

**T.C.  
ERCIYES ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**KOMPLEKS KÖK SİSTEMLERİ İLE İLGİLİ ALT  
SİSTEMLERİN İNŞASINA YENİ BİR YAKLAŞIM VE  
 $G(m,1,n)$  KOMPLEKS YANSIMA GRUBU İÇİN  
GEÇERLİ DİAGRAMLAR**

**(Yüksek Lisans Tezi)**

**Hazırlayan  
Gül ARSLANDOĞAN**

**Danışman  
Prof. Dr. Himmet CAN**

**Ağustos 2013  
KAYSERİ**

**T.C.  
ERCIYES ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**KOMPLEKS KÖK SİSTEMLERİ İLE İLGİLİ ALT  
SİSTEMLERİN İNŞASINA YENİ BİR YAKLAŞIM VE  
 $G(m,1,n)$  KOMPLEKS YANSIMA GRUBU İÇİN  
GEÇERLİ DİAGRAMLAR**

**Hazırlayan  
Gül ARSLANDOĞAN**

**Danışman  
Prof. Dr. Himmet CAN**

**Yüksek Lisans Tezi**

**Ağustos 2013  
KAYSERİ**

## BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK

Bu çalışmadaki tüm bilgilerin, akademik ve etik kurallara uygun bir şekilde elde edildiğini beyan ederim. Aynı zamanda bu kural ve davranışların gerektirdiği gibi, bu çalışmanın özünde olmayan tüm materyal ve sonuçları tam olarak aktardığımı ve referans gösterdiğimi belirtirim.

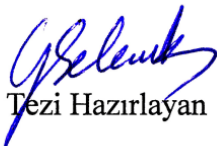
Adı-Soyadı: Gl ARSLANDOĞAN

İmza:



## YÖNERGEYE UYGUNLUK

**Kompleks Kök Sistemleri İle İgili Alt Sistemlerin İnşasına Yeni Bir Yaklaşım Ve  $G(m,1,n)$  Kompleks Yansıma Grubu İçin Geçerli Diagramlar** adlı Yüksek Lisans tezi, Erciyes Üniversitesi Lisansüstü Tez Önerisi ve Tez Yazma Yönergesi'ne uygun olarak hazırlanmıştır.



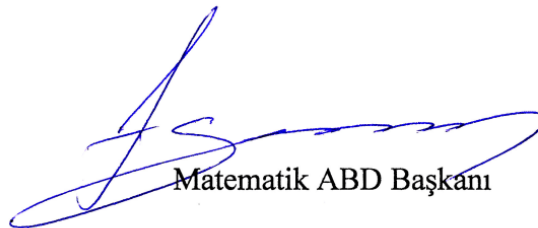
Tezi Hazırlayan

Gül ARSLANDOĞAN



Danışman

Prof. Dr. Himmet CAN



Matematik ABD Başkanı

Prof. Dr. Fuat GÜRCAN

Prof. Dr. Himmet CAN danışmanlığında **Gül ARSLANDOĞAN** tarafından hazırlanan “**Kompleks Kök Sistemleri İle İlgili Alt Sistemlerin İnşasına Yeni Bir Yaklaşım Ve  $G(m,1,n)$  Kompleks Yansıma Grubu İçin Geçerli Diagramlar**” adlı bu çalışma, jürimiz tarafından Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Yüksek Lisans** tezi olarak kabul edilmiştir.

15/08/2013

**JÜRİ:**

Danışman :...Prof. Dr. Himmet CAN...

Üye :...Prof. Dr. Fuat GÜRCAN ...

Üye :...Doç. Dr. Muammer KULA...

**ONAY:**

Bu tezin kabulü, Enstitümüz Yönetim Kurulunun **19/08/2013** tarih ve **2013/36-03** sayılı kararı ile onaylanmıştır.



Enstitü Müdürü

Prof. Dr. Kazım KEŞLİOĞLU

## **ÖNSÖZ / TEŞEKKÜR**

Çalışmalarım boyunca farklı bakış açıları ve bilimsel katkılarıyla beni aydınlatan, yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen ve bu günlere gelmemde en büyük katkı sahibi sayın hocam Prof. Dr. Himmet CAN'a teşekkürü bir borç bilirim.

Ayrıca; çalışmalarım süresince sabır göstererek beni destekleyen aileme en içten teşekkürlerimi sunarım.

Gül ARSLANDOĞAN  
Kayseri, Temmuz 2013

**KOMPLEKS KÖK SİSTEMLERİ İLE İLGİLİ ALT SİSTEMLERİN İNŞASINA  
YENİ BİR YAKLAŞIM VE  $G(m,1,n)$  KOMPLEKS YANSIMA GRUBU İÇİN  
GEÇERLİ DİAGRAMLAR**

**Gül ARSLANDOĞAN**

**Erciyes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü**

**Yüksek Lisans Tezi, Temmuz 2013**

**Danışman: Prof Dr. Himmet CAN**

**ÖZET**

Dynkin reel kök sistemleri ile ilgili alt sistemlerin nasıl inşa edilebileceğini göstermiştir. Kompleks kök sistemleri ile ilgili alt sistemler konusu reel durumda olduğu kadar iyi geliştirilmemiş olduğundan, biz bu çalışmada kompleks gerçek kök sistemlerin gerçek alt sistemlerini sınıflandırmak için bir algoritma vereceğiz. Ayrıca, bu algoritmanın bir uygulaması olarak, imprimitif kompleks gerçek kök sistemlerin gerçek alt sistemlerini belirleyeceğiz. Bu gerçek alt sistemler, gerçek bir şekilde üretilmiş sonlu kompleks yansıma gruplarının indirgenemez gösterimlerinin kombinatoryal inşalarını vermede yararlı olacaktır.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır: Birinci bölümde, yansıma grupları hakkında bazı temel bilgiler verildi. İkinci bölümde, kök grafikleri ile kök sistemleri tanıtıldı, aralarındaki ilişki incelendi.

Üçüncü bölümde, bütün parabolik gerçek alt sistemler ele alınarak, bütün parabolik olmayan gerçek alt sistemlerin üretilebileceğini H. Can'ın fikirlerini kullanarak ispatlıyoruz. Ayrıca, kompleks gerçek kök sistemlerin gerçek alt sistemlerini sınıflandırmak için bir algoritma veriyoruz.

Dördüncü bölümde, imprimitif kompleks gerçek kök sistemlerin gerçek alt sistemleri belirlendi. Beşinci bölümde,  $G(m,1,n)$  kompleks yansıma grubu için geçerli diagramlar incelendi.

**Anahtar kelimeler:** Yansıma grupları, Kök sistemler, Alt sistemler, Dynkin diagramı.

**A NEW APPROACH TO THE CONSTRUCTION OF SUBSYSTEMS OF  
COMPLEX ROOT SYSTEMS AND ADMISSIBLE DIAGRAMS FOR  
COMPLEX REFLECTION GROUP  $G(m,1,n)$**

**Gül ARSLANDOĞAN**

**Erciyes University, Graduate School of Natural and Applied Sciences**

**M. Sc. Thesis, July 2013**

**Supervisor: Prof. Dr. Himmet CAN**

**ABSTRACT**

Dynkin has shown how subsystems of real root systems may be constructed. As the concept of subsystems of complex root systems is not as well developed as in the real case, in this thesis we give an algorithm to classify the proper subsystems of complex proper root systems. Furthermore, as an application of this algorithm, we determine the proper subsystems of imprimitive complex proper root systems. These proper subsystems are useful in giving combinatorial constructions of irreducible representations of properly generated finite complex reflection groups.

This thesis consists of six chapters: In the first chapter, the introduction is given dealing with thesis. In the second chapter, some basic information about reflection groups is given. In the third chapter, root graphs and root systems are introduced, and the relation between them are examined.

In the fourth chapter, we prove that as we run through all the parabolic proper subsystems, we generate all the non-parabolic proper subsystems by using the ideas of H. Can. Furthermore, we give an algorithm to classify the proper subsystems of complex proper root systems.

In the fifth chapter, the proper subsystems of imprimitive complex proper root systems are determined. In the sixth chapter, Admissible diagrams for complex reflection group  $G(m,1,n)$  are examined.

**Keywords:** Reflection groups, Root systems, Subsystems, Dynkin diagram

## SEMBOLLER

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar cümlesi
$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar cümlesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar cümlesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar cümlesi
$\theta(a)$	: $a$ nın $(B, \theta)$ vektör grafiğine göre mertebesi
$o_G(v)$	: $v$ kökü ile $G$ deki yansımalar tarafından üretilen devir grubunun mertebesi
$l(s)$	: $s$ nin uzunluğu
$L(\alpha)$	: $\alpha$ nın uzunluğu
$G$	: Yansımalar grubu
$\xi$	: Birimin $m$ . ilkel kökü
$\Gamma$	: Vektör grafiği
$\dim(\Gamma)$	: $B$ tarafından gerilen vektör uzayının boyutu
$W(\Gamma)$	: Yansımalar grubu
$\Phi = (R, f)$	: Kompleks kök sistemi
$W(\Phi)$	: Kompleks yansımalar grubu
$\Phi^+$	: $\Phi$ kök sisteminde pozitif sistem
$\Phi^-$	: $\Phi$ kök sisteminde negatif sistem
$\Phi_{w\Gamma}^+$	: $w\Gamma$ tarafından belirlenen pozitif sistem
$\Psi = (S, g)$	: $\Phi$ kök sisteminin alt sistemi
$\pi$	: Bir kök sistemin basit sistemi
$J$	: Bir alt sistemin basit sistemi

## İÇİNDEKİLER

### KOMPLEKS KÖK SİSTEMLERİ İLE İLGİLİ ALT SİSTEMLERİN İNŞASINA YENİ BİR YAKLAŞIM VE $G(m, 1, n)$ KOMPLEKS YANSIMA GRUBU İÇİN GEÇERLİ DİAGRAMLAR

	<u>Sayfa</u>
BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK SAYFASI.....	ii
YÖNERGEYE UYGUNLUK SAYFASI.....	iii
KABUL VE ONAY SAYFASI.....	iv
ÖNSÖZ .....	v
ÖZET .....	vi
ABSTRACT .....	vii
SEMBOLLER .....	viii
İÇİNDEKİLER.....	ix
<b>GİRİŞ .....</b>	<b>1</b>

#### 1.BÖLÜM

<b>YANSIMA GRUPLARI HAKKINDA BAZI TEMEL BİLGİLER.....</b>	<b>2</b>
---	----------

#### 2. BÖLÜM

<b>KÖK GRAFİKLERİ VE KÖK SİSTEMLERİ .....</b>	<b>7</b>
---	----------

#### 3. BÖLÜM

<b>GERÇEK ALT SİSTEMLERİN SINIFLANDIRILMASI.....</b>	<b>16</b>
--	-----------

**4. BÖLÜM****İMPRİMİTİF DURUMDA GERÇEK ALT SİSTEMLER..... 25****5. BÖLÜM** **$G(m,1,n)$  KOMPLEKS YANSIMA GRUBU İÇİN GEÇERLİ DİAGRAMLAR ..... 34****KAYNAKLAR..... 45****ÖZGEÇMİŞ ..... 48**

## GİRİŞ

Günümüzde artık klasik bir makale olan, Shephard ve Todd'un makalesinde, sonlu indirgenemez kompleks yansıma gruplarının tam bir sınıflandırması verilmiştir [25]. Son yıllarda, kompleks yansıma grupları kayda değer bir şekilde çalışma konusu olmuştur [12,13,21,23,24]. Reel durumdaki sonuçlar çok iyi geliştirilmiş ve kitaplaştırılmıştır [7]. Kompleks yansıma grupları için; kök sistemler, alt sistemler, pozitif sistemler ya da uzunluk fonksiyonu gibi temel kavramlar, reel durumdakine benzer evrensel kabul görecektir şekilde ne yazık ki iyi geliştirilememiştir. Fakat son yıllarda bu yönde bazı girişimler vardır [8,9,10,22].

Kompleks yansıma gruplarının kök sistemlerinin alt sistemleri kavramı reel durumda olduğu kadar iyi geliştirilmemiş olduğundan, H. Can, genişletilmiş diagramları referans almadan, verilen bir (reel ya da kompleks) gerçek kök sisteminin bütün gerçek alt sistemlerini elde etmek için alternatif bir algoritma vermiştir. Bu algoritmanın reel duruma göre daha fazla avantajı vardır. Ayrıca, hesaplamalar açısından daha kullanışlıdır [18]. H. Can, verilen bir kompleks gerçek kök sisteminin parabolik ve parabolik olmayan gerçek alt sistemlerinin nasıl elde edilebileceğini göstermiştir [9].

Bu çalışmanın önemi, E.B. Dynkin ve M.C. Hughes'ın verdiği metotlardan farklı olarak bütün kompleks kök sistemlerinin alt sistemlerini elde etmek için H. Can tarafından verilen alternatif yöntemi incelemektir. Ayrıca,  $G(m,1,n)$  imprimitif kompleks yansıma grubundaki konjüge sınıfları ve bütün bağlantılı bileşenleri A ya da B tipinde olan geçerli diagramlar arasında bire-bir bir eşleme olduğunu göstermektedir. Elbette, unutulmamalıdır ki bu sadece bir inceleme çalışması olup konuya herhangi bir yenilik getirmemektedir.

## 1. BÖLÜM

### YANSIMA GRUPLARI HAKKINDA BAZI TEMEL BİLGİLER

$V$ , üzerinde tanımlı bir iç çarpım ile  $n$ -boyutlu bir kompleks vektör uzayı olsun.

**TANIM 1.1.1.**  $V$  de bir *yansım*a, tam  $(n-1)$  tane özdeğeri 1 e eşit sonlu mertebeli  $V$  nin bir lineer dönüşümüdür.  $V$  de bir *yansım*a grubu,  $V$  deki yansımalar tarafından üretilen sonlu bir gruptur.  $V$  deki lineer dönüşümlerin sonlu bir  $G$  grubunun bir *yansım*a alt grubu,  $V$  de bir yansım a grubu olan  $G$  nin bir alt grubudur. Eğer  $G$  tarafından sabit bırakılan noktaların  $V^G$  alt uzayının boyutu  $n-r$  ise  $G$  yansım a grubuna  $r$ -boyutlu bir *yansım*a grubu denir. Eğer  $G$ ,  $r$ -boyutlu ve  $V$  vektör uzayında  $V^G$  nin bir  $G$ -invariant komplemanına  $G$  nin kısıtlanması indirgenemez ise bu taktirde  $G$  grubuna  $r$ -boyutta indirgenemezdir denir. Eğer  $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V_0 \rightarrow V$  kanonik dönüşümü bire bir ve örten olacak şekilde  $V$  nin bir  $V_0$ ,  $G$ -invariant  $\mathbb{R}$ -alt uzayı varsa bu taktirde  $V$  de bir  $G$  yansım a grubuna *reel yansım a grubu* (ya da *Coxeter grubu*) denir. Bu durum gerçekleşmediğinde,  $G$  *kompleks* olarak isimlendirilir. (Bu tanıma göre; bir reel yansım a grubu kompleks değildir.)

$G$ ,  $V$  de  $n$ -boyutlu bir yansım a grubu ve  $P$  de  $V$  nin bir alt cümlesi olmak üzere; eğer

$$G_p = \{g \in G \mid \forall p \in P \text{ için } g(p) = p\}$$

ise bu durumda  $G_p$ ,  $G$  nin bir yansım a alt grubudur [1,2].

Eğer  $m, P$  tarafından gerilen vektör uzayının boyutu ise, bu taktirde  $Gp$  en fazla  $(n-m)$  boyutludur. Eğer  $G$  indirgenebilirse, bu taktirde  $G$ , indirgenemez ve boyutları  $n$  den daha küçük olan yansıma alt gruplarının bir direkt çarpımı olarak ifade edilebilir. Böylece, yansıma gruplarının sınıflandırılması, indirgenemez yansıma gruplarının sınıflandırılmasına indirgenmiş olur.

$V$  üzerinde,  $G$  altında invaryant bir  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  kompleks iç çarpımı tanımlanmış olsun. Bu durumda,  $U(V)$ , bu kompleks iç çarpıma göre bütün kompleks lineer dönüşümlerin bir grubu ise, bu taktirde  $G$ ,  $U(V)$  nin bir alt grubu olacaktır.

**TANIM 1.1.2.**  $V$  de bir yansımanın bir (baz) kökü, yansımanın aşikar olmayan bir tek özdeğerine karşılık gelen (uzunluğu 1 olan) bir özvektördür.  $G$  nin bir (baz) kökü,  $G$  deki bir yansımanın bir (baz) köküdür.

Şimdi,  $s$ , mertebesi  $m > 1$  olan  $V$  de bir yansıma olsun. Bu taktirde,  $s\alpha = \xi\alpha$  olacak şekilde sıfırdan farklı bir  $\alpha \in V$  vektörü ve birimin bir  $\xi$ ,  $m$ . ilkel kökü vardır.

