T.C.
ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DUAL SONLU ZAYIF RADİKAL TÜMLENMİŞ MODÜLLER

DOKTORA TEZİ

Figen ERYILMAZ

Matematik Anabilim Dalı

Anabilim Dalı : **Matematik**

HAZİRAN 2013
SAMSUN

T.C.
ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DUAL SONLU ZAYIF RADİKAL TÜMLENMİŞ MODÜLLER

DOKTORA TEZİ

Figen ERYILMAZ
(07210561)

Tezin Savuma Tarihi : 07 Haziran 2013

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Şenol EREN

Bu Doktora Tez Çalışması Ondokuz Mayıs Üniversitesi PYO. FEN. 11.009 ’nolu Proje ile Desteklenmiştir.

Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalında
Figen ERYILMAZ Tarafından Hazırlanan

DUAL SONLU ZAYIF RADİKAL TÜMLENMİŞ MODÜLLER

başlıklı bu çalışma jürimiz tarafından 07/06/2013 tarihinde yapılan sınav ile DOKTORA tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : **Prof. Dr. Fethi ÇALLIALP** ....
Doğuş Üniversitesi

Jüri Üyeleri : **Prof. Dr. Ali PANCAR** ....
Ondokuz Mayıs Üniversitesi

Prof. Dr. Şenol EREN ....
Ondokuz Mayıs Üniversitesi

Doç. Dr. Hamza ÇALIŞICI ....
Ondokuz Mayıs Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. Mustafa YAPICI ....
Ondokuz Mayıs Üniversitesi

…./06/2013

Prof. Dr. Recep TAPRAMAZ
Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın hazırlanması sırasında bilgi ve deneyimi ile bana yardımcı olmasının yanında ilgisini ve samimiyetini hiçbir zaman esirgemeyen, yapıcı ve yönlendirici fikirleriyle bana daima yol gösteren saygıdeğer hocam ve danışmanım Prof. Dr. Şenol EREN'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarıma başladığım andan itibaren bilgi desteğinin yanında her türlü sorunumda bana zamanını ayıran saygıdeğer hocam Prof. Dr. Ali PANCAR'a ve tezin hazırlanması sırasında bilgi ve tecrübesiyle beni aydınlatan, her aşamasında yardımlarını esirgemeyerek bana destek olan Doç. Dr. Hamza ÇALIŞICI'ya teşekkürlerimi sunarım.

Bugüne kadar maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen her zaman yanımda olan aileme ve sevgili eşim Doç. Dr. İlker ERYILMAZ'a teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR

R	: Birimli halka
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{P}$	: Asal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	: Tamsayılar halkası
$\mathbb{Q}$	: Tamsayılar halkasının kesir cismi
$\varnothing$	: Boş küme
$\subseteq$	: Alt küme
$\leq$	: Alt modül
$<$	: Öz alt modül
$\ll$	: Küçük alt modül
$\trianglelefteq$	: Büyük alt modül
1_R	: R halkasının birimi
0_R	: R halkasının sıfırı
$S^{-1}R$	: R halkasının S çarpımsal alt kümesine göre kesirler halkası
$K(R)$	: Bir R değişmeli bölgesinin kesir cismi
(A)	: Bir A kümesi tarafından üretilen ideal
(a)	: Bir R halkasında a elemanı tarafından üretilen esas ideal
$\langle X \rangle$	: X kümesi tarafından üretilen alt modül
${}_R R$	: R sol R-modülü
$Rm = \langle m \rangle$	: Bir M modülünde m elemanı tarafından üretilen devirli alt modül
$\sum_{i \in I} M_i$	: Bir M modülünün $\{M_i\}_{i \in I}$ alt modüller ailesinin toplamı
$\bigoplus_{i \in I} M_i$	: Bir M modülünün $\{M_i\}_{i \in I}$ alt modüller ailesinin iç direkt toplamı
$\prod_{i \in I} M_i$	: $\{M_i\}_{i \in I}$ modüller ailesinin direkt çarpımı
$Gör(f)$	: Bir f homomorfizmasının görüntü kümesi
$Çek(f)$	: Bir f homomorfizmasının çekirdeği
$End(M)$	: M modülünün endomorfizmalarının kümesi
$\cong$	: İzomorfizma
i	: İçerme fonksiyonu
π	: Doğal homomorfizma
p_j	: $j-$ yinci izdüşüm homomorfizması
I_j	: $j-$ yinci gömme homomorfizması
I_M	: M modülünün birim homomorfizması

$f\|_N$	: f fonksiyonunun N kümesine kısıtlanış fonksiyonu
M/N	: M modülünün N alt modülüne göre bölüm modülü
$Ann(M)$	: M modülünün annihilatörü (sıfırlayanı)
$Ann(m)$	: M modülünde m elemanının annihilatörü (sıfırlayanı)
$T(M)$	: M modülünün torsion (burulma) alt modülü
$T_P(M)$	: M modülünün $P-$ asıl bileşeni
$M^{(I)}$	: M modülünün I indis kümesine göre kopyalarının toplamı
$Des(M)$	: M modülünün tüm basit alt modüllerinin toplamı
$Rad(M)$	: M modülünün radikali
Ω	: R Dedekind bölgesinin tüm maksimal (asal) ideallerinin kümesi

DUAL SONLU ZAYIF RADİKAL TÜMLENMİŞ MODÜLLER

ÖZET

Bu tezde dual sonlu zayıf tümlenmiş modül kavramından yola çıkılarak dual sonlu zayıf radikal tümlenmiş modül kavramı tanımlandı ve bu modüllerin bazı özellikleri incelendi. Dual sonlu radikal tümlenmiş her modülün dual sonlu zayıf radikal tümlenmiş olduğu açıktır. Tersine eğer M $R-$modülü sonlu üretilmiş her K alt modülü için $Rad(K) = K \cap Rad(M)$ koşulunu sağlayan dual sonlu zayıf radikal tümlenmiş modül ise, M nin dual sonlu radikal tümlenmiş olduğu gösterildi. Dual sonlu zayıf radikal tümlenmiş bir modülün her bölüm modülü dual sonlu zayıf radikal tümlenmiş olmasına rağmen tersi doğru değildir. Ancak M nin $N \leq Rad(M)$ koşulunu sağlayan N alt modülü için M/N dual sonlu zayıf radikal tümlenmiş ise, M nin dual sonlu zayıf radikal tümlenmiş olduğu ve yine N, M nin lineer kompakt bir alt modülü olmak üzere M/N dual sonlu zayıf radikal tümlenmiş ise, M nin dual sonlu zayıf radikal tümlenmiş olduğu gösterildi. Ayrıca keyfi sayıda dual sonlu zayıf radikal tümlenmiş modülün toplamının dual sonlu zayıf radikal tümlenmiş olduğu ve bu modüllerin sınıfının genişlemeler altında kapalı olduğu gösterildi.

İkinci bölümde, dual sonlu zayıf radikal tümlenmiş modüllerin Dedekind bölgeleri ve noetherian halkalar üzerindeki yapısı araştırıldı. Bir R tamlık bölgesinin h-yarı lokal olması için gerek ve yeter koşulun her torsion $R-$modülün dual sonlu zayıf radikal tümlenmiş olması gerektiği gösterildi.

Üçüncü bölümde, tamamen dual sonlu zayıf radikal tümlenmiş modül kavramı tanımlandı. Tamamen dual sonlu zayıf radikal tümlenmiş bir modülün her bölüm modülünün tamamen dual sonlu zayıf radikal tümlenmiş olduğu ve bölüm modülü tamamen dual sonlu zayıf radikal tümlenmiş iken modülün kendisinin bazı koşullar altında tamamen dual sonlu zayıf radikal tümlenmiş olduğu ispatlandı.

Anahtar Kelimeler: Dual Sonlu Alt Modül; Radikal; Tümleyen; Zayıf Tümleyen; Zayıf Rad-Tümlenmiş Modül; Noetherian Halka; Dedekind Bölgesi; h-Yarı Lokal Bölge.

COFINITELY WEAK RADICAL SUPPLEMENTED MODULES

ABSTRACT

In this thesis, based on cofinitely weak supplemented module concept, cofinitely weak radical supplemented module concept is defined and some properties of these modules are examined. It is obvious that every cofinitely radical supplemented module is cofinitely weak radical supplemented module. Conversely, it is showed that if M is a cofinitely weak radical supplemented module such that every finitely generated submodule K of M with $Rad(K) = K \cap Rad(M)$ then M is cofinitely radical supplemented. Although every quotient module of a cofinitely weak radical supplemented module is a cofinitely weak radical supplemented module, the converse is not true. However, if M/N is cofinitely weak radical supplemented with a submodule N satisfying $N \leq Rad(M)$, then M is cofinitely weak radical supplemented and again if M/N is cofinitely weak radical supplemented for a linear compact submodule N, then M is cofinitely weak radical supplemented. Nevertheless, it is showed that arbitrary sum of cofinitely weak radical supplemented modules is cofinitely weak radical supplemented and the class of these modules is closed under extensions.

In the second section, the structure of cofinitely weak radical supplemented modules over Dedekind domain and noetherian ring is investigated. It is showed that an integral domain R is h-semilocal if and only if every torsion $R-$module is cofinitely weak radical supplemented.

In the third section, totally cofinitely weak radical supplemented module concept is defined. It is proved that every quotient module of a totally cofinitely weak radical supplemented module is totally cofinitely weak radical supplemented and the module is totally cofinitely weak radical supplemented module itself under some conditions when the quotient module is totally cofinitely weak radical supplemented.

Key Words: Cofinite Submodule; Radical, Supplement; Weak Supplement; Weakly Rad-Supplemented Module; Noetherian Ring; Dedekind Domain; h-Semilocal Domain.

1. GİRİŞ

Modül Teorisi 1890'lı yıllarda D. Hilbert tarafından ortaya konulmuş ve 1940'lı yıllarda E. Noether tarafından geliştirilmiştir. Her vektör uzayının alt uzayı bir direkt toplam terimidir. Ancak bu modüllerde doğru değildir. Dolayısıyla Modül Teori'deki temel problemlerden biri keyfi bir modülün alt modüllerinin direkt toplam şeklindeki yazılışıdır. M modülünün her U alt modülü için $M=U+V$ ve V bu koşula göre minimal ise (yani $M=U+V_1$ ve $V_1 \leq V$ olması durumunda $V_1=V$ ise) V alt modülüne U alt modülünün toplamaya göre tümleyeni denir. $U \cap V=0$ ve V bu koşula göre maksimal ise (yani $U \cap V_1=0$ ve $V \leq V_1$ olması durumunda $V_1=V$ ise) V alt modülüne U alt modülünün kesişime göre tümleyeni denir. V alt modülünün M modülünün direkt toplam terimi olması için gerek ve yeter koşul V alt modülünün U nun hem kesişime, hem de toplamaya göre tümleyeni olmasıdır. Dolayısıyla tümleyen kavramına direkt toplam terimi kavramının bir genelleştirilmesi olarak bakılabilir. Toplamaya göre tümleyen kavramındaki V alt modülünün minimal olması $U \cap V \ll V$ olmasına denktir. Eğer $U \cap V \ll M$ ise U ya V nin ya da V ye U nun zayıf tümleyeni denir. M modülünün her alt modülü M de bir tümleyene (zayıf tümleyene) sahip ise M modülüne tümlenmiş (zayıf tümlenmiş) modül denir. M/U bölüm modülü sonlu üretilmiş ise U ya M nin dual sonlu alt modülü denir. M modülünün dual sonlu her alt modülü M de bir tümleyene (zayıf tümleyene) sahip ise M modülüne dual sonlu tümlenmiş (zayıf tümlenmiş) modül denir.

$Rad(M)$, M modülünün tüm küçük alt modüllerinin toplamı olduğundan $U \cap V \ll M$ iken $U \cap V \leq Rad(M)$ olur. U, M nin dual sonlu alt modülü olmak üzere $M=U+V$ ve $U \cap V \leq Rad(M)$ koşulunu gerçekleyen $V \leq M$ alt modülüne U dual sonlu alt modülünün zayıf radikal tümleyeni denir. M modülünün dual sonlu her alt modülü zayıf radikal tümleyene sahip ise M ye dual sonlu zayıf radikal tümlenmiş modül denir.

Bu tezdeki tüm halkalar en az iki elemana sahip birimli halka ve bütün modüller de üniter sol $R-$modül olarak alınacaktır. Bu tez üç bölümden oluşmaktadır. Genel Bilgiler bölümünde halkalar ve modüller ile ilgili iyi bilinen temel kavramlara yer verildi.

Materyal ve Metot bölümünde tümlemiş, zayıf radikal tümlenmiş, dual sonlu zayıf tümlenmiş modüller ile ilgili bilinen ve bulgular bölümünde kullanacak olduğumuz özellikler verildi.

Bulgular ve Tartışma bölümü üç kısımdan oluşmaktadır.

Birinci kısımda dual sonlu zayıf tümlenmiş modüller genelleştirilerek dual sonlu zayıf radikal tümlenmiş modül kavramı tanımlandı ve bu modüller ile ilgili karakterizasyonlar verildi.

İkinci kısımda, dual sonlu zayıf radikal tümlenmiş modüller noetherian halka ve Dedekind bölgesi üzerinde çalışıldı.

Üçüncü kısımda ise, dual sonlu zayıf radikal tümlenmiş modüllerden daha güçlü olarak tamamen dual sonlu zayıf radikal tümlenmiş modüller tanımlandı ve bu modüller ile ilgili bir takım özellikler incelendi.

2. LİTERATÜR ÖZETİ

H. Bass 1960 yılında yapmış olduğu “Finitistic dimension and a homological generalization of semiprimary rings” adlı çalışmasında mükemmel ve yarı mükemmel halka kavramlarını tanımlamıştır ve bu halkaların karakterizasyonlarını vermiştir. Erika A. Mares 1963 yılındaki “Semi-perfect modules” adlı çalışmasında bu kavramları modüllere taşımıştır. F. Kasch ve E. A. Mares 1966 yılında yapmış oldukları “Eine kennzeichonung semi-perfekter moduln” adlı çalışmalarında bir modülün yarı mükemmel olması için gerek ve yeter koşulun o modülün tümlenmiş olması olduğunu ispat etmişlerdir. J. Golan 1971 yılındaki “Quasiperfect modules” adlı çalışmasında bu modülleri tümlenmiş modül olarak adlandırmıştır. H. Zöschinger 1974 yılında yapmış olduğu “Supplemented modules over Dedekind rings” adlı çalışmasında (lokal) Dedekind bölgeleri üzerinde tümlenmiş modüllerin yapısını belirlemiştir. Ayrıca 1979 yılındaki çalışmasında tümlenmiş modülleri zayıflatarak zayıf tümlenmiş modülleri çalışmıştır. J. Hausen ve J. Johnson 1983 yılında yapmış oldukları çalışmada sıfırdan farklı serbest-torsion tümlenmiş modüle sahip Dedekind bölgesinin lokal Dedekind bölgesi olduğunu ve her tümlenmiş modülü bol tümlenmiş olan lokal Dedekind bölgesinin tam ayrık değerlendirme halkası olduğunu ispatlamıştır. P. Rudlof 1991 yılındaki çalışmasında değişmeli halkalar üzerinde zayıf tümlenmiş, tamamen tümlenmiş modülleri incelemiştir ve bir takım şartlar altında tümlenmiş modüllerin genişlemelerde kapalı olduğunu ispatlamıştır. W. Xue 1996 yılında yapmış olduğu “Characterizations of semiperfect and perfect rings” adlı çalışmasında tümlenmiş modülleri genelleştirerek genelleştirilmiş tümlenmiş modülleri tanımlamıştır. R. Alizade, G. Bilhan ve P. F. Smith 2001 yılındaki “Modules whose maximal submodules have supplements” adlı çalışmalarında dual sonlu tümlenmiş modülleri tanımlamış ve sağladığı özellikleri burada vermişlerdir. Daha sonra R. Alizade ve E. Büyükaşık, 2003’de yayınladıkları “Cofinitely weakly supplemented modules” adlı makalede dual sonlu zayıf tümlenmiş modül kavramını tanımlamış ve bazı özeliklerini vermişlerdir. Y. Wang ve N. Ding 2006’da yayınladıkları “Generalized supplemented modules” adlı çalışmada daha önce W. Xue tarafından verilen genelleştirilmiş tümleyen kavramını kullanarak literatüre Rad-tümleyen olarak geçen ve bizim de çalışmalarımızda Rad-tümleyen olarak kullandığımız genelleştirilmiş tümlenmiş (Radikal tümlenmiş veya kısaca Rad-tümlenmiş) modüller üzerine çalışmışlardır. Bunun yanında zayıf Rad-tümlenmiş modül kavramını tanımlayıp, bir halkanın yarı lokal olması için gerek ve yeter koşulun her devirli modülün zayıf Rad-tümlenmiş modül olması olduğunu ispatlamışlardır. E. Türkmen 2007'deki "Radikal Tümlenmiş Modüller" adlı yüksek lisans tezinde Rad-tümlenmiş modüller ile ilgili bazı özellikleri vermiştir.

3. GENEL BİLGİLER

3.1 Halkalar

Tanım 3.1.1. R boş kümeden farklı bir küme ve R üzerinde tanımlı iki ikili işlem "$+$" ve "$\bullet$" olsun. Aşağıdaki aksiyomları sağlayan $(R,+,\bullet)$ cebirsel yapısına **halka** denir:

H1) $(R,+)$ bir değişmeli gruptur,

H2) "$\bullet$" işleminin R de birleşme özelliği vardır,

H3) "$\bullet$" işleminin "$+$" işlemi üzerine sağdan ve soldan dağılma özelliği vardır (Hungerford, 1973).

