34020

Ondokuz Mayıs Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

$B_w^p(G)$ UZAYI VE BAZI ÖZELLİKLERİ

SELİM NUMAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SAMSUN

Ağustos - 1994

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü

$B_w^p(G)$ UZAYI VE BAZI ÖZELLİKLERİ

SELİM NUMAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Danışman: Prof.Dr. A.Turan GÜRKANLI

SAMSUN

Ağustos - 1994

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü

Bu çalışma jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Prof.Dr. A.Turan GÜRKANLI

Üye : Yrd.Doç.Dr. Murteza YILMAZ

Üye : Yrd.Doç.Dr. Birsen DUYAR

ONAY

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım. 17.10./1994

Prof.Dr. Veysel KARTAL
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ABSTRACT

This thesis consists of three chapters, namely first chapter(Preliminaries), second and third chapters.

In the first chapter we reminded the main definitions and theorems which are used throught the work.

In the second chapter we defined a weighted space $B_w^p(G)=C_o(G)\cap L_w^p(G)$ and proved that $B_w^p(G)$ is a Banach algebra with respect to pointwise multiplication under a sum norm and also a homogeneous Banach space under some assumptions. Moreover we discussed the inclusion properties between the spaces $B_w^p(G)$ and the ideals of these spaces. Finally it is shown that $B_w^p(G)$ a Solid space and a Banach Function space(shortly BF-space).

In the third chapter we showed that the spaces $B_w^1(G)$ is a Banach algebra with respect to convolution for $p=1$ and a Segal algebra under some assumptions. It is also proved that this space is a L_w^1- Banach ideal and abstract Segal algebra over $L_w^1(G)$. Finally, we obtained the maximal ideal space of $B_w^1(G)$.

ÖZET

Üç Bölümden oluşan bu çalışmanın önbilgiler başlığı altındaki 1.Bölümde tezde kullanılan önemli tanım ve teoremler verildi.

2. Bölümde önce Beurling'in **w ağırlık fonksiyonu** kullanılarak bir $B_w^p(G)=C_o(G)\cap L_w^p(G)$ uzayı ve bu uzayda bir norm tanımlanıp, bunun noktasal çarpma işlemine göre bir Banach cebiri olduğu gösterildi. Yine bu uzayın bazı koşullar altında bir homogen Banach uzayı olduğu ispatlandı. Ayrıca $B_w^p(G)$ uzayları arasındaki kapsama özellikleri ve idealleri incelendi. Bölümün sonunda ise bu uzayın bir Solid uzay ve Banach fonksiyon uzayı(BF-uzayı) olduğu gösterildi.

3. Bölümde özel olarak $p=1$ için $B_w^1(G)$ uzayının girişim işlemine göre Banach cebiri olduğu ve bazı koşullar altında Segal cebiri olduğu ispatlandı. Bundan başka bu uzayın $L_w^1(G)$ uzayında bir Banach ideali ve soyut Segal cebiri olduğu gösterildi. Son olarak $B_w^1(G)$ uzayının maksimal ideal uzayı bulundu.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmayı yaparken bana yol gösterip, her türlü yardımlarını esirgemeyen Değerli Hocam Sayın, Prof.Dr. A.Turan GÜRKANLI'ya teşekkürü borç bilirim.

Ayrıca çalışmamın incelenmesinde yardımlarını esirgemeyen Yrd.Doç.Dr. Birsen DUYAR'a ve tezimi büyük bir titizlikle daktilo eden Bölüm Sekreterimiz Nuran KARAKUM'a teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

GİRİŞ

Üç bölümden oluşan bu tezin 1.Bölümünde çalışmamızda kullanılan önemli tanım ve teoremler, 2. ve 3. Bölümlerinde ise yapılan çalışmalar verildi.

Bu çalışmada kullandığımız w ağırlık fonksiyonunun tanımı ilk defa A.Beurling tarafından 1938 yılında(Beurling, [1]) çalışmasında verildiğinden bu ağırlık fonksiyonu Beurling'in ağırlık fonksiyonu, bundan yararlanılarak tanımlanan ve $L_w^1(G)$ ile gösterilen $L_w^1(G)$ uzayı da Beurling cebiri olarak bilinir. Benzer biçimde tanımlanan ve $L_w^p(G)$ ile gösterilen ağırlıklı $L^p(G)$ uzaylarının bazı özellikleri de (Gürkanlı, [7]) çalışmasında bulunabilir.

Çalışmanın 2. Bölümünde ise $1 \leq p < \infty$ ve w, G üzerinde tanımlı ağırlık fonksiyonu olmak üzere $B_w^p(G)=C_o(G) \cap L_w^p(G)$ uzayı tanımlanarak bu uzayın tanımlanan bir $\|\cdot\|_B$ normu altında Banach uzayı ve noktasal çarpma işlemine göre Banach cebiri olduğu gösterildi. Sonra (Fischer-Gürkanlı-Liu, [6]) çalışmalarından da yararlanılarak $B_w^p(G)$ uzayının ötelemeler altında invaryant ve karakter invaryant olduğu; ötelemelerin bu uzayda sürekli olduğu incelendi. Yine, W=K (K=sabit sayı) için homogen Banach uzayı olduğu gösterildi. Ayrıca $B_w^p(G)$ uzayları arasındaki kapsama özellikleri ve idealleri incelendi. Yine, $B_w^p(G)$ uzayının $C_o(G)$ uzayında heryerde yoğun ve Segal cebiri olduğu ve son olarak da bu uzayın Solid ve Banach Fonksiyon uzayı(BF-uzayı) olduğu gösterildi.

3.Bölümde ise $B_w^p(G)$ uzayının p=1 için özel hali olan $B_w^1(G)$ uzayı ele alınarak bunun girişim işlemine göre Banach cebiri olduğu gösterildi. Sonra W=K ($K \in R$, sabit sayı) için Segal cebiri olduğu ispatlandı. Yine $B_w^1(G)$ uzayının $C_o(G)$ ve $L_w^1(G)$ uzaylarında her yerde yoğun olduğu, ayrıca bu uzayın $L_w^1(G)$ uzayında Banach ideal ve soyut Segal cebiri olduğu gösterildi. Son olarak $B_w^1(G)$ uzayının maksimal ideal uzayı $\Delta_{B_w^1}$ ile $L_w^1(G)$ uzayının maksimal ideal uzayı $\Delta_{L_w^1}$ nın aynı olduğu ispat edildi.

I. BÖLÜM

ÖNBİLGİLER

1.1. Tanım: X bir topolojik lokal kompakt uzay, f X de tanımlı, karmaşık değerli, sürekli bir fonksiyon olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısı için her $y \in X - K$ olduğunda $|f(y)| < \varepsilon$ koşulunu sağlayan X uzayının bir K kompakt alt kümesi varsa, f fonksiyonuna sonsuzda sıfırdır denir.

X üzerinde sonsuzda sıfır olan fonksiyonların kümesini $C_o(X)$ ile göstereceğiz(Rudin,[14]).

1.2. Tanım: X bir topolojik uzay, E bir vektör uzayı, f de X kümesinden E uzayına bir fonksiyon olsun.

$$\{x \mid x \in X \text{ ve } f(x) \neq 0\}$$

kümesinin kapanışına f fonksiyonunun desteği(veya dayanağı) denir ve suppf ile gösterilir.

X lokal kompakt uzay olmak üzere X üzerinde tanımlı, karmaşık değerli, sürekli, kompakt destekli fonksiyonların vektör uzayını $C_c(X)$ ile göstereceğiz(Rudin,[14]).

1.3. Tanım: G lokal kompakt Abel grubu olsun. G üzerinde negatif olmayan, sıfırdan farklı, ötelemeler altında invaryant olan her dx regüler ölçümüne G üzerinde bir Haar ölçümü denir.

Her lokal kompakt Abel grubu üzerinde bir Haar ölçümünün varlığı biliniyor(Reiter,[11]).

1.4. Tanım: X bir topolojik uzay olsun. X uzayındaki tüm açık kümeleri kapsayan β en küçük σ-cebirine Borel cebiri, β nın her elemanına da Borel kümesi denir.

β, Borel cebiri olmak üzere (X,β) ölçülebilir uzayından (Y,τ) topolojik uzayına giden herhangi bir f fonksiyonu verilsin. Y uzayındaki herhangi bir V açık kümesi için $f^{-1}(V)\in\beta$ oluyorsa, f ye ölçülebilir bir fonksiyon denir.

f ve g fonksiyonları G lokal kompakt Abel grubu üzerinde birer Borel fonksiyonu olsunlar. Bu fonksiyonların girişimi $f*g$ simgesi ile gösterilir ve

$$(f*g)(x)=\int_G f(x-y)g(y)dy$$

biçiminde tanımlanır. Bu girişimin tanımlı olması için

$$\int_G |f(x-y)g(y)|dy<\infty$$

olmalıdır(Rudin,[14]).

1.5. Tanım: X, K cismi üzerinde vektör uzayı olsun. Eğer $(\cdot)$ işlemi aşağıdaki koşulları sağlıyorsa X kümesine K üzerinde bir cebirdir denir.

(i) Her $x,y,z\in X$ için $x.(y.z)=(x.y).z$

(ii) Her $x,y,z\in X$ için $x.(y+z)=x.y+x.z$
$(x+y).z=x.z+y.z$

(iii) Her $x,y\in X$ ve her $\alpha,\beta\in K$ için $(\alpha x)(\beta y)=(\alpha\beta)(x.y)$.

Eğer $K=\mathbb{C}$ ise X uzayına karmaşık cebir, $K=\mathbb{R}$ ise reel cebir denir.

X bir cebir ve her $a\in X$ için $a.1_x=1_x.a=a$ olacak şekilde $1_x\in X$ varsa X cebirine birimli cebir denir.

Yine $(X,\|\cdot\|)$ K cismi üzerinde normlu uzay olsun. Eğer X bir cebir ve her $x,y\in X$ için

$$\|xy\|\leq\|x\|\ \|y\|$$

koşulu sağlanıyorsa X cebirine bir normlu cebir denir. Yine $(X,\|\cdot\|)$ normlu uzayı bir Banach uzayı ise bu taktirde X uzayına Banach cebiri denir (Larsen,[9]).

1.6. Tanım: X,K cismi üzerinde vektör uzayı τ da onun üzerinde bir topoloji olsun. Eğer,

$$X x X \rightarrow X$$

$$(x,y) \rightarrow x+y$$

ve

$$K x X \rightarrow X$$

$$(\alpha,x) \rightarrow \alpha x$$

dönüşümleri sürekli iseler bu τ topolojisi X vektör uzayı ile uyuşuyor denir. Böyle bir vektör uzayı ise topolojik vektör uzayı olarak adlandırılır.

1.7. Tanım: $(B,\|\cdot\|_B)$ bir Banach uzayı ve $(A,\|\cdot\|_A)$ bir Banach cebiri olsun. AxB den B içine tanımlanan $\otimes$ işlemi aşağıdaki özellikleri sağlarsa B uzayına A üzerinde Banach modülü veya bir Banach A-modülüdür denir.

(i) Her $f,g\in A$ ve her $h,k\in B$ için

$$(f+g)\otimes h=(f\otimes h)+(g\otimes h)$$

$$f\otimes(h+k)=(f\otimes h)+(f\otimes k)$$

(ii) Her $f,g\in A$ ve her $h,k\in B$ için

$$(f x g)\otimes h=f\otimes(g\otimes h)$$

(Burada x A uzayındaki iç çarpımdır.)

(iii) Her $f\in A$, her $h\in B$ ve her $a\in ₵$ için

$$a(f\otimes h)=(af)\otimes h=f\otimes(ah)$$

(iv) Her $f \in A$ ve her $h \in B$ için

$$\|f * h\|_B \leq \|f\|_A \cdot \|h\|_B$$

1.8. Tanım: A değişmeli bir Banach cebiri olsun. Her $x \in A$ için

$$\lim_{\alpha} \|U_\alpha . x - x\| = 0$$

koşulunu sağlayan $\{U_\alpha\} \subset A$ ağına A cebirinin yaklaşık birimi denir.

