

**Fiber Projektif Düzlemler Üzerine**

**Emine Şahin**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı**

**Ağustos 2013**

**On the Fibered Projective Planes**

**Emine Şahin**

**MASTER OF SCIENCE THESIS**  
**Department of Mathematics and Computer Sciences**  
**August 2013**

# **Fiber Projektif Düzlemler Üzerine**

**Emine Şahin**

**Eskişehir Osmangazi Üniversitesi**

**Fen Bilimleri Enstitüsü**

**Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca**

**Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı**

**Geometri Bilim Dalında**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Olarak Hazırlanmıştır**

**Danışman: Doç. Dr. Ayşe Bayar**

**Ağustos 2013**

# ONAY

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı yüksek lisans öğrencisi Emine Şahin' in YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak hazırladığı “**Fiber Projektif Düzlemler Üzerine**” başlıklı bu çalışma, jürimizce lisans üstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

**Danışman** : Doç. Dr. Ayşe BAYAR

**İkinci Danışman** : –

## **Yüksek Lisans Tez Savunma Jürisi:**

**Üye** : Prof. Dr. Münevver ÖZCAN

**Üye** : Prof. Dr. Ziya AKÇA

**Üye** : Doç. Dr. Ayşe BAYAR

**Üye** : Doç. Dr. Süheyla EKMEKÇİ

**Üye** : Doç. Dr. Aytaç KURTULUŞ

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun ..... tarih ve ..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Nimetullah BURNAK

Enstitü Müdürü

## ÖZET

Bu çalışmada, fuzzy geometrinin özel bir çeşidi olan fiber geometrilerde fiber projektif düzlemler incelenmiştir. Birinci bölümde klasik grup teori, fuzzy ve projektif geometri ile ilgili temel tanım ve kavramlar verilmiştir. İkinci bölümde, fuzzy vektör uzaylarından elde edilen fuzzy projektif düzlemler üzerinde durulmuştur. Üçüncü bölümde fuzzy geometrilerin özel bir çeşidi olan fiber geometriler ele alınmıştır. Dördüncü bölümde ise farklı üçgensel normların fiber projektif düzlemlerdeki rolü incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Fuzzy Projektif Uzayı, Fuzzy Projektif Düzlemi, Fiber Projektif Düzlemi

## SUMMARY

In this thesis; fibered projektive planes have been examined in fibered geometries. In the first chapter, fundamental definitions and concepts from fuzzy set theory, theory of group and projective geometry are given. In the second chapter, fuzzy projektif geometries from fuzzy vector spaces are handled.

In the third chapter, fibered geometries that are the particular kind of "fuzzy geometries" are studied.

In the last chapter, the role of the triangle norm in the theory of fibered projective planes are investigated.

Keywords: Fuzzy Projektif Space, Fuzzy Projektif Plane, Fiber Projective Plane

# TEŐEKKÖR

Yüksek Lisans çalışmalarında, gerek derslerimde ve gerekse tez çalışmalarında, bana danışmanlık ederek, beni yönlendiren ve her türlü olanağı sağlayan danışmanım

**Doç. Dr. Ayşe Bayar'a**

ve beni her zaman destekleyen,

**sevgili aileme**

sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

# İÇİNDEKİLER

<b>ÖZET</b>	<b>v</b>
<b>SUMMARY</b>	<b>vi</b>
<b>TEŞEKKÜR</b>	<b>vii</b>
<b>BÖLÜM 0. GİRİŞ</b>	<b>1</b>
<b>BÖLÜM 1. BAZI TEMEL KAVRAMLAR</b>	<b>3</b>
1.1 Cebirsel ve Geometrik Yapılar . . . . .	3
1.1.1 Bazı Cebirsel Kavramlar . . . . .	3
<b>BÖLÜM 2. FUZZY VEKTÖR UZAYLARINDAN ELDE EDİLEN FUZZY PROJektif GEOMETRİLER</b>	<b>13</b>
2.0.2 Fuzzy Vektör Doğruları ve Düzlemleri . . . . .	14
2.0.3 Fuzzy Vektör Uzaylar . . . . .	15
2.0.4 Fuzzy Projektif Noktalar ve Doğrular . . . . .	20
2.0.4.1 Fuzzy Projektif Noktalar . . . . .	21
2.0.4.2 Fuzzy Projektif Doğrular . . . . .	21
2.0.5 Fuzzy Projektif Uzaylar . . . . .	22
2.0.5.1 Fuzzy Projektif Uzayda Üzerinde Bulunma Bağıntısı . . . . .	23
2.0.6 Fuzzy Projektif Düzlemler . . . . .	23
<b>BÖLÜM 3. FİBER GEOMETRİLER</b>	<b>26</b>
3.0.7 Fiber Noktalar ve Fiber Doğrular . . . . .	26
3.0.8 Fiber Projektif Düzlemler . . . . .	27
3.0.9 Fiber Projektif Düzlemin Oluşumu . . . . .	33

<b>BÖLÜM 4. FİBER PROJektİF DÜZLEM GEOMETRİ</b>	<b>38</b>
4.0.10 Üçgensel Norm İle İlgili Bazı Yorumlar . . . . .	39
4.0.10.1 $P$ Taban Düzlemlı $FP$ nin Bazı Özellikleri . . . . .	41
4.0.11 Fiber Reidemeister Şartı ( $FRC$ ) . . . . .	44
<b>BÖLÜM 5. Sonuç ve Öneriler</b>	<b>46</b>
<b>KAYNAKLAR DİZİNİ</b>	<b>47</b>

# BÖLÜM 0

## GİRİŞ

Matematikte pek çok teoremin fuzzy karşılığı vardır. Fuzzileştirme temel olarak bir kümenin elemanlarına  $[0, 1]$  aralığında üyelik derecesi verilerek oluşturulur. Fiber geometriler kavramı da fuzzy teoriye katkıda bulunmak amacıyla Leen Kuijken ve Hendrik Van Maldeghem tarafından oluşturulmuştur (Kuijken and Maldeghem, 2002).

Bir geometrinin noktalarını fuzzileştirmenin iki yolu vardır: Birinci yolda noktalarının her birine bir tek üyelik derecesi verilir, ikinci yolda ise noktaların hepsine pek çok üyelik derecesi verilir. Birinci yolla ilgili olarak her fuzzy vektör uzayından bir projektif uzay, her fuzzy projektif uzayından da bir fuzzy grup elde edilebilir. Kuijken L., Maldeghem H. V. ve Kerre, E. tarafından Fuzzy vektör uzaylarından elde edilen Fuzzy Projektif Geometriler'in oluşturulması ve Fuzzy Gruplarından Fuzzy Projektif Geometrilerin elde edilmesi konuları işlendi (Kuijken L., Maldeghem H. V. and Kerre, E.). Bu anlamda fuzzy projektif uzaylarda içerilen geometrik yapılar çok zengin değildir. Temel olarak bir fuzzy projektif uzay taban düzlemindeki verilen flage denktir. İkinci yolla ilişkili olarak Kuijken L., Maldeghem H.V. tarafından fiber geometriler oluşturuldu. Fiber nokta, fiber doğru ve fiber geometrik yapılar tanımlandı (Kuijken L. and Maldeghem H. V.).

Bu çalışmada ikinci yol üzerinde durulmaktadır, o zaman daha zengin geometrik yapılar ortaya çıkmaktadır.

Bu çalışmanın birinci bölümünde Fuzzy küme teori, vektör uzayları ve projektif geometrideki temel tanım ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde fuzzy vektör uzayları ile fuzzy projektif uzaylar arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

Üçüncü bölümde genel incidence geometrilerde fiber nokta, fiber doğru kavramları verilmiş, fiber projektif düzlemler incelenmiş ve klasik teoremin fiber versiyonlarına bakılmıştır. Ayrıca uygulama olarak da bulanık değerler kavramlarına değinilip özellikleri verilmiştir.

Son bölümde minimum operatörden farklı üçgensel normlarla elde edilen fiber projektif

düzlemler ve bu düzlemlerde bazı geometrik özelliklerin fiber versiyonları incelenmiştir (Bayar, Ekmekçi ve Akça, 2008).

# BÖLÜM 1

## BAZI TEMEL KAVRAMLAR

### 1.1 Cebirsel ve Geometrik Yapılar

#### 1.1.1 Bazı Cebirsel Kavramlar

**Tanım 1.1**  $A$  boş olmayan bir küme olsun.  $A \times A$  dan  $A$  ya tanımlı bir

$$\begin{aligned} * : A \times A &\longrightarrow A \\ (x, y) &\longrightarrow (x * y) \end{aligned}$$

fonksiyonuna  $A$  içinde **ikili işlem** denir. Bu tanıma göre ikili işlem iki değişkenli bir fonksiyondur.  $A \times A$  nın herhangi bir  $(a, b)$  elemanının ikili işlem denilen böyle bir fonksiyon altındaki görüntüsü genel olarak  $a + b, ab, a.b, a \circ b, a \oplus b, a \odot b$  ve benzeri biçimde gösterilir (Karakaş, 1998).

**Örnek 1.1** Tamsayıların ve gerçel sayıların toplama, çıkarma ve çarpma işlemleri en çok bilinen ikili işlemlerdir.

**Tanım 1.2**  $G$  boş olmayan bir küme ve  $*$ ,  $G$  de bir ikili işlem olsun.  $(G, *)$  cebirsel yapısı aşağıdaki aksiyomları sağlıyorsa bir **grup** denir (Çallıalp, 2011).

G1)  $G$  kümesi  $*$  işlemine göre kapalıdır.

G2)  $*$  işleminin  $G$  de birleşme özelliği vardır. Yani  $\forall x, y, z \in G$  için  $x * (y * z) = (x * y) * z$  dir.

G3)  $G$  kümesinin  $*$  işlemine göre etkisiz (birim) elemanı vardır. Yani  $\forall x \in G$  için  $x * e = e * x = x$  olacak şekilde tek bir  $e \in G$  vardır.

G4)  $G$  nin her elemanının  $*$  işlemine göre tersi vardır. Yani  $x \in G$  için  $x * x^{-1} = x^{-1} * x = e$  olacak şekilde tek bir  $x^{-1} \in G$  vardır.

Burada  $(G, \cdot)$  veya kısaca  $G$  her zaman bir grubu belirtecektir ve bu grubun etkisiz elemanında  $e$  ile gösterilecektir.

**Örnek 1.2**  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$ , ve  $\mathbb{C}$  kümeleri adi toplama işlemine (+ işlemine) göre birer gruptur.  $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ ,  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , ve  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  kümeleri de adi çarpma işlemine ( $\cdot$  işlemine) göre bir gruptur.  $(\mathbb{N}, +)$  ve  $(\mathbb{Z}, \cdot)$  cebirsel yapıları ise grup değildir.

**Tanım 1.3**  $(G, *)$  bir grup olsun,  $\forall x, y \in G$  için  $x * y = y * x$  özelliği sağlanıyorsa bu gruba **değişmeli grup** veya **abelyan grup** denir (Çallıalp, 2011).

**Örnek 1.3**  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$  ve  $\mathbb{R}$  kümeleri adi toplama işlemine (+ işlemine) göre birer değişmeli gruptur.  $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$  ve  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  kümeleri de adi çarpma işlemine ( $\cdot$  işlemine) göre değişmeli gruptur.

**Not 1.4** Grubun işlemi “+” ise **toplamsal grup**, “ $\cdot$ ” ise **çarpımsal grup** denir (Çallıalp, 2011).

**Tanım 1.5**  $(G, *)$  bir grup olsun,  $G$  sonlu bir küme ise  $(G, *)$  grubuna bir **sonlu grup** denir ve grubun eleman sayısına da **grubun mertebesi** denir (Çallıalp, 2011).

**Tanım 1.6**  $G$  bir grup ve  $G$  nin boş olmayan alt kümesi  $H$  olsun. Eğer  $H$ ,  $G$  deki işleme göre kendi başına bir grup ise  $H$  ye,  $G$  nin **alt grubu** denir ve  $H < G$  ile gösterilir (Çallıalp, 2011).

**Tanım 1.7**  $F$  boş olmayan bir küme ve bu kümenin elemanları arasında  $+ : F \times F \rightarrow F$  ve  $\cdot : F \times F \rightarrow F$  ile göstereceğimiz iki tane ikili işlem tanımlanmış olsun.  $(F, +, \cdot)$  cebirsel yapısı aşağıdaki şartları sağlıyorsa, bu cebirsel yapıya **cisim** adı verilir.

C1) Her  $a, b \in F$  için  $a + b = b + a$  ve  $a \cdot b = b \cdot a$  dır.

C2) Her  $a, b, c \in F$  için  $(a + b) + c = a + (b + c)$  ve  $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$  dır.

C3) Her  $a, b, c \in F$  için  $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$  dır.

C4)  $F$  kümesinde öyle bir 0 elemanı vardır ki, her  $a \in F$  için  $a + 0 = a$  eşitliğini sağlar.

C5)  $F$  kümesinde öyle bir 1 elemanı vardır ki, 0 dan farklı her  $a \in F$  için  $a \cdot 1 = a$  eşitliğini sağlar.

C6) Her  $a \in F$  elemanı için,  $F$  kümesinde öyle bir  $-a$  elemanı vardır ki,  $a + (-a) = 0$  eşitliğini sağlar.

C7) Her  $0 \neq a \in F$  için,  $F$  kümesinde öyle bir  $a^{-1}$  elemanı vardır ki,  $a \cdot a^{-1} = 1$  eşitliğini sağlar.

**Örnek 1.4**  $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$  birer cisimdir fakat  $\mathbb{Z}$  bir cisim değildir.

**Tanım 1.8**  $V$  boş olmayan bir küme ve  $F$  bir cisim olsun.  $+$  :  $V \times V \rightarrow V$  ve  $\cdot$  :  $F \times V \rightarrow V$  iki fonksiyon olmak üzere  $(V, F, +, \cdot)$  cebirsel yapısı aşağıdaki şartları sağlıyorsa,  $V$  kümesine  $F$  cismi üzerinde bir **vektör uzayı**dır denir.

V1) Her  $x, y \in V$  için  $x + y = y + x$  dir.

V2) Her  $x, y, z \in V$  için  $(x + y) + z = x + (y + z)$  dir.

V3) Her  $x \in V$  için  $x + \theta = x$  olacak şekilde  $V$  de tek bir  $\theta$  elemanı vardır.

V4) Her  $x \in V$  elemanı için,  $x + y = \theta$  eşitliğini sağlayan  $V$  de tek bir  $y$  elemanı vardır.

V5) Her  $a, b \in F$  ve her  $x \in V$  için  $a \cdot (b \cdot x) = (a \cdot b) \cdot x$  dir.

V6) Her  $a, b \in F$  ve her  $x \in V$  için  $(a + b) \cdot x = a \cdot x + b \cdot x$  dir.

V7) Her  $a \in F$  ve her  $x, y \in V$  için  $a \cdot (x + y) = a \cdot x + a \cdot y$  dir.

V8) Her  $x \in V$  için  $1 \cdot x = x$  dir.

**Örnek 1.5**  $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$  birer vektör uzayıdır.  $n \in \mathbb{N}^+$  olmak üzere  $\mathbb{R}^n$  bir vektör uzayıdır.

**Tanım 1.9**  $V$  bir vektör uzayı ve  $U$ ,  $V$  nin boş olmayan bir alt kümesi olsun.  $U$  kümesi,  $V$  kümesinde tanımlanan toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre bir vektör uzayı oluşturuyorsa  $U$  ya  $V$  nin bir **alt uzayı** denir.

**Tanım 1.10**  $V$  bir vektör uzayı  $D(V)$  de  $V$  nin alt uzaylarının bir koleksiyonu ve  $\sim$  da bu alt uzaylar arasında bir üzerinde bulunma bağıntısı olsun.  $D(V)$  ve  $D(V)$  deki üzerinde bulunma bağıntısı yardımıyla tanımlanan  $PG(V) = (D(V), \circ)$  geometrik yapısına **projektif uzay** denir.  $U$  ve  $U'$  alt uzayları  $V$  nin altuzayları olsun. Eğer  $U \subseteq U'$  veya  $U' \subseteq U$  şartlarından biri sağlanıyorsa  $U$  ve  $U'$  birbirinin üzerindedir denir ve  $U \circ U'$  ile gösterilir (Kujken, Maldeghem and Kerre, 1999).

**Tanım 1.11**  $V$  bir vektör uzayı ve  $V$  nin bir alt uzayı  $U$  olsun.  $U$  alt uzayının boyutu bir tabanındaki vektör sayısına eşittir ve  $boy(U)$  ile gösterilir.  $U$  alt uzayının **projektif boyutu** da  $U$  nun boyutunun bir eksiğidir ve  $pboy(U) = boy(U) - 1$  ile gösterilir (Kujken, Maldeghem and Kerre, 1999).

Sonlu boyutlu bir projektif uzayda bütün doğrular eşit sayıda nokta içerir ve projektif uzayın mertebesi herhangi bir doğrusu üzerindeki nokta sayısının bir eksiğidir. Eğer  $q$  mertebeli sonlu bir cisim üzerindeki projektif uzaylar üzerinde çalışırsak, bir doğru üzerindeki noktaların sayısı  $q + 1$  e eşittir, böylece projektif uzayın mertebesi  $q$  olacaktır.  $q$  mertebeli bir cisim üzerindeki  $n$ -boyutlu projektif uzay  $PG(n, q)$  ile gösterilir.

**Tanım 1.12**  $S_n = PG(n, q)$   $n$ -boyutlu projektif uzay ve  $n \geq 2$  olsun. O zaman aşağıdaki aksiyomlar geçerlidir (Casse, 2006).

A1)  $S_n$  elemanları noktalar olan bir kümedir.

A2)  $-1 \leq h \leq n$  ve  $\forall h \in \mathbb{Z}$  için  $S_h, S_n$  nin  $h$ -boyutlu alt uzayıdır.

A3)  $S_n$  nin aşikar alt uzayları  $S_n$  ve  $S_{-1}$  dir.  $S_{-1}$  alt uzayı  $S_n$  nin boş alt uzayıdır.

A4)  $S_n$  nin noktaları kendisinin 0 boyutlu alt uzaylarıdır.

A5)  $n$ -boyutlu tek alt uzay  $S_n$  dir.

A6)  $S_h$  ve  $S_k, S_n$  nin iki alt uzayı olsun. O zaman  $S_h \cap S_k$  da  $S_n$  nin alt uzayıdır.

A7)  $S_h$  ve  $S_k, S_n$  nin iki alt uzayı olsun. O zaman  $S_h \cap S_k$  alt uzayının boyutu,

$$pboy(S_h \oplus S_k) + pboy(S_h \cap S_k) = pboy(S_h) + pboy(S_k)$$

şeklinde hesaplanır ( $S_h \oplus S_k$  uzayı  $S_h$  ve  $S_k$  alt uzaylarının gerdiği uzaydır, bu ifade  $\langle S_h, S_k \rangle$  şeklinde de gösterilebilir).

**Tanım 1.13**  $S_n = PG(n, q)$   $n$ -boyutlu bir projektif uzay olsun. O zaman

0 boyutlu  $S_0$  projektif alt uzayına **projektif nokta**,

1 boyutlu  $S_1$  projektif alt uzayına **projektif doğru**,

2 boyutlu  $S_2$  projektif alt uzayına **projektif düzlem**,

3 boyutlu  $S_3$  projektif alt uzayına **projektif uzay** denir (Casse, 2006).

**Tanım 1.14**  $n$ -boyutlu projektif uzayda boyutu  $n - 1$  olan alt uzaylar **hiperdüzlem** olarak adlandırılır (Casse, 2006).