Bu tezde $(R,+,\bullet)$ halkası R ile gösterilecektir.

Tanım 3.1.2. R halkasının "$+$" işlemine göre etkisiz elemanına halkanın **sıfır elemanı** denir ve 0_R ile gösterilir. Halkanın "$\bullet$" işlemine göre etkisiz elemanı olmayabilir eğer varsa bu halkaya **birimli halka** denir ve bu etkisiz eleman 1_R ile gösterilir. R birimli bir halka olmak üzere $r \in R$ sıfırdan farklı bir eleman olsun. $rs = 1_R$ $(sr = 1_R)$ olacak şekilde bir $s \in R$ mevcut ise r elemanına R halkasının **sağ (sol) terslenebilir elemanı** denir. Eğer r hem sağ hem de sol terslenebilir ise **terslenebilirdir** denir. Ayrıca, halka ikinci işleme göre değişme özelliğine sahipse halkaya **değişmeli halka** denir (Hungerford, 1973).

Tanım 3.1.3. R halkasında $0_R \neq r \in R$ elemanı için $rs = 0_R$ (veya $sr = 0_R$) olacak şekilde en az bir $0_R \neq s \in R$ elemanı bulunabiliyorsa $r \in R$ elemanına sol (sağ) **sıfır bölen eleman** denir. R halkası sol (sağ) sıfır bölen içermiyorsa R halkasına **sol (sağ) sıfır bölensiz halka** denir. Sol ve sağ sıfır bölensiz halkaya **sıfır bölensiz halka** denir (Hungerford, 1973).

Tanım 3.1.4. Birimli ve sıfır bölensiz bir R halkasına **bölge** denir (Sharpe ve Vamos, 1972).

Değişmeli R bölgesine de **tamlık bölgesi** denir (Hungerford, 1973).

Tanım 3.1.5. R bir halka ve $\varnothing \neq S \subseteq R$ olsun. R deki işlemlere göre S alt kümesi kendi başına bir halka ise, S ye R halkasının bir **alt halkası** denir (Hungerford, 1973).

Tanım 3.1.6. R bir halka ve $\varnothing \neq I \subseteq R$ olsun.

(i) Her $a,b \in I$ için $a-b \in I$ ve

(ii) Her $a \in I$ ve her $r \in R$ için $ra \in I$ ($ar \in I$) ise, I ya R nin bir **sol (sağ) ideali** denir. Hem sol hem sağ ideal şartını sağlayan ideale **iki taraflı ideal** veya kısaca **ideal** denir. Bir R halkasının sıfırı ve kendisi birer ideal yapısına sahiptir. Bunlara R nin **aşikar idealleri** denir. R halkasının kendinden farklı her idealine R halkasının bir **öz (has) ideali** denir (Hungerford, 1973).

Tanım 3.1.7. A, R halkasının bir alt kümesi olsun. R nin A yı kapsayan bütün ideallerinin arakesitine ***A* nın ürettiği ideal** denir ve (A) ile gösterilir. Eğer $A=\{a\}$ şeklinde tek elemanlı bir küme ise A nın ürettiği ideale **esas (temel) ideal** denir ve (a) ile gösterilir (Hungerford, 1973).

Tanım 3.1.8. Her ideali esas (temel) ideal olan bir tamlık bölgesine bir **esas (temel) ideal bölgesi** denir (Hungerford, 1973).

Tanım 3.1.9. R bir halka, $\varnothing \neq S \subseteq R$ olsun. Eğer her $a,b \in S$ için $ab \in S$ ise S kümesine R nin **çarpımsal alt kümesi** denir. R değişmeli bir halka ve S, R nin çarpımsal alt kümesi olsun. Bu durumda $R \times S$ üzerinde her $(r,s),(r',s') \in R \times S$ ve $s_1 \in S$ için $(r,s) \sim (r',s') \Leftrightarrow s_1(rs'-r's)=0$ şeklinde tanımlanan "$\sim$" bağıntısı bir denklik bağıntısıdır. Eğer R sıfır bölensiz ve $0_R \notin S$ ise bu durumda $(r,s) \sim (r',s') \Leftrightarrow rs'-r's=0$ olup bu bağıntı da $R \times S$ üzerinde bir denklik bağıntısıdır. $(r,s) \in R \times S$ nin denklik sınıfı $\dfrac{r}{s}$ ile "$\sim$" bağıntısına göre $R \times S$ nin tüm denklik sınıflarının kümesi de $S^{-1}R$ ile gösterilir. Ayrıca $S^{-1}R$, her $\dfrac{r}{s},\dfrac{r'}{s'} \in S^{-1}R$ için $\dfrac{r}{s}+\dfrac{r'}{s'}=\dfrac{rs'+r's}{ss'}$, $\left(\dfrac{r}{s}\right)\left(\dfrac{r'}{s'}\right)=\dfrac{rr'}{ss'}$ şeklinde tanımlanan toplama ve çarpma işlemlerine göre birimli ve değişmeli bir halkadır. $S^{-1}R$ halkasına R nin S ye göre **kesirler halkası** veya **bölümler halkası** denir. Eğer R bir tamlık bölgesi ve S de R nin sıfırdan farklı bütün elemanlarının kümesi ise $S^{-1}R$ bir cisimdir. Bu cisme R tamlık bölgesinin **kesir cismi** veya **bölüm cismi** denir ve $K(R)$ ile gösterilir (Hungerford, 1973).

Tanım 3.1.10. R bir değişmeli halka ve P, R halkasının öz ideali olsun. $a,b\in R$ olmak üzere $ab\in P$ iken $a\in P$ veya $b\in P$ oluyorsa, P idealine R halkasının **asal ideali** denir (Sharpe ve Vamos, 1972).

3.2. Modüller

Tanım 3.2.1. R bir halka ve $(M,+)$ bir Abel grup olmak üzere

$$\bullet : R\times M \to M$$
$$(r,m)\to r\bullet m$$

dış işlemi her $r_1,r_2\in R$ ve her $m_1,m_2\in M$ için

(i) $r_1\bullet(m_1+m_2)=r_1\bullet m_1+r_1\bullet m_2$

(ii) $(r_1+r_2)\bullet m_1=r_1\bullet m_1+r_2\bullet m_1$

(iii) $(r_1r_2)\bullet m_1=r_1\bullet(r_2\bullet m_1)$

koşullarını sağlarsa M ye "$\bullet$" dış işlemine göre bir **sol $R-$modül** denir. R birimli bir halka ve M bir sol $R-$modül olsun. Eğer her $m\in M$ için

(iv) $1_R\bullet m=m$

ise M ye **üniter sol $R-$modül** denir (Alizade ve Pancar, 1999).

Birimli bir R halkası kendisi üzerinde bir üniter sol $R-$modül yapısına sahiptir. Bu modül ${}_RR$ ile gösterilir.

Tanım 3.2.2. M bir $R-$modül ve $\varnothing\neq U\subseteq M$ olsun. U, M nin bir alt grubu ve her $m\in U$, her $r\in R$ için $rm\in U$ ise U ya M nin bir **alt modülü** denir ve $U\leq M$ ile gösterilir (Hungerford, 1973).

Bir M $R-$modülünün sıfırı ve kendisi birer alt modül yapısına sahiptir. Bu alt modüllere **aşikar alt modül** denir ve $\{0_M\}$ alt modülü kısaca 0 ile gösterilir. M modülünün kendisinden farklı alt modülüne M nin **öz alt modülü** denir ve $U<M$ ile gösterilir.

Tanım 3.2.3. M bir $R-$modül ve $X\subseteq M$ olsun. M nin X alt kümesini kapsayan bütün alt modüllerinin arakesitine X tarafından **üretilen alt modül** denir ve $\langle X\rangle$ ile gösterilir. Burada X kümesinin elemanları $\langle X \rangle$ alt modülünün üreteçleri olarak adlandırılır. X sonlu ise $\langle X \rangle$ modülüne **sonlu üretilmiş alt modül** denir.

Özel olarak X tek elemanlı ise $\langle X \rangle$ modülüne **devirli modül** denir. $M = \langle X \rangle$ olacak şekilde $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ sonlu alt kümesi varsa, M ye **sonlu üretilmiş modül** denir. M sonlu üretilmiş bir modül ise $M = \langle \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \rangle = \{r_1x_1 + \dots + r_nx_n \mid r_i \in R,\ 1 \le i \le n\}$ şeklindedir. Yani M nin her bir m elemanı için $m = r_1x_1 + \dots + r_nx_n$ olacak şekilde $r_i \in R,\ i = 1, 2, \dots, n$ vardır. Kısalığı için $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ in ürettiği modül $M = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ ile gösterilir (Hungerford, 1973).

R sol $R-$modülü birim eleman tarafından üretilen devirli bir modüldür.

Tanım 3.2.4. M bir $R-$modül ve $U \le M$ olsun. Bu takdirde M/U bölüm grubu her $r \in R$, her $m + U \in M/U$ için $r(m+U) = rm + U$ ile tanımlı dış işleme göre bir sol $R-$modül yapısına sahiptir ve bu modüle, M nin U alt modülüne göre **bölüm modülü** denir (Wisbauer, 1991).

Teorem 3.2.5. Sonlu üretilmiş modüllerin bölüm modülleri de sonlu üretilmiştir (Wisbauer, 1991).

İspat: M sonlu üretilmiş bir $R-$modül ise $M = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ olup her $m \in M$ için $m = r_1x_1 + \cdots + r_nx_n$ olacak şekilde $r_i \in R,\ i = 1, 2, \dots, n$ vardır. $N \le M$ keyfi olmak üzere her $m + N \in M/N$ elemanı için $m + N = (r_1x_1 + r_2x_2 + \cdots + r_nx_n) + N = (r_1x_1 + N) + \cdots + (r_nx_n + N) = r_1(x_1 + N) + \cdots + r_n(x_n + N)$ yazılabileceğinden $M/N = \langle x_1 + N, \dots, x_n + N \rangle$ olup M/N sonlu üretilmiştir.

Tanım 3.2.6. M bir $R-$modül ve $N \le M$ olsun. M/N bölüm modülü sonlu üretilmiş ise, N alt modülüne M nin **dual sonlu alt modülü** denir (Alizade ve ark., 2001).

Tanım 3.2.7. M bir $R-$modül ve $N < M$ olsun. M nin N yi kapsayan M ve N den farklı bir alt modülü yoksa N ye M nin **maksimal alt modülü** denir (Wisbauer, 1991).

Tanım 3.2.8. R bir halka olsun. Sıfırdan farklı her sol $R-$modül bir maksimal alt modüle sahip ise R halkasına **sol Bass halka** denir (Clark ve ark., 2006).

Teorem 3.2.9. M bir $R-$modül ve $N \leq M$ olsun. Bu takdirde $K \rightarrow K/N$ ile tanımlı M nin N yi kapsayan alt modülleri ile M/N nin alt modülleri arasında birebir bir eşleme yapılabilir. Böylece M/N nin her alt modülü, K, M nin N yi kapsayan alt modülü olmak üzere K/N şeklindedir. Ayrıca N yi içeren $K \leq M$ alt modülünün M de maksimal olması için gerek ve yeter koşul K/N nin M/N de maksimal alt modül olmasıdır (Alizade ve Pancar, 1999).

Teorem 3.2.10. M sonlu üretilmiş bir $R-$modül ise M modülünün her öz alt modülü bir maksimal alt modül tarafından kapsanır (Sharpe ve Vamos, 1972).

İspat: N, M nin keyfi bir öz alt modülü olsun. Ω ile M nin N yi içeren bütün öz alt modüllerinin ailesini gösterelim. $N \in \Omega$ olduğundan $\Omega \neq \varnothing$ olur. Ω kümelerdeki kapsama bağıntısına göre kısmen sıralı bir kümedir. Λ, Ω nın boş kümeden farklı bir zinciri olsun. N_0 ile Λ nın bütün elemanlarının birleşimini gösterelim. Λ tam sıralı olduğundan Λ nın elemanları kümelerdeki kapsama bağıntısına göre karşılaştırılabilir olup N_0, M nin N yi kapsayan bir alt modülüdür. M sonlu üretilmiş olduğundan $M = Rm_1 + Rm_2 + \cdots + Rm_n$ olacak şekilde $m_1, m_2, \ldots, m_n \in M$ elemanları vardır. Eğer $N_0 = M$ olursa her $i = 1, 2, \ldots, n$ için $m_i \in N_0 = \bigcup_{L \in \Lambda} L$ yazılır. Buradan öyle bir $L \in \Lambda$ vardır ki her $i = 1, 2, \ldots, n$ için $m_i \in L$ olup $M = L$ olur. Bu ise $L \in \Omega$ olmasıyla çelişir. Böylece N_0, M nin N yi kapsayan bir öz alt modülüdür, yani $N_0 \in \Omega$ dır. Ayrıca $N \subseteq N_0$ olduğundan N_0, Λ kümesinin bir üst sınırıdır. O halde Zorn Lemması gereği Ω bir maksimal elemana sahiptir. Bu maksimal eleman M nin N öz alt modülünü kapsayan bir maksimal alt modülüdür.

Sonuç 3.2.11. M bir $R-$modül ve N, M nin bir öz alt modülü olmak üzere M/N sonlu üretilmiş ise N, M nin bir maksimal alt modülü tarafından kapsanır.

İspat: Teorem 3.2.10 ile M/N, P/N maksimal alt modülüne sahiptir. Teorem 3.2.9 dan P, M nin N alt modülünü kapsayan bir maksimal alt modülüdür.

Teorem 3.2.12. (Modüler Kural) M bir $R-$modül olmak üzere N, K, L M nin alt modülleri ve $N \leq L$ olsun. Bu takdirde $(N+K) \cap L = N + (K \cap L)$ dir (Alizade ve Pancar, 1999).

İspat: $a \in N$, $b \in K$ ve $c \in L$ olmak üzere, $c = a + b \in (N+K) \cap L$ olsun. $N \leq L$ olduğundan $b = c - a \in K \cap L$ olduğu görülür. Bu durumda $a + b \in N + (K \cap L)$ olup $(N+K) \cap L \subseteq N + (K \cap L)$ olur. Tersine $a \in N$ ve $b \in K \cap L$ olmak üzere $a + b \in N + (K \cap L)$ için $a + b \in N + K$ olduğu açıktır. $N \leq L$ olduğundan $a + b \in L$ elde edilir. Dolayısıyla $a + b \in (N+K) \cap L$ olduğundan $N + (K \cap L) \subseteq (N+K) \cap L$ olur. Sonuç olarak $(N+K) \cap L = N + (K \cap L)$ bulunur.

Tanım 3.2.13. R bir tamlık bölgesi ve $K(R)$, R nin kesir cismi olmak üzere F, $K(R)$ $R-$modülünün alt modülü olsun. Eğer F , $0_R \neq r \in R$ için $rF \leq R$ koşulunu sağlıyorsa F alt modülüne **kesirsel ideal** denir (Sharpe ve Vamos, 1972).

3.3. Homomorfizmalar ve İzomorfizma Teoremleri

Tanım 3.3.1. M ve N iki $R-$modül ve $f: M \to N$ bir fonksiyon olsun. Eğer f fonksiyonu her m_1, $m_2 \in M$ ve her $r \in R$ için $f(m_1 + m_2) = f(m_1) + f(m_2)$ ve $f(rm_1) = rf(m_1)$ koşullarını sağlarsa, f ye bir $R-$**modül homomorfizması** veya **homomorfizma** denir. f bire-bir ise f ye **monomorfizma**, örten ise **epimorfizma** ve hem bire-bir hem de örten ise **izomorfizma** denir. $f: M \to M$ homomorfizmasına M modülünün **endomorfizması** denir. M modülünün tüm endomorfizmalarının kümesi $End(M)$ ile gösterilir.

Her $m \in M$ için $f(m) = 0_N$ ile tanımlı $f: M \to N$ fonksiyonu bir homomorfizmadır. Bu homomorfizmaya **sıfır homomorfizma** denir ve 0 ile gösterilir.

Her $m \in M$ için $f(m) = m$ ile tanımlı $f: M \to M$ fonksiyonu bir homomorfizmadır. Bu homomorfizmaya **birim homomorfizma** denir ve I_M veya 1_M ile gösterilir (Hungerford, 1973).

Tanım 3.3.2. $f: M \to N$ bir $R-$modül homomorfizması olsun. Bu takdirde;

(i) $f(M) = \{ f(m) \mid m \in M \}$ kümesi N nin bir alt modülüdür ve bu alt modüle f **homomorfizmasının görüntü kümesi** denir ve $Gör(f)$ ile gösterilir.

(ii) $\{ m \in M \mid f(m) = 0_N \}$ kümesi M nin bir alt modülüdür ve bu alt modüle f **homomorfizmasının çekirdeği** denir ve $Çek(f)$ ile gösterilir (Hungerford, 1973).

Teorem 3.3.3. M bir $R-$modül ve $N \leq M$ olsun. Bu takdirde $\pi: M \to M/N$, $m \to \pi(m) = m + N$ dönüşümü bir epimorfizmadır ve $Çek(\pi) = N$ dir. Bu epimorfizmaya **doğal homomorfizma** denir (Alizade ve Pancar, 1999).

Teorem 3.3.4. (Esas Homomorfizma Teoremi veya 1. İzomorfizma Teoremi) M ve N iki $R-$modül olmak üzere her $f: M \to N$ homomorfizması için $\sigma: M \to M/Çek(f)$ doğal epimorfizma olsun. Bu takdirde $f = \overline{f} \circ \sigma$ olacak şekilde bir $\overline{f}: M/Çek(f) \to N$ monomorfizması vardır. Ayrıca, $M/Çek(f) \cong Gör(f)$ dir (Alizade ve Pancar, 1999).