A cebirinin birimi e olsun. Eğer her α için $U_\alpha = e$ alınırsa bu taktirde $\{U_\alpha\}$ nın A nın yaklaşık birimi olduğu açıktır(Larsen, [9]).

Yine G lokal kompakt Abel grubu olmak üzere, $L^1(G)$ uzayı girişim işlemine göre bir Banach cebiri olup, birimi olmadığı halde yaklaşık birimi vardır(Larsen, [9]).

$(A, \|\cdot\|_A)$ bir normlu cebir olsun. Eğer her $x \in A$ ve $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık

$$\|x - u_1(x)x\|_A < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $u_1(x) \in A$ varsa, A normlu cebiri sol yaklaşık birimsele sahiptir denir. Yine her $x \in A$ ve $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık

$$\|x - xu_2(x)\|_A < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $u_2(x) \in A$ varsa, A normlu cebiri sağ yaklaşık birimsele sahiptir diyeceğiz. Eğer A normlu cebirinin her sol yaklaşık birimseli aynı zamanda sağ yaklaşık birimseli ise A, yaklaşık birimsele sahiptir denir(Doran-Wichmann. [4]).

Ayrıca $\{U_\alpha\}$, A Banach cebirinin yaklaşım birimi ise aynı zamanda yaklaşık birimseli olduğunu göstermek kolaydır.

Şimdi de çalışmamız boyunca sık sık kullanacağımız ağırlık fonksiyonu ve ağırlıklı L^p uzayı tanımlarını verelim:

1.9. Tanım: Bir G lokal kompakt grubu üzerinde tanımlı, reel değerli bir w fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlasın.

(i) Her $x\in G$ için $w(x)\geq 1$

(ii) Her $x,y\in G$ için $w(xy)\leq w(x)w(y)$

(iii) w fonksiyonu ölçülebilir ve lokal sınırlı.

Bu w fonksiyonuna ağırlık fonksiyonu denir (Beurling anlamında). Bundan yararlanarak $L_w^p(G)$ ile gösterilen ağırlıklı L^p uzayı $(1\leq p<\infty)$

$$L_w^p(G)=\{f \mid fw\in L^p(G)\}$$

biçiminde tanımlanır. $L_w^p(G)$ uzayı

$$\|f\|_{p,w}=\{\int_G |f(x)|^p \, w^p(x)dx\}^{1/p}$$

normuna göre bir Banach uzayı olup $p=1$ için bu uzay girişim işlemine göre bir Banach cebiridir. Bu cebir de Beurling cebiri olarak bilinir (Reiter [11]).

G üzerinde tanımlı, karmaşık değerli ve esastan sınırlı fonksiyonların uzayını $L_w^\infty(G)$ ile gösterelim. Bu uzay $\phi\in L_w^\infty(G)$ için

$$\|\phi\|_{\infty,w}=\operatorname*{ess\,sup}_{x\in G}\left|\frac{\phi(x)}{w(x)}\right|$$

normuna göre bir Banach uzayıdır. Bu uzaya $L_w^1(G)$ nin dual uzayı denir. Yine $f\in L_w^1(G)$ ve $\phi\in L_w^\infty(G)$ olmak üzere

$$\phi(f)=\langle f,\phi\rangle=\int_G f(x)\phi(x)dx$$

olarak tanımlanır.

G üzerinde herhangi iki w_1,w_2 ağırlık fonksiyonu verildiğinde eğer her $x\in G$ için $w_2(x)\leq c.w_1(x)$ olacak şekilde $c>0$ reel sayısı varsa w_2,w_1 ağırlık fonksiyonundan önde gelir denir ve $w_2<w_1$ şeklinde gösterilir. Eğer $w_2<w_1$ ve $w_1<w_2$ ise w_1 ve w_2 ağırlık fonksiyonları denktir denir ve bu $w_1\sim w_2$ (veya $w_1\approx w_2$) simgesi ile gösterilir.

Şimdi ilerde kullanacağımız bir teoremin ifadesini vereceğiz.

1.10. Teorem: $\vec{E}$ ve $\vec{F}$ birer Banach uzayı olsunlar. Eğer $u:\vec{E}\to\vec{F}$ fonksiyonu doğrusal, sürekli, birebir ve örtense bu u fonksiyonu $\vec{E}$ uzayından $\vec{F}$ uzayına bir homeomorfizmdir (Cartan [3]).

Bu teoremin sonucu olarak, herhangi bir $\vec{E}$ vektör uzayı hem p_1 hem de p_2 normuna göre bir Banach uzayı ise p_1 ve p_2 normları denktir. Ayrıca $\vec{E}$ bu normlardan birine göre Banach uzayı, diğerine göre Banach uzayı değilse, p_1 ve p_2 normları denk değildir.

1.11. Tanım: G, lokal kompakt Abel grup γ da G üzerinde karmaşık değerli bir fonksiyon olsun. Eğer her $x,y\in G$ için $|\gamma(x)|=1$ ve $\gamma(x+y)=\gamma(x).\gamma(y)$ koşulları sağlanıyorsa γ ya G nin bir karakteri denir. G nin bütün sürekli karakterlerinin kümesini $\hat{G}$ ile gösterelim. Bu $\hat{G}$ kümesi $x\in G$ ve $\gamma_1,\gamma_2\in\hat{G}$ olmak üzere $(\gamma_1+\gamma_2)(x)=\gamma_1(x)\gamma_2(x)$ işlemine göre bir grup oluşturur. Bu gruba G nin karakter grubu (veya dual grubu) denir (Rudin, [13]).

$\mathbb{R}^n$ nin karakter grubunun kendine izomorf olduğu biliniyor (E.Hewit-K.Ross, [8]).

1.12. Tanım: G lokal kompakt Abel grubu olsun. Her

$x,y \in G$ için $|\gamma(x)| \neq 0$ ve $\gamma(x+y)=\gamma(x).\gamma(y)$ koşullarını sağlayan G üzerinde tanımlı, sürekli γ fonksiyonlarına G nin genelleştirilmiş karakteri denir(Wang, [16]).

Buradan G nin her karakterinin bir genelleştirilmiş karakter olduğu açıktır.

Yine $L^1_w(G)$ bir Beurling cebiri ve ϕ de $|\phi(x)| \leq w(x)$ lokal hemen hemen heryerde olmak üzere genelleştirilmiş karakter olsun. Bu taktirde,

$$\sigma_\phi(f)=\int f(x)\overline{\phi(x)}dx$$

şeklinde tanımlanan σ_ϕ dönüşümü $L^1_w(G)$ nin bir kompleks homomorfizmidir. Üstelik $L^1_w(G)$ nin her kompleks homomorfizmi bu yolla elde edilir ve eğer $\sigma_{\phi_1}=\sigma_{\phi_2}$ ise bu taktirde $\phi_1=\phi_2$ olur.

Sonuç olarak $L^1_w(G)$ uzayının maksimal ideal uzayı $\phi \in L^\infty_w(G)$ olmak üzere bütün ϕ genelleştirilmiş karakterlerinin uzayıdır(Wang, [16]).

1.13. Tanım: G lokal kompakt bir Abel grubu, $\hat{G}$ de onun karakter grubu olsun. $f \in L^1(G)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümü, $x \in G$ ve $y \in \hat{G}$ olmak üzere,

$$F(f)(y)=\hat{f}(y)=\int_G f(x)<-x,y>dx$$

şeklinde tanımlanır(Rudin, [13]).

Eğer $G=\mathbb{R}^n$ ise $\hat{G}=\mathbb{R}^n$ olacağından $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümü her $x,y \in \mathbb{R}^n$ için $x=(x_1,x_2,...,x_n)$, $y=(y_1,y_2,...,y_n)$ ve $<x,y>=x_1y_1+x_2y_2+...+x_ny_n$ olmak üzere

$$\hat{f}(y)=\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i<x,y>}f(x)dx$$

şeklindedir(Schwartz, [15]).

1.14. Tanım: G lokal kompakt Abel grubu üzerinde lokal integrallenebilen fonksiyonların vektör uzayı olan $L^1_{\ell oc}(G)$ üzerine $\mathbf{K}$, G nin kompakt alt kümelerinin ailesi ve $K\in\mathbf{K}$ olmak üzere $f \to \|f\|_K = \int_K |f(x)|dx$ biçiminde tanımlanan $(\|f\|_K)_{K\in\mathbf{K}}$ yarınormlar ailesi tarafından oluşturulan lokal konveks topolojiyi koyalım. Eğer bir $(B,\|\cdot\|_B)$ Banach uzayı, $L^1_{\ell oc}(G)$ topolojik vektör uzayı içine sürekli olarak gömülüyorsa yani, her $f\in B$ ve herhangi $K\subset G$ kompakt alt kümesi için

$$\int_K |f(x)|dx \le C_K \|f\|_B$$

olacak şekilde $C_K>0$ sabiti varsa, $(B,\|\cdot\|_B)$ Banach uzayına Banach fonksiyon uzayı (veya kısaca BF-uzayı) denir.

1.15. Tanım: $(B,\|\cdot\|_B)$ bir Banach uzayı olsun. Her $f\in B$, $x\in G$ ve $t\in\hat{G}$ için $M_t f(x)=(x,t)f(x)\in B$ ise B uzayına karakter invaryant denir. Yine B karakter invaryant ve $\|M_t f\|_B=\|f\|_B$ koşulu sağlanıyorsa B kuvvetli karakter invaryanttır denir(Feichtinger-Gürkanlı, [5]).

1.16. Tanım: $(B,\|\cdot\|_B)$ bir Banach uzayı olsun. Her $f\in B$ ve $x,y\in G$ için $L_x f(y)=f(y-x)\in B$ oluyorsa B ötelemeler altında invaryant ve $\|L_x f\|_B=\|f\|_B$ koşulu sağlanıyorsa B ötelemeler altında kuvvetli invaryanttır denir(Feichtinger-Gürkanlı, [5]).

1.17. Tanım: $(B,\|\cdot\|_B)$ bir Banach uzayı olsun. Eğer her $f\in B$ ve $x\in G$ için $L_x f\in B$ ve $\|L_x f\|_B=\|f\|_B$ koşulları sağlanıyorsa, ayrıca G den $(B,\|\cdot\|_B)$ uzayına giden $x \to L_x f$ fonksiyonu sürekli ise bu taktirde B uzayına G üzerinde homogen Banach uzayı denir(Wang, [16]).

1.18. Tanım: G lokal kompakt Abel grubu ve B de

$L^1(G)$ uzayının aşağıdaki koşulları sağlayan bir alt cebiri olsun.

(i) B, homojen Banach uzayıdır.

(ii) $B, \|\cdot\|_{L^1} \leq \|\cdot\|_B$ normuna göre Banach cebiridir.

(iii) B, $L^1(G)$ uzayında $\|\cdot\|_{L^1}$ normuna göre heryerde yoğundur. Bu taktirde B uzayına bir Segal cebiri denir (Wang, [16]).

1.19. Tanım: Aşağıdaki koşulları sağlayan $(B,\|\cdot\|_B)$ normlu uzayına $(A,\|\cdot\|_A)$ Banach cebirine göre soyut Segal cebiri denir.

(i) B, A nın heryerde yoğun ideali ve $\|\cdot\|_B$ normuna göre Banach cebiridir.

(ii) Her $f\in B$ için $\|f\|_A \leq M\|f\|_B$ olacak şekilde bir $M>0$ reel sayısı vardır.

(iii) Her $f,g\in B$ için $\|fg\|_B \leq C\|f\|_A\|g\|_B$ olacak şekilde bir $c>0$ reel sayısı vardır (Burnham, [2]).

1.20. Tanım: Eğer h.h.h $|g(x)| \leq |f(x)|$ koşulunu sağlayan $f\in B$ ve $g\in L^1_{\ell oc}(G)$ verildiğinde $g\in B$ ve $\|g\|_B \leq \|f\|_B$ oluyorsa bu B, BF- uzayına Solid uzay denir. $(B,\|\cdot\|_B)$ uzayının Solid olması için gerekli ve yeterli koşulun B uzayının noktasal çarpma işlemine göre $L^\infty(G)$ üzerinde Banach modülü olması gerektiği biliniyor.

Şimdi ilerde kullanacağımız iki teoremin sadece ifadelerini vereceğiz.