**Örnek 1.6**  $p$  bir projektif nokta ve  $L$ ,  $p$  noktasından geçmeyen bir projektif doğru olsun. Bu durumda  $pboy(p) = 0$ ,  $pboy(L) = 1$  ve  $pboy(p \cap L) = -1$  dir. O zaman

$$\begin{aligned} pboy(L \oplus p) &= pboy(L) + pboy(p) - pboy(p \cap L) \\ &= 1 + 0 - (-1) = 2 \end{aligned}$$

olarak bulunur, yani  $L \oplus p$  bir projektif düzlem belirtir (Casse, 2006).

**Tanım 1.15**  $\mathcal{P}$   $n$ -boyutlu bir projektif uzay olsun.  $\mathcal{P}$  nin aşikar olmayan ( $\emptyset$  ve  $\mathcal{P}$  den farklı alt uzaylar)  $\forall j \leq i \leq m \leq n-1$  için  $U_j \subset U_i$  olacak şekilde içiçe geçmiş farklı alt uzayların  $(U_0, U_1, \dots, U_m)$  ayrık dizisine  $\mathcal{P}$  de bir **flag** denir. Bir flagın rankı onun içerdiği alt uzayların sayısına eşittir.  $\mathcal{P}$  de maksimal bir flag  $n$  uzunluğunda bir flagdır (Kuijken, Maldeghem, Kerre, 1999).

$U_i$  nin boyutu  $i$  olsun.  $\{U_i, U_{i+1}, \dots, U_m\}$  şeklinde bir flag aşikar olmayan farklı alt uzayların ve  $\forall j \leq i < k \leq m \leq n-1$  için  $U_j \subset U_k$  olacak şekilde  $(U_i, U_{i+1}, \dots, U_m)$  ayrık dizisidir, bu flag kısaca  $[i, m]$  flag olarak da gösterilebilir.

**Tanım 1.16** Biri noktalardan diğeri doğrulardan oluşan ayrık  $\mathcal{N}$  ve  $\mathcal{D}$  kümeleri ile  $\mathcal{N} \times \mathcal{D}$  üzerinde bir  $\sim$  bağıntısından meydana gelen  $(\mathcal{N}, \mathcal{D}, \sim)$  üçlüsüne bir **geometrik yapı** denir.  $\mathcal{N}$  nin elemanları  $a, b, c, \dots, x, y, z, \dots$  gibi küçük harflerle,  $\mathcal{D}$  nin elemanları  $A, B, C, \dots, X, Y, Z, \dots$  gibi büyük harflerle gösterilir.

$n_1, n_2, n_3, \dots \in \mathcal{N}$  noktaları için  $n_i \sim D$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots$  olacak şekilde bir  $D \in \mathcal{D}$  varsa, yani bu noktaların hepsi aynı doğru üzerinde ise bunlara **doğrudaş noktalar** denir.

$D_1, D_2, D_3, \dots \in \mathcal{D}$  doğruları için  $n \sim D_i$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots$  olacak şekilde bir  $n \in \mathcal{N}$  varsa, yani bu doğruların hepsi aynı noktadan geçerlerse bunlara **noktadaş doğrular** denir.

$D_1, D_2 \in \mathcal{D}$  ve  $D_1 \neq D_2$  olsun. Eğer  $\mathcal{N} \sim D_1$  ve  $\mathcal{N} \sim D_2$  olacak şekilde hiçbir  $n \in \mathcal{N}$  noktası yoksa  $D_1$  ve  $D_2$  ye **paralel doğrular** denir ve  $D_1 \parallel D_2$  ile gösterilir. Buna karşın  $D_1 \not\parallel D_2$  değilse  $D_1 \nparallel D_2$  ile gösterilir (Kaya, 2005).

**Tanım 1.17 (Projektif Düzlem)**  $\mathcal{N}$  ve  $\mathcal{D}$  elemanları sırası ile noktalar ve doğrular olan ayrık iki küme (yani  $\mathcal{N} \cap \mathcal{D} = \emptyset$  özelliğine sahip iki küme) ve  $\sim$  da  $\mathcal{N} \times \mathcal{D}$  kümesinde tanımlanan bir üzerinde bulunma bağıntısı (yani  $\sim \subset \mathcal{N} \times \mathcal{D}$ ) olmak üzere aşağıda verilen P1, P2 ve P3 aksiyomlarını gerçekleyen  $(\mathcal{N}, \mathcal{D}, \sim)$  sistemine bir **projektif düzlem** denir (Kaya, 2005).

P1: Her  $m, n \in \mathcal{N}$ ,  $m \neq n$  için  $m \sim d$  ve  $n \sim d$  olacak şekilde bir tek  $D \in \mathcal{D}$  doğrusu vardır. Yani farklı iki nokta bir tek doğru belirtir.

P2: Her  $C, D \in \mathcal{D}$ , için  $n \sim C$  ve  $n \sim D$  olacak şekilde en az bir  $n \in \mathcal{N}$  noktası vardır. Yani iki doğrunun en az bir ortak noktası vardır.

P3: Herhangi üçü doğrudan olmayan dört nokta vardır.

**Teorem 1.18** Bir  $\mathbb{P} = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \sim)$  projektif düzleminde farklı iki doğru tek bir noktada kesişir (Kaya, 2005).

**Teorem 1.19** Her sonlu  $\mathbb{P} = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \sim)$  projektif düzlemi için aşağıdaki koşullara uyan bir  $n \geq 2$  pozitif tam sayısı vardır (Kaya, 2005). (Bu tam sayıya ilgili projektif düzlemin **mertebesi** denir.)

(1)  $\mathbb{P}$  nin her doğrusu üzerinde tam olarak  $n + 1$  tane nokta bulunur.

(2)  $\mathbb{P}$  nin her noktası tam olarak  $n + 1$  tane doğru üzerindedir.

(3)  $\mathbb{P}$  deki noktaların toplam sayısı  $n^2 + n + 1$  dir.

(4)  $\mathbb{P}$  deki doğruların tam sayısı  $n^2 + n + 1$  dir.

**Teorem 1.20** Verilen her  $F$  cisimi için nokta ve doğruları bu cismin elemanlarıyla cebirsel olarak belirlenebilen bir projektif düzlem vardır.  $F$  herhangi bir cisim olsun.

$$\mathcal{N} = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1, x_2, x_3 \in F, (x_1, x_2, x_3) \neq (0, 0, 0), (x_1, x_2, x_3) \equiv \lambda(x_1, x_2, x_3),$$

$$\lambda \in F, \lambda \neq 0\}$$

$$\mathcal{D} = \{[a_1, a_2, a_3] : a_1, a_2, a_3 \in F, [a_1, a_2, a_3] \neq [0, 0, 0], [a_1, a_2, a_3] \equiv \lambda[a_1, a_2, a_3],$$

$$\lambda \in F, \lambda \neq 0\}$$

$$(x_1, x_2, x_3) \sim [a_1, a_2, a_3] \Leftrightarrow a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$$

$(\mathcal{N}, \mathcal{D}, \sim)$  sistemi bir projektif düzlemdir.  $F$  cisimi yardımıyla tanımlanan bu projektif düzlemlere **cisim düzlemleri** denir ve genel olarak  $\mathbb{P}_2F$  ile gösterilir. Özel olarak  $F = \mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$  ve  $\mathbb{Q}$  cisimleri için  $\mathbb{P}_2\mathbb{R}$  gerçel projektif düzlem,  $\mathbb{P}_2\mathbb{C}$  kompleks projektif düzlem,  $\mathbb{P}_2\mathbb{Q}$  rasyonel projektif düzlem olarak adlandırılır. Bunlardan özellikle  $\mathbb{P}_2\mathbb{R}$  düzlemi projektif düzlemler teorisinin en önemli ve iyi bilinen örneğidir (Kaya, 2005).

Yukarıdaki teoremden sonlu cisim düzlemlerine ilişkin şu sonuç hemen verilebilir.

**Sonuç 1.21**  $r$  pozitif bir tam sayı  $p$  de bir asal sayı olmak üzere  $p^r$  elemanlı  $GF(p^r)$  cismi var olduğu için, bu cismin elemanlarından homogen koordinatlarla belirtilen düzlemde

$$\frac{(p^r)^3 - 1}{p^r - 1} = (p^r)^2 + p^r + 1$$

nokta vardır. Bu da düzlemin mertebesinin  $p^r$  olduğunu gösterir. Yani her  $r$  pozitif tam sayısı ve her  $p$  asal sayısı için mertebesi  $n = p^r$  olan sonlu bir projektif düzlem vardır. Buna karşın cisimler yardımıyla elde edilen bir çok projektif düzlem vardır. Üstelik cisimler yardımıyla elde edilmemiş olsalar bile bilinen bütün sonlu projektif düzlemlerin mertebeleri  $p^r$  biçiminde yazılabilen pozitif tam sayılardır (Kaya, 2005).

**Örnek 1.7** En küçük projektif düzlemde 7 nokta ve 7 doğru vardır.

$$\mathcal{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

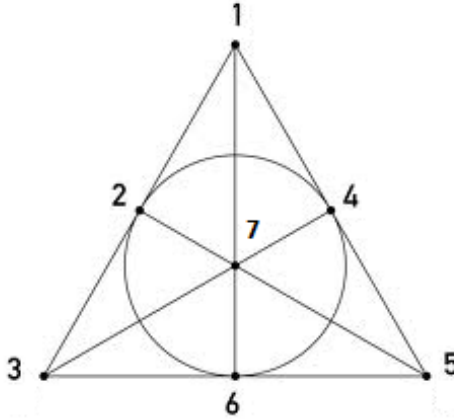
$$\mathcal{D} = \{D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6, D_7\}$$

ve

$$D_1 = \{1, 2, 3\} \quad , \quad D_2 = \{1, 4, 5\} \quad , \quad D_3 = \{1, 6, 7\} \quad , \quad D_4 = \{2, 4, 6\}$$

$$D_5 = \{2, 5, 7\} \quad , \quad D_6 = \{3, 4, 7\} \quad , \quad D_7 = \{3, 5, 6\}$$

olmak üzere  $(\mathcal{N}, \mathcal{D}, \in)$  sistemi bir projektif düzlemdir. Yedi noktalı bu projektif düzleme **Fano Düzlemi** denir (Kaya, 2005).



**Şekil 1.1** Fano Düzlemi

P1) 3 ve 5 farklı iki nokta çiftini ele alalım. 3 ve 5 den geçen bir tek  $D_7$  doğrusu vardır. 3 ve 5 noktalarından geçen başka bir doğru bulmak mümkün değildir. Bu durum diğer farklı nokta çiftleri içinde geçerlidir. O halde bu düzlemde farklı iki noktadan tek bir doğru geçer.

P2)  $D_1$  ve  $D_2$  doğrularını ele alalım. Bu iki doğrunun tek bir ortak noktası vardır. Bu da 1 dir. Diğer doğru çiftlerinin de benzer şekilde tek bir ortak noktası vardır. O halde bu düzlemde farklı iki doğrunun bir tek ortak noktası vardır.

P3) 1, 2, 3 ve 7 noktaları herhangi üçü doğrudan olmayan dört noktadır.

**Tanım 1.22**  $\lambda$  fuzzy kümesi,  $X$  kümesi üzerinde tanımlı dönüşümdür.

$$\begin{aligned} \lambda: X &\rightarrow [0, 1] \\ x &\rightarrow \lambda(x) \end{aligned}$$

$\lambda(x)$  sayısı,  $\lambda$  daki  $x$  noktasının *üyelik derecesi* şeklinde adlandırılır.  $X$  kümesi üzerindeki  $\lambda$  ve  $\mu$  gibi iki fuzzy kümelerinin *arakesiti*

$$\begin{aligned} \lambda \wedge \mu: X &\rightarrow [0, 1] \\ x &\rightarrow \lambda(x) \wedge \mu(x) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan  $\lambda \wedge \mu$  fuzzy kümesidir. Burada,  $\wedge$  minimum operatörünü ifade eder.

**Tanım 1.23** Bir  $X$  kümesi üzerinde  $\mu$  ve  $\lambda$  fuzzy kümelerini düşünelim. Bu iki fuzzy kümenin  $\lambda \times \mu$  kartezyen çarpımı aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\begin{aligned} \lambda \times \mu: X \times X &\rightarrow [0, 1] \\ (x, y) &\rightarrow \lambda(x) \wedge \mu(y) \end{aligned}$$

**Tanım 1.24**  $X$  kümesi için  $x$  in bütün fuzzy alt kümelerinin kümesini  $\mathcal{F}(x)$  ile gösterelim.  $X_1$ ,  $X_2$  ve  $Y$  herhangi kümeler olsun.  $f$ ,  $X_1 \times X_2$  den  $Y$  ye dönüşüm olsun. Genişletme prensibi ifade eder ki bu dönüşüm aşağıdakilerden birine genişletilebilir.

$$\begin{aligned} f: \mathcal{F}(X_1) \times \mathcal{F}(X_2) &\rightarrow \mathcal{F}(Y) \\ (\lambda_1, \lambda_2) &\rightarrow f(\lambda_1, \lambda_2) \end{aligned}$$

$\lambda_1 \in \mathcal{F}(X_1)$  ve  $\lambda_2 \in \mathcal{F}(X_2)$  olmak üzere  $Y$  üzerinde  $f(\lambda_1, \lambda_2)$  görüntü kümesi

$$y \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sup_{f(x_1, x_2)=y} \{ (\lambda_1 x \lambda_2)_{(x_1, x_2)} \mid x_i \in X_i, i = 1, 2 \}, \\ 0, \end{array} \quad \begin{array}{l} \exists \bar{x} \in X_1 \times X_2 : f(\bar{x}) = y \\ \text{diğer durumlarda} \end{array} \right\}$$

şeklinde bir fuzzy kümesi tanımlar.

**Örnek 1.8**  $X$  kümesi,  $\mathbb{R}$  reel sayılar ve  $\mu$  fuzzy kümesi 1 den çok büyük sayıların fuzzy kümesi olsun. O zaman  $\mu$  fuzzy kümesinin temsil ettiği değerleri

$$\mu(0) = 0; \mu(1) = 0; \mu(5) = 0.01; \mu(10) = 0.2; \mu(100) = 0.95; \mu(500) = 1$$

şeklinde alabiliriz. Buradan anlaşılıyor ki normalde 1 den çok büyük sayılar öznel bir ifade olmasına rağmen  $\mu$  fuzzy kümesini kullanarak kesin bir ifade olarak verilebilir (Zadeh).

**Tanım 1.25**  $\mu$  bir  $X$  kümesinin bir fuzzy kümesi olsun. O zaman  $t \in [0, 1]$  için

$$\mu_t = \{x \in X : \mu(x) \geq t\}$$

kümesine  $\mu$  fuzzy kümesinin **seviye alt kümesi** denir.

**Tanım 1.26**  $\mathcal{P}$   $n$ -boyutlu bir projektif uzay ve  $\mathcal{P}$  üzerinde bir fuzzy kümesi  $\lambda$  olsun.  $\mathcal{P}$  nin her  $p, q, r$  doğruduş noktaları için

$$\lambda(p) \geq \lambda(q) \wedge \lambda(r)$$

şartı sağlanıyorsa  $\lambda$  ya  $\mathcal{P}$  üzerinde  **$n$ -boyutlu fuzzy projektif uzay** denir ve  $[\lambda, \mathcal{P}]$  ile gösterilir.  $\mathcal{P}$  projektif uzayına  $[\lambda, \mathcal{P}]$  nin **taban projektif uzayı** denir.

**Tanım 1.27**  $\mathcal{P}$  de uzunluğu  $n$  olan  $(q, U_1, U_2, \dots, U_{n-1})$  maksimal flagı ve  $[0, 1]$  aralığındaki  $a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$  reel sayıları için  $[\lambda, \mathcal{P}]$   $n$ -boyutlu fuzzy projektif uzayı

$$\begin{aligned} \lambda : \mathcal{P} &\longrightarrow [0, 1] \\ p &\longrightarrow a_0 \quad , \quad p = q \quad \text{ise} \\ p &\longrightarrow a_1 \quad , \quad p \in U_1 \setminus \{q\} \quad \text{için} \\ p &\longrightarrow a_2 \quad , \quad p \in U_2 \setminus U_1 \quad \text{için} \\ &\dots \\ p &\longrightarrow a_{n-1} \quad , \quad p \in U_{n-1} \setminus U_{n-2} \quad \text{için} \\ p &\longrightarrow a_n \quad , \quad p \in \mathcal{P} \setminus U_{n-1} \quad \text{için} \end{aligned}$$

şeklindedir.

**Tanım 1.28** Bir  $T : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$  ikili işlemi, aşağıdaki koşulları sağlıyorsa  $T$  işlemine bir **üçgensel norm** veya kısaca  **$t$ -norm** denir (Peter, Radko, Endre, 2000).

$$(T1) \text{ Her } x, y \in [0, 1] \text{ için } T(x, y) = T(y, x)$$

$$(T2) \text{ Her } x, y, z \in [0, 1] \text{ için } T(x, T(y, z)) = T(T(x, y), z)$$

$$(T3) y \leq z \text{ olmak üzere } T(x, y) \leq T(x, z)$$

$$(T4) \text{ Her } x \in [0, 1] \text{ için } T(x, 1) = x$$

Dört temel  $t$ -norm vardır. Bunlar **minimum**, **çarpım**, **Lukasiewicz** ve **drastic  $t$ -norm**lardır ve sırasıyla  $T_M$ ,  $T_P$ ,  $T_L$  ve  $T_D$  şeklinde gösterilirler (Peter, Radko, Endre, 2000).

**Tanım 1.29**  $T_M : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ ,  $T_M(x, y) = \min\{x, y\}$  şeklinde tanımlanan  $T_M$  işlemi bir  $t$ -normdur. Buna **minimum  $t$ -norm** denir.

**Tanım 1.30**  $T_P : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ ,  $T_P (x, y) = x \cdot y$  şeklinde tanımlanan  $T_P$  işlemi bir t-normdur. Buna **çarpım t-norm** denir.

**Tanım 1.31**  $T_L : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ ,  $T_L (x, y) = \max \{x + y - 1, 0\}$  şeklinde tanımlanan  $T_L$  işlemi bir t-normdur. Buna **Lukasiewicz t-norm** denir.

**Tanım 1.32**  $T_D : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$

$$T_D (x, y) = \begin{cases} 0 & , \text{ eğer } (x, y) \in [0, 1) \times [0, 1) \\ \min \{x, y\} & , \text{ diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan  $T_D$  işlemi bir t-normdur. Buna **drastic çarpım t-norm** denir.

## BÖLÜM 2

### FUZZY VEKTÖR UZAYLARINDAN ELDE EDİLEN FUZZY PROJEKTİF GEOMETRİLER

Fuzzy vektör uzaylardan elde edilen fuzzy projektif uzaylar Kuijken ve Maldeghem tarafından verildi (L. Kuijken, H. Van Maldeghem, E. Kerre, fuzzy projective geometries from fuzzy vector spaces, Proceedings of IPMU'98, 1331-1338). Bu bölümdeki temel kavram ve teoremler bu çalışmadan derlenmiştir.

Öncelikle Fuzzy vektör uzayları üzerinde bir fuzzy geometri oluşturulmaktadır. Fuzzy vektör doğrular, fuzzy vektör düzlemler ve  $n$ -boyutlu fuzzy vektör uzayları incelendikten sonra bir fuzzy vektör uzayından elde edilen fuzzy projektif düzlemin fuzzy projektif noktaları, fuzzy projektif doğruları ve bunların özellikleri verilmektedir.

