha_n)(\alpha_{n+1} - \alpha_n), \quad \alpha_{n+1}(t_0) = x_0 \quad (3.47)$$

$${}^c D^q \beta_{n+1}(t) = f(t, \beta_n) + f_x(t, \alpha_n)(\beta_{n+1} - \beta_n), \quad \beta_{n+1}(t_0) = x_0 \quad (3.48)$$

ve  $\alpha_0(t_0) \leq x_0 \leq \beta_0(t_0)$ . Açıktır ki, denklemlerin sağ tarafları Lipschitz koşulunu sağladıklarından tek çözümleri mevcuttur.

Amacımız aşağıdaki eşitsizliğin sağlandığını göstermektir.

$$\alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_n \leq \beta_n \leq \dots \leq \beta_1 \leq \beta_0, \quad t \in [t_0, T] \quad (3.49)$$

Bunun için öncelikle

$$\alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \beta_1 \leq \beta_0, \quad t \in [t_0, T] \quad (3.50)$$

eşitsizliğinin doğru olduğunu gösterelim.

Bir  $p = \alpha_1 - \alpha_0$  fonksiyonu oluşturalım, bu durumda

$$\begin{aligned}
{}^c D^q p &= {}^c D^q \alpha_1 - {}^c D^q \alpha_0 \\
&\geq f(t, \alpha_0) + f_x(t, \alpha_0)(\alpha_1 - \alpha_0) - f(t, \alpha_0) \\
&= f_x(t, \alpha_0)(\alpha_1 - \alpha_0) \\
&= f_x(t, \alpha_0) p \text{ ve } p(t_0) \geq 0
\end{aligned} \tag{3.51}$$

olacaktır. Sonuç 3.1'den dolayı  $p(t) \geq 0$  olduğunu yani  $\alpha_0 \leq \alpha_1, t \in [t_0, T]$  eşitsizliğini elde ederiz.  $\beta_1 \leq \beta_0$  eşitsizliği de benzer şekilde gösterilebilir.

Şimdi  $\alpha_1 \leq \beta_1, t \in [t_0, T]$  olduğunu göstermek için  $p = \beta_1 - \alpha_1$  fonksiyonu oluşturalım öyle ki

$$\begin{aligned}
{}^c D^q p &= {}^c D^q \beta_1 - {}^c D^q \alpha_1 \\
&= f(t, \beta_0) + f_x(t, \alpha_0)(\beta_1 - \beta_0) - [f(t, \alpha_0) + f_x(t, \alpha_0)(\alpha_1 - \alpha_0)] \\
&= f(t, \beta_0) - f(t, \alpha_0) + f_x(t, \alpha_0)(\beta_1 - \beta_0 - \alpha_1 + \alpha_0).
\end{aligned} \tag{3.52}$$

Varsayım *ii)*'den faydalandığımızda ifademiz

$$\begin{aligned}
{}^c D^q p &\geq f_x(t, \alpha_0)(\beta_1 - \beta_0 - (\alpha_1 - \alpha_0) + \beta_0 - \alpha_0) \\
&= f_x(t, \alpha_0)(\beta_1 - \alpha_1)
\end{aligned} \tag{3.53}$$

şekline dönüşecektir. Yukarıda oluşturduğumuz fonksiyonu yerine yazdığımız zaman

$${}^c D^q p(t) \geq f_x(t, \alpha_0) p \text{ ve } p(t_0) = 0 \quad (3.54)$$

eşitsizliği ve Sonuç 3.1'den dolayı  $p(t) \geq 0$  alınacaktır. Sonuçta  $\alpha_1 \leq \beta_1, t \in [t_0, T]$  dir. O halde (3.50) eşitsizliği ispatlanmış olur.

Tümevarım yöntemi kullanılarak, bazı  $k > 1$  değerleri için aşağıdaki ifadenin doğru olduğunu kabul edelim

$$\alpha_0 \leq \alpha_{k-1} \leq \alpha_k \leq \beta_k \leq \beta_{k-1} \leq \beta_0, t \in [t_0, T] \quad (3.55)$$

ve aşağıdaki eşitsizliğin sağlandığını gösterelim.

$$\alpha_k \leq \alpha_{k+1} \leq \beta_{k+1} \leq \beta_k, t \in [t_0, T]. \quad (3.56)$$

Bunun için  $p = \alpha_{k+1} - \alpha_k$  fonksiyonu oluşturulup, (3.47), (3.48)'de verilen lineer başlangıç değer problemleri ve varsayım *ii*) kullanılırsa

$$\begin{aligned} {}^c D^q p &= f(t, \alpha_k) + f_x(t, \alpha_k) (\alpha_{k+1} - \alpha_k) \\ &\quad - [f(t, \alpha_{k-1}) + f_x(t, \alpha_{k-1}) (\alpha_k - \alpha_{k-1})] \\ &\geq f_x(t, \alpha_{k-1}) (\alpha_k - \alpha_{k-1}) + f_x(t, \alpha_k) (\alpha_{k+1} - \alpha_k) \\ &\quad - f_x(t, \alpha_{k-1}) (\alpha_k - \alpha_{k-1}) \\ &= f_x(t, \alpha_k) (\alpha_{k+1} - \alpha_k) \end{aligned} \quad (3.57)$$

olacaktır. Buradan

$${}^c D^q p(t) \geq f_x(t, \alpha_k) p \text{ ve } p(t_0) = 0 \quad (3.58)$$

elde edilir. Daha önce yaptığımız işlemleri tekrarlırsak  $p(t) \geq 0$  olacağından  $\alpha_k \leq \alpha_{k+1}$ ,  $t \in [t_0, T]$  eşitsizliğini elde ederiz. Benzer şekilde  $\beta_k \geq \beta_{k+1}$ ,  $t \in [t_0, T]$  gerçekleştiği de gösterilebilir. Son olarak  $\alpha_{k+1} \leq \beta_{k+1}$ ,  $t \in [t_0, T]$  sağlandığını göstermek için  $p$  fonksiyonunu  $p = \beta_{k+1} - \alpha_{k+1}$  olacak şekilde belirleyelim. Eşitliğin her tarafından Caputo manada türev alırsak

$$\begin{aligned} {}^c D^q p &= {}^c D^q \beta_{k+1} - {}^c D^q \alpha_{k+1} \\ &= f(t, \beta_k) + f_x(t, \alpha_k) (\beta_{k+1} - \beta_k) \\ &\quad - [f(t, \alpha_k) + f_x(t, \alpha_k) (\alpha_{k+1} - \alpha_k)] \\ &\geq f_x(t, \alpha_k) (\beta_k - \alpha_k) + f_x(t, \alpha_k) (\beta_{k+1} - \beta_k) \\ &\quad - f_x(t, \alpha_k) (\alpha_{k+1} - \alpha_k) \\ &= f_x(t, \alpha_k) [\beta_k - \alpha_k - \alpha_{k+1} + \alpha_k + \beta_{k+1} - \beta_k] \\ &= f_x(t, \alpha_k) (\beta_{k+1} - \alpha_{k+1}) \end{aligned} \quad (3.59)$$

ifadesini düzenlersek

$${}^c D^q p \geq f_x(t, \alpha_k) p \text{ ve } p(t_0) = 0. \quad (3.60)$$

bulunur. Yine Sonuç 3.1'den faydalanıldığı durumda  $\alpha_{k+1} \leq \beta_{k+1}$ ,  $t \in [t_0, T]$  olacaktır.

Bu da bize (3.56) eşitsizliğinin doğruluğunu, bütün  $n$  değerleri için geçerli olduğunu gösterir.

(3.49)'den dolayı  $\{\alpha_n\}$  ve  $\{\beta_n\}$  fonksiyon dizileri düzgün sınırlıdır. Bu durum  $\{{}^cD^q\alpha_n\}$  ve  $\{{}^cD^q\beta_n\}$  dizilerinin de düzgün sınırlı olduğunu gösterir. Ayrıca Lemma 3.2 kullanılarak bu fonksiyon dizilerinin eş-sürekli olduklarını söyleyebiliriz. Arzela-Ascoli teoremi gereği, bir dizi eş-sürekli ve düzgün sınırlı ise düzgün ve monoton yakınsayan bir alt dizisi mevcuttur. Bu o demektir ki  $\{\alpha_n\}$  ve  $\{\beta_n\}$  dizileri düzgün yakınsak alt dizilere sahiptir. Bununla birlikte (3.49)'da verilen  $\{\alpha_n\}$  ve  $\{\beta_n\}$  fonksiyon dizileri  $n \rightarrow \infty$  için sırasıyla  $\rho$  ve  $\sigma$  gibi iki fonksiyona düzgün ve monoton olarak yakınsarlar. Aynı zamanda  $\alpha_n$  ve  $\beta_n$  fonksiyonları (3.47) ve (3.48)'de verilen lineer fraksiyonel diferansiyel denklemlerin çözümleri olduklarından bu denklemlere karşılık gelen Volterra integral denklemleri

$$\alpha_n(t) = x_0 + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_{t_0}^t (t-s)^{q-1} [f(s, \alpha_{n-1}) + f_x(s, \alpha_{n-1})(\alpha_n - \alpha_{n-1})] ds \quad (3.61)$$

$$\beta_n(t) = x_0 + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_{t_0}^t (t-s)^{q-1} [f(s, \beta_{n-1}) + f_x(s, \alpha_{n-1})(\beta_n - \beta_{n-1})] ds \quad (3.62)$$

şeklinde olacaktır. Buradan söyleyebiliriz ki  $n \rightarrow \infty$  için  $\rho(t)$  ve  $\sigma(t)$  fonksiyonları problemimizin herhangi iki çözümüdür.  $f_x(t, x)$  fonksiyonu

$[\alpha_0, \beta_0] = [x : \alpha_0(t) \leq x \leq \beta_0(t)]$  kümesi üzerinde sınırlı olduğu için  $f(t, x)$  fonksiyonu Lipschitz koşulunu sağlayacağından (3.42) başlangıç değer probleminin tek çözümü vardır ve bu çözüm  $\rho(t) = x(t) = \sigma(t)$  eşitliğini sağlar.

Son olarak  $\{\alpha_n\}$  ve  $\{\beta_n\}$  fonksiyon dizilerinin tek çözüme kuadratik yakınsadığını gösterelim. Bunun için

$$p_{n+1} = x - \alpha_{n+1} \quad (3.63)$$

olacak şekilde bir fonksiyon tanımlayalım. Buradan kolayca görüldüğü gibi  $p_{n+1}(t_0) = 0$  olacaktır. Bu durumda

$$\begin{aligned}
{}^c D^q p_{n+1} &= {}^c D^q x - {}^c D^q \alpha_{n+1} \\
&= f(t, x) - [f(t, \alpha_n) + f_x(t, \alpha_n)(\alpha_{n+1} - \alpha_n)] \\
&= f(t, x) - f(t, \alpha_n) - f_x(t, \alpha_n)(p_n - p_{n+1}) \\
&\leq [f_x(t, x) - f_x(t, \alpha_n)] p_n + f_x(t, \alpha_n) p_{n+1} \\
&\leq L |p_n|^2 + f_x(t, \alpha_n) p_{n+1} \\
&\leq L |p_n|_0^2 + N p_{n+1} \\
{}^c D^q p_{n+1} &\leq L |p_n|_0^2 + N p_{n+1}, \tag{3.64}
\end{aligned}$$

burada  $|f_x| \leq N$ ,  $|p_n|_0 = \max_{[t_0, T]} |p_n(t)|$ . En son bulduğumuz eşitsizlikten

$$\begin{aligned}
p_{n+1} &\leq L |p_n|_0^2 \int_{t_0}^t (t-s)^{q-1} E_{q,q}(N(t-s)^q) ds \\
&\leq N_0 |p_n|_0^2 \tag{3.65}
\end{aligned}$$

alınacaktır. Burada  $N_0 = \frac{L}{q} (T-t_0)^q E_{q,q}(N(T-t_0)^q)$  ve  $E_{q,q}$  Mittag-Leffler fonksiyonudur. Sonuç olarak,

$$\begin{aligned}
|p_{n+1}|_0 &\leq N_0 |p_n|_0^2 \\
\max_{[t_0, T]} |x - \alpha_{n+1}| &\leq N_0 \max_{[t_0, T]} |x - \alpha_n|^2 \tag{3.66}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilecektir. Bu da bize  $\{\alpha_n\}$  dizisinin  $x(t)$  tek çözümüne kuadratik yakınsamasını verir. Benzer şekilde

$$r_{n+1} = \beta_{n+1} - x \quad (3.67)$$

olacak şekilde fonksiyon teşkil edilerek devam edilirse,  $\{\beta_n\}$  fonksiyon dizisinin  $x(t)$  tek çözümüne kuadratik yakınsaması aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\begin{aligned} |r_{n+1}|_0 &\leq N_0 |r_n|_0^2 \\ \max_{[t_0, T]} |\beta_{n+1} - x| &\leq N_0 \max_{[t_0, T]} |\beta_n - x|^2 \end{aligned} \quad (3.68)$$

İspat tamamlanmıştır.

### 3.2.2. Genelleştirilmiş Kuasilineerizasyon Metodu

Bu bölümde lineer olmayan problemlerin çözümlerine ulaşabilmek adına kullandığımız kuasilineerizasyon metodunun genelleştirilmiş durumu verilecektir.

(3.42) Caputo anlamında fraksiyonel diferansiyel denklemini ve buna karşılık gelen (3.43)'de verilen Volterra fraksiyonel integral denklemini ele alalım. Burada (3.42) denkleminin sağ tarafındaki  $f(t, x)$  fonksiyonu yerine,  $f(t, x)$  ve  $g(t, x)$  olacak şekilde farklı iki fonksiyonun toplamını düşüneceğiz. Ayrıca  $f$  fonksiyonu konvekslikten daha zayıf olma koşulunu sağlarken,  $g$  fonksiyonu üzerinde konkavlıktan daha zayıf olma varsayımı kullanılacaktır.