1.21. Teorem: $(B,\|\cdot\|_B)$ uzayı $(A,\|\cdot\|_A)$ cebirinde soyut Segal cebiri ve $(A,\|\cdot\|_A)$ sağ yaklaşık birime sahip olsun. Eğer I, $(A\|\cdot\|_A)$ nın kapalı sağ ideali ise $I\cap B$, $(B,\|\cdot\|_B)$ nın kapalı sağ idealidir ve $I=\overline{I\cap B}^{A}$ olur (R.Doran-Wichmann, [4]).

1.22. Teorem: T, A_1 Banach cebirinden onun heryerde yoğun alt kümesi olan A_2 Banach cebirine bir cebirsel homomorfizm olsun. Bu taktirde T^* adjoint dönüşümü A_2 nin maksimal ideal uzayından, A_1 in maksimal ideal uzayının kapalı bir alt kümesine homeomorfizmdir (Loomis, [10]).

2. BÖLÜM

$B_w^p(G)$ UZAYI VE BAZI ÖZELLİKLERİ

2.1. Tanım: $B_w^p(G)=C_o(G)\cap L_w^p(G)$ diyelim. $C_o(G)$ ve $L_w^p(G)$ bir K cismi üzerinde ($K=\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$) birer vektör uzayı olduğundan $B_w^p(G)$ kümesi de aynı K cismi üzerinde bir vektör uzayı olur. Bu uzay üzerinde $f\in B_w^p(G)$ olmak üzere,

$$\|f\|_B=\|f\|_\infty+\|f\|_{p,w}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Bu, iki normun toplamı olduğundan bir norm olup $(B_w^p(G),\|\cdot\|_B)$ bir normlu uzay olur.

2.2. Teorem: $B_w^p(G)$ uzayı, $\|\cdot\|_B$ normuna göre bir Banach uzayıdır.

İspat: $B_w^p(G)$ normlu uzayında herhangi bir (f_n) Cauchy dizisi verilsin. Cauchy dizisi tanımı gereğince herhangi bir $\varepsilon>0$ sayısı verildiğinde her $m,n\geq n_o$ için

$$\|f_n-f_m\|_B=\|f_n-f_m\|_\infty+\|f_n-f_m\|_{p,w}\leq\varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_o\in\mathbb{N}$ sayısı vardır. Buradan,

$$\|f_n-f_m\|_\infty\leq\varepsilon \quad \text{ve} \quad \|f_n-f_m\|_{p,w}\leq\varepsilon$$

bulunur. Bu ise (f_n) dizisinin $C_o(G)$ ve $L_w^p(G)$ uzayında Cauchy dizisi olduğunu gösterir. $C_o(G)$ ve $L_w^p(G)$ uzayları Banach uzayı olduklarından (f_n) dizisi $C_o(G)$ nin bir $g\in C_o(G)$ ve $L_w^p(G)$ nin bir $f\in L_w^p(G)$ fonksiyonuna yakınsar. Böylece verilen herhangi $\varepsilon>0$ sayısı için her $n\geq n_1$ olduğunda

$$\|f_n-f\|_{p,w}\leq\frac{\varepsilon}{2} \qquad (2\text{-}1)$$

olacak şekilde bir $n_1 \in \mathbb{N}$ sayısı ve her $n \geq n_2$ olduğunda

$$\|f_n - g\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{4} \tag{2-2}$$

olacak şekilde bir $n_2 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır.

(f_n) dizisi $L^p_w(G)$ uzayındaki $\|\cdot\|_{p,w}$ normuna göre f fonksiyonuna yakınsadığından bu dizinin f fonksiyonuna hemen hemen heryerde(h.h.h) yakınsayan bir (f_{n_k})alt dizisi vardır(Royden, [12]). (f_n) dizisinin $C_o(G)$ uzayında Cauchy dizisi olma özelliği kullanılırsa aynı $\varepsilon>0$ sayısı için her $n, n_k \geq n_3$ olduğunda

$$\|f_n - f_{n_k}\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{4} \tag{2-3}$$

olacak şekilde bir $n_3 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Şimdi $n_o = \text{mak}\{n_2, n_3\}$ diyelim. Buradan, her $n_k \geq n_o$ için

$$\|f_{n_k} - g\|_\infty = \|f_{n_k} - f_n + f_n - g\|_\infty \leq \|f_{n_k} - f_n\|_\infty + \|f_n - g\|_\infty$$
$$\leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2} \tag{2-4}$$

olduğundan (f_{n_k}) alt dizisi de g fonksiyonuna düzgün yakınsar. Yine (f_{n_k}) alt dizisi f fonksiyonuna h.h.h. yakınsıyordu. Yakınsamadığı noktaların kümesi A ile gösterelim. $\mu(A)=0$ olur. O halde aynı $\varepsilon>0$ sayısı verildiğinde her $x \in G-A$ için her $n_k \geq m_1$ olduğunda

$$|f_{n_k}(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \tag{2-5}$$

olacak şekilde bir $m_1 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Eğer $m_o = \text{mak}\{m_1, n_o\}$ dersek her $x \in G-A$ ve her $n_k \geq m_o$ için,

$$|f(x) - g(x)| = |f(x) - f_{n_k}(x) + f_{n_k}(x) - g(x)| \leq$$

$$\leq |f_{n_k}(x)-f(x)|+|f_{n_k}(x)-g(x)|\leq$$

$$\leq |f_{n_k}(x)-f(x)|+\|f_{n_k}-g\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

olup böylece h.h.h. $f=g$ elde edilir. Yine $L_w^p(G)$ uzayının elemanları denklik sınıfından oluştuğu için $f=g$ olur. Buradan $k_o=\text{mak}\{n_1,n_2\}$ dersek her $n\geq k_o$ olduğunda

$$\|f_n-f\|_B=\|f_n-f\|_\infty+\|f_n-f\|_{p,w}=\|f_n-g\|_\infty+\|f_n-f\|_{p,w}\leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{2}=\frac{3\varepsilon}{4}<\varepsilon$$

elde edilir. O halde $B_w^p(G)$ uzayı bir Banach uzayıdır.

2.3. Teorem: $B_w^p(G)$ uzayı noktasal çarpma işlemine göre bir Banach cebiridir.

İspat: Önce $B_w^p(G)$ uzayının bir cebir olduğunu gösterelim.

(i) Her $f,g,h\in B_w^p(G)$ alalım.

$$[(f\ g)h](x)=(fg)(x)h(x)=f(x)(g(x)h(x))=f(x)(gh)(x)=$$

$$=[f(gh)](x)$$

olup bu eşitlik her $x\in G$ için doğru olduğundan

$$(fg)h=f(gh) \text{ bulunur.}$$

(ii) Her $f,g,h\in B_w^p(G)$ için

$$[f(g+h)](x)=f(x)(g+h)(x)=f(x)(g(x)+h(x))=$$

$$=f(x)g(x)+f(x)h(x)=(fg)(x)+(fh)(x)$$

eşitliği her $x\in G$ için doğru olduğundan $f(g+h)=fg+fh$ bulunur.

(iii) Her $f,g\in B_w^p(G)$ ve her $\alpha,\beta\in K$ için

$$[(\alpha f)(\beta g)](x)=(\alpha f)(x)(\beta g)(x)=\alpha f(x)\beta g(x)=$$

$$=(\alpha\beta)(f(x)g(x))=(\alpha\beta)(fg)(x)$$

eşitliği her $x\in G$ için doğru olduğundan $(\alpha f)(\beta g)=(\alpha\beta)(fg)$ bulunur. Böylece $B_w^p(G)$ uzayı noktasal çarpma işlemine göre bir cebirdir. Yine her $f,g\in B_w^p(G)$ için

$$\|fg\|_{p,w}=\{\int_G |f(x)g(x)w(x)|^p dx\}^{1/p}\leq$$

$$\leq\sup_{x\in G}|f(x)|\{\int_G |g(x)w(x)|^p dx\}^{1/p}=\|f\|_\infty\cdot\|g\|_{p,w} \qquad (2-6)$$

ve

$$\|fg\|_\infty=\sup_{x\in G}|f(x)g(x)|=\sup_{x\in G}|f(x)|\sup_{x\in G}|g(x)|=$$

$$=\|f\|_\infty\cdot\|g\|_\infty \qquad (2-7)$$

yazılır. (2-6) ve (2-7) ifadelerinden

$$\|fg\|_B=\|fg\|_\infty+\|fg\|_{p,w}\leq\|f\|_\infty\|g\|_\infty+\|f\|_\infty\|g\|_{p,w}=$$

$$=\|f\|_\infty(\|g\|_\infty+\|g\|_{p,w})=\|f\|_\infty\|g\|_B \qquad (2-8)$$

bulunur. Eğer,

$$\|f\|_\infty\leq\|f\|_B$$

eşitsizliği (2-8) de kullanılırsa,

$$\|fg\|_B\leq\|f\|_B\|g\|_B$$

elde edilir. 2.2. önermeden $B_w^p(G)$ uzayının Banach uzayı olduğu biliniyor. O halde $B_w^p(G)$ uzayı noktasal çarpma işlemine göre Banach cebiridir.

2.4. Önerme: $C_c(G)$ kümesi $B_w^p(G)$ uzayının bir alt kümesidir.

İspat: $C_c(G)$ kümesinin $C_o(G)$ uzayının bir alt kümesi olduğu(Rudin, [14]) çalışmasında gösterildi. Şimdi biz $C_c(G)$ kümesinin $L_w^p(G)$ uzayının bir alt kümesi olduğunu gösterelim. Bunun için herhangi $f \in C_c(G)$ alalım. $C_c(G) \subset C_o(G)$ kapsamasından $f \in C_o(G)$ bulunur. Yine $\operatorname{supp} f = K$ olsun. Bu durumda w ağırlık fonksiyonu lokal sınırlı olduğundan her $x \in K$ için $w(x) \leq A$ olacak şekilde $A>0$ sayısı vardır. Böylece

$$\|f\|_{p,w} = \{\int_G |f(x)w(x)|^p dx\}^{1/p} = \{\int_K |f(x)w(x)|^p dx\}^{1/p} \leq$$

$$\leq \sup_{x \in K} |f(x)| \{\int_K A^p dx\}^{1/p} \leq A.\sup_{x \in G} |f(x)| \{\int_K dx\}^{1/p} =$$

$$= A.\|f\|_\infty . \mu(K)^{1/p} < \infty \tag{2-9}$$

olup $f \in L_w^p(G)$ yazılır. Buradan da $C_c(G) \subset L_w^p(G)$ bulunur. Böylece $f \in C_o(G) \cap L_w^p(G) = B_w^p(G)$ olur. Bu ise $C_c(G) \subset B_w^p(G)$ olduğunu gösterir.

2.5. Önerme: $B_w^p(G)$ uzayı $C_o(G)$ uzayında heryerde yoğundur.

İspat: $C_c(G) \subset B_w^p(G)$ kapsaması 2.4. önermede gösterildi. Yine $C_c(G)$ kümesinin $C_o(G)$ uzayında heryerde yoğun olduğu biliniyor(Rudin, [14]). O halde alınan herhangi $f \in C_o(G)$ için

$$\|f-g\|_{\infty}<\varepsilon$$

olacak şekilde bir $g\in C_c(G)$ vardır. $C_c(G)\subset B_w^p(G)$ kapsamasından dolayı da $g\in B_w^p(G)$ bulunur. Bu ise istenendir.

2.6. Önerme: $B_w^p(G)$ uzayı ötelemeler altında invaryanttır.