Bu çalışmada, verilen bir  $F$  cismi üzerindeki vektör uzayı  $V$ ,  $V$  nin başlangıç vektörü de  $\bar{o}$  ile gösterilmektedir. Minimum operatör  $\wedge$  ve maksimum operatör  $\vee$  ile gösterilmektedir.  $V$  nin klasik alt uzayları  $L$ ,  $\alpha$  ve  $U$  ile gösterilmektedir.

**Tanım 2.1**  $\lambda : V \rightarrow [0, 1]$ ,  $V$  üzerinde bir fuzzy kümesi olsun.  $\lambda$  nın  $V$  üzerinde bir fuzzy vektör uzayı olması için gerek ve yeter şart  $\forall \bar{u}, \bar{v} \in V$  ve  $\forall a, b \in F$  için  $\lambda(a.\bar{u} + b.\bar{v}) \geq \lambda(\bar{u}) \wedge \lambda(\bar{v})$  olmasıdır.

**Yardımcı Teorem 2.2**  $F$  cismi üzerinde  $V$  bir vektör uzayı,  $\bar{u}, \bar{v} \in V$  ve  $\alpha \in F - \{0\}$  olsun. Eğer

$\lambda : V \rightarrow [0, 1]$  fuzzy vektör uzayı ise aşağıdaki özellikler geçerlidir:

(i)  $\lambda(\alpha.\bar{u}) = \lambda(\bar{u})$ ;

(ii)  $\lambda(\bar{o}) = \sup_{\bar{u} \in V} \lambda(\bar{u})$

(iii)  $\lambda(\bar{u}) \neq \lambda(\bar{v})$  ise  $\lambda(\bar{u} + \bar{v}) = \lambda(\bar{u}) \wedge \lambda(\bar{v})$ .

**Tanım 2.3**  $V$  nin bir  $\lambda$  fuzzy alt uzayının boyutu taban alt uzayının boyutu olarak tanımlanır ve  $d(\lambda)$  ile gösterilir (P. Lubczonok).

Örneğin  $V$  vektör uzayının 1 boyutlu alt uzayı  $L$  olsun. Bir  $\lambda : L \rightarrow [0, 1]$  fuzzy alt uzayının boyutu  $d(\lambda) = 1$  dir.

**Tanım 2.4**  $U, V$  nin  $i$ -boyutlu bir alt uzayı olsun ve  $(\lambda, U)$  da bir fuzzy vektör uzayı ise  $\lambda$  ya  $U$  üzerinde bir **fuzzy  $i$ -boyutlu vektör uzayı** denir.  $i = 1$  iken  $U$  bir vektör doğrudur ve  $(\lambda, U)$ ,  $U$  üzerinde bir **fuzzy vektör doğru** olarak adlandırılır.  $i = 2$  ise  $U$  bir düzlemdir ve  $(\lambda, U)$ ,  $U$  üzerinde bir **fuzzy vektör düzlemi** olarak adlandırılır.  $i = n - 1$  ise  $(\lambda, U)$   $U$  üzerinde bir **fuzzy vektör hiperdüzlem** olarak adlandırılır.

### 2.0.2 Fuzzy Vektör Doğruları ve Düzlemleri

$V$ , bir  $F$  cismi üzerinde  $n$ -boyutlu vektör uzayı olsun.  $n \geq 2$  olmak üzere  $L, V$  nin bir vektör doğrusu olsun. Böylece  $L$ , sıfırdan farklı  $\bar{u}$  vektörü ile tanımlansın. Bazen de bu  $L$  doğrusu  $\overline{ou}$  ile gösterilir.  $L$  üzerindeki bir  $\lambda$  fuzzy kümesi verilsin.

**Teorem 2.5**  $\lambda : L \rightarrow [0, 1]$ ,  $L$  üzerinde bir fuzzy vektör doğrusu ise

$$\forall \bar{u}, \bar{v} \in L - \{0\}, \lambda(\bar{u}) = \lambda(\bar{v}) \text{ ve } \forall \bar{u} \in L, \lambda(\bar{0}) \geq \lambda(\bar{u})$$

dür.

$n \geq 3$  olmak üzere  $n$ -boyutlu  $V$  vektör uzayının bir vektör düzlemi  $\alpha$  olsun. Bu takdirde  $\alpha$ ,  $\bar{u}$  ve  $\bar{v}$  gibi iki lineer bağımsız vektör tarafından tek türlü olarak bellidir. Bazen de bu  $\alpha$  düzlemi  $\overline{ou\bar{v}}$  ile gösterilir.

**Teorem 2.6**  $\lambda : \alpha \rightarrow [0, 1]$ ,  $\alpha$  üzerinde bir fuzzy vektör düzlemi ise  $\alpha_0 \geq \alpha_1 \geq \alpha_2 \in [0, 1]$  olmak üzere

$$\begin{aligned} \lambda : \alpha &\rightarrow [0, 1] \\ \bar{0} &\rightarrow \alpha_0 \\ \bar{u} &\rightarrow \alpha_1, \quad \bar{u} \in L \setminus \{0\} \\ \bar{u} &\rightarrow \alpha_2, \quad \bar{u} \in \alpha \setminus L \end{aligned}$$

olacak şekilde,  $\alpha$  nın bir  $L$  vektör doğrusu vardır.

**İspat.**  $\lambda(\bar{0}) = \alpha_0$  olsun. Yardımcı teorem 2.2-(ii) den  $\forall \bar{u} \in V$  için  $\alpha_0 = \lambda(\bar{0}) \geq \lambda(\bar{u})$  olduğu açıktır. Şimdi  $\alpha$  düzleminde  $\bar{u}$  ve  $\bar{v}$  iki taban vektörlerini seçelim. O halde  $a, b \in F$ ,  $\bar{w} \in \alpha$  vektörü,  $\bar{w} = a.\bar{u} + b.\bar{v}$  şeklinde bir lineer kombinasyon olarak yazılabilir. Fuzzy vektör uzayı tanımından

$$\lambda(\bar{w}) = \lambda(a.\bar{u} + b.\bar{v}) \geq \lambda(\bar{u}) \wedge \lambda(\bar{v})$$

dır.  $\bar{u}' = a.\bar{u}$  ve  $\bar{v}' = b.\bar{v}$  denilirse, bu takdirde

$$\lambda(\bar{w}) = \lambda(a.\bar{u} + b.\bar{v}) = \lambda(\bar{w}) = \lambda(\bar{u}' + \bar{v}')$$

olur. Burada iki durum söz konusudur:

**İspat. 1.DURUM:**  $\lambda(\bar{u}') \neq \lambda(\bar{v}')$ .

$a, b \in F - \{0\}$  için yardımcı teorem 2.2-(iii)den

$$\lambda(\bar{w}) = \lambda(\bar{u}') \wedge \lambda(\bar{v}') = \lambda(a.\bar{u}) \wedge \lambda(b.\bar{v}) = \lambda(\bar{u}) \wedge \lambda(\bar{v})$$

elde edilir. Bu ifadenin sonucu ya  $\lambda(\bar{u})$  ya da  $\lambda(\bar{v})$  dir. Bu da  $a, b \neq 0$  olmak üzere  $\bar{w} = a.\bar{u} + b.\bar{v}$  şeklinde yazılan  $\forall \bar{w} \in V$  için,  $\bar{w}, \bar{u}$  ve  $\bar{v}$  nin üyelik derecesi en küçük olan ile aynı üyelik derecesine sahip olacağı anlamına gelir. Eğer  $\lambda(\bar{u}) > \lambda(\bar{v})$  ise  $\bar{o}\bar{u}$  vektör doğrusu üzerindeki vektörler dışında  $\alpha$  üzerindeki tüm vektörler  $\lambda(\bar{v})$  üyelik derecesine sahip olacaktır.  $\bar{w}, \bar{o}\bar{u}$  üzerinde ise  $a \in F \setminus \{0\}$  için  $\lambda(\bar{w}) = \lambda(a.\bar{u}) = \lambda(\bar{u}) = \alpha_1$  dir. Bu durumda  $L = \bar{o}\bar{u}$  dir.

$\lambda(\bar{v}) > \lambda(\bar{u})$  ise benzer şekilde  $L = \bar{o}\bar{v}$  alabilinir.

**2.DURUM:**  $\lambda(\bar{u}') = \lambda(\bar{v}') = \lambda(\bar{u}) = \lambda(\bar{v})$  olsun.

a) Eğer  $\lambda(\bar{w}) > \lambda(\bar{u}') = \lambda(\bar{v}')$  olacak şekilde  $\alpha$  da  $\bar{w} \neq \bar{o}$  vektörü yoksa  $\alpha$  üzerindeki tüm vektörler aynı  $\lambda$ -üyelik derecelerine sahip olacaktır ve her vektör doğru  $L$  vektör doğrusu olarak düşünülebilir ve  $\alpha_1 = \alpha_2 = \lambda(\bar{u}')$  dür.  $\square$

b)  $\bar{w} \neq \bar{o}$ ,  $\lambda(\bar{w}) > \lambda(\bar{u}) = \lambda(\bar{v})$  olsun. Bu durumda  $\bar{w}$  ne  $\bar{o}\bar{u}$  ne de  $\bar{o}\bar{v}$  üzerindedir.  $\alpha$  yı geren vektör kümesi olarak  $\{\bar{u}, \bar{w}\}$  kümesi alınabilir. Bu durumda  $L, \bar{o}\bar{w}$  dir. Dolayısıyla durum 1 söz konusudur.  $\square$

### 2.0.3 Fuzzy Vektör Uzaylar

**Yardımcı Teorem 2.7**  $F$  cismi üzerinde  $n$ -boyutlu  $V$  vektör uzayı,  $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n\}$  kümesi  $V$  nin bir tabanı ve  $V$  üzerinde bir fuzzy vektör uzayı  $\lambda$  olsun. Eğer

$$\forall i, j, i \neq j, \lambda(\bar{x}_i) \neq \lambda(\bar{x}_j) \text{ ve } \bar{x} \neq \bar{0} \text{ için } \bar{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i.\bar{x}_i \text{ ise } \lambda(\bar{x}) = \min_{i=1}^n \lambda(\bar{x}_i)$$

dir.

**İspat.**  $n$  üzerinde tümevarım ile ispatı verilebilir.

$n = 1$  için yardımcı teorem 2.2-(i) ye indirgenir.

$n = k$  için ifade doğru olsun. Şimdi sıfırdan farklı bir vektör için

$$a_{k+1} \neq 0 \text{ için } \bar{x} = \sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i \cdot \bar{x}_i$$

alınırsa;

$$\lambda(\bar{x}) = \lambda \left( \sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i \bar{x}_i \right) = \lambda(a_{k+1} \cdot \bar{x}_{k+1} + \sum_{i=1}^k \alpha_i \bar{x}_i) = \lambda(a_{k+1} \cdot \bar{x}_{k+1} + \bar{x}') \quad (1)$$

bu toplamda

$$\bar{x}' = \sum_{i=1}^k \alpha_i \bar{x}_i$$

alırsak

(a)  $\forall i < k + 1$  için yardımcı teorem 2.2-(iii) den

$$\lambda(a_{k+1} \cdot \bar{x}_{k+1}) = \lambda(\bar{x}_{k+1}) \neq \lambda(\bar{x}_i)$$

ve

(b) Tümevarım hipotezinden

$$\lambda(\bar{x}') = \lambda \left( \sum_{i=1}^k \alpha_i \bar{x}_i \right) = \min_{i=1}^k \lambda(\bar{x}_i)$$

elde edilir.  $\forall i < k, \lambda(\bar{x}_{k+1}) \neq \lambda(\bar{x}_i)$  dir. Dolayısıyla teorem 2.2(iii) den (1) ifadesi

$$\lambda(\bar{x}') \wedge \lambda(a_{k+1} \cdot \bar{x}_{k+1}) \quad (2)$$

□

olur. (a) ve (b) nin varlığı altında (2) ifadesi

$$\min_{i=1}^k \lambda(\bar{x}_i) \wedge \lambda(\bar{x}_{k+1}) = \min_{i=1}^{k+1} \lambda(\bar{x}_i)$$

olur.

**Teorem 2.8**  $\lambda : V \rightarrow [0, 1]$ ,  $V$  de  $n$  boyutlu bir fuzzy vektör uzayı olsun. O zaman

$\alpha_0 \geq \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_{n-1} \geq \alpha_n$ ,  $a_i \in [0, 1]$  olmak üzere;

$$\begin{aligned} \lambda : V &\rightarrow [0, 1] \\ \bar{u} &\rightarrow \alpha_0, & \bar{u} = \bar{0} = U_0 \\ \bar{u} &\rightarrow \alpha_1, & \bar{u} \in U_1 - U_0 \\ \bar{u} &\rightarrow \alpha_2, & \bar{u} \in U_2 - U_1 \\ \bar{u} &\rightarrow \alpha_3, & \bar{u} \in U_3 - U_2 \\ &\vdots \\ \bar{u} &\rightarrow \alpha_{n-1}, & \bar{u} \in U_{n-1} - U_{n-2} \\ \bar{u} &\rightarrow \alpha_n, & \bar{u} \in V - U_{n-1} \end{aligned}$$

ve  $d(U_i) = i$  olacak şekilde (bir tek olmak zorunda olmayan) uzunluğu  $n$  olan bir  $(U_0, U_1, U_2, \dots, U_{n-1}, V)$  maximal flag vardır.

**İspat.**  $\lambda(\bar{0}) = a_0$  ise yardımcı teorem 2.2-(iii) den  $\forall x \in V$  için  $a_0 \geq \lambda(\bar{x})$  dir.  $V$  nin mümkün tüm tabanları içinden, üyelik dereceleri farklı en çok sayıda vektörlerden oluşan tabanlar seçilsin ve bu tabanların kümesine  $M$  denilsin.  $M$  deki tüm tabanlar içinde  $i \neq j$ ,  $\lambda(\bar{x}_i) \neq \lambda(\bar{x}_j)$  özelliğindeki bir  $B = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n\}$  tabanı seçilsin ve bu tabanın vektörleri aşağıdaki özelliği sağlasın;

$$\lambda(\bar{x}_1) > \lambda(\bar{x}_2) > \dots > \lambda(\bar{x}_n) \quad (1)$$

şimdi keyfi  $\bar{x} \in V$  alınırsa;

- $\lambda(\bar{x}) = \lambda(\bar{o}) \Rightarrow \bar{x} = \bar{o}$
- $\lambda(\bar{x}) = \lambda(\bar{x}_1) \Rightarrow \bar{x} \in \overline{\bar{x}_1} \setminus \bar{o}$  dir. Bu yardımcı teorem 2.2(ii) ve (1) den söylenebilir.
- $\vdots$
- $\lambda(\bar{x}) = \lambda(\bar{x}_i) \Rightarrow \bar{x} \in \overline{\bar{x}_1 \dots \bar{x}_i} \setminus \overline{\bar{x}_1 \dots \bar{x}_{i-1}}$  dir.

Eğer  $U_0 = \bar{o}$ ,  $\forall_i \neq o$ ,  $U_i = \overline{\bar{x}_1 \dots \bar{x}_i}$  ve  $a_i = \lambda(\bar{x}_i)$  ise teorem ispatlanmış olur.

Şimdi  $M$  de tüm  $\lambda(\bar{x}_i)$  farklı olacak şekilde bir taban bulunmadığını varsayalım. Bu durumda taban vektör uzayın boyutu üzerinden tümevarımla ispat verilirse, teorem 2.2-(ii) ve teorem 2.6 den,  $n = 1$  (taban  $\{\bar{x}_1\}$ ) ve  $n = 2$  (taban  $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2\}$ ) için bu durumu ispatlar.

$(\bar{0}, \bar{0x}_1)$  ve  $(\bar{0}, \bar{0x}_1, \bar{0x}_1x_2)$  maximal flaglar,  $(\alpha_0, \alpha_1)$  ve  $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$ ,  $(\lambda(\bar{0}), \lambda(\bar{x}_1))$  ve  $(\lambda(\bar{0}), \lambda(\bar{x}_1), \lambda(x_2))$  tarafından verilen diziler olur. Buradan da görülür ki taban maksimal flag  $i$  ve  $\alpha_i$  lerin dizisini tanımlar.

Şimdi  $n = 1$  ve  $n = 2$  deki durumun  $k$  dan  $n - 1$  e kadar olan tüm boyutlar için sağlanacağı kabul edilip,  $n$  boyutlu durum için geçerli olacağı gösterilecektir. Yani  $B = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n\}$  tabanı için  $U_i = \overline{0x_1x_2\dots x_i}$  ve  $\alpha_0 \geq \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_{n-1} \geq \alpha_n$ ,  $\alpha_i = \lambda(x_i)$  olduğu araştırılacak ve  $U_0 = \bar{0}$ ,  $\lambda(\bar{0}) = \alpha_0$  olması ile ispat tamamlanacaktır.  $M$  nin her bir tabanı ile belli bir sayı arasında ilişki kurulacaktır. Bunu yapmak için

$$\lambda(x_n) \leq \lambda(\bar{x}_{n-1}) \leq \dots \leq \lambda(\bar{x}_1) \quad (2)$$

olacak şekilde her bir tabandaki  $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n\}$  taban vektörleri düzenlenir.  $M$  nin seçiminden dolayı bu tabandaki vektörlerin herbiri için eşitliklerin sayısı aynı olacaktır.

Şimdi herbir tabanın sayısının nasıl tanımlanacağını açıklayalım. İlk olarak taban vektörleri (2) deki şekilde monoton artan bir dizideki gibi düzenlenir. Her bir eşitsizlik için "/" koyarak başlanır. Seçilen tüm tabanlar için "/" sayısı aynı olacaktır. İlk "/" dan önce, ilk eşitsizlikten önce ortaya çıkan eşitliklerin sayısı yazılır, iki ardışık "/" arasına ise iki ilişkili eşitsizlik arasında ortaya çıkan eşitliklerin sayısı yazılır. Son olarak ise son "/" dan sonra, son eşitsizlikten sonra ortaya çıkan, eşitliklerin sayısı yazılır.

$n = 8$  için örnek verilirse;

$$\lambda(\bar{x}_8) = \lambda(\bar{x}_7) = \lambda(\bar{x}_6) < \lambda(\bar{x}_5) < \lambda(\bar{x}_4) = \lambda(\bar{x}_3) < \lambda(\bar{x}_2) = \lambda(\bar{x}_1) < \lambda(\bar{0})$$

olacak şekilde bir  $\{x_1, x_2, \dots, x_8\}$  tabanı 2/0/1/1/0 dizisini verir.

$M$  nin her bir tabanı için bir dizi elde edildikten sonra, bu diziler sırasıyla düzenlenip ve bu düzenleme ile ilişkili olarak en küçük  $B$  tabanı olduğu gösterilecektir.

Varsayalım ki  $B$  nin dizisi sıfır ile başlasın.  $(\lambda(\bar{x}_n) < \lambda(\bar{x}_{n-1}))$  keyfi  $\bar{x} = \sum_{i:1}^n b_i \cdot \bar{x}_i$  olacak şekilde  $V \setminus \overline{0x_1x_2\dots x_{n-1}}$  alınsın. Dolayısıyla  $b_n$  sıfırdan farklı olmak zorundadır. Böylece

$$\lambda(\bar{x}) = \lambda \left( b_n \cdot \bar{x}_n + \sum_{i:1}^{n-1} \right)$$

dır. Tümevarım hipotezinden dolayı

$$i < n, \lambda \left( \sum_{i:1}^{n-1} b_i \cdot \bar{x}_i \right) = \lambda(\bar{x}_i)$$

dir.  $\forall i < n$ ,  $\lambda(\bar{x}_i) \geq \lambda(\bar{x}_n)$  olduğundan yardımcı teorem 2.2-(iii) den  $\lambda(\bar{x}) = \lambda(\bar{x}_n)$  dir.  $\overline{0x_1 \dots x_n}$  vektörü,  $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n-1}\}$  tabanı tarafından tanımlanan  $(n-1)$  boyutta, tümevarım hipotezinden elde edilen maksimal flag ile toplanırsa  $n+1$  uzunluklu bir maksimal flag elde edilir ve  $\lambda(\bar{x}_n) = a_n$  olarak teorem ispatlanır. Eğer dizi sıfırdan farklı bir  $k$  sayısı ile başlarsa, bunun anlamı

$$\lambda(\bar{x}_n) = \lambda(\bar{x}_{n-1}) = \dots = \lambda(\bar{x}_{n-k})$$

dir.