Aşağıdaki lineer olmayan başlangıç değer problemini düşünelim:

$${}^c D^q x(t) = f(t, x) + g(t, x), \quad x(t_0) = x_0 \quad (3.69)$$

burada  $f \in C[[t_0, T] \times \mathbb{R}, \mathbb{R}]$  ve  ${}^c D^q$  ise  $q$ . mertebeden ( $0 < q < 1$ ) Caputo manada fraksiyonel türev olarak verilmiştir.

(3.69) başlangıç değer problemine karşılık gelen Volterra integral denklemi ise

$$x(t) = x_0 + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_{t_0}^t (t-s)^{q-1} [f(s, x(s)) + g(s, x(s))] ds, \quad t \in [t_0, T] \quad (3.70)$$

şeklinde verilmektedir.

*Tanım 3.3:* Eğer  $v, w \in C^q[[t_0, T], \mathbb{R}]$  fonksiyonları aşağıdaki koşulları sağlıyorsa bu fonksiyonlara (3.69) başlangıç değer probleminin sırasıyla birer alt ve üst çözümleri denir.

$${}^c D^q v \leq f(t, v) + g(t, v), \quad v(t_0) \leq x_0, \quad (3.71)$$

$${}^c D^q w \geq f(t, w) + g(t, w), \quad w(t_0) \geq x_0, \quad t \in [t_0, T] \quad (3.72)$$

Sıradaki teorem (3.69) probleminin alt ve üst çözümleri kullanılarak genelleştirilmiş kuasilineerizasyon metodunun bir uygulamasıdır.

*Teorem 3.5:* Varsayalım ki;

i)  $\alpha_0, \beta_0 \in C^q[[t_0, T], \mathbb{R}]$ ,  $f, g \in C[[t_0, T] \times \mathbb{R}, \mathbb{R}]$  ve

$${}^c D^q \alpha_0(t) \leq f(t, \alpha_0(t)) + g(t, \alpha_0(t)), \quad \alpha_0(t_0) \leq x_0 \quad (3.73)$$

$${}^c D^q \beta_0(t) \geq f(t, \beta_0(t)) + g(t, \beta_0(t)), \quad \beta_0(t_0) \geq x_0 \quad (3.74)$$

$$\alpha_0(t) \leq \beta_0(t), \quad t \in [t_0, T] \quad (3.75)$$

ii)  $f_x(t, x)$  fonksiyonu mevcut ve her  $t$  değeri için  $x$  bileşenine göre artan bir fonksiyon olsun. Ayrıca

$$f(t,x) \geq f(t,y) + f_x(t,y)(x-y), \quad x \geq y \text{ ve} \quad (3.76)$$

$$|f_x(t,x) - f_x(t,y)| \leq L_1 |x-y|, \quad L_1 > 0 \quad (3.77)$$

eşitsizlikleri sağlansın.

Buna ek olarak varsayalım ki  $g_x(t,x)$  fonksiyonu mevcut ve her  $t$  değeri için  $x$  bileşenine göre azalan bir fonksiyon olsun. Ayrıca

$$g(t,x) \geq g(t,y) + g_x(t,x)(x-y), \quad x \geq y \text{ ve} \quad (3.78)$$

$$|g_x(t,x) - g_x(t,y)| \leq L_2 |x-y|, \quad L_2 > 0 \quad (3.79)$$

eşitsizlikleri de gerçeklensin.

Bu durumda öyle  $\{\alpha_n\}$  ve  $\{\beta_n\}$  fonksiyon dizileri bulunur ki  $\alpha_n \rightarrow \rho$ ,  $\beta_n \rightarrow \sigma$  olmak üzere bu diziler (3.69) başlangıç değer probleminin  $\rho = x = \sigma$  olacak şekilde tek çözümüne düzgün ve monoton olarak yakınsarlar. Ayrıca bu yakınsama kuadrattır.

*İspat 3.5:* Aşağıdaki lineer fraksiyonel diferansiyel denklemleri ele alalım.

$$\begin{aligned} {}^c D^q \alpha_{n+1}(t) &= F(t, \alpha_{n+1}, \alpha_n, \beta_n) \\ &= f(t, \alpha_n) + f_x(t, \alpha_n)(\alpha_{n+1} - \alpha_n) \\ &\quad + g(t, \alpha_n) + g_x(t, \beta_n)(\alpha_{n+1} - \alpha_n), \quad (\alpha_{n+1}(t_0) = x_0) \end{aligned} \quad (3.80)$$

$$\begin{aligned} {}^c D^q \beta_{n+1}(t) &= G(t, \beta_{n+1}, \alpha_n, \beta_n) \\ &= f(t, \beta_n) + f_x(t, \alpha_n)(\beta_{n+1} - \beta_n) \\ &\quad + g(t, \beta_n) + g_x(t, \beta_n)(\beta_{n+1} - \beta_n), \quad (\beta_{n+1}(t_0) = x_0) \end{aligned} \quad (3.81)$$

Denklemlerin sağ tarafları Lipschitz koşulunu sağladıklarından dolayı açıktır ki, sırasıyla (3.80) ve (3.81)'e karşılık gelen  $\alpha_{n+1}(t)$  ve  $\beta_{n+1}(t)$  dizilerinin tek çözümleri mevcuttur.

Amacımız aşağıdaki eşitsizliğin doğru olduğunu göstermektir.

$$\alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_n \leq \beta_n \leq \dots \leq \beta_1 \leq \beta_0, t \in [t_0, T] \quad (3.82)$$

Bunun için ilk olarak aşağıdaki eşitsizliğin sağlandığını ispatlayalım.

$$\alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \beta_1 \leq \beta_0, t \in [t_0, T] \quad (3.83)$$

Bir  $p = \alpha_0 - \alpha_1$  fonksiyonu oluşturursak, bu durumda varsayım *ii*'den

$$\begin{aligned} {}^c D^q p &= {}^c D^q \alpha_0 - {}^c D^q \alpha_1 \\ &\leq f(t, \alpha_0) + g(t, \alpha_0) - [f_x(t, \alpha_0)(\alpha_0 - \alpha_1) + f(t, \alpha_0)] \\ &\quad - [g_x(t, \beta_0)(\alpha_0 - \alpha_1) + g(t, \alpha_0)] \\ &= [f_x(t, \alpha_0) + g_x(t, \beta_0)](\alpha_0 - \alpha_1) \\ &= [f_x(t, \alpha_0) + g_x(t, \beta_0)]p \text{ ve } p(t_0) \leq 0 \end{aligned} \quad (3.84)$$

olacaktır. Sonuç 3.1'den dolayı  $\alpha_0 \leq \alpha_1, t \in [t_0, T]$  eşitsizliğini elde ederiz. Benzer şekilde  $\beta_1 \leq \beta_0, t \in [t_0, T]$  sağlandığını da gösterebiliriz.

Şimdi  $\alpha_1 \leq \beta_1, t \in [t_0, T]$  olduğunu göstermek için  $p = \alpha_1 - \beta_1$  fonksiyonunu oluşturalım öyle ki;

$$\begin{aligned}
{}^c D^q p &= {}^c D^q \alpha_1 - {}^c D^q \beta_1 \\
&= f(t, \alpha_0) + g(t, \alpha_0) + f_x(t, \alpha_0)(\alpha_1 - \alpha_0) + g_x(t, \beta_0)(\alpha_1 - \alpha_0) \\
&\quad - [f(t, \beta_0) + g(t, \beta_0) + f_x(t, \alpha_0)(\beta_1 - \beta_0) + g_x(t, \beta_0)(\beta_1 - \beta_0)] \\
&\leq f_x(t, \alpha_0)(\alpha_0 - \beta_0) + f_x(t, \alpha_0)(\alpha_1 - \alpha_0 - \beta_1 + \beta_0) \\
&\quad + g_x(t, \beta_0)(\alpha_0 - \beta_0) + g_x(t, \beta_0)(\alpha_1 - \alpha_0 - \beta_1 + \beta_0) \\
&\leq [f_x(t, \alpha_0) + g_x(t, \beta_0)](\alpha_1 - \beta_1). \tag{3.85}
\end{aligned}$$

Varsayım *ii*)’de verilen eşitsizlik kullanıldığında ifademiz

$${}^c D^q p \leq [f_x(t, \alpha_0) + g_x(t, \beta_0)]p, p(t_0) = 0 \tag{3.86}$$

şekline dönüşecektir. Tekrar Sonuç 3.1’den dolayı  $\alpha_1 \leq \beta_1, t \in [t_0, T]$  olacaktır. Bu taktirde (3.83) eşitsizliği ispatlanmış olur.

Tümevarım yöntemi kullanılarak, bazı  $k > 1$  değerleri için aşağıdaki ifadenin doğru olduğunu kabul edelim

$$\alpha_0 \leq \alpha_{k-1} \leq \alpha_k \leq \beta_k \leq \beta_{k-1} \leq \beta_0, t \in [t_0, T] \tag{3.87}$$

ve aşağıdaki eşitsizliğin sağlandığını gösterelim.

$$\alpha_k \leq \alpha_{k+1} \leq \beta_{k+1} \leq \beta_k, t \in [t_0, T] \tag{3.88}$$

Bunu göstermek için  $p = \alpha_k - \alpha_{k+1}$  fonksiyonunu oluşturup, (3.80), (3.81)'de verilen lineer başlangıç değer problemleri ve varsayım *ii*) kullanıldığı durumda

$$\begin{aligned}
{}^c D^q p &= {}^c D^q \alpha_k - {}^c D^q \alpha_{k+1} \\
&= f(t, \alpha_{k-1}) + g(t, \alpha_{k-1}) + [f_x(t, \alpha_{k-1}) + g_x(t, \beta_{k-1})] (\alpha_k - \alpha_{k-1}) \\
&\quad - [f(t, \alpha_k) + g(t, \alpha_k) + [f_x(t, \alpha_k) + g_x(t, \beta_k)] (\alpha_{k+1} - \alpha_k)] \\
&\leq f_x(t, \alpha_{k-1}) (\alpha_{k-1} - \alpha_k) + f_x(t, \alpha_{k-1}) (\alpha_k - \alpha_{k-1}) \\
&\quad + f_x(t, \alpha_k) (\alpha_k - \alpha_{k+1}) + g_x(t, \beta_{k-1}) (\alpha_{k-1} - \alpha_k) \\
&\quad + g_x(t, \beta_{k-1}) (\alpha_k - \alpha_{k-1}) + g_x(t, \beta_k) (\alpha_k - \alpha_{k+1}) \\
&= [f_x(t, \alpha_k) + g_x(t, \beta_k)] (\alpha_k - \alpha_{k+1}) \tag{3.89}
\end{aligned}$$

ve buradan

$${}^c D^q p \leq [f_x(t, \alpha_k) + g_x(t, \beta_k)] p \text{ ve } p(t_0) = 0 \tag{3.90}$$

elde edilir. Daha önce yaptığımız işlemleri tekrarlırsak  $p(t) \geq 0$  olacağından  $\alpha_k \leq \alpha_{k+1}$ ,  $t \in [t_0, T]$  eşitsizliğini elde ederiz. Benzer şekilde  $\beta_k \geq \beta_{k+1}$ ,  $t \in [t_0, T]$  gerçekleştiği de gösterilebilir. Son olarak  $\alpha_{k+1} \leq \beta_{k+1}$ ,  $t \in [t_0, T]$  eşitsizliğini göstermek için  $p$  fonksiyonunu  $p = \alpha_{k+1} - \beta_{k+1}$  olacak şekilde belirlersek, buradan

$$\begin{aligned}
{}^c D^q p &= {}^c D^q \alpha_{k+1} - {}^c D^q \beta_{k+1} \\
&= f(t, \alpha_k) + g(t, \alpha_k) + [f_x(t, \alpha_k) + g_x(t, \beta_k)] (\alpha_{k+1} - \alpha_k) \\
&\quad - f(t, \beta_k) - g(t, \beta_k) - [f_x(t, \alpha_k) + g_x(t, \beta_k)] (\beta_{k+1} - \beta_k)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq f_x(t, \alpha_k) [\alpha_k - \beta_k + \alpha_{k+1} - \alpha_k - \beta_{k+1} + \beta_k] \\
&\quad + g_x(t, \beta_k) [\alpha_k - \beta_k + \alpha_{k+1} - \alpha_k - \beta_{k+1} + \beta_k] \\
&= [f_x(t, \alpha_k) + g_x(t, \beta_k)] [\alpha_k - \beta_k + \alpha_{k+1} - \alpha_k - \beta_{k+1} + \beta_k] \\
&= [f_x(t, \alpha_k) + g_x(t, \beta_k)] (\alpha_{k+1} - \beta_{k+1}) \tag{3.91}
\end{aligned}$$

ifadesini düzenlersek

$${}^c D^q p(t) \leq [f_x(t, \alpha_k) + g_x(t, \beta_k)] p(t) \text{ ve } p(t_0) = 0 \tag{3.92}$$

bulunur. Tekrar Sonuç 3.1 kullanıldığı durumda  $\alpha_{k+1} \leq \beta_{k+1}$ ,  $t \in [t_0, T]$  olacaktır. Bu da bize (3.88) eşitsizliğinin doğruluğunu gösterir. Aynı zamanda bütün  $n$  değerleri için geçerlidir.