Dolayısıyla,  $\forall v \in V$  için  $s_{\alpha, \xi}$  dönüşümünü

$$s_{\alpha, \xi}(v) = v - (1 - \xi) \frac{\langle v, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \alpha$$

şeklinde tanımlayalım. Bu taktirde  $s_{\alpha, \xi}(\alpha) = \xi\alpha$  ve verilen kompleks iç çarpıma göre  $\langle \alpha \rangle$  nin ortogonal komplemanı  $\langle \alpha \rangle^\perp$  olmak üzere, eğer  $v \in \langle \alpha \rangle^\perp$  ise,  $s_{\alpha, \xi}(v) = v$  olacaktır. Böylece  $s = s_{\alpha, \xi}$  elde ederiz. Eğer  $V = \langle \alpha \rangle \oplus \langle \alpha \rangle^\perp$  yazar ve  $V$  için bir baz seçersek, bu taktirde bu baza göre,  $s_{\alpha, \xi}$  dönüşümüne karşılık gelen matris

$$\begin{pmatrix} \xi & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

olacaktır. Eğer  $\xi = e^{\frac{2\pi i}{m}}$  ise  $s_{\alpha, \xi}$  nin yerine  $s_{\alpha, m}$  ve  $s_{\alpha, 2}$  nin yerine  $s_{\alpha}$  (reel yansıma) yazacağız. Bu tezde daima  $\xi$  yi birimin bir  $m$ . ilkel kökü olarak ele alıyoruz.

**TEOREM 1.1.3.**  $g \in G$  ve  $U$ ,  $g$  tarafından sabit bırakılan bütün vektörlerden oluşmuş  $V$  nin bir alt uzayı olmak üzere;  $g$ ,  $U$  nun  $U^{\perp}$  ortogonal komplemanındaki köklere karşılık gelen yansımaların bir çarpımıdır.

**İSPAT:** [3].

Aşağıdaki önerme,  $s_{\alpha, \xi}$  dönüşümünün bazı temel özelliklerini vermektedir.

**ÖNERME 1.1.4.**

1.  $s_{\alpha, \xi} \cdot s_{\alpha, \eta} = s_{\alpha, \xi\eta}$ ,
2. eğer  $t \in U(V)$  ise, bu durumda  $ts_{\alpha, \xi}t^{-1} = s_{t\alpha, \xi}$  olacaktır.

**İSPAT:** [4].

$v \in V$  için  $V' = \langle v^{\perp} \rangle$  olmak üzere,  $o_G : V \rightarrow \mathbb{N}$  dönüşümünü  $o_G(v) = |G_{V'}|$  şeklinde tanımlayalım. Bu taktirde,  $o_G(v) > 1$  dir  $\Leftrightarrow v$ ,  $G$  nin bir köküdür. Bu halde;  $o_G(v)$ ,  $v$  kökü ile  $G$  deki yansımalar tarafından üretilen devir grubunun mertebesidir. Eğer  $\alpha$ ,  $G$  nin bir kökü ise, bu taktirde,  $o_G(\alpha)$  sayısına  $\alpha$  nin mertebesi denir.

**İmprimitif Durum**

$V = \mathbb{C}^n$ ,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  standart kompleks iç çarpımı ve  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  standart bazı ile birlikte verilen  $n$  boyutlu bir kompleks vektör uzayı olsun.

**TANIM 1.2.1.**  $\{V_i \mid i = 1, \dots, t\}$ ,  $G$  altında invaryant olacak şekilde, eğer  $V$ ,  $V$  nin  $V_i$  ( $1 \leq i \leq t$ ) gerçek aşikar olmayan lineer alt uzayların bir  $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_t$  direkt toplamı şeklinde yazılabilirse, bu taktirde  $V$  nin kompleks otomorfizmlerinin bir  $G$  grubuna *imprimitif* denir. Bu durumda  $\{V_i \mid 1 \leq i \leq t\}$  ailesi  $G$  için bir *imprimitif sistem* olarak adlandırılacaktır. Eğer  $V$  nin böyle bir direkt parçalanması yoksa, bu halde  $G$  grubuna *primitif* denir.

$S_n (n \in \mathbb{N})$ , bütün  $n \times n$  tipindeki permütasyon matrislerinin bir grubu olsun.  $p | m$  ( $m, p \in \mathbb{N}$ ),  $s_i \in \mathbb{Z}$  ve  $\sum_{i=1}^n s_i \equiv 0 \pmod{p}$  olmak üzere  $(i, i)$ . pozisyonunda  $\xi^{s_i}$  terimleri yer alan bütün  $n \times n$  tipindeki diagonal matrislerin bir grubunu  $A(m, p, n)$  ile gösterelim. Şimdi,  $G(m, p, n) = A(m, p, n) \times S_n$  (yarı-direkt çarpım) olarak tanımlayalım. Bu durumda,  $G(m, p, n)$  kompleks yansımalar tarafından üretilen bir gruptur. Ayrıca  $G(m, p, n)$ ,  $\{\mathbb{C}_{e_i}\}_{1 \leq i \leq n}$  imprimitif sistemi ile  $V$  deki bir imprimitif yansıma grubudur.  $n \geq 2$ ,  $p | m$ ,  $m, p \in \mathbb{N}$  olmak üzere,  $G(m, p, n)$  nin mertebesi  $\frac{m^n \cdot n!}{p}$  dir. Cohen, bütün sonlu indirgenemez imprimitif yansıma gruplarının  $G(m, p, n)$  yansıma grubuna izomorf olduğunu göstermiştir [1].

Üstelik, Cohen[1], aşağıdaki özel durumlardan da söz eder:

**UYARI 1.2.2.**

1.  $G(m, m, 2)$ ,  $W(I_2(m))$  grubuna konjügedir (Bourbaki'nin notasyonu [7]).
2.  $n \geq 2$  için,  $G(1, 1, n) = W(A_{n-1})$ .
3.  $n \geq 2$  için  $G(2, 1, n) = W(B_n) = W(C_n)$ .
4.  $n \geq 3$  için,  $G(2, 2, n) = W(D_n)$ .

Bu özel durumlardaki gruplar reel yansıma gruplarıdır.

5. Eğer  $p = 1$  ya da  $p = m$  ise, bu durumda  $G(m, p, n)$  grubu için  $n$  tane üreteç olan yansımayı seçmek mümkündür: Kökleri  $e_1 - e_2, e_2 - e_3, \dots, e_{n-1} - e_n$  olan 2. mertebeden yansımaları ele alalım. Ayrıca, eğer  $p = m$  ise kökü  $e_{n-1} - \xi e_n$  olan 2. mertebeden bir yansımayı; eğer  $p = 1$  ise, kökü  $e_n$  olan  $m$ . mertebeden bir yansımayı daha ele alalım. Eğer  $p \neq 1$  ya da  $p \neq m$  ise bu taktirde  $G(m, p, n)$  için  $n+1$  tane üreteç olan yansımayı elde edebilmek mümkündür: Kökü  $e_n$  olan  $\frac{m}{p}$ . mertebeden bir yansıma ile birlikte  $G(m, m, n)$  grubunun  $n$  tane üreteç olan yansımalarını alarak  $G(m, p, n)$  grubunun  $n+1$  tane üreteç yansımalarını teşkil

edebiliriz.  $G(m, m, 2)$ ,  $G(1, 1, n)$ ,  $G(2, 1, n)$ ,  $G(2, 2, n)$  grupları reel yansıma gruplarıdır [1].

6.  $G(m, 1, n)$  yansıma grubu aşağıdaki temsile sahiptir [19]:

$$G(m, 1, n) = \langle r_1, \dots, r_{n-1}, w_1, \dots, w_n \mid r_i^2 = (r_i r_{i+1})^3 = (r_i r_j)^2 = e, |i - j| \geq 2, w_i^m = e,$$

$$w_i w_j = w_j w_i, r_i w_i = w_{i+1} r_i, r_i w_j = w_j r_i, j \neq i, i+1 \rangle.$$

Burada,  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ ,  $V$  nin standart bazı,  $i = 1, 2, \dots, n-1$  ve  $\alpha_i = e_i - e_{i+1}$  olmak üzere,  $r_i = s_{\alpha_i, \theta(\alpha_i)}$  2. mertebeden bir yansıma ve  $i = 1, 2, \dots, n$  için  $w_i = s_{e_i, \theta(e_i)}$   $m$ . mertebeden bir yansımadır.

## 2. BÖLÜM

### KÖK GRAFİKLERİ VE KÖK SİSTEMLERİ

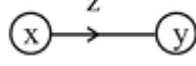
$(a_1, \dots, a_n) = (a_1, \dots, a_n, 0) \in \mathbb{C}^{n+1}$  olduğundan  $\mathbb{C}^n \subset \mathbb{C}^{n+1}$  dir.  $\mathbb{C}^\infty$  bütün  $\mathbb{C}^n$  lerin birleşimi olsun. Böylece  $\mathbb{C}^n$  i,  $\mathbb{C}^\infty$  un bir alt uzayı olarak göz önüne alabiliriz. Ayrıca,  $\mathbb{C}^\infty$  üzerinde bir  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  standart kompleks iç çarpımı tanımlansın.

**TANIM 2.1.1.**  $B$ ,  $\mathbb{C}^\infty$  un boştan farklı sonlu bir alt cümlesi olsun.  $\theta: B \rightarrow \mathbb{N} \setminus \{1\}$  bir dönüşüm olmak üzere;  $\forall a, b \in B$  için  $|\langle a, b \rangle| = 1 \Leftrightarrow a = b$  şartı sağlanırsa,  $(B, \theta)$  çiftine bir *vektör grafiği* denir. Burada  $B$ , vektör grafiğinin *vektörlerinin* veya *düğümünün* ya da *noktalarının* bir cümlesi olarak adlandırılır.  $a \in B$  için,  $\theta(a)$  değerine  $a$  nın  $(B, \theta)$  ya göre mertebesi denir.

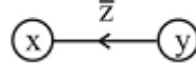
$(B, \theta)$  ve  $(B', \theta')$  iki vektör grafiği olsun. Eğer  $\forall a, b \in B$  için  $\theta(a) = \theta'(\sigma a)$  ve  $\langle a, b \rangle = \langle \sigma a, \sigma b \rangle$  olacak şekilde bir  $\sigma: B \rightarrow B'$  bire bir ve örten bir dönüşümü varsa; ya da buna denk olarak, eğer  $tB = B'$  ve  $\forall a \in B$  için  $\theta(a) = \theta'(ta)$  olacak şekilde  $\mathbb{C}^\infty$  un kompleks bir  $t$  dönüşümü varsa, bu taktirde  $(B, \theta)$  ve  $(B', \theta')$  vektör grafiklerine *izomorfiktir* denir.

Bir  $(B, \theta)$  vektör grafiği aşağıdaki şekilde verilen “yönlendirilmiş ağırlığa sahip bir grafiğe” özdeştir: Grafiğin noktaları  $B$  nin elemanlarıdır.  $\langle a, b \rangle \neq 0, 1$  olmak üzere  $B$  nin herhangi bir  $\{a, b\}$  alt cümlesi için bir yön tespit ediyoruz; yani hangi noktanın başlangıç noktası ve hangi noktanın bitiş noktası olduğunu belirliyoruz. Şimdi, grafiğin yönlendirilmiş kenarları  $\{a, b\}$  nin yönüne göre  $a$  bir başlangıç noktası ve  $\langle a, b \rangle \neq 0, 1$  olacak şekilde  $(a, b) \in B \times B$  ikilisidir. Son olarak herhangi bir  $a \in B$  noktasına  $\theta(a)$  değerini ve herhangi bir  $(a, b) \in B \times B$  yönlendirilmiş kenarına  $a$  dan  $b$

ye bir ok ile bir  $(a, b)$  değerini tahsis ediyoruz. Örneğin;  $\theta(a) = x$ ,  $\theta(b) = y$  ve  $\langle a, b \rangle = z$  ise, bu taktirde bu vektör grafiği



olacaktır. Ayrıca,  $\bar{z}$ ,  $z$  nin kompleks bir eşleniğini göstermek üzere



vektör grafiği yukarıdaki grafikle aynıdır.

**UYARI 2.1.2.**  $(B, \theta)$  bir vektör grafiği ve  $a, b \in B$  olsun.

1. Eğer  $\theta(a) = 2$  ise, bu durumda, 2 değeri ihmal edilecektir.
2. Eğer  $\langle a, b \rangle \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  ise, bu durumda, ok ihmal edilecektir.
3. Eğer  $\theta(a) = \theta(b) = 2$  ve  $\langle a, b \rangle = -\frac{1}{2}$  ise, bu durumda,  $-\frac{1}{2}$  değeri ihmal edilecektir.

$\Gamma = (B, \theta)$  bir vektör grafiği olmak üzere; grafikle ilgili (devir, bağlantılılık gibi) bütün alışılmış tanımlar  $\Gamma$  için uygulanır.  $b \in B$  için  $\bar{\theta}(\bar{b}) = \theta(b)$  ve  $\bar{b}, b$  nin kompleks bir eşleniğini göstermek üzere,  $\bar{B} = \{\bar{b} \mid b \in B\}$  olsun. Bu taktirde  $\bar{\Gamma} = (\bar{B}, \bar{\theta})$ ,  $\Gamma$  nin kompleks eşleniğidir.  $B = \{a_1, \dots, a_n\}$  olmak üzere,  $\Gamma = (B, \theta)$  bir vektör grafiği olsun. Bu durumda, kısalık için  $\Gamma = \{a_1, \dots, a_n\}$  yazacağız.

**TANIM 2.1.3.**  $\Gamma = (B, \theta)$  bir vektör grafiği olsun.  $B$  tarafından gerilen bir vektör uzayının boyutu  $\dim(\Gamma)$  ile ve  $a \in B$  olmak üzere,  $s_{a, \theta(a)}$  basit yansımaları tarafından üretilen bir grubu  $W(\Gamma)$  ile gösterelim. Eğer

- (i)  $\dim(\Gamma) = |B|$  (yani;  $B, \mathbb{C}$  üzerinde lineer bağımsız),
- (ii)  $W(\Gamma)$  sonlu bir yansıma grubu ise,

bu taktirde  $\Gamma$  bir kök grafiği adını alır.

$\Gamma = (B, \theta)$  bir kök grafiği olsun. Eğer  $W(\Gamma)$ ,  $\dim(\Gamma)$  boyutunda indirgenemez ya da buna denk olarak  $\Gamma$  bağlantılı ise, bu taktirde  $\Gamma$  *indirgenemezdir* denir. Eğer  $W(\Gamma)$  reel (kompleks, primitif) ise,  $\Gamma$  kök grafiğine bir *reel (kompleks, primitif)* denir.

Şimdi  $\Gamma' = (B', \theta')$  bir başka kök grafiği olsun. Eğer  $B \subset B'$  ve  $\theta'|_B = \theta$  ise,  $\Gamma'$  ye  $\Gamma$  nın bir *genişlemesi* ya da  $\Gamma'$  nün bir *alt-kök grafiğinin*  $\Gamma$  olduğunu söyleyeceğiz. Eğer  $W(\Gamma)$ ,  $W(\Gamma')$  ye konjüge ise, bu taktirde  $\Gamma$  nın  $\Gamma'$  ne *denk* olduğunu söyleyeceğiz. Eğer  $\Gamma$ ,  $\Gamma'$  ye izomorfik ise, bu taktirde  $W(\Gamma)$ ,  $W(\Gamma')$  ye *konjügedir*. Ayrıca,  $\forall a \in B$  için  $\theta'(ta) = \theta(a)$  ve  $B$  nin elemanları  $t$  nin özvektörleri olacak şekilde  $t \in GL(\mathbb{C}^\infty)$  varsa, bu taktirde  $\Gamma$  ya  $\Gamma'$  ye *eşleşiktir* denir.

#### UYARI 2.1.4.

1. Eğer  $\Gamma$  bir kök grafiği ise, bu taktirde  $W(\Gamma)$ ,  $\dim(\Gamma)$  tane yansıma tarafından üretilen bir yansıma grubudur. Tersine olarak  $\mathbb{C}^n$  deki  $n$  tane yansıma tarafından üretilen her  $G$  yansıma grubu aşağıdaki gibi elde edilir:  $G$  deki  $n$  tane üreteç yansımasının her biri için bir baz kökü tespit edelim. Ve bunları sabitleyelim.  $B$  bu baz köklerin bir cümlesi ve  $a \in B$  için  $\theta(a) = o_G(a)$  ile verilen dönüşüm  $\theta: B \rightarrow \mathbb{N} \setminus \{1\}$  olsun. Bu taktirde,  $\Gamma = (B, \theta)$ ,  $W(\Gamma) = G$  ile ilişkili bir kök grafiğidir.
2. Eğer iki kök grafiği eşleşik ise, bu taktirde bu kök grafikleri denktirler.
3. Eğer  $a, b \in B$  ise,

$$(a) B' = \{s_{a, \theta(a)}b\} \cup (B \setminus \{b\}) \text{ ve}$$

$$(b) \theta'(x) = \begin{cases} \theta(x), & x \in B \setminus \{b\} \text{ ise,} \\ \theta(b), & x = s_{a, \theta(a)}b \text{ ise,} \end{cases}$$

ile tanımlanan dönüşüm,  $\theta': B' \rightarrow \mathbb{N} \setminus \{1\}$  olmak üzere,

bir  $\Gamma = (B, \theta)$  kök grafiği,  $\Gamma' = (B', \theta')$  kök grafiğine denktir.

4.  $B = \{a_1, \dots, a_n\}$  olmak üzere,  $(B, \theta)$  bir vektör grafiği ise, bu taktirde  $(\langle a_i, a_j \rangle)$  bir Gram matrisini göstermek üzere,  $\det(\langle a_i, a_j \rangle)$  negatif olmayan bir reel sayıdır.