$V \setminus \overline{0x_1 x_2 \dots x_{n-1}}$  de  $\bar{x}$  keyfi bir vektör alınır ise iki durum olur.  $\bar{x} = b_n \cdot x_n$ ,  $b_n \neq 0$  ise  $\lambda(\bar{x}) = \lambda(\bar{x}_n)$  olduğu açıktır. Eğer bir  $i \neq n$ , en azından bir  $b_i \neq 0$  ve  $b_n \neq 0$  ise iki durum vardır;

1.DURUM:  $\forall i \in \{n-k, \dots, n-1\}$  için  $b_i = 0$  ise  $\bar{x} \in \overline{0x_1 x_2 \dots x_{n-k-1} x_n}$  dir. Böylece

$$\lambda(\bar{x}) = \lambda \left( b_n \cdot \bar{x}_n + \sum_{i:1}^{n-k-1} b_i \cdot \bar{x}_i \right)$$

dir. Tümevarım hipotezinden belli bir

$$j < n-k \text{ için, } \lambda \left( \sum_{i:1}^{n-k-1} b_i \cdot \bar{x}_i \right) = \lambda(\bar{x}_j) < \lambda(\bar{x}_n)$$

dir, buradan yardımcı teorem 2.2 uygulanabilir anlamı çıkar ve  $\lambda(\bar{x}) = \lambda(\bar{x}_n)$  bulunur.

2.DURUM:  $b_i \neq 0$  olacak şekilde en az bir  $i \in \{n-k, n-k-1, \dots, n-1\}$  tamsayısının bulunduğunu varsayalım. Tümevarım hipotezinden  $\overline{0x_1 \dots x_{n-1}}$  sırasıyla düzenlenmiş en küçük taban  $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n-1}\}$  dir.

$$\lambda \left( \sum_{i:1}^{n-1} b_i \cdot \bar{x}_i \right) = \lambda(\bar{x}_{n-1}) = \lambda(\bar{x}_n)$$

dir. Burada yardımcı teorem 2.2-(iii) kullanılamaz fakat tanım 2.1 den  $\lambda(\bar{x}) \geq \lambda(\bar{x}_n)$  sonucu elde edilir. Varsayalım ki  $V \setminus \overline{0x_1 \dots x_{n-1}}$  de  $\lambda(\bar{v}) > \lambda(\bar{x}_n)$  olacak şekilde bir  $\bar{v} \in V$  olsun. Bu takdirde bazı  $i \leq n-k-1$  için,  $M$  nin tanımından  $\lambda(\bar{v}) \geq \lambda(\bar{x}_i)$  dir. Başka bir  $B'$  tabanından elde edilen  $\bar{v}$  vektörü ile  $\bar{x}_n$  vektörü değiştirilsin. Ancak  $B'$  tabanı sırasıyla düzenlenen  $B$  den daha küçük bir taban olacaktır. Çünkü  $B$

$$n_1/n_2/\dots/n_i/\dots/n_e$$

dizisi ile karakterize edilseydi,  $B'$

$$n_1 - 1/n_2/\dots/n_i + 1/\dots/n_e$$

ile karakterize edilecektir. Bu ise  $B$  nin seçimi ile çelişir. Dolayısıyla  $\forall v \in V \setminus \overline{0x_1 \dots x_{n-1}}$  için  $\lambda(\bar{v}) = \lambda(\bar{x}_n)$  dir. Bu iki durumda da  $\forall \bar{x} \in V \setminus \overline{0x_1 \dots x_{n-1}}$  için  $\lambda(\bar{x}) = \lambda(\bar{x}_n)$  bulundu. Dolayısıyla  $n$  uzunluklu maksimal flag  $\overline{0x_1 x_2 \dots x_{n-1} x_n} = V$  eklenerek ve  $a_n = \lambda(\bar{x}_n)$  olarak teorem ispatlanır.  $\square$

**Sonuç 2.9**  $\lambda : V \rightarrow [0, 1]$  ,  $V$  üzerinde  $n$ -boyutlu bir fuzzy vektör uzayı,  $a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_{m-1} \geq a_m$  ,  $a_i \in [0, 1]$  olmak üzere ve

$$\begin{aligned} \lambda : V &\rightarrow [0, 1] \\ \bar{0} &\rightarrow \alpha_0, & \bar{u} = \bar{0} = U_0 \\ \bar{u} &\rightarrow \alpha_1, & \bar{u} \in U_1 \setminus U_0 \\ \bar{u} &\rightarrow \alpha_2, & \bar{u} \in U_2 \setminus U_1 \\ \bar{u} &\rightarrow \alpha_3, & \bar{u} \in U_3 \setminus U_2 \\ &\vdots \\ \bar{u} &\rightarrow \alpha_{m-1}, & \bar{u} \in U_m \setminus U_{m-1} \\ \bar{u} &\rightarrow \alpha_m, & \bar{u} \in V \setminus U_m \end{aligned}$$

olacak şekilde  $m \leq n$  için  $(U_0, U_1, \dots, U_m)$  tek bir flag bulunur.

**İspat.** Bir önceki teoremden,  $U_i$  alt uzayları tek olmadıklarını görmek mümkündür, örneğin  $\lambda(\bar{x}_i) = \lambda(\bar{x}_{i+1})$  ise  $j < i$  için tüm  $U_j$  leri içeren  $U_{i+1}$  de  $i$ -boyutlu her  $U_i$  alt uzayı maksimal flag içinde  $i$ -boyutlu her alt uzay için seçilebilir. Tüm belirsiz alt uzaylar çıkarılırsa, tek olan bir  $F$  flag elde edilir ki burada teoremden anlaşıldığı üzere başka flagler yoktur. Bu  $F$  flagı genellikle maksimal olmayacaktır.  $\square$

#### 2.0.4 Fuzzy Projektif Noktalar ve Doğrular

Bir  $V$  vektör uzayına karşılık gelen bir projektif uzay  $PG(V) = (D(V), \sim)$  ile gösterilir. Burada  $(D(V), \sim)$  projektif uzayı  $V$  nin bir boyutlu alt uzaylarının bir koleksiyonu,  $\sim$  da alt uzaylar üzerindeki üzerinde bulunma bağıntısıdır.  $U$  ve  $U'$  gibi iki altuzay için  $U \supseteq U'$  ya da  $U' \subseteq U$  ise  $U \sim U'$  dir. Bir  $U$  uzayının boyutu olan  $boy(U)$ ,  $U$  nun taban vektörlerinin sayısına eşittir.  $U$  nun projektif boyutu olan  $pd(U)$  ise  $pd(U) = boy(U) - 1$  şeklinde tanımlanır. Projektif noktalar, doğrular, düzlemler gibi yapıların tanımı bu projektif boyuta dayanır. Yani 0 projektif boyuta sahip olan alt uzaylara **projektif nokta**, projektif boyutu 1 olan alt uzaylara **projektif doğru** ve projektif boyutu 2 olan alt uzaylara **projektif düzlem** denir.

Klasik durumda bir  $n$ -boyutlu projektif uzay,  $(n + 1)$ -boyutlu vektör uzayından elde edilir. Bundan sonra bir fuzzy projektif uzayın da fuzzy vektör uzayından nasıl elde edileceği üzerinde durulacaktır.

### 2.0.4.1 Fuzzy Projektif Noktalar

Bir projektif nokta sadece bir vektör doğrudur.  $V$  nin bir vektör doğrusu  $L$  olmak üzere  $(\lambda, L)$  fuzzy vektör doğrusundan bir fuzzy projektif nokta oluşturulacaktır. Teorem 2.5 den biliniyor ki  $\lambda$  aşağıdaki formdadır:  $a_0 \geq a_1 \in [0, 1]$  için

$$\begin{aligned} \lambda &: L \rightarrow [0, 1] \\ \bar{0} &\rightarrow a_0 \\ \bar{u} &\rightarrow a_1, \quad \bar{u} \in L \setminus \{\bar{0}\}. \end{aligned}$$

$L$  vektör doğrusuna karşılık gelen projektif nokta  $p$  ile gösterilsin. Böylece  $p \in PG(V)$  dir.  $p$  üzerinde  $\lambda'$  fuzzy projektif noktası oluşturmak için boyutu bir birim kadar daha küçük almak zorunda olduğundan,  $L$  vektör doğrusuna karşılık gelen  $\bar{0}$  vektörünün değeri seçilemez. Dolayısıyla  $p$  üzerinde bir  $\lambda'$  fuzzy projektif nokta aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\begin{aligned} \lambda' &: \{p\} \rightarrow [0, 1] \\ p &\rightarrow a_1 \end{aligned}$$

Burada Fuzzy vektör uzay gösteriminden farklı olması için köşeli parantez kullanarak  $[\lambda', p]$  olarak gösterilmektedir.

### 2.0.4.2 Fuzzy Projektif Doğrular

Fuzzy projektif doğrular da fuzzy projektif nokta tanımına benzer olarak verilebilir.  $\alpha, V$  nin bir vektör düzlemi olsun. Teorem 2.6 dan  $(\lambda, \alpha)$  nın aşağıdaki gibi bir fuzzy vektör düzlemi aşağıdaki gibi verilebilir:  $a_0 \geq a_1 \geq a_2 \in [0, 1]$  için

$$\begin{aligned} \lambda &: \alpha \rightarrow [0, 1] \\ \bar{0} &\rightarrow a_0 \\ \bar{u} &\rightarrow a_1, \quad \bar{u} \in L \\ \bar{u} &\rightarrow a_2, \quad \bar{u} \in \alpha \setminus L. \end{aligned}$$

$L, \alpha$  nin vektör doğrusudur ve  $p, (1)$  de  $L \subseteq \alpha$  vektör doğrusu ile ilgili projektif nokta olsun. Bu durumda  $M$  üzerinde  $\alpha'$  fuzzy projektif doğrusu aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$a_1 \geq a_2 \in [0, 1]$  olmak üzere

$$\begin{aligned} \alpha' &: M \rightarrow [0, 1] \\ p &\rightarrow a_1 \\ q &\rightarrow a_2, \quad q \in M \setminus \{p\}. \end{aligned} \tag{1}$$

Bu fuzzy projektif doğru  $[\alpha', M]$  ile gösterilir. Bir fuzzy projektif doğru, bir fuzzy vektör doğrusu gibi görünmektedir. Fark, karşılık gelen vektör uzayının en büyük üyelik derecesine sahip olan  $\bar{0}$  orjin noktasını içermemesidir. Fuzzy projektif doğru üzerindeki herhangi bir nokta eşleşen vektör düzleminde özel bir doğrudur.

### 2.0.5 Fuzzy Projektif Uzaylar

Şimdi  $n$  boyutlu  $\lambda'$  fuzzy projektif uzayının genel tanımı verilebilir. Biliyoruz ki  $\lambda'$ , bir  $(n+1)$  boyutlu  $(\lambda, V)$  vektör uzayından elde edilir ve aşağıdaki forma sahiptir:

olmak üzere  $U_i, V$  nin  $i$ -boyutlu alt uzayı ve  $\forall j < i, U_j \subseteq U_i$  için  $a_0 > a_1 > a_2 > \dots > a_n > a_{n+1}, a_i \in [0, 1]$  olmak üzere;

$$\begin{aligned}
 \lambda &: V \rightarrow [0, 1] \\
 \bar{0} &\rightarrow \alpha_0 \\
 \bar{u} &\rightarrow \alpha_1, \quad \bar{u} \in U_1 \setminus \{\bar{0}\} \\
 \bar{u} &\rightarrow \alpha_2, \quad \bar{u} \in U_2 \setminus U_1 \\
 \bar{u} &\rightarrow \alpha_3, \quad \bar{u} \in U_3 \setminus U_2 \\
 &\vdots \\
 \bar{u} &\rightarrow \alpha_n, \quad \bar{u} \in U_n \setminus U_{n-1} \\
 \bar{u} &\rightarrow \alpha_{n+1}, \quad \bar{u} \in V \setminus U_n
 \end{aligned} \tag{2}$$

şeklindedir. Varsayalım ki  $V'$ ,  $(n+1)$ -boyutlu  $V$  vektör uzayına karşılık gelen  $n$ -boyutlu projektif uzay olsun.  $V'$  üzerinde  $n$ -boyutlu fuzzy projektif uzay  $\lambda'$  aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$\begin{aligned}
 \lambda' &: V' \rightarrow [0, 1] \\
 q &\rightarrow a_1 \\
 p &\rightarrow a_2, \quad p \in U'_1 \setminus \{q\} \\
 p &\rightarrow a_3, \quad p \in U'_2 \setminus U'_1 \\
 &\vdots \\
 p &\rightarrow a_n, \quad p \in U'_{n-1} \setminus U'_{n-2} \\
 p &\rightarrow a_{n+1}, \quad p \in V' \setminus U'_{n-1}
 \end{aligned}$$

Burada  $q$  (2) de  $U_1$  vektör doğrusu ile eşleşen projektif nokta ve  $U'_i$  de  $i$ -boyutlu projektif uzaydır.  $U_{i+1}$  vektör uzayına eşleşen  $(q, U'_1, \dots, U'_{n-1}, V')$  bir maximal flagtır ve

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq a_{n+1}, a_i \in [0, 1].$$

### 2.0.5.1 Fuzzy Projektif Uzayda Üzerinde Bulunma Bağıntısı

Şimdi bir  $[\gamma, V]$  fuzzy projektif alt yapıları analiz edilecek ve bunun için her bir noktanın tek bir üyelik derecesine sahip olacağı kabul edilecektir. Zadeh' in  $X$  in bazı  $\mu$  ve  $\lambda$  fuzzy alt kümelerinin  $\subseteq$  fuzzy kapsama tanımına göre;

$$\mu \text{ fuzzy alt kümesi, } \lambda \text{ fuzzy alt kümesini kapsar} \Leftrightarrow \forall x \in X \text{ için } \mu(x) \leq \lambda(x)$$

olduğu biliniyor.  $[\mu, U]$  ve  $[\lambda, U']$  fuzzy projektif uzayları için bu tanım:

$$\forall p \in U \text{ için } [\mu, U] \subseteq [\lambda, U'] \Leftrightarrow \forall p \in PG(V) \text{ için } \mu(p) = \lambda(p)$$

dir.

**Tanım 2.10**  $U$  ve  $U'$ ,  $V$  nin iki alt uzayı ve  $U, U'$  üzerinde olsun. Eğer  $\forall \bar{x} \in U \cap U'$  için  $\mu(\bar{x}) = \lambda(\bar{x})$  ise  $[\mu, U]$  fuzzy alt uzayı  $[\lambda, U']$  fuzzy alt uzayı üzerindedir.

### 2.0.6 Fuzzy Projektif Düzlemler

3-boyutlu vektör uzaylarına kendimizi kısıtlarsak  $PG(V)$ , noktalar ve doğrulardan oluşan yani 0 ve 1-boyutlu projektif alt uzayları içeren bir projektif düzlemdir. Burada bir doğru üzerindeki nokta sayısı  $s$  ile, bir noktadan geçen doğru sayısını ise  $t$  ile gösterilecektir. Bunlar bir projektif düzlemde eşittir.  $P$  bir fuzzy projektif düzlem olsun. O halde

$$\begin{aligned} P & : PG(V) \rightarrow [0, 1] \\ q & \rightarrow a_1 \\ p & \rightarrow a_2, \quad p \in L \setminus \{q\} \\ p & \rightarrow a_3, \quad p \in PG(V) \setminus L \end{aligned}$$

$L, q$  yu içeren  $PG(V)$  nin bir projektif doğrusudur.  $a_1, a_2$  ve  $a_3$  birbirinden farklı ise  $P$  de farklı türden fuzzy projektif doğruların varlığı tartışılabilir.  $i \in \{1, \dots, t-1\}$  ve  $j \in \{1, \dots, s-1\}$  olmak üzere  $i$  ve  $j$  tamsayıları kullanılırsa;

1) Taban doğrusu  $L$  olan fuzzy doğru  $\lambda_1$  tektir.  $\lambda_1$  aşağıdaki şekilde olacaktır.

$$\begin{aligned} \lambda_1 & : L \rightarrow [0, 1] \\ q & \rightarrow a_1 \\ p & \rightarrow a_2, \quad p \in L \setminus \{q\} \end{aligned}$$

2) Taban doğrusu olarak  $M_i$ ,  $\mathcal{P}$ -üyelik derecesi  $a_1$  olan noktada  $L$  ile kesişen doğrular ve bir taban doğrusu olarak  $M_i$  doğrularından birine sahip olan  $M_{2i}$  fuzzy doğruları

$$\begin{aligned} \lambda_{2i} & : M_i \rightarrow [0, 1] \\ q & \rightarrow a_1 \\ p & \rightarrow a_3, \quad p \in M_i \setminus \{q\} \end{aligned}$$

dir.

3)  $N_{ij}$ ,  $\mathcal{P}$ -üyelik derecesi  $a_2$  olan  $q_j$  noktalarında sırasıyla  $L$  ile kesişen doğrular ve bir taban doğrusu olarak  $N_{ij}$  doğrularından birine sahip olan  $\lambda_{3ij}$  fuzzy doğruları aşağıdaki formdadır:

$$\begin{aligned} \lambda_{3ij} : N_{ij} &\rightarrow [0, 1] \\ q_j &\rightarrow a_2, \\ p &\rightarrow a_3, \quad p \in N_{ij} \setminus \{q_j\} \end{aligned}$$

**Teorem 2.11**  $PG(V)$  nin nokta ve doğruları aşağıdaki ifadeleri sağlar:

- (i) Farklı her iki noktadan tek bir doğru geçer.
- (ii) Farklı her iki doğrunun tek bir ortak noktası vardır.
- (iii)  $PG(V)$  herhangi üçü doğrudan olmayan dört nokta içerir.

Benzer durumların fuzzy projektif düzlem içinde geçerli olup olmayacağı araştırılacaktır.  $P$  fuzzy projektif düzlemindeki sonuçlara bakılırsa, aynı teoremin sağlandığını söyleme eğiliminde olunur. Çünkü projektif uzay tabanı bir projektif düzlemdir.

$\lambda_1, \lambda_{2i}$  ve  $\lambda_{3ij}$  gibi farklı türden fuzzy projektif doğrularını ve farklı  $a_1, a_2, a_3$  üyelik derecelerine sahip farklı türden üç noktayı düşünerek çok karışık olan gerçek aşağıda gösterilecektir.

(ii) yi ele alarak başlanabilir. Her iki fuzzy projektif doğrunun bir tek ortak fuzzy noktası olduğu açıktır. Fuzzy projektif doğruların  $PG(V)$  deki herhangi iki taban doğrusu  $PG(V)$  nin tam olarak bir noktasında kesişecektir. Her fuzzy projektif doğrusu aslında noktalarına değerler atanmış  $PG(V)$  nin bir doğrusu olduğundan, kesim noktasına bir değer atanacaktır. Bu noktanın üyelik derecesi iki doğrudan da aynı olacaktır, çünkü  $P$  nin her noktası tek bir üyelik derecesine sahiptir.