Sonuç 3.3.5. M, N birer $R-$modül ve $f: M \to N$ bir epimorfizma ise, $M/Çek(f) \cong N$ olur (Alizade ve Pancar, 1999).

Teorem 3.3.6. (2. İzomorfizma Teoremi) M bir $R-$modül ve $N, K \leq M$ olsun. Bu takdirde $(N+K)/K \cong N/(N \cap K)$ dir (Alizade ve Pancar, 1999).

Teorem 3.3.7. (3. İzomorfizma Teoremi) N, K ve M, $N \leq K \leq M$ koşulunu sağlayan $R-$modüller ise, $M/K \cong (M/N)/(K/N)$ dir (Alizade ve Pancar, 1999).

Tanım 3.3.8. M bir $R-$modül ve $U \leq M$ olsun. Her $f \in End(M)$ için $f(U) \leq U$ oluyorsa M nin U alt modülüne **karakteristik alt modülü** denir. Eğer M modülünün her alt modülü karakteristik alt modül ise M modülüne **eş modül** denir (Özcan ve ark., 2006).

3.4. Direkt Toplamlar ve Direkt Çarpımlar

Tanım 3.4.1. R bir halka ve I boş kümeden farklı bir indis kümesi olmak üzere, $\{M_i\}_{i\in I}$ $R-$modüllerin bir ailesi olsun.

$$\left\{\alpha \mid \alpha : I \to \bigcup_{i\in I} M_i,\ \forall i \in I \text{ için } \alpha(i) \in M_i\right\}$$

dönüşümlerinin kümesine $\{M_i\}_{i\in I}$ **modüller ailesinin çarpımı** denir ve bu küme $\prod_{i\in I} M_i$ ile gösterilir. Her $i\in I$ için $\alpha(i) := \alpha_i$ ve $\alpha := (\alpha_i)_{i\in I}$ olarak alalım. Burada α_i ye α nın ***i*-yinci bileşeni** denir. I indis kümesi sayılabilir ise $\alpha = (\alpha_i)_{i\in I} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_i, ...)$ şeklindedir.

$\alpha = (\alpha_i), \beta = (\beta_i) \in \prod_{i\in I} M_i$ olmak üzere,

(i) $\alpha = \beta \Leftrightarrow \forall\ i \in I$ için $\alpha_i = \beta_i$

(ii) $\alpha + \beta = (\alpha_i + \beta_i)_{i\in I}$

(iii) $r \in R$ olmak üzere $r\alpha = (r\alpha_i)_{i\in I}$ şeklinde tanımlıdır. Bu cebirsel işlemlere göre $\prod_{i\in I} M_i$ bir sol $R-$modül yapısına sahiptir. Bu modüle $\{M_i\}_{i\in I}$ modüller ailesinin **dış direkt çarpımı** denir. Bir α elemanının sadece sonlu tane bileşeni sıfırdan farklı ise α ya **sonlu desteklidir** denir. $\prod_{i\in I} M_i$ modülünde sıfır elemanı sonlu destekli kabul edilerek bütün sonlu destekli elemanların kümesi $\prod_{i\in I} M_i$ de bir alt modül yapısına sahiptir ve bu alt modül $\oplus_{i\in I} M_i$ ile gösterilir. Burada $\oplus_{i\in I} M_i$ alt modülüne $\{M_i\}_{i\in I}$ modüller ailesinin **dış direkt toplamı** denir. Buna göre I kümesi sonlu ise $\prod_{i\in I} M_i = \oplus_{i\in I} M_i$ dir (Alizade ve Pancar, 1999).

Tanım 3.4.2. M bir $R-$modül ve $\{M_i\}_{i\in I}$, M nin alt modüllerinin bir ailesi olsun. Eğer

(i) $M = \sum_{i\in I} M_i$ ve

(ii) her $i \in I$ için $M_i \cap \left(\sum_{j\neq i} M_j\right) = 0$ ise

M ye $\{M_i\}_{i\in I}$ alt modüllerinin bir **iç direkt toplamı** veya sadece **direkt toplamı** denir.

$M = \underset{i\in I}{\oplus} M_i$ ise her $m \in M$ için $m = m_{i_1} + m_{i_2} + \cdots + m_{i_k}$ yazılışı $i_1, i_2, ..., i_k \in I$ ve $m_{i_1} \in M_{i_1}, m_{i_2} \in M_{i_2}, ..., m_{i_k} \in M_{i_k}$ olacak şekilde tek türlüdür (Alizade ve Pancar, 1999).

Tanım 3.4.3. $M = \underset{i\in I}{\oplus} M_i$ yazılışındaki M_i alt modüllerinin her birine M nin **direkt toplam terimleri** denir. $M = M \oplus 0$ olduğundan M ve 0 alt modüllerine M nin **aşikar direkt toplam terimleri** denir. M nin aşikar direkt toplam terimlerinden başka direkt toplam terimi yoksa M modülüne **parçalanamaz modül**, M nin aşikar direkt toplam terimleri dışında direkt toplam terimi mevcut ise M modülüne **parçalanabilir modül** denir (Wisbauer, 1991).

Teorem 3.4.4. M her alt modülü direkt toplam terimi olan bir $R-$modül ve $M_1 \leq M$ olsun. Bu takdirde M_1 in her alt modülü M_1 de bir direkt toplam terimidir (Sharpe ve Vamos, 1972).

İspat: $A \leq M_1 \leq M$ olsun. $M = A \oplus B$ olacak şekilde $B \leq M$ vardır. Modüler kuraldan $M_1 = A + (B \cap M_1)$ olur. Diğer taraftan $A \cap (B \cap M_1) = A \cap B = 0$ olup A, M_1 in bir direkt toplam terimidir.

Tanım 3.4.5. M bir $R-$modül olsun. $M = U + V$ olacak şekildeki her $U, V \leq M$ için $U_1 \leq U$ ve $M = U_1 + V$ olacak şekilde M nin bir U_1 direkt toplam terimi varsa M ye **arıtılabilir modül** denir (Clark ve ark., 2006).

Tanım 3.4.6. R bir halka ve M bir $R-$modül olsun. Tanım 3.4.1 deki her bir $i \in I$ için $M_i = M$ alınırsa $\underset{i\in I}{\oplus} M$ dış direkt toplamına M nin **kopyalarının toplamı** denir ve $M^{(I)}$ ile gösterilir (Sharpe ve Vamos, 1972).

Tanım 3.4.7. M ve N iki $R-$modül ve I boş kümeden farklı bir indis kümesi olsun. $f : M^{(I)} \to N$ bir epimorfizma ise N ye bir $M-$**üretilmiş modül** denir. I indis kümesi sonlu elemanlı ise N ye **sonlu** $M-$**üretilmiş modül** denir (Wisbauer, 1991).

Tanım 3.4.8. $j \in I$ olmak üzere $m_j \in M_j$ keyfi elemanı için $I_j(m_i) = \begin{cases} m_i, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ ile tanımlı $I_j : M_j \to \prod_{i \in I} M_i$ dönüşümü bir monomorfizma ve $(m_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} M_i$ keyfi elemanı için $p_j\left((m_i)_{i \in I}\right) = m_j$ ile tanımlı $p_j : \prod_{i \in I} M_i \to M_j$ dönüşümü bir epimorfizma yapısına sahiptir. Bunlara sırasıyla **j-yinci gömme homomorfizması** ve **j-yinci izdüşüm homomorfizması** denir. (Hungerford, 1973).

Teorem 3.4.9. M sıfırdan farklı bir $R-$modül ve N, M nin karakteristik alt modülü olsun. Eğer $M = M_1 \oplus M_2$ ise $N = (N \cap M_1) \oplus (N \cap M_2)$ dir (Idelhadj ve Tribak, 2003).

İspat: $i = 1, 2$ için $p_i : M \to M_i$ izdüşüm homomorfizmasını ele alalım. $x \in N$ için $M = M_1 \oplus M_2$ olduğundan $x = p_1(x) + p_2(x)$ şeklindedir. Her $i = 1, 2$ için $p_i(N) \subseteq N$ olduğundan $p_i(x) \in N \cap M_i$ yazılır. Dolayısıyla $N \subseteq (N \cap M_1) \oplus (N \cap M_2)$ olup $N = (N \cap M_1) \oplus (N \cap M_2)$ elde edilir.

3.5. Basit ve Yarı Basit Modüller

Tanım 3.5.1. M sıfırdan farklı bir $R-$modül olsun. M nin sıfırdan ve kendisinden başka hiçbir alt modülü yoksa M modülüne **basit modül** denir (Wisbauer, 1991).

Teorem 3.5.2. M basit bir $R-$modül ise 0, M nin maksimal alt modülüdür ve M devirlidir (Alizade ve Pancar, 1999).

İspat: M basit modül olduğundan 0 alt modülünü M den başka kapsayan alt modül yoktur. Dolayısıyla tanım gereği 0, M nin maksimal alt modülüdür. $0 \neq m \in M$ olmak üzere $Rm \leq M$ dir. $0 \neq Rm$ ve M basit olduğundan $Rm = M$ olup M devirlidir.

Teorem 3.5.3. M bir $R-$modül ve $N \leq M$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir:

(i) N, M nin bir maksimal alt modülüdür.

(ii) M/N bölüm modülü basittir.

(iii) Her $m \in M - N$ için $N + Rm = M$ dir (Anderson ve Fuller, 1974).

İspat:

(i)$\Rightarrow$(ii) $U/N \leq M/N$ keyfi bir alt modülü için $N \leq U$ ve N, M nin maksimal alt modülü olduğundan $U = N$ veya $U = M$ olur. Buradan $U/N = \{N\}$ veya $U/N = M/N$ olup, M/N bölüm modülü basittir.

(ii)$\Rightarrow$(i) $N \subseteq U \subseteq M$ şartını sağlayan M nin U alt modülünü alalım. Buradan $\{N\} \subseteq U/N \subseteq M/N$ yazılır. M/N basit olduğundan $U/N = M/N$ veya $U/N = \{N\}$ olur. O halde $U = M$ veya $U = N$ olup N, M nin maksimal alt modülüdür.

(i)$\Rightarrow$(iii) Her $m \in M - N$ için $N \leq N + Rm$ ve N, M nin maksimal alt modülü olduğundan maksimal alt modül tanımı gereği $N + Rm = M$ olur.

(iii)$\Rightarrow$(i) $N < K \leq M$ olacak şekilde herhangi bir K alt modülünü ele alalım. Eğer $K = M$ olduğunu gösterirsek istenen elde edilir. $N \neq K$ olduğundan en az $m \in K - N$ vardır. Bu durumda $m \in M - N$ olup hipotez gereği $N + Rm = M$ olur. Aynı zamanda $m \in K$ olduğundan $Rm \subseteq K$ olup $M = N + Rm \subseteq K$ olur. Dolayısıyla $M = K$ elde edilir.

Yardımcı Teorem 3.5.4. M bir $R-$modül olsun. Eğer M nin her alt modülü bir direkt toplam terimi ise M nin sıfırdan farklı her alt modülü bir basit alt modül içerir (Kasch, 1982).

Yardımcı Teorem 3.5.5. $M = \sum_{i \in I} M_i$ basit alt modüllerin toplamı ve $U \leq M$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler vardır:

(i) $M = U \oplus \left(\bigoplus_{i \in J} M_i \right)$ olacak şekilde $J \subseteq I$ alt kümesi vardır.

(ii) $U \cong \bigoplus_{i \in K} M_i$ olacak şekilde $K \subseteq I$ alt kümesi vardır (Kasch, 1982).

Teorem 3.5.6. M bir $R-$modül olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir:

(i) M nin her alt modülü basit alt modüllerin toplamıdır.

(ii) M basit alt modüllerin toplamıdır.

(iii) M basit alt modüllerin direkt toplamıdır.

(iv) M nin her alt modülü bir direkt toplam terimidir (Kasch, 1982).

İspat:

(i)$\Rightarrow$(ii) Açıktır.

(ii) $\Rightarrow$ **(iii)** Yardımcı Teorem 3.5.5 (i) seçeneğinde $U=0$ alınırsa istenen elde edilir.

(iii) $\Rightarrow$ **(iv)** Hipotez gereği $M=\underset{i\in I}{\oplus} M_i$ olacak şekilde M_i basit alt modülleri vardır. Kabul edelim ki $U \leq M$ olsun. $M=\sum_{i\in I} M_i$ olduğundan Yardımcı Teorem 3.5.5 (i) seçeneğinden istenen elde edilir.

(iv) $\Rightarrow$ **(i)** Her $i\in I$ için M_i alt modülleri basit ve $M_i \leq U \leq M$ olmak üzere $U_1=\sum_{i\in I} M_i$ olsun. $U_1 \leq U$ olduğundan U_1, M nin direkt toplam terimi olup $M=U_1 \oplus N$ olacak şekilde $N \leq M$ vardır. Buradan $U=U_1 \oplus (N \cap U)$ elde edilir. Eğer $N \cap U = 0$ ise $U=U_1$ olup istenen elde edilir. Kabul edelim ki $N \cap U \neq 0$ olsun. Yardımcı Teorem 3.5.4 den $B \leq N \cap U$ olacak şekilde M nin B basit alt modülü vardır. $B \leq N \cap U \leq U$ olduğundan $B \leq U_1$ olur. Sonuç olarak $B \leq U_1 \cap (N \cap U) = 0$ olur ki bu bir çelişkidir. O halde kabulümüz yanlış olup $N \cap U = 0$ olur.

Tanım 3.5.7. M bir $R-$modül olsun. Teorem 3.5.6 nın denk koşullarından birini sağlayan M modülüne **yarı basit modül** denir. R halkası sol $R-$modül olarak yarı basit ise R halkasına **yarı basit halka** denir (Kasch, 1982).

Sonuç 3.5.8. Yarı basit bir modülün her alt modülü yarı basittir.

Teorem 3.5.9. Yarı basit modüllerin homomorf görüntüleri de yarı basittir (Sharpe ve Vamos, 1972).

İspat: M, M_1 birer $R-$modül ve M yarı basit olmak üzere $f: M \to M_1$ epimorfizmasını alalım. $Çek(f) \leq M$ ve M yarı basit olduğundan $M = Çek(f) \oplus K$ olacak şekilde $K \leq M$ vardır. Teorem 3.3.4 ve Teorem 3.3.6 kullanılırsa $K \cong M/Çek(f) \cong M_1$ elde edilir. Sonuç 3.5.8 gereği K yarı basit olup M_1 yarı basittir.

Teorem 3.5.10. Yarı basit modüllerin direkt toplamları da yarı basittir (Sharpe ve Vamos, 1972).

İspat: Her yarı basit modül basit alt modüllerin direkt toplamı olduğundan yarı basit modüllerin direkt toplamı da yarı basittir.

Tanım 3.5.11. Bir M modülünün tüm basit alt modüllerinin toplamına M **modülünün desteği** denir ve $Des(M)$ ile gösterilir (Wisbauer, 1991).

3.6. Projektif ve İnjektif Modüller

Tanım 3.6.1. $\{M_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ $R-$modüller topluluğundan ve bunların $f_n : M_n \to M_{n-1}$ homomorfizmalarından oluşan $.... \to M_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n-1} \to ....$ dizisinde her $n \in \mathbb{Z}$ için $Gör(f_{n+1}) \subseteq Çek(f_n)$ ise diziye **kompleks**, $Gör(f_{n+1}) = Çek(f_n)$ ise diziye **tam dizi** denir. Ayrıca K, L, M $R-$modüller olmak üzere $0 \to K \to L \to M \to 0$ şeklindeki tam diziye **kısa tam dizi** denir (Alizade ve Pancar, 1999).

Tanım 3.6.2. M, N ve K $R-$modüller olsun. Her $f : M \to N$ monomorfizması ve $g : M \to K$ homomorfizması için $h \circ f = g$ olacak şekilde bir $h : N \to K$ homomorfizması bulunabilirse, K modülüne **injektif modül** denir. Diğer bir ifadeyle, tam satırlı her

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & N \arrow[dl, dashed, "h"] \\ & K & \end{tikzcd}$$

diyagramı bir $h : N \to K$ homomorfizması ile değişmeli üçgene tamamlanabilirse, K modülüne **injektif modül** denir (Alizade ve Pancar, 1999).

Tanım 3.6.3. M bir $R-$modül olsun. Sağ sıfır bölen olmayan her r elemanı için $m = rm_1$ olacak şekilde $m_1 \in M$ elemanı varsa $m \in M$ elemanına **bölünebilirdir** denir. Eğer M nin her elemanı bölünebilir ise M ye **bölünebilir modül** denir. Bir başka deyişle R nin sağ sıfır bölen olmayan her r elemanı için $M = rM$ oluyorsa M ye bölünebilir modül denir. (Sharpe ve Vamos, 1972).

Önerme 3.6.4. Her injektif modül bölünebilirdir (Sharpe ve Vamos, 1972).

İspat: M bir injektif $R-$modül olsun. $0_R \neq r \in R$ sağ sıfır bölen olmayan eleman ve $m \in M$ keyfi olmak üzere $s \in R$ için $f\left(sr\right) = sm$ ile tanımlı $f : Rr \to M$

homomorfizmasını ele alalım. M injektif olduğundan $f: Rr \to M$ homomorfizması ve $i: Rr \to R$ monomorfizması yardımıyla kurulan

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r] & Rr \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & R \arrow[dl, dashed, "g"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmelidir. Buradan $s = 1_R$ için $m = f(r) = (g \circ i)(r) = g(r) = rg(1_R)$ olup M bölünebilirdir.