Üstelik,  $\det(\langle a_i, a_j \rangle) = 0 \Leftrightarrow B$  lineer bağımlıdır. Bu durum varsa, bu taktirde  $(B, \theta)$  bir kök grafiği olamaz.

### ÖRNEK 2.1.5.

- Alışılmış Coxeter grafiklerini ele alalım (Bourbaki'nin kullandığı anlamda [7]), fakat bir kenara tahsis edilen herhangi bir  $m$  sayısını  $-\cos \frac{\pi}{m}$  değeri ile yer değiştirelim. Burada bir Coxeter grafiği ile bu şekilde elde edilen bir kök grafiğini kastediyoruz. Coxeter grafiklerinin sınıflandırılması bize aşağıdaki sonucu verir. Devirsiz ve  $\theta(B) = \{2\}$  olacak şekilde  $\Gamma = (B, \theta)$  indirgenemez kök grafikleri aşağıdaki Coxeter grafikleridir:

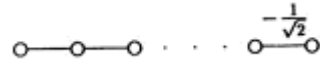
$I_2(k)$



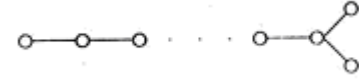
$A_n (n \geq 1, n \text{ tane nokta})$



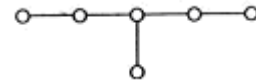
$B_n (n \geq 2, n \text{ tane nokta})$



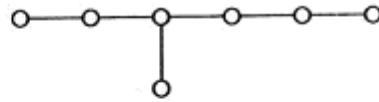
$D_n (n \geq 3, n \text{ tane nokta})$



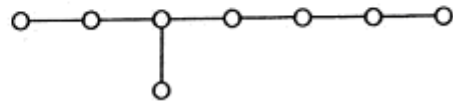
$E_6$



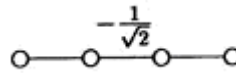
$E_7$



$E_8$



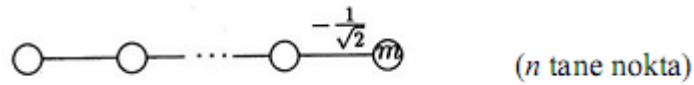
$F_4$



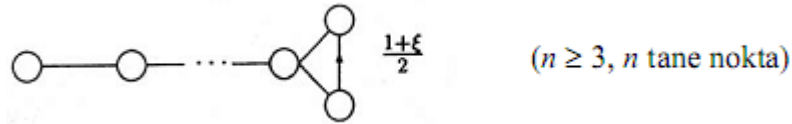


Tanımlarımızın bir sonucu olarak;  $\Gamma$  nın bir reel kök grafiği olması için gerek ve yeter şart  $\Gamma$  nın bir Coxeter grafiğine denk olmasıdır, diyebiliriz.

2. Şimdi bir başka örnek için  $n, m > 1$  olmak üzere,



vektör grafiğini,  $B_n^m$  ya da  $\Gamma(m, 1, n)$  ile ve



vektör grafiğini de  $D_n^m$  ya da  $\Gamma(m, m, n)$  ile gösterelim. Eğer  $m=2$  ise, bu taktirde  $B_n^2 = B_n$  ve  $D_n^2 = D_n$  dir. Uyarı 1.2.2 (5) in yardımıyla;  $\Gamma(m, p, n)$  ( $p=1, m$ ) grafiğinin,  $G(m, p, n)$  ( $p=1, m$ ) grubuna konjüge olan  $W(\Gamma(m, p, n))$  grubunun bir kök grafiği olduğu sonucu çıkarılabilir.

**TANIM 2.1.6.**  $\Gamma$ , devirleri içermeyecek ve  $\theta(B) = \{2\}$  olacak şekilde, herhangi bir  $\Gamma = (B, \theta)$  kök grafiğine bir *Coxeter grafiği* (ya da *Dynkin diagramı*) denir. Bir Coxeter grafiğine denk olmayan herhangi bir kök grafiğine de bir *Cohen grafiği* (ya da *Cohen diagramı*) denir. Eğer  $\Gamma$  bir Coxeter grafiği ise, bu taktirde  $W(\Gamma)$  bir Coxeter grubudur. ( $A_n (n \geq 1)$ ,  $B_n (= C_n) (n \geq 2)$ ,  $D_n (n \geq 3)$ ,  $E_6$ ,  $E_7$ ,  $E_8$ ,  $F_4$ ,  $G_2$ , tipindeki Coxeter grafiklerine karşılık gelen Coxeter grupları genellikle *Weyl grupları* olarak adlandırılır.) Benzer şekilde, eğer  $\Gamma$  bir cohen grafiği ise, bu taktirde  $W(\Gamma)$  ya bir *Cohen grubu* denir.

$B = \{a_1, \dots, a_n\}$  olmak üzere,  $\Gamma = (B, \theta)$  bir vektör grafiği olsun.  $a = a_i$  ve  $m = \theta(a_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$  olmak üzere  $s_{a, m}$  yerine  $r_i$  yazalım. Böylece,  $W(\Gamma)$  yansıma grubunun bir

*Coxeter (Cohen)* elemanı  $j = k$  için  $r_{i(j)} = r_{i(k)}$  ve  $r_{i(j)} \in \{r_1, r_2, \dots, r_n\}$  olmak üzere,  $s = r_{i(1)}r_{i(2)}\dots r_{i(n)}$  şeklinde tanımlanır.

**TANIM 2.1.7.**

- (i)  $R, \mathbb{C}^\infty$  un sıfırdan farklı elemanlarının sonlu bir alt cümlesi,
- (ii)  $\forall a, b \in R$  için,  $s_{a,f(a)}R = R$  ve  $f(s_{a,f(a)}b) = f(b)$  olacak şekilde  $f : R \rightarrow \mathbb{N} \setminus \{1\}$  bir dönüşüm olsun.

Bu taktirde,  $\Phi = (R, f)$  çiftine bir *ön-kök sistem* denir. Eğer  $R, \mathbb{C}^\infty$  un bir  $V$  lineer alt uzayının bir alt cümlesi ise, bu taktirde  $\Phi$  ye,  $V$  vektör uzayında bir ön-kök sistem denir.  $\Phi = (R, f)$  ile ilişkili  $W(\Phi)$  yansıma grubu  $W(\Phi) = \langle s_{a,f(a)} \mid a \in R \rangle$  şeklinde tanımlanır.  $W(\Phi), R^\perp$  uzayının noktalarını sabit bıraktığından,  $R$  tarafından gerilen bir vektör uzayına  $W(\Phi)$  nin kısıtlaması uygundur, bu nedenle;  $W(\Phi), R$  nin permütasyonlarının bir grubu gibi düşünülebilir. Dolayısıyla,  $W(\Phi)$  sonludur.

- (iii) Her  $a \in R, \alpha \in \mathbb{C}$  için,  $\alpha a \in R \Leftrightarrow \alpha a \in W(\Phi)a$  ise,

bu taktirde bir  $\Phi = (R, f)$  ön-kök sistemi bir *kök sistem* adını alır.

(Bu şart, reel kök sistem durumunda, her  $a \in R$  için,  $\alpha a \in R \Leftrightarrow \alpha = \pm 1$  dir.)

Her  $a \in R$  için,  $f'(ta) = f(a)$  ve  $t(R) = R'$  olacak şekilde,  $\mathbb{C}^\infty$  un bir  $t$  üniter dönüşümü varsa, bu taktirde  $\Phi, (R', f')$  kök sistemine *izomorfiktir* denir. Böylece; eğer  $\Phi, \Phi'$  ne izomorfik ise, bu taktirde  $W(\Phi)$  grubu,  $W(\Phi')$  grubuna konjügedir.

**UYARI 2.1.8.**

1. Eğer  $\Gamma = (B, \theta)$  bir kök grafiği ise, bu taktirde  $R = W(\Gamma)B$  ve  $f : R \rightarrow \mathbb{N} \setminus \{1\}$  fonksiyonu  $\forall a \in R$  için  $f(a) = o_{W(\Gamma)}(a)$  şeklinde tanımlanmak üzere  $\Phi = (R, f)$  çifti  $W(\Phi) = W(\Gamma)$  olacak şekilde bir ön-kök sistemi tanımlar.
2.  $\mathbb{C}^\infty$  un bir  $V$  lineer alt uzayındaki sonlu bir yansıma grubu  $G$  olsun. Herhangi bir  $s \in G$  yansıması için, bir  $a_s \in V$  baz kökü seçelim. Bu şekilde elde edilen  $a_s \in V$  elemanlarının bir cümlesi  $R_0$  olsun. Ayrıca  $f_0(a) = o_G(a), (a \in R_0)$  şeklinde  $f_0 : R_0 \rightarrow \mathbb{N} \setminus \{1\}$ , fonksiyonunu tanımlayalım.  $R = G.R_0$  ve  $f(ga) = f_0(a), a \in R_0,$

$g \in G$  şeklinde tanımlanan  $f_0$  fonksiyonunun bir genişletmesi olan  $f : R \rightarrow \mathbb{N} \setminus \{1\}$  fonksiyonu  $V$  de bir  $(R, f)$  ön-kök sistemini doğurur.

**LEMMA 2.1.9.**  $\Phi = (R, f)$  bir ön-kök sistemi olsun. Bu taktirde:

1.  $\{s_{a,f(a)}^j \mid a \in R, 0 \leq j \leq f(a)\}$ ,  $W(\Phi)$  deki bütün yansımaların cümlesidir,
2.  $g = f|_S$ ,  $S \subset R$  ve  $W(\Sigma) = W(\Phi)$  ile birlikte verilen bir  $\Sigma = (S, g)$  kök sistemi vardır,
3.  $W(\Phi) = \{s_{a,f(a)}^j \mid a \in \Delta \text{ olacak şekilde; eğer } \Phi \text{ bir kök sistemi ve } \Delta \subset R \text{ ise, bu taktirde } W(\Phi) \text{ nin her yansıması bazı } j, m \in \mathbb{N}, a \in \Delta \text{ için } s_{a,m}^j \text{ ye konjügedir. Ayrıca, } R, \Delta \text{ daki } W(\Phi)\text{-orbit elemanlardan meydana gelir.}$

**İSPAT:** [1].

Bir örnek olarak;  $p \mid m$  olmak üzere,  $G(m, p, n)$  grubu ile ilişkili aşağıda verilen sistemi göz önüne alalım.

**ÖRNEK 2.1.10.** Uyarı 1.2.2 (5) i kullanarak,  $W(\Gamma(m, p, n))$ ,  $(p=1, m)$  ile ilişkili kök grafiklerine dönüşen vektör grafiklerini Örnek 2.1.5 (2) de inşa ettik. Bu vektör grafiklerinden elde edilen kök sistemler aşağıdaki gibidir:

$\mu_m = \{\xi^l \mid l \in \mathbb{N}, \xi, \text{ birimin bir } m. \text{ ilkel köküdür}\}$  olsun.

$W(D_n^m) = G(m, m, n)$  için  $f_{m,m,n} : R(m, m, n) \rightarrow \mathbb{N} \setminus \{1\}$ ,  $R(m, m, n)$  nin her elemanını 2 ye dönüştüren sabit dönüşüm olmak üzere,

$$R(m, m, n) = \mu_m \{\pm(e_i - \xi^l e_j) \mid i, j, l \in \mathbb{N}, i \neq j, 1 \leq i, j \leq n\}$$

cümlesini göz önüne alalım. Bu taktirde,  $(m, 2)$ , 2 ve  $m$  sayılarının en büyük ortak böleni ve  $W(\Phi(m, m, n)) = G(m, m, n)$ ,

$$|R(m, m, n)| = \frac{m^2 n(n-1)}{(m, 2)} \text{ olmak üzere, } \Phi(m, m, n) = (R(m, m, n), f_{m,m,n})$$

bir kök sistemdir.

Şimdi,  $R(m, m, n)' = R(m, m, n) \cup \mu_m \{e_k \mid 1 \leq k \leq n\}$  şeklinde  $R(m, m, n)'$  cümlesini tanımlayalım. (Cohen,  $\mu_m$  katsayısını  $\mu_q$  ( $q = \frac{m}{p}$ ) olarak alır, fakat  $W(\Phi(m, m, n)) \{e_k \mid 1 \leq k \leq n\} = \mu_m \{e_k \mid 1 \leq k \leq n\}$  olduğundan, bu bir çelişkidir [1].)  $q = \frac{m}{p}$  olmak üzere;

$$f_{m,p,n}(a) = \begin{cases} q, & a \in \mu_m \{e_k \mid 1 \leq k \leq n\} \text{ ise,} \\ 2, & \text{aksi durumlarda ise,} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan bir dönüşüm  $f_{m,p,n} : R(m, m, n)' \rightarrow \mathbb{N} \setminus \{1\}$  olsun. Bu taktirde,  $\Phi(m, p, n) = (R(m, m, n)', f_{m,p,n})$  bir kök sistemdir ve üstelik  $W(\Phi(m, p, n)) = G(m, p, n)$  ve  $|R(m, m, n)'| = |R(m, m, n)| + mn$  dir [1].

Eğer  $\Phi$ , bir  $G(m, p, n)$  imprimitif yansıma grubu ile ilişkili bir kök sistemi ise, bu taktirde  $\Phi$  ye bir *imprimitif kök sistemi* diyeceğiz.

**TANIM 2.1.11.**  $\Gamma$  bir kök grafiği ve  $\Phi$  bir kök sistemi olsun. Eğer  $\Phi$ ,  $W(\Phi) = W(\Gamma)$  olmak üzere,  $\Gamma$  ya karşılık gelen bir ön-kök sistem (Uyarı 2.1.8. (1) deki anlamıyla) ise, bu taktirde  $\Gamma$  ya  $\Phi$  deki bir *basit sistemdir* denir. Eğer  $\Phi$ ,  $\Gamma$  basit sistemi ile birlikte, bir kök sistem ise, bu taktirde  $\Gamma$  ile ilişkili grafiğe,  $\Phi$  nin *Cohen (Dynkin) diagramı* denir.

Açık olarak, eğer  $\Phi$  bir kök sistem ise, bu taktirde  $\Phi$  için bir basit sisteme sahip olmayabiliriz. Örneğin,  $p \neq 1, m$  olmak üzere,  $G(m, p, n)$  grubu  $n+1$  tane üreteç sahip,  $n$ -boyutlu bir yansıma grubudur. Bu nedenle,  $G(m, p, n)$  için bir kök grafiğine sahip değiliz ve bu yüzden,  $G(m, p, n)$  ile ilişkili bir kök sistemi için bir basit sisteme sahip değiliz [1].

**UYARI 2.1.12.**  $\Phi$ ,  $\pi = (B, \theta)$  basit sistemi ile ilişkili bir gerçek kök sistem olsun.

$B = \{a_1, \dots, a_n\}$ ,  $r_i = s_{a_i, \theta(a_i)}$  olmak üzere;

(i)  $\Phi_1^+ = B$ ,

(ii)  $\Phi_2^+ = \{r_i(a_j) \mid i \neq j, i, j = 1, \dots, n, a_j \in \Phi_1^+, r_i(a_j) \notin \Phi_1^+\}$

(Burada,  $\mu$  birimin bir kökü olmak üzere,  $\forall b \in \Phi_1^+$  için  $r_i(a_j) \neq \mu b$  olmasını da istiyoruz.)

**(iii)**  $k \geq 3$  için,  $\Phi_k^+ = \{r_i(a) \mid i=1, \dots, n, a \in \Phi_{k-1}^+; l < k \text{ ve } \forall b \in \Phi_l^+ \text{ için } r_i(a) \neq \mu b\}$

olsun. Bu durumda  $\Phi$  de bir *temel sistem*  $\Phi^+ = \bigcup_{k \geq 1} \Phi_k^+$  olarak tanımlanır ki bu reel durumda pozitif sisteme karşılık gelir.  $\Phi^+$  nın elemanlarına *temel kökler* denir [9].

### 3. BÖLÜM

#### GERÇEK ALT SİSTEMLERİN SINIFLANDIRILMASI

$\Phi = (R, f)$ ,  $\pi = (B, \theta)$  basit sistemi ile ilişkili bir gerçek kök sistemi olsun.  $W(\Phi) = W(\pi)$ ,  $a \in B$  olmak üzere,  $s_{a, \theta(a)}$  basit yansımaları tarafından üretilen sonlu yansıma grubunu gösterebiliriz. Bu bölümde kullandığımız temel kaynak [26] dir.

**TANIM 3.1.1.**  $S, R$  nin bir alt cümlesi ve  $g = f|_S$  olacak şekilde  $g$  bir dönüşüm olsun. Eğer  $\Psi = (S, g)$  bir gerçek kök sistemi ise, bu taktirde  $\Psi$  ye  $\Phi$  nin bir *gerçek alt sistemi* denir. Bu durumda,  $\Psi$  ye karşılık gelen  $W(\Psi)$  yansıma alt grubu,  $a \in S$  olmak üzere,  $s_{a, g(a)}$  basit yansımaları tarafından üretilen  $W(\Phi)$  nin bir alt grubudur.