İspat: Herhangi $f\in B_w^p(G)$ ve $x\in G$ alalım. $f\in B_w^p(G)$ olduğundan $f\in L_w^p(G)$ ve $f\in C_o(G)$ olur. Yine,

$$\|L_x f\|_{p,w}=\{\int_G |L_x f(y)w(y)|^p dy\}^{1/p}$$

olup, buradan

$$\|L_x f\|_{p,w}^p=\int_G |f(y-x)w(y)|^p dy=\int_G |f(u)w(u+x)|^p du\leq$$

$$\leq w^p(x)\int_G |f(u)w(u)|^p du$$

bulunur. Öte yandan başta aldığımız x elemanını sabitleştirdiğimiz için $w(x)<\infty$ olup

$$\|L_x f\|_{p,w}^p\leq\|f\|_{p,w}^p w^p(x)$$

yazılır. Bunun sonucu

$$\|L_x f\|_{p,w}\leq\|f\|_{p,w} w(x)<\infty$$

olup $L_x f\in L_w^p(G)$ bulunur. Yine,

$$\|L_x f\|_{\infty}=\sup_{y\in G}|L_x f(y)|=\sup_{y\in G}|f(y-x)|=\sup_{(u+x)\in G}|f(u)|=$$

$$=\|f\|_{\infty}<\infty$$

bulunur. Şimdi de $L_x f \in C_o(G)$ olduğunu görmek için $L_x f$ fonksiyonunun sonsuzda sıfır olduğunu gösterelim. $f \in C_o(G)$ ise her $\varepsilon > 0$ için her $y \notin K$ olduğunda $|f(y)| < \varepsilon$ olacak şekilde G nin bir K kompakt alt kümesi vardır. K kompakt olduğundan $x+K=K_o$ dersek K_o da G kümesinin kompakt bir alt kümesi olur. Buradan her $y \notin x+K$ ise $y-x \notin K$ olup,

$$|L_x f(y)| = |f(y-x)| = |f(u)| < \varepsilon$$

olur. Bu ise $L_x f \in C_o(G)$ olduğunu gösterir. Böylece $L_x f \in L^p_w(G)$ ve $L_x f \in C_o(G)$ olduğundan $L_x f \in B^p_w(G)$ bulunur.

2.7. Önerme: $B^p_w(G)$ uzayı kuvvetli karakter invaryanttır.

İspat: Alınan herhangi $f \in B^p_w(G)$ ve $t \in \hat{G}$ için

$$\|M_t f\|_{p,w} = \{\int_G |M_t f(x) w(x)|^p dx\}^{1/p} =$$

$$= \{\int_G |(x,t) f(x) w(x)|^p dx\}^{1/p} =$$

$$= \{\int_G |(x,t)|^p |f(x) w(x)|^p dx\}^{1/p} =$$

$$= \{\int_G |f(x) w(x)|^p dx\}^{1/p} = \|f\|_{p,w} < \infty$$

olduğundan $M_t f \in L^p_w(G)$ bulunur. Yine,

$$\|M_t f\|_\infty = \sup_{x \in G} |M_t f(x)| = \sup_{x \in G} |(x,t) f(x)| =$$

$$= \sup_{x \in G} |(x,t)|\,|f(x)| = \|f\|_\infty < \infty \qquad (2\text{-}11)$$

elde edilir. Şimdi $M_t f$ fonksiyonunun sonsuzda sıfır olduğunu gösterelim. $f \in C_o(G)$ olduğundan sonsuzda sıfır olup her $\varepsilon > 0$ için her $x \notin K$ olduğunda $|f(x)| < \varepsilon$ olacak şekilde G kümesinin bir K kompakt alt kümesi vardır. Dolayısıyla aynı $\varepsilon>0$ ve $K\subset G$ kompakt alt kümesi için her $x\notin K$ olduğunda

$$|M_t f(x)|=|(x,t)f(x)|=|(x,t)||f(x)|=|f(x)|<\varepsilon$$

bulunur. Böylece $M_t f$ fonksiyonu sonsuzda sıfır olup $M_t f\in C_o(G)$ elde edilir. Böylece $M_t f\in B_w^p(G)$ bulunur. Ayrıca,

$$\|M_t f\|_B=\|M_t f\|_\infty+\|M_t f\|_{p,w}=\|f\|_\infty+\|f\|_{p,w}=\|f\|_B \qquad (2\text{-}12)$$

olduğundan $B_w^p(G)$ uzayı kuvvetli karakter invaryanttır.

2.8. Önerme: $f\to M_t f$ fonksiyonu $B_w^p(G)$ uzayından $B_w^p(G)$ uzayına sürekli bir fonksiyondur.

İspat: Bunun için $B_w^p(G)$ uzayında alınan herhangi bir (f_n) dizisi $\|\cdot\|_B$ normuna göre bir $f\in B_w^p(G)$ fonksiyonuna yakınsadığında $(M_t f_n)$dizisinin de $M_t f\in B_w^p(G)$ fonksiyonuna $\|\cdot\|_B$ normuna göre yakınsadığını gösterelim. (f_n) dizisi f fonksiyonuna yakınsadığından verilen herhangi $\varepsilon>0$ sayısı için her $n\geq n_o$ olduğunda

$$\|f_n-f\|_B=\|f_n-f\|_\infty+\|f_n-f\|_{p,w}\leq\varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_o\in\mathbb{N}$ sayısı vardır. Yine aynı $\varepsilon>0$ sayısı verildiğinde aynı $n_o\in\mathbb{N}$ sayısı alınır ve 2.7. Önermedeki (2-12) eşitliği kullanılırsa her $n\geq n_o$ olduğunda

$$\|M_t f_n-M_t f\|_B=\|M_t f_n-M_t f\|_\infty+\|M_t f_n-M_t f\|_{p,w}=$$

$$=\|f_n-f\|_\infty+\|f_n-f\|_{p,w}=\|f_n-f\|_B\leq\varepsilon$$

çıkar. Bu ise istenendir.

2.9. Önerme: B kümesinden $\mathbb{R}$ kümesine giden $f \to \|M_t f\|_B$ fonksiyonu süreklidir.

İspat: 2.8. önermeden $f \to M_t f$ fonksiyonunun sürekliliği biliniyor. O halde her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık her $n \geq n_o$ olduğunda

$$\|M_t f_n - M_t f\|_B < \varepsilon \tag{2-13}$$

olacak şekilde bir $n_o \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Yine aynı $\varepsilon > 0$ ve n_o sayısı verildiğinde her $n \geq n_o$ için

$$\left| \|M_t f_n\|_B - \|M_t f\|_B \right| \leq \|M_t f_n - M_t f\|_B < \varepsilon$$

bulunur. Böylece $f \to \|M_t f\|_B$ fonksiyonu sürekli olur.

2.10. Önerme: $f \to L_x f$ fonksiyonu $B_w^p(G)$ uzayından $B_w^p(G)$ uzayına sürekli bir fonksiyondur.

İspat: Önce $f \to L_x f$ fonksiyonunun doğrusal bir fonksiyon olduğunu gösterelim. Gerçekten her $\lambda, \mu \in K$, her $f, g \in B_w^p(G)$ ve her $y \in G$ için

$$L_x(\lambda f + \mu g)(y) = (\lambda f + \mu g)(y-x) = \lambda f(y-x) + \mu g(y-x) =$$

$$= \lambda L_x f(y) + \mu L_x g(y) = (\lambda L_x f + \mu L_x g)(y)$$

olup bu her $y \in G$ için doğru olduğundan

$$L_x(\lambda f + \mu g) = \lambda L_x f + \mu L_x g$$

bulunur. Yine,

$$\|L_x f\|_B = \|L_x f\|_\infty + \|L_x f\|_{p,w} \tag{2-14}$$

$$\|L_x f\|_\infty = \|f\|_\infty \qquad (2\text{-}15)$$

eşitlikleri ve

$$\|L_x f\|_{p,w} \leq w(x)\|f\|_{p,w} \qquad (2\text{-}16)$$

olduğu 2.6. Önermeden biliniyor. Buradan (2-15) eşitliği ile (2-16) eşitsizliği (2-14) eşitliğinde yazılıp, $w(x)\geq 1$ özelliği de kullanılırsa

$$\|L_x f\|_B \leq \|f\|_\infty + w(x)\|f\|_{p,w} \leq w(x)\|f\|_\infty + w(x)\|f\|_{p,w} =$$

$$= w(x)\left(\|f\|_\infty + \|f\|_{p,w}\right) = w(x)\|f\|_B$$

bulunur. Bu ise istenendir.

2.11. Önerme: G kümesinden $B_w^p(G)$ uzayına giden $x \to L_x f$ fonksiyonu sürekli bir fonksiyondur.

İspat: G uzayından $L_w^p(G)$ uzayına giden $x \to L_x f$ fonksiyonunun sürekliliği (Fischer-Gürkanlı-Liu, [6]) çalışmasında gösterildi. Bu nedenle verilen herhangi $x_o \in G$ ve $\varepsilon > 0$ sayısı için her $x \in U_1$ olduğunda

$$\|L_x f - L_{x_o} f\|_{p,w} < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (2\text{-}17)$$

olacak şekilde x_o noktasının bir U_1 komşuluğu vardır.

Şimdi G uzayından $C_o(G)$ uzayına giden $x \to L_x f$ fonksiyonunun sürekliliğini gösterelim. Bunun için $C_c(G)$ kümesi $C_o(G)$ uzayında heryerde yoğun olduğundan her $f \in C_o(G)$ için

$$\|f-g\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3} \qquad (2\text{-}18)$$

olacak şekilde bir $g \in C_c(G)$ seçebiliriz. $x \to L_x g$ fonksiyonu

G kümesinden $C_c(G)$ uzayına sürekli(Reiter, [11], Sayfa 58) olduğundan her $x \in U_2$ için

$$\| L_x g - L_{x_o} g \|_\infty < \frac{\varepsilon}{3} \tag{2-19}$$

olacak şekilde x_o noktasının bir U_2 komşuluğu vardır. Bunun sonucu (2-19) eşitsizliği kullanılırsa her $x \in U_2$ için

$$\| L_x f - L_{x_o} f \|_\infty = \| L_x f - L_x g + L_x g - L_{x_o} g + L_{x_o} g - L_{x_o} f \|_\infty \leq$$

$$\leq \| L_x f - L_x g \|_\infty + \| L_x g - L_{x_o} g \|_\infty + \| L_{x_o} g - L_{x_o} f \|_\infty =$$

$$= \| L_x (f-g) \|_\infty + \| L_x g - L_{x_o} g \|_\infty + \| L_{x_o} (f-g) \|_\infty =$$

$$= \| f-g \|_\infty + \| L_x g - L_{x_o} g \|_\infty + \| f-g \|_\infty < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

bulunur. Bu ise $x \to L_x f$ fonksiyonunun G kümesinden $C_o(G)$ uzayına sürekli olduğunu gösterir. Buradan da her $x \in U_3$ için

$$\| L_x f - L_{x_o} f \|_\infty < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2-20}$$

olacak şekilde x_o noktasının bir U_3 komşuluğu bulunur. Böylece $V = U_1 \cap U_3$ dersek, V kümesi de x_o noktasının bir komşuluğu olup aynı $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık her $x \in V$ için

$$\| L_x f - L_{x_o} f \|_B = \| L_x f - L_{x_o} f \|_\infty + \| L_x f - L_{x_o} f \|_{p,w} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

bulunur. O halde $x \to L_x f$ fonksiyonu süreklidir.

2.12. Önerme: $\hat{G}$ uzayından $B_w^p(G)$ uzayına giden $t \to M_t f$ fonksiyonu doğrusal bir fonksiyondur.

İspat: Herhangi $f, g \in B_w^p(G)$ ve $\alpha, \beta \in K$ alalım. Yine herhangi bir $x \in G$ verilsin. Buradan,

$$M_t(\alpha f+\beta g)(x)=(x,t)(\alpha f+\beta g)(x)=\alpha(x,t)f(x)+$$

$$+\beta(x,t)g(x)=\alpha M_t f(x)+\beta M_t g(x)=$$

$$=(\alpha M_t f+\beta M_t g)(x)$$

bulunur. Buradan,

$$M_t(\alpha f+\beta g)=\alpha M_t f+\beta M_t g$$

olup, bu ise fonksiyonun doğrusallığını gösterir.