Teorem 3.6.5. Her injektif modül, kendisini içeren modül içinde bir direkt toplam terimidir (Sharpe ve Vamos, 1972).

İspat: M bir injektif $R-$modül ve $M \le M_1$ olsun. Bu takdirde i gömme homomorfizması ve I_M birim dönüşüm olmak üzere aşağıdaki diyagram değişmelidir.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "i"] \arrow[d, "I_M"'] & M_1 \arrow[dl, dashed, "g"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

$m_1 \in M_1$ keyfi olmak üzere $g(m_1) \in M$ olup $g \circ i = I_M$ olduğundan $g(m_1) = g(g(m_1))$ yazılır. Buradan $m_1 - g(m_1) \in Çek(g)$ olup $m_1 = g(m_1) + (m_1 - g(m_1)) \in M + Çek(g)$ olduğundan $M_1 \le M + Çek(g) \le M_1$ yani $M_1 = M + Çek(g)$ elde edilir. Diğer taraftan $m_1 \in M \cap Çek(g)$ keyfi elemanı için $g \circ i = I_M$ olduğundan $m_1 = g(m_1) = 0$ bulunur. Dolayısıyla $M_1 = M \oplus Çek(g)$ olur.

Tanım 3.6.6. M, N ve P $R-$modüller olsun. Her $f: M \to N$ epimorfizması ve $g: P \to N$ homomorfizması için $f \circ h = g$ olacak şekilde bir $h: P \to M$ homomorfizması bulunabilirse P modülüne **projektif modül** denir. Diğer bir ifadeyle, tam satırlı her

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] & N \arrow[r] & 0 \\
& P \arrow[u, "g"'] \arrow[ul, dashed, "h"] &
\end{tikzcd}$$

diyagramı bir $h : P \to M$ homomorfizması ile değişmeli üçgene tamamlanabilirse, P modülüne **projektif modül** denir (Alizade ve Pancar, 1999).

Teorem 3.6.7. $\{P_j\}_{j\in J}$ $R-$modüllerin bir ailesi olsun. $P = \bigoplus_{j\in J} P_j$ modülünün projektif olması için gerek ve yeter koşul her $j \in J$ için P_j modüllerinin projektif olmasıdır (Alizade ve Pancar, 1999).

İspat: $(\Rightarrow)$ P projektif olmak üzere $f : A \to B$ epimorfizmasını ve $g : P_j \to B$ homomorfizmasını alalım. $p_j : P \to P_j$, j-yinci izdüşüm homomorfizması ve $i_j : P_j \to P$, j-yinci gömme homomorfizması olsun. P projektif olduğundan $g \circ p_j : P \to B$ homomorfizması için $g \circ p_j = f \circ h$ olacak şekilde bir $h : P \to A$ homomorfizması vardır. $e : P_j \to A$ homomorfizmasını $e = h \circ i_j$ alalım.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r] & 0 \\
& P_j \arrow[u, "g"'] \arrow[ul, dashed, "e"] & \\
& P \arrow[u, "p_j"'] \arrow[uul, dashed, "h"] &
\end{tikzcd}$$

Bu durumda $f \circ e = f \circ h \circ i_j = g \circ p_j \circ i_j = g \circ I_{P_j} = g$ olup her $j \in J$ için P_j modülleri projektiftir.

$(\Leftarrow)$ Her $j \in J$ için P_j $R-$modülleri projektif olmak üzere $f : A \to B$ epimorfizmasını ve $g : P \to B$ homomorfizması alalım. Her $j \in J$ için P_j modülleri projektif olduğundan $g \circ i_j : P_j \to B$ homomorfizması için $g \circ i_j = f \circ h_j$ olacak şekilde bir $h_j : P_j \to A$ homomorfizması bulunur.

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r] & 0 \\
 & P \arrow[u, "g"'] \arrow[ul, dashed, "h"] & \\
 & P_j \arrow[u, "i_j"'] \arrow[uul, dashed, "h_j"] &
\end{tikzcd}
$$

Diğer taraftan $h\left(m_j\right)=\sum_{j\in J} h_j\left(m_j\right)$ ile tanımlı $h:P\to A$ dönüşümü $h_j=h\circ i_j$ koşulunu gerçekleyen ve tek türlü olarak belirli bir homomorfizmadır. Buradan her $j\in J$ için $g\circ i_j=f\circ h_j=f\circ h\circ i_j$ olup i_j bir monomorfizma olduğundan $g=f\circ h$ olur. Sonuç olarak $P=\underset{j\in J}{\oplus} P_j$ modülü projektiftir.

Tanım 3.6.8. Her basit sol $R-$modülü injektif olan R halkasına **sol V-halka** denir. Ayrıca her yarı basit sol $R-$modülü injektif olan R halkasına **SSI-halka** denir (Idelhadj ve Tribak, 2003).

Teorem 3.6.9. R halkasının yarı basit olması için gerek ve yeter koşul her $R-$ modülün injektif olmasıdır (Wisbauer, 1991).

3.7. Noetherian ve Artinian Modüller

Tanım 3.7.1. $S=\{M_i\}_{i\in I}$ bir $R-$modülün alt modüllerinin boş kümeden farklı bir kümesi olsun. Eğer S artan zincir şartını sağlıyorsa, yani $i_1,i_2,\ldots\in I$ olmak üzere her $M_{i_1}\subseteq M_{i_2}\subseteq\ldots\subseteq M_{i_m}\subseteq M_{i_{m+1}}\subseteq\ldots$ zinciri için $M_{i_k}=M_{i_{k+1}}=\ldots$ olacak şekilde en az bir $k\in\mathbb{N}$ varsa S kümesine **noetherian** denir. Eğer S azalan zincir şartını sağlıyorsa, yani $i_1,i_2,\ldots\in I$ olmak üzere her $M_{i_1}\supseteq M_{i_2}\supseteq\ldots\supseteq M_{i_m}\supseteq M_{i_{m+1}}\supseteq\ldots$ zinciri için $M_{i_k}=M_{i_{k+1}}=\ldots$ olacak şekilde en az bir $k\in\mathbb{N}$ varsa S kümesine **artinian** denir (Wisbauer, 1991).

Tanım 3.7.2. M bir $R-$modül olsun. Eğer M nin bütün alt modüllerinin kümesi noetherian ise M modülüne **noetherian modül** denir. Ayrıca R halkası sol $R-$

modül olarak noetherian ise R halkasına **sol noetherian halka** denir (Wisbauer, 1991).

Tanım 3.7.3. M bir $R-$modül olsun. Eğer M nin bütün alt modüllerinin kümesi artinian ise M modülüne **artinian modül** denir. R halkası sol $R-$modül olarak artinian ise R halkasına **sol artinian halka** denir (Wisbauer, 1991).

Teorem 3.7.4. R halkasının noetherian (artinian) olması için gerek ve yeter koşul her sonlu üretilmiş $R-$modülün noetherian (artinian) olmasıdır (Sharpe ve Vamos, 1972).

Teorem 3.7.5. M bir $R-$modül olsun. M modülünün noetherian olması için gerek ve yeter koşul M nin her alt modülünün sonlu üretilmiş olmasıdır (Sharpe ve Vamos, 1972).

İspat: $(\Rightarrow)$ $K \leq M$ olsun. Ω ile K nın tüm sonlu üretilmiş alt modüllerinin ailesini gösterelim. Sıfır alt modülü Ω nın elemanı olduğundan $\Omega \neq \varnothing$ olur. M noetherian olduğundan Ω bir K_0 maksimal elemanına sahiptir. K_0 sonlu üretilmiş olduğundan $K_0 = Rk_1 + Rk_2 + \cdots + Rk_n$ olacak şekilde $k_1, k_2, \ldots, k_n \in K$ elemanları vardır. $K_0 \neq K$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $k \notin K_0$ olacak şekilde $k \in K$ vardır. O halde $K_0 + Rk = Rk_1 + Rk_2 + \cdots + Rk_n + Rk$, Ω nın K_0 alt modülünü kapsayan bir elemanı olur. Bu ise K_0 ın maksimal eleman olmasıyla çelişir. Dolayısıyla $K_0 = K$ olup K sonlu üretilmiştir.

$(\Leftarrow)$ M nin her alt modülü sonlu üretilmiş olsun. M nin alt modüllerinin keyfi bir $K_1 \subseteq K_2 \subseteq \ldots \subseteq K_m \subseteq K_{m+1} \subseteq \ldots$ artan zincirini ele alalım. $K = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$ diyelim. $K \leq M$ olup kabulümüz gereği K sonlu üretilmiştir. Bu durumda $K = Rk_1 + Rk_2 + \cdots + Rk_r$ olacak şekilde $k_1, k_2, \ldots, k_r \in M$ elemanları vardır. Diğer taraftan $K = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$ olduğundan her bir k_j, K nın K_i alt modüllerinden en az birine aittir. $K_1 \subseteq K_2 \subseteq \ldots \subseteq K_m \subseteq K_{m+1} \subseteq \ldots$ olduğundan en az bir $t \in \mathbb{Z}^+$ için $k_1, k_2, \ldots, k_r$ elemanları K_t ye aittir. Buradan $K = K_t$ bulunur. O halde her $n \geq t$ için $K_n = K_t$ olup M modülü noetheriandır.

Tanım 3.7.6. M bir $R-$modül olsun. M nin bütün sonlu üretilmiş alt modüllerinin kümesi noetherian ise M ye **lokal noetherian modül** denir (Wisbauer, 1991).

Yardımcı Teorem 3.7.7. R halkasının sol noetherian V-halka olması için gerek ve yeter koşul SSI-halka olmasıdır (Byrd, 1972).

Sonuç 3.7.8. Her değişmeli SSI-halka yarı basit artinian halkadır (Byrd, 1972).

3.8. Büyük ve Küçük Alt Modüller

Tanım 3.8.1. M bir $R-$modül ve $N \leq M$ olsun. N alt modülünün M nin sıfırdan farklı her alt modülü ile kesişimi sıfırdan farklı ise (diğer bir ifadeyle her $U \leq M$ için $N \cap U = 0$ olması $U = 0$ olması ile mümkünse) N alt modülüne M modülünün **büyük** (veya **önemli**) **alt modülü** denir ve $N \trianglelefteq M$ ile gösterilir (Alizade ve Pancar, 1999).

Teorem 3.8.2.

(i) $A \leq B \leq M \leq N$ ve A, N nin büyük alt modülü ise, B de M nin büyük alt modülüdür.

(ii) Sonlu sayıda büyük alt modülün kesişimi de büyüktür

(iii) Büyük alt modülün homomorfizma altındaki ters görüntüsü de büyüktür.

(iv) A, B de ve B, C de büyük alt modül ise, A, C de büyük alt modüldür (Alizade ve Pancar, 1999).

İspat:

(i) $U \leq M$ için $B \cap U = 0$ ise $U \leq N$ ve $A \leq B$ olduğundan $A \cap U \leq B \cap U = 0$ olur. $A \cap U = 0$ ve $A \trianglelefteq N$ olduğundan $U = 0$ olup $B \trianglelefteq M$ elde edilir.

(ii) $k = 1, 2, \ldots, n$ için A_k**,** M nin büyük alt modülü olsun. Tümevarımla her $k = 1, 2, \ldots, n$ için $\bigcap_{i=1}^{k} A_i$ nin M nin büyük alt modülü olduğunu gösterelim. $k = 1$ için iddianın doğru olduğu açıktır. İddianın k için doğru olduğunu kabul edip $k+1$ için doğru olduğunu gösterelim. Keyfi $U \leq M$ için $\left(\bigcap_{i=1}^{k+1} A_i\right) \cap U = 0$ olsun. O halde $\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right) \cap \left(A_{k+1} \cap U\right) = 0$ yazılır. Kabulden $A_{k+1} \cap U = 0$ olur. Hipotez gereğince $A_{k+1} \trianglelefteq M$ olduğundan $U = 0$ olup $\bigcap_{i=1}^{k+1} A_i \trianglelefteq M$ elde edilir.

(iii) $f:M\to N$ homomorfizma ve $B\trianglelefteq N$ olsun. $f^{-1}(B)\cap U=0$ olacak şekilde keyfi bir $U\le M$ alalım. Bu durumda keyfi $x\in B\cap f(U)$ için $x=f(u)$ olacak şekilde $u\in U$ vardır. Buradan $u\in f^{-1}(B)\cap U$ olup $u=0$ bulunur. Dolayısıyla $x=0$ olup $B\cap f(U)=0$ olur. $B\trianglelefteq N$ olduğundan $f(U)=0$ olup $U\le Çek(f)=f^{-1}(0)\le f^{-1}(B)$ elde edilir. Yani $U=f^{-1}(B)\cap U=0$ olup $f^{-1}(B)$, M modülünün büyük alt modülüdür.

(iv) $U\le C$ olmak üzere $A\cap U=0$ olsun. O halde $A\cap(U\cap B)\le A\cap U=0$ ve $A\trianglelefteq B$ olduğundan $U\cap B=0$ elde edilir. $B\trianglelefteq C$ olduğundan $U=0$ olup $A\trianglelefteq C$ elde edilir.

Teorem 3.8.3. M bir $R-$modül ve $N\le M$ olsun. N alt modülünün büyük alt modül olması için gerek ve yeter koşul her $0\ne m\in M$ için $0\ne rm\in N$ olacak şekilde bir $r\in R$ elemanının bulunmasıdır (Alizade ve Pancar, 1999).

İspat: $(\Rightarrow)$ $N\trianglelefteq M$ olsun. $0\ne m\in M$ keyfi elemanı için $Rm\ne 0$ olduğundan $N\cap Rm\ne 0$ olur. O halde $0\ne rm\in N$ olacak şekilde bir $r\in R$ elemanı vardır.

$(\Leftarrow)$ $0\ne U\le M$ olsun. Bu durumda en az bir $0\ne m\in U$ vardır. Hipotez gereğince $0\ne rm\in N$ olacak şekilde bir $r\in R$ elemanı vardır. $m\in U$ iken $rm\in U$ olduğundan $0\ne rm\in N\cap U$ yazılır. Sonuç olarak $N\cap U\ne 0$ olduğundan $N\trianglelefteq M$ olur.

Tanım 3.8.4. M bir $R-$modül ve $N\le M$ olsun. N nin sadece M ile toplamı M ye eşitse, yani bir $K\le M$ için $N+K=M$ olması $K=M$ olmasını gerektiriyorsa, N ye M nin **küçük alt modülü** denir ve $N\ll M$ ile gösterilir. Her modülün sıfırı küçük alt modüldür (Wisbauer, 1991).

Küçük alt modüller ile kullanacağımız belli özellikleri aşağıdaki teorem altında toplayabiliriz.

Teorem 3.8.5.

(i) M bir $R-$modül, K ve N,M nin $K\le N$ şartını sağlayan alt modülleri olsun. Bu takdirde $N\ll M$ ise $K\ll M$ dir.

(ii) M bir $R-$modül, K ve N,M nin $K\le N$ şartını sağlayan alt modülleri olsun. $K\ll N$ ise, K,M nin N yi kapsayan her alt modülünde de küçüktür.

(iii) M bir $R-$modül, $K_1, K_2, \ldots, K_n$, $M_1, M_2, \ldots, M_n$ M nin alt modüleri ve her $i = 1, 2, \ldots, n$ için $K_i \ll M_i$ olsun. Bu takdirde

$$K_1 + K_2 + \cdots + K_n \ll M_1 + M_2 + \cdots + M_n$$

dir.

(iv) M ve N birer $R-$modül ve $f : M \to N$ bir homomorfizma olsun. Bu takdirde $K \ll M$ ise $f(K) \ll N$ dir.

(v) M bir $R-$modül, K ve N, M nin $K \leq N$ şartını sağlayan alt modülleri, ve N, M nin bir direkt toplam terimi olsun. Bu takdirde $K \ll N$ olması için gerek ve yeter koşul $K \ll M$ olmasıdır.

(vi) M bir $R-$modül, $K \leq M$ olsun. Eğer K, M nin direkt toplam terimi ve $K \ll M$ ise $K = 0$ dır (Wisbauer, 1991).

İspat:

(i) $K + L = M$ olacak şekilde herhangi bir L alt modülünü alalım. Bu takdirde $K \leq N$ olduğundan $N + L = M$ ve $N \ll M$ olduğundan $L = M$ bulunur. Dolayısıyla $K \ll M$ elde edilir.

(ii) L, M nin N yi kapsayan bir alt modülü ve $K \ll N$ olsun. $K + U = L$ olacak şekilde bir $U \leq L$ alt modülünü alalım. Buradan $(K+U) \cap N = N$ ve modüler kuralından $K + (U \cap N) = N$ bulunur. $K \ll N$ olduğundan $U \cap N = N$ ve buradan $N \leq U$ elde edilir. $K \leq N \leq U$ ve $K + U = L$ olduğundan $U = L$ elde edilir. Dolayısıyla $K \ll L$ olur.

(iii) $n = 2$ için ispatı yapalım. $K_1 + K_2 + L = M_1 + M_2$ olacak şekildeki herhangi bir L alt modülünü alalım. $K_1 \ll M_1$ olduğundan ve (ii) den $K_2 + L = M_1 + M_2$ olur. Benzer şekilde $K_2 \ll M_2$ olduğundan ve (ii) den $L = M_1 + M_2$ elde edilir. Böylece $K_1 + K_2 \ll M_1 + M_2$ bulunur. Benzer şekilde sonlu sayıdaki toplam için de ispat yapılabilir.