**TANIM 3.1.2.**  $\Phi$  gerçek kök sisteminin iki gerçek alt sistemi  $\Psi_1 = (S_1, g_1)$  ve  $\Psi_2 = (S_2, g_2)$   $W(\Phi)$  altında *konjügedir* denir, eğer  $\forall a \in S_1$  ve bazı  $w \in W(\Phi)$  için,  $S_2 = wS_1$  ve  $g_2(w(a)) = g_1(a)$  ise. Bu durumda  $W(w\Psi_1) = wW(\Psi_1)w^{-1}$  olacaktır; yani  $W(\Phi)$  altında  $W(\Psi_1)$  ve  $W(\Psi_2)$  konjüge alt gruplardır. Eğer  $\pi = (B, \theta)$  bir basit sistem (ya da  $\Phi = (R, f)$  bir gerçek kök sistem) ise, kısalık için  $\pi = B$  (ya da  $\Phi = R$ ) diyeceğiz.

$\Phi$  nin gerçek alt sistemleri iki kategoriye ayrılır:

(1)  $B_\pi \subset B$  ve  $\theta_\pi = \theta|_{B_\pi}$  olmak üzere, basit sistemleri  $J = (B_\pi, \theta_\pi)$  olan gerçek alt sistemler *parabolik gerçek alt sistemler* olarak adlandırılır (reel durumda benzer bir tanım için, örneğin [20] nolu referansa bakınız.)

(2) Parabolik olmayan  $\Phi$  nin bir gerçek alt sistemi *parabolik olmayan bir gerçek alt sistem* olarak adlandırılır.

$\Phi$  nin bütün parabolik alt sistemlerinin cümlesi,  $\Phi$  kök sisteminin Cohen (Dynkin) diagramından mümkün olan bütün yollar ile bir ya da daha fazla düğümün kesilmesi ile elde edilir, yani;

**LEMMA 3.1.3.** Eğer  $\Phi = (R, f)$ ,  $\pi = (B, \theta)$  basit sistemi ile ilişkili bir geçek kök sistem ise, bu taktirde  $B_\pi \subset B$  ve  $\theta_\pi = \theta|_{B_\pi}$  olmak üzere,  $J = (B_\pi, \theta_\pi)$  çifti,  $\pi$  nin bir alt-kök grafiğidir. Ayrıca,  $J$ ,  $\Phi$  kök sisteminin bir gerçek parabolik alt sistemini verir [9,2.2].

**İSPAT :**  $J$  nin bir vektör grafiği olduğu açıktır.  $a \in B_\pi$  olmak üzere  $s_{a, \theta_\pi(a)}$  basit yansımaları tarafından üretilen grubu  $W(J)$  ile gösterelim. Bu taktirde,  $W(J)$ ,  $W(\pi)$  nin bir alt grubudur. Bu nedenle,  $W(J)$  sonlu bir yansıma grubudur.  $B_\pi$ ,  $B$  nin bir alt cümlesi olduğu için,  $B_\pi$ ,  $\mathbb{C}$  üzerinde lineer bağımsız bir cümledir. Böylece,  $J = (B_\pi, \theta_\pi)$  bir kök grafiği olur. Bu nedenle,  $J$ ,  $\pi$  nin bir alt kök grafiği olur.  $S = W(J)B_\pi$  ve  $\forall a \in S$  için  $g(a) = o_{W(J)}(a)$  ile verilen bir dönüşüm  $g : S \rightarrow \mathbb{N} \setminus \{1\}$  olsun. Bu taktirde  $S \subset R$  ve  $g = f|_S$  dir. Bu nedenle,  $\Psi = (S, g)$  çifti, Uyarı 2.1.8. (1) nedeniyle  $W(\Psi) = W(J)$  olacak şekilde  $J$  için karşılık gelen ön-kök sistemdir. Lemma 2.1.9. (2) den dolayı,  $\Psi = (S, g)$  çifti bir kök sistemdir. Bu nedenle de,  $\Psi$ ,  $\Phi$  nin bir parabolik gerçek alt sistemidir.

**LEMMA 3.1.4.**  $\Phi = (R, f)$ ,  $\pi = (B, \theta)$  basit sistemi ile ilişkili bir gerçek kök sistemi ve  $\Phi^+$  da  $\pi$  tarafından belirlenmiş bir temel sistem olsun.  $B_\pi \subset B$  ve  $\theta_\pi = \theta|_{B_\pi}$  olmak üzere,  $\Psi = (S, g)$ ,  $J = (B_\pi, \theta_\pi)$  basit sistemi ile  $\Phi$  nin parabolik gerçek bir alt sistemi ve  $\Psi^+$  da  $J$  tarafından belirlenmiş bir temel sistem olsun.  $\Phi_\Psi^+ = \Phi^+ \setminus \Psi^+$  şeklinde tanımlansın.  $B_\pi \cup B_\Psi$ ,  $\mathbb{C}$  üzerinde lineer bağımsız olacak şekilde  $B_\Psi$ ,  $\Phi_\Psi^+$  nin bir alt cümlesi olsun. Bu taktirde,  $B_0 = B_\pi \cup B_\Psi$  ve  $\theta_0 = f|_{B_0}$  olmak üzere,  $J_0 = (B_0, \theta_0)$  çifti  $J$  nin bir genişlemesi olan bir kök grafiğidir. Eğer  $\forall w \in W(\pi)$  için  $B_0 \not\subset wB$  ise, bu taktirde,  $J_0$ ,  $\Phi$  nin parabolik olmayan bir gerçek alt sistemini verir. Ayrıca, bazı  $w \in W(\pi)$  için, eğer  $B_0 \subset wB$  ise, bu taktirde  $J_0$ ,  $\Phi$  nin parabolik bir gerçek alt sistemini doğurur.

**İSPAT:** [9,2.3].

Eğer  $\Psi$ ,  $\Phi$  nin parabolik (ya da parabolik olmayan) bir gerçek alt sistemi ise,  $w \in W(\pi)$  olmak üzere,  $\Psi$  nin konjügelere  $w\Psi$  de  $\Phi$  nin parabolik (ya da parabolik olmayan) gerçek alt sistemleridir.

Şimdi, üzerinde durmamız gereken bir soru vardır: Eğer parabolik olmayan bir gerçek alt sistemle başlarsak, bir parabolik gerçek alt sistemden parabolik olmayan sözü edilen o gerçek alt sistemi oluşturabilir miyiz? Böyle bir durumda, eğer  $\Psi_0$  in bir  $J_0$  basit sistemi,  $\Psi_1$  in bir  $J_1$  basit sisteminin bir genişlemesi olarak seçilebilirse, bu taktirde  $\Phi$  nin bir parabolik gerçek  $\Psi_1$  alt sisteminden  $\Phi$  nin  $\Psi_0$  parabolik olmayan gerçek alt sisteminin oluşturulabileceğini söyleriz.

Aşağıdaki Lemma'da  $\Phi$  nin parabolik olmayan gerçek alt sistemlerinin boş olmayan parabolik gerçek alt sistemlerden elde edileceğini ispatlayacağız.

**LEMMA 3.1.5.**  $\Phi = (R, f)$ ,  $\pi = (B, \theta)$  basit sistemi ile ilişkili bir gerçek kök sistemi ve  $\Phi^+$ ,  $\pi$  tarafından belirlenmiş bir temel sistem olsun. Eğer  $\Psi_0$ ;  $\Phi$  nin parabolik olmayan bir gerçek alt sistemi ise, bu taktirde  $\Psi_1 \neq \Phi$  olmak üzere,  $\Psi_0$ ,  $\Phi$  nin boş olmayan bir  $\Psi_1$  parabolik gerçek alt sisteminden elde edilebilir.

**İSPAT :**  $W(\Psi_0)$ , parabolik olmayan  $\Psi_0$  gerçek alt sistemine karşılık gelen  $W(\Phi)$  nin gerçek bir şekilde üretilmiş bir yansıma alt grubu olsun. Uyarı 2.1.4 (1) ve Uyarı 2.1.12 den yararlanarak,  $W(\Psi_0)$  daki  $s$  üreteç yansımalarının her biri için bir  $a_s \in \Psi_0 \cap \Phi^+$  temel kökü seçip sabitleyelim. Bu yolla elde edilen elemanların kümesi  $B_0$  olsun ve  $\forall a \in B_0$  için  $\theta_0(a) = o_{w(\Psi_0)}(a)$  olacak şekilde  $\theta_0 : B_0 \rightarrow \mathbb{N} \setminus \{1\}$  dönüşümünü tanımlayalım. O halde Uyarı 2.1.4 (1) den  $J_0 = (B_0, \theta_0)$  çifti,  $W(J_0) = W(\Psi_0)$  ile ilgili bir kök grafiğidir. Şimdi,  $S_0 = W(J_0)B_0$  olsun ve  $a \in B_0$ ,  $w \in W(J_0)$  için  $g_0(w(a)) = \theta_0(a)$  ile  $\theta_0$  in  $g_0 : S_0 \rightarrow \mathbb{N} \setminus \{1\}$  genişlemesini tanımlayalım. O halde, Uyarı 2.1.8 (1) den  $\Psi_0 = (S_0, g_0)$  olacaktır ve Tanım 2.1.11. den  $J_0$ ,  $\Psi_0$  için bir basit sistemdir. Ayrıca, parabolik olmayan gerçek alt sistem tanımından,  $\forall w \in W(\Phi)$  için  $B_0 \not\subset wB$  olduğu da açıktır. Şimdi,  $B_0$  kümesini aşağıdaki gibi boş olmayan parçaya ayıralım:

$B_\pi \neq \emptyset$  olmak üzere, bazı  $B_\pi \subset B$  için,  $w \in W(\pi)$ ,  $B_1 = wB_\pi$  ve  $B_2 = B_0 \setminus B_1$  olacak şekilde  $B_0 = B_1 \uplus B_2$  olsun. (Burada,  $\uplus$  sembolü ayrık birleşimi gösterir. Bu durum, Örnek 3.1.7 de izah edilecektir). Eğer  $\theta_\pi = \theta|_{B_\pi}$  alırsak, bu taktirde  $J = (B_\pi, \theta_\pi)$  çifti, Lemma 3.1.3. den,  $\Phi$  nin boş olmayan parabolik bir gerçek  $\Psi$  alt sistemini verir. Çünkü  $B_\pi \neq \emptyset$ ,  $B_1 = wB_\pi \subset wB$  olduğundan  $\alpha \in B_\pi$  için  $\theta_1(w(\alpha)) = \theta_\pi(\alpha)$  olmak üzere,  $J = (B_1, \theta_1)$  çifti,  $w\pi$  nin boş olmayan bir alt-kök grafiğidir ve Lemma 3.1.3. den,  $\Psi$  ye konjüge olan  $\Phi$  nin boş olmayan bir parabolik gerçek  $\Psi_1$  alt sistemini verir. Şimdi,  $\Psi_1^+$ ,  $J_1$  tarafından belirlenmiş bir temel sistem olsun. Bu taktirde,  $B_2 \not\subset \Psi_1^+$  olduğu açıktır. Eğer  $B_2 \subset \Psi_1^+$  olsaydı, o zaman  $J_0$ ,  $\Psi_1$  için bir basit sistem olurdu. Fakat  $J_0$  parabolik olmayan gerçek  $\Psi_0$  alt sistemine karşılık geldiğinden,  $\Psi_0 = \Psi_1$  olurdu ki bu da  $\Psi_1$  in seçimi ile çelişir. Lemma 3.1.4. deki notasyona uymak için, sadece  $B_2$  nin yerine  $B_{\Psi_1}$  yazacağız.  $B_{\Psi_1} \subset \Phi^+$  olduğundan,  $B_0 = wB_\pi \uplus B_{\Psi_1}$ ,  $\mathbb{C}$  üzerinde lineer bağımsız olacak şekilde,  $B_{\Psi_1} \subset \Phi_{\Psi_1}^+ = \Phi^+ \setminus \Psi_1^+$  dir. Böylece, Lemma 3.1.4. ün hipotezlerini gerçekleştirmiş oluruz. Buradan  $J_0$  kök grafiği,  $J_1$  in bir genişlemesidir ve böylece parabolik olmayan  $\Psi_0$  gerçek alt sistemi, boş olmayan parabolik  $\Psi_1$  gerçek alt sisteminden oluşturulmuş olur ki bu ise ispatı tamamlar.

**SONUÇ 3.1.6.**  $\Phi = (R, f)$ , bir  $\pi = (B, \theta)$  basit sistemi ile ilişkili bir gerçek kök sistem ve  $\Phi^+$  da  $\pi$  tarafından belirlenen bir temel sistem olsun. Eğer  $\Psi$ ,  $\Phi$  nin boş olmayan bir gerçek alt sistemi ise, bu taktirde her bir  $\Psi_i$ ,  $\Phi$  nin indirgenemez bir gerçek alt sistemi olmak üzere,  $\Psi$ ,  $\Psi = \bigcup_{i=1}^k \Psi_i$  ( $k \geq 1$ ) şeklinde bir parçalanmaya sahiptir.

**İSPAT:** Lemma 3.1.5. in ispatındaki gibi  $\Psi$  için bir  $J = (B', \theta')$  basit sistemi oluşturalım. Eğer  $J$  bağlantılı ise, bu durumda  $\Psi$  indirgenemezdir ve  $k=1$  ve  $\Psi = \Psi_1$  olacaktır. Eğer  $J$  bağlantılı değil ise, bu taktirde  $J$  nin  $J_1 = (B_1, \theta_1), \dots, J_k = (B_k, \theta_k)$  şeklinde  $k$ -tane bağlantılı bileşene ayrıldığını kabul edebiliriz. Burada  $B_i \neq \emptyset$  olmak üzere,  $B' = \bigcup_{i=1}^k B_i$  ve  $i \neq j$  için  $B_i \cap B_j = \emptyset$  ve  $\forall i=1, \dots, k$  için  $\theta_i = \theta'|_{B_i}$  dir. Böylece her bir  $J_i = (B_i, \theta_i)$ ,  $J$  nin bir alt-kök grafiğidir ve Uyarı 2.1.4. ve Lemma 2.1.9. dan  $\Phi$

nin bir  $\Psi_i$  alt sistemini verir. Ayrıca, her bir  $J_i = (B_i, \theta_i)$  bağlantılı olduğundan,  $\Phi$  nin her bir  $\Psi_i$  alt sistemi indirgenemezdir.

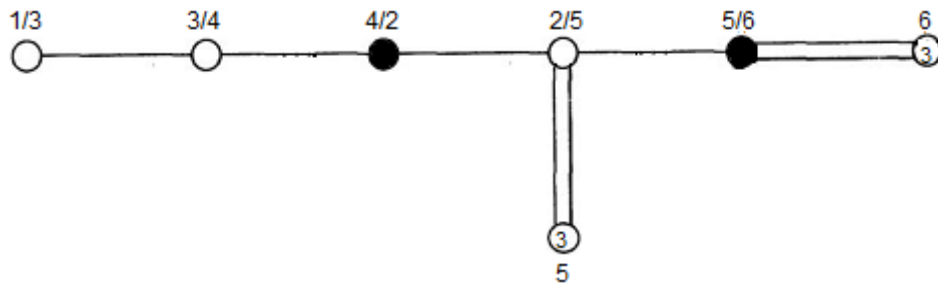
Şimdi, eğer  $i \neq j$  için  $\alpha \in B_i$  ve  $\beta \in B_j$  ise, bu takdirde  $\langle \alpha, \beta \rangle = 0$  dır ve böylece  $s_{\alpha, \theta_i(\alpha)} s_{\beta, \theta_j(\beta)} = s_{\beta, \theta_j(\beta)} s_{\alpha, \theta_i(\alpha)}$  dır. Böylece gerçek bir şekilde üretilmiş yansıma alt grubu  $W(J)$ ,  $i \neq j$  için  $W(J_i) \cap W(J_j) = \{e\}$  olmak üzere; gerçek bir şekilde üretilmiş  $W(J_i)$  yansıma alt gruplarının  $W(J) = W(J_1) \times \dots \times W(J_k)$  şeklinde bir direkt çarpımıdır. Buradan,  $W(J_i)B_i \cap W(J_j)B_j = \emptyset$  ( $i \neq j$ ) dir, yani  $\Psi_i \cap \Psi_j = \emptyset$  ( $i \neq j$ ) dir. Böylece,

$$(W(J_1) \times \dots \times W(J_k)) \cup_{i=1}^k B_i = \cup_{i=1}^k \Psi_i = \Psi$$

olur ki istenileni elde etmiş oluruz.

Şimdi Lemma 3.1.5. deki teoriyi aşağıdaki örnekle daha iyi anlaşılır kılmak istiyoruz.