2.13. Teorem: $\hat{G}$ kümesinden $B_w^p(G)$ uzayına giden $t \to M_t f$ fonksiyonu sürekli bir fonksiyondur.

İspat: Herhangi bir $f\in B_w^p(G)$ alalım. Buradan $f\in C_o(G)$ ve $f\in L_w^p(G)$ olur. $\hat{G}$ uzayından $L_w^p(G)$ uzayına giden $t \to M_t f$ fonksiyonunun sürekliliği (Fischer-Gürkanlı-Liu, [6]) çalışmasında gösterildi. Bu nedenle herhangi bir $t_o\in\hat{G}$ ve $\varepsilon>0$ sayısı verildiğinde

$$\|M_t f-M_{t_o} f\|_{p,w}<\frac{\varepsilon}{2} \qquad (2\text{-}21)$$

olacak şekilde t_o noktasının bir U_1 komşuluğu vardır. Yine 2.12. Önermeden $t \to M_t f$ fonksiyonunun doğrusal bir fonksiyon olduğu biliniyor. Bu nedenle herhangi $t_o\in\hat{G}$ noktasındaki sürekliliği göstermek yerine $o\in\hat{G}$ noktasındaki sürekliliği göstermek yeterlidir. Mademki $C_c(G)$ kümesi $C_o(G)$ uzayında heryerde yoğundur, o halde yukarda verilen $\varepsilon>0$ sayısına karşılık

$$\|f-g\|_\infty<\frac{\varepsilon}{3} \qquad (2\text{-}22)$$

olacak şekilde bir $g\in C_c(G)$ fonksiyonu vardır. $g\in C_c(G)$ fonksiyonunun desteği K olsun. O halde her $t\in\hat{G}$ için $(t,x)g(x)=$

$=(M_t g)(x)$ fonksiyonunun desteği de K olur. Dolayısıyla $\mathrm{supp}(M_t g-g) \subseteq K$ yazılır. Bunların sonucu,

$$\|M_t g-g\|_\infty=\sup_{x\in K}|(x,t)g(x)-g(x)|=\sup_{x\in K}\Big|[(x,t)-1]g(x)\Big|\leq$$

$$\leq\sup_{x\in K}|(x,t)-1|\sup_{x\in K}|g(x)|\leq\sup_{x\in K}|(x,t)-1|\sup_{x\in G}|g(x)|=$$

$$=\|(x,t)-1\|_{\infty,K}\|g\|_\infty \tag{2-23}$$

elde edilir. Şimdi $t\to 0$ için $\|(x,t)-1\|_{\infty,\hat{K}}\to 0$ olduğunu gösterelim. $\xi(x,t)=|(x,t)-1|$ fonksiyonu $K\times G$ den $\mathbb{R}$ içine sürekli bir fonksiyon olduğundan her $x\in K$ için $(x,o)\in K\times\hat{G}$ noktasında da süreklidir ve aynı zamanda $\xi(x,o)=0$ olur. Böylece verilen $\varepsilon>0$ sayısına karşılık her $y\in U_x$ ve her $s\in V_x$ için

$$\xi(y,s)<\frac{\varepsilon}{3\|g\|_\infty} \tag{2-24}$$

olacak şekilde $U_x\in V(x)$ ve $V_x\in V(0)$ komşulukları vardır. K kompakt bir küme olduğundan $K\subseteq U_{x_1}\cup U_{x_2}\cup\ldots\cup U_{x_n}$ olacak şekilde $x_1,x_2,\ldots,x_n\in G$ elemanları vardır. Yine, $V=V_{x_1}\cap V_{x_2}\cap\ldots\cap V_{x_n}$ olsun. Bu taktirde V kümeside $o\in\hat{G}$ noktasının bir komşuluğudur. Buradan her $x\in K$ ve $t\in V$ için

$$\xi(x,t)<\frac{\varepsilon}{3\|g\|_\infty} \tag{2-25}$$

kalır. Bu taktirde $t\to 0$ için $\|(x,t)-1\|_{\infty,K}\to 0$ olur. Böylece her $t\in V$ için

$$\sup_{x\in K}|(x,t)-1|=\|(x,t)-1\|_{\infty,K}\leq\frac{\varepsilon}{3\|g\|_\infty} \tag{2-26}$$

bırakabiliriz. Eğer (2-23) ve (2-26) eşitsizlikleri kullanılırsa,

$$\|M_t g-g\|_\infty \leq \|(x,t)-1\|_{\infty,K}\|g\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3\|g\|_\infty}\|g\|_\infty = \frac{\varepsilon}{3} \qquad (2\text{-}27)$$

bulunur. 2.7. Önermeden de

$$\|M_t f-f\|_\infty = \|M_t f-M_t g+M_t g-g+g-f\|_\infty \leq$$

$$\leq \|M_t f-M_t g\|_\infty+\|M_t g-g\|_\infty+\|f-g\|_\infty =$$

$$= 2\|f-g\|_\infty+\|M_t g-g\|_\infty \qquad (2\text{-}28)$$

eşitsizliği çıkar. Yine (2-22) ve (2-27) eşitsizlikleri kullanılırsa,

$$\|M_t f-f\|_\infty < 2\,\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \qquad (2\text{-}29)$$

elde edilir. Bu ise $t \to M_t f$ fonksiyonunun $o \in \hat{G}$ noktasında sürekliliği demektir. Dolayısıyla her $t_o \in \hat{G}$ noktasında sürekli olur. O halde aynı $\varepsilon>0$ sayısına karşılık

$$\|M_t f-M_{t_o} f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (2\text{-}30)$$

olacak şekilde t_o noktasının bir U_2 komşuluğu vardır. Eğer $W=U_1 \cap U_2$ denirse bu küme verilen t_o noktasının bir komşuluğu olup her $t \in W$ için

$$\|M_t f-M_{t_o} f\|_B = \|M_t f-M_{t_o} f\|_\infty+\|M_t f-M_{t_o} f\|_{p,w} < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

elde edilir. Bu ise istenendir.

2.14. Önerme: Eğer $W=K$ (K=sabit sayı) ise $B_w^p(G)$ uzayı bir homogen Banach uzayıdır.

İspat: Herhangi $f \in B_w^p(G)$ ve her $x \in G$ için

$$\|L_x f\|_B = \|L_x f\|_\infty+\|L_x f\|_{p,w} \qquad (2\text{-}31)$$

olup 2.6. Önermeden

$$\|L_x f\|_\infty = \|f\|_\infty \qquad (2\text{-}32)$$

olduğu biliniyor. Yine,

$$\|L_x f\|_{p,w} = \{\int_G |L_x f(y) w(y)|^p dy\}^{1/p} =$$

$$= \{\int_G |f(y-x).K| dy\}^{1/p} = \|f\|_{p,w} \qquad (2-33)$$

olup (2-32) ve (2-33) eşitlikleri (2-31) de kullanılırsa

$$\|L_x f\|_B = \|f\|_\infty + \|f\|_{p,w} = \|f\|_B$$

bulunur. Ayrıca $L_x f \in B_w^p(G)$ olduğu 2.6. Önermeden ve $x \to L_x f$ fonksiyonunun sürekliliği 2.11. Önermeden biliniyor. O halde $B_w^p(G)$ uzayı bir homogen Banach uzayıdır.

2.15. Önerme: Her $f \neq 0$ için $c(f)w(x) \leq \|L_x f\|_B \leq w(x)\|f\|_B$ olacak şekilde $c(f)>0$ sayısı ve $c.w(x) \leq \|L_x\|_B \leq w(x)$ olacak şekilde $c>0$ sayısı vardır.

İspat: 2.6. Önermeden dolayı

$$\|L_x f\|_B = \|L_x f\|_\infty + \|L_x f\|_{p,w} \leq \|f\|_\infty + w(x)\|f\|_{p,w} \leq$$

$$\leq w(x)\|f\|_\infty + w(x)\|f\|_{p,w} = w(x)(\|f\|_\infty + \|f\|_{p,w}) =$$

$$= w(x)\|f\|_B \qquad (2-34)$$

bulunur. Öte yandan $c(f)w(x) \leq \|L_x f\|_{p,w}$ olduğu (Fischer-Gürkanlı-Liu, [6]) çalışmasında gösterildi. Buradan,

$$c(f)w(x) \leq c(f)w(x) + \|f\|_\infty \leq \|L_x f\|_{p,w} + \|f\|_\infty =$$

$$= \|L_x f\|_{p,w} + \|L_x f\|_\infty = \|L_x f\|_B$$

yani,

$$c(f)w(x)\leq\|L_x f\|_B \tag{2-35}$$

elde edilir. (2-34) ve (2-35) eşitsizlikleri birleştirilirse

$$c(f)w(x)\leq\|L_x f\|_B\leq w(x)\|f\|_B$$

çıkar. Ayrıca, $\|L_x f\|_B\leq w(x)\|f\|_B$ eşitsizliğinden

$$\|L_x\|_B=\sup_{\|f\|_B=1}\frac{\|L_x f\|_B}{\|f\|_B}\leq w(x) \tag{2-36}$$

elde edilir. Eğer $c=\sup\{c(f)\,\big|\,\|f\|_B=1\}$ denir ve (2-35) eşitsizliği de kullanılırsa

$$cw(x)\leq\sup_{f\neq 0}\frac{\|L_x f\|_B}{\|f\|_B}$$

olup,

$$cw(x)\leq\|L_x\|_B \tag{2-37}$$

o halde (2-36) ve (2-37) eşitsizliklerinden

$$cw(x)\leq\|L_x\|_B\leq w(x)$$

elde edilir.

2.16. Teorem: Eğer, $B^p_{w_1}(G)\subset B^p_{w_2}(G)$ ise bu taktirde her $f\in B^p_{w_1}(G)$ için $\|f\|_{w_2}\leq c\|f\|_{w_1}$ olacak şekilde bir $c>0$ sayısı vardır.

İspat: $B^p_{w_1}(G)$ uzayı üzerinde

$$|\|\cdot|\|=\|\cdot\|_{w_1}+\|\cdot\|_{w_2}$$

fonksiyonunun bir norm olduğunu göstermek kolaydır. Şimdi $B^p_{w_1}(G)$ uzayının bu $|||\cdot|||$ normuna göre bir Banach uzayı olduğunu gösterelim. (f_n) dizisi $|||\cdot|||$ normuna göre $B^p_{w_1}(G)$ uzayında bir Cauchy dizisi olsun. O halde herhangi $\varepsilon>0$ verildiğinde her $m,n\geq n_o$ için $|||f_n-f_m|||<\varepsilon$ olacak şekilde bir $n_o\in\mathbb{N}$ sayısı vardır. Buradan,

$$|||f_n-f_m|||=\|f_n-f_m\|_{w_1}+\|f_n-f_m\|_{w_2}<\varepsilon$$

olup

$$\|f_n-f_m\|_{w_1}<\varepsilon \text{ ve } \|f_n-f_m\|_{w_2}<\varepsilon$$

elde edilir. Böylece (f_n) dizisi $\|\cdot\|_{w_1}$ normuna göre $B^p_{w_1}(G)$ uzayında, $\|\cdot\|_{w_2}$ normuna göre de $B^p_{w_2}(G)$ uzayında birer Cauchy dizisi olur. $B^p_{w_1}(G)$ ve $B^p_{w_2}(G)$ uzayları Banach uzayı olduklarından $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{w_1}} f$ olacak şekilde $f\in B^p_{w_1}(G)$ ve $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{w_2}} g$ olacak şekilde bir $g\in B^p_w(G)$ vardır. Böylece yukarda verilen $\varepsilon>0$ sayısına karşılık her $n\geq n_1$ olduğunda,

$$\|f_n-f\|_{w_1}<\frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde bir $n_1\in\mathbb{N}$ sayısı bulunur. Eğer $\|\cdot\|_\infty\leq\|\cdot\|_{w_1}$ eşitsizliği kullanılırsa, aynı $n_1\in\mathbb{N}$ sayısı ve her $n\geq n_1$ için

$$\|f_n-f\|_\infty<\frac{\varepsilon}{2}$$

olur. Yine aynı $\varepsilon>0$ sayısına karşılık her $n\geq n_2$ olduğunda

$$\|f_n-g\|_{w_2}<\frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde bir $n_2\in\mathbb{N}$ sayısı vardır. Tekrar $\|\cdot\|_\infty\leq\|\cdot\|_{w_2}$ eşitsizliği kullanılırsa aynı $n_2\in\mathbb{N}$ sayısı ve her $n\geq n_2$ için

$$\|f_n-g\|_\infty<\frac{\varepsilon}{2}$$

elde edilir. Eğer $n_o=\text{mak}\{n_1,n_2\}$ dersek ve bir $n\geq n_o$ sayısını sabitleştirirsek, her $\varepsilon>0$ sayısı