(iv) $f(K) + L = f(M)$ olacak şekildeki herhangi bir $L \leq f(M)$ alt modülünü alalım. Bu takdirde $f^{-1}(f(K) + L) = M$ ve buradan $K + f^{-1}(L) = M$ elde edilir. $K \ll M$ olduğundan $f^{-1}(L) = M$ ve böylece $L = f(M)$ olduğu görülür. O halde $f(K) \ll f(M)$ olup (ii) den $f(K) \ll N$ olur.

(v) $(\Rightarrow)$ $K \ll N$ ise (ii) den $K \ll M$ olur.

$(\Leftarrow)$ $K \ll M$ olsun. $K+L=N$ olacak şekilde herhangi bir $L \leq N$ alt modülünü ele alalım. N, M nin direkt toplam terimi olduğundan $M = N \oplus U$ olacak şekilde $U \leq M$ vardır. O halde $K+L+U=M$ ve $K \ll M$ olduğundan $L+U=M$ olur. Modüler kuralından $N = L+(N \cap U) = L$ olur. Sonuç olarak $K \ll N$ dir.

(vi) K bir direkt toplam terimi olduğundan $M = K \oplus N$ olacak şekilde bir N alt modülü vardır. $K \ll M$ olduğundan $N = M$ olur. Ayrıca $K \cap N = 0$ olduğundan $K = K \cap M = K \cap N = 0$ bulunur.

Teorem 3.8.6. $\mathbb{P}$ bütün asal tam sayılar kümesi olmak üzere paydaları kare çarpansız olan bütün rasyonel sayıları içeren $M = \sum_{q \in \mathbb{P}} \mathbb{Z}\frac{1}{q}$ $\mathbb{Z}-$modülü verilsin. Bu takdirde M $\mathbb{Z}-$modülü, $\mathbb{Q}$ $\mathbb{Z}-$modülünün küçük alt modülüdür (Alizade ve Büyükaşık, 2003).

3.9. Bir Modülün Radikali

Tanım 3.9.1. Bir M $R-$modülünün bütün maksimal alt modüllerinin kesişimine M modülünün **radikali** denir ve $Rad(M)$ ile gösterilir. M nin maksimal alt modülü yoksa $Rad(M) = M$ olarak tanımlanır (Wisbauer, 1991).

Teorem 3.9.2. M bir $R-$modül olsun. Bu takdirde $Rad(M) = \sum \{L \mid L \ll M\}$ dir (Wisbauer, 1991).

İspat: Herhangi bir $L \ll M$ alt modülünü ele alalım. Eğer M nin herhangi bir K maksimal alt modülü L yi içermezse Teorem 3.5.3 den $K+L=M$ olup $K=M$ çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla L, M nin bütün maksimal alt modülleri tarafından içerilir. Buradan $L \leq Rad(M)$ ve böylece $\sum\{L \mid L \ll M\} \subseteq Rad(M)$ olur. Şimdi ters kapsamayı gösterelim. Her $m \in Rad(M)$ keyfi elemanı için $Rm \ll M$ olduğu gösterilirse istenen elde edilir. Rm nin M de küçük olmadığını kabul edelim. Bu durumda $Rm + L = M$ olacak şekilde en az bir $L \neq M$ alt modülü vardır. Bu durumda $\mathbf{S} = \{L \leq M \mid L \neq M,\ Rm + L = M\}$ kümesi boş kümeden farklıdır. Ψ, $\mathbf{S}$ kümesinin bir zinciri ve $A = \bigcup_{T \in \Psi} T$ olsun. $A \leq M$ olup $A \neq M$ dir. Çünkü $A = M$

olsa $m \in A$ için $m \in T$ olacak şekilde en az $T \in \Psi \subseteq \mathbf{S}$ mevcuttur. Buradan $T = Rm + T = M$ olur ki bu $T \in \mathbf{S}$ olmasıyla çelişir. $Rm + A = M$ olduğu açıktır. Böylece $A \in$ **S** dir. A, Ψ kümesinin bir üst sınırıdır. Zorn Lemması gereği **S**, P gibi bir maksimal eleman içerir. Bu maksimal eleman M modülünün bir maksimal alt modülüdür. O halde $m \in Rad(M) \leq P$ olmalıdır. Ancak bu $P \in \mathbf{S}$ olmasıyla çelişir. Sonuç olarak $Rm \ll M$ olmalıdır.

Teorem 3.9.3. M yarı basit $R-$modül ise $Rad\left(M\right) = 0$ dir (Kasch, 1982).

İspat: M yarı basit olduğundan her alt modülü bir direkt toplam terimi olup M nin küçük alt modülü yalnızca 0 olur. O halde $Rad\left(M\right) = 0$ olduğu görülür.

Tanım 3.9.4. M $R-$modülünün her öz alt modülü bir maksimal alt modülde kapsanıyorsa M modülüne **eş-atomik modül** denir (Kasch, 1982).

Teorem 3.9.5. M eş-atomik bir $R-$modül olsun. Bu takdirde $Rad(M) \ll M$ dir (Wisbauer, 1991).

İspat: $Rad(M) + L = M$ olacak şekildeki herhangi bir L alt modülü için eğer $L \neq M$ ise hipotez gereği L bir K maksimal alt modülü tarafından kapsanır. Buradan da $L \leq K$ ve $Rad(M) \leq K$ olduğundan $M = Rad(M) + L \leq K$ çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla $L = M$ olup $Rad(M) \ll M$ olur.

Sonuç 3.9.6. M sonlu üretilmiş bir $R-$modül ise $Rad(M) \ll M$ dir.

Teorem 3.9.7. (Villamayor) R halkasının sol V-halka olması için gerek ve yeter koşul $Rad\left(M\right) = 0$ olmasıdır (Byrd, 1972).

Teorem 3.9.8. M bir $R-$modül ve $K \leq L \leq M$ olsun. Bu takdirde $Rad(K) \leq Rad(L)$ dir (Kasch, 1982).

İspat: $m \in Rad(K)$ olsun. Bu durumda $Rm \ll K$ olur. $K \leq L$ olduğundan Teorem 3.8.5(ii) den $Rm \ll L$ olup $m \in Rad(L)$ olur.

Teorem 3.9.9. M ve N iki $R-$modül ve $f : M \to N$ bir $R-$modül homomorfizması olsun. Bu takdirde $f(Rad(M)) \leq Rad(N)$ olur. Eğer f epimorfizma ve $Çek\left(f\right) \leq Rad\left(M\right)$ ise $f\left(Rad\left(M\right)\right) = Rad\left(N\right)$ dir. Özel olarak $Rad\left(M / Rad\left(M\right)\right) = 0$ dır (Anderson ve Fuller, 1974).

Teorem 3.9.10. M bir $R-$modül, $N \leq M$ olmak üzere $\left(N + Rad(M)\right)/N \leq Rad(M/N)$ ve $N \leq Rad(M)$ olsun. Bu takdirde $Rad(M/N) = Rad(M)/N$ olur.

İspat: $\pi : M \to M/N$ doğal homomorfizmasını alalım. Teorem 3.9.9 gereği $\pi\left(Rad(M)\right) = \left(Rad(M) + N\right)/N \leq Rad(M/N)$ olur. $Çek(\pi) = N \leq Rad(M)$ olduğundan tekrar Teorem 3.9.9 kullanılırsa

$$Rad(M/N) = \pi\left(Rad(M)\right) = \left(Rad(M) + N\right)/N = Rad(M)/N$$

elde edilir.

Teorem 3.9.11. M bir $R-$modül olmak üzere U, M nin radikali tarafından kapsanan sonlu üretilmiş bir alt modülü olsun. Bu takdirde $U \ll M$ olur (Anderson ve Fuller, 1974).

Teorem 3.9.12. Her $i \in I$ için M_i ler M nin alt modülleri olmak üzere $M = \underset{i \in I}{\oplus} M_i$ olsun. Bu takdirde $Rad(M) = \underset{i \in I}{\oplus} Rad(M_i)$ ve $M/Rad(M) \cong \underset{i \in I}{\oplus}\left(M_i/Rad(M_i)\right)$ dir (Wisbauer, 1991).

Teorem 3.9.13. R halkasının sol Bass halka olması için gerek ve yeter koşul sıfırdan farklı her M $R-$modülü için $Rad(M) \ll M$ olmasıdır (Clark ve ark., 2006).

İspat: $(\Rightarrow)$ R sol Bass halka ve M sıfırdan farklı bir $R-$modül olsun. $M = Rad(M) + U$ olacak şekilde $U \leq M$ alt modülünü ele alalım. M/U bölüm modülü maksimal alt modüle sahip değildir. Çünkü K/U, M/U bölüm modülünün maksimal alt modülü olsa Teorem 3.2.9 dan K, M nin maksimal alt modülü olup $Rad(M) \leq K$ ve $U \leq K$ olduğundan $M = Rad(M) + U \leq K$ çelişkisi elde edilir. O halde $Rad(M/U) = M/U$ olup R sol Bass halka olduğundan $M/U = 0$ yani $U = M$ elde edilir. Sonuç olarak $Rad(M) \ll M$ olur.

$(\Leftarrow)$ Açıktır.

Tanım 3.9.14. M ve N $R-$modüller olmak üzere, $f : M \to N$ bir epimorfizma ve $Çek(f) \ll M$ ise f epimorfizmasına **küçük epimorfizma** denir. Bu durumda M

modülüne $f : M \to N$ küçük epimorfizması ile birlikte N modülünün **küçük örtüsü** denir. Eğer M projektif ise M modülüne $f : M \to N$ küçük epimorfizması ile birlikte N modülünün **projektif örtüsü** denir (Clark ve ark., 2006).

Tanım 3.9.15. M ve N $R-$modüller olmak üzere, $f : M \to N$ bir epimorfizma ve $Çek(f) \leq Rad(M)$ ise M modülüne $f : M \to N$ epimorfizması ile birlikte N modülünün bir **genelleştirilmiş örtüsü** denir (Azumaya, 1992).

Tanım 3.9.16. M bir $R-$modül olsun. M modülünün her bölüm modülü bir projektif örtüye sahip ise M modülüne **yarı mükemmel modül** denir (Wisbauer, 1991).

Tanım 3.9.17. R bir halka olsun. $_RR$ sol $R-$modülü yarı mükemmel ise R halkasına **yarı mükemmel halka** denir (Wisbauer, 1991).

3.10. Dedekind Bölgeleri

Tanım 3.10.1. R değişmeli bir halka, M bir $R-$modül ve $\varnothing \neq J \subseteq M$ olsun. Bu takdirde $\{r \in R \mid \forall x \in J \text{ için } rx = 0\}$ kümesi R halkasının bir idealidir. Bu ideale J nin **sıfırlayanı (annihilatörü)** denir ve $Ann(J)$ ile gösterilir. Özel olarak $J = M$ alınırsa,

$$Ann(M) = \{r \in R \mid \forall m \in M \text{ için } rm = 0\}$$

idealine M modülünün **sıfırlayanı (annihilatörü)** denir. Ayrıca bir $m \in M$ için $J = \{m\}$ alınırsa

$$Ann(m) = \{r \in R \mid rm = 0\}$$

idealine ise m elemanının **sıfırlayanı** denir. M sol $R-$modülü $m \in M$ için $M = Rm$ şeklinde ise $Ann(M) = Ann(m)$ olduğu açıktır (Sharp, 2000).

Tanım 3.10.2. R değişmeli bir bölge olsun. R esas ideal bölgesi ve sıfırdan farklı bir tek asal (maksimal) ideale sahip ise R halkasına **ayrık değerlendirme bölgesi** denir (Hungerford, 1973).

Tanım 3.10.3. R değişmeli bir bölge ve M bir $R-$modül olsun. $m \in M$ olmak üzere, sıfırdan farklı bir $r \in R$ için $rm = 0$ ise, m elemanına M modülünün **torsion**

(burulmalı) elemanı denir. Eğer böyle bir r elemanı mevcut değil ise bu m elemanına M modülünün **burulmasız elemanı** denir. M nin torsion (burulmalı) elemanlarının kümesini $T(M)$ ile gösterirsek $T(M)$, M nin alt modülüdür. Burada $T(M)$, M nin torsion (burulma) kısmıdır. $T(M)=M$ ise M modülüne **torsion** (**burulmalı**) **modül** ve $T(M)=0$ ise M modülüne **serbest torsion** (**burulmasız**) **modül** denir (Sharpe ve Vamos, 1972).

Tanım 3.10.4. R değişmeli bir bölge olsun. R halkasının her öz ideali sonlu sayıda asal ideallerin çarpımı şeklinde tek türlü olarak yazılabiliyorsa R halkasına **Dedekind bölgesi** denir (Hungerford, 1973).

Teorem 3.10.5. R bir Dedekind bölgesi ve M bir $R-$modül olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir:

(i) M injektiftir.

(ii) M bölünebilirdir.

(iii) R halkasının her P maksimal ideali için $M = PM$ olur.

(iv) M maksimal alt modül içermez (Alizade ve ark., 2001).

Teorem 3.10.6. R bir Dedekind bölgesi, $K(R)$, R halkasının kesir cismi ve $\{P_i\}_{i\in I}$ R nin sonsuz çoklukta farklı maksimal ideallerinin bir ailesi olmak üzere $M=\prod_{i\in I}(R/P_i)$ her biri basit olan R/P_i $R-$modüllerinin bir direkt çarpımı ve $T(M)$, M nin burulma alt modülü olsun. Bu takdirde, $M/T(M)$ bölüm modülü bölünebilir olup bir J indis kümesi için $M/T(M)\cong K(R)^{(J)}$ dir. Ayrıca $Rad(M)=0$ dır (Alizade ve Büyükaşık, 2008).

İspat: P, R halkasının keyfi bir maksimal ideali olsun. Eğer P, $\{P_i\}_{i\in I}$ maksimal ideallerinin ailesine ait değil ise $PM=P\left(\prod_{i\in I}(R/P_i)\right)=\prod_{i\in I}P(R/P_i)$ olup $M=PM+T(M)$ elde edilir. Buradan $P(M/T(M))=(PM+T(M))/T(M)=$ $M/T(M)$ olduğundan $M/T(M)$ bölünebilirdir. Eğer $P\in\{P_i\}_{i\in I}$ ise benzer şekilde $P(M/T(M))=(PM+T(M))/T(M)=M/T(M)$ olduğu gösterilebilir. Dolayısıyla Teorem 3.10.5 den $M/T(M)$ bölünebilirdir. $M/T(M)$ burulmasız ve bölünebilir olduğundan, M modülü $K(R)$ kesir cisminin kopyalarının bir direkt toplamına izomorftur. O halde boş kümeden farklı bir J indis kümesi için $M/T(M) \cong K(R)^{(J)}$ bulunur. Ayrıca M basit $R-$modüllerinin alt direkt çarpımı olduğundan $Rad(M)=0$ olduğu açıktır.

Tanım 3.10.7. R bir Dedekind bölgesi ve M bir $R-$modül olsun. Ω, R halkasının maksimal ideallerinin kümesi ve $P \in \Omega$ olmak üzere

$$T_P(M) = \{ m \in M \mid P^n m = 0,\ n \geq 1 \}$$

kümesi M nin bir alt modülüdür. $T_P(M)$ alt modülüne M modülünün $P-$**asıl bileşeni** denir (Cohn, 1989).

Teorem 3.10.8. R bir Dedekind bölgesi ve M bir torsion $R-$modül olsun. O zaman M, $P-$asıl bileşenlerinin direkt toplamı olarak tek türlü yazılır. Yani $M = \bigoplus_{P \in \Omega} T_P(M)$ dir (Cohn, 1989).

Teorem 3.10.9. R bir Dedekind bölgesi olsun. R deki sıfırdan farklı her asal ideal maksimal idealdir (Wisbauer, 1991).

Teorem 3.10.10. R bir Dedekind bölgesi ve M torsion $R-$modül olsun. Bu takdirde $M/Rad(M)$ yarı basittir (Alizade ve Büyükaşık, 2008).

Teorem 3.10.11. R bir Dedekind bölgesi olsun. Bu takdirde R noetheriandır (Wisbauer, 1991).

3.11. Lokal Modüller

Tanım 3.11.1. M bir $R-$modül olsun. Eğer M, kendisinden farklı bütün alt modüllerini içeren bir öz alt modüle sahipse M modülüne **lokal modül** denir. R halkası sol $R-$modül olarak lokal ise R halkasına **lokal halka** denir (Wisbauer, 1991).

Tanım 3.11.2. R değişmeli bir bölge olmak üzere, R nin sıfırdan farklı her ideali R nin sadece sonlu sayıda maksimal ideali tarafından içeriliyor ve R nin sıfırdan farklı her P asal ideali için R/P lokal halka ise R değişmeli bölgesine **h-lokal bölge** denir (Matlis, 1966).

Tanım 3.11.3. M bir $R-$modül olsun. Eğer $M/Rad(M)$ yarı basit ise M modülüne **yarı lokal modül** denir. R halkası sol $R-$modül olarak yarı lokal ise R halkasına **yarı lokal halka** denir (Facchini, 1998).

Tanım 3.11.4. R değişmeli bir bölge olmak üzere R nin sıfırdan farklı her I ideali R nin sadece sonlu sayıda maksimal ideali tarafından kapsanıyorsa yani R/I yarı lokal halka ise R değişmeli bölgesine **h-yarı lokal bölge** denir (Matlis, 1966).

Dedekind bölgeleri ve h-lokal bölgeler birer h-yarı lokal bölgelerdir.