(3.82) eşitsizliği nedeniyle  $\{\alpha_n\}$  ve  $\{\beta_n\}$  fonksiyon dizileri düzgün sınırlıdır. Bu durum  $\{{}^c D^q \alpha_n\}$  ve  $\{{}^c D^q \beta_n\}$  dizilerinin de düzgün sınırlı olduğunu gösterir. Ayrıca Lemma 3.2 kullanılarak bu fonksiyon dizilerinin eş-sürekli olduklarını söyleyebiliriz. Arzela-Ascoli teoremi gereği, bir dizi eş-sürekli ve düzgün sınırlı ise düzgün ve monoton yakınsayan bir alt dizisi mevcuttur. Bu o demektir ki  $\{\alpha_n\}$  ve  $\{\beta_n\}$  dizileri düzgün yakınsak alt dizilere sahiptir. Bununla birlikte (3.82)'de verilen  $\{\alpha_n\}$  ve  $\{\beta_n\}$  fonksiyon dizileri  $n \rightarrow \infty$  için sırasıyla  $\rho$  ve  $\sigma$  gibi iki fonksiyona düzgün ve monoton olarak yakınsarlar. Aynı zamanda (3.80) ve (3.81)'de verilen lineer fraksiyonel diferansiyel denklemlere karşılık gelen Volterra integral denklemleri kullanılarak (3.69) probleminin  $\rho$  ve  $\sigma$  gibi herhangi iki çözümünün var olduğu kolayca gösterilebilir.  $f_x(t, x)$  fonksiyonu  $[\alpha_0, \beta_0] = [x : \alpha_0(t) \leq x \leq \beta_0(t)]$  kümesi üzerinde sınırlı olduğu için  $f(t, x)$  fonksiyonu Lipschitz koşulunu sağlayacağından dolayı, aynı zamanda  $g(t, x)$  azalan bir fonksiyon olduğundan dolayı (3.69) başlangıç değer problemi-

nin tek çözümünü mevcuttur ve bu çözüm  $\rho(t) = x(t) = \sigma(t)$  şeklindedir.

Son olarak  $\{\alpha_n\}$  ve  $\{\beta_n\}$  fonksiyon dizilerinin tek çözüme kuadratik yakınsadığını gösterelim. Bunun için

$$p_{n+1} = x - \alpha_{n+1} \quad (3.93)$$

olacak şekilde bir fonksiyon tanımlayalım. Buradan kolayca görüldüğü gibi  $p_{n+1}(t_0) = 0$  olacaktır. Bu durumda

$$\begin{aligned} {}^c D^q p_{n+1} &= {}^c D^q x - {}^c D^q \alpha_{n+1} \\ &= f(t, x) + g(t, x) - f(t, \alpha_n) - f(t, \alpha_n) \\ &\quad - [f_x(t, \alpha_n) + g_x(t, \beta_n)] (\alpha_{n+1} - \alpha_n) \\ &\leq [f_x(t, \xi) + g_x(t, \eta)] p_n \\ &\quad + [f_x(t, \alpha_n) + g_x(t, \beta_n)] (p_{n+1} - p_n) \end{aligned} \quad (3.94)$$

burada  $\alpha_n \leq \xi \leq x$  ve  $x \leq \eta \leq \beta_n$ .

Şimdi  $f_x$  fonksiyonunun artan ve  $g_x$  fonksiyonunun azalan olma özelliğini kullandığımızda

$$\begin{aligned} {}^c D^q p_{n+1} &\leq [f_x(t, x) - f_x(t, \alpha_n)] p_n + [g_x(t, x) - g_x(t, \beta_n)] p_n \\ &\quad + [f_x(t, \alpha_n) + g_x(t, \beta_n)] p_{n+1} \\ &\leq L |p_n|^2 + [f_x(t, \alpha_n) + g_x(t, \beta_n)] p_{n+1} \end{aligned}$$

$${}^c D^q p_{n+1} \leq L |p_n|_0^2 + K p_{n+1} \quad (3.95)$$

bulunur. Burada

$$|f_x(t, \alpha_n)| \leq K_1, \quad |g_x(t, \beta_n)| \leq K_2, \quad |p_n|_0 = \max_{[t_0, T]} |p_n(t)|, \quad (3.96)$$

$$K = \max(K_1, K_2) \quad \text{ve} \quad L = \max\{L_1, L_2\} \quad (3.97)$$

olarak verilmiştir. En son bulduğumuz eşitsizlikten

$$\begin{aligned} p_{n+1} &\leq L |p_n|_0^2 \int_{t_0}^t (t-s)^{q-1} E_{q,q}(K(t-s)^q) ds \\ &\leq N |p_n|_0^2 \end{aligned} \quad (3.98)$$

alınacaktır. Burada  $N = \frac{L}{q} (T-t_0)^q E_{q,q}(K(T-t_0)^q)$  ve  $E_{q,q}$  Mittag-Leffler fonksiyonudur. Sonuç olarak,

$$\begin{aligned} |p_{n+1}|_0 &\leq N |p_n|_0^2 \\ \max_{[t_0, T]} |x - \alpha_{n+1}| &\leq N \max_{[t_0, T]} |x - \alpha_n|^2 \end{aligned} \quad (3.99)$$

eşitsizliği elde edilecektir ki bu da bizim ulaşmak istediğimiz  $\{\alpha_n\}$  dizisinin  $x(t)$  tek çözümüne kuadratik yakınsamasıdır. Benzer şekilde

$$r_{n+1} = \beta_{n+1} - x \quad (3.100)$$

olacak şekilde fonksiyon teşkil edilerek devam edilirse,  $\{\beta_n\}$  fonksiyon dizisinin  $x(t)$  tek çözümüne kuadratik yakınsaması aşağıdaki gibi ifade edilecektir.

$$\begin{aligned} |r_{n+1}|_0 &\leq N |r_n|_0^2 \\ \max_{[t_0, T]} |\beta_{n+1} - x| &\leq N \max_{[t_0, T]} |\beta_n - x|^2 \end{aligned} \quad (3.101)$$

Böylece ispat tamamlanmıştır.

## 4. BAŞLANGIÇ ZAMANI FARKLI KARŞILAŞTIRMA TEOREMLERİ ve KUASİLİNEERİZASYON METOT

### 4.1. Başlangıç Zamanı Farklı Karşılaştırma ve Varlık Teoremleri

Bölüm 3.1’de fraksiyonel diferansiyel denklemler için başlangıç zamanı aynı olan alt ve üst çözümlerle ilgili temel teoremler ve sonuçlara yer verilmişti. Bu bölümde ise alt ve üst çözümlerin başlangıç zamanlarının farklı olması durumunda temel teoremler yeniden değerlendirilerek verilecektir [24], [25].

Öncelikle lineer fraksiyonel diferansiyel denklemler için aşağıdaki gibi homojen olmayan lineer bir başlangıç değer problemini düşünelim.

$$D^q x = \gamma x + f(t), \quad x^0 = x(t)(t-t_0)^{1-q} |_{t=t_0} \quad (4.1)$$

Burada  $\gamma$  bir reel sayı ve  $f \in C_p [[t_0, T], \mathbb{R}]$  fonksiyonu  $p$ . mertebeden Hölder sürekli bir fonksiyon olarak belirlenmiştir.  $t \in [t_0, T]$  olmak üzere (4.1) problemine karşılık gelen Volterra integral denklemi ise

$$x(t) = x^0(t) + \frac{\gamma}{\Gamma(q)} \int_{t_0}^t (t-s)^{q-1} x(s) ds + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_{t_0}^t (t-s)^{q-1} f(s) ds \quad (4.2)$$

şeklinde ifade edilir. Burada  $x^0(t) = \frac{x^0(t-t_0)^{q-1}}{\Gamma(q)}$  dır.

İndüksiyon yöntemi kullanılarak homojen olmayan (4.1) probleminin  $x(t) = x(t, t_0, x^0)$  gibi bir çözümüne ulaşılır [6], öyle ki bu çözüm

$$x(t) = x^0 (t - t_0)^{q-1} E_{q,q}(\gamma(t - t_0)^q) + \int_{t_0}^t (t - s)^{q-1} E_{q,q}(\gamma(t - s)^q) f(s) ds \quad (4.3)$$

şeklinde olacaktır. Burada  $E_{q,q}$  iki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonunu simgelemektedir.

Eğer  $f(t) \equiv 0$  olarak alınırse homojen olmayan başlangıç değeri problemine karşılık gelen çözüm aşağıdaki denkleme dönüşecektir.

$$x(t) = x^0 (t - t_0)^{q-1} E_{q,q}(\gamma(t - t_0)^q), \quad t \in [t_0, T] \quad (4.4)$$

Aşağıdaki teorem, başlangıç zamanları farklı alt ve üst çözümler kullanılarak (3.1) başlangıç değeri problemi için verilmiş bir karşılaştırma teoremidir.

*Teorem 4.1:* Varsayalım ki;

i)  $v \in C_p[[t_0, t_0 + T], \mathbb{R}]$ ,  $t_0, T > 0$ ,  $w \in C_p^*[[\tau_0, \tau_0 + T], \mathbb{R}]$ ,  $\tau_0 > t_0$  fonksiyonları  $0 < \gamma < 1$  olmak üzere  $\gamma$ . mertebeden yerel Hölder sürekli ve  $\gamma > q$ ,  $p = 1 - q$  olsun. Burada  $f \in C[[t_0, \tau_0 + T] \times \mathbb{R}, \mathbb{R}]$  ve

$$C_p[[t_0, t_0 + T], \mathbb{R}] = \{u \in C([t_0, t_0 + T], \mathbb{R}) \text{ ve } u(t) (t - t_0)^p \in C([t_0, t_0 + T], \mathbb{R})\} \quad (4.5)$$

$$C_p^*[[\tau_0, \tau_0 + T], \mathbb{R}] = \{u \in C([\tau_0, \tau_0 + T], \mathbb{R}) \text{ ve } u(t) (t - \tau_0)^p \in C([\tau_0, \tau_0 + T], \mathbb{R})\}. \quad (4.6)$$

Ayrıca

$$D^q v(t) \leq f(t, v(t)), \quad t_0 \leq t \leq t_0 + T \quad (4.7)$$

$$D^q w(t) \geq f(t, w(t)), \tau_0 \leq t \leq \tau_0 + T \quad (4.8)$$

$\tau_0 > t_0$  ve  $v^0 \leq x^0 \leq w^0$ . Burada  $v^0 = v(t)(t-t_0)^{1-q} |_{t=t_0}$ ,  $w^0 = w(t)(t-t_0)^{1-q} |_{t=\tau_0}$ .

ii)  $f(t, x)$  fonksiyonu ikinci değişkene göre Lipschitz koşulunu sağlasın

$$f(t, x) - f(t, y) \leq L(x - y), x \geq y \text{ ve } L > 0. \quad (4.9)$$

iii)  $f(t, x)$  fonksiyonu her  $x$  değeri için  $t$  de azalmayan bir fonksiyon olsun.

Bu durumda aşığıdaki eşitsizlikler doğrudur.

$$a) v(t) \leq w(t + \eta), t_0 \leq t \leq t_0 + T$$

$$b) v(t - \eta) \leq w(t), \tau_0 \leq t \leq \tau_0 + T, \text{ burada } \eta = \tau_0 - t_0.$$

*İspat 4.1:* Çözümüne ulaşmak adına öncelikle  $w_0(t) = w(t + \eta)$ ,  $t \geq t_0$  şeklinde bir fonksiyon tanımlayalım. Bu takdirde  $w_0(t)$  fonksiyonunun başlangıç pozisyonu

$$\begin{aligned} w_0^0 &= w_0(t)(t-t_0)^{1-q} |_{t=t_0} = w(t+\eta)(t-t_0)^{1-q} |_{t=t_0} \\ &= w(t)(t-\tau_0)^{1-q} |_{t=\tau_0} = w^0 \geq x^0 \geq v^0 \end{aligned} \quad (4.10)$$

şeklinde olacaktır. Ayrıca  $f(t, x)$  fonksiyonunun her  $x$  değeri için  $t$  de azalmayan bir fonksiyon olması koşulu kullanılarak

$$\begin{aligned}
D^q w_0(t) &= D^q w(t + \eta) \\
&\geq f(t + \eta, w(t + \eta)) \\
&\geq f(t, w_0(t))
\end{aligned} \tag{4.11}$$

ifadesinden  $w_0(t)$  fonksiyonunun (3.1) probleminin bir üst çözümü olduğu görülmektedir. Şimdi her  $\varepsilon > 0$  için  $w_{0\varepsilon}(t) = w_0(t) + \varepsilon\gamma(t)$  olacak şekilde bir fonksiyon oluşturalım. Burada  $\gamma(t) = (t - t_0)^{q-1} E_{q,q}(2L(t - t_0)^q)$  olarak belirlenmiştir. Yukarıdaki verileri kullanmamız durumunda

$$\begin{aligned}
w_{0\varepsilon}^0 &= w_{0\varepsilon}(t - t_0)^{1-q} \Big|_{t=t_0} = w_0(t)(t - t_0)^{1-q} \Big|_{t=t_0} + \varepsilon\gamma(t)(t - t_0)^{1-q} \Big|_{t=t_0} \\
w_{0\varepsilon}^0 &= w_0^0 + \varepsilon\gamma^0
\end{aligned} \tag{4.12}$$

ifadesi elde edilir. Buradan  $w_{0\varepsilon}^0 \geq w_0^0 \geq v^0$  ve  $w_{0\varepsilon}(t) > w_0(t)$ ,  $t \geq t_0$  eşitsizliklerinin gerçekleştiğini görmek mümkündür. Bu takdirde

$$\begin{aligned}
D^q w_{0\varepsilon}(t) &= D^q w_0(t) + \varepsilon D^q \gamma(t) \\
&\geq f(t, w_0(t)) + 2\varepsilon L\gamma(t) \\
&\geq f(t, w_{0\varepsilon}(t)) - \varepsilon L\gamma(t) + 2\varepsilon L\gamma(t) \\
&> f(t, w_{0\varepsilon}(t)), \quad t_0 \leq t \leq t_0 + T
\end{aligned} \tag{4.13}$$

olacaktır. Burada *ii*) varsayımı ile  $\gamma(t)$  fonksiyonun aşağıdaki gibi bir başlangıç değeri

probleminin çözümü olması koşulundan faydalanıldı.

$$D^q \gamma(t) = 2L\gamma(t), \quad \gamma(t)(t-t_0)^{1-q} \Big|_{t=t_0} = \gamma^0 > 0. \quad (4.14)$$

$w_{0\varepsilon}(t)$  ve  $v(t)$  fonksiyonları için Teorem 3.1 göz önüne alındığında  $v(t) < w_{0\varepsilon}(t)$ ,  $t_0 \leq t \leq t_0 + T$  eşitsizliği bulunur.