**ÖRNEK 3.1.7.**  $\Phi$ ,  $B = \{\alpha_i = e_i - e_{i+1} \quad (i=1, \dots, 5), \alpha_6 = e_6\}$  olmak üzere,  $\pi = (B, \theta)$  basit sistemi ile birlikte  $B_6^3$  tipinde bir gerçek kök sistem olsun.  $\Phi$ ,  $\Phi^+$  temel sistemini ihtiva etsin. Uyarı 1.2.2(6) dan,  $i=1, \dots, 5$  olmak üzere 2. mertebeden  $s_{\alpha_i, \theta(\alpha_i)}$  yansımasını  $r_i$  ve  $i=1, \dots, 6$  olmak üzere 3. mertebeden  $s_{e_i, \theta(e_i)}$  yansımasını  $w_i$  ile gösterelim. Şimdi,  $i=1, \dots, 6$  için,  $s_i = s_{\alpha_i, \theta(\alpha_i)}$  alalım. O zaman  $w_6, s_6$  yansımasıdır. Sonuç olarak,  $i=1, \dots, 5$  için  $w_i, s_i s_{i+1} \dots s_5 s_6 s_5 \dots s_i$  yansımasıdır.  $\Psi_0$ ,  $J_0 = \{e_1 - e_3, e_3 - \xi_3^2 e_4, e_2 - e_5, e_5, e_6\}$  basit sistemi ile  $A_2 + B_2^3 + B_1^3$  tipinde  $\Phi$  nin bir gerçek alt sistemi olsun. (Burada,  $\xi_3$  birimin sabit bir ilkel küp köküdür.)  $\forall w \in W(\pi)$  için  $J_0 \not\subset w\pi$  olduğundan,  $\Psi_0$  parabolik değildir.  $\Psi_0$  için  $\Delta$  Cohen diagramı



şeklindedir. Burada,  $e_1 - e_3, e_3 - \xi_3^2 e_4, e_2 - e_5, e_5, e_6$  ya karşılık gelen düğümler sırasıyla  $1/3, 3/4, 2/5, 5, 6$  ile gösterilir.  $4/2$  ve  $5/6$  düğümleri kesilmiştir.

Şimdi,  $B_{\Psi_1} = \{e_5\}$ ,  $w_4^2, s_4 s_5 s_6^2 s_5 s_4$  yansıması,  $J = \{e_1 - e_2, e_2 - e_3, e_4 - e_5, e_6\} \subset \pi$ ,  $w_4^2 r_2 r_3 \in W(\pi)$ ,  $J_1 = \{e_1 - e_3, e_3 - \xi_3^2 e_4, e_2 - e_5, e_6\} = w_4^2 r_2 r_3 J$  olmak üzere,  $J_0 = J_1 \uplus B_{\Psi_1}$  yazalım. O halde,  $\Psi$ , Lemma 3.1.3. den,  $J$  basit sistemi ile birlikte  $A_2 + A_1 + B_1^3$  tipinde  $\Phi$  nin parabolik bir gerçek alt sistemidir.  $J_1 = w_4^2 r_2 r_3 J \subset w_4^2 r_2 r_3 \pi$  olduğundan,  $J_1, w_4^2 r_2 r_3 \pi$  nin bir alt-kök grafiğidir. Ayrıca  $J_1, A_2 + A_1 + B_1^3$  tipinde  $\Phi$  nin  $\Psi_1 = w_4^2 r_2 r_3 \Psi$  parabolik gerçek alt sistemini verir.  $J_1$  tarafından belirlenmiş  $\Psi_1$  in temel sistemi  $\Psi_1^+ = \{e_1 - e_3, e_1 - \xi_3^2 e_4, e_3 - \xi_3^2 e_4, e_2 - e_5, e_6\}$  dir ve böylece  $B_{\Psi_1} \not\subset \Psi_1^+$  dir. Böylece,  $J_0 = J_1 \uplus B_{\Psi_1}$ ,  $\mathbb{C}$  üzerinde lineer bağımsız olacak şekilde  $B_{\Psi_1} \subset \Phi_{\Psi_1}^+ = \Phi^+ \setminus \Psi_1^+$  dir. Böylece, Lemma 3.1.4. den,  $J_0$  kök grafiği  $J_1$  in bir genişlemesidir ve dolayısıyla  $\Psi_0$ , parabolik  $\Psi_1$  gerçek alt sisteminden elde edilmiş olur.

Şimdi, biz verilen bir (reel ya da kompleks) gerçek kök sisteminin bütün gerçek alt sistemlerini sınıflandırmak için bir algoritma vermek istiyoruz.

**ALGORİTMA 3.1.8.**  $\Phi$  bir gerçek kök sistem olsun.  $\Phi$  de bulunan ve  $\Delta$  Cohen (Dynkin) diagramına karşılık gelen bir  $\pi$  basit sistemini seçelim, ve bunları sabitleyelim.  $\Phi^+, \pi$  tarafından belirlenmiş bir temel sistem olsun.

(1)  $\Phi$  nin  $\Delta$  Cohen (Dynkin) diagramından bütün olası yöntemlerle bir ya da daha fazla düğümü yok ederek  $\Phi$  nin parabolik gerçek alt sistemlerini elde ediniz.

(2)  $\Phi$  nin parabolik olmayan bir gerçek alt sistemini üretmek için,  $J_\pi \subset \pi$  basit sistemi ile (1) de elde edilen  $\Phi$  nin parabolik bir  $\Psi$  gerçek alt sistemini ve karşılık gelen  $\Psi^+$  temel sistemini ele alınız.  $\Phi_\Psi^+ = \Phi^+ \setminus \Psi^+$  olacak şekilde  $\Phi_\Psi^+$  yi tanımlayınız. Ayrıca,

$$(i) \forall w \in W(\pi) \text{ için } J_\pi \cup B_\Psi \not\subset w\pi,$$

$$(ii) J_\pi \cup B_\Psi, \mathbb{C} \text{ üzerinde lineer bağımsız}$$

olacak şekilde  $\Phi_\Psi^+$  nin boş olmayan bir  $B_\Psi$  alt cümlesini seçiniz. Böylece,  $J_0 = J_\pi \cup B_\Psi$ ,  $\Phi$  nin parabolik olmayan  $\Psi_0$  gerçek alt sistemini veren  $J_\pi$  nin bir genişlemesi olan bir kök grafiğidir.

(3) (1) de elde edilen parabolik gerçek alt sistemler ile (2) sürecini tekrar ediniz ve bunu pek çok kez uygulayınız.

(4)  $\Phi$  nin (hem parabolik hem de parabolik olmayan) bütün gerçek alt sistemlerini konjügelere kadar elde etmek için,  $\sigma \in W(\pi)$  olmak üzere,  $\pi$  ile diğer basit sistem  $\sigma\pi$  yi yer değiştiriniz ve (1), (2) ve (3) süreçlerini adım adım tekrar ediniz.

**UYARI 3.1.9.** Yukarıdaki algoritmada, eğer (2) (i) hipotezi çıkarılırsa, bu taktirde algoritmanın herhangi bir safhasında bazı  $w \in W(\pi)$  için,  $\Psi_0$  in parabolik olmasını gerektiren  $J_0 \subset w\pi$  durumu ortaya çıkabilir. Bu yüzden, (2) (i) hipotezi sadece  $\Phi$  nin parabolik olmayan gerçek alt sistemlerini inşa etmemize imkan sağlar. Daha fazla bilgi için Lemma 3.1.4. e bakılabilir. Ek olarak, eğer  $\Phi$  bir reel kök sistem ise, bu taktirde  $J_0 = J_\pi \cup B_\Psi$  deki her  $a \neq b$  çifti için  $\langle a, b \rangle \leq 0$  şartını Algoritma 3.1.8. in (2)(ii) hipotezi ile yer değiştirebiliriz. (bakınız [9, sonuç 2.4.]).

Gerçekten, aşağıdaki teorem Algoritma 3.1.8. in istediğimiz her şeyi sağladığını ifade eder.

**TEOREM 3.1.10.**  $\Phi$  bir gerçek kök sistem olsun.  $\Phi$  de bulunan ve  $\Delta$  Cohen (Dynkin) diagramına karşılık gelen bir  $\pi$  basit sistemi seçelim ve bunları sabit tutalım. Bu taktirde:

- (i)  $\Phi$  nin parabolik gerçek alt sistemleri,  $\Phi$  nin  $\Delta$  Cohen (Dynkin) diagramından bütün olası yöntemlerle bir ya da daha fazla düğümün yok edilmesi ile elde edilir.
- (ii) (i) de elde edilen bütün parabolik gerçek alt sistemleri ele alarak,  $\Phi$  nin parabolik olmayan gerçek alt sistemlerini üretebiliriz.
- (iii)  $\Phi$  nin bir gerçek alt sistemi için bir basit sistem  $\Phi$  nin bir temel sisteminin bir alt cümlesi olarak seçilebilir.
- (iv)  $\Phi$  nin (hem parabolik hem de parabolik olmayan) bütün gerçek alt sistemleri konjügelere kadar elde edilebilir.

(v)  $G, \Phi$  gerçek kök sistemi ile  $n$  yansıma tarafından üretilen  $n$ -boyutlu sonlu kompleks bir yansıma grubu olsun. Bu taktirde,  $\Phi$  nin her  $\Psi$  gerçek alt sistemi  $J$  basit sistemi olmak üzere,  $n$  düğümden oluşan basit sisteme sahip olan bir gerçek kök sistemi de ihtiva edilir.

**İSPAT :** (i) ifadesi Lemma 3.1.5. den hemen çıkarılabilir. (ii) iddiası Lemma 3.1.4. ve Lemma 3.1.5. den görülür. (iii) iddiası, [9] da yer alan Teorem 1 den çıkar. (iv). şıkkı ispatlamak için,  $\sigma \in W(\pi)$  olmak üzere,  $\pi$  ile  $\sigma\pi$  basit sistemini yer değiştirdikten sonra, (i) ve (ii) yi uygulamak yeterlidir.

Şimdi son iddiaya bakalım. Eğer  $J$ ,  $n$  den daha az düğümden oluşuyorsa, bu durumda  $\Phi$  de  $J$  nin köklerine göre lineer olarak ifade edilemeyen kökler vardır. Bir kök grafiğine denk olan yeni bir grafikte yeni bir gerçek alt sistem elde etmek için  $J$  ye bu köklerden birini ekleriz.  $n$  düğümden oluşan basit sistem ile bir gerçek kök sistemi elde edene kadar bu sürece devam etmeliyiz. Bu ise teoremin (v). şıkkını ispatlar.

Şimdi, Teorem 3.1.10. nun (v). şıkkında ifade edilen gerçeği izah etmek için aşağıdaki örneği verelim.

**ÖRNEK 3.1.11.**  $B_4$  tipindeki  $\Phi$  gerçek kök sistemi ile  $G = W(\Phi)$  Weyl grubunu göz önüne alalım.  $\pi = \{\alpha_1 = e_1 - e_2, \alpha_2 = e_2 - e_3, \alpha_3 = e_3 - e_4, \alpha_4 = e_4\}$ ,  $\Phi$  de sabitlenmiş bir basit sistem olsun. Bu taktirde  $G$ ,  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  kökleri ile 2. mertebeden 4 basit yansıma tarafından üretilen 4-boyutlu sonlu bir yansıma grubudur.

Şimdi,  $J = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$  basit sistemi ile  $A_3$  tipinde  $\Phi$  nin  $\Psi$  gerçek alt sistemini göz önüne alalım.  $\alpha$ ,  $\Phi$  nin en uzun kökü olmak üzere,  $-\alpha \in \Phi$  olsun.  $\alpha = e_1 + e_2 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + 2\alpha_4$  olduğundan,  $-\alpha$ ,  $J$  deki köklerin lineer bir kombinasyonu olarak yazılamaz. Eğer  $-\alpha$  yı  $\alpha_2$  ye bağlayarak  $-\alpha$  yı  $J$  ye eklersek,  $J \cup \{-\alpha\}$ ,  $D_4$  tipinde bir kök grafiğidir ve Uyarı 2.1.8. den  $D_4$  tipinde bir  $\Sigma$  kök sistemini verir. O halde, Tanım 2.1.11. den,  $J \cup \{-\alpha\}$ , 4 düğümden oluşan  $\Sigma$  de bir basit sistemdir. Ayrıca,  $\Sigma, \Psi$  yi içerir.

Şimdi,  $\alpha_4 \in \Phi$  durumunu düşünelim. Bu taktirde  $\alpha_4$   $J$  nin köklerinin lineer bir kombinasyonu olarak yazılamaz. Eğer  $\alpha_4$   $J$  ye eklenirse,  $J \cup \{\alpha_4\} = \pi$  olur. Böylece,

$\Psi$  için,  $\Phi$  gerçek kök sisteminin kendisi Teorem 3.1.10. nun (v). şikkını sağlar. Aslında,  $\Phi$  nin  $\Psi$  gerçek alt sistemi için, bir  $\Psi \subset \Sigma \subset \Phi$  zinciri vardır.

Teorem 3.1.10., bir gerçek alt sistemi bulmak için direkt bir yöntem verir. Ayrıca, Teorem 3.1.10. nun (v). şikkı, verilen bir gerçek kök sistemin, gerçek bir kök sistemin bir gerçek alt sistemi olduğunu söyler. Reel kök sistemleri için bunlara karşılık gelen sonuçlar iyi bilinir (bakınız [6,15]). Böylece, verilen bir (reel ya da kompleks) gerçek kök sisteminin bütün gerçek alt sistemlerini sınıflandırmak için yukarıdaki algoritmayı uygulamak yeterli olacaktır. Şimdi, bu bölümün bir uygulaması olarak, bir sonraki bölümde imprimitif durumda gerçek alt sistemleri inşa edeceğiz. (Primitif yansıma grupları için her bir gerçek kök sisteminin gerçek alt sistemlerinin tek tek listelenmesi gerekir.)

## 4. BÖLÜM

### İMPRİMİTİF DURUMDA GERÇEK ALT SİSTEMLER

Bu bölümde kullandığımız temel kaynak [26] dur.

Şimdi, Algoritma 3.1.8. vasıtasıyla  $\Phi(m, p, n)$  ( $p=1, m$ ) nin gerçek alt sistemlerini belirlemek istiyoruz. Bu gerçek alt sistemler  $G(m, p, n)$  nin bazı indirgenemez modüllerini inşa etmek için kullanılır (bakınız [21,11]).

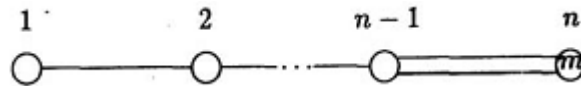
$\Phi(m, p, n)$ , ( $p=1, m$ ),

$$\pi(m, p, n) = \begin{cases} \{\alpha_i = e_i - e_{i+1} (i=1, \dots, n-1), \alpha_n = e_n\}, & p=1 \text{ ise,} \\ \{\beta_i = e_i - e_{i+1} (i=1, \dots, n-1), \beta_n = e_{n-1} - \xi e_n\}, & p=m \text{ ise,} \end{cases}$$

basit sistemine sahip bir imprimitif kök sistemi ve bu sisteme karşılık gelen temel sistem  $\Phi^+(m, p, n)$  ( $p=1, m$ ) olsun.  $\Phi(m, p, n)$ , ( $p=1, m$ ), nin alt sistemlerini bu bölümde formüle etmek istiyoruz. Bunu sırasıyla  $p$  nin aldığı değerlere göre yapacağız.

#### 4.1.1. $B_n^m$ tipi ile ilgili alt sistemlerin inşası:

İlk olarak  $p=1$  olsun. Bu taktirde  $\Phi(m, 1, n)$ ,  $B_n^m$  tipinde bir gerçek kök sistemidir. Böylece,  $\alpha_i (i=1, \dots, n)$  köklerine karşılık gelen düğümler  $i$  ile gösterilmek üzere,  $\Phi(m, 1, n)$  için karşılık gelen Cohen diagramı,



olur. Burada



diagramını göstermektedir. Bundan sonra,  $B_n^m$  tipinde bir Cohen diagramını yukarıdaki gibi göstereceğiz. Algoritma 3.1.8. i izleyerek  $1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_t \leq n$  için,  $\Phi(m, 1, n)$  nin bir parabolik gerçek alt sistemi  $\Psi$  ve  $\Psi$  nin Cohen diagramı



olsun. Bu diagramda  $k_1, k_2, \dots, k_t$  düğümleri kesilmiştir.