$$\|f-g\|_\infty=\|f-f_n+f_n-g\|_\infty\leq\|f_n-f\|_\infty+\|f_n-g\|_\infty<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

olur. Buradan da $f=g$ elde edilir. Dolayısıyla her $n\geq n_o$ için

$$|||f_n-f|||=\|f_n-f\|_{w_1}+\|f_n-f\|_{w_2}=\|f_n-f\|_{w_1}+$$
$$+\|f_n-g\|_{w_2}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

bulunur. O halde (f_n) dizisi $|||\cdot|||$ normuna göre $f\in B^p_{w_1}(G)$ elemanına yakınsadığından $B^p_{w_1}(G)$ uzayı bir Banach uzayı olur. Şimdi $(B^p_{w_1}(G),|||\cdot|||)$ uzayından $(B^p_{w_1}(G),\|\cdot\|_{w_1})$ uzayına giden $I(f)=f$ birim fonksiyonunu alalım. I birim fonksiyonunun bire-bir, örten ve doğrusal olduğu açıktır. Ayrıca $\|I(f)\|=\|f\|_{w_1}\leq|||f|||$ eşitsizliğinden dolayı süreklidir. O halde $(B^p_{w_1}(G),|||\cdot|||)$ ve $(B^p_{w_1}(G),\|\cdot\|_{w_1})$ uzayları birer Banach uzayı, I birim fonksiyonu bire-bir, örten, sürekli bir doğrusal dönüşüm olduğundan Banach teoreminden(Cartan, |3|) dolayı I fonksiyonu bir homeomorfizmdir. Böylece $(B^p_{w_1}(G),|||\cdot|||)$ uzayı ile $(B^p_{w_1}(G),\|\cdot\|_{w_1})$ uzaylarının topolojileri aynı olup normları denktir. Bunun sonucu olarak her $f\in B^p_{w_1}(G)$ için $|||f|||\leq c.\|f\|_{w_1}$ olacak şekilde bir $c>0$ sayısı vardır. Böylece $|||f|||=\|f\|_{w_1}+\|f\|_{w_2}$ eşitliğinden $\|f\|_{w_2}\leq$ $\leq|||f|||$ olup

$$\|f\|_{w_2}\leq|||f|||\leq c\|f\|_{w_1}$$

bulunur.

2.17. Teorem: $B^p_{w_1}(G)\subset B^p_{w_2}(G)$ olması için gerekli ve yeterli koşul $w_2 < w_1$ olmasıdır.

İspat: $B^p_{w_1}(G) \subset B^p_{w_2}(G)$ olduğunu kabul edelim. 2.15. Önermeden dolayı her $x \in G$ için

$$c_1 w_1(x) \leq \| L_x f \|_{w_1} \leq w_1(x) \| f \|_{w_1}$$

$$c_2 w_2(x) \leq \| L_x f \|_{w_2} \leq w_2(x) \| f \|_{w_2}$$

olacak şekilde $c_1 > 0$ ve $c_2 > 0$ sayıları vardır. Böylece 2.16. Teorem de kullanılırsa,

$$c_2 w_2(x) \leq \| L_x f \|_{w_1} \leq c w_1(x) \| f \|_{w_1}$$

olacak şekilde $c > 0$ sayısı bulunur. Böylece

$$w_2(x) \leq c . c_2^{-1} w_1(x) \| f \|_{w_1}$$

olup, burada $a = c . c_2^{-1} \| f \|_{w_1}$ denirse

$$w_2(x) \leq a . w_1(x)$$

elde edilir. O halde $w_2 < w_1$ olur.

Şimdi $w_2 < w_1$ olduğunu kabul edelim. Bu taktirde her $x \in G$ için

$$w_2(x) \leq c_3 w_1(x) \qquad (2\text{-}38)$$

olacak şekilde bir $c_3 > 0$ sayısı vardır. Herhangi bir $f \in B^p_{w_1}(G)$ alalım. $B^p_{w_1}(G) = C_o(G) \cap L^p_{w_1}(G)$ olduğundan $f \in L^p_{w_1}(G)$ ve $f \in C_o(G)$ olur. Böylece (2-38) eşitsizliği kullanılırsa

$$\| f \|_{p,w_2} = \{ \int_G | f(x) w_2(x) |^p dx \}^{1/p}$$

$$\leq \{ \int_G |f(x) c_3 w_1(x)|^p dx \}^{1/p} =$$

$$= c_3 \{ \int_G |f(x) w_1(x)|^p dx\}^{1/p} = c_3 \| f\|_{p,w_1} < \infty$$

olduğundan $f \in L^p_{w_2}(G)$ bulunur. Sonuç olarak $f \in B^p_{w_2}(G)$ çıkar. Bu ise istenendir.

2.18. Önerme: $B^p_w(G)$ uzayı Solid ve BF-uzayıdır.

İspat: $B^p_w(G)$ uzayının önce BF- uzayı olduğunu gösterelim. Bunun ispatı için, herhangi $f \in B^p_w(G)$ ve $K \subset G$ kompakt alt kümesi verildiğinde

$$\int_K |f(x)| dx \leq C_K \| f\|_B$$

olacak şekilde $C_K > 0$ sayısının varlığını göstermeliyiz. Yukarda alınan $f \in B^p_w(G)$ için $f \in C_o(G)$ ve $f \in L^p_w(G)$ olup,

$$\int_K |f(x)| dx \leq \sup_{x \in G} |f(x)| \int_K dx = \| f\|_\infty \mu(K)$$

elde edilir. Eğer $\mu(K) = C_K$ denirse

$$\int_K |f(x)| dx \leq C_K \| f\|_\infty \leq C_K \| f\|_\infty + C_K \| f\|_{p,w} = C_K \| f\|_B$$

bulunur. Bu ise istenendir.

Şimdi de $B^p_w(G)$ uzayının Solid uzay olduğunu gösterelim. Bunun için h.h.h. $|g(x)| \leq |f(x)|$ olan $f \in B^p_w(G)$ ve $g \in L^1_{\ell oc}(G)$ fonksiyonları verilsin. Burada f fonksiyonu sınırlı ve h.h.h. $|g(x)| \leq |f(x)|$ olduğundan g fonksiyonu da h.h.h. sınırlı bir fonksiyondur. Yine bir ϕ fonksiyonunu,

$$\phi(x) = \begin{cases} \dfrac{g(x)}{f(x)}, & f(x) \neq 0 \\ 0, & \text{diğer haller} \end{cases}$$

biçiminde tanımlıyalım. Buradan $\phi(x) = 0$ ise ispat açıktır.

Diğer durum için $g=\phi f$ olup $|g(x)|\leq|f(x)|$ eşitsizliği kullanılırsa $\|\phi\|_\infty\leq 1$ yazılır. Böylece

$$\|g\|_B=\|\phi f\|_B=\|\phi f\|_\infty+\|\phi f\|_{p,w}\leq\|\phi\|_\infty\|f\|_\infty+\|\phi\|_\infty\|f\|_{p,w}=$$

$$=\|\phi\|_\infty(\|f\|_\infty+\|f\|_{p,w})=\|\phi\|_\infty\|f\|_B\leq\|f\|_B$$

elde edilir. Bu ise 1.20. Tanımdan dolayı $B_w^p(G)$ uzayının Solid uzay olduğunu gösterir .

2.19. Önerme: $B_w^p(G)$ uzayı $C_o(G)$ uzayı üzerinde noktasal çarpma işlemine göre bir idealdir.

İspat: Herhangi $f\in B_w^p(G)$ ve $g\in C_o(G)$ alalım. Eğer 2.3. Teorem kullanılırsa,

$$\|fg\|_B=\|fg\|_\infty+\|fg\|_{p,w}\leq\|f\|_\infty\|g\|_\infty+\|f\|_{p,w}\|g\|_\infty=$$

$$=(\|f\|_\infty+\|f\|_{p,w})\|g\|_\infty=\|f\|_B\|g\|_\infty<\infty$$

olduğundan $fg\in B_w^p(G)$ olur. Bu ise $B_w^p(G)$ uzayının $C_o(G)$ uzayında bir ideal olduğunu gösterir.

2.20. Önerme: $(B_w^p(G),\|\cdot\|_B)$ uzayı $(C_o(G),\|\cdot\|_\infty)$ Banach cebirine göre bir soyut Segal cebiridir.

İspat: $B_w^p(G)$ uzayı 2.5. Önermeden $C_o(G)$ uzayında heryerde yoğun ve 2.19. Önermeden de $C_o(G)$ uzayında bir idealdir. Yine 2.3. Teoremden $B_w^p(G)$ uzayı $\|\cdot\|_B$ normuna göre Banach cebiridir. Ayrıca her $f,g\in B_w^p(G)$ için

$$\|fg\|_B\leq\|f\|_\infty\|g\|_B$$

yazılır. Böylece $B_w^p(G)$ uzayı $C_o(G)$ Banach cebirine göre bir soyut Segal cebiridir.

2.21. Önerme: Eğer I, $(C_o(G), \|\cdot\|_\infty)$ uzayının sağ kapalı(sol kapalı) ideali ise bu taktirde $I \cap B_w^p(G)$, $(B_w^p(G), \|\cdot\|_B)$ uzayının sağ kapalı(sol kapalı) idealidir ve

$$I = \overline{I \cap B_w^p(G)}$$

olur (burada kapanış $C_o(G)$ uzayının $\|\cdot\|_\infty$ normuna göredir).

İspat: Bunun ispatı R.Doran-Wichmann, [4]. Sayfa 215, 31.6.Lemmadaki gibi yapılır(bakınız, ön bilgiler 1.20. Teorem).

3. BÖLÜM

$B_w^p(G)$ uzayının II. Bölüm de noktasal çarpma işlemine göre Banach cebiri olduğu gösterilmiş ve özellikleri incelenmişti. Şimdi özel olarak $p=1$ için $B_w^1(G)=C_o(G)\cap L_w^1(G)$ uzayının girişim işlemine göre de Banach cebiri olduğunu gösterip sonra da özelliklerini inceleyeceğiz. Bunun için önce bir yardımcı teorem verelim.

3.1. Yardımcı Teorem: Her $f\in C_o(G)$ ve $g\in C_c(G)$ için

$$f*g\in C_o(G)$$

olur.

İspat: Herhangi $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset G$ dizisi alalım ve bir ψ_n fonksiyonunu $\psi_n(t)=f(x_n-t)g(t)$ şeklinde tanımlıyalım. Böylece,

$$|\psi_n(t)|=|f(x_n-t)g(t)|\leq\|f\|_\infty|g(t)| \qquad (3-1)$$

olur. $g\in C_c(G)$ olduğundan sınırlı olup $|g(t)|\leq M$ olacak şekilde bir $M>0$ sayısı vardır. Yine $\|f\|_\infty=L$ dersek $|\psi_n(t)|\leq M.L$ bulunur. Ayrıca $f\in C_o(G)$ olduğundan

$$\lim_{n\to\infty}|f(x_n-t)|=0$$

olur. Dolayısıyla g sınırlı olduğundan

$$\lim_{n\to\infty}|f(x_n-t)g(t)|=\lim_{n\to\infty}|\psi_n(t)|=0$$

bulunur. O halde Lebesque teoreminden dolayı

$$\int_G\psi_n(t)dt \to 0$$

elde edilir. Bu ifade

$$(f*g)(x)=\int_G \psi_n(t)dt$$

eşitliğinde kullanılırsa

$$\lim_{x\to\infty} (f*g)(x)=0$$

bulunur. Böylece $f*g\in C_o(G)$ çıkar.

3.2. Önerme: $B_w^1(G)$ uzayı girişim işlemine göre bir Banach cebiridir.