Teorem 3.11.5. Bir R halkasının yarı lokal olması için gerek ve yeter koşul her sol $R-$modülün yarı lokal olmasıdır (Lomp, 1999, Clark ve ark., 2006).

İspat: R yarı lokal halka ve M bir sol $R-$modül olsun. M, $R-$üretilmiş olduğundan I boş kümeden farklı bir indis kümesi olmak üzere $f: R^{(I)} \to M$ epimorfizması mevcuttur. Teorem 3.9.9 ve Teorem 3.9.12 kullanılırsa $Rad\left(R^{(I)}\right) = \left(Rad\left(R\right)\right)^{(I)}$ olup, $f\left(\left(Rad\left(R\right)\right)^{(I)}\right) \leq Rad\left(M\right)$ olduğu görülür. Bu takdirde herhangi bir $\left(r_i + Rad\left(R\right)\right)_{i\in I} \in \left(R/Rad\left(R\right)\right)^{(I)}$ için $\tilde{f}\left(\left(r_i + Rad\left(R\right)\right)_{i\in I}\right) = f\left(\left(r_i\right)_{i\in I}\right) + Rad\left(M\right)$ ile tanımlı $\tilde{f}: \left(R/Rad\left(R\right)\right)^{(I)} \to M/Rad\left(M\right)$ dönüşümü epimorfizmadır. R yarı lokal olduğundan $R/Rad\left(R\right)$ yarı basit olup Teorem 3.5.10 dan $\left(R/Rad\left(R\right)\right)^{(I)}$ yarı basittir. Teorem 3.5.9 gereği $M/Rad\left(M\right)$ yarı basit olup M yarı lokaldir. Tersi için M yerine R sol $R-$modülü alınırsa ispat açıktır.

Tanım 3.11.6. Tek maksimal alt modüle sahip olan modüle **zayıf lokal modül** denir (Büyükaşık ve Lomp, 2008).

4. MATERYAL VE YÖNTEM

4.1. Tümlenmiş Modüller

Tanım 4.1.1. M bir $R-$modül ve $U, V \leq M$ olsun. $M = U + V$ olmak üzere V bu koşulu sağlayan minimal alt modül ise yani bir $K \leq V$ için $M = U + K$ olması $K = V$ olmasını gerektiriyorsa V ye U nun **toplamaya göre bir tümleyeni** veya kısaca **tümleyeni** denir (Wisbauer, 1991).

Teorem 4.1.2. M bir $R-$modül ve $U, V \leq M$ olsun. V nin U nun bir tümleyeni olması için gerek ve yeter koşul $M = U + V$ ve $U \cap V \ll V$ olmasıdır (Wisbauer, 1991).

İspat: $(\Rightarrow)$ V, U nun bir tümleyeni olsun. O halde V, $M = U + V$ koşulunu sağlayan minimal alt modüldür. Bir $K \leq V$ için $V = (U \cap V) + K$ olsun. Modüler kuralından $V = V \cap (U + K)$ yani $V \leq U + K$ olur. Buradan $M = U + V = U + K$ ve V nin minimalliğinden $K = V$ olur. Buradan $U \cap V \ll V$ elde edilir.

$(\Leftarrow)$ Bir $L \leq V$ için $M = U + L$ olsun. Modüler kuralından $V = V \cap M = (U \cap V) + L$ ve $U \cap V \ll V$ olduğundan $L = V$ elde edilir.

Teorem 4.1.3. M sonlu üretilmiş bir $R-$modül olsun. Bu takdirde M nin her tümleyen alt modülü de sonlu üretilmiştir (Clark ve ark., 2006).

İspat: M sonlu üretilmiş bir modül ve V, M nin bir tümleyen alt modülü olsun. Bu takdirde $M = \langle m_1, m_2, \ldots, m_n \rangle$ olacak şekilde $m_1, m_2, \ldots, m_n \in M$ elemanları ve $M = U + V$ olacak şekilde $U \leq M$ alt modülü vardır. Buradan her $i = 1, 2, \ldots, n$ için $m_i = u_i + v_i$ olacak şekilde $u_i \in U$ ve $v_i \in V$ elemanları vardır. Dolayısıyla $M = U + \langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle$ olup V alt modülünün minimalliğinden $V = \langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle$ elde edilir. Sonuç olarak V sonlu üretilmiştir.

Teorem 4.1.4. M bir $R-$modül ve V, U alt modülünün bir tümleyeni olsun. Eğer $W \leq U$ alt modülü için $M = W + V$ ise V, W nın da bir tümleyenidir (Clark ve ark., 2006).

İspat: $X \leq V$ alt modülü için $M = W + X$ ise $W \leq U$ olduğundan $M = U + X$ olur. Buradan V, U nun bir tümleyeni olduğundan $X = V$ olmak zorundadır.

Teorem 4.1.5. M bir $R-$modül, V M de U nun bir tümleyeni ve $K \ll M$ olsun. Bu takdirde V, $U + K$ nın da bir tümleyenidir (Wisbauer, 1991).

İspat: $M = U + V$ olduğundan $M = U + K + V$ olur. $M = U + K + X$ olacak şekilde $X \leq V$ alt modülünü alalım. Böylece $K \ll M$ olduğundan $M = U + X$ bulunur. $X \leq V$ ve V, U nun bir tümleyeni olduğundan $X = V$ bulunur. Dolayısıyla V, $U + K$ nın bir tümleyenidir.

Teorem 4.1.6. M bir $R-$modül V M de U nun bir tümleyeni ve $K \ll M$ olsun. Bu takdirde $K \cap V \ll V$ dir (Zöschinger, 1974).

İspat: V, U nun bir tümleyeni olduğundan $M = U + V$ ve $U \cap V \ll V$ dir. Bir $S \leq V$ için $V = (K \cap V) + S$ olsun. O halde $M = U + V = U + (K \cap V) + S$ gerçeklenir. $K \ll M$ olduğundan Teorem 3.8.5(i) den $K \cap V \ll M$ olup $M = U + S$ yazılabilir. V nin minimalliğinden $S = V$ olup $K \cap V \ll V$ elde edilir.

Teorem 4.1.7. M bir $R-$modül, V M de U nun bir tümleyeni ve $L \leq U$ olsun. Bu takdirde $(V + L)/L$, U/L nin M/L de bir tümleyenidir (Zöschinger, 1974).

İspat: $M/L = (U + V)/L = (V + U + L)/L = ((V + L)/L) + (U/L)$ olduğu açıktır. $(U/L) \cap ((V + L)/L) = ((U \cap V) + L)/L$ olduğundan $((U \cap V) + L)/L \ll (V + L)/L$ olduğunu göstermek için $K/L \leq (V + L)/L$ alt modülünü alalım. Bu durumda

$$\left[((U \cap V) + L)/L\right] + [K/L] = ((U \cap V) + K)/L = (V + L)/L$$

olup $(U \cap V) + K = V + L$ elde edilir. Son eşitlikte her iki tarafın V ile arakesiti alınırsa $((U \cap V) + K) \cap V = (U \cap V) + (K \cap V) = (V + L) \cap V = V$ olur. $U \cap V \ll V$ olduğundan $K \cap V = V$ olup $V \leq K$ yazılabilir. Dolayısıyla $(V + L)/L \leq K/L$ olup $K/L = (V + L)/L$ olur. Böylece $((U \cap V) + L)/L \ll (V + L)/L$ elde edilir.

Tanım 4.1.8. Bir M modülünün her alt modülü bir tümleyene sahipse M ye **tümlenmiş modül** denir. Böylece M tümlenmiş bir modül ise, her $U \leq M$ için $M = U + V$, $U \cap V \ll V$ olacak şekilde bir $V \leq M$ vardır (Wisbauer, 1991).

Yardımcı Teorem 4.1.9. M bir $R-$modül olmak üzere $M_1, U \leq M$ ve M_1 tümlenmiş olsun. Eğer $M_1 + U$ nun M de bir tümleyeni varsa U nun da M de bir tümleyeni vardır (Zöschinger, 1974).

İspat: $M_1 + U$ nun M içindeki tümleyeni X ve $M_1 \cap (U + X)$ alt modülünün M_1 içindeki tümleyeni Y olsun. Bu takdirde $M = M_1 + U + X$, $(M_1 + U) \cap X \ll X$ ve $M_1 = (M_1 \cap (U + X)) + Y$, $(M_1 \cap (U + X)) \cap Y \ll Y$ yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned} M &= M_1 + U + X \\ &= (M_1 \cap (U + X)) + Y + U + X \\ &= U + X + Y \end{aligned}$$

ve

$$U \cap (X + Y) \leq X \cap (U + Y) + Y \cap (U + X) \leq X \cap (U + M_1) + Y \cap (U + X) \ll X + Y$$

olur. Böylece $X + Y, U$ nun M içindeki tümleyenidir.

Teorem 4.1.10. M_1 ve M_2 birer $R-$modül olmak üzere $M = M_1 + M_2$ olsun. M_1 ve M_2 tümlenmiş ise M tümlenmiştir (Zöschinger, 1974).

İspat: $U \leq M$ olsun. $M = (M_1 + U) + M_2$, M de 0 aşikar tümleyenine sahiptir. X, $(M_1 + U) \cap M_2$ nin M_2 de bir tümleyeni ise Yardımcı Teorem 4.1.9 dan $0 + X$, M de $M_1 + U$ nun bir tümleyenidir. Yine $M_1 \cap (U + X)$ nın M_1 de bir tümleyeni Y ise Yardımcı Teorem 4.1.9 dan $X + Y$, U nun M de bir tümleyenidir. Sonuç olarak M tümlenmiştir.

4.2. $\oplus-$ Tümlenmiş Modüller

Tanım 4.2.1. M bir $R-$modül ve $U \leq M$ olsun. Eğer $M = U + V$, $U \cap V \ll V$ ve $M = V \oplus V_1$ koşullarını sağlayan M nin V, V_1 alt modülleri mevcut ise U alt modülüne M modülünde bir $\oplus-$ **tümleyene sahiptir** denir. Eğer M modülünün her alt modülü M de $\oplus-$ **tümleyene** sahipse, M modülüne $\oplus-$ **tümlenmiştir** denir (Mohamed ve Müller, 1990).

Teorem 4.2.2. Sonlu sayıda $\oplus -$tümlenmiş $R-$modülün direkt toplamı da $\oplus -$ tümlenmiştir (Harmancı ve ark., 1999).

Yardımcı Teorem 4.2.3. M, $Rad(M)=0$ olacak şekilde bir $R-$modül olsun. M nin $\oplus -$tümlenmiş olması için gerek ve yeter koşul M nin yarı basit olmasıdır (Idelhadj ve Tribak, 2003).

Teorem 4.2.4. R bir halka olsun. Bu takdirde aşağıdakiler denktir:

(i) Her $\oplus -$tümlenmiş $R-$modül injektiftir.

(ii) R sol noetherian V-halkadır (Idelhadj ve Tribak, 2003).

4.3. Bol Tümlenmiş Modüller

Tanım 4.3.1. M bir $R-$modül, $U \leq M$ olsun. $M = U + V$ koşulunu gerçekleyen M nin her V alt modülü U nun M de bir tümleyenini kapsıyor ise U alt modülüne M de **bol tümleyene sahiptir** denir. M nin her alt modülü bol tümleyene sahip ise M modülüne **bol tümlenmiştir** denir (Wisbauer, 1991).

Teorem 4.3.2. Bir R halkası için aşağıdaki ifadeler denktir:

(i) R yarı mükemmeldir.

(ii) ${}_RR$ tümlenmiştir.

(iii) Her sonlu üretilmiş $R-$modül yarı mükemmeldir.

(iv) Her sonlu üretilmiş $R-$modül (bol) tümlenmiştir.

(v) R yarı lokaldir (Wisbauer, 1991).

Tanım 4.3.3. M bir $R-$modül, $m \in M$, $N \leq M$ ve $m + N = \{m + x \mid x \in N\}$ kümesi M nin bir yan sınıfı olmak üzere $\{C_i | i \in I\}$, M nin yan sınıflarının boş kümeden farklı bir ailesi olsun. Eğer I nın boş kümeden farklı her sonlu F alt kümesi için $\bigcap_{i \in F} C_i$ boş kümeden farklı ise $\{C_i \mid i \in I\}$ yan sınıflarının ailesi **sonlu kesişim özelliğine sahiptir** denir. Yan sınıflarının sonlu kesişim özelliğine sahip boş kümeden farklı her $\{C_i \mid i \in I\}$ ailesi için $\bigcap_{i \in I} C_i$ boş kümeden farklı ise M modülüne **lineer kompakttır** denir (Smith, 2000).

Teorem 4.3.4. M bir $R-$modül ve $N \leq M$ olsun. Bu takdirde M modülünün lineer kompakt olması için gerek ve yeter koşul N ve M/N nin lineer kompakt olmasıdır (Wisbauer, 1991).

Teorem 4.3.5. M bir $R-$modül ve U, M nin lineer kompakt bir alt modülü olsun. Bu takdirde U, M de bol tümleyene sahiptir (Wisbauer, 1991).

Teorem 4.3.6. M lineer kompakt bir $R-$modül olsun. Bu takdirde

(i) M bol tümlenmiştir.

(ii) M nin noetherian olması için gerek ve yeter koşul M nin her U alt modülü için $Rad(U) \neq U$ olmasıdır (Wisbauer, 1991).

4.4. Zayıf Tümlenmiş Modüller

Tanım 4.4.1. M bir $R-$modül, $U \leq M$ olsun. $M = U + V$ ve $U \cap V \ll M$ koşulunu sağlayan M nin V alt modülüne U nun M deki **zayıf tümleyeni** denir. Eğer M nin her alt modülü M de bir zayıf tümleyene sahipse M ye **zayıf tümlenmiş modül** denir (Clark ve ark., 2006).

Yardımcı Teorem 4.4.2. M bir $R-$modül ve M_1, $K \leq M$ olmak üzere M_1 zayıf tümlenmiş olsun. Bu takdirde $M_1 + K$, M de bir zayıf tümleyene sahip ise K, M de bir zayıf tümleyene sahiptir (Clark ve ark., 2006).

İspat: Hipotez gereği $M_1 + K$ nın M de bir N zayıf tümleyeni vardır. Bu durumda $M = M_1 + K + N$ ve $(K + M_1) \cap N \ll M$ olur. M_1 zayıf tümlenmiş olduğundan $(K + N) \cap M_1$ alt modülünün M_1 içinde bir L zayıf tümleyeni vardır. Yani $M_1 = ((K+N) \cap M_1) + L$, $(K+N) \cap L \ll M_1$ yazılabilir. Bu durumda $M = M_1 + K + N = ((K+N) \cap M_1) + L + K + N = K + N + L$ olur. Diğer taraftan $(K + M_1) \cap N \ll M$ olduğundan Teorem 3.8.5(i) kullanılırsa $(K+L) \cap N \ll M$ elde edilir. Yine $(K+N) \cap L \ll M_1$ olduğu göz önünde tutulursa Teorem 3.8.5(ii) den $(K+N) \cap L \ll M$ olup $K \cap (L+N) \leq (K+L) \cap N + (K+N) \cap L \ll M$ olur. Dolayısıyla $L + N$, K alt modülünün M de bir zayıf tümleyenidir.

Teorem 4.4.3. M_1 ve M_2 birer $R-$modül olmak üzere $M = M_1 + M_2$ olsun. Eğer M_1 ve M_2 zayıf tümlenmiş ise M zayıf tümlenmiştir (Clark ve ark., 2006).

İspat: N, M nin herhangi bir alt modülü olsun. $M_1 + (M_2 + N)$ nin M de sıfır aşikar zayıf tümleyeni mevcuttur ve M_1 zayıf tümlenmiş olduğundan Yardımcı Teorem 4.4.2 gereği $M_2 + N$, M de bir zayıf tümleyene sahiptir. M_2 zayıf tümlenmiş olduğundan yine Yardımcı Teorem 4.4.2 gereği N, M de bir zayıf tümleyene sahiptir. Sonuç olarak M zayıf tümlenmiştir.

Sonuç 4.4.4. Zayıf tümlenmiş modüllerin sonlu toplamları da zayıf tümlenmiştir (Clark ve ark., 2006).

Teorem 4.4.5. $\{M_i\}_{i\in I}$ zayıf tümlenmiş $R-$modüllerin bir ailesi olmak üzere $M = \sum_{i\in I} M_i$ olsun. Eğer $Rad(M) \ll M$ ise M zayıf tümlenmiştir (Büyükaşık, 2009).

Teorem 4.4.6. Bir R halkasının yarı lokal olması için gerek ve yeter koşul ${}_R R$ sol $R-$modülünün zayıf tümlenmiş olmasıdır (Lomp, 1999).

4.5. Dual Sonlu Tümlenmiş ve Dual Sonlu Zayıf Tümlenmiş Modüller

Tanım 4.5.1. M $R-$modülünün dual sonlu her alt modülü bir (zayıf) tümleyene sahip ise M modülüne **dual sonlu** (**zayıf**) **tümlenmiş modül** denir (Alizade ve Büyükaşık, 2003, Alizade ve ark., 2001).

Teorem 4.5.2.

(i) Dual sonlu tümlenmiş modüllerin bölüm modülleri de dual sonlu tümlenmiştir.

(ii) Keyfi sayıdaki dual sonlu tümlenmiş modüllerin toplamı da dual sonlu tümlenmiştir.

(iii) Bir M $R-$modülünün dual sonlu tümlenmiş olması için gerek ve yeter koşul her maksimal alt modülünün bir tümleyene sahip olmasıdır (Alizade ve ark., 2001).

Teorem 4.5.3.