Sonuç olarak her taraftan  $\varepsilon \rightarrow 0$  için limit alınırsa,

$$v(t) \leq w_{0\varepsilon}(t) = w_0(t) = w(t + \eta), \quad t \in [t_0, t_0 + T] \quad (4.15)$$

ilişkinine ulaşılr.

*b)* maddesini ispat etmek için ise  $v_0(t) = v(t - \eta)$ ,  $t \geq \tau_0$  olacak şekilde bir fonksiyon tanımlanarak

$$\begin{aligned} v_0(t)(t - \tau_0)^{1-q} \Big|_{t=\tau_0} &= v(t - \eta)(t - \tau_0)^{1-q} \Big|_{t=\tau_0} \\ &= v(t)(t - t_0)^{1-q} \Big|_{t=t_0} \leq w(t)(t - \tau_0)^{1-q} \Big|_{t=\tau_0} \end{aligned} \quad (4.16)$$

eşitsizliği elde edilir. *a)* maddesinde olduğu gibi burada da  $v_{0\varepsilon}(t) = v_0(t) - \varepsilon\gamma(t)$  fonksiyonu oluşturularak devam edilirse istenilen sonuca ulaşılacaktır.

Başlangıç zamanlarının arasındaki ilişki  $t_0 > \tau_0$  olması durumunda Teorem 4.1 yine geçerli olurdu. Fakat bu kez teoremde verilen *iii)* varsayımının farklı bir şekilde tekrardan ifade edilmesi durumu söz konusudur.

Aşağıdaki teorem bu durumu ifade etmektedir.

*Teorem 4.2:* Varsayalım ki *i)* ve *ii)* koşulları gerçekleştirilsin. Ayrıca varsayalım ki; *iii\*)*  $t_0 > \tau_0$  ve  $f(t, x)$  fonksiyonu her  $x$  değeri için  $t$  de artmayan bir fonksiyon olsun.

Bu durumda Teorem 4.1'de verilen sonuç yine geçerli olacaktır.

Sıradaki teorem başlangıç zamanları farklı olan alt ve üst çözüm fonksiyonları kullanılarak oluşturulmaya çalışılmış bir varlık teoremidir.

*Teorem 4.3:* Varsayalım ki;

i)  $v \in C_p[[t_0, t_0 + T], \mathbb{R}]$ ,  $t_0, T > 0$ ,  $w \in C_p^*[[\tau_0, \tau_0 + T], \mathbb{R}]$ ,  $\tau_0 > 0$  fonksiyonları  $0 < \gamma < 1$  olmak üzere  $\gamma$ . mertebeden yerel Hölder süreklili ve  $\gamma > q$ ,  $p = 1 - q$  olsun.

Ayrıca

$$D^q v(t) \leq f(t, v(t)), \quad t_0 \leq t \leq t_0 + T \quad (4.17)$$

$$D^q w(t) \geq f(t, w(t)), \quad \tau_0 \leq t \leq \tau_0 + T \quad (4.18)$$

$\tau_0 > t_0$  ve  $v^0 \leq x^0 \leq w^0$  burada  $v^0 = v(t)(t - t_0)^{1-q} |_{t=t_0}$ ,  $w^0 = w(t)(t - t_0)^{1-q} |_{t=\tau_0}$  olmak üzere  $v(t) \leq w(t + \eta)$ ,  $t_0 \leq t \leq t_0 + T$ ,  $\eta = \tau_0 - t_0$  ve  $f \in C[[t_0, \tau_0 + T] \times \mathbb{R}, \mathbb{R}]$ .

ii)  $f(t, x)$  fonksiyonu her  $x$  değeri için  $t$  de azalmayan bir fonksiyon olsun.

O halde (3.1) probleminin  $x^0 = x(t)(t - t_0)^{1-q} |_{t=t_0}$  başlangıç zamanlı  $v(t) \leq x(t) \leq w(t + \eta)$ ,  $t \in [t_0, t_0 + T]$  olacak şekilde  $x(t)$  gibi bir çözümü mevcuttur.

*İspat 4.3:* Öncelikle  $w_0(t) = w(t + \eta)$ ,  $t \geq t_0$  şeklinde bir fonksiyon tanımlayalım. Bu takdirde  $w_0(t)(t - t_0)^{1-q} |_{t=t_0} = w^0 \geq x^0 \geq v^0$  ve  $f(t, x)$  fonksiyonunun  $t$  de azalmayan bir fonksiyon olma varsayımından

$$\begin{aligned} D^q w_0(t) &= D^q w(t + \eta) \\ &\geq f(t + \eta, w(t + \eta)) \\ &\geq f(t, w_0(t)). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Bir  $p : [t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonunu  $p(t, x) = \max[v(t), \min[x(t), w_0(t)]]$  olacak biçimde belirleyelim. Bu durumda  $f(t, p(t, x))$  fonksiyonu  $f$  fonksiyonunun  $[t_0, T] \times \mathbb{R}$  kümesine sürekli bir genişlemesidir. Aynı zamanda  $f$  fonksiyonu  $\Omega$  kümesi üzerinde sınırlı olduğundan dolayı  $f(t, p(t, x))$  fonksiyonumuz da sınırlıdır. Burada  $\Omega = [(t, x) : t_0 \leq t \leq t_0 + T, v(t) \leq x(t) \leq w_0(t)]$  dir. Dolayısıyla  $[t_0, t_0 + T]$  kümesi üzerinde aşağıdaki başlangıç değer problemini sağlayan bir  $x(t)$  çözümümüz vardır.

$$D^q x(t) = f(t, p(t, x)), \quad x^0 = x(t)(t - t_0)^{1-q} \Big|_{t=t_0} \quad (4.20)$$

Şimdi  $\varepsilon > 0$  için

$$v_\varepsilon(t) = v(t) - \varepsilon(t - t_0)^{q-1} \quad \text{ve} \quad w_{0\varepsilon}(t) = w_0(t) + \varepsilon(t - t_0)^{q-1} \quad (4.21)$$

fonksiyonlarını ele alalım. Bu durumda

$$v_\varepsilon(t)(t - t_0)^{1-q} \Big|_{t=t_0} = v(t)(t - t_0)^{1-q} \Big|_{t=t_0} - \varepsilon \quad (4.22)$$

$$w_{0\varepsilon}(t)(t - t_0)^{1-q} \Big|_{t=t_0} = w_0(t)(t - t_0)^{1-q} \Big|_{t=t_0} + \varepsilon \quad (4.23)$$

olduğu açıktır. Buradan  $v_\varepsilon^0 = v^0 - \varepsilon$ ,  $w_{0\varepsilon}^0 = w_0^0 + \varepsilon$  ve  $v_\varepsilon^0 < x^0 < w_{0\varepsilon}^0$  olacaktır.

Göstermeye çalıştığımız şey  $v_\varepsilon(t) < x(t) < w_\varepsilon(t)$  eşitsizliğinin  $[t_0, t_0 + T]$  kümesi üzerinde sağlanmasıdır. Bunun için aksini varsayalım. Kabul edelim ki bu eşitsizlik doğru olmasın. Bu durumda öyle bir  $t_1 \in (t_0, t_0 + T]$  değeri vardır ki;

$$x(t_1) = w_{0\varepsilon}(t_1) \quad \text{ve} \quad v_\varepsilon(t) < x(t) < w_{0\varepsilon}(t), \quad t_0 \leq t < t_1 \quad (4.24)$$

eşitsizliğini sağlar. Yukarıdaki durumlardan  $x(t_1) > w_0(t_1)$ ,  $p(t_1, x(t_1)) = w_0(t_1)$  ve  $v(t_1) \leq p(t_1, x(t_1)) \leq w_0(t_1)$  eşitsizliklerini yazmamız mümkündür.

$m(t) = x(t) - w_{0\varepsilon}(t)$  olacak şekilde bir  $m(t)$  fonksiyonu tanımlarsak denklemden  $m(t_1) = 0$  ve  $m(t) \leq 0$ ,  $t_0 \leq t < t_1$  olduğu aşıkardır. Buradan  $m(t)$  fonksiyonuna Lemma 3.1 uygulandığında  $D^q m(t_1) \geq 0$  eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizliğin varlığı ise bizi aşağıdaki gibi bir çelişkiye götürecektir.

$$\begin{aligned}
f(t_1, w_0(t_1)) &= f(t_1, p(t_1, x(t_1))) = D^q x(t_1) \geq D^q w_{0\varepsilon}(t_1) \\
&= D^q w_0(t_1) + \varepsilon \\
&\geq f(t_1, w_0(t_1)) + \varepsilon \\
&> f(t_1, w_0(t_1))
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Eşitliğin  $v_\varepsilon(t) < x(t)$  kısmını da benzer şekilde göstermek mümkündür. Sonuç olarak,

$$v_\varepsilon(t) < x(t) < w_{0\varepsilon}(t), t \in [t_0, t_0 + T] \tag{4.26}$$

eşitsizliğinin doğruluğuna ulaşılır ve her taraftan  $\varepsilon \rightarrow 0$  için limit alındığında  $v(t) \leq x(t) \leq w(t + \eta)$ ,  $t \in [t_0, T]$  olacaktır. Böylece ispat tamamlanmıştır.

Eğer  $t_0 > \tau_0$  olsaydı Teorem 4.3 yine geçerli olurdu. Fakat bu kez teoremin *ii*) koşulu yerine aşağıdaki koşulun varsayılması durumu gerekecektir.

*ii*\*)  $t_0 > \tau_0$  ve  $f(t, x)$  fonksiyonu her  $x$  değeri için  $t$  de artmayan bir fonksiyon olsun.

Aşağıdaki teorem bu durumu ifade etmektedir.

*Teorem 4.4:* Varsayalım ki *i*) ve *ii*\*) koşulları gerçekleşsin. Bu durumda Teorem 4.3’de verilen sonuç yine geçerli olacaktır.

*Uyarı 4.1:*  $t_0 < s_0 < \tau_0$  olmak üzere başlangıç pozisyonları arasındaki ilişki  $v(t_0) < x(s_0) < w(\tau_0)$  sağlandığı durumda, Teorem 4.1’de verilen hüküm Caputo manada türev için de geçerli olacaktır.

*Uyarı 4.2:* Teorem 4.3’de verilen başlangıç pozisyonları arasındaki ilişki  $v^0 \leq x^0 \leq w^0$  yerine  $v(t_0) \leq x(t_0) \leq w(\tau_0)$  olacak şekilde seçilirse, hüküm Caputo manada türev için yine geçerli olacaktır.

## 4.2. Başlangıç Zamanı Farklı Kuasilineerizasyon Metodu

Bu bölümde, kuasilineerizasyon metoduna Bölüm 3.2’de vermiş olduğumuz teknikten farklı olarak, başlangıç zamanları farklı alt ve üst fonksiyon dizileri oluşturularak lineer olmayan fraksiyonel diferansiyel denklemin çözümüne ulaşılmaya çalışılmıştır. Yani, Caputo türevlerle verilen lineer olmayan fraksiyonel diferansiyel denklemlerin çözümleri için alt ve üst monoton diziler oluşturulması amaçlanmaktadır. Bu monoton diziler başlangıç zamanı ve pozisyonu farklı Caputo manada lineer fraksiyonel diferansiyel denklemlerin çözümleri ile oluşturulur. Ayrıca bu monoton diziler lineer olmayan fraksiyonel diferansiyel denklemin tek çözümüne düzgün, monoton ve kuadratik yakınsarlar.

### 4.2.1. Başlangıç Zamanı Farklı Temel Kuasilineerizasyon Metodu

Aşağıdaki lineer olmayan başlangıç değer problemini düşünelim:

$${}^c D^q x(t) = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0 \quad (4.27)$$

burada  $f \in C[[t_0, T] \times \mathbb{R}, \mathbb{R}]$  ve  ${}^c D^q$  ise  $q$ . mertebeden ( $0 < q < 1$ ) Caputo manada fraksiyonel türev olarak verilmiştir.

(4.27) başlangıç değer problemine karşılık gelen Volterra integral denklemi ise

$$x(t) = x_0 + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_{t_0}^t (t-s)^{q-1} f(s, x(s)) ds, \quad t \in [t_0, T] \quad (4.28)$$

şeklindedir.

Aşağıdaki teoremde Caputo manada fraksiyonel diferansiyel denklemler için (4.27)'de bulunan  $f(t, x)$  fonksiyonu konveks olma koşulundan daha zayıf bir koşulla verilerek başlangıç zamanı farklı kuasilineerizasyon tekniği uygulanmıştır.