Eğer,  $k_0 = 0$  olmak üzere,  $l_j = k_j - k_{j-1} - 1$  ( $j = 1, \dots, t$ ) dersek bu taktirde

$\Psi = \sum_{j=1}^t B_{l_j}^1 + B_{n-k_t}^m$  olup, burada  $B_{l_j}^1$  ve  $B_{n-k_t}^m$  için basit sistemler sırasıyla;

$$J_{k_j} = \{\alpha_{k_{j-1}+1}, \alpha_{k_{j-1}+2}, \dots, \alpha_{k_j-1}\} \text{ ve}$$

$$J_{n-k_t} = \{\alpha_{k_t+1}, \alpha_{k_t+2}, \dots, \alpha_n\}$$

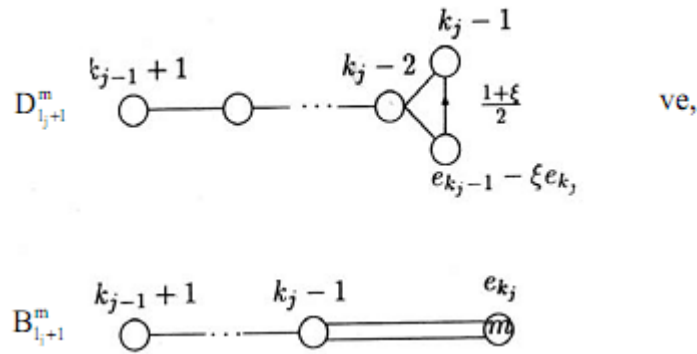
dır ve ayrıca  $J = \sum_{j=1}^t J_{k_j} + J_{n-k_t}$  de  $\Psi$  nin bir basit sistemidir. Algoritma 3.1.8. i göz önüne alarak  $1 < t_1 < t_2 < \dots < t_m < t_{m+1} = t$  için,

$$J_{\Psi, k_j} = \begin{cases} \{e_{k_{j-1}} - \xi e_{k_j}\}, & t_i + 1 \leq j \leq t_2 \text{ ise,} \\ \{e_{k_j}\}, & t_2 + 1 \leq j \leq t_{m+1} \text{ ise,} \end{cases}$$

olmak üzere,  $\Phi^+(m, 1, n)$  nin bir alt cümlesi  $J_\Psi = \sum_{j=t_1+1}^{t_{m+1}} J_{\Psi, k_j}$  olsun. Ayrıca,

$$J_0 = J \cup J_\Psi = \sum_{j=1}^{t_1} J_{k_j} + \sum_{j=t_1+1}^{t_2} \{J_{k_j} + J_{\Psi, k_j}\} + \sum_{i=2}^m \sum_{j=t_{i-1}+1}^{t_i} \{J_{k_j} + J_{\Psi, k_j}\} + J_{n-k_t}$$

olsun. Bu taktirde,  $\forall w \in W(\pi(m, 1, n))$  için  $J_0 \not\subset w\pi(m, 1, n)$  dir.  $J_{k_j} + J_{\Psi, k_j}$  ( $t_1 + 1 \leq j \leq t_2$ ) ve  $J_{k_j} + J_{\Psi, k_j}$  ( $t_2 + 1 \leq j \leq t_{m+1}$ ) için karşılık gelen Cohen diagramları sırasıyla:



olduğundan,  $J_0$ ,  $\mathbb{C}$  üzerinde lineer bağımsızdır. Dolayısıyla, Algoritma 3.1.8. (2) den dolayı,  $J_0$ ,  $J$  nin genişlemesi olan bir kök grafiğidir. Bu nedenle,

$$\Psi_0 = \sum_{j=1}^{t_1} B_{l_j}^1 + \sum_{j=t_1+1}^{t_2} D_{l_j+1}^m + \sum_{i=2}^m \sum_{j=t_i+1}^{t_{i+1}} B_{l_j+1}^m + B_{n-k_t}^m$$

$J_0$  basit sistemine sahip  $\Phi(m,1,n)$  nin parabolik olmayan bir alt sistemidir. Üstelik, burada

$$\sum_{j=1}^{t_1} (l_j + 1) + \sum_{j=t_1+1}^{t_2} (l_j + 1) + \sum_{i=2}^m \sum_{j=t_i+1}^{t_{i+1}} (l_j + 1) + n - k_t = n$$

dir. Diğer taraftan,  $\Psi_0$  alt sistemini,

$$\Psi_0 = \sum_{j=1}^{t_1} B_{l_j}^1 + \sum_{j=1}^{t_2-t_1} D_{l_{t_1+j}+1}^m + \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{t_{i+1}-t_i} B_{l_{t_1+j}+1}^m + B_{n-k_t}^m$$

şeklinde yeniden ifade edebiliriz.  $s = t_2 - t_1$ ,  $\mu_j = l_{t_1+j} + 1$  ( $j=1, \dots, s$ ) ve  $i=1, 2, \dots, m$  olmak üzere,

$$s_i = \begin{cases} t_1, & i=1 \text{ ise,} \\ t_{i+1} - t_i, & i=2, \dots, m-1 \text{ ise,} \\ t_{m+1} - t_m + 1, & i=m \text{ ise,} \end{cases}$$

$$\lambda_j^{(i)} = \begin{cases} l_j (j=1, 2, \dots, s_1), & i=1 \text{ ise,} \\ l_{t_1+j} + 1 (j=1, 2, \dots, s_i), & i=2, \dots, m-1 \text{ ise,} \\ l_{t_m+j} + 1 (j=1, 2, \dots, s_m - 1), & i=m \text{ ise,} \\ n - k_t (j=s_m), & i=m \text{ ise,} \end{cases}$$

$$m_i = \begin{cases} 1, & i = 1 \text{ ise,} \\ m, & i = 2, \dots, m \text{ ise,} \end{cases}$$

dersek,  $\Psi_0$  in tipini

$$\sum_{j=1}^{s_1} (\lambda_j^{(1)} + 1) + \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{s_i} \lambda_j^{(i)} + \sum_{j=1}^s \mu_j = n \text{ olmak üzere,}$$

$$(I) B_n^m : \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{s_i} B_{\lambda_j^{(i)}}^{m_i} + \sum_{j=1}^s D_{\mu_j}^m$$

şeklinde daha rafine ifade edebiliriz. Formül (I) de, eğer  $m=2$  alırsak, bu taktirde  $B_n$  tipi için formül

$$(II) B_n : \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^{s_i} B_{\lambda_j^{(i)}}^{m_i} + \sum_{j=1}^s D_{\mu_j}^m$$

olur. Fakat, Hughes,

$$m_i = \begin{cases} 1, & i = 1 \text{ ise,} \\ m, & i = 2, \dots, m \text{ ise,} \end{cases}$$

$$\sum_{j=1}^{s_1} (\lambda_j^{(1)} + 1) + \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{s_i} \lambda_j^{(i)} = n \text{ olmak üzere,}$$

$$(III) \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{s_i} B_{\lambda_j^{(i)}}^{m_i}$$

tipindeki gerçek alt sistemler ve  $W(B_n^m)$  nin konjüge sınıfları arasında bire bir tekabül olduğunu ispatlamıştır [16].

Biliyoruz ki;  $J_\Psi$  cümlesinin seçimi keyfidir. Dolayısıyla (I) formülünün inşasında, eğer  $t_1 + 1 \leq j \leq t_2$  için  $\{e_{k_{j-1}} - \xi_m e_{k_j}\}$  nin yerine boş cümle alırsak bu taktirde (I) formülünün son terimi tamamen ortadan kalkar ve böylece (III) formülünü direk olarak elde ederiz.

Formül (III) de, eğer  $m=1,2$  alırsak, bu taktirde  $A_{n-1}$  ve  $C_n$  tiplerinin formülleri sırasıyla:

$$(IV) A_n : \sum_{j=1}^{s_1} B_{\lambda_j^{(1)}}^{m_1} \text{ ve}$$

$$(V) C_n : \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^{s_i} B_{\lambda_j^{(i)}}^{m_i}$$

olacaktır. Bu nedenle,  $A_{n-1}$  ve  $C_n$  tipleri için Dynkin'nin elde ettiği sonuçlara yeniden ulaşırız [15]. Böylece, aşağıdaki teoreme sahibiz.

**TEOREM 4.1.2.**  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$  ve  $B_n^m$  tipindeki gerçek kök sistemlerinin gerçek alt sistemlerinin tipleri,

$$m_i = \begin{cases} 1, & i=1 \text{ ise,} \\ m, & i=2, \dots, m \text{ ise,} \end{cases}$$

olmak üzere, konjügelerine kadar aşağıdaki formda olacaktır.

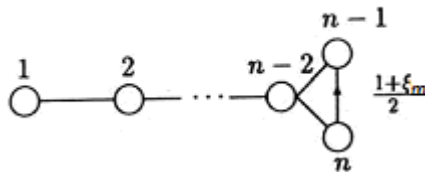
$\Phi$

### GERÇEK ALT SİSTEMLERİN TİPLERİ

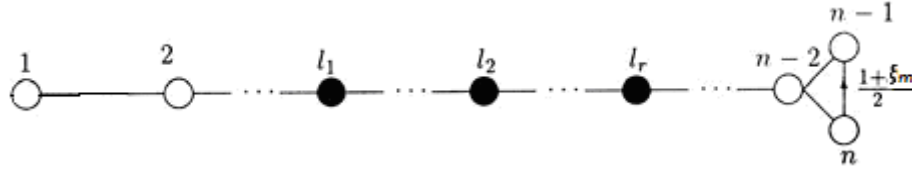
$A_n$	$\sum_{i=1}^p A_{\lambda_i}$	$\sum_{i=1}^p (\lambda_i + 1) = n + 1$
$B_n$	$\sum_{i=1}^p A_{\lambda_i} + \sum_{j=1}^r B_{\rho_j} + \sum_{\nu=1}^s D_{\mu_\nu}$	$\sum_{i=1}^p (\lambda_i + 1) + \sum_{j=1}^r \rho_j + \sum_{\nu=1}^s \mu_\nu = n$
$C_n$	$\sum_{i=1}^p A_{\lambda_i} + \sum_{j=1}^r C_{\mu_j}$	$\sum_{i=1}^p (\lambda_i + 1) + \sum_{j=1}^r \mu_j = n$
$B_n^m$	$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{s_i} B_{\lambda_j^{(i)}}^{m_i} + \sum_{j=1}^s D_{\mu_j}^m$	$\sum_{j=1}^{s_1} (\lambda_j^{(1)} + 1) + \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{s_i} \lambda_j^{(i)} + \sum_{j=1}^s \mu_j = n$

#### 5.1.3. $D_n^m$ tipi ile ilgili alt sistemlerin inşası:

$p = m$  olsun. Bu taktirde  $\Phi(m, m, n)$ ,  $D_n^m$  tipinde bir gerçek kök sistemi ve  $\beta_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) köklerine karşılık gelen düğümler  $i$  ile gösterilmek üzere,  $\Phi(m, m, n)$  için karşılık gelen Cohen diagramı



olacaktır. Algoritma 3.1.8. i izleyerek,  $1 \leq l_1 < l_2 < \dots < l_r = n$  için  $\Phi(m, m, n)$  nin bir parabolik gerçek alt sistemi  $\Psi$  ve  $\Psi$  nin Cohen diagramı



olsun. Burada  $l_1, l_2, \dots, l_r$  düğümleri kesilmiştir. Eğer,  $l_0 = 0$  olmak üzere,  $k_j = l_j - l_{j-1} - 1$  ( $j = 1, \dots, r$ ) dersek, bu taktirde  $D_{k_j}^1$  ve  $D_{n-l_r}^m$  nin basit sistemleri sırasıyla;

$$J_{l_j} = \{\beta_{l_{j-1}+1}, \beta_{l_{j-1}+2}, \dots, \beta_{l_j-1}\} \text{ ve}$$

$$J_{n-l_r} = \{\beta_{l_r+1}, \beta_{l_r+2}, \dots, \beta_n\}$$

olmak üzere,  $J = \sum_{j=1}^r J_{l_j} + J_{n-l_r}$  basit sistemine sahip olan bir alt sistem

$\Psi = \sum_{j=1}^r D_{k_j}^1 + D_{n-l_r}^m$  olur. Algoritma 3.1.8. (2) yi göz önüne alarak

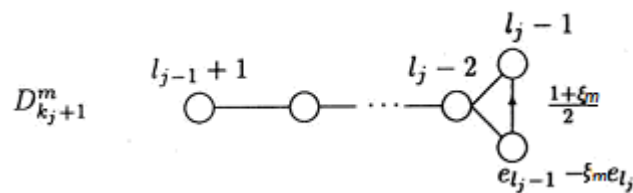
$1 < r_1 < r_2 < \dots < r_m < r_{m+1} = r$  için,  $j = r_2 + 1, \dots, r_m + 1$ ,  $J_{\Psi_{e_j}} = \{e_{l_{j-1}} - \xi_m e_{l_j}\}$  olmak üzere,

$J_{\Psi} = \sum_{j=r_2+1}^{r_{m+1}} J_{\Psi_{e_j}}$ ,  $\Phi^+(m, m, n)$  nin bir alt cümlesi olsun. Bu durumda,

$$J_0 = J \cup J_{\Psi} = \sum_{j=1}^{r_2} J_{l_j} + \sum_{i=2}^m \sum_{j=r_i+1}^{r_{i+1}} \{J_{l_j} + J_{\Psi_{e_j}}\} + J_{n-l_r}$$

olur. O halde  $\forall w \in W(\pi(m, m, n))$  için  $J_0 \not\subset w\pi(m, m, n)$  dir.  $J_{l_j} + J_{\Psi_{e_j}}$

( $r_2 + 1 \leq j \leq r_m + 1$ ) için karşılık gelen Cohen diagramları



olduğundan,  $J_0$ ,  $\mathbb{C}$  üzerinde lineer bağımsızdır. Dolayısıyla, Algoritma 3.1.8(2) den,  $J_0$ ,  $J$  nin genişlemesi olan bir kök grafiğidir. Bu nedenle,

$$\Psi_0 = \sum_{j=1}^{r_2} D_{k_j}^1 + \sum_{i=2}^m \sum_{j=r_i+1}^{r_{i+1}} D_{k_j+1}^m + D_{n-l_r}^m$$

$J_0$  basit sistemine sahip,  $\Phi(m, m, n)$  nin parabolik olmayan bir gerçek alt sistemidir. Ayrıca, bu durumda elbette

$$\sum_{j=1}^{r_2} (k_j + 1) + \sum_{i=2}^m \sum_{j=r_i+1}^{r_{i+1}} (k_j + 1) + n - l_r = n$$

dir.  $B_n^m$  tipindeki gibi benzer tartışmalar kullanılarak, aşağıdaki gibi,  $\Psi_0$  gerçek alt sisteminin tipini yeniden ifade edebiliriz:

$$m_i = \begin{cases} 1, & i = 1 \text{ ise,} \\ m, & i = 2, \dots, m \text{ ise,} \end{cases}$$

$$\sum_{j=1}^{u_1} (\mu_j^{(1)} + 1) + \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{u_i} \mu_j^{(i)} = n \quad \text{olmak üzere,}$$

$$\text{(VI)} \quad D_n^m : \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{u_i} D_{\mu_j^{(i)}}^{m_i}$$

dır. Eğer (VI) formülünde  $m = 2$  alırsak, bu taktirde,  $D_n$  tipi için karşılık gelen formül

$$\text{(VII)} \quad D_n : \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^{u_i} D_{\mu_j^{(i)}}^{m_i}$$

olacaktır. O halde,  $D_n$  tipi için Dynkin'nın sonucunu yeniden elde etmiş oluyoruz [15]. Böylece aşağıdaki teoreme sahibiz.

**TEOREM 5.1.4.**  $D_n$  ve  $D_n^m$  tipindeki gerçek kök sistemler ile ilgili gerçek alt sistemlerin tipleri

$$m_i = \begin{cases} 1, & i = 1 \text{ ise,} \\ m, & i = 2, \dots, m \text{ ise,} \end{cases}$$

olmak üzere, konjügelerine kadar aşağıdaki formdadır.

$\Phi$  **GERÇEK ALT SİSTEMLERİN TİPLERİ**

$$D_n \quad \sum_{i=1}^r A_{\lambda_i} + \sum_{j=1}^s D_{\mu_j} \quad \sum_{i=1}^r (\lambda_i + 1) + \sum_{j=1}^s \mu_j = n$$

$$D_n^m \quad \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{u_i} D_{\mu_j^{(i)}} \quad \sum_{j=1}^{u_1} (\mu_j^{(1)} + 1) + \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{u_i} \mu_j^{(i)} = n$$

## 5. BÖLÜM

### **$G(m,1,n)$ KOMPLEKS YANSIMA GRUBU İÇİN GEÇERLİ DİAGRAMLAR**

Bu bölümün esas konusu  $G(m,1,n)$  imprimitif kompleks yansımada grubundaki konjüge sınıfları ve bütün bağlantılı bileşenleri A ya da B tipinde olan geçerli diagramlar arasında bire-bir bir eşleme olduğunu göstermektir.  $G(m,1,n)$  grubu genelleştirilmiş simetrik grup gibi görülebilir ve bu grubun konjüge sınıfları Kerber'in çalışmasında bulunabilir [27].  $G(m,1,n)$  nin her konjüge sınıfı için bir geçerli diagram oluşturmak amacıyla öncelikle,  $G(m,1,n)$  için bir uzunluk fonksiyonu tanımlayacağız ve sonra bu fonksiyonun özelliklerini inceleyeceğiz. Weyl grupları için karşılık gelen sonuçlar Carter tarafından incelenmiştir [5].

İlk olarak temel notasyonları verelim ve daha sonra kullanacağımız bazı sonuçları ifade edelim.

**TANIM 5.1.1.**  $W = G(m,1,n)$ ,  $\Phi = \Phi(m,1,n)$  ye karşılık gelen imprimitif yansımada grubunu gösterebiliriz.  $a_i \in \Phi$  ve  $s_i \in \{1, \dots, m-1\}$  olmak üzere,  $W$  daki her bir  $w$  elemanı

$w = w_{a_1}^{s_1} \dots w_{a_k}^{s_k}$  şeklinde yansımaların bir çarpımı olarak ifade edilebilir.  $\sum_{i=1}^k s_i$  nin en

küçük değerine  $w$  nin uzunluğu denir ve  $l(w)$  ile gösterilir. (Burada eğer  $o_w(a_i) = 2$  ise, bu taktirde  $s_i = 1$  dir ve eğer  $o_w(a_i) = m$  ise, bu taktirde  $s_i \in \{1, \dots, m-1\}$  dir.) Kural olarak  $l(1) = 0$  dir. Açık olarak,  $l(w) = 1$  dir  $\Leftrightarrow a \in \Phi$  olmak üzere,  $w = w_a$  dir.