(i) Dual sonlu zayıf tümlenmiş modüllerin bölüm modülleri de dual sonlu zayıf tümlenmiştir.

(ii) Keyfi sayıdaki dual sonlu zayıf tümlenmiş modüllerin toplamı da dual sonlu zayıf tümlenmiştir.

(iii) M bir $R-$modül olmak üzere $M/Rad(M)$ dual sonlu zayıf tümlenmiş olsun. Bu takdirde $M/Rad(M)$ nin dual sonlu her alt modülü bir direkt toplam terimidir (Alizade ve Büyükaşık, 2003).

Teorem 4.5.4. M bir $R-$modül ve $Rad(M) \ll M$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir:

(i) M dual sonlu zayıf tümlenmiştir.

(ii) $M/Rad(M)$ dual sonlu zayıf tümlenmiştir.

(iii) $M/Rad(M)$ nin dual sonlu her alt modülü bir direkt toplam terimidir.

(iv) $M/Rad(M)$ nin her maksimal alt modülü bir direkt toplam terimidir.

(v) M nin her maksimal alt modülü bir zayıf tümleyene sahiptir (Alizade ve Büyükaşık, 2003).

Teorem 4.5.5. M bir lokal noetherian $R-$modül ve $N \leq Rad(M)$ olsun. Bu takdirde M nin dual sonlu zayıf tümlenmiş olması için gerek ve yeter koşul M/N nin dual sonlu zayıf tümlenmiş olmasıdır (Büyükaşık, 2009).

İspat: $(\Rightarrow)$ Teorem 4.5.3(i) den görülür.

$(\Leftarrow)$ K, M nin maksimal alt modülü olsun. Buradan $N \leq Rad(M) \leq K$ olup Teorem 3.2.9 dan $K/N \leq M/N$ maksimaldir. Her maksimal alt modül dual sonlu olduğundan hipotez gereği K/N, M/N de bir zayıf tümleyene sahiptir. Bu takdirde $(K/N)+(U/N) = M/N$ ve $(K/N)\cap(U/N) = (K \cap U)/N \ll M/N$ olacak şekilde $U/N \leq M/N$ vardır. Teorem 3.9.2 gereği $(K \cap U)/N \leq Rad(M/N) = Rad(M)/N$ olup $K \cap U \leq Rad(M)$ olur. Alizade ve Büyükaşık (2003)' a göre U/N alt modülünü devirli alabiliriz. Böylece $U = Rx + N$ olacak şekilde $x \in U$ vardır. Dolayısıyla $M = K + U = K + Rx + N = K + Rx$ ve $K \cap Rx \leq K \cap U \leq Rad(M)$ olur. M lokal noetherian modül ve $K \cap Rx \leq Rx$ olduğundan Teorem 3.7.5 ile $K \cap Rx$

sonlu üretilmiştir ve Teorem 3.9.11 den $K \cap Rx \ll M$ olur. Dolayısıyla Rx, M de K maksimal alt modülünün zayıf tümleyenidir. Teorem 4.5.4 den M dual sonlu zayıf tümlenmiş modüldür.

Sonuç 4.5.6. M bir lokal noetherian $R-$modül olsun. Bu takdirde M nin dual sonlu zayıf tümlenmiş modül olması için gerek ve yeter koşul $M/Rad(M)$ nin her maksimal alt modülünün bir direkt toplam terimi olmasıdır (Büyükaşık, 2009).

Sonuç 4.5.7. M bir lokal noetherian $R-$modül olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir:

(i) M dual sonlu zayıf tümlenmiştir.

(ii) $N \leq Rad(M)$ olmak üzere M/N dual sonlu zayıf tümlenmiştir.

(iii) $M/Rad(M)$ dual sonlu zayıf tümlenmiştir.

(iv) $M/Rad(M)$ nin dual sonlu her alt modülü bir direkt toplam terimidir.

(v) $M/Rad(M)$ nin her maksimal alt modülü bir direkt toplam terimidir.

(vi) $M/Rad(M)$ nin her maksimal alt modülü bir zayıf tümleyendir.

(vii) M nin her maksimal alt modülü bir zayıf tümleyendir (Büyükaşık, 2009).

Teorem 4.5.8. Lokal noetherian bir M $R-$modülünün yarı basit olması için gerek ve yeter koşul M nin devirli her alt modülünün bir direkt toplam terimi olmasıdır (Büyükaşık, 2009).

İspat: $(\Rightarrow)$ Açıktır.

$(\Leftarrow)$ M nin yarı basit olmadığını kabul edelim. $m \in M - Des(M)$ alalım. M lokal noetherian modül olduğundan Rm noetheriandır. Hipotez gereği M nin sonlu üretilmiş her alt modülünün bir direkt toplam terimi olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla Rm nin bir direkt toplam terimidir. Rm nin her alt modülü bir direkt toplam terimi olduğundan yarı basit modül tanımı gereği Rm yarı basittir. $Des(M)$ nin tanımı göz önünde tutulursa $m \in Des(M)$ olur ki bu ise $m \in M - Des(M)$ olmasıyla çelişir. O halde kabulümüz yanlış olup M yarı basittir.

4.6. Zayıf Rad-Tümlenmiş Modüller

Tanım 4.6.1. M bir $R-$modül ve $U \leq M$ olsun. $M = U + V$ ve $U \cap V \leq Rad(V)$ olacak şekilde M nin bir V alt modülü varsa V ye U nun M de **Rad-tümleyeni** denir. M modülünün her alt modülü bir Rad-tümleyene sahip ise, M modülüne **Rad-tümlenmiş modül** denir (Wang ve Ding, 2006).

Tanım 4.6.2. M bir $R-$modül ve $U \leq M$ olsun. $M = U + V$ ve $U \cap V \leq Rad(M)$ olacak şekilde M modülünün bir V alt modülü varsa V alt modülüne U alt modülünün M de **zayıf Rad-tümleyeni** denir. M modülünün her alt modülü bir zayıf Rad-tümleyene sahip ise M modülüne **zayıf Rad-tümlenmiş modül** denir (Wang ve Ding, 2006).

Teorem 4.6.3. M bir $R-$modül ve $U, V \leq M$ olmak üzere V, U nun M de bir zayıf Rad-tümleyeni olsun. Eğer V, M nin bir direkt toplam terimi ise V, U nun Rad-tümleyenidir (Türkmen, 2007).

Yardımcı Teorem 4.6.4. M bir $R-$modül ve U, $V \leq M$ olmak üzere V, U alt modülünün M de bir zayıf Rad-tümleyeni olsun. O zaman her $L \subseteq U$ için $(V+L)/L$, M/L de U/L nin bir zayıf Rad-tümleyenidir (Wang ve Ding, 2006).

İspat: V, U nun M de zayıf Rad-tümleyeni olduğundan $M = U + V$ ve $U \cap V \leq Rad(M)$ yazılabilir. $M = U + V$ eşitliğinden $M = U + V + L$ olup $M/L = (U/L) + ((V+L)/L)$ elde edilir. $\pi : M \to M/L$ doğal homomorfizması için Teorem 3.9.9 ile

$$\begin{aligned}(U/L) \cap ((V+L)/L) &= (U \cap (V+L))/L = ((U \cap V) + L)/L \\ &= \pi(U \cap V) \leq \pi(Rad(M)) \leq Rad(M/L)\end{aligned}$$

yazılabilir. Böylece $(V+L)/L$, M/L de U/L nin bir zayıf Rad-tümleyenidir.

Teorem 4.6.5. Zayıf Rad-tümlenmiş modüllerin sonlu toplamları da zayıf Rad-tümlenmiştir (Wang ve Ding, 2006).

Teorem 4.6.6. Zayıf Rad-tümlenmiş bir modülün bölüm modülü de zayıf Rad-tümlenmiştir (Wang ve Ding, 2006).

İspat: M zayıf Rad-tümlenmiş bir $R-$modül ve $N \leq L \leq M$ olmak üzere $L/N \leq M/N$ alalım. M zayıf Rad-tümlenmiş olduğundan $M = L + K$ ve $L \cap K \leq Rad(M)$ olacak şekilde $K \leq M$ vardır. $\pi : M \to M/N$ doğal homomorfizması için Yardımcı Teorem 4.6.4 den $(K+N)/N$, M/N de L/N nin bir zayıf Rad-tümleyenidir.

Sonuç 4.6.7. Zayıf Rad-tümlenmiş bir modülün homomorf görüntüsü de zayıf Rad-tümlenmiştir (Wang ve Ding, 2006).

Teorem 4.6.8. M bir $R-$modül olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir:

(i) $M/Rad(M)$ yarı basittir.

(ii) M zayıf Rad-tümlenmiştir (Clark ve ark., 2006).

İspat:

(i)$\Rightarrow$(ii) $U \leq M$ olsun. Hipotez gereği $M/Rad(M)$ yarı basit olduğundan $(U + Rad(M))/Rad(M)$, $M/Rad(M)$ nin bir direkt toplam terimidir ve bundan dolayı $M/Rad(M) = ((U + Rad(M))/Rad(M)) \oplus (K/Rad(M))$ olacak şekilde $K \leq M$ alt modülü vardır. Buradan $M = U + K$ ve $U \cap K \leq Rad(M)$ olur. Dolayısıyla M zayıf Rad-tümlenmiştir.

(ii)$\Rightarrow$(i) $U/Rad(M) \leq M/Rad(M)$ olsun. Bu durumda $U \leq M$ olup hipotez gereği $M = K + U$ ve $K \cap U \leq Rad(M)$ olacak şekilde $K \leq M$ mevcuttur. Buradan $M/Rad(M) = ((K + Rad(M))/Rad(M)) + (U/Rad(M))$ olup $K \cap U \leq Rad(M)$ olduğu göz önünde tutulursa $((K + Rad(M))/Rad(M)) \cap (U/Rad(M)) = ((K \cap U) + Rad(M))/Rad(M) = 0$ olur. Böylece $U/Rad(M)$, $M/Rad(M)$ nin bir direkt toplam terimi olup $M/Rad(M)$ yarı basittir.

4.7. Dual Sonlu Rad-Tümlenmiş Modüller

Tanım 4.7.1. M bir $R-$modül olsun. M modülünün dual sonlu her alt modülü bir Rad-tümleyene sahip ise M modülüne **dual sonlu Rad-tümlenmiş modül** denir (Büyükaşık ve Lomp, 2008).

Yardımcı Teorem 4.7.2. M bir $R-$modül olmak üzere N, M nin dual sonlu Rad-tümlenmiş bir alt modülü ve U, M nin dual sonlu bir alt modülü olsun. $N+U$, M de bir Rad-tümleyene sahip ise U da M de bir Rad-tümleyene sahiptir (Büyükaşık ve Lomp, 2008).

Teorem 4.7.3.

(i) Dual sonlu Rad-tümlenmiş modüllerin bölüm modülleri de dual sonlu Rad-tümlenmiştir.

(ii) Keyfi sayıdaki dual sonlu Rad-tümlenmiş modüllerin toplamı da dual sonlu Rad-tümlenmiştir (Büyükaşık ve Lomp, 2008).

Tanım 4.7.4. M bir $R-$modül olsun. M modülünün dual sonlu her alt modülü M de direkt toplam terimi olacak şekilde bir Rad-tümleyene sahip ise M modülüne $\oplus-$ **dual sonlu Rad-tümlenmiş modül** denir (Koşan, 2009).

5. BULGULAR VE TARTIŞMA

5.1. Dual Sonlu Zayıf Rad-Tümlenmiş Modüller

Tanım 5.1.1. M bir $R-$modül olsun. M modülünün dual sonlu her alt modülü bir zayıf Rad-tümleyene sahip ise M modülüne **dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiş modül** denir.

Her yarı basit, lokal ve artinian modül dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiştir. Yine zayıf Rad-tümlenmiş her modül dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiştir. Fakat bunun tersinin her zaman doğru olmadığı ileride gösterilecektir.

Yardımcı Teorem 5.1.2. M bir $R-$modül olmak üzere U, M nin bir dual sonlu (maksimal) alt modülü ve V, M de U nun zayıf Rad-tümleyeni olsun. Bu takdirde U, M de V tarafından içerilen sonlu üretilmiş (devirli) bir zayıf Rad-tümleyene sahiptir.

İspat: U, M nin dual sonlu bir alt modülü olmak üzere $\varphi: V \to M/U$ epimorfizmasını göz önüne alalım. Teorem 3.3.6 dan $V/(U \cap V) \cong M/U$ olup $V/(U \cap V)$ sonlu üretilmiştir. $V/(U \cap V)$ bölüm modülünün $x_1, x_2, ..., x_n \in V$ olmak üzere $x_1 + U \cap V, x_2 + U \cap V, ..., x_n + U \cap V$ elemanları tarafından üretildiğini kabul edelim. Bu takdirde her $v + U \cap V \in V/(U \cap V)$ için $v + U \cap V = r_1(x_1 + U \cap V) + \cdots + r_n(x_n + U \cap V)$ olacak şekilde $r_i \in R$, $i = 1, \ldots, n$ vardır. Buradan $v - (r_1x_1 + \cdots + r_nx_n) \in U \cap V$ yazılabilir. $W = Rx_1 + Rx_2 + \cdots + Rx_n$ alınırsa $v \in (r_1x_1 + \cdots + r_nx_n) + U \cap V \subseteq W + U \cap V$ olur. Böylece $V = W + U \cap V$ ve buradan $M = U + V = U + W + U \cap V = U + W$ yazılır. Diğer taraftan V, M de U nun zayıf Rad-tümleyeni olduğundan $U \cap V \leq Rad(M)$ olup buradan $U \cap W \subseteq U \cap V \leq Rad(M)$ elde edilir. O halde W, M de U alt modülünün V tarafından içerilen sonlu üretilmiş bir zayıf Rad-tümleyenidir.

Eğer U maksimal ise M/U basit dolayısıyla $V/(U\cap V)$ basittir. Her basit modül devirli olduğundan $V/(U\cap V)=\langle x+U\cap V\rangle$ olacak şekilde bir $x\in V$ vardır. Bu durumda V nin $W=Rx$ devirli alt modülü U maksimal alt modülünün zayıf Rad-tümleyeni olur.

Yukarıdaki yardımcı teorem ile genelliği bozmadan dual sonlu alt modüllerin zayıf Rad-tümleyenlerinin sonlu üretilmiş alınabileceği söylenebilir. Ancak dual sonlu alt modüllerin zayıf Rad-tümleyenleri her zaman sonlu üretilmiş olmak zorunda değildir.

Örnek 5.1.3. $p\in\mathbb{P}$ için $\mathbb{Q}\oplus\mathbb{Z}_p$ $\mathbb{Z}-$modülünü alalım. $\mathbb{Z}_p$ basit ve $\mathbb{Z}_p\cong(\mathbb{Q}\oplus\mathbb{Z}_p)/(\mathbb{Q}\oplus 0)$ olduğundan $\mathbb{Q}\oplus 0$, $\mathbb{Q}\oplus\mathbb{Z}_p$ nin bir maksimal dolayısıyla dual sonlu alt modülüdür. $M=\sum_{q\in IP}\mathbb{Z}\frac{1}{q}$ olsun. $(M\oplus\mathbb{Z}_p)+(\mathbb{Q}\oplus 0)=\mathbb{Q}\oplus\mathbb{Z}_p$ ve Teorem 3.9.12 den $(M\oplus\mathbb{Z}_p)\cap(\mathbb{Q}\oplus 0)=M\oplus 0\leq\ \mathbb{Q}\oplus 0=Rad(\mathbb{Q}\oplus\mathbb{Z}_p)$ olup $M\oplus\mathbb{Z}_p$ alt modülü, $\mathbb{Q}\oplus\mathbb{Z}_p$ de $\mathbb{Q}\oplus 0$ dual sonlu alt modülünün zayıf Rad-tümleyenidir. Ancak $M/\mathbb{Z}$, $\left\langle\frac{1}{q}+\mathbb{Z}\right\rangle$ devirli gruplarının bir direkt toplamı olduğundan sonlu üretilmiş değildir. O halde M sonlu üretilmiş değildir. Dolayısıyla $M\oplus\mathbb{Z}_p$ sonlu üretilmiş değildir.

Teorem 5.1.4. M bir $R-$modül olsun. Eğer M nin her U dual sonlu alt modülü için, $M=U+V$ ve $U\cap V$, V de bir zayıf tümleyene sahip olacak şekilde M nin bir V alt modülü varsa M dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiştir.

İspat: U, M modülünün dual sonlu bir alt modülü, $M=U+V$ ve N ise V de $U\cap V$ nin zayıf tümleyeni, yani $V=(U\cap V)+N$, $(U\cap V)\cap N=U\cap N\ll V$ olsun. Teorem 3.8.5(ii) gereği $U\cap N\ll M$ olur. Sonuç olarak $M=U+V=U+(U\cap V)+N=U+N$ ve $U\cap N\leq Rad(M)$ olup M dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiştir.

Yardımcı Teorem 5.1.5. M bir $R-$modül ve U, M nin dual sonlu bir alt modülü olsun. Eğer U, M de bir V zayıf Rad-tümleyene sahip ve V nin sonlu üretilmiş her

K alt modülü için $Rad(K) = K \cap Rad(M)$ ise U, M de sonlu üretilmiş bir Rad-tümleyene sahiptir.