İspat: Herhangi $f,g\in B_w^1(G)$ alalım. Buradan $f\in C_o(G)$ ve $g\in L_w^1(G)$ olup, $C_c(G)$ kümesi $L_w^1(G)$ uzayında heryerde yoğun olduğundan bu $g\in L_w^1(G)$ fonksiyonuna $\|\cdot\|_{1,w}$ normuna göre yakınsayan bir $(g_n)\subset C_c(G)$ dizisi vardır. Şimdi $(f*g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisini alalım. Önce $f*g_n\subset B_w^1(G)$ olduğunu sonra da bu dizinin $f*g$ fonksiyonuna $\|\cdot\|_{B_w^1}$ normuna göre yakınsadığını göstereceğiz. $f\in C_o(G)$ ve $g_n\subset C_c(G)$ için $f*g_n\in C_o(G)$ olduğu 3.1. Yardımcı teoremden biliniyor. Yine $L_w^1(G)$ uzayı girişim işlemine göre Banach cebiri olduğundan

$$\|f*g_n\|_{1,w}\leq\|f\|_{1,w}\|g_n\|_{1,w}<\infty \qquad (3-2)$$

olduğundan $(f*g_n)\in L_w^1(G)$ olup buradan $(f*g_n)\in B_w^1(G)$ elde edilir. Yine $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset C_c(G)$ dizisi $\|\cdot\|_{1,w}$ normuna göre $g\in L_w^1(G)$ fonksiyonuna yakınsadığından herhangi $\varepsilon>0$ sayısı verildiğinde her $n\geq n_1$ için

$$\|g_n-g\|_{1,w}<\frac{\varepsilon}{2\|f\|_{1,w}+1} \qquad (3-3)$$

olacak şekilde bir $n_1\in\mathbb{N}$ sayısı bulunur. Dolayısıyla

$$\|f*g_n-f*g\|_{1,w}=\|f*(g_n-g)\|_{1,w}\leq\|f\|_{1,w}\cdot\|g_n-g\|_{1,w}<$$

$$<\|f\|_{1,w}\ \frac{\varepsilon}{2\|f\|_{1,w}+1}=\frac{\varepsilon}{2} \tag{3-4}$$

elde edilir. Yine

$$\left|\left[f*(g_n-g)\right](x)\right|=\left|\int_G f(x-t)(g_n-g)(t)dt\right|\leq$$

$$\leq\sup_{x\in G}|f(x-t)|\int_G|g_n(t)-g(t)|dt\leq\|f\|_\infty\|g_n-g\|_1\leq$$

$$\leq\|f\|_\infty\|g_n-g\|_{1,w}$$

olup bu eşitsizlik her $x\in G$ için doğru olduğundan

$$\|f*g_n-f*g\|_\infty=\|f*(g_n-g)\|_\infty\leq\|f\|_\infty\|g_n-g\|_{1,w} \tag{3-5}$$

bulunur. Mademki (g_n) dizisi $g\in L^1_w(G)$ fonksiyonuna $\|\cdot\|_{1,w}$ normuna göre yakınsıyor. O halde aynı $\varepsilon>0$ ve her $n\geq n_2$ olduğunda

$$\|g_n-g\|_{1,w}<\frac{\varepsilon}{2\|f\|_\infty+1} \tag{3-6}$$

olur. (3-6) eşitsizliği (3-5) eşitsizliğinde kullanılırsa

$$\|f*g_n-f*g\|_\infty=\|f*(g_n-g)\|\leq\|f\|_\infty\ \frac{\varepsilon}{2\|f\|_\infty+1}=\frac{\varepsilon}{2} \tag{3-7}$$

bulunur. Eğer $n_o=\text{mak}\{n_1,n_2\}$ dersek her $n\geq n_o$ için

$$\|f*g_n-f*g\|_{B^1_w}=\|f*g_n-f*g\|_\infty+\|f*g_n-f*g\|_{1,w}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

elde edilir. $B^1_w(G)$ uzayı Banach uzayı olduğundan $f*g\in B^1_w(G)$ bulunur.

Şimdi $B^1_w(G)$ uzayının girişim işlemine göre cebir olma özelliklerini inceleyelim.

(i) Herhangi $f,g,h\in B_w^1(G)$ ve her $x\in G$ için

$$\left[(f*g)*h\right](x)=\int_G (f*g)(t)h(x-t)dt=$$

$$=\int_G\{\int_G f(s)g(t-s)ds\}h(x-t)dt=\int\int_G f(s)g(t-s)h(x-t)dsdt$$

eğer x-t=u dönüşümü yapılırsa,

$$=\int\int_G f(s)g(x-u-s)h(u)dsdu=\int_G f(s)\{\int_G g(x-s-u)h(u)du\}ds=$$

$$=\int_G f(s)(g*h)(x-s)ds=\left[f*(g*h)\right](x)$$

olup bu her $x\in G$ için doğru olduğundan

$$(f*g)*h=f*(g*h)$$

bulunur.

(ii) Herhangi $f,g,h\in B_w^1(G)$ ve her $x\in G$ için

$$\left[f*(g+h)\right](x)=\int_G f(x-t)(g+t)(t)dt$$

$$=\int_G f(x-t)(g(t)+h(t))dt=$$

$$=\int_G f(x-t)g(t)dt+\int_G f(x-t)h(t)dt=$$

$$=(f*g)(x)+(f*h)(x)=\left[(f*g)+(f*h)\right](x)$$

olur. Bu her $x\in G$ için doğru olduğundan

$$f*(g+h)=(f*g)+(f*h)$$

bulunur.

(iii) Herhangi $f,g\in B_w^1(G)$, $\alpha,\beta\in K$ ve her $x\in G$ için

$$\left[(\alpha f)*(\beta g)\right](x)=\int_G(\alpha f)(x-t)(\beta g)(t)dt=$$

$$=(\alpha\beta)\int_G f(x-t)g(t)dt=(\alpha\beta)(f*g)(x)$$

bulunur. Bu eşitlik her $x\in G$ için doğru olduğundan

$$(\alpha f)*(\beta g)=(\alpha\beta)(f*g)$$

elde edilir. Dolayısıyla $B_w^1(G)$ uzayı girişim işlemine göre bir cebirdir.

Şimdi herhangi $f,g\in B_w^1(G)$ alalım. Buradan $f,g\in C_o(G)$ ve $f,g\in L_w^1(G)$ olur. Böylece,

$$|(f*g)(x)|=\left|\int_G f(x-t)g(t)dt\right|\leq\sup_{x\in G}|f(x-t)|\int g(t)dt=$$

$$=\|f\|_\infty\|g\|_1\leq\|f\|_\infty\|g\|_{1,w}$$

bulunur. Bu eşitlik her $x\in G$ için doğru olduğundan

$$\|f*g\|_\infty=\sup_{x\in G}|(f*g)(x)|\leq\|f\|_\infty\|g\|_{1,w} \tag{3-8}$$

bulunur. Yine,

$$\|f*g\|_{1,w}\leq\|f\|_{1,w}\|g\|_{1,w} \tag{3-9}$$

olduğu biliniyor. Dolayısıyla (3-8) ve (3-9) ifadeleri ve $\|g\|_{1,w}\leq\|g\|_{B_w^1}$ eşitsizliği kullanılırsa,

$$\|f*g\|_{B_w^1}=\|f*g\|_\infty+\|f*g\|_{1,w}\leq\|f\|_\infty\|g\|_{1,w}+\|f\|_{1,w}\|g\|_{1,w}\leq$$

$$\leq (\|f\|_\infty + \|f\|_{1,w})\|g\|_{1,w} = \|f\|_{B_w^1}\|g\|_{1,w} \leq \|f\|_{B_w^1}\|g\|_{B_w^1} \quad (3\text{-}10)$$

bulunur. Bu ise $B_w^1(G)$ uzayının girişim işlemine göre normlu cebir olduğunu gösterir. Yine 2.2. Önermeden $B_w^1(G)$ uzayının bir Banach uzayı olduğu biliniyor. O halde $B_w^1(G)$ uzayı girşim işlemine göre bir Banach cebiridir.

3.3. Önerme: $B_w^1(G)$ uzayı eğer $W=K$ ($K\in\mathbb{R}$, sabit sayı) ise bir Segal cebiridir.

İspat: (i) $B_w^p(G)$ uzayının $W=K$ ($K\in\mathbb{R}$, sabit sayı) ise homogen Banach uzayı olduğu 2.14. Önermeden biliniyor. Bu $p=1$ için de doğru olduğundan $B_w^1(G)$ uzayı bir homogen Banach uzayıdır.

(ii) $\|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_{1,w} \leq \|\cdot\|_{B_w^1}$ eşitsizliği vardır.

(iii) $B_w^1(G)$ uzayının girişim işlemine göre bir Banach cebiri olduğu 3.2. Önermeden biliniyor.

(iv) Şimdi $B_w^1(G)$ uzayının $L^1(G)$ uzayında $\|\cdot\|_1$ normuna göre heryerde yoğun olduğunu gösterelim. Bunun için herhangi $f\in L^1(G)$ alalım. $C_c(G)$ kümesi $L^1(G)$ uzayında heryerde yoğun olduğundan herhangi $\varepsilon>0$ sayısı verildiğinde

$$\|f-g\|_1 < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $g\in C_c(G)$ vardır. Yine 2.4. Önermeden $C_c(G)\subset B_w^p(G)$ kapsaması vardır. Bu özel olarak $p=1$ içinde doğru olduğundan $C_c(G)\subseteq B_w^1(G)$ kapsaması da vardır. O halde $g\in B_w^1(G)$ bulunur. Dolayısıyla $B_w^1(G)$ uzayı $L^1(G)$ uzayında $\|\cdot\|_1$ normuna göre heryerde yoğun olup bu özelliklerden dolayı $B_w^1(G)$ uzayı bir Segal cebiridir.

3.4. Önerme: $B_w^1(G)$ uzayı $C_o(G)$ uzayında heryerde yoğundur.

İspat: $C_c(G)\subset B_w^p(G)$ kapsaması 2.4. Önermede gösterildi. Dolayısıyla $C_c(G)\subset B_w^1(G)$ kapsaması da vardır. Yine $C_c(G)$ kümesinin $C_o(G)$ uzayında heryerde yoğun olduğu biliniyor. O halde herhangi $\varepsilon>0$ sayısı verildiğinde alınan her $f\in C_o(G)$ için

$$\|f-g\|_\infty<\varepsilon$$

olacak şekilde bir $g\in C_c(G)$ vardır. $C_c(G)\subset B_w^1(G)$ kapsamasından dolayı da $g\in B_w^1(G)$ bulunur. Bu ise istenendir.

3.5. Önerme: $B_w^1(G)$ uzayı $L_w^1(G)$ uzayında bir Banach idealdir.

İspat: Önce $B_w^1(G)$ uzayının $L_w^1(G)$ uzayında Banach modül olduğunu gösterelim. Bunun için herhangi $f\in B_w^1(G)$ ve $g\in L_w^1(G)$ alalım. 3.2. Önermeden $f*g\in B_w^1(G)$ olduğu ve

$$\|f*g\|_\infty\leq\|f\|_\infty\|g\|_{1,w} \tag{3-11}$$

eşitsizliğinin varlığı biliniyor. Ayrıca $L_w^1(G)$ girişim işlemine göre bir cebir olduğundan

$$\|f*g\|_{1,w}\leq\|f\|_{1,w}\|g\|_{1,w} \tag{3-12}$$

eşitsizliği de vardır. O halde (3-11) ve (3-12) eşitsizlikleri kullanılırsa,

$$\|f*g\|_{B_w^1}=\|f*g\|_\infty+\|f*g\|_{1,w}\leq\|f\|_\infty\|g\|_{1,w}+\|f\|_{1,w}\|g\|_{1,w}=$$

$$=(\|f\|_\infty+\|f\|_{1,w})\|g\|_{1,w}=\|f\|_{B_w^1}\|g\|_{1,w}<\infty \tag{3-13}$$

elde edilir. Şimdi Banach modül olmanın özelliklerini inceleyelim.

(i) Her $f,g\in L^1_w(G)$, her $h\in B^1_w(G)$ ve her $x\in G$ için

$$\left[(f+g)*h\right](x)=\int(f+g)(t)h(x-t)dt=\int(f(t)+g(t))h(x-t)dt=$$

$$=\int f(t)h(x-t)dt+\int g(t)h(x-t)dt=(f*h)(x)+(g*h)(x)=$$

$$=\left[(f*h)+(g*h)\right](x)$$

bulunur. Bu her $x\in G$ için doğru olduğundan

$$(f+g)*h=(f*h)+(g*h)$$

bulunur.