*Teorem 4.5:* Varsayalım ki;

i)  $\alpha \in C^q[[t_0, t_0 + T], \mathbb{R}]$ ,  $t_0, T > 0$ ,  $\beta \in C^q[[\tau_0, \tau_0 + T], \mathbb{R}]$ ,  $\tau_0 > 0$ ,  
 $f \in C[[t_0, \tau_0 + T] \times \mathbb{R}, \mathbb{R}]$  ve

$${}^c D^q \alpha(t) \leq f(t, \alpha(t)), \quad t_0 \leq t \leq t_0 + T \quad (4.29)$$

$${}^c D^q \beta(t) \geq f(t, \beta(t)), \quad \tau_0 \leq t \leq \tau_0 + T \quad (4.30)$$

burada  $\alpha(t_0) \leq x(s_0) \leq \beta(\tau_0)$  ve  $t_0 < s_0 < \tau_0$ . Ayrıca  $\alpha(t) \leq \beta(t + \eta_1)$ ,  
 $t_0 \leq t \leq t_0 + T$ ;

ii)  $f(t, x) \geq f(t, y) + f_x(t, y)$ ,  $x \geq y$  olmak üzere aşağıdaki eşitsizliği sağlayan bir  $f_x(t, x)$  fonksiyonu mevcut olsun.

$$|f_x(t, x) - f_x(t, y)| \leq L|x - y|, \quad L > 0 \quad (4.31)$$

iii)  $f(t, x)$  fonksiyonu her  $x$  değeri için  $t$  de azalmayan iken  $f_x(t, x)$  fonksiyonu ise her  $t$  değeri için  $x$  de azalmayan bir fonksiyon olsun.

Bu durumda öyle  $\{\tilde{\alpha}_n\}$  ve  $\{\tilde{\beta}_n\}$  fonksiyon dizileri bulunur ki  $[s_0, s_0 + T]$  kümesi

üzerinde  ${}^c D^q x = f(s, x)$ ,  $x(s_0) = x_0$  probleminin tek çözümüne düzgün ve monoton olarak yakınsarlar. Ayrıca bu yakınsama kuadrattir.

*İspat 4.5:* Öncelikle  $\tilde{\beta}_0(t) = \beta(t + \eta_1)$  ve  $\tilde{\alpha}_0(t) = \alpha(t)$ ,  $t_0 \leq t \leq t_0 + T$  olacak şekilde fonksiyonlar tanımlayalım, burada  $\eta_1 = \tau_0 - t_0$ . Buradan

$$\tilde{\beta}_0(t_0) = \beta(\tau_0) \geq \alpha(t_0) = \tilde{\alpha}_0(t_0). \quad (4.32)$$

Aynı zamanda,

$$\begin{aligned} {}^c D^q \tilde{\beta}_0(t) &= {}^c D^q \beta(t + \eta_1) \geq f(t + \eta_1, \beta(t + \eta_1)) \\ &\geq f(t + \eta_1, \tilde{\beta}_0(t)) \\ &\geq f(t, \tilde{\beta}_0(t)) \end{aligned} \quad (4.33)$$

ve

$${}^c D^q \tilde{\alpha}_0(t) = {}^c D^q \alpha_0(t) \leq f(t, \alpha_0(t)) = f(t, \tilde{\alpha}_0(t)). \quad (4.34)$$

Yukarıdaki eşitsizliklerin elde edilmesinde  $f(t, x)$  fonksiyonunun her  $x$  değeri için  $t$  de azalmayan olma koşulu kullanıldı. Şimdi aşağıdaki lineer başlangıç değer problemlerini ele alalım.

$${}^c D^q \tilde{\alpha}_{n+1}(t) = f(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n) + f_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n) (\tilde{\alpha}_{n+1} - \tilde{\alpha}_n), \tilde{\alpha}_{n+1}(t_0) = x_0 \quad (4.35)$$

$${}^c D^q \tilde{\beta}_{n+1}(t) = f(t + \eta_2, \tilde{\beta}_n) + f_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n) (\tilde{\beta}_{n+1} - \tilde{\beta}_n), \tilde{\beta}_{n+1}(t_0) = x_0 \quad (4.36)$$

Burada  $\eta_2 = s - t$ . Açık ki denklemlerin sağ tarafları Lipschitz koşulunu sağladıklarından tek çözümleri mevcuttur.

Amacımız aşağıdaki eşitsizliğin doğru olduğunu göstermektir.

$$\tilde{\alpha}_0 \leq \tilde{\alpha}_1 \leq \dots \leq \tilde{\alpha}_n \leq \tilde{\beta}_n \leq \dots \leq \tilde{\beta}_1 \leq \tilde{\beta}_0, t \in [t_0, t_0 + T] \quad (4.37)$$

Bunun için öncelikle

$$\tilde{\alpha}_0 \leq \tilde{\alpha}_1 \leq \tilde{\beta}_1 \leq \tilde{\beta}_0, t \in [t_0, t_0 + T] \quad (4.38)$$

eşitsizliğinin gerçekleştiğini gösterelim.

Bu doğrultuda  $p(t) = \tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_0$  fonksiyonu oluşturursak, buradan

$$\begin{aligned} {}^c D^q p(t) &= {}^c D^q \tilde{\alpha}_1 - {}^c D^q \tilde{\alpha}_0 \\ &\geq f(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) + f_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) (\tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_0) - f(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) \\ &= f_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) (\tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_0) \\ &= f_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) p(t) \end{aligned} \quad (4.39)$$

olacaktır. Böylece  ${}^c D^q p(t) \geq f_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) p(t)$  ve  $p(t_0) \geq 0$  bulunur. Sonuç 3.1 kullanıldığında  $p(t) \geq 0$  olduğunu yani  $\tilde{\alpha}_0 \leq \tilde{\alpha}_1, t \in [t_0, t_0 + T]$  eşitsizliğini elde ederiz.  $\tilde{\beta}_1 \leq \tilde{\beta}_0, t \in [t_0, t_0 + T]$  eşitsizliği de benzer şekilde gösterilebilir.

Şimdi  $\tilde{\alpha}_1 \leq \tilde{\beta}_1, t \in [t_0, t_0 + T]$  sağlandığını gösterelim. Bunun için  $p(t) = \tilde{\beta}_1 - \tilde{\alpha}_1$  fonksiyonu oluşturalım öyle ki;

$$\begin{aligned}
{}^c D^q p(t) &= {}^c D^q \tilde{\beta}_1 - {}^c D^q \tilde{\alpha}_1 \\
&= f(t + \eta_2, \tilde{\beta}_0) + f_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) (\tilde{\beta}_1 - \tilde{\beta}_0) \\
&\quad - [f(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) + f_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) (\tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_0)] \\
&= f(t + \eta_2, \tilde{\beta}_0) - f(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) \\
&\quad + f_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) (\tilde{\beta}_1 - \tilde{\beta}_0 - \tilde{\alpha}_1 + \tilde{\alpha}_0). \tag{4.40}
\end{aligned}$$

ii)'de verilen eşitsizliğin kullanılması ile ifademiz

$$\begin{aligned}
{}^c D^q p(t) &\geq f_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) (\tilde{\beta}_0 - \tilde{\alpha}_0) + f_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) (\tilde{\beta}_1 - \tilde{\beta}_0 - \tilde{\alpha}_1 + \tilde{\alpha}_0) \\
&= f_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) (\tilde{\beta}_1 - \tilde{\alpha}_1) \tag{4.41}
\end{aligned}$$

şekline dönüşecektir. Yukarıda oluşturduğumuz fonksiyonu yerine yazdığımız zaman

$${}^c D^q p(t) \geq f_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) p(t) \text{ ve } p(t_0) = 0 \tag{4.42}$$

eşitsizliği ve Sonuç 3.1'den dolayı  $p(t) \geq 0$  alınacaktır. Sonuçta  $\tilde{\alpha}_1 \leq \tilde{\beta}_1, t \in [t_0, t_0 + T]$  elde edilir. Böylece (4.38) eşitsizliği ispatlanmış olur.

Tümevarım yöntemi kullanılarak, bazı  $k > 1$  değerleri için aşağıdaki ifadenin doğru olduğunu kabul edelim.

$$\tilde{\alpha}_0 \leq \tilde{\alpha}_{k-1} \leq \tilde{\alpha}_k \leq \tilde{\beta}_k \leq \tilde{\beta}_{k-1} \leq \tilde{\beta}_0, t \in [t_0, t_0 + T] \tag{4.43}$$

Bu durumda

$$\tilde{\alpha}_k \leq \tilde{\alpha}_{k+1} \leq \tilde{\beta}_{k+1} \leq \tilde{\beta}_k, t \in [t_0, t_0 + T] \quad (4.44)$$

eşitsizliğinin sağlandığını göstermeliyiz. Bunun için  $p(t) = \tilde{\alpha}_{k+1} - \tilde{\alpha}_k$  fonksiyonunu oluşturup, (4.35), (4.36)'de verilen lineer başlangıç değer problemlerini ve *ii)*'de verilen eşitsizliği kullanırsak

$$\begin{aligned} {}^c D^q p(t) &= f(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_k) + f_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_k)(\tilde{\alpha}_{k+1} - \tilde{\alpha}_k) \\ &\quad - [f(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_{k-1}) + f_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_{k-1})(\tilde{\alpha}_k - \tilde{\alpha}_{k-1})] \\ &\geq f_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_{k-1})(\tilde{\alpha}_k - \tilde{\alpha}_{k-1}) + f_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_k)(\tilde{\alpha}_{k+1} - \tilde{\alpha}_k) \\ &\quad - f_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_{k-1})(\tilde{\alpha}_k - \tilde{\alpha}_{k-1}) \\ &= f_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_k)(\tilde{\alpha}_{k+1} - \tilde{\alpha}_k). \end{aligned} \quad (4.45)$$

Neticede

$${}^c D^q p(t) \geq f_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_k) p(t) \text{ ve } p(t_0) = 0 \quad (4.46)$$

bulunacaktır. Daha önce yaptığımız işlemlerin tekrarlanması durumunda Sonuç 3.1'den  $\tilde{\alpha}_k \leq \tilde{\alpha}_{k+1}$ ,  $t \in [t_0, t_0 + T]$  eşitsizliğini elde ederiz.  $\tilde{\beta}_k \geq \tilde{\beta}_{k+1}$ ,  $t \in [t_0, t_0 + T]$  gerçektendiği de benzer şekilde gösterilebilir. Son olarak  $\tilde{\alpha}_{k+1} \leq \tilde{\beta}_{k+1}$ ,  $t \in [t_0, t_0 + T]$  eşitsizliğini gösterelim. Bu kez  $p(t)$  fonksiyonunu  $p(t) = \tilde{\beta}_{k+1} - \tilde{\alpha}_{k+1}$  olacak şekilde belirlersek, buradan

$$\begin{aligned}
{}^c D^q p(t) &= {}^c D^q \tilde{\beta}_{k+1} - {}^c D^q \tilde{\alpha}_{k+1} \\
&= f\left(t + \eta_2, \tilde{\beta}_k\right) + f_x\left(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_k\right) \left(\tilde{\beta}_{k+1} - \tilde{\beta}_k\right) \\
&\quad - \left[f\left(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_k\right) + f_x\left(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_k\right) \left(\tilde{\alpha}_{k+1} - \tilde{\alpha}_k\right)\right] \\
&\geq f_x\left(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_k\right) \left(\tilde{\beta}_k - \tilde{\alpha}_k\right) + f_x\left(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_k\right) \left(\tilde{\beta}_{k+1} - \tilde{\beta}_k\right) \\
&\quad - f_x\left(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_k\right) \left(\tilde{\alpha}_{k+1} - \tilde{\alpha}_k\right) \\
&= f_x\left(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_k\right) \left[\tilde{\beta}_k - \tilde{\alpha}_k - \tilde{\alpha}_{k+1} + \tilde{\alpha}_k + \tilde{\beta}_{k+1} - \tilde{\beta}_k\right] \\
&= f_x\left(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_k\right) \left(\tilde{\beta}_{k+1} - \tilde{\alpha}_{k+1}\right) \tag{4.47}
\end{aligned}$$

ifadesini düzenlersek

$${}^c D^q p(t) \geq f_x\left(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_k\right) p(t) \text{ ve } p(t_0) = 0 \tag{4.48}$$

bulunur. Sonuç 3.1'den faydalanıldığında  $\tilde{\alpha}_{k+1} \leq \tilde{\beta}_{k+1}$ ,  $t \in [t_0, t_0 + T]$  olacaktır. Bu da bize (4.44) eşitsizliğinin doğruluğunu gösterir.