Ayrıca,  $o_w(a) = m$  ve  $s_i \in \{1, \dots, m-1\}$  olmak üzere, eğer  $w = w_a^s$  ise, bu takdirde  $l(w) = s$  dir. Eğer  $l(w) = \sum_{i=1}^k s_i$  ise,  $w$ ,  $k$ -tane yansımanın çarpımıdır deriz.

Herhangi bir  $\sigma \in W$ ,

$$\theta_i = \begin{pmatrix} b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{ik_i} \\ \xi^{s_{i1}} b_{i2} & \xi^{s_{i2}} b_{i3} & \dots & \xi^{s_{iki}} b_{i1} \end{pmatrix},$$

$b_{ij} \in \{1, \dots, n\}$ ,  $s_{ij} \in \{1, \dots, m\}$  olmak üzere,  $\sigma = \theta_1 \dots \theta_t$  şeklinde ayrık devirlerin çarpımı olarak tek türlü yazılabilir.  $i = 1, \dots, t$  olmak üzere,  $\theta_i$  devrinin uzunluğu  $k_i$  dir.

$f(\theta_i) = \sum_{j=1}^{k_i} s_{ij}$  alalım ve  $f(\sigma) = \sum_{i=1}^t f(\theta_i)$  olsun. Şimdi,  $1 \leq p \leq m$ ,  $1 \leq q \leq n$  için  $f(\theta_i) \equiv p \pmod{m}$  olacak şekilde  $a_{pq}(\sigma)$  yı  $q$  uzunluğundaki  $\sigma$  nın  $\theta_i$  devirlerinin sayısı olarak tanımlayalım.  $(a_{pq}(\sigma))$   $m \times n$  matrisi,  $\sigma$  nın tipi olarak adlandırılır ve  $Ty(\sigma)$  ile gösterilir [28]. Bu takdirde  $\sigma, \pi \in W$ ,  $W$  da konjügedirler  $\Leftrightarrow Ty(\sigma) = Ty(\pi)$  dir [27].

**LEMMA 5.1.2.** Eğer  $\sigma, \pi \in W$ ,  $W$  da konjüge ise, bu takdirde,  $l(\sigma) = l(\pi)$  dir.

**İSPAT:**  $a_i \in \Phi$  ve  $s_i \in \{1, \dots, m-1\}$  olmak üzere,  $\sigma = w_{a_1}^{s_1} \dots w_{a_k}^{s_k}$  olsun.  $\sigma$ ,  $W$  da  $\pi$  ye konjüge olduğundan, bazı  $w \in W$  için  $\pi = w\sigma w^{-1}$  dir. Fakat,  $b_i = w(a_i)$  olmak üzere,

$$w\sigma w^{-1} = w_{b_1}^{s_1} \dots w_{b_k}^{s_k} \text{ eşitliği, } l(\sigma) = \sum_{i=1}^k s_i = l(\pi) \text{ eşitliğini gerektirir.}$$

Yukarıdaki Lemma  $W$  daki iki konjüge elemanın aynı uzunlukta olduğunu ve bu elemanlardan her birinin aynı sayıda yansımanın çarpımı olduğunu ifade eder.

Aşağıdaki Lemma yansıma gruplarının iyi bilinen bir özelliğidir [3].

**LEMMA 5.1.3.**  $G$ ,  $n$ -boyutlu bir  $V$  kompleks vektör uzayında bir yansıma grubu olsun. Eğer  $g \in G$  ve  $U$ ,  $g$  tarafından sabitlenmiş bütün vektörlerin oluşturduğu  $V$  nin alt uzayı ise, bu takdirde  $g$ ,  $U$  nun  $U^\perp$  ortogonal komplemanındaki köklere karşılık gelen yansımaların bir çarpımıdır.

**LEMMA 5.1.4.**  $w \in W$  olsun. Bu takdirde,  $l(w)$ ,  $V$  üzerindeki  $w$  nın 1'den farklı olan özdeğerlerinin kuvvetleri toplamıdır.

**İSPAT:** Kabul edelim ki  $l(w) = \sum_{i=1}^k s_i$  olsun. Bu takdirde,  $w$ ,  $k$ -tane yansımanın bir çarpımıdır ve  $a_i \in \Phi$ ,  $s_i \in \{1, \dots, m-1\}$  olmak üzere,  $w = w_{a_1}^{s_1} \dots w_{a_k}^{s_k}$  şeklinde bir ifadeye sahiptir. Şimdi,  $H_{a_i}$ ,  $a_i \in V$  nin yansıyan hiper düzlemi ve

$$H = H_{a_1} \cap H_{a_2} \cap \dots \cap H_{a_k}$$

olsun. Bu takdirde,  $w$ ,  $H$  üzerinde trivial olarak etkir ve  $\text{boy } H \geq n-k$  dır. Böylece yansımanın tanımından,  $w$ , 1'e eşit olan en az  $n-k$  tane özdeğere ve 1'den farklı olan en fazla  $k$ -tane  $\xi^{s_1}, \xi^{s_2}, \dots, \xi^{s_k}$  özdeğere sahiptir. Bu nedenle, bu özdeğerlerin kuvvetleri toplamı  $l(w)$  den fazla değildir.

Aksine olarak, kabul edelim ki  $w$ ,  $s_i \in \{1, \dots, m-1\}$  olmak üzere, 1'e eşit olmayan  $k$ -tane  $\xi^{s_1}, \xi^{s_2}, \dots, \xi^{s_k}$  özdeğeri olsun.  $U$ ,  $w$  tarafından sabitlenmiş bütün vektörlerin oluşturduğu  $V$  nin alt uzayı ve  $U^\perp$  de  $U$  nun ortogonal alt uzayı olsun. Bu takdirde,  $\text{boy } U = n-k$  ve  $\text{boy } U^\perp = k$  dır ve Lemma 6.1.3. den  $w$ ,  $U^\perp$  deki köklere karşılık gelen yansımaların bir çarpımıdır.

Kabul edelim ki  $w$ ,  $V$  deki bazı vektörleri sabit bıraksın. Bu takdirde  $k < n$  ve böylece  $\text{boy } U^\perp < \text{boy } V$  dir.  $U^\perp$  deki kökler  $n$  den daha küçük boyutta ürettikleri alt uzayında bir kök sistem oluştururlar ve  $w$  bu kök sistemi ile ilişkili yansıma grubunun bir elemanıdır. Böylece, tümevarım ile,  $w$  en fazla  $k$ -tane yansımanın bir çarpımıdır, yani,

$$w = w_{a_1}^{s_1} \dots w_{a_k}^{s_k} \text{ dir ve böylece } l(w) \leq \sum_{i=1}^k s_i \text{ dir.}$$

Eğer  $l(w_{a_1}^{s_1} \dots w_{a_k}^{s_k}) = \sum_{i=1}^k s_i$  ise, bir  $w_{a_1}^{s_1} \dots w_{a_k}^{s_k} \in W$  ifadesi *indirgenmiş* olarak adlandırılır.

**LEMMA 5.1.5.**  $a_1, a_2, \dots, a_k \in \Phi$  ve  $i = 1, \dots, k$  için  $s_i \in \{1, \dots, m-1\}$  olsun. Bu takdirde  $w_{a_1}^{s_1} \dots w_{a_k}^{s_k}$  indirgenmiştir  $\Leftrightarrow a_1, \dots, a_k$  kökleri lineer bağımsızdır.

**İSPAT:** Şimdi,  $w = w_{a_1}^{s_1} \dots w_{a_k}^{s_k}$  olsun. Kabul edelim ki bu ifade indirgenmiş olsun. Bu taktirde Lemma 6.1.4. den  $w, 1$ 'e eşit olmayan  $k$ -tane özdeğere sahiptir ve böylece

$$\text{boy}(H_{a_1} \cap H_{a_2} \cap \dots \cap H_{a_k}) = n - k$$

dır. (Burada, boyut daha büyük olamaz, çünkü  $w$  bu alt uzayda birim gibi davranır.) Böylece  $a_1, \dots, a_k$  kökleri lineer bağımsızdır.

Tersine olarak, kabul edelim ki  $a_1, \dots, a_k$  kökleri lineer bağımsız olsun. Şimdi,  $\text{im}(w-1)$  alt uzayını göz önüne alalım ve

$$v_1 \in H_{a_2} \cap \dots \cap H_{a_k} \text{ fakat } v_1 \notin H_{a_1}$$

olacak şekilde bir  $v_1 \in V$  vektörü daha seçelim. Bu taktirde  $w(v_1) - v_1, a_1$  in sıfırdan farklı bir çarpanıdır. Böylece  $a_1 \in \text{im}(w-1)$  dir. Şimdi,

$$v_2 \in H_{a_3} \cap \dots \cap H_{a_k} \text{ fakat } v_2 \notin H_{a_2}$$

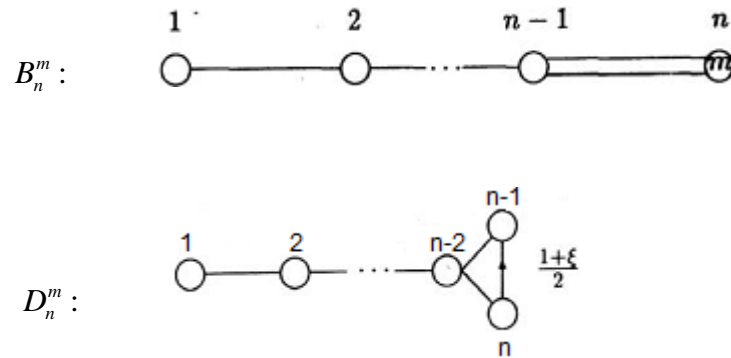
olacak şekilde bir  $v_2 \in V$  vektörü daha seçelim. Bu taktirde  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  ve  $\beta \neq 0$  olmak üzere,  $w(v_2) - v_2 = \alpha a_1 + \beta a_2$  dir. Böylece  $a_2 \in \text{im}(w-1)$  dir. Bu işleme devam edersek nihayetinde görülür ki  $a_1, \dots, a_k \in \text{im}(w-1)$  dir ve böylece  $\text{boyim}(w-1) = k$  olduğunu görürüz.

Eğer  $w, l < k$  ve  $\rho_i \in \{1, \dots, m-1\}$  olmak üzere  $w = w_{b_1}^{\rho_1} \dots w_{b_l}^{\rho_l}$  şeklinde daha kısa bir ifadeye sahip ise, bu taktirde  $w$  indirgenmiştir ve  $\text{im}(w-1)$  in her elemanı  $b_1, \dots, b_l$  nin bir lineer kombinasyonu olarak yazılabilir. Böylece  $\text{boyim}(w-1) < k$  dir, ki bu da bir çelişkidir. Ek olarak, eğer  $w, r_i \leq s_i$  olmak üzere,  $w = w_{a_1}^{r_1} \dots w_{a_k}^{r_k}$  ifadesine sahip ise, bu taktirde  $w_{a_k}^{\ell_k} \dots w_{a_1}^{\ell_1} w = 1$  ve  $\ell_i = o_w(a_i) - s_i$  ( $1 \leq i \leq k$ ) olmak üzere,  $w_{a_k}^{\ell_k} \dots w_{a_1}^{\ell_1} w_{a_1}^{r_1} \dots w_{a_k}^{r_k} \neq 1$  dir, bu da yine bir çelişkidir.

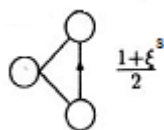
$\Phi(m, p, n), (p = 1, m),$

$$B = \begin{cases} \{\alpha_i = e_i - e_{i+1} (i = 1, \dots, n-1), \alpha_n = e_n\}, & p = 1 \text{ ise,} \\ \{\beta_i = e_i - e_{i+1} (i = 1, \dots, n-1), \beta_n = e_{n-1} - \xi e_n\}, & p = m \text{ ise,} \end{cases}$$

olmak üzere,  $\pi(m, p, n) = (B, \theta)$  basit sistemi ile bir imprimitif kök sistemi olsun. Bu taktirde  $\alpha_i (i=1, \dots, n)$  ye karşılık gelen düğüm  $i$  ile ve  $\beta_i (i=1, \dots, n)$  ye karşılık gelen düğüm  $i$  ile gösterilmek üzere,  $\Phi(m, 1, n)$  ve  $\Phi(m, m, n)$  için Cohen diagramları sırasıyla



dir.  $s \in \{1, \dots, m-1\}$  olmak üzere bir ağ,



şeklinde bir grafiktir.

Bir  $w = w_{a_1}^{s_1} \dots w_{a_k}^{s_k} \in W$ ,  $l(w) = \sum_{i=1}^k s_i$  ile aşağıdaki gibi yeniden oluşturulabilir ([14,17]):

$$\tau = w_{a_1} \dots w_{a_i} \in W(A_{n-1}) \text{ olmak üzere, } w = \tau w_{a_{i+1}}^{s_{i+1}} \dots w_{a_k}^{s_k}$$

dır.  $w$  nın böylesi bir ayrıştırması için,  $o_w(a_i)$  değeri ile  $a_1, \dots, a_k$  köklerinin her birine karşılık gelen  $k$  - tane düğümüne sahip  $\Gamma$  grafiğini tanımlarız.  $a_i, a_j$  farklı köklerine karşılık gelen düğümler  $\langle a_i, a_j \rangle$  ağırlığında bir çizgi ile bağlanır. Eğer  $o_w(a_i) = 2$  ise, bu taktirde  $a_i$  köküne karşılık gelen düğümdeki 2 sayısı Cohen'in anlattığı gibi ihmal edilir [1].

Eğer  $w \in W$ ,  $\Gamma$  grafiği ile bir ayrıştırmaya sahip ise, bu taktirde  $w$  nın keyfi bir konjügesi de  $\Gamma$  grafiği ile bir ayrıştırmaya sahiptir. Çünkü eğer  $w_{a_1} \dots w_{a_i} \in W(A_{n-1})$  olmak üzere  $w = w_{a_1} \dots w_{a_i} w_{a_{i+1}}^{s_{i+1}} \dots w_{a_k}^{s_k}$  ise, bu taktirde  $j = 1, \dots, k$  için  $b_j = w'(a_j)$  olmak üzere,  $w' w w'^{-1} = w_{b_1} \dots w_{b_i} w_{b_{i+1}}^{s_{i+1}} \dots w_{b_k}^{s_k}$  eşitliği vardır.

Böylece  $\Gamma$  grafiğinin bu konjüğe sınıfları ile ilişkili olduğunu söyleriz. (Burada, birim elemanı içeren bu konjüğe sınıfının boş grafikte gösterildiğini kabul ediyoruz.) Lemma 5.1.5. den,  $\Gamma$  nın düğümleri lineer bağımsız köklerin bir cümlesine karşılık gelir.

Şimdi aşağıdaki temel tanımı verebiliriz.

**TANIM 5.1.6.**  $\Gamma$  bir grafik olsun. Bu taktirde eğer

(i)  $\Gamma$  nın düğümleri  $\Phi$  nin lineer bağımsız köklerinin bir cümlesine karşılık gelir,

(ii) bir devir olan  $\Gamma$  nın her bir alt grafiği bir ağa denktir

şartları sağlanır ise,  $\Gamma$  bir *geçerli diagram* olarak adlandırılır. (Burada,  $\Gamma$  nın bir alt grafiği düğümlerin bir alt cümlesidir ki, bu alt cümledeki düğümleri bağlayan çizgiler vardır. Bir devir bir grafikdir ki burada da her bir düğüm sadece diğer iki düğümle bağlantılıdır.)

**LEMMA 5.1.7.**  $W$  nın bir konjüğe sınıfı ile ilişkili her geçerli diagram  $W$  nın bir yansıma alt grubunun Cohen (Dynkin) diagramıdır.

**İSPAT:**  $\Gamma$  böyle bir grafik olsun.  $J$  de  $\Gamma$  nın düğümlerine karşılık gelen köklerin bir cümlesi olsun.  $W(J)$ ,  $a \in J$  olmak üzere,  $w_{a, o_w(a)}$  yansımaları tarafından üretilen grubu gösterebiliriz. Bu taktirde  $W(J)$ ,  $W$  nın bir alt grubudur ve böylece sonlu bir yansıma grubudur. Ayrıca,  $J$ , geçerli diagramın tanımından lineer bağımsızdır. Böylece Cohen [1] 4.2 den,  $\Gamma$  bir kök grafiğidir.

Şimdi,  $S = W(J)J$  alalım ve  $\forall a \in S$  için  $g(a) = o_{W(J)}(a)$  ile bir  $g : S \rightarrow \mathbb{N} \setminus \{1\}$  dönüşümünü tanımlayalım.  $\Psi = (S, g)$  çifti H. Can [9] 1.2 (ii) den  $W(\Psi) = W(J)$  ile  $J$  ye karşılık gelen ön-kök sistemidir. H. Can [9] 1.2 (iii) den  $\Psi = (S, g)$  çifti bir kök sistemidir ve dolayısıyla  $\Phi$  nin bir alt sistemidir. Böylece  $W(\Psi)$ ,  $\Psi$  nin yansıma grubudur ve buradan  $\Gamma$  nın,  $W$  nın  $W(\Psi)$  yansıma alt grubunun Cohen (Dynkin) diagramı olduğu sonucu çıkar.

Şimdi,  $\Gamma$  nın bağlantısız  $\Gamma_i$  grafiklerinin bir birleşimi olabileceğini hatırlayalım. Ki böylece de şunu söyleyebiliriz: Eğer  $\Gamma_i$  ağ içermez ise, bu taktirde  $\Gamma_i$  ya A ya da B tipindedir, ve eğer  $\Gamma_i$  bir ağ içerir ise, bu taktirde  $\Gamma_i$ , D tipinde olmalıdır.