Şimdi (i) incelenir. Burada iki durum söz konusudur.  $P$  nin keyfi  $[\mu, p]$  ve  $[\lambda, q]$  iki fuzzy projektif noktası alınsın.  $PG(V)$  nin  $p$  ve  $q$  noktaları  $PG(V)$  nin tek bir  $L$  doğrusu üzerinde olacaktır. Fakat fuzzy projektif doğrunun bu doğru olacağı kesin değildir. Çünkü iki fuzzy projektif noktayı bilerek tüm  $P$  fuzzy projektif düzlem belirlenemez.

**DURUM 1** :  $\mu(p) \neq \lambda(q)$ . Bu durumda tek bir fuzzy doğrunun bu iki noktadan geçeceği biliniyor. Çünkü  $\mu(p) = a$  ve  $\lambda(q) = b$  ( $a, b \in \{a_1, a_2, a_3\}$ ) reel sayıları karşılaştırabilir.  $a \leq b$

ise  $L$  nin üzerindeki diğer tüm noktalar aynı  $a$  üyelik derecesine,  $b \leq a$  ise  $b$  üyelik derecesine sahip olacaktır. Bu sadece  $[\mu', L]$  doğrusu için mümkündür.

*DURUM 2* :  $\mu(p) = \lambda(q)$ ,  $a \in \{a_2, a_3\}$  için  $\mu(p) = \lambda(q) = a$  olsun.  $a = a_2$  ise tek bir durum vardır. Çünkü üyelik dereceleri ile iki noktayı içeren tek bir  $[\lambda_1, L]$  fuzzy doğru vardır. Fakat fuzzy projektif düzlemi bilinmiyorsa üyelik derecesi  $a_1$  olan  $[\lambda_1, L]$  nin diğer fuzzy noktalarını bilmek imkansızdır.

$a = a_3$  ise bilinen hiçbirşey yoktur. İki fuzzy noktayı içeren fuzzy doğru,  $[\lambda_{2i}, M_i]$  ya da  $[\lambda_{3ij}, N_{ij}]$  doğrularından biri olabilir ve bu doğrular üzerindeki diğer noktalar üyelik derecesi sırasıyla  $a_1$  ve  $a_2$  olan fuzzy noktalar olabilir.

(iii) özelliği açıktır.  $P$ , aynı fuzzy projektif doğru üzerinde bulunmayan dört fuzzy projektif nokta içerir. Çünkü  $PG(V)$  de bu özellik vardır ve fuzzy projektif nokta sadece değer atanmış bir projektif noktadır.

**Teorem 2.12**  $P$  fuzzy projektif düzleminin fuzzy nokta ve fuzzy doğruları aşağıdaki ifadeleri sağlar :

(i) Farklı her fuzzy nokta çifti, tek bir fuzzy doğrusu üzerinde bulunur. Fakat bu fuzzy doğru, noktaların üyelik dereceleri farklı ise belirlenebilir.

(ii) Farklı her fuzzy doğrunun tek bir ortak fuzzy noktası vardır.

(iii)  $P$  fuzzy projektif düzleminde herhangi üçü aynı fuzzy doğrusu üzerinde bulunmayan dört tane fuzzy nokta vardır.

Ayrıca fuzzy projektif düzlem bilinir ise tek bir bulanık projektif doğru tanımlamak için farklı olmak zorunda olan iki üyelik derecesi olma şartına ihtiyaç yoktur.

## BÖLÜM 3

### FİBER GEOMETRİLER

Matematikte birçok teoremin fuzzy karşılığı vardır. Temel olarak bu, bir kümeye ait elemanların üyelik derecesinin  $[0, 1]$  aralığında değer almasıdır. İlk olarak fuzzy kavramı Zadeh tarafından verildi (L. Zadeh, 1965) ve fuzzy teori pekçok alanda uygulama alanı buldu. Fuzzy geometriye alternatif olarak fiber geometri kavramı da Leen Kuijken ve Hendrik Van Maldeghem tarafından verildi.

Bu bölümdeki temel tanım ve teoremler "L. Kuijken, H. Van Maldeghem, Fibered Geometries, Discrete Mathematics 255 (2002) 259-274" den alınmıştır.

**Tanım 3.1**  $\mathcal{P} = (P, B, \sim)$  nokta-doğru geometrisi olsun. Eğer  $P$  nin  $\Gamma$  üzerinde bulunma grafının çapı  $n$  ve  $\Gamma$  nın çevresi  $2n$  ise  $\mathcal{P}$  ye **genelleştirilmiş  $n$ -gen** denir.

$n = 2$  için her doğru her noktanın üzerinde bulunur. Bu durum aşık bir durumdur. Genel olarak  $n \geq 3$  durumuna bakılacaktır.

**Tanım 3.2**  $\mathcal{P} = (P, B, \sim)$  bir genelleştirilmiş  $n$ -gon olsun.  $\mathcal{P}$  nin her doğrusu üzerinde en az üç nokta her doğrusundan en az üç doğru geçiyorsa  $\mathcal{P}$  ye **kaba genelleştirilmiş  $n$ -gen** denir.  $n \geq 2$  için genelleştirilmiş  $n$ -gen a **genelleştirilmiş poligon** yada kısaca **poligon** denir.

Genelleştirilmiş 3-gen bir projektif düzlemden başka birşey değildir. Genelleştirilmiş poligonlar üzerinde bulunma geometrisinin teorisinde temel geometrilerdir ve Tits tarafından sunulmuştur (J.Tits, 1959). Genelleştirilmiş poligonlar için duallik prensibi vardır. Genelleştirilmiş  $n$ -gen de nokta ve doğru adlarını yer değiştirirerek, birbirine izomorf olması gerekmeyen genelleştirilmiş  $n$ -gon elde edilir. Bundan dolayı tanımlardaki nokta ve doğru ifadeleri yer değiştirilerek yeni tanım ve ifadeler elde edilir. Fiber geometri araştırmasına projektif düzlemle başlamak uygundur.

#### 3.0.7 Fiber Noktalar ve Fiber Doğrular

Nokta kümesi  $P$ , doğru kümesi  $B$  ile gösterilmek üzere  $\mathcal{P} = (P, B, \sim)$  bir nokta-doğru geometrisi olsun.  $\mathcal{P}$ , kısmi lineer uzay olsun. Yani  $\mathcal{P}$  de farklı iki nokta en fazla bir doğru

belirtir.  $p$  ve  $q$  aynı doğru üzerinde ise  $p$  ve  $q$  **doğrudaştır** denir ve üzerinde buldukları ortak doğru  $\langle p, q \rangle$  ile gösterilir. Dual olarak  $L$  ve  $M$  doğruları ortak bir noktaya sahip ise  $L$  ve  $M$  **noktadaştır** denir ve ortak nokta  $L \cap M$  ile gösterilir. Fiber doğrular kısaca  $f$ -doğru ve fiber noktalar da kısaca  $f$ -nokta şeklinde gösterilir ve aşağıdaki şekilde tanımlanır:

**Tanım 3.3**  $a \in P$  ve  $\alpha \in [0, 1]$  olsun.  $(a, \alpha)$   $f$ -noktası  $\mathcal{P}$  nin  $P$  nokta kümesi üzerinde bir fuzzy kümesidir ve

$$(a, \alpha) : P \rightarrow [0, 1] : \left\{ \begin{array}{l} a \rightarrow \alpha \\ x \rightarrow 0, x \in P \setminus \{a\} \text{ ise} \end{array} \right\}$$

şeklinde tanımlanır. Dual olarak,  $L \in B$  ve  $\beta \in [0, 1]$  için  $(L, \beta)$   $f$ -doğrusu

$$(L, \beta) : B \rightarrow [0, 1] : \left\{ \begin{array}{l} L \rightarrow \beta \\ x \rightarrow 0, x \in B \setminus \{L\} \text{ ise} \end{array} \right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Bu tanımdan anlaşılıyor ki bir  $(a, \alpha)$   $f$ -noktası  $\mathcal{P}$  nin  $a$  noktasının sıfırdan farklı bir  $\alpha$  *üyelik derecesi* almış bir noktasıdır.  $a$  ya  $(a, \alpha)$   $f$ -noktasının **taban noktası** denir. Farklı  $f$ -noktalar aynı taban noktasına sahip olabilir.

Benzer olarak bir  $(L, \beta)$   $f$ -doğrusu  $\mathcal{P}$  nin  $L$  doğrusunun sıfırdan farklı bir  $\beta$  *üyelik derecesi* almış bir doğrusudur.  $L$  ye  $(L, \beta)$   $f$ -doğrusunun **taban doğrusu** denir. Farklı  $f$ -doğrular aynı taban doğrusuna sahip olabilir.

**Tanım 3.4**  $(L, \alpha)$  ve  $(M, \beta)$   $f$ -doğruları bir tek  $(L \cap M, \alpha \wedge \beta)$   $f$ -noktasında kesişir.

**Tanım 3.5**  $(a, \lambda)$  ve  $(b, \beta)$   $f$ -noktaları bir tek  $(\langle a, b \rangle, \lambda \wedge \beta)$   $f$ -doğrusunu gerer.

Bu tanımdan anlaşılıyor ki taban noktaları aynı olan  $f$ -noktalar aynı fiber doğruyu germeyebilir. Benzer olarak taban doğruları noktadaş olan fiber doğruların arakesitleri farklı fiber noktalar olabilir.

### 3.0.8 Fiber Projektif Düzlemler

**Tanım 3.6**  $\mathcal{P} = (P, B, \sim)$  bir projektif düzlem olsun.  $\mathcal{FP}$ ,  $\mathcal{P}$  nin sıfırdan farklı en az bir taban noktasına sahip olan noktalar kümesi,  $\mathcal{FB}$ ,  $\mathcal{P}$  nin sıfırdan farklı en az bir taban doğrusuna sahip

olan doğrular kümesi olsun. Eğer aşağıdaki iki koşul sağlarsa  $(\mathcal{F}\mathcal{P}, \mathcal{F}\mathcal{B})$  yapısına bir **fiber projektif düzlem** denir.

F1) Farklı taban noktalı iki  $f$ -nokta bir tek  $f$ -doğrusunu gerer.

F2) Farklı taban doğrulu iki  $f$ -doğru tek bir  $f$ -nuktada kesişir.

### **Doğrudaş $f$ -noktalar ve noktadaş $f$ -doğrular**

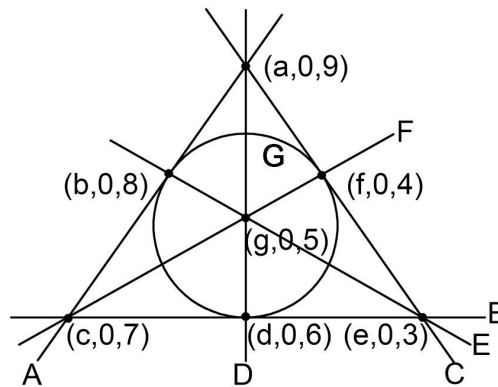
**Tanım 3.7** Bir  $f$ - nokta kümesinde bulunan  $f$ -noktalarının her bir çifti aynı  $f$ - doğruyu gererse bu  $f$ -noktalar kümesine doğrudaş fiber noktalar denir.

**Tanım 3.8** İkişer ikişer aynı  $f$ -nuktada kesişen  $f$ -doğruların kümesine noktadaş  $f$ -doğrular yada kesişen  $f$ -doğrular denir.

Bir  $(p, \alpha)$   $f$ -noktası,  $(L, \beta)$   $f$ -doğrusu üzerindeyse  $\alpha \geq \beta$  dır. Dual olarak  $\beta \geq \alpha$  dır. Fakat iki  $f$ -doğrunun arakesiti olan  $f$ -noktası bu iki doğrunun üzerinde bulunmak zorunda değildir. Dolayısıyla üzerinde bulunma tanımının mantıklı bir yolu yoktur.

$P$  projektif düzlemi,  $FP$  nin **taban düzlemi** olarak adlandırılır. Aşağıdaki yolla bir fiber projektif düzlem üretebiliriz.  $P' \subseteq P$  ve  $B' \subseteq B$  olacak şekilde  $P' \cup B'$  içeren tek kapalı konfigürasyon  $P \cup B$  dir.  $P' \cup B'$  içeren tek kapalı konfigürasyon  $P \cup B$  dir.  $P' \cup B'$  nin her bir  $x$  elemanı için  $]0, 1]$  in  $\sum_x$  bir keyfi boş olmayan alt kümesini seçelim. Seçtiğimiz bu alt kümenin elemanlarına  $x$  in **başlangıç değerleri** denir.  $FP$  aşağıdaki gibi bir fiber projektif düzlem olarak tanımlanır. Her bir  $x \in P' \cup B'$  ve her bir  $\alpha \in \sum_x$  için  $(x, \alpha)$  elemanı  $FP$  ye aittir. Bu oluşumun ilk adımındır.  $i > 1$  için  $i$ . adımında, şimdiye kadar elde ettiğimiz  $f$ -noktalarının herhangi bir çifti bu çiftle gerilmiş  $f$ -doğrusu da tanımla  $FP$  ye aittir. Dual olarak,  $f$ -doğrularının herhangi bir çifti için  $f$ - nokta kesişimi  $FP$  ye aittir. Adımların sonlu sayısında bu yola oluşturulmuş bütün  $f$ -doğruların ve noktaların kümesi, bir fiber projektif düzlem oluşturmak için kullanılır. Anlaşıyor ki her fiber projektif düzlemi yukarıda olduğu gibi yapılanabilir. Aslında, herbir elaman için onun bütün denk değerleri başlangıç değerleri olarak her zaman alınabilir. Şimdi  $\sum_x$  her  $x \in P \cup B$  için tek bir küme olsun. Eğer  $P' = P$  ve  $B' = \emptyset$  ise fiber projektif düzleme **mono-point-generated** denir. Eğer  $P' = P$  ve  $B' = B$  ise o zaman fiber projektif düzleme **mono-generated** denir. Bu durum iki çeşit fiber projektif düzlemle sınırlandırılacaktır.  $FP$  sıradan bir projektif düzlem olarak düşünebiliriz. Bu düzlemin her nokta ve doğrusuna  $]0, 1]$  değerler kümesinden değer verildi.

### Örnek 3.1



Şekil 3.1 Fano düzlemi

$\mathcal{F} = GF(2,2)$  Fano düzlemi klasik projektif düzlem olsun.  $\mathcal{F}$  taban düzlemi ile bir mono-point-generated fiber projektif düzlem yapılandırılacaktır (bakınız Şekil 3.1).  $\mathcal{F}$  nin yedi noktası  $\{a, b, c, d, e, f, g\}$ , yedi doğrusu da  $\{A, B, C, D, E, F, G\}$  olsun. O zaman  $A = \{a, b, c\}$ ,  $B = \{c, d, e\}$ ,  $C = \{e, f, a\}$ ,  $D = \{a, g, d\}$ ,  $E = \{b, g, e\}$ ,  $F = \{c, g, f\}$ ,  $G = \{b, d, f\}$  şeklinde fano düzlemini oluşturabiliriz. 1. adımda  $P$  nin noktaları üzerinde  $(a, 0.9)$ ,  $(b, 0.8)$ ,  $(c, 0.7)$ ,  $(d, 0.6)$ ,  $(e, 0.3)$ ,  $(f, 0.4)$  ve  $(g, 0.5)$   $f$ -noktaları alınsın. Böylece  $0.9, 0.8, 0.7, 0.6, 0.3, 0.4$  ve  $0.5$ ,  $a, b, c, d, e, f$  ve  $g$  taban noktalarının başlangıç değerleridir. İlk oluşumda  $A$  doğrusu üzerindeki  $(a, 0.9)$ ,  $(b, 0.8)$ ,  $(c, 0.7)$  fiber noktaları ile taban doğrusu  $A$  olan ikişer ikişer farklı fiber doğrular oluşur. Bu fiber doğruların üyelik dereceleri minimum operatörü kullanılarak  $\{0.7, 0.8\}$  olarak bulunur. Benzer şekilde tabanı  $B$  doğrusu olan fiber doğruların üyelik dereceleri  $\{0.3, 0.6\}$ , tabanı  $C$  doğrusu olan fiber doğruların üyelik dereceleri  $\{0.3, 0.4\}$ , tabanı  $D$  doğrusu olan fiber doğruların üyelik dereceleri  $\{0.5, 0.6\}$ , tabanı  $E$  doğrusu olan fiber doğruların üyelik dereceleri  $\{0.3, 0.5\}$ , tabanı  $F$  doğrusu olan fiber doğruların üyelik dereceleri  $\{0.4, 0.5\}$ , tabanı  $G$  doğrusu olan fiber doğruların üyelik dereceleri  $\{0.4, 0.6\}$  dir. 2. aşamada tabanı  $a, b, c, d, e, f, g$  noktaları olan fiber noktaların aldığı üyelik dereceleri sırasıyla  $\{0.3, 0.4, 0.5, 0.6\}$ ,  $\{0.3, 0.4, 0.5, 0.6\}$ ,  $\{0.3, 0.4, 0.5, 0.6\}$ ,  $\{0.3, 0.4, 0.5, 0.6\}$ ,  $\{0.3, 0.4, 0.5\}$ ,

$\{0.3, 0.4, 0.5\}$ ,  $\{0.3, 0.4, 0.5\}$  kümeleriyle verilebilir. Bunlar kullanılarak  $A, B, C, D, E, F, G$  tabanlı fiber doğruların aldığı üyelik dereceleri sırasıyla  $\{0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8\}$ ,  $\{0.3, 0.4, 0.5, 0.6\}$ ,  $\{0.3, 0.4, 0.5\}$ ,  $\{0.3, 0.4, 0.5, 0.6\}$ ,  $\{0.3, 0.4, 0.5\}$ ,

$\{0.3, 0.4, 0.5\}$ ,  $\{0.3, 0.4, 0.5, 0.6\}$  kümeleriyle verilebilir. 3. aşamada yeni fiber nokta ve

doğru oluşmaz. Böylece nokta ve doğruları aşağıda verilen fiber projektif düzlem oluşturmuş olunur.

$$\Sigma_a = \{0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.9\}$$

$$\Sigma_b = \{0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.8\}$$

$$\Sigma_c = \{0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7\}$$

$$\Sigma_d = \{0.3, 0.4, 0.5, 0.6\}$$

$$\Sigma_e = \{0.3, 0.4, 0.5\}$$

$$\Sigma_f = \{0.3, 0.4, 0.5\}$$

$$\Sigma_g = \{0.3, 0.4, 0.5\} \text{ ve}$$

$$\Sigma_A = \{0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8\}$$

$$\Sigma_B = \{0.3, 0.4, 0.5, 0.6\}$$

$$\Sigma_C = \{0.3, 0.4, 0.5\}$$

$$\Sigma_D = \{0.3, 0.4, 0.5, 0.6\}$$

$$\Sigma_E = \{0.3, 0.4, 0.5\}$$

$$\Sigma_F = \{0.3, 0.4, 0.5\}$$

$$\Sigma_G = \{0.3, 0.4, 0.5, 0.6\}$$

İki  $f$ - noktası ile gerilen  $f$ -doğrusunun verilen tanımından doğrudaki  $f$ -noktalarının kümesi içindeki tüm taban noktalarının doğrudaki olduğu anlaşılır ve tüm üyelik dereceleri, daha yüksek olabilen bir üyelik derecesi hariç eşittir. Aynı şekilde kesişen  $f$ -doğrular kümesi içindeki tüm taban doğruları da kesişir ve tüm üyelik dereceleri daha yüksek olabilen bir üyelik derecesi hariç eşittir.