(4.37)'den dolayı  $\{\tilde{\alpha}_n\}$  ve  $\{\tilde{\beta}_n\}$  fonksiyon dizileri düzgün sınırlıdır. Bu durum ise  $\{{}^c D^q \tilde{\alpha}_n\}$  ve  $\{{}^c D^q \tilde{\beta}_n\}$  dizilerinin de düzgün sınırlı olmasını gerektirir. Ayrıca Lemma 3.2 kullanılarak bu fonksiyon dizilerinin eş-sürekli olduklarını söyleyebiliriz. Arzela-Ascoli teoremi gereği, bir dizi eş-sürekli ve düzgün sınırlı ise düzgün ve monoton yakınsayan bir alt dizisi mevcuttur. Bu o demektir ki  $\{\tilde{\alpha}_n\}$  ve  $\{\tilde{\beta}_n\}$  dizileri düzgün yakınsak alt dizilere sahiptir. (4.37) eşitsizliğinden  $\{\tilde{\alpha}_n\}$  ve  $\{\tilde{\beta}_n\}$  fonksiyon dizileri  $n \rightarrow \infty$  için sırasıyla  $\rho$  ve  $\sigma$  gibi iki fonksiyona düzgün ve monoton olarak yakınsarlar. Aynı zamanda  $\tilde{\alpha}_n$  ve  $\tilde{\beta}_n$  fonksiyonları (4.35) ve (4.36)'de verilen lineer fraksiyonel diferansiyel denklemlerin çözümleri olduklarından bu denklemlere karşılık

gelen Volterra integral denklemleri

$$\tilde{\alpha}_n(t) = x_0(t) + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_{t_0}^t (t-s)^{q-1} [f(s+\eta_2, \tilde{\alpha}_{n-1}) + f_x(s+\eta_2, \tilde{\alpha}_{n-1})(\tilde{\alpha}_n - \tilde{\alpha}_{n-1})] ds \quad (4.49)$$

$$\tilde{\beta}_n(t) = x_0(t) + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_{t_0}^t (t-s)^{q-1} [f(s+\eta_2, \tilde{\beta}_{n-1}) + f_x(s+\eta_2, \tilde{\alpha}_{n-1})(\tilde{\beta}_n - \tilde{\beta}_{n-1})] ds \quad (4.50)$$

şeklinde olacaktır. Buradan söyleyebiliriz ki  $n \rightarrow \infty$  için  $\rho(t)$  ve  $\sigma(t)$  fonksiyonları  ${}^c D^q \tilde{x}(t) = f(t+\eta_2, \tilde{x}(t))$ ,  $\tilde{x}(t_0) = x_0$  probleminin herhangi iki çözümüdür.  $f(t, x)$  fonksiyonu Lipschitz koşulunu sağladığından tek çözümü vardır ve bu çözüm  $\rho(t) = \tilde{x}(t) = \sigma(t)$  eşitliğini sağlar.

Dolayısıyla  $\{\tilde{\alpha}_n\}$  ve  $\{\tilde{\beta}_n\}$  fonksiyon dizileri

$${}^c D^q \tilde{x}(t) = f(t+\eta_2, \tilde{x}(t)), \quad \tilde{x}(t_0) = x_0 \quad (4.51)$$

probleminin  $\tilde{x}(t)$  tek çözümüne düzgün ve monoton olarak yakınsarlar.  $s = t + \eta_2$  değişken dönüşümü ile

$${}^c D^q x = f(s, x), \quad x(s_0) = x_0 \quad (4.52)$$

elde edilir.

Son olarak  $\{\tilde{\alpha}_n\}$  ve  $\{\tilde{\beta}_n\}$  fonksiyon dizilerinin tek çözüme kuadratik yakınsadığını gösterelim. Bunun için

$$p_{n+1} = \tilde{x} - \tilde{\alpha}_{n+1} \quad (4.53)$$

olacak şekilde bir fonksiyon tanımlayalım. Buradan kolayca görüldüğü gibi  $p_{n+1}(t_0) = 0$  dır. Bu durumda

$$\begin{aligned}
{}^c D^q p_{n+1} &= {}^c D^q \tilde{x} - {}^c D^q \tilde{\alpha}_{n+1} \\
&= f(t + \eta_2, \tilde{x}) - [f(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n) + f_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n)(\tilde{\alpha}_{n+1} - \tilde{\alpha}_n)] \\
&= [f(t + \eta_2, \tilde{x}) - f(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n)] - f_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n)(p_n - p_{n+1}) \\
&\leq [f_x(t + \eta_2, \tilde{x}) - f_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n)]p_n + f_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n)p_{n+1} \\
&\leq L|p_n|^2 + f_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n)p_{n+1} \\
&\leq L|p_n|_0^2 + Np_{n+1} \\
{}^c D^q p_{n+1} &\leq L|p_n|_0^2 + Np_{n+1} \tag{4.54}
\end{aligned}$$

burada  $|f_x| \leq N$ ,  $|p_n|_0 = \max_{[t_0, t_0+T]} |p_n(t)|$ . En son bulduğumuz eşitsizlikten

$$\begin{aligned}
p_{n+1} &\leq L|p_n|_0^2 \int_{t_0}^t (t-s)^{q-1} E_{q,q}(N(t-s)^q) ds \\
&\leq N_0 |p_n|_0^2 \tag{4.55}
\end{aligned}$$

alınacaktır. Burada  $N_0 = \frac{LT^q}{q} E_{q,q}(NT^q)$  ve  $E_{q,q}$  Mittag-Leffler fonksiyonudur. Sonuç olarak,

$$\max_{[t_0, t_0+T]} |\tilde{x} - \tilde{\alpha}_{n+1}| \leq N_0 \max_{[t_0, t_0+T]} |\tilde{x} - \tilde{\alpha}_n|^2 \tag{4.56}$$

eşitsizliği elde edilecektir ki bu da bizim ulaşmak istediğimiz,  $\{\tilde{\alpha}_n\}$  dizisinin  $\tilde{x}(t)$  tek

çözümüne kuadratik yakınsamasıdır. Benzer şekilde

$$r_{n+1} = \tilde{\beta}_{n+1} - \tilde{x} \quad (4.57)$$

fonksiyonu teşkil edilerek devam edilirse,  $\{\tilde{\beta}_n\}$  fonksiyon dizisinin  $\tilde{x}(t)$  tek çözümüne kuadratik yakınsaması aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\max_{[t_0, t_0+T]} |\tilde{\beta}_{n+1} - \tilde{x}| \leq \frac{N_0L}{2} \max_{[t_0, t_0+T]} |\tilde{x} - \tilde{\alpha}_n|^2 + \frac{3N_0L}{2} \max_{[t_0, t_0+T]} |\tilde{\beta}_n - \tilde{x}|^2 \quad (4.58)$$

İspat tamamlanmıştır.

#### 4.2.2. Başlangıç Zamanı Farklı Genelleştirilmiş Kuasilineerizasyon Metodu

Bu bölümde başlangıç zamanı farklı kuasilineerizasyon tekniği, geliştirilerek Caputo manada fraksiyonel türevle verilen lineer olmayan başlangıç değer problemine uygulanacaktır.

Aşağıdaki verilen başlangıç değer problemini ele alalım:

$${}^c D^q x(t) = f(t, x) + g(t, x), \quad x(t_0) = x_0 \quad (4.59)$$

burada  $f \in C[[t_0, T] \times \mathbb{R}, \mathbb{R}]$  ve  ${}^c D^q$  ise  $q$ . mertebeden ( $0 < q < 1$ ) Caputo manada fraksiyonel türevi göstermektedir.

(4.59) problemine karşılık gelen Volterra integral denklemi ise aşağıdaki gibidir.

$$x(t) = x_0 + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_{t_0}^t (t-s)^{q-1} [f(s, x(s)) + g(s, x(s))] ds \quad (4.60)$$

*Tanım 4.1:* Eğer  $\alpha \in C^q [[t_0, t_0 + T], \mathbb{R}]$ ,  $t_0, T > 0$ ,  $\beta \in C^q [[\tau_0, \tau_0 + T], \mathbb{R}]$ ,  $\tau_0 > 0$  fonksiyonları aşağıdaki koşulları sağlıyorsa bu fonksiyonlara (4.59) başlangıç değer probleminin sırasıyla birer alt ve üst çözümleri denir.

$${}^c D^q \alpha(t) \leq f(t, \alpha(t)) + g(t, \alpha(t)), \alpha(t_0) \leq x(t_0), t_0 \leq t \leq t_0 + T \quad (4.61)$$

$${}^c D^q \beta(t) \geq f(t, \beta(t)) + g(t, \beta(t)), x(t_0) \leq \beta(\tau_0), \tau_0 \leq t \leq \tau_0 + T \quad (4.62)$$

Bu adımdaki asıl amacımız, başlangıç değer probleminin sağ tarafında yer alan tek fonksiyon yerine  $f(t, x)$ ,  $g(t, x)$  şeklinde birbirlerinden farklı iki fonksiyonun toplamı biçiminde verilmesi durumunu incelemektir.  $f(t, x)$  fonksiyonu konveks olma koşulundan,  $g(t, x)$  fonksiyonu ise konkav olma koşulundan daha zayıf koşullarla verilmiş iki fonksiyondur.

Aşağıdaki teoremde (4.59) problemi için bu defa başlangıç zamanları farklı olan alt ve üst çözümler kullanılarak genelleştirilmiş kuasilineerizasyon metodu uygulanmıştır.

*Teorem 4.6: (Esas Teorem)* Varsayalım ki;

i)  $f, g \in C [[t_0, \tau_0 + T] \times \mathbb{R}, \mathbb{R}]$ ,  $\alpha \in C^q [[t_0, t_0 + T], \mathbb{R}]$ ,  $t_0, T > 0$ ,  
 $\beta \in C^q [[\tau_0, \tau_0 + T], \mathbb{R}]$ ,  $\tau_0 > 0$ , ve

$${}^c D^q \alpha(t) \leq f(t, \alpha(t)) + g(t, \alpha(t)), t_0 \leq t \leq t_0 + T \quad (4.63)$$

$${}^c D^q \beta(t) \geq f(t, \beta(t)) + g(t, \beta(t)), \tau_0 \leq t \leq \tau_0 + T \quad (4.64)$$

burada  $\alpha(t_0) \leq x(s_0) \leq \beta(\tau_0)$  ve  $t_0 < s_0 < \tau_0$ .

ii)  $f(t, x)$  ve  $g(t, x)$  fonksiyonları her  $x$  değeri için  $t$  de azalmayan fonksiyonlar olsun. Ayrıca  $\alpha(t) \leq \beta(t + \eta_1)$ ,  $t_0 \leq t \leq t_0 + T$ ,  $\eta_1 = \tau_0 - t_0$  sağlansın.

iii)  $f_x(t, x)$  fonksiyonu mevcut, sürekli ve her  $t$  değeri için  $x$  bileşenine göre azalmayan bir fonksiyon olsun. Ayrıca

$$f(t, x) \geq f(t, y) + f_x(t, y)(x - y), \quad x \geq y \quad \text{ve} \quad (4.65)$$

$$|f_x(t, x) - f_x(t, y)| \leq L_1 |x - y|, \quad L_1 > 0 \quad (4.66)$$

eşitsizlikleri sağlansın.

Aynı zamanda varsayalım ki  $g_x(t, x)$  fonksiyonu mevcut, sürekli ve her  $t$  değeri için  $x$  bileşenine göre artmayan olsun. Ayrıca

$$g(t, x) \geq g(t, y) + g_x(t, x)(x - y), \quad x \geq y \quad \text{ve} \quad (4.67)$$

$$|g_x(t, x) - g_x(t, y)| \leq L_2 |x - y|, \quad L_2 > 0 \quad (4.68)$$

eşitsizlikleri de gerçeklensin.

Bu takdirde öyle  $\{\tilde{\alpha}_n\}$  ve  $\{\tilde{\beta}_n\}$  fonksiyon dizileri mevcuttur ki  $[s_0, s_0 + T]$  kümesi üzerinde  ${}^c D^q x = f(s, x) + g(s, x)$ ,  $x(s_0) = x_0$  probleminin tek çözümüne düzgün ve monoton olarak yakınsarlar. Ayrıca bu yakınsama kuadrattir.

*İspat 4.6:* Öncelikle  $\tilde{\beta}_0(t) = \beta(t + \eta_1)$  ve  $\tilde{\alpha}_0(t) = \alpha(t)$ ,  $t_0 \leq t \leq t_0 + T$  fonksiyonlarını tanımlayalım, burada  $\eta_1 = \tau_0 - t_0$ . Buradan

$$\tilde{\beta}_0(t_0) = \beta(\tau_0) \geq \alpha(t_0) = \tilde{\alpha}_0(t_0). \quad (4.69)$$

Ayrıca  $f(t, x)$  ve  $g(t, x)$  fonksiyonlarının her  $x$  değeri için  $t$  de azalmayan fonksiyonlar olma koşulundan

$$\begin{aligned}
{}^c D^q \tilde{\beta}_0(t) &= {}^c D^q \beta(t + \eta_1) \geq f(t + \eta_1, \beta(t + \eta_1)) + g(t + \eta_1, \beta(t + \eta_1)) \\
&\geq f(t + \eta_1, \tilde{\beta}_0(t)) + g(t + \eta_1, \tilde{\beta}_0(t)) \\
&\geq f(t, \tilde{\beta}_0(t)) + g(t, \tilde{\beta}_0(t))
\end{aligned} \tag{4.70}$$

ve

$${}^c D^q \tilde{\alpha}_0(t) = {}^c D^q \alpha(t) \leq f(t, \alpha(t)) + g(t, \alpha(t)) = f(t, \tilde{\alpha}_0(t)) + g(t, \tilde{\alpha}_0(t)). \tag{4.71}$$

Burada  $\tilde{\alpha}_0$  ve  $\tilde{\beta}_0$  fonksiyonlarının başlangıç değer probleminin birer alt ve üst çözümleri olduğu kolayca görülmektedir. Şimdi aşağıdaki lineer fraksiyonel diferansiyel denklemleri ele alalım.

$$\begin{aligned}
{}^c D^q \tilde{\alpha}_{n+1}(t) &= F(t, \tilde{\alpha}_{n+1}, \tilde{\alpha}_n, \tilde{\beta}_n) \\
&= f(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n) + f_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n)(\tilde{\alpha}_{n+1} - \tilde{\alpha}_n) + g(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n) \\
&\quad + g_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_n)(\tilde{\alpha}_{n+1} - \tilde{\alpha}_n), \quad (\tilde{\alpha}_{n+1}(t_0) = x_0)
\end{aligned} \tag{4.72}$$

$$\begin{aligned}
{}^c D^q \tilde{\beta}_{n+1}(t) &= G(t, \tilde{\beta}_{n+1}, \tilde{\alpha}_n, \tilde{\beta}_n) \\
&= f(t + \eta_2, \tilde{\beta}_n) + f_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n)(\tilde{\beta}_{n+1} - \tilde{\beta}_n) + g(t + \eta_2, \tilde{\beta}_n) \\
&\quad + g_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_n)(\tilde{\beta}_{n+1} - \tilde{\beta}_n), \quad (\tilde{\beta}_{n+1}(t_0) = x_0)
\end{aligned} \tag{4.73}$$

Burada  $\eta_2 = s - t$  dir. Açık ki denklemlerin sağ tarafları Lipschitz koşulunu sağladıkları için  $\tilde{\alpha}_{n+1}(t)$  ve  $\tilde{\beta}_{n+1}(t)$  fonksiyonlarının tek çözümleri mevcuttur.