Şimdi geçerli diagramların  $W$  nin konjüge sınıflarını parametrize etmek için kullanılabileceğini göstereceğiz.

**TEOREM 5.1.8.**  $W = G(m,1,n)$  olsun.  $W$  daki konjüge sınıfları ve

$\sum_{p=1}^m (B_{\lambda_1^{(p)}}^{m_p} + B_{\lambda_2^{(p)}}^{m_p} + \dots + B_{\lambda_{s_p}^{(p)}}^{m_p})$  biçimindeki geçerli diagramları arasında bire bir eşleme

vardır ki burada  $(m,p)$ ,  $m$  ve  $p$  nin en büyük ortak böleni olmak üzere

$$\sum_{p=1}^{m-1} \sum_{q=1}^{s_p} \lambda_q^{(p)} + \sum_{q=1}^{s_m} (\lambda_q^{(m)} + 1) = n \quad \text{ve} \quad m_p = \frac{m}{(m,p)}$$

dır.

**İSPAT:**  $W$  nin elemanları,  $\xi$  nin bir kuvveti ile baz vektörlerini permüte ederek ve bu baz vektörlerin keyfi alt cümlelerini çarparak,  $V$  nin  $e_1, \dots, e_n$  ortonormal bazı üzerinde çalışır. Bu çarpımları göz ardı ederek,  $W$  nin her  $w$  elemanını ayrik devirlerin bir çarpımı olarak genel yolla ifade edilebilen  $\{1, \dots, n\}$  nin bir permütasyonunu belirleyelim.  $(k_1 k_2 \dots k_r)$ ,  $p_i \in \{1, \dots, m\}$  olmak üzere

$$e_{k_1} \rightarrow \xi^{p_1} e_{k_2} \rightarrow \xi^{p_1+p_2} e_{k_3} \rightarrow \dots \rightarrow \xi^{p_1+\dots+p_{r-1}} e_{k_r} \rightarrow \xi^{p_1+\dots+p_r} e_{k_1}$$

gibi yazılan bir devir olsun. Eğer  $\sum_{i=1}^r p_i \equiv p \pmod{m}$  olmak üzere,  $w^r(e_{k_1}) = \xi^p e_{k_1}$  ise,

$(k_1 k_2 \dots k_r)$  devri bir  $(\xi^p, r)$ -devir olarak adlandırılır ve  $[r^{\xi^p}]$  ile gösterilir. Bu taktirde bu devirlerin uzunluğu  $\sum p_i$  değerleri ile birlikte  $w$  nin tipini belirler.  $W$  nin iki elemanı konjügedir  $\Leftrightarrow$  bu iki eleman aynı tiptedir, Kerber'in anlattığı gibi [27]. Böylece konjüge sınıfları ve tipleri arasında bire-bir bir eşleme vardır. Şimdi,  $p \in \{1, \dots, m\}$  olmak üzere,

$$e_1 \rightarrow e_2 \rightarrow \dots \rightarrow e_{r-1} \rightarrow e_r \rightarrow \xi^p e_1$$

$(\xi^p, r)$ -devrini göz önüne alalım. Eğer  $p = m$  ise, bu taktirde bu devir  $(12)(23)\dots(r-1 r)$  elemanlarının çarpımı olarak ifade edilebilir. Bu çarpımlar  $A_{r-1}$  tipinde Weyl alt grubunun basit yansımalarının bir tam cümlesini oluşturur ve böylece  $[r]$  ile gösterilen bu  $(1, r)$ -devir  $A_n$  tipinde olduğu gibi,  $A_{r-1}$  geçerli diagramı ile temsil edilir [5]. Eğer  $p \in \{1, \dots, m-1\}$  ise, bu diagram  $(12)(23)\dots(r-1 r)w_r^p$  elemanlarının

çarpımı olarak ifade edilebilir, ki burada da  $w_r^p$ ,  $\xi^p e_r$  yerine  $e_r$  yi değiştirir ve diğer bütün  $e_i$  leri sabit tutar. Böylece bu çarpanlar  $(m, p)$ ,  $m$  ve  $p$  nin en büyük ortak böleni olmak üzere,  $m_p = \frac{m}{(m, p)}$  için  $B_r^{m_p}$  tipinde yansıma alt grubunun basit yansımalarının tam bir cümlesini oluşturur. Bu  $(\xi^p, r)$ -devir aşağıdaki geçerli diagramla gösterilebilir.



(Bu bir sonraki sebepten dolayı doğal bir tercihtir. Eğer  $G(m, 1, n)$  grubu için  $n = 1$  alırsak, bu taktirde  $C_m = G(m, 1, n) = \langle w \mid w^m = 1 \rangle$  eşitliği vardır ve ayrıca  $\langle w \mid w^m = 1 \rangle$  grubu  $m$ . mertebeden devirli gruptur. Biz geçerli bir



diagramı ile  $C_m$  deki  $1 \leq p \leq m-1$  olmak üzere,  $w^p$  elemanlarının oluşturduğu bir birim olmayan sınıfa yaklaşıyoruz, yani geçerli diagram elemanın mertebesine bağlıdır.)

Şimdi,  $W$  nın ayrık  $(\xi^p, r)$ -devirlerinin bir çarpımı olarak ifade edilen keyfi bir elemanını göz önüne alalım. Ayrık devirler  $V$  nin ortogonal alt uzayları üzerinde işleme girdiğinden, geçerli diagram devir yeniden oluşuma karşılık gelen bağlantılı bileşenlere ayırır, ve böylece geçerli diagram  $(m, p)$ ,  $m$  ve  $p$  nin en büyük ortak böleni olmak üzere,

$$m_p = \frac{m}{(m, p)} \quad \text{ve} \quad \sum_{p=1}^{m-1} \sum_{q=1}^{s_p} \lambda_q^{(p)} + \sum_{q=1}^{s_m} (\lambda_q^{(m)} + 1) = n$$

için  $\sum_{p=1}^m (B_{\lambda_1^{(p)}}^{m_p} + B_{\lambda_2^{(p)}}^{m_p} + \dots + B_{\lambda_{s_p}^{(p)}}^{m_p})$  formunu alır.

**UYARI 5.1.9.** Şimdi,  $\lambda^{(p)} = (\lambda_1^{(p)}, \dots, \lambda_{s_p}^{(p)})$  ( $p = 1, \dots, m-1$ ),  $\lambda^{(m)} = (\lambda_1^{(m)} + 1, \dots, \lambda_{s_m}^{(m)} + 1)$  ile  $\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(m)}$   $m$ -parçalanmasını tanımlayalım. Bu taktirde  $W$  da konjüge sınıfları

arasında bire-bir bir eşleme vardır ve  $\sum_{p=1}^{m-1} \sum_{q=1}^{s_p} \lambda_q^{(p)} + \sum_{q=1}^{s_m} (\lambda_q^{(m)} + 1) = n$  ile  $n$  nin  $(\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(m)})$  parçalanmalarının  $m$ -cümlesidir [27].

Eğer  $m=1$  ise, bu taktirde  $W = W(A_{n-1})$  ( $A_{n-1}$  tipinde bir Weyl grubu) ve eğer  $m=2$  ise, bu taktirde  $W = W(C_n)$  ( $C_n$  tipinde bir Weyl grubu) dir, ve böylece Teorem 5.1.8. de  $m=1,2$  alırsak Carter'in sonuçlarını elde ederiz [5].

Teorem 5.1.8. de verilen geçerli diagramlar sadece alınılabilen diagramlar değildir. Biz  $W$  nın bir  $G(m,m,n) = W(D_n^m)$  yansıma alt grubunu içerdiğini biliyoruz [1]. Böylece  $D_n^m$ ,  $W$  için bir geçerli diagramdır. Fakat Teorem 5.1.8. de verilen geçerli diagramlar  $W$  nın konjüge sınıfları ile bire-bir bir eşlemeye sahip olduğundan, ispatın geri kalanına ihtiyacımız yoktur.

Teorem 5.1.8. in bir uygulaması olarak, aşağıdaki örneği verelim.

**ÖRNEK 5.1.10.**  $G(3,1,3)$  grubunu göz önüne alalım. Bu taktirde

Devir Tipi	Kojüge Sınıfı	Geçerli Diagram
[1 1 1]	1	$\emptyset$
$[1^{\xi} 1^{\xi} 1^{\xi}]$	$w_1 w_2 w_3$	$\begin{matrix} w \\ \textcircled{3} \end{matrix} \quad \begin{matrix} w \\ \textcircled{3} \end{matrix} \quad \begin{matrix} w \\ \textcircled{3} \end{matrix}$
$[1^{\xi^2} 1^{\xi^2} 1^{\xi^2}]$	$w_1^2 w_2^2 w_3^2$	$\begin{matrix} w^2 \\ \textcircled{3} \end{matrix} \quad \begin{matrix} w^2 \\ \textcircled{3} \end{matrix} \quad \begin{matrix} w^2 \\ \textcircled{3} \end{matrix}$
$[1 1^{\xi} 1^{\xi^2}]$	$w_1^2 w_2$	$\begin{matrix} w^2 \\ \textcircled{3} \end{matrix} \quad \begin{matrix} w \\ \textcircled{3} \end{matrix}$
$[1 1 1^{\xi}]$	$w_1$	$\begin{matrix} w \\ \textcircled{3} \end{matrix}$
$[1^{\xi^2} 1^{\xi} 1^{\xi}]$	$w_1^2 w_2 w_3$	$\begin{matrix} w^2 \\ \textcircled{3} \end{matrix} \quad \begin{matrix} w \\ \textcircled{3} \end{matrix} \quad \begin{matrix} w \\ \textcircled{3} \end{matrix}$
$[1 1^{\xi^2} 1^{\xi^2}]$	$w_2^2 w_3^2$	$\begin{matrix} w^2 \\ \textcircled{3} \end{matrix} \quad \begin{matrix} w^2 \\ \textcircled{3} \end{matrix}$

$[1\ 1\ 1^{\xi^2}]$	$w_1^2$	$\textcircled{3}^{w^2}$
$[1\ 1^\xi\ 1^\xi]$	$w_2 w_3$	$\textcircled{3}^w \quad \textcircled{3}^w$
$[1^\xi\ 1^{\xi^2}\ 1^{\xi^2}]$	$w_1 w_2^2 w_3^2$	$\textcircled{3}^w \quad \textcircled{3}^{w^2} \quad \textcircled{3}^{w^2}$
$[2\ 1]$	$(12)$	$\circ$
$[2^\xi\ 1]$	$(12)w_2$	$\circ \text{---} \textcircled{3}^w$
$[2^{\xi^2}\ 1]$	$(12)w_2^2$	$\circ \text{---} \textcircled{3}^{w^2}$
$[2^{\xi^2}\ 1^\xi]$	$(12)w_2^2 w_3$	$\circ \text{---} \textcircled{3}^{w^2} \quad \textcircled{3}^w$
$[2\ 1^\xi]$	$(12)w_3$	$\circ \quad \textcircled{3}^w$
$[2^\xi\ 1^\xi]$	$(12)w_2 w_3$	$\circ \text{---} \textcircled{3}^w \quad \textcircled{3}^w$
$[2^\xi\ 1^{\xi^2}]$	$(12)w_2 w_3^2$	$\circ \text{---} \textcircled{3}^w \quad \textcircled{3}^{w^2}$
$[2^{\xi^2}\ 1^{\xi^2}]$	$(12)w_2^2 w_3^2$	$\circ \text{---} \textcircled{3}^{w^2} \quad \textcircled{3}^{w^2}$
$[2\ 1^{\xi^2}]$	$(12)w_3^2$	$\circ \quad \textcircled{3}^{w^2}$
$[3]$	$(12)(23)$	$\circ \text{---} \circ$
$[3^\xi]$	$(12)(23)w_3$	$\circ \text{---} \circ \text{---} \textcircled{3}^w$
$[3^{\xi^2}]$	$(12)(23)w_3^2$	$\circ \text{---} \circ \text{---} \textcircled{3}^{w^2}$

dır. Burada ikinci sütundaki elemanlar  $G(3,1,3)$  nin konjüge sınıflarının temsilci elemanlarını göstermektedir.

## KAYNAKLAR

1. Cohen A.M. – Finite Complex Reflection Groups, **Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.** **9** (1976) 379–436.
2. Todd, J.A., – The Invariants of a Finite Collineation Group, in Five Dimensions. *Math. Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 46 (1950) 73-90.
3. Steinberg, R. Differential Equations Invariant Under Finite Reflection Groups, *Transl. Amer. Math. Soc.*, **112** (1964) 392–400.
4. Koster, D.W., **Complex Reflection Groups**, Ph.D.Thesis, Wisconsin Univ., Madison, 1975.
5. Carter R.W. – Conjugacy Classes in the Weyl Group, **Compositio Math.** **25** (1972) 1–59.
6. Borel A., de Siebenthal J. – Les Sous-Groupes Fermes Connexes de Rang Maximum des de Lie Clos, **Comment. Math. Helv.** **23** (1949) 200-221.
7. Bourbaki N. –, *Groupes et Algebres de Lie*, Chap. 4, 5 et 6, Hermann, Paris, 1968.
8. Bremke K., Malle G. – Reduced Words and A Length Function for  $G(e,1,n)$ , **Indag. Math.** **8** (1997) 453–469.
9. Can H. Some Combinatorial Results for Complex Reflection Groups, *Europ. J. Combinatorics* **19** (1998) 901–909.
10. Bremke K., Malle G. – Root Systems and Length Functions, **Geom. Dedicata** **72** (1998) 83–97.
11. Can H. – Perfect System for Specht Modules of  $G(m,1,n)$ , *Comm. Fac. Sci. Uni. Ank. Series A 1 Math. Stat.* **53**(2004) 33-55.
12. Broue M., Malle G. – Zyklotomische Heckealgebren, *Asterisque* **212** (1993) 119–189.
13. Broue M., Malle G., Rouquier R. – Complex Reflection Groups, Braid Groups, Hecke Algebras, *J. Reine Angew. Math.* **500** (1998) 127–190.

14. Can H. – Representations of the Generalized Symmetric Groups, **Contrib. Alg. Geom.** **37** (1996) 289–307.
15. Dynkin E.B. – Semisimple Subalgebras of Semisimple Lie Algebras, **Amer. Math. Soc. Transl.** **6** (1957) 111–244.
16. Hughes M.C. – **The Representations of Complex Reflection Groups**, PhD Thesis, University of Wales, 1981.
17. Can H. – Representations of the Imprimitve Complex Reflection Groups  $G(m,1,n)$ , **Comm. Algebra** **26** (1998) 2371–2393.
18. Can H. Hawkins L. – A Computer Program for obtaining Subsystems, **Ars Combinatoria** **58** (2001) 257–269.
19. Davies J.W., Morris A.O. – The Schur Multiplier of the generalized symmetric Group, **J. London Math. Soc.** **8** (1974) 615–620.
20. Humphreys J.E. – Reflection Groups and Coxeter Groups, in: Cmbridge Studies in Advanced Math., vol. 29, Cambridge Univ. Pres, Cambridge, New York, 1990.
21. Morris A.O., Mwamba P. – Macdonald Representations of Complex Reflection Groups, **Sem. Lothar. Combin.** **52** (2004), Art. B52g, 17 pp. (electronic).
22. Hughes M.C. – Complex Reflection Groups, **Comm. Algebra** **18** (1990) 3999–4029.
23. Hughes M.C., Morris A.O. – Root Systems for Two Dimensional Complex Reflection Groups, **Sem. Lothar. Combin.** **45** (2001), Art. B45e, 18 pp. (electronic).
24. Morris A.O., Jones H.I. – Projective Representations of Generalized Symmetric Groups, **Sem. Lothar. Combin.** **50** (2003), Art. B50b, 27 pp. (electronic).
25. Shephard G.C., Todd J.A. – Finite Unitary Reflection Groups, **Canad. J. Math.** **6** (1954) 274–304.
26. Can H. –A New Approach to the Coustruction of Subsystems of Complex Root Systems, **Inolag. Math.** **17** (2006), 13-29.

27. A. Kerber, Representations of Permutation Groups. I. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 240. Springer-Verlag, Berlin- New York, 1971.
28. E. W. Read, On the Finite Imprimitive Unitary Reflection Groups. J. Algebra **45**(1977), No.2,439-452.

## ÖZGEÇMİŞ

### KİŞİSEL BİLGİLER

Adı, Soyadı : Gül ARSLANDOĞAN  
Uyruğu: Türkiye (TC)  
Doğum Tarihi ve Yeri: Yozgat/Çandır  
Medeni Durumu: Evli  
Tel: +90 553 479 25 55  
Email: gull\_selcuk@hotmail.com  
Yazışma Adresi: Babayğmur Kasabası No:55  
Sarıkaya/YOZGAT

### EĞİTİM

Derece	Kurum	Mezuniyet Tarihi
Formasyon Sertifikası	EÜ Eğitim Bilimleri Fakültesi	2012
Lisans	ZKÜ Fen-Ed. F. Matematik	2010
Lise	Şehit Yıldırım Yılmaz Ç.P.L., Çandır	2005

### YABANCI DİL

İngilizce