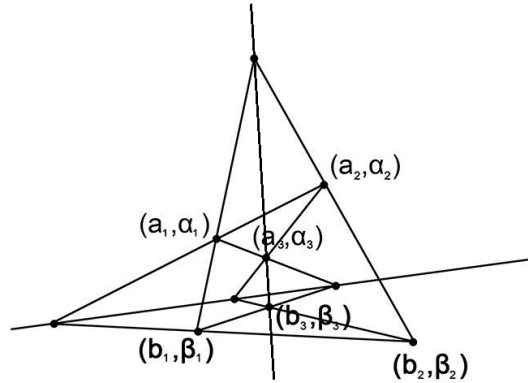
Şimdi projektif geometride önemli teoremlerden olan Desargues ve Pappus teoremlerinin fiber versiyonları incelenecektir.

Bir dezargsel projektif düzlem, yaklaşık-cisim üzerinde üç boyutlu bir vektör uzayından üretilen projektif düzlemdir.

**Tanım 3.9**  $\mathcal{P} = (P, B, I)$  bir projektif düzlem olsun.  $a_1, a_2, a_3$  ve  $b_1, b_2, b_3$ ,  $\mathcal{P}$  de iki üçgen olsun.  $p, a_1, b_1$ ;  $p, a_2, b_2$  ve  $p, a_3, b_3$  nokta üçlüleri doğrudan olacak biçimde bir  $p$  noktası varsa bu üçgenlere  $p$  den **perspektiftir** denir.  $p$  ye **perspektiflik merkezi** denir.  $a_1a_2$  ve  $b_1b_2$ ,  $a_1a_3$  ve  $b_1b_3$ ,  $a_2a_3$  ve  $b_2b_3$  doğru ikililerine bu üçgenin **karşılıklı kenarları** denir. Bu üçgenlerin karşılıklı kenarlarının arakesit noktaları  $\langle a_1, a_2 \rangle \cap \langle b_1, b_2 \rangle$ ,  $\langle a_2, a_3 \rangle \cap \langle b_2, b_3 \rangle$ ,  $\langle a_1, a_3 \rangle \cap \langle b_1, b_3 \rangle$  doğrudan ise, bunların üzerinde bulunduğu doğruya **perspektiflik eksen** denir. (Kaya, 2005)

Dezargues teoreminin klasik tanımı aşağıdaki gibidir:

**Teorem 3.10** İki üçgenin karşılıklı köşelerini birleştiren doğrular noktadaşa, karşılıklı kenarların arakesit noktaları doğrudandır.



**Şekil 3.2** Dezarg Düzlemi

**Teorem 3.11**  $\mathcal{FP}$ ,  $\mathcal{P}$  taban düzlemi Dezargsel olan fiber projektif düzlem olsun.  $\mathcal{FP}$  de  $(a_1, \alpha_1)$ ,  $(a_2, \alpha_2)$  ve  $(a_3, \alpha_3)$  taban noktaları doğrudan olmayan üç  $f$ -nokta ve  $(b_1, \beta_1)$ ,  $(b_2, \beta_2)$ ,  $(b_3, \beta_3)$  de taban noktaları doğrudan olmayan diğer üç  $f$ -nokta olsun. Eğer  $i \in \{1, 2, 3\}$ ,  $a_i \neq b_i \neq p \neq a_i$  için  $\langle a_i, b_i \rangle$  doğruları  $\mathcal{P}$  nin bir  $p$  noktasında kesişirse, o zaman  $(\langle a_1, a_2 \rangle, \alpha_1 \wedge \alpha_2) \cap (\langle b_1, b_2 \rangle, \beta_1 \wedge \beta_2)$ ,  $(\langle a_1, a_3 \rangle, \alpha_1 \wedge \alpha_3) \cap (\langle b_1, b_3 \rangle, \beta_1 \wedge \beta_3)$  ve  $(\langle a_2, a_3 \rangle, \alpha_2 \wedge \alpha_3) \cap (\langle b_2, b_3 \rangle, \beta_2 \wedge \beta_3)$  nin arakesit noktaları doğrudandır (bakınız Şekil 3.2)

**İspat.**  $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$  için  $(x_k, \gamma_k)$ ,  $(\langle a_i, a_j \rangle, \alpha_i \wedge \alpha_j)$  ve  $(\langle b_i, b_j \rangle, \beta_i \wedge \beta_j)$   $f$ -doğrularının  $f$ -nokta kesişimi olan  $f$ -noktaları olsun. O zaman

$$\gamma_1 = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \beta_1 \wedge \beta_2$$

$$\gamma_2 = \alpha_1 \wedge \alpha_3 \wedge \beta_1 \wedge \beta_3$$

$$\gamma_3 = \alpha_2 \wedge \alpha_3 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3$$

olur.  $(x_1, \gamma_1), (x_2, \gamma_2), (x_3, \gamma_3)$   $f$ -noktalarının taban noktaları doğrudadır. Ayrıca ikişer ikişer ürettikleri  $f$ -doğruların üyelik dereceleri

$$\gamma_1 \gamma_2 = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \alpha_1 \wedge \alpha_3 \wedge \beta_1 \wedge \beta_3$$

$$\gamma_2 \gamma_3 = \alpha_1 \wedge \alpha_3 \wedge \beta_1 \wedge \beta_3 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3$$

$$\gamma_1 \gamma_3 = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3$$

şeklinde hesaplanır. Bu üyelik dereceleri minimum operatörüne göre eşit olduğundan bu fiber noktalar fiber doğrudadır. Dolayısıyla  $\mathcal{FP}$  fiber projektif düzleminde Desargues teoreminin fiber versiyonu sağlanır.  $\square$

Geometride diğer önemli bir teorem de Pappus teoremidir. Pappus'el Projektif düzlemlerde Desarg teoremi de sağlanır.

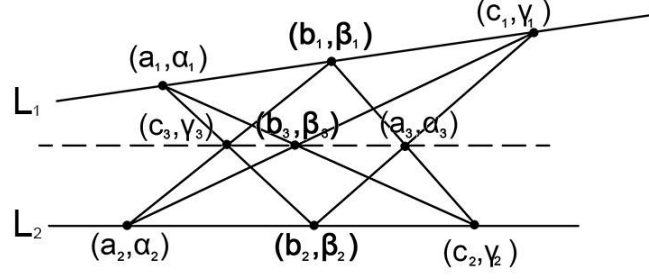
**Teorem 3.12** (Pappus Teoremi)  $P$  projektif düzleminde  $L_1$  ve  $L_2$  farklı iki doğru,  $a_1, b_1, c_1$ ;  $L_1$  ve  $a_2, b_2, c_2$ ;  $L_2$  üzerinde farklı üç nokta olsun. O zaman

$$a_3 = \langle b_1, c_2 \rangle \cap \langle b_2, c_1 \rangle, b_3 = \langle a_1, c_2 \rangle \cap \langle a_2, c_1 \rangle, c_3 = \langle a_1, b_2 \rangle \cap \langle a_2, b_1 \rangle$$

noktaları şeklinde tanımlansın. Eğer  $a_1, b_1, a_2, b_2$  nin üçü doğruduş değilse ve  $c_1, c_2$  keyfi seçilen iki nokta ise  $a_3, b_3$  ve  $c_3$  noktaları doğrudadır.

Aşağıdaki teorem  $\mathcal{FP}$  fiber projektif düzleminde Pappus teoreminin fiber versiyonunun sağlandığını göstermektedir.

**Teorem 3.13**  $\mathcal{FP}$ , taban düzlemi pappus'el olan bir fiber projektif düzlem olsun.  $\mathcal{P}$  de farklı iki doğru  $L_1$  ve  $L_2$  olsun.  $a_1, b_1, a_2, b_2$  taban noktalarının herhangi üçü doğruduş olmayacak şekilde  $L_1$  doğrusu üzerinde  $(a_1, \alpha_1), (b_1, \beta_1)$  ve  $(c_1, \gamma_1)$ ;  $L_2$  üzerinde  $(a_2, \alpha_2), (b_2, \beta_2)$  ve  $(c_2, \gamma_2)$  fiber noktaları alınsın. O zaman  $(a_3, \alpha_3) = \langle (b_1, \beta_1), (c_2, \gamma_2) \rangle \cap \langle (b_2, \beta_2), (c_1, \gamma_1) \rangle$ ,  $(b_3, \beta_3) = \langle (a_1, \alpha_1), (c_2, \gamma_2) \rangle \cap \langle (a_2, \alpha_2), (c_1, \gamma_1) \rangle$ ,  $(c_3, \gamma_3) = \langle (a_1, \alpha_1), (b_2, \beta_2) \rangle \cap \langle (a_2, \alpha_2), (b_1, \beta_1) \rangle$   $f$ -noktaları fiber doğrudadır (Şekil 3.3).



Şekil 3.3 Pappus Düzlemi

**İspat.**  $(a_3, \alpha_3), (b_3, \beta_3), (c_3, \gamma_3)$  noktalarının ikişer ikişer ürettikleri fiber doğruların üyelik dereceleri

$$\alpha_3 \beta_3 = \beta_1 \gamma_2 \beta_2 \gamma_1 \alpha_1 \gamma_2 \alpha_2 \gamma_1$$

$$\gamma_3 \alpha_3 = \alpha_1 \beta_2 \alpha_2 \beta_1 \beta_1 \gamma_2 \beta_2 \gamma_1$$

$$\beta_3 \gamma_3 = \alpha_1 \gamma_2 \alpha_2 \gamma_1 \alpha_1 \beta_2 \alpha_2 \beta_1$$

şeklinde hesaplanır. Bu üyelik dereceleri minimum operatörü kullanıldığından eşittir. Dolayısıyla bu noktalar fiber doğrudadır.  $\square$

### 3.0.9 Fiber Projektif Düzlemin Oluşumu

Fiber projektif düzlemler aşağıdaki gibi oluşturulabilir.

$\mathcal{P} = (P, B, \sim)$  bir projektif düzlem olsun.  $S, P \cup B$  nin bir alt kümesi olmak üzere, farklı iki doğrunun kesişim noktasını ve farklı iki noktanın birleşim doğrusunu içeren  $S$  ye **kapalı konfigürasyon** denir.  $P' \cup B'$  yü içeren tek kapalı konfigürasyon  $P \cup B$  olacak şekilde  $P' \subseteq P$  ve  $B' \subseteq B$  olsun.  $P' \cup B'$  nün her bir  $x$  elemanı için  $[0, 1]$  in boş olmayan bir  $\sum_x$  alt kümesi seçilsin.  $\mathcal{FP}$  bir fiber projektif düzlem olmak üzere her bir  $x \in P' \cup B'$  ve  $a \in \sum_x$  için  $(x, a)$  elemanı  $\mathcal{FP}$  ye ait olacak şekilde tanımlanır. Bu oluşumun ilk adımıdır.  $i > 1$  olmak üzere adım  $i$  açıklanabilir.

Farklı taban noktaları ile  $((x, \alpha), (y, \beta))$   $f$ -noktalarının gerdiği  $(\langle x, y \rangle, \alpha \wedge \beta)$   $f$ -doğrusu da fiber projektif düzlem tanımından  $\mathcal{FP}$  ye aittir. Dual olarak, farklı taban doğru  $f$ -doğrularının her çiftinin arakesit noktaları için  $\mathcal{FP}$  ye aittir. Sonlu adım sayısınca bu yolu oluşturan bütün  $f$ -doğru ve  $f$ -noktalarının kümesi bir fiber projektif düzlemi oluşturmayı kolaylıkla sağlar.

$\mathcal{FP}$  sıradan bir projektif düzlemin her noktası ve her doğrusu  $[0, 1]$  aralığından değerler alan  $f$ -noktalarının oluşturduğu bir küme olarak düşünülebilir.

**Tanım 3.14**  $f$ -noktaları ve  $f$ -doğrularını oluşturmak için adım 1 de  $\mathcal{P}$  nin nokta ve doğrularına verilen üyelik derecelerine **sıralı taban elemanlarının başlangıç değerleri** adı verilir.

Bazen bir taban nokta veya bir taban doğru oluşum sürecinde başlangıç değerinden farklı üyelik derecesi alabilir. Eğer  $(\alpha, x)$ ,  $\alpha \in P \cup B$ ,  $\alpha \in [0, 1]$   $f$ -noktası ya da  $f$ -doğrusunda  $x$ ,  $a$  nın başlangıç değeri değilse " $\alpha, x$  **değerini yakalar**" denir.

Her fiber projektif düzlemin yukarıda olduğu gibi oluşturulabildiği açıktır.

### Bulaşıcı değerler ve fiberler

**Bulaşıcı değerler** Burada Fiber projektif düzlemlerin özel sınıflarına bakılacaktır. Adım 1 de her noktaya bir üyelik derecesi verilerek elde edilen fiber projektif düzlemlere "**tek nokta ile üretilmiş**" fiber projektif düzlemler denir. Fiber düzlemler bir dinamik geometri olarak görülebilir: her adımda, nokta ve doğrular birden fazla üyelik derecesi yakalar. Herhangi birisi bunu bir hastalık çeşidinin derecelendirilmesi gibi düşünülebilir: sıradan bir projektif düzlemin üzerinde bulunma grafında oluşum sürecinden bir  $p$  elemanının en az  $p', p''$  gibi iki komşusu hastalığa sahipse  $p'$  ve  $p''$  derecelerinin arasındaki en düşük olanı yakalar.

Bundan sonra sadece "**tek nokta ile üretilmiş**" fiber projektif düzlemler ele alınacaktır.

**Tanım 3.15** Bir  $x$  başlangıç değeri, oluşum konusunda tarif edildiği gibi oluşum durumunda,  $z \geq x$  olacak şekilde daha yüksek bir başlangıç değerli bütün taban noktaları  $x$  değerini yakalarsa, bulaşıcı olur. Ortaya çıkan en yüksek başlangıç değeri her zaman bulaşıcıdır. Bu yüzden ona **aşık bulaşıcı** denir.

**Tanım 3.16**  $Q$  taban düzlemine sahip bir  $\mathcal{FP}$  fiber projektif düzleminde bir  $f$ -**üçgen**,  $f$ -**köşe** denen üç nokta ve  $f$ -**kenar** denen üç doğrudan oluşur.  $P$  de taban üçgen diye adlandırılan taban nokta ve doğrular bir üçgen oluşturur,  $f$ -kenarlar bir  $f$ - köşede kesişir ve  $f$ -köşeler  $f$ -kenarları gerer. Bir  $f$ -üçgen,  $f$ -köşelerin kümesi ile gösterilir. Çünkü bir  $f$ -üçgen tamamiyle üç  $f$ -köşe ile tanımlanır.

**Yardımcı Teorem 3.17** Bir  $f$ -üçgen içinde bütün elemanlar aynı üyelik derecesine sahiptir.

**İspat.** Bütün üyelik dereceler eşit olamayacak şekilde  $\alpha, \beta$  farklı iki üyelik derecesi ile taban üçgende  $p$  noktası ve bir  $L$  doğrusu alınsın. Genelleştirme yapmadan,  $\alpha < \beta$  olduğu düşünölsün. Bu durumda  $(p, \alpha)$  noktası  $(L, \beta)$  üzerinde olamaz ve üçgenin diğer  $f$ - noktalarının taban noktaları  $L$  doğrusu üzerindedir ve  $\alpha$  üyelik derecesi alırlar. Böylece  $L$  nin üyelik derecesi  $\alpha$  olmalıdır.  $\square$

**Tanım 3.18** Bir  $f$ -üçgenin sahip olduğu aynı üyelik derecesine  $f$ -üçgenin üyelik derecesi denir.

**Yardımcı Teorem 3.19**  $\mathcal{FP}$  fiber projektif düzleminde  $x$  üyelik derecesine sahip bir  $f$ -üçgen varsa  $x$  bulaşıcıdır.

**İspat.**  $\mathcal{FP}$  de  $x$  üyelik derecesine sahip taban üçgeni  $\mathcal{J}$  olan fiber üçgen  $\mathcal{FJ}$  olsun. Bulaşıcı olması için,  $z \geq x$  başlangıç değeri her taban noktasının üyelik derecesi  $x$  e bulaşmak zorundadır.  $\mathcal{FP}$  de başlangıç değeri  $z$  olan keyfi bir  $(p, z)$   $f$ -noktası alınsın. Bunun için iki durum vardır:  $P, \mathcal{J}$  nin bir kenarı üzerindedir ya da değildir.

Eğer  $p, \mathcal{J}$  nin bir  $E$  kenarı üzerinde olsun.  $E$  kenarının üzerinde olmayan üçüncü köşegen ve  $p$  den geçen doğru  $L$  olsun. Bu durumda  $x$  üyelik dereceli bir  $f$ -doğrusu oluşur.  $L$  taban doğrulu  $f$ -doğrusu,  $(p, z)$  ve  $x$  üyelik dereceli bir  $f$ -köşe tarafından gerilir ve böylece  $x \wedge z = x$  üyelik derecesine sahip olur. Bu  $p$  nin  $x \wedge z = x$  değerini yakalaması demektir. Eğer  $p, \mathcal{F}$  nin üç kenarının herhangi birinin üzerinde değilse o zaman  $\mathcal{F}$  nin üç köşesinden herbiri ile doğrudadır.  $x$  üyelik dereceli  $f$ -doğrular oluşur.  $(p, z)$  ve  $\mathcal{FJ}$  nin söz konusu  $f$ -köşeleri ile gerilen bu doğruların üyelik derecesi  $x \wedge z = x$  olur. Bu doğruların arakesiti olan  $p$  noktası  $x$  değerini yakalar.  $\square$

**Tanım 3.20**  $f$ -noktaları  $\{(p, x), (q, y), (r, z)\}$  üçlüsü ile verilen  $f$ -üçgenin  $p, q, r$  taban noktaları  $P$  de doğrudadır değilse **zayıf f-üçgen** olarak adlandırılır.

**Yardımcı Teorem 3.21**  $P$  taban düzlemlili  $\mathcal{FP}$  fiber projektif düzleminde  $\{(p, x), (q, y), (r, z)\}$  ( $x, y, z$  nin farklı olmasına gerek yok) nin zayıf bir  $f$ -üçgen olması için gerek ve yeter şart aşağıdakilerden birinin sağlanmasıdır:

(1)  $\mathcal{FP}$  de,  $p', q', r'$  taban noktalarının başlangıç değeri  $x, y, z$  olan bir  $\{(p', x), (q', y), (r', z)\}$  zayıf  $f$ -üçgeni vardır.

(2)  $x, y, z$  değeri başlangıç değeri olsun. Bu başlangıç değeri  $\mathcal{P}$  nin bütün noktaları tek bir ortak  $L$  doğrusu üzerinde bulunur ve  $w \geq \min\{x, y, z\}$  başlangıç değeri  $L$  üzerinde olmayan en az bir taban noktası vardır.