Amacımız aşağıdaki gibi bir eşitsizliğin doğru olduğunu göstermektir.

$$\tilde{\alpha}_0 \leq \tilde{\alpha}_1 \leq \dots \leq \tilde{\alpha}_n \leq \tilde{\beta}_n \leq \dots \leq \tilde{\beta}_1 \leq \tilde{\beta}_0, t \in [t_0, t_0 + T] \quad (4.74)$$

Bunun için öncelikle

$$\tilde{\alpha}_0 \leq \tilde{\alpha}_1 \leq \tilde{\beta}_1 \leq \tilde{\beta}_0, t \in [t_0, t_0 + T]. \quad (4.75)$$

eşitsizliğinin sağlandığını gösterelim.

İlk olarak  $p(t) = \tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_0$  olacak şekilde bir fonksiyon tanımlayalım. Bu durumda

$$\begin{aligned} {}^c D^q p(t) &= {}^c D^q \tilde{\alpha}_1 - {}^c D^q \tilde{\alpha}_0 \\ &\geq f(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) + f_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) (\tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_0) + g(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) \\ &\quad + g_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_0) (\tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_0) - f(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) - g(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) \\ &= \left[ f_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) + g_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_0) \right] p(t) \end{aligned} \quad (4.76)$$

olacaktır. Buradan  ${}^c D^q p(t) \geq \left[ f_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) + g_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_0) \right] p(t)$  ve  $p(t_0) = \tilde{\alpha}_1(t_0) - \tilde{\alpha}_0(t_0) \geq x_0 - x_0 = 0$  bulunur. Sonuç 3.1'i kullanırsak  $p(t) \geq 0$  yani  $\tilde{\alpha}_0 \leq \tilde{\alpha}_1, t \in [t_0, t_0 + T]$  eşitsizliğini elde ederiz. Benzer şekilde  $\tilde{\beta}_1 \leq \tilde{\beta}_0$  eşitsizliği de gösterilebilir.

Şimdi  $\tilde{\alpha}_1 \leq \tilde{\beta}_1, t \in [t_0, t_0 + T]$  eşitsizliğini göstermek için  $p(t) = \tilde{\beta}_1 - \tilde{\alpha}_1$  fonksiyonu oluşturalım öyle ki;

$$\begin{aligned}
{}^c D^q p(t) &= {}^c D^q \tilde{\beta}_1 - {}^c D^q \tilde{\alpha}_1 \\
&= f(t + \eta_2, \tilde{\beta}_0) + g(t + \eta_2, \tilde{\beta}_0) - f(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) - g(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) \\
&\quad + \left[ f_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) + g_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_0) \right] (\tilde{\beta}_1 - \tilde{\beta}_0) \\
&\quad - \left[ f_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) + g_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_0) \right] (\tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_0) \\
&\geq f_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) (\tilde{\beta}_0 - \tilde{\alpha}_0) + f_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) (\tilde{\beta}_1 - \tilde{\beta}_0 - \tilde{\alpha}_1 + \tilde{\alpha}_0) \\
&\quad + g_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_0) (\tilde{\beta}_0 - \tilde{\alpha}_0) + g_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_0) (\tilde{\beta}_1 - \tilde{\beta}_0 - \tilde{\alpha}_1 + \tilde{\alpha}_0) \\
&= \left[ f_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) + g_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_0) \right] (\tilde{\beta}_1 - \tilde{\alpha}_1). \tag{4.77}
\end{aligned}$$

Bu eşitsizliğin elde edilmesinde *iii*)’de verilen eşitsizlikten faydalanıldı. Burada  $p(t)$  fonksiyonunun yerine yazılması ile

$${}^c D^q p(t) \geq \left[ f_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) + g_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_0) \right] p(t) \text{ ve } p(t_0) = 0 \tag{4.78}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Yine Sonuç 3.1’den dolayı  $p(t) \geq 0$  alınacaktır. Sonuçta  $\tilde{\alpha}_1 \leq \tilde{\beta}_1, t \in [t_0, t_0 + T]$  dır. Böylece (4.75) eşitsizliği ispatlanmıştır.

Matematiksel tümevarım yöntemini kullanarak, bazı  $k > 1$  değerleri için

$$\tilde{\alpha}_0 \leq \tilde{\alpha}_{k-1} \leq \tilde{\alpha}_k \leq \tilde{\beta}_k \leq \tilde{\beta}_{k-1} \leq \tilde{\beta}_0, t \in [t_0, t_0 + T] \tag{4.79}$$

ifadesinin doğru olduğunu kabul edelim. Bu varsayım altında gösterelim ki aşağıdaki eşitsizlik doğrudur.

$$\tilde{\alpha}_k \leq \tilde{\alpha}_{k+1} \leq \tilde{\beta}_{k+1} \leq \tilde{\beta}_k, \quad t \in [t_0, t_0 + T] \quad (4.80)$$

Bunun için  $p(t) = \tilde{\alpha}_{k+1} - \tilde{\alpha}_k$  fonksiyonunu oluşturup, (4.72), (4.73)'de verilen lineer fraksiyonel denklemleri ve *iii*)'de verilen eşitsizliği kullanırsak

$$\begin{aligned} {}^c D^q p(t) &= {}^c D^q \tilde{\alpha}_{k+1} - {}^c D^q \tilde{\alpha}_k \\ &= f(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_k) + g(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_k) - f(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_{k-1}) - g(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_{k-1}) \\ &\quad + \left[ f_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_k) + g_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_k) \right] (\tilde{\alpha}_{k+1} - \tilde{\alpha}_k) \\ &\quad - \left[ f_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_{k-1}) + g_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_{k-1}) \right] (\tilde{\alpha}_k - \tilde{\alpha}_{k-1}) \\ &\geq f_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_{k-1}) (\tilde{\alpha}_k - \tilde{\alpha}_{k-1}) + f_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_k) (\tilde{\alpha}_{k+1} - \tilde{\alpha}_k) \\ &\quad - f_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_{k-1}) (\tilde{\alpha}_k - \tilde{\alpha}_{k-1}) + g_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_{k-1}) (\tilde{\alpha}_k - \tilde{\alpha}_{k-1}) \\ &\quad + g_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_k) (\tilde{\alpha}_{k+1} - \tilde{\alpha}_k) - g_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_{k-1}) (\tilde{\alpha}_k - \tilde{\alpha}_{k-1}) \\ &= \left[ f_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_k) + g_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_k) \right] (\tilde{\alpha}_{k+1} - \tilde{\alpha}_k) \end{aligned} \quad (4.81)$$

ve buradan

$${}^c D^q p(t) \geq \left[ f_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_k) + g_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_k) \right] p(t) \quad \text{ve } p(t_0) = 0 \quad (4.82)$$

bulunacaktır. Sonuç 3.1 göz önünde bulundurulursa  $\tilde{\alpha}_k \leq \tilde{\alpha}_{k+1}$ ,  $t \in [t_0, t_0 + T]$  olacaktır.  $\tilde{\beta}_k \geq \tilde{\beta}_{k+1}$ ,  $t \in [t_0, t_0 + T]$  sağlandığı da benzer şekilde gösterilebilir. Son olarak  $\tilde{\alpha}_{k+1} \leq \tilde{\beta}_{k+1}$ ,  $t \in [t_0, t_0 + T]$  eşitsizliğini göstermek için  $p(t)$  fonksiyonunu

$p(t) = \tilde{\beta}_{k+1} - \tilde{\alpha}_{k+1}$  şeklinde belirleyelim. Buradan

$$\begin{aligned}
{}^c D^q p(t) &= {}^c D^q \tilde{\beta}_{k+1} - {}^c D^q \tilde{\alpha}_{k+1} \\
&= f(t + \eta_2, \tilde{\beta}_k) + g(t + \eta_2, \tilde{\beta}_k) - f(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_k) - g(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_k) \\
&\quad + [f_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_k) + g_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_k)] (\tilde{\beta}_{k+1} - \tilde{\beta}_k) \\
&\quad - [f_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_k) + g_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_k)] (\tilde{\alpha}_{k+1} - \tilde{\alpha}_k) \\
&\geq f_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_k) [\tilde{\beta}_k - \tilde{\alpha}_k - \tilde{\alpha}_{k+1} + \tilde{\alpha}_k + \tilde{\beta}_{k+1} - \tilde{\beta}_k] \\
&\quad + g_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_k) [\tilde{\beta}_k - \tilde{\alpha}_k - \tilde{\alpha}_{k+1} + \tilde{\alpha}_k + \tilde{\beta}_{k+1} - \tilde{\beta}_k] \\
&= [f_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_k) + g_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_k)] (\tilde{\beta}_{k+1} - \tilde{\alpha}_{k+1}) \tag{4.83}
\end{aligned}$$

ifadesini düzenlersek

$${}^c D^q p(t) \geq [f_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_k) + g_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_k)] p(t) \text{ ve } p(t_0) = 0 \tag{4.84}$$

bulunur. Tekrardan Sonuç 3.1 kullanıldığında  $\tilde{\alpha}_{k+1} \leq \tilde{\beta}_{k+1}$ ,  $t \in [t_0, t_0 + T]$  elde edilir. Böylece (4.80) eşitsizliğinin doğruluğu gösterilmiştir. O halde induksiyon prensibinden dolayı (4.74) eşitsizliğinin bütün  $n$  değerleri için geçerli olduğu söylenebilir.

(4.74) eşitsizliği nedeniyle  $\{\tilde{\alpha}_n\}$  ve  $\{\tilde{\beta}_n\}$  fonksiyon dizileri düzgün sınırlıdır. Bu durum (4.72) denkleminde göz önüne bulundurulursa

$$\begin{aligned}
|{}^c D^q \tilde{\alpha}_{n+1}(t)| &\leq |f(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n)| + |f_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n)| |\tilde{\alpha}_{n+1} - \tilde{\alpha}_n| \\
&\quad + |g(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n)| + |g_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_n)| |\tilde{\alpha}_{n+1} - \tilde{\alpha}_n| \\
|{}^c D^q \tilde{\alpha}_{n+1}(t)| &\leq Q \tag{4.85}
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada  $f(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n), f_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n), g(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n), g_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_n)$  fonksiyonlarının sürekli ve  $\tilde{\alpha}_n$  lerinde sınırlı olması  $\{{}^c D^q \tilde{\alpha}_n\}$  dizisinin de düzgün sınırlı olmasını gerektirir. Benzer şekilde  $\{{}^c D^q \tilde{\beta}_n\}$  dizisi de düzgün sınırlıdır. Ayrıca Lemma 3.2 kullanılarak bu fonksiyon dizilerinin eş-sürekli olduklarını söyleyebiliriz. O halde Arzela-Ascoli teoremi gereği, bir dizi eş-sürekli ve düzgün sınırlı ise bu dizinin düzgün ve monoton yakınsayan bir alt dizisi mevcuttur. Bu o demektir ki  $\{\tilde{\alpha}_n\}$  ve  $\{\tilde{\beta}_n\}$  dizilerinin düzgün yakınsayan sırasıyla  $\{\tilde{\alpha}_{n_k}\}$  ve  $\{\tilde{\beta}_{n_k}\}$  gibi birer alt dizileri vardır.

$\{\tilde{\alpha}_{n_k}\} \rightarrow \rho$  yakınsaması düzgün ve dizinin elemanları sürekli olduğundan  $\rho$  fonksiyonu da süreklidir. Dini teorem gereği  $\{\tilde{\alpha}_{n_k}\}$  alt dizisi  $\rho$  sürekli fonksiyonuna düzgün yakınsıyorsa, o halde  $\{\tilde{\alpha}_n\}$  dizisi de aynı fonksiyona düzgün yakınsar. Bu durumda  $\{\tilde{\alpha}_n\} \rightarrow \rho$  olacaktır ve bu yakınsama düzgün ve monotondur.  $\{\tilde{\beta}_n\} \rightarrow \sigma$  yakınsamasının düzgün ve monoton olduğu da benzer şekilde gösterilebilir.