(ii) Her $f,g\in L^1_w(G)$ ve her $h\in B^1_w(G)$ için

$$\left[(f*g)*h\right](x)=\int_G(f*g)(t)h(x-t)dt=$$

$$=\int_G\{\int_G f(s)g(t-s)ds\}h(x-t)dt=$$

$$=\int\int_G f(s)g(t-s)h(x-t)dsdt$$

burada eğer $x-t=u$ dönüşümü yapılırsa

$$=\int\int_G f(s)g(x-u-s)h(u)dsdu=$$

$$=\int_G f(s)\{\int_G g(x-s-u)h(u)du\}ds=$$

$$=\int f(s)(g*h)(x-s)ds=\left[f*(g*h)\right](x)$$

olup bu eşitlik her $x\in G$ için doğru olduğundan

$$(f*g)*h=f*(g*h)$$

bulunur.

(iii) Her $f\in L^1_w(G)$, her $h\in B^1_w(G)$ ve her $a\in K$ için

$$[a(f*h)](x)=\int_G af(t)h(x-t)dt=\int_G (af)(t)h(x-t)dt=$$

$$=\int f(t)ah(x-t)dt=[(af)*h](x)=[f*(ah)](x)$$

eşitliği her $x\in G$ için doğru olduğundan

$$a(f*h)=(af)*h=f*(ah)$$

bulunur.

(iv) Her $f\in B^1_w(G)$ ve her $g\in L^1_w(G)$ için

$$\|f*g\|_{B^1_w}\leq\|f\|_{B^1_w}\|g\|_{1,w}$$

olduğu (3-13) eşitsizliğinden biliniyor. O halde bu özelliklerinden dolayı $B^1_w(G)$ uzayı $L^1_w(G)$ uzayında Banach modülüdür.

Şimdi $(B^1_w(G),\|\cdot\|_{B^1_w})$ uzayından $(L^1_w(G),\|\cdot\|_{1,w})$ içine $I(f)=f$ birim fonksiyonu tanımlıyalım. Bu I fonksiyonunun bire-bir olduğu biliniyor. Yine herhangi $f\in B^1_w(G)$ için $\|I(f)\|_{1,w}=\|f\|_{1,w}\leq\|f\|_{B^1_w}$ eşitsizliğinden dolayı I birim fonksiyonu süreklidir. Böylece B^1_w uzayı $L^1_w(G)$ uzayına sürekli olarak gömülebilir. Sonuç olarak $B^1_w(G)$ uzayı $L^1_w(G)$ uzayında Banach idealdir.

3.6. Önerme: $B^1_w(G)$ uzayı $L^1_w(G)$ uzayında heryerde yoğundur.

İspat: $C_c(G)\subset B^p_w(G)$ kapsaması 2.4. Önermede gösterildi. Bu özel olarak $p=1$ için de doğru olduğundan $C_c(G)\subset B^1_w(G)$

kapsaması da vardır. Yine $C_c(G)$ kümesi $L^1_w(G)$ uzayında heryerde yoğun olduğundan herhangi $\varepsilon>0$ sayısı verildiğinde alınan her $f\in L^1_w(G)$ için

$$\|f-g\|_{1,w}<\varepsilon$$

olacak şekilde bir $g\in C_c(G)$ vardır. $C_c(G)\subset B^1_w(G)$ kapsamasından $g\in B^1_w(G)$ bulunur. O halde $B^1_w(G)$, $L^1_w(G)$ uzayında heryerde yoğundur.

3.7. Önerme: $(B^1_w(G),\|\cdot\|_{B^1_w})$ uzayı $(L^1_w(G),\|\cdot\|_{1,w})$ Banach cebirinde girişim işlemine göre soyut Segal cebiridir.

İspat: (i) $B^1_w(G)$ uzayının $L^1_w(G)$ uzayında heryerde yoğun olduğu 3.6. Önermede ve $L^1_w(G)$ uzayında bir ideal olduğu da 3.5. Önermede ispatlandı.

(ii) Her $f\in B^1_w(G)$ için $\|f\|_{1,w}\leq\|f\|_{B^1_w}$ eşitsizliğinin varlığı biliniyor.

(iii) Her $f,g\in B^1_w(G)$ için $\|f*g\|_{B^1_w}\leq\|f\|_{B^1_w}\|g\|_{1,w}$ eşitsizliği 3.5. Önermede gösterildi. Bu özelliklerden dolayı $B^1_w(G)$, $L^1_w(G)$ uzayında bir soyut Segal cebiridir.

3.8. Önerme: Eğer I, $(L^1_w(G),\|\cdot\|_{1,w})$ uzayının kapalı sağ(kapalı sol) ideali ise bu taktirde $I\cap B^1_w(G)$, $(B^1_w(G),\|\cdot\|_{B^1_w})$ uzayının kapalı sağ(kapalı sol) idealidir ve $I=\overline{I\cap B^1_w(G)}$ olur. (Burada kapanış $L^1_w(G)$ uzayının $\|\cdot\|_{1,w}$ normuna göredir).

İspat: Bunun ispatı (R.Doran-Wichmann, [4] Sayfa 215 31.6. Lemma) daki gibi yapılır.

3.9. Önerme: $B^1_w(G)$ uzayının maksimal ideal uzayı ile $L^1_w(G)$ nin maksimal ideal uzayı aynıdır.

İspat: $\Delta_{B_w^1}$, $B_w^1(G)$ uzayının maksimal ideal uzayı, $\Delta_{L_w^1}$ da $L_w^1(G)$ uzayının maksimal ideal uzayı olmak üzere $B_w^1(G)\subset L_w^1(G)$ kapsamasından $\Delta_{L_w^1}\subset\Delta_{B_w^1}$ kapsamasının varlığı biliniyor(Loomis, [10]). Şimdi ters kapsamayı göstermek için herhangi $F\in\Delta_{B_w^1}$ fonksiyoneli alalım. Bu fonksiyonelin $L_w^1(G)$ uzayındaki topolojiye göre sürekli olduğunu gösterelim. Bunun için herhangi $f\in B_w^1(G)$ alınırsa

$$|F(f)|\leq(\|f\|_{B_w^1})_{sp}$$

olduğu açıktır. Yine f^{*^n} ile f fonksiyonunun n. girişimini gösterelim. Bu taktirde,

$$\|f^{*^n}\|_{B_w^1}=\|f^{*^{(n-1)}}*f\|_{B_w^1}=\|f^{*^{(n-1)}}*f\|_\infty+\|f^{*^{(n-1)}}*f\|_{1,w}=$$

$$=\sup_{x\in G}\left|\int_G f^{*^{(n-1)}}(t)f(x-t)dt\right|+\|f^{*^{(n-1)}}*f\|_{1,w}\leq$$

$$\leq\sup_{x\in G}|f(x-t)|\sup\int_G|f^{*^{(n-1)}}(t)|dt+$$

$$+\|f^{*^{(n-1)}}*f\|_{1,w}\leq\|f\|_\infty\|f^{*^{(n-1)}}\|_1+$$

$$+\|f^{*^{(n-1)}}\|_{1,w}\cdot\|f\|_{1,w}\leq\|f\|_\infty\|f^{*^{(n-1)}}\|_{1,w}+$$

$$+\|f^{*^{(n-1)}}\|_{1,w}\|f\|_{1,w}=\|f^{*^{(n-1)}}\|_{1,w}(\|f\|_\infty+\|f\|_{1,w})\leq$$

$$\leq\|f\|_{1,w}^{n-1}\|f\|_{B_w^1} \qquad (3\text{-}14)$$

elde edilir. Buradan eşitsizliğin her iki tarafının n.kökü ve $n \to \infty$ için limit alınırsa,

$$\lim_{n\to\infty} \| f^{*n} \|_{B_w^1}^{1/n} \leq \lim_{n\to\infty} \| f \|_{1,w}^{\frac{n-1}{n}} \| f \|_{B_w^1}^{\frac{1}{n}}$$

olup,

$$(\| f \|_{B_w^1})_{sp} \leq \| f \|_{1,w} \qquad (3\text{-}15)$$

bulunur. Yine,

$$|F(f)| \leq (\| f \|_{B_w^1})_{sp} \qquad (3\text{-}16)$$

olduğunu biliyoruz. O halde (3-15) ve (3-16) eşitsizliklerinden dolayı

$$|F(f)| \leq \| f \|_{1,w}$$

olup F fonksiyoneli $L_w^1(G)$ uzayındaki topolojiye göre süreklidir. Dolayısıyla $\Delta_{B_w^1} \subset \Delta_{1,w}$ elde edilir. O halde bunların sonucu

$$\Delta_{B_w^1} = \Delta_{L_w^1}$$

bulunur.

KAYNAKLAR

[1] BEURLING, A., Sur les intégrales de Fourier absolument convergentes LX. Congre's math. scand Helsinki 345-66, (1938).

[2] BURNHAM, J.T., Closed ideals in subalgebras of Banach algebras, Proceedings of the American Mathematical society vol.32, No.2, (1972).

[3] CARTAN, H., Differential calculus. Hermann, Paris-France, (1967).

[4] DORAN, R.S.-WICHMANN, J., Approximate identities and factorization in Banach modules, lecture notes in Matehmatics, 768, Springer-Verlag, (1979).

[5] FEICHTINGER, H.G.-GÜRKANLI, A.T., On a family of weighted convolution algebras, internat. J.Math.and Math. sci. vol.13, No.3, (1990).

[6] FISCHER, R.H.-GÜRKANLI, A.T.-LIU, T.S., On family of weighted spaces and Wiener type spaces, Mathematica Slovaca, (yayına hazırlanıyor).

[7] GÜRKANLI, A.T., Some results in the weighted $A_p(\mathbb{R}^n)$ spaces, Demonstratio Mathematica, Vol. 19, No.4,825-830, (1986).

[8] HEWITT, E.-ROSS, K.A., Abstract harmonic analysis, vol. 1, Springer-Verlag, (1963).

[9] LARSEN, R., Banach algebras and introduction, Marcel Dekker, INC. New York, (1973).

[10] LOOMIS, L.H., An Introduction to abstract harmonic analysis. D.Van Nostrand Company, INC., NewYork, (1953).

[11] REITER, H., Classical harmonic analysis and locally compact groups. Oxford at the Claredon press, (1968).

[12] ROYDEN, H.L., Real analysis, Mac Millan Publishing Co. INC. NewYork, (1968).

[13] RUDIN, W., Fourier analysis on groups. Interscience publ. NewYork, (1962).

[14] RUDIN, W., Real and complex analysis. Mc:Graw-Hill, NewYork, (1966).

[15] SCHWARTZ, L., Mathematics for the Physical sciences, Addison-Wesley publishing company.

[16] WANG, H.C., Homogeneous Banach algebras Marcel Dekker INC. NewYork and Basel, (1977).

BAZI İŞARETLERİN ANLAMLARI

$C_o(X)$: X üzerinde, sonsuzda sıfır olan fonksiyonların kümesi

$C_c(X)$: X üzerinde, sürekli, kompakt destekli fonksiyonların kümesi

suppf : f fonksiyonunun desteği

$*$: Girişim işlemi

$<$: Önde gelme bağıntısı

$\sim$: Denklik bağıntısı

$\|\cdot\|_B$: $B_w^p(G)$ uzayı üzerindeki norm

$\|\cdot\|_{B_w^1}$: $B_w^1(G)$ uzayı üzerindeki norm

$\hat{G}$: G grubunun karakter grubu

$\hat{f}$: f fonksiyonunun Fourier dönüşümü

$L_x f$: Sol öteleme

T^* : T dönüşümünün adjointi

Δ_B : B(G) uzayının maksimal ideal uzayı

ÖZGEÇMİŞ

1970 yılında Giresun'un Bulancak ilçesinde doğdum. İlk ve orta öğrenimimi Giresun'da yaptım. 1991-1992 öğretim yılında Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden mezun oldum. Aynı yıl Üniversitenin Fen Bilimleri Enstitüsü Fonksiyonlar Teorisi ve Fonksiyonel Analiz Anabilim dalında Yüksek Lisans öğrenimime başladım.