**İspat.**  $(\Leftarrow)$  (1) sağlanırsa bu iddia aşıkardır.  $x, y$  yada  $z$  başlangıç değerli bütün  $f$ -noktalarının doğrudan taban noktalarına sahip olsun. Bunlar  $\mathcal{P}$  nin bir tek  $L$  doğrusunu gersin.  $L$  tek olduğundan  $L$  üzerinde  $(p_1, x), (p_2, y)$  ve  $(p_3, z)$   $f$ -noktaları bulunabilir. Bunların en az iki üyelik derecesi aynıdır.  $x \leq y \leq z$  olsun.  $w \geq x$  başlangıç değerli  $L$  üzerinde olmayan bir  $s$  taban noktası alınsın.  $\mathcal{P}$  de  $\{s, p_1, p_3\}$  üçgeni ele alınsın.  $x \leq w$  olduğundan,  $(\langle s, p_1 \rangle, x)$   $f$ -doğrusuna sahip olunur.  $p_2 \neq p_1$  ise  $(\langle s, p_2 \rangle, y \wedge w)$  ve  $(\langle s, p_1 \rangle, x)$   $f$ -doğrularının  $(s, x)$   $f$ -noktasında kesişir.  $p_3 \neq p_1$  ise aynı sonuç elde edilir. Böylece  $\{(s, x), (p_2, y), (p_3, z)\}$  zayıf  $f$ -üçgenini bulunur.

$(\Rightarrow)$   $\mathcal{FP}$  de bir  $\{(p, x), (q, y), (r, z)\}$  bir  $f$ -üçgeni var olsun.  $\min\{x, y, z\}$  den daha büyük ve  $x, y, z$  başlangıç değeri ile tüm taban noktalar doğrudan olsun.  $P$  de gerilen  $L$  doğrusu tektir çünkü diğer taraftan  $x = y = z$  üyelik derecelerinin en büyüğüdür ve sadece bir noktaya başlangıç değeri olarak verilir, bu açık bir çelişkidir. Böylece  $L$  üzerinde olmayan taban noktaları ile tüm  $f$ -noktalarının başlangıç değerleri kesinlikle  $\min\{x, y, z\}$  den daha küçüktür. Oluşum sürecini  $i > 1$  ve  $i$  nin en küçük değerinde  $i$ . adımda  $L$  üzerinde olmayan bir  $s$  noktası  $w \geq \min\{x, y, z\}$  değerini yakalar. Bu durumda  $L$  den farklı en az bir doğru  $j < i$  olmak üzere  $j$ . adımda  $w$  değerini yakalamış olur. Bu da gösterir ki bir önceki adımda  $L$  üzerinde olmayan bazı taban noktalar  $w$  daha büyük değer alır. Bu da  $i$  nin minimalliği ile çelişir.  $\square$

**Teorem 3.22**  $P$  taban düzlemlili  $\mathcal{FP}$  fiber projektif düzleminde bir  $x$  başlangıç değerinin bulaşıcı olması için gerek ve yeter şart aşağıdakilerden birinin sağlanmasıdır.

(1)  $x$  değeri meydana gelen en büyük değerdir.

(2)  $\mathcal{FP}$  de  $x$  başlangıç değerine sahip herhangi bir  $p$  noktası için  $\{(p, x), (p_1, y), (p_2, z)\}$  zayıf bir üçgen oluşturacak şekilde  $(p_1, y)$  ve  $(p_2, z)$ ,  $y, z \geq x$   $f$ -noktaları vardır; bundan dolayı  $(p, x)$  içeren bir  $f$ -üçgeni vardır.

**İspat.**  $P, x$  başlangıç değerli bir taban nokta olsun.

$(\Leftarrow)$   $x$ , alınan en yüksek değer ise, o zaman  $x$  aşık olarak bulaşıcıdır.  $y, z \geq x$  olmak üzere  $\{(p, x), (p_1, y), (p_2, z)\}$  zayıf  $f$ -üçgen var olsun. Oluşum sürecinde bu  $f$ -üçgeninin bütün  $f$ -kenar ve bütün  $f$ -köşeleri  $x$  üyelik derecesini alır. Böylece  $\{(p, x), (p_1, x), (p_2, x)\}$   $f$ -üçgeni ortaya çıkar.

$(\Rightarrow)$   $x$  ( aşık olmayan ) bulaşıcı ve  $z \geq x$  olacak şekilde  $z$  değeri var olsun. Öncelikle  $z$ , sadece bir tek  $p'$  taban noktasında oluşan  $x$  den daha büyük bir tek değer ve  $p$  de  $x$  başlangıç

değerli tek taban noktası olsun. O zaman  $(\langle p, p' \rangle, x)$   $f$ -doğrusu  $x$  üyelik dereceli tek  $f$ -doğrudur ve  $P$  de diğer bütün doğrular sadece  $x$  den daha küçük değerleri yakalar.  $p'$  nün asla  $x$  i yakalayamayacağı açıktır ve dolayısıyla  $x$  bulaşıcı değildir. Bu bir çelişkidir.

Daha sonra  $z \geq x$  olacak şekilde  $(p', z)$   $f$ -noktası ve  $y \geq x$  olacak şekilde başka bir  $(q, y)$   $f$ -noktası olsun.  $p, p'$  ve  $q$  doğruduş olduğu ( $L$  doğrusunu geren) ve  $L$  üzerinde olmayan bütün noktaların başlangıç değerlerinin  $x$  den daha küçük olduğu varsayalım. Bir önceki paragraftaki gibi ne  $p'$  ne de  $q$ ;  $z > x$  ya da  $y > x$  olan  $x$  derecesini, ne de  $z' > x$  değerli  $L$  nin diğer herhangi bir noktasındaki değeri yakalar. Bu bir çelişkidir. Eğer  $x = y = z = z'$  ise  $x$  oluşan en büyük değerdir.  $\square$

**Sonuç 3.23** Eğer  $x$  aşikar olmayan bir bulaşıcı değer ise her  $y < x$  değeri bulaşıcıdır.

**İspat.**  $P$  taban noktası ( aşikar olmayan ) başlangıç  $x$  bulaşıcı değerine sahip olsun. Bir önceki teoremden  $z_1, z_2 > x$  olmak üzere  $\{(p, x), (p_1, z), (p_2, z_2)\}$  zayıf  $f$ -üçgeni vardır.  $p'$  noktası  $y < x$  özellikli  $y$  başlangıç değerine sahip olsun.  $\{p', p, p_1\}, \{p', p, p_2\}, \{p', p_1, p_2\}$  kümelerinin en az biri doğruduş olmayan üç nokta içerir.  $\square$

## BÖLÜM 4

### FİBER PROJektİF DÜZLEM GEOMETRİ

Bu bölümde minimum operatörden farklı üçgensel normlar kullanılarak fiber projektif düzlemlerin varlığı ve projektif düzlemlerdeki önemli teoremlerin fiber karşılıkları incelenmiştir. Bu bölümde Bayar, Ekmekçi ve Akça (2008)'nin "A note on fibered projective plane geometry" çalışması esas alınmıştır.

Bir üçgensel norm  $[0, 1]$  aralığında aşağıdaki koşulları sağlayan ikili işlemdir:

i) Simetriktir.

ii) Birleşmelidir.

iii)  $a \leq c$  ve  $b \leq d$  iken  $(a \wedge b) \leq (c \wedge d)$

iv) Her  $a, b, c, d \in [0, 1]$  için  $a \wedge 1 = a$  dır.

$P$  noktalar kümesi ve  $B$  doğrular kümesi olmak üzere  $\mathcal{P} = (P, B, \sim)$  bir projektif düzlem olsun.  $P$  ve  $B$ ,  $\sim$  (üzerinde bulunma bağıntısı olarak adlandırılan) simetrik ilişkiye sahip iki ayrık kümedir öyleki  $(P \cup B, \sim)$  grafi,  $P$  ve  $B$  sınıfları ile iki parçalı graftır.  $P$  de iki farklı  $p, q$  noktaları bir doğru üzerindedir ve  $\langle p, q \rangle$  ile gösterilir. İki farklı  $L, M$  doğrusu  $(L \cap M)$  ile gösterilen bir nokta üzerindedir ve her doğru en azından üç nokta içerir.

$P$  nin ortak bir doğru üzerindeki noktalar kümesine **doğrudaş noktalar kümesi** denir. Dual olarak, kesişen doğruların bir kümesi **noktadaş doğrular kümesi** olarak tanımlanır.

(Aşık olmayan) Fiber projektif düzlem  $\mathcal{FP}$ ,  $P$  nin fiber noktalarının kümesi olan  $FP$  ve  $B$  nin fiber doğrularının bir kümesi olan  $FB$  yi içerir.  $P$  nin her nokta ve her doğrusu en az bir fiber nokta ve fiber doğrunun taban noktası ve taban doğrusudur. (1 den farklı ve en az bir üyelik dereceli) ve  $\mathcal{FP} = (FP, FB)$  fiber noktalarının germesi ve fiber doğrularının arakesitleri altında kapalıdır. Sonuç olarak, fiber noktalar kümesini her çifti aynı fiber doğruyu geriyorsa bu kümeye **doğrudaştır** denir. Dual olarak, fiber doğrular kümesinin her bir çifti aynı fiber doğruyu geriyorsa bu kümeye **noktadaştır** denir. Kuijken L. and Maldeghem H. V., 2002,

Fibered Geometries, Discrete Mathematics 255, 259-274 deki orjinal tanıma göre, yukarıdaki  $\wedge$ -operatör minimum operatör olarak okunmalıdır.

#### 4.0.10 Üçgensel Norm İle İlgili Bazı Yorumlar

Üçgensel normun sadece minimum operatör olarak düşünüldüğü çalışmalarda projektif düzlem sonlu ise, bu durumda fiber noktalarının sonlu sayısı, sonlu sayıda fiber projektif düzlem üretir. Buna rağmen diğer üçgensel normlar için fiber projektif düzlem sonlu olabilir. Örneğin  $a \wedge b = ab$  sıradan bir çarpım alırsak, o zaman en azından bir  $\alpha$  üyelik derecesinin 1 den farklı olduğu görülür. Sonsuz üyelik dereceleri ve bunun sonucunda sonsuz sayıda fiber nokta elde edilir. Tüm üçgensel normlar için fiber projektif düzlem elde edilemez. Örneğin Łucasiewics normu alırsak  $a \wedge b = \max\{0, a + b - 1\}$ , bu durumda hiçbir nokta 1 den farklı üyelik derecesine sahip olamaz. Burada  $0 < \alpha < 1$  olmak üzere  $(p, \alpha)$  fiber noktası alınsın. Taban noktasından farklı diğer  $(q, \beta)$  fiber noktası ve  $L \neq \langle p, q \rangle$  olmak üzere  $(L, \gamma)$  fiber doğrusu düşünölsün. O zaman  $(p', \alpha') = (L, \gamma) \cap (\langle p, q \rangle, \alpha \wedge \beta)$  noktası  $\alpha' = \alpha + \beta + \gamma - 2 \leq \alpha < 1$  üyelik derecesine sahip olur. Çünkü 0-üyelik derecesi değildir. Böylece  $(p, \alpha)$  ve  $(p', \alpha')$  tarafından gerilen fiber doğru  $\alpha + \alpha' - 1 \leq 2\alpha - 1$  üyelik derecesine sahip olur. Dual olarak en fazla  $2(2\alpha - 1) - 1 = 4\alpha - 3$  üyelik dereceli bir nokta aynı ispatı sağlar. Bu şekilde devam ederek her  $n$  doğal sayısı için  $2^n(\alpha - 1) + 1$  e eşit ya da ondan küçük üyelik derecesi elde edilir.  $n$  yeterince büyütölsürse sonuç negatif olur. Bu bir çelişkidir. Bundan dolayı, Łucasiewics üçgensel normu ile elde edilen fiber projektif düzlem crisp projektif düzleme denktir. Sonlu fuzzy düzlemler uygulama için önemli rol oynadığından, "özel üçgen norm verildiğinde, ne zaman sonlu bir fiber projektif düzlem mevcuttur" sorusu sorulabilir.

**Tanım 4.1** Bir fiber projektif düzleminin taban düzlemine **crisp projektif düzlem** denir.

**Teorem 4.2**  $\mathcal{P}$  sonlu crisp projektif düzlem ve  $\wedge$  bir üçgensel norm olsun. O zaman  $P$  taban düzlemleri sonlu aşikar olmayan fiber projektif düzlem  $\mathcal{F}\mathcal{P}$  nin mevcut olması için gerek ve yeter şart  $\alpha \in ]0, 1[$  olmak üzere  $\alpha$  idempotent elemanın  $(\alpha \wedge \alpha = \alpha)$  mevcut olmasıdır.

**İspat.**  $(\Leftarrow)$   $\alpha$  idempotent elemanı var olsun. O zaman  $\mathcal{P}$  nin her elemanına  $\alpha$  üyelik derecesi verilebilir ve  $P$  tabanlı aşikar olmayan sonlu fiber projektif düzlemi elde edilir.

$(\Rightarrow)$   $\mathcal{F}\mathcal{P}$ ,  $P$  tabanlı aşikar olmayan sonlu fiber projektif düzlem olsun. Sonluluk ve aşikar olmama özelliğinden  $\mathcal{F}\mathcal{P}$  de en küçük üyelik derecesi mevcut ve iyi tanımlıdır. Bu en küçük

üyelik derecesine  $\alpha$  diyelim. Duallığe göre,  $(p, \alpha)$  fiber noktasının var olduğunu kabul edilebilir.  $p \neq q$  olmak üzere başka bir  $(q, \beta)$  fiber noktasını gözönüne alalım ve  $L \neq \langle p, q \rangle$  olmak üzere herhangi bir  $(L, \gamma)$  fiber doğrusunu alalım.  $L, p$  üzerinde olmasın.

$$(p', \alpha') = (L, \gamma) \cap (\langle p, q \rangle, \alpha \wedge \beta) = (L \cap \langle p, q \rangle, \gamma \wedge (\alpha \wedge \beta))$$

noktası

$$\alpha' = \alpha \wedge \beta \wedge \gamma = \alpha \wedge \beta \wedge \gamma \leq \alpha \wedge 1 \wedge 1 = \alpha < 1$$

üyelik derecesine sahiptir.  $\alpha$  en küçük olduğundan  $\alpha' = \alpha$  dır. Bundan dolayı bir  $(\langle p, p' \rangle, \alpha \wedge \alpha)$  fiber doğrusu elde edilir.  $\alpha \wedge \alpha' = \alpha \wedge \alpha \leq \alpha$ ,  $\alpha$  en küçük olduğundan  $\alpha \wedge \alpha = \alpha$  olup,  $\alpha$  idempotent elemandır.  $\square$

Genel olarak, fiber projektif düzlemleri üretebilen üçgensel norm aşağıdaki karakterizasyonuna sahiptir.

**Teorem 4.3**  $P$  keyfi bir crisp projektif düzlem ve  $\wedge$  bir üçgensel norm olsun.  $P$  tabanlı aşıkâr olmayan fiber projektif düzlem  $\mathcal{FP}$  nin mevcut olması için gerek ve yeter şart aşağıdakilerden birinin sağlanmasıdır.

(i)  $\alpha \in [0, 1]$  idempotent elemanı vardır.

(ii)  $\beta' \in ]\alpha, 1[$  için  $\beta \wedge \beta' > \alpha$  özelliğini sağlayan  $\alpha \in [0, 1[$  elemanı mevcuttur.

**İspat.** (i) ya da (ii) durumlarından biri sağlansın.

(i) için  $[\alpha, 1]$  aralığında,

(ii) için  $]\alpha, 1[$  aralığında üyelik derecelerini  $P$  nin bütün noktalarına ekleyerek  $P$  den fiber projektif düzlem elde edilir. Bu her zaman sonsuz fiber projektif düzlem üretir.

( $\Rightarrow$ )  $\mathcal{FP}$ ,  $P$  tabanlı fiber düzlem olsun.  $\alpha < 1$ ,  $FP$  de mevcut bütün üyelik derecelerinin infimumu olsun.  $\alpha$  nın kendisi de bir üyelik derecesi ise  $\alpha > 0$  ve önceki ispatta elde edildiği gibi  $\alpha$  idempotenttir. Şimdi kabul edelim ki  $\alpha$  üyelik derecesi olmasın.  $\beta, \beta' \in ]\alpha, 1[$  ve genelliği bozmaksızın  $\beta \leq \beta'$  olsun. İnfimumun tanımından  $\mathcal{FP}$  de bir nokta ya da bir doğrunun üyelik derecesi  $\gamma$  olacak şekilde  $\gamma \in ]\alpha, \beta]$  vardır. Genelliği bozmadan  $(p, \gamma)$  fiber noktasının var olduğu kabul edilsin, önceki ispattaki gibi  $(p', \gamma')$  fiber noktasını üretebiliriz.  $(p, \gamma)$  ve  $(p', \gamma')$  fiber noktalarının gerdiği doğrunun üyelik derecesi  $\gamma \wedge \gamma' > \alpha$  dır.  $\beta \wedge \beta' \geq \gamma \wedge \gamma'$  olduğundan (ii) sağlanır.  $\square$

Bundan sonra, (i) ya da (ii) koşullarından birini sağlayan üçgensel norma **uygun üçgensel norm** denir.

#### 4.0.10.1 $P$ Taban Düzlemlili $FP$ nin Bazı Özellikleri

Bu kısımda bazı klasik konfigürasyonlar incelenecek ve fiber projektif düzlemlere genişletilecektir. Daha önce sadece minimum operatör için dezarg konfigürasyonuna bakılmıştı. Şimdi herhangi uygun üçgensel norm için Dezarg konfigürasyonunun sağlandığı görülecektir.

**Teorem 4.4** Dezargsel bir  $P$  taban düzlemlili  $FP$  fiber projektif düzlem olsun.  $FP$  de doğruduş olmayan taban noktaları ile  $(a_1, \alpha_1), (a_2, \alpha_2)$  ve  $(a_3, \alpha_3)$  fiber noktalarını ve yine taban noktaları doğruduş olmayan  $(b_1, \beta_1), (b_2, \beta_2)$  ve  $(b_3, \beta_3)$  fiber noktalarını alınsın.  $i \in \{1, 2, 3\}$  için  $(\langle a_i, b_i \rangle, \alpha_i \wedge \beta_i)$  fiber doğruları  $FP$  nin  $(p, \gamma)$  noktasında kesişsinler. O zaman  $(\langle a_i, a_j \rangle, \alpha_i \wedge \alpha_j)$  ve  $(\langle b_i, b_j \rangle, \beta_i \wedge \beta_j)$  fiber doğrularının arakesiti ile elde edilen  $(c_{\{i,j\}}, \gamma_{\{i,j\}})$  fiber noktaları doğruduştur.

**İspat.**  $(\langle a_i, b_i \rangle, \alpha_i \wedge \beta_i)$ ,  $i = \{1, 2, 3\}$  doğruları  $FP$  nin  $(p, \gamma)$  noktasında kesiştiğine göre  $a_i \neq b_i \neq p$  dir.

$$\begin{aligned} (p, \gamma) &= (\langle a_1, b_1 \rangle \cap \langle a_2, b_2 \rangle, \alpha_1 \wedge \beta_1 \wedge \alpha_2 \wedge \beta_2) \\ &= (\langle a_1, b_1 \rangle \cap \langle a_3, b_3 \rangle, \alpha_1 \wedge \beta_1 \wedge \alpha_3 \wedge \beta_3) \\ &= (\langle a_2, b_2 \rangle \cap \langle a_3, b_3 \rangle, \alpha_2 \wedge \beta_2 \wedge \alpha_3 \wedge \beta_3) \end{aligned}$$

$i \neq j, \{i, j\} \subseteq \{1, 2, 3\}$  için  $\gamma = \alpha_i \alpha_j \beta_i \beta_j$  hesaplanır.

$$(\langle a_2, a_3 \rangle, \alpha_2 \wedge \alpha_3) \cap (\langle b_2, b_3 \rangle, \beta_2 \wedge \beta_3) = (c_{\{2,3\}}, \gamma_{\{2,3\}})$$

$c_{\{2,3\}} = \alpha_2 \wedge \alpha_3 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3$  olur.

$$(\langle a_1, a_3 \rangle, \alpha_1 \wedge \alpha_3) \cap (\langle b_1, b_3 \rangle, \beta_1 \wedge \beta_3) = (c_{\{1,3\}}, \gamma_{\{1,3\}})$$

$c_{\{1,3\}} = \alpha_1 \wedge \alpha_3 \wedge \beta_1 \wedge \beta_3$  olur.