Şimdi  $\rho$  ve  $\sigma$  fonksiyonlarının başlangıç değer problemi için birer çözüm olduğunu göstermeye çalışalım.  $\tilde{\alpha}_n$  ve  $\tilde{\beta}_n$  fonksiyonları (4.72) ve (4.73)'de verilen lineer fraksiyonel diferansiyel denklemlerin çözümleri olduklarından bu denklemlere karşılık gelen Volterra integral denklemleri

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_n(t) &= x_0 + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_{t_0}^t (t-s)^{q-1} [f(s + \eta_2, \tilde{\alpha}_{n-1}) + g(s + \eta_2, \tilde{\alpha}_{n-1})] ds + \\ &\quad \frac{1}{\Gamma(q)} \int_{t_0}^t (t-s)^{q-1} [f_x(s + \eta_2, \tilde{\alpha}_{n-1}) + g_x(s + \eta_2, \tilde{\beta}_{n-1})] (\tilde{\alpha}_n - \tilde{\alpha}_{n-1}) ds \quad (4.86) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}_n(t) &= x_0 + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_{t_0}^t (t-s)^{q-1} [f(s + \eta_2, \tilde{\beta}_{n-1}) + g(s + \eta_2, \tilde{\beta}_{n-1})] ds + \\ &\quad \frac{1}{\Gamma(q)} \int_{t_0}^t (t-s)^{q-1} [f_x(s + \eta_2, \tilde{\alpha}_{n-1}) + g_x(s + \eta_2, \tilde{\beta}_{n-1})] (\tilde{\beta}_n - \tilde{\beta}_{n-1}) ds \quad (4.87) \end{aligned}$$

şeklinde olacaktır. Buradan söyleyebiliriz ki  $\{\tilde{\alpha}_n\}$  ve  $\{\tilde{\beta}_n\}$  dizisinin elemanları kapalı bir aralıkta tanımlı ve sürekli olduğundan  $n \rightarrow \infty$  için  $\rho(t)$  ve  $\sigma(t)$  fonksiyonları  ${}^c D^q \tilde{x}(t) = f(t + \eta_2, \tilde{x}(t)) + g(t + \eta_2, \tilde{x}(t))$ ,  $\tilde{x}(t_0) = x_0$  probleminin herhangi iki çözümüdür.  $f(t, x)$  ve  $g(t, x)$  fonksiyonları Lipschitz koşulunu sağladıklarından başlangıç

değer probleminin tek çözümü vardır. O halde  $\rho(t) = \tilde{x}(t) = \sigma(t)$  eşitliği sağlanır.

Dolayısıyla  $\{\tilde{\alpha}_n\}$  ve  $\{\tilde{\beta}_n\}$  fonksiyon dizileri

$${}^c D^q \tilde{x}(t) = f(t + \eta_2, \tilde{x}(t)) + g(t + \eta_2, \tilde{x}(t)), \quad \tilde{x}(t_0) = x_0 \quad (4.88)$$

probleminin  $\tilde{x}(t)$  tek çözümüne düzgün ve monoton olarak yakınsarlar.  $s = t + \eta_2$  değişken dönüşümü ile

$${}^c D^q x = f(s, x) + g(s, x), \quad x(s_0) = x_0 \quad (4.89)$$

elde edilir.

Son olarak  $\{\tilde{\alpha}_n\}$  ve  $\{\tilde{\beta}_n\}$  fonksiyon dizilerinin tek çözüme kuadratik yakınsadığını gösterelim. Bunun için

$$p_{n+1} = \tilde{x} - \tilde{\alpha}_{n+1} \quad (4.90)$$

olacak şekilde bir fonksiyon tanımlayalım. Buradan kolayca görüldüğü gibi  $p_{n+1}(t_0) = 0$  dır. Bu durumda

$$\begin{aligned} {}^c D^q p_{n+1} &= {}^c D^q \tilde{x} - {}^c D^q \tilde{\alpha}_{n+1} \\ &= f(t + \eta_2, \tilde{x}) + g(t + \eta_2, \tilde{x}) - f(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n) - g(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n) \\ &\quad - \left[ f_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n) + g_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_n) \right] (\tilde{\alpha}_{n+1} - \tilde{\alpha}_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq [f_x(t + \eta_2, \xi) + g_x(t + \eta_2, \varphi)] p_n \\
&\quad + \left[ f_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n) + g_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_n) \right] (p_{n+1} - p_n)
\end{aligned} \tag{4.91}$$

burada  $\tilde{\alpha}_n \leq \xi \leq \tilde{x}$  ve  $\tilde{x} \leq \varphi \leq \tilde{\beta}_n$  olarak belirlenmiştir.

Şimdi  $f_x$  fonksiyonunun azalmayan,  $g_x$  fonksiyonunun artmayan olma durumundan

$$\begin{aligned}
{}^c D^q p_{n+1} &\leq [f_x(t + \eta_2, \tilde{x}) - f_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n)] p_n + [g_x(t + \eta_2, \tilde{x}) - g_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_n)] p_n \\
&\quad + [f_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n) + g_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_n)] p_{n+1} \\
&\leq L |p_n|^2 + [f_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n) + g_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_n)] p_{n+1} \\
{}^c D^q p_{n+1} &\leq L |p_n|_0^2 + K p_{n+1}
\end{aligned} \tag{4.92}$$

burada

$$|f_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n)| \leq K_1, \left| g_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_n) \right| \leq K_2, K = \max \{K_1, K_2\} \tag{4.93}$$

$$|p_n|_0 = \max_{[t_0, t_0+T]} |p_n(t)| \text{ ve } L = \max \{L_1, L_2\}. \tag{4.94}$$

En son bulduğumuz eşitsizlikte her taraftan integral alırsak

$$\begin{aligned}
p_{n+1} &\leq L |p_n|_0^2 \int_{t_0}^t (t-u)^{q-1} E_{q,q}(K(t-u)^q) du \\
&\leq L |p_n|_0^2 \int_{t_0}^t (t-u)^{q-1} E_{q,q}(K(t-t_0)^q) du \\
p_{n+1} &\leq NL |p_n|_0^2 \tag{4.95}
\end{aligned}$$

alınacaktır. Yukarıdaki denklemde  $t_0 \leq u \leq t$  için  $E_{q,q}(K(t-u)^q) \leq E_{q,q}(K(t-t_0)^q)$  eşitsizliği kullanıldı. Burada  $N = \frac{(T-t_0)^q}{q} E_{q,q}(K(T-t_0)^q)$  ve  $E_{q,q}$  Mittag-Leffler fonksiyonudur. Sonuç olarak,

$$\max_{[t_0, t_0+T]} |\tilde{x} - \tilde{\alpha}_{n+1}| \leq NL \max_{[t_0, t_0+T]} |\tilde{x} - \tilde{\alpha}_n|^2 \tag{4.96}$$

eşitsizliği elde edilecektir ki bu da bizim ulaşmak istediğimiz sonucu, yani  $\{\tilde{\alpha}_n\}$  dizisinin  $\tilde{x}(t)$  tek çözümüne kuadratik yakınsamasını verir. Benzer şekilde

$$r_{n+1} = \tilde{\beta}_{n+1} - \tilde{x} \tag{4.97}$$

olacak şekilde fonksiyon teşkil edilerek devam edilirse,  $\{\tilde{\beta}_n\}$  fonksiyon dizisinin  $\tilde{x}(t)$  tek çözümüne kuadratik yakınsaması aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\max_{[t_0, t_0+T]} |\tilde{\beta}_{n+1} - \tilde{x}| \leq \frac{NL_1}{2} \max_{[t_0, t_0+T]} |\tilde{x} - \tilde{\alpha}_n|^2 + N \left( \frac{3L_1}{2} + L_2 \right) \max_{[t_0, t_0+T]} |\tilde{\beta}_n - \tilde{x}|^2 \tag{4.98}$$

Neticede ispat tamamlanmış olur.

*Sonuç 4.1:* Eğer Teorem 4.6'da verilen şartlar  $s_0 = t_0$  koşuluyla birlikte sağlanırsa, teoremin sonuçları değişmeyecektir.

*İspat 4.1:* Öncelikle  $\tilde{\beta}_0(t) = \beta(t + \eta_1)$ ,  $\tilde{\alpha}_0(t) = \alpha(t)$  ve  $\tilde{x}(t) = x(t)$  olacak şekilde fonksiyonlar tanımlanır ve yukarıdaki gibi devam edilirse ispat tamamlanmış olur.

*Sonuç 4.2:* Eğer Teorem 4.6'da verilen şartlar  $s_0 = \tau_0$  koşuluyla birlikte sağlanırsa, teoremin sonuçları yine geçerli olacaktır.

*İspat 4.2:* Sonuç 4.1'de yapılan işlemlere benzer olarak bu kez  $\tilde{\alpha}_0(t) = \alpha(t - \eta_1)$ ,  $\tilde{\beta}_0(t) = \beta(t)$  ve  $\tilde{x}(t) = x(t)$  olacak şekilde fonksiyonlar tanımlanır ve teoremin ispatındaki gibi devam edilir.

*Uyarı 4.3:* Eğer  $g(t, x) = 0$  olsaydı bu durumda Teorem 4.6 bir önceki Teorem 4.5'e indirgenirdi.

## 5. SONUÇLAR

Bölüm 3.1’de başlangıç zamanları aynı alt ve üst çözümlerle ifade ve ispat edilen Karşılaştırma ve Varlık Teoremleri bu kez Bölüm 4.1’de alt ve üst çözümlerin başlangıç zamanlarının farklı olması durumu ile yeniden ifade ve ispat edilmiştir.

Genel olarak; Caputo manada verilen fraksiyonel türevli lineer olmayan diferansiyel denklemler için alt ve üst çözümlerin başlangıç zaman ve pozisyonlarının aynı ve farklı olması durumuna göre Kuasilineerizasyon tekniğinin çalışabilirliği Bölüm 3.2’de ve Bölüm 4.2’de karşılaştırılarak incelenmiştir.

Özel olarak; Bölüm 4.2.1’de ele alınan Caputo manada fraksiyonel türevli lineer olmayan diferansiyel denklemler için başlangıç zamanı farklı kuasilineerizasyon metodu geliştirilerek, Bölüm 4.2.2’de yine fraksiyonel mertebeli lineer olmayan bir başlangıç değer probleminin çözümüne ulaşmak adına çalışabilir olması incelenmiştir.

## KAYNAKLAR

- [1] Leibniz G. W., (1962), "Mathematische Schiften. Georg Olms Verlagsbuchhandlung", Hildesheim.
- [2] Oldham K. B., Spanier J., (1974), "The Fractional Calculus", Academic Press, N. Y.
- [3] Podlubny I., (1999), "Fractional Differential Equations", 198, Academic Press, Mathematics in Science and Engineering.
- [4] Miller K. S., Ross B., (1993), "An Introduction to the fractional calculus and fractional differential equations", John and Sons Inc. New York.
- [5] Samko S. G., Kilbas A. A., Maritchev O. I., (1993), "Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications", Gordon and Breach Science Publishers, Switzerland.
- [6] Lakshmikantham V., Leela S., Vasundhara Devi J., (2009), "Theory of Fractional Dynamic Systems", Cambridge Academic Publishers, Cambridge, UK.
- [7] Bellman R., Kalaba R., (1965), "Quasilinearization and Nonlinear Boundary Value Problems", American Elsevier, New York.
- [8] Lakshmikantham V., (1994), "An extension of the method of quasilinearization", J. Optim. Theory Appl., 82, 315-321.
- [9] Lakshmikantham V., (1996), "Further improvement of generalized quasilinearization", Nonlinear Analysis, 27, 315-321.
- [10] Lakshmikantham V., Vatsala A. S., (1998), "Generalized quasilinearization for nonlinear problems", Kluwer Academic Publisher, The Netherlands.
- [11] Köksal S., Yakar C., (2002), "Generalized quasilinearization method with initial time difference", Simulation, an International Journal of Electrical, Electronic and other Physical Systems, 24(5).
- [12] Yakar C., Yakar A., (2007), "An extension of the quasilinearization method with initial time difference", Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems. Series A: Mathematical Analysis. Watam Press. Waterloo. 275-279.
- [13] Yakar C., Yakar A., (2009), "Further generalization of quasilinearization method with initial time difference", Journal of Applied Functional Analysis, 4(4), 714-727.

- [14] Ashyralyev A., (2009), "A note on fractional derivatives and fractional powers of operators", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*(JMAA), 357(1), May, 232-236.
- [15] Lakshmikantham V., Vatsala A. S., (2008), "General uniqueness and monotone iterative technique for fractional differential equations", *Applied Mathematics Letters*, 21(8), 828-834.
- [16] Deekshitulu Gvsr., (2009), "Generalized monotone iterative technique for fractional R-L differential equations", *Nonlinear Studies*, 16(1), 85-94.
- [17] Ladde G. S., Lakshmikantham V., Vatsala A. S., (1985), "Monotone iterative technique for nonlinear differential equations", Pitman Publishing Inc., Boston.
- [18] McRae F. A., (2009), "Monotone iterative technique and existence results for fractional differential equations", *Nonlinear Analysis: Theory, Methods&Applications* 71(12), 6093-6096.
- [19] McRae F. A., (2010), "Monotone iterative technique for PBVP of Caputo fractional differential equations", *Communications in Applied Analysis* 14(1), 73-80.
- [20] Vasundhara Devi J., Suseela Ch., (2008), "Quasilinearization for Caputo fractional differential equations", *Communications in Applied Analysis* 12(4), 407-418.
- [21] Vasundhara Devi J., Mc Rae F. A., Drici Z., (2010), "Generalized quasilinearization for Caputo fractional differential equations" *Computers&Mathematics with Applications*, 59(3), 1057-1062.
- [22] Vasundhara Devi J., (2008), "Generalized monotone technique for periodic boundary value problems of fractional differential equations", *Communications in Applied Analysis* 12(4), 399-406.
- [23] Bayın Ş. S., (2004), "Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler", *Ders Kitapları Anonim Şirketi, Genişletilmiş ikinci baskı, Eylül.*
- [24] Yakar C., Yakar A., (2010), "Quasilinearization method for Caputo's sense fractional order differential equations.", *Journal of Abstract and Applied Analysis*, 1-10.
- [25] Yakar A., (2010), "Lineer Olmayan Fraksiyonel Diferansiyel Denklemler için Kuasilineerizasyon Metodu", *Doktora Tezi, Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü.*

## ÖZGEÇMİŞ

Emine ATICI, 1987 yılında Konya'da doğdu. 2006 yılında İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünde başladığı lisans eğitimini 2010 yılında başarıyla tamamladı. Aynı yıl Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü Matematik Bölümü'ne yüksek lisans için kabul edildi. Bir yıl hazırlık eğitimi aldı. Yüksek lisans öğrenimi boyunca Uygulamalı Matematik alanında çalışmalar yapmıştır.