$i, j, k = 1, 2, 3$  olmak üzere  $(c_{\{i,j\}}, \gamma_{\{i,j\}})$  ve  $(c_{\{i,k\}}, \gamma_{\{i,k\}})$  noktaları tarafından gerilen doğrunun üyelik derecesi

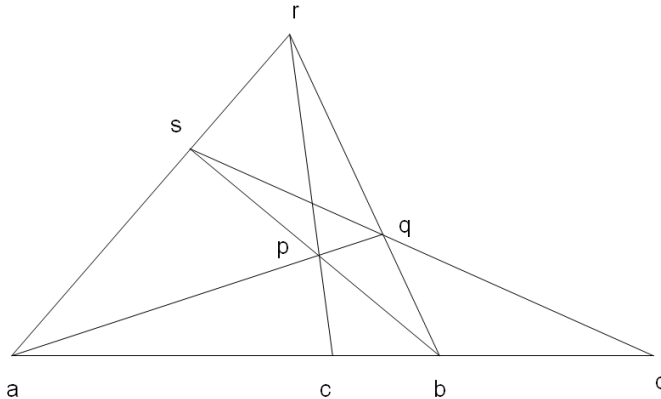
$$\begin{aligned} \gamma_{\{i,j\}} \wedge \gamma_{\{i,k\}} &= \alpha_i \wedge \alpha_j \wedge \beta_i \wedge \beta_j \wedge \alpha_i \wedge \alpha_k \wedge \beta_i \wedge \beta_k \\ &= \gamma \wedge \gamma \end{aligned}$$

olup  $i$  den bağımsızdır.  $\square$

Şimdi fiber projektif düzlemlerin harmonik eşleniklere göre nasıl davrandığı incelenecektir. Bu nedenle Fano aksiyomunu sağlayan taban düzlemlerde çalışmaya ihtiyaç vardır. 7 nokta üzerindeki projektif düzleme izomorf herhangi bir alt düzlem yoktur. Bu ise taban düzlemi bu Fano aksiyomunu sağlayan fiber alt düzleminin olmamasına denktir. Çünkü bir alt düzlemin noktalarına ve doğrularına eşleşen fuzzy kümelere kısıtlaması bir fiber düzlem tanımlar. Bu yüzden  $P$  nin Fano aksiyomunu sağladığı kabul edilecektir.

**Tanım 4.5**  $FP$ , taban projektif düzlemi  $P$  olan bir fiber projektif düzlem olsun.  $(a_1, \alpha_1), (a_2, \alpha_2), (a_3, \alpha_3)$  ve  $(a_4, \alpha_4)$  olacak şekilde dört fiber nokta seçelim.  $FP$  de herhangi üçü doğruduş olmayan taban noktalarından elde edilen fiber noktaları **fiber köşeler** olarak adlandırılır. Bu dört fiber nokta altı, fiber doğru  $(A_{\{i,j\}}, B_{\{i,j\}}) =: (\langle a_i, a_j \rangle, \alpha_i \wedge \alpha_j)$ ,  $i \neq j, i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$  ( f-kenar olarak adlandırdığımız) ve üç fiber nokta  $(A_{\{i,j\}} \cap A_{\{k,l\}}, \alpha_i \wedge \alpha_j \wedge \alpha_k \wedge \alpha_l)$ ,  $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$  (f-diagonal noktalar) **f-tam dörtgen** olarak adlandırılır.

**Tanım 4.6**  $a, b, c, d$  Fano aksiyomunu sağlayan bir projektif düzlemde doğruduş dört nokta olsun. Eğer  $a$  ve  $b$  herhangi bir tamdörtgenin (örneğin  $pqrs$  tamdörtgeninin iki köşegen noktaysa (örneğin  $a = pq \wedge rs$  ve  $b = qr \wedge ps$  ise) ve  $c$  ile  $d$  tamdörtgenin geri kalan karşılıklı iki kenarı üzerinde bulunursa (örneğin  $c \sim pr$  ve  $d \sim qs$  ise)  $a, b, c, d$  sıralı nokta dörtlüsüne **harmonik nokta dörtlüsü** ya da kısaca **harmonik noktalar** denir ve genel olarak  $H(ab, cd)$  ile gösterilir (Şekil 4.1 bakınız.), (Kaya, 2005).

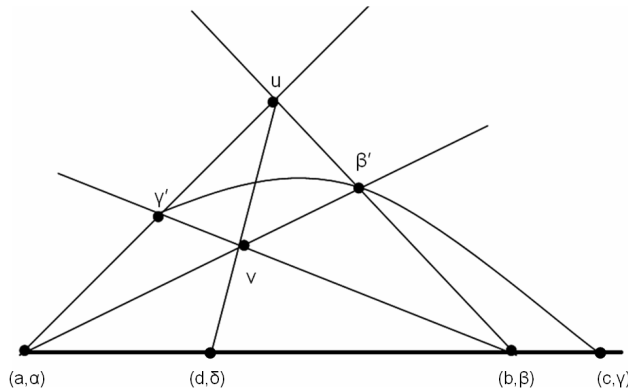


**Şekil 4.1**

Aşağıdaki teorem fiber projektif düzlemlerde 4. fiber eşleniğin tanımı için temel teşkil eder.

**Teorem 4.7**  $FP, P$  taban düzlemlili fiber projektif düzlem olsun.  $a, b, c; P$  de doğruduş üç nokta ve  $(a, \alpha), (b, \beta), (c, \gamma), FP$  de üç fiber nokta olsun. Varsayalım ki  $\langle a, b \rangle$  üzerindeki  $d$  noktası,  $a$  ve  $b$  nin iki köşe nokta ve  $c$  nin diagonal nokta olduğu tamdörtgen de diğer iki diagonal noktayı birleştiren doğru ile  $\langle a, b \rangle$  nin arakesit noktası olsun. O zaman  $(a, \alpha), (b, \beta)$  nin fiber köşeler ve  $(c, \gamma)$  fiber diagonal nokta olduğu herhangi bir fiber tamdörtgeninde farklı diğer iki köşegen noktanın birleştirilmesi ile elde edilen doğrunun  $(\langle a, b \rangle, \alpha \wedge \beta)$  ile birleştirilmesi elde edilen  $(d, \delta)$  noktası, fiber dörtgeninin seçiminden bağımsızdır.

**İspat.**



**Şekil 4.2**

$(a, \alpha)$  ve  $(b, \beta)$  nin iki köşe olduğu tam dörtgende (Şekil 4.2) diğer iki köşe keyfi  $\alpha'$  ve  $\beta'$  üyelik derecelerine sahip olsun.  $\gamma = \alpha \wedge \beta \wedge \alpha' \wedge \beta'$  olduğu kolayca hesaplanabilir.  $u$  nun üyelik derecesi,  $\beta \wedge \beta' \wedge \alpha \wedge \alpha'$  ve  $v$  nin üyelik derecesi,  $\alpha \wedge \beta' \wedge \beta \wedge \alpha'$  dür.

$$\begin{aligned} \delta &= (\beta \wedge \beta' \wedge \alpha \wedge \alpha') \wedge (\alpha \wedge \beta' \wedge \beta \wedge \alpha') \wedge (\alpha \wedge \beta) \\ &= (\alpha \wedge \beta \wedge \alpha' \wedge \beta') \wedge (\alpha \wedge \beta \wedge \alpha' \wedge \beta') \wedge (\alpha \wedge \beta) \\ &= \gamma \wedge \gamma \wedge \alpha \wedge \beta \end{aligned}$$

olup, buna göre  $\delta$  fiber tamdörtgeninin seçiminden bağımsızdır. Belirtelim ki, iki doğrunun arakesiti olan  $(c, \gamma)$  varlığı için garanti yoktur. Bundan dolayı  $(a, \alpha), (b, \beta), (c, \gamma)$   $f$ -doğruduş olsa bile  $(d, \delta)$  bulunmayabilir. Eğer varsa,  $(d, \delta)$   $f$ -noktasına  $(a, \alpha), (b, \beta), (c, \gamma)$  nin 4.  $f$ -eşlenik noktası denir. Crisp durumunda  $c, (a, b, d)$  nin 4. eşlenik noktasıdır. Fiber durumda böyle bir bağıntı genelde sağlanmaz.  $\square$

**Teorem 4.8** Bir  $\wedge$  üçgensel norm verilsin. Bu durumda  $\wedge$  bir minimum operatör olması için gerek ve yeter koşul taban noktaları doğrudan her  $((c, \gamma), (a, \alpha), (b, \beta), (d, \delta))$  fiber nokta dördlüsü için  $(c, \gamma), ((a, \alpha), (b, \beta), (d, \delta))$  ya göre 4.  $f$ -harmonik eşlenikken  $(d, \delta)$   $f$ -noktasının  $((a, \alpha), (b, \beta), (c, \gamma))$  ya göre  $f$ -harmonik eşlenik olmasıdır.

**İspat.**  $(\Leftarrow)$   $(d, \delta), ((a, \alpha), (b, \beta), (c, \gamma))$  ya harmonik eşlenik olsun. O zaman

$$\delta = \alpha \wedge \beta \wedge \gamma \wedge \gamma \leq \gamma \quad (1)$$

dir. Eğer  $(c, \gamma), ((a, \alpha), (b, \beta), (d, \delta))$  ya göre eşlenik ise

$$\gamma = \alpha \wedge \beta \wedge \delta \wedge \delta < \delta \quad (2)$$

dir. (1) ve (2) den  $\gamma = \delta$  dır.  $\gamma = \alpha \wedge \beta \wedge \gamma \wedge \gamma$  elde edilir.  $\alpha$  ve  $\beta$  yerine 1 alınırsa  $\gamma = 1 \wedge 1 \wedge \gamma \wedge \gamma$  dan  $\gamma = \gamma \wedge \gamma$  dır. Sonuç olarak  $\gamma$  idempotenttir. Bir elemanın idempotent olması için gerek ve yeter şart üçgensel normun minimum operatör olmasıdır. Bu yapıdan minimum operatörün en doğal operatör olduğu söylenebilir.  $\alpha \neq \beta$  olabilir. Hesaplamalardan kolaylıkla  $\gamma = \delta = \min\{\alpha, \beta\}$  olduğu görülebilir. Bu yüzden  $\{(a, \alpha), (b, \beta)\}$  ve  $\{(c, \gamma), (d, \delta)\}$  çiftleri arasında simetri yoktur.  $\square$

Yukarıdaki notasyonlarda,  $c$  ve  $d$  noktaları farklıdır. Fiber durumda, taban düzleminde Fano aksiyomu sağlanmasa bile  $c = d$  iken  $(c, \gamma) \neq (d, \delta)$  elde edilebilir. Fakat minimum operatör kullanılırsa, Fano aksiyomu sağlanmazsa teori aşikar olur.

**Tanım 4.9 (Reidemeister Şartı)**  $p, r, q$  farklı üç nokta  $A, B, C$  de  $P$  de noktadaş olan  $rq \neq A, B, C$ ;  $r \approx A, B, C$ ;  $q \approx A, B, C$  özelliklerine sahip üç doğru olsun. Eğer  $A$  üzerinde  $a \approx rq$ ,  $a_i \neq P$  olacak biçimde  $a_1, a_2$  noktaları alınır ve

$$b_i = B \wedge ra_i, c_i = c \wedge qa_i, d_i = qb_i \wedge rc_i \quad i = 1, 2$$

denirse  $p, d_1, d_2$  noktaları doğrudan olur.

Bu şartı sağlayan konfigürasyona Reidemister konfigürasyonu denir. (Kaya, 2005).

#### 4.0.11 Fiber Reidemeister Şartı (FRC)

$i = 1, 2$  için  $a_i, b_i, c_i$  noktaları üçgen oluşturacak şekilde  $((a_i, \alpha_i), (b_i, \beta_i), (c_i, \gamma_i))$  fiber noktalar olsun. Varsayalım ki  $(a_1, \alpha_1)$  ve  $(a_2, \alpha_2)$ ,  $(b_1, \beta_1)$  ve  $(b_2, \beta_2)$ ,  $(c_1, \gamma_1)$  ve  $(c_2, \gamma_2)$  ile gerilen fiber doğruları noktadaş olsun. Bu  $f$ -noktaları  $(r, \omega)$  noktasında kesişirler.  $i = 1, 2$  için

$(a_i, \alpha_i)$  ve  $(b_i, \beta_i)$  noktaları tarafından gerilen fiber doğruların arakesiti  $(p, \eta)$  olsun.  $i = 1, 2$  için  $(a_i, \alpha_i)$  ve  $(c_i, \gamma_i)$  noktaları tarafından gerilen fiber doğrularının arakesit noktası  $(q, \zeta)$  olsun.  $i = 1, 2$  için  $(q, \zeta)$  ve  $(b_i, \beta_i)$  ile gerilen  $f$ -doğru ile  $(p, \eta)$  ve  $(c_i, \gamma_i)$  noktaları tarafından gerilen fiber doğrusunun arakesiti  $(d_i, \delta_i)$  olsun. O zaman  $(r, \omega)$ ,  $(d_1, \delta_1)$  ve  $(d_2, \delta_2)$   $f$ -noktaları fiber doğrudastırlar.

Reidemister konfigürasyonunda bütün üyelik derecelerine 1 vererek Klasik Reidemeister Şartı elde edilir.

Eğer  $a, b \in [0, 1]$  için  $a \wedge a \wedge a \wedge \dots \wedge a$  y1  $a^n$  ve  $a \wedge b$  yi  $ab$  ile gösterilirse daha kolay işlem yapılabilir.

$$i = 1, 2 \text{ için } \omega = \alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2 = \alpha_1 \alpha_2 \gamma_1 \gamma_2 = \beta_1 \beta_2 \gamma_1 \gamma_2, \delta_i = \omega^2 \beta_i \gamma_i$$

olur. Böylece  $r, d_1, d_2$   $P$  de doğrudast ise  $(r, \omega)$ ,  $(d_1, \delta_1)$  ve  $(d_2, \delta_2)$  doğrudast olması için gerek ve yeter şart

$$\omega^5 = \omega^3 \beta_1 \gamma_1 = \omega^3 \beta_2 \gamma_2$$

olmasıdır.

Aşağıdaki teorem, Crisp projektif düzlemin desargsel olması için gerek ve yeter şartın Klasik Reidemister şartının sağlanması gerektiğini belirtmektedir.

**Teorem 4.10**  $\wedge$  bir üçgensel norm olsun.  $P$  herhangi dezargsel düzlem ve  $\mathcal{F}\mathcal{P}$ ,  $P$  taban düzlemlerinde herhangi bir fiber projektif düzlem olsun. O zaman  $\mathcal{F}\mathcal{P}$  nin  $(FRC)$  yi sağlayan veya sağlamayan  $\wedge$  operatörü seçilebilir.  $\wedge = \min$  operatör sağlar ancak minimum operatör tek değildir.

**İspat.**  $a \wedge b = ab$  ise ve  $(FRC)$  yi sağlıyorsa en azından bir üyelik derecesi 1 e eşit olmasın.  $\omega \neq 1$  olsun, fakat yukarıdaki hesaplamalardan  $i = 1, 2$  için  $\omega^5 = \omega^3 \beta_i \gamma_i$  den  $\beta_i \gamma_i = \omega^2$  dir.

$$\omega^4 = \omega^2 \omega^2 = \beta_1 \gamma_1 \beta_2 \gamma_2 = \omega$$

den  $\omega^3 = 1$  sonucuna ulaşılır. Bu bir çelişkidir. Açıkça,  $\wedge$  minimum operatörü kullanarak  $i = 1, 2$  için  $\omega^5 = \omega^3 \beta_i \gamma_i$  elde ederiz.  $\forall a, b \geq \frac{1}{2}$  için  $a \wedge b = \frac{1}{2}$  biçiminde tanımlanan operatör de  $FRC$  yi sağlar.  $\square$

# BÖLÜM 5

## Sonuç ve Öneriler

Matematikte pek çok teorinin fuzzy karşılığı vardır ve fiber geometriler bir çeşit özel fuzzy geometrilerdir.

Fiber geometri kavramı ilk defa Leen Kuijken ve H. Van Maldeghem tarafından çalışılmıştır. Çalışmalarında fiber projektif düzlemler, fiber genelleştirilmiş poligonları ve bulaşıcı değer teorisi yer almaktadır. Genel olarak, incidence geometrilerde fiber nokta, fiber doğru kavramlarını tanımlamışlar, özel olarak bazı klasik teoremlerde fiber projektif düzlemlerde fiber karşılıklarını vermişlerdir. (Kuijken L, Maldeghem H. V., 2002).

Fiber projektif düzlemlerde farklı üçgensel normların rolü A.Bayar, S. Ekmekçi ve Z. Akça tarafından incelenmiştir. Çalışmalarında hangi üçgensel normlar için fiber projektif düzlemlerin var olup olmadığı araştırılmıştır. Farklı üçgensel normlar için geometrik özelliklerin geçerlilikleri incelenmiştir (Bayar A., Ekmekçi S., Akça Z.,2008).

Bu çalışmada yukarıda sözü edilen çalışmalar esas alınmıştır.

Birinci bölümde Fuzzy küme teorisi, vektör uzayları ve projektif geometrideki temel tanım ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde fuzzy vektör uzayları ile fuzzy projektif uzaylar arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

Üçüncü bölümde genel incidence geometrilerde fiber nokta, fiber doğru kavramları verilmiş, fiber projektif düzlemler incelenmiş ve klasik teoremlerin fiber versiyonlarına bakılmıştır. Ayrıca uygulama olarak bulaşıcı değerler kavramlarına değinilip özellikleri verilmiştir.

Son bölümde minimum operatörden farklı üçgensel normlarla elde edilen fiber projektif düzlemler ve bu düzlemlerde bazı geometrik özelliklerin fiber versiyonları incelenmiştir.

Projektif düzlemlerde yapılan bu çalışma projektif uzaylara genişletilmesi teoriye çeşitlilik katıp, katkı sağlayacaktır.

# KAYNAKLAR DİZİNİ

- Bayar A., Ekmekçi S. ve Akça Z., 2008, A Note On Fibered Projektive Plane Geometry, Information Sciences 178, 1257-1262 p.
- Lubczonok P., Fuzzy vector spaces, Fuzzy Sets and Systems 38 (1990) 329-343 p.
- Karakaş H. İbrahim, 1998, Soyut Cebire Giriş, 1-6, 140-143 s.
- Kaya, R., 1992, Projektif Geometri, Osmangazi Üniversitesi Yayınları, 66-76 s.
- Klement E. Peter, Mesiar Radko and Pap Endre, 2000, Triangular norms, 3-14 p.
- Kuijken L, Maldeghem H. V., 2002, Fibered Geometries, Discrete Mathematics 255, 259-274 p
- Kuijken, L., Maldeghem, H. V. and Kerre, E., 1999, Fuzzy Projektive Geometries From Fuzzy Groups, Tatra Mountains Mathematical Publication, 16, 95-108 p.
- Kuijken L, Maldeghem H. V. and Kerre E., 1999, Fuzzy Projektive Geometries From Fuzzy Vector Spaces, Proceedings of IPMU, 1331-1338 p.
- Tits, J., Generalized Polygons, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. 2, 1959, 14-60 p.
- Zadeh, L.A., 1965, Fuzzy Sets, Volume 8, 338-353 p.