İspat: V, U nun M de bir zayıf Rad-tümleyeni olduğundan $M = U + V$ ve $U \cap V \leq Rad\left(M\right)$ yazılabilir. U, M modülünün dual sonlu bir alt modülü olduğundan Yardımcı Teorem 5.1.2 den U, M de V tarafından içerilen sonlu üretilmiş bir K zayıf Rad-tümleyenine sahiptir. Yani $M = U + K$ ve $U \cap K \leq Rad\left(M\right)$ olacak şekilde $K \leq V$ vardır. Öte yandan kabulümüz gereği $U \cap K \leq K \cap Rad(M) = Rad(K)$ olduğundan K, U dual sonlu alt modülünün Rad-tümleyenidir.

Teorem 5.1.6. M bir $R-$modül olmak üzere, M nin sonlu üretilmiş her K alt modülü için $Rad(K) = K \cap Rad(M)$ olsun. Bu takdirde M nin dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiş olması için gerek ve yeter koşul M nin dual sonlu Rad-tümlenmiş olmasıdır.

İspat: $(\Rightarrow)$ U, M modülünün dual sonlu bir alt modülü olsun. M dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiş modül olduğundan $M = U + V$ ve $U \cap V \leq Rad\left(M\right)$ olacak şekilde bir $V \leq M$ vardır. Yardımcı Teorem 5.1.2 den U, M modülünde V tarafından içerilen sonlu üretilmiş bir K zayıf Rad-tümleyenine sahiptir. Yardımcı Teorem 5.1.5 den K, U dual sonlu alt modülünün Rad-tümleyeni olup M dual sonlu Rad-tümlenmiş bir modüldür.

$(\Leftarrow)$ M dual sonlu Rad-tümlenmiş bir modül olsun. Bu takdirde U, M nin dual sonlu bir alt modülü olmak üzere $M = U + V$ ve $U \cap V \leq Rad(V)$ olacak şekilde $V \leq M$ vardır. Teorem 3.9.8 den $U \cap V \leq Rad(V) \leq Rad(M)$ olup M dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiştir.

Sonuç 5.1.7. M her sonlu üretilmiş K alt modülü için $Rad(K) = K \cap Rad(M)$ koşulunu sağlayan sonlu üretilmiş bir $R-$modül olsun. Bu takdirde M nin zayıf Rad-tümlenmiş olması için gerek ve yeter koşul M nin Rad-tümlenmiş olmasıdır.

İspat: Sonlu üretilmiş bir modülün her alt modülü dual sonlu olduğundan Teorem 5.1.6 dan istenen gerçeklenir.

Teorem 5.1.8. Sol Bass halka üzerindeki sıfırdan farklı dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiş her modül dual sonlu zayıf tümlenmiştir.

İspat: R bir sol Bass halka, M sıfırdan farklı dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiş bir modül ve U, M nin dual sonlu bir alt modülü olsun. Bu durumda $M = U + V$ ve $U \cap V \leq Rad(M)$ olacak şekilde $V \leq M$ vardır. Teorem 3.9.13 den $Rad(M) \ll M$ olup M dual sonlu zayıf tümlenmiştir.

Teorem 5.1.9. Zayıf lokal her modül dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiştir.

İspat: M zayıf lokal bir $R-$modül ve U, M nin dual sonlu bir öz alt modülü olsun. M/U sonlu üretilmiş olduğundan, Sonuç 3.2.11 ile M nin U yu kapsayan bir P maksimal alt modülü vardır. M zayıf lokal olduğundan $Rad(M) = P$ olur. O halde $M = U + M$ ve $U \cap M = U \subseteq P = Rad(M)$ olup M, U nun bir zayıf Rad-tümleyenidir. Sonuç olarak M dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiştir.

Örnek 5.1.3 deki $M = \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Z}_p$ $\mathbb{Z}-$modülünü ele alalım. $Rad(M) = \mathbb{Q} \oplus 0$ M nin tek maksimal alt modülü olduğundan M zayıf lokal modüldür. Dolayısıyla M dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiştir.

Teorem 5.1.10. M bir arıtılabilir $R-$modül olsun. Bu takdirde aşağıdakiler denktir:

(i) M $\oplus-$dual sonlu Rad-tümlenmiştir.

(ii) M dual sonlu Rad-tümlenmiştir.

(iii) M dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiştir.

İspat:

(i) $\Rightarrow$ **(ii)** $\Rightarrow$ **(iii)** Açıktır.

(iii) $\Rightarrow$ **(i)** M dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiş $R-$modül ve N, M nin dual sonlu alt modülü olsun. Bu takdirde $M = N + K$ ve $N \cap K \leq Rad(M)$ olacak şekilde $K \leq M$ vardır. M arıtılabilir modül olduğundan $L \leq K$ ve $M = N + L$ olacak şekilde M nin bir L direkt toplam terimi vardır. $N \cap L \leq N \cap K \leq Rad(M)$ ve $M = N + L$ olduğundan L, N nin zayıf Rad-tümleyeni olup Teorem 4.6.3 gereği L, N nin Rad-tümleyenidir. Sonuç olarak M nin her N dual sonlu alt modülü M de direkt toplam terimi olan L Rad-tümleyenine sahip olduğundan M $\oplus-$dual sonlu Rad-tümlenmiştir.

Teorem 5.1.11. M bir $R-$modül ve $Rad(M) \ll M$ olsun. Bu takdirde M nin dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiş olması için gerek ve yeter koşul M nin dual sonlu zayıf tümlenmiş olmasıdır.

İspat: $(\Rightarrow)$ M dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiş bir modül ve U, M nin dual sonlu bir alt modülü olsun. Bu takdirde $M = U + V$ ve $U \cap V \leq Rad(M)$ olacak şekilde $V \leq M$ vardır. $Rad(M) \ll M$ olduğundan Teorem 3.8.5(i) den $U \cap V \ll M$ olup M dual sonlu zayıf tümlenmiş modüldür.

$(\Leftarrow)$ M dual sonlu zayıf tümlenmiş bir modül ve U, M nin dual sonlu bir alt modülü olsun. Bu takdirde $M = U + V$, $U \cap V \ll M$ olacak şekilde $V \leq M$ vardır. Teorem 3.9.2 den $U \cap V \leq Rad(M)$ olup M dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiştir.

Sonuç 5.1.12. M bir eş-atomik modül olsun. Bu takdirde M nin dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiş olması için gerek ve yeter koşul M nin dual sonlu zayıf tümlenmiş olmasıdır.

İspat: Teorem 3.9.5 den görülür.

Sonuç 5.1.13. M sonlu üretilmiş bir $R-$modül olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir:

(i) M zayıf Rad-tümlenmiştir.

(ii) M zayıf tümlenmiştir.

İspat:

(i)$\Rightarrow$**(ii)** M zayıf Rad-tümlenmiş olduğundan dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiştir. M sonlu üretilmiş olduğundan Sonuç 3.9.6 ile $Rad(M) \ll M$ olup Teorem 5.1.11 den M dual sonlu zayıf tümlenmiştir. Yine M sonlu üretilmiş olduğundan her alt modülü dual sonlu olup M zayıf tümlenmiştir.

(ii)$\Rightarrow$**(i)** Açıktır.

Teorem 5.1.14. Dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiş bir modülün her bölüm modülü de dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiştir

İspat : M dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiş bir $R-$modül ve L, M nin keyfi bir alt modülü olmak üzere M/L bölüm modülünü alalım. U/L, M/L nin dual sonlu alt modülü olsun. Teorem 3.3.7 den $(M/L)/(U/L) \cong M/U$ sonlu üretilmiştir. Böylece U, M nin dual sonlu bir alt modülü olup M dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiş olduğundan $M = U + V$ ve $U \cap V \leq Rad(M)$ olacak şekilde $V \leq M$ vardır. Yardımcı Teorem 4.6.4 den $(V + L)/L$, U/L nin M/L de bir zayıf Rad- tümleyenidir.

Sonuç 5.1.15. Dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiş bir modülün homomorf görüntüsü de dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiştir.

Teorem 5.1.16. M bir $R-$modül ve $N \leq M$ olsun. Eğer M modülünün N alt modülünü kapsayan her dual sonlu alt modülü zayıf Rad-tümleyene sahip ise M/N dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiştir.

İspat: U/N, M/N nin dual sonlu bir alt modülü olsun. Bu takdirde Teorem 3.3.7 gereği $(M/N)/(U/N) \cong M/U$ olup U, M nin N alt modülünü kapsayan dual sonlu alt modülü olur. Hipotez gereği $M = U + V$ ve $U \cap V \leq Rad(M)$ olacak şekilde $V \leq M$ vardır. Yardımcı Teorem 4.6.4 gereği $(V+N)/N$, U/N nin M/N de zayıf Rad-tümleyeni olup M/N dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiştir.

Bir modülün bir alt modülüne göre bölüm modülü dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiş ise kendisi dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiş olmak zorunda değildir.

Örnek 5.1.17. $p \in \mathbb{P}$ olmak üzere $\langle p \rangle \leq \mathbb{Z}$ için $\mathbb{Z}/\langle p \rangle$ bölüm modülünü göz önüne alalım. $\mathbb{Z}_p \cong \mathbb{Z}/\langle p \rangle$ bölüm modülü basit olduğundan dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiştir.

N ve K, $\mathbb{Z}$ nin öz alt modülleri olsun. Bu takdirde $N = \langle n \rangle$, $K = \langle m \rangle$ olacak şekilde 0 ve ± 1 den farklı $n, m \in \mathbb{Z}$ vardır. Ayrıca $0 \neq nm \in N \cap K \neq 0$ dır. O halde N için $\mathbb{Z} = N + K$, $N \cap K \leq Rad(\mathbb{Z}) = 0$ olacak şekilde K alt modülü yoktur. ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}$ dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiş değildir.

Teorem 5.1.18. M bir $R-$modül ve $N \leq M$ olsun. $N \leq Rad(M)$ ve M/N dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiş bir modül ise M dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiştir.

İspat: U, M nin dual sonlu alt modülü olsun. O halde M/U sonlu üretilmiştir. Teorem 3.3.7 den

$$(M/U)/((U+N)/U) \cong M/(U+N) \cong (M/N)/((U+N)/N)$$

sonlu üretilmiş olup, $(U+N)/N$, M/N nin dual sonlu alt modülüdür. Hipotez gereği

$$M/N = ((U+N)/N) + (X/N)$$

ve

$$\big((U+N)/N\big)\cap\big(X/N\big)=\big((U\cap X)+N\big)\big/N\leq Rad\,(M/N)$$

olacak şekilde $X/N \leq M/N$ alt modülü vardır. Burada $N \leq Rad(M)$ olduğundan Teorem 3.9.10 gereği $Rad\big(M/N\big)=Rad(M)/N$ dir. O halde $\big((U\cap X)+N\big)\big/N \leq Rad\,(M)/N$ olup $U\cap X\leq Rad\big(M\big)$ olur. Ayrıca $M/N=\big((U+N)/N\big)+\big(X/N\big)$ olduğundan $M=U+X$ olur. Sonuç olarak X, U nun M de zayıf Rad-tümleyenidir.

Sonuç 5.1.19. Dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiş bir modülün her genelleştirilmiş örtüsü de dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiştir.

Önerme 5.1.20. M dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiş bir $R-$modül olsun. Bu takdirde M deki her Rad-tümleyen dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiştir.

İspat: V, M de U nun Rad-tümleyeni olsun. Bu durumda $M=U+V$ ve $U\cap V\leq Rad\big(V\big)$ olduğundan Teorem 3.3.6 dan $M/U=\big(U+V\big)\big/U\cong V\big/\big(U\cap V\big)$ yazılabilir. Teorem 5.1.14 den $V\big/\big(U\cap V\big)$ dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiştir. Diğer taraftan $U\cap V\leq Rad\big(V\big)$ olduğundan Teorem 5.1.18 den V dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiştir.

Keyfi sayıda dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiş modülün toplamının da dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiş modül olduğunu göstermek için önce aşağıdaki yardımcı teoremi verelim.

Yardımcı Teorem 5.1.21. M bir $R-$modül olmak üzere N, M nin dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiş bir alt modülü ve U, M nin dual sonlu bir alt modülü olsun. $N+U$, M de bir zayıf Rad-tümleyene sahip ise, U da M de bir zayıf Rad-tümleyene sahiptir.

İspat: X, $N+U$ nun M de bir zayıf Rad-tümleyeni olsun. Yani $M=X+N+U$ ve $X\cap\big(N+U\big)\leq Rad(M)$ olsun. Teorem 3.3.6 ve Teorem 3.3.7 kullanılırsa $[N/(N\cap(X+U))]\cong[\big(X+N+U\big)\big/(X+U)]=M/(X+U)\cong[(M/U)/((X+U)/U)]$ bölüm modülü sonlu üretilmiş olup $N\cap\big(X+U\big)$, N nin bir dual sonlu alt modülüdür. N dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiş olduğundan $N=\big(N\cap\big(X+U\big)\big)+Y$

ve $\left(N\cap\left(X+U\right)\right)\cap Y=\left(X+U\right)\cap Y\leq Rad\left(N\right)$ olacak şekilde bir $Y\leq N$ vardır. Buradan $M=X+N+U=X+\left(N\cap\left(X+U\right)+Y\right)+U=U+X+Y$ elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned} U\cap\left(X+Y\right) &\leq X\cap\left(U+Y\right)+Y\cap\left(X+U\right) \\ &\leq X\cap\left(U+N\right)+Y\cap\left(X+U\right) \\ &\leq Rad\left(M\right)+Rad\left(N\right)\leq Rad\left(M\right) \end{aligned}$$

olduğundan $X+Y$, U nun M de bir zayıf Rad-tümleyenidir.

Teorem 5.1.22. Keyfi sayıda dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiş modülün toplamı da dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiştir.

İspat: Her $i\in I$ için M_i dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiş modüller olmak üzere $M=\sum_{i\in I}M_i$ ve N, M nin dual sonlu bir alt modülü olsun. Bu takdirde M/N sonlu üretilmiş olup $M/N=\left\langle x_1+N,\ldots,x_n+N\right\rangle$ olacak şekilde $x_1,x_2,...,x_n\in M$ vardır. Her $i=1,2,...,n$ için $x_i\in M$ olduğundan $x_i=m_{i_1}+m_{i_2}+\cdots+m_{i_{s(i)}}$ olacak şekilde $i_k\in I$, $m_{i_k}\in M_{i_k}$, $k=1,\ldots,s\left(i\right)$ vardır. $m+N\in M/N$ keyfi elemanı için $m+N=r_1\left(x_1+N\right)+\cdots+r_n\left(x_n+N\right)$ olacak şekilde $r_i\in R$ ve $i=1,2,\ldots,n$ vardır. Buradan $t\in N$ olmak üzere $m=r_1\left(m_{1_1}+\cdots+m_{1_{s(1)}}\right)+\cdots+r_n\left(m_{n_1}+\cdots+m_{n_{s(n)}}\right)+t$ yazılabilir. Böylece $J=\left\{1_1,\ldots,1_{s(1)},2_1,\ldots,2_{s(2)},\ldots,n_1,\ldots,n_{s(n)}\right\}$ olmak üzere $M=\sum_{j\in J}M_j+N=M_{1_1}+\sum_{j\in J-\{1_1\}}M_j+N$ dir. $M_{1_1}+\sum_{j\in J-\{1_1\}}M_j+N$ modülü sıfır aşikar zayıf Rad-tümleyenine sahiptir. M_{1_1} dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiş olduğundan Yardımcı Teorem 5.1.21 den $\sum_{j\in J-\{1_1\}}M_j+N$ modülü M de bir zayıf Rad-tümleyene sahiptir. Benzer şekilde devam edilirse Yardımcı Teorem 5.1.21 yardımıyla sonlu bir adım sonunda N nin M de bir zayıf Rad-tümleyene sahip olduğu görülür. Böylece M dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiştir.

Sonuç 5.1.15 ve Teorem 5.1.22 nin bir sonucu olarak aşağıdaki ifadeyi verebiliriz.

Sonuç 5.1.23. M dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiş bir $R-$modül olsun. Bu takdirde her $M-$üretilmiş modül dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiştir.

Her maksimal alt modülü bir zayıf Rad-tümleyene sahip olan modülün dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiş olduğunu göstermeden önce aşağıdaki yardımcı teoremi verelim.

Yardımcı Teorem 5.1.24. M bir $R-$modül ve N, M nin bir maksimal alt modülü olmak üzere $K \leq M$, N nin bir zayıf Rad-tümleyeni olsun. M nin U alt modülü için $K+U$, M de bir zayıf Rad-tümleyene sahip ise U alt modülü de M de bir zayıf Rad-tümleyene sahiptir.

İspat: X, $K+U$ nun M deki bir zayıf Rad-tümleyeni, yani $M = X+K+U$ ve $X \cap (K+U) \leq Rad(M)$ olsun. Diğer taraftan K, N nin bir zayıf Rad-tümleyeni olduğundan $M = K+N$ ve $K \cap N \leq Rad(M)$ dir.

$K \cap (X+U) \subseteq Rad(M)$ ise

$$(K+X) \cap U \leq \left[K \cap (X+U)\right] + \left[X \cap (K+U)\right] \leq Rad(M)$$

olur. Dolayısıyla $M = X+K+U$, $(K+X) \cap U \leq Rad(M)$ olduğundan $K+X$, M de U nun bir zayıf Rad-tümleyeni olur.

$K \cap (X+U) \not\subset Rad(M)$ ise $K \cap N \leq Rad(M)$ olduğundan $K \cap (X+U) \not\subset K \cap N$ yazılabilir. Teorem 3.3.6 dan $K/(K \cap N) \cong (K+N)/N = M/N$ dir ve N, M nin bir maksimal alt modülü olduğundan $K \cap N$, K nın bir maksimal alt modülüdür. Teorem 3.5.3 den $(K \cap N) + (K \cap (X+U)) = K$ olup

$$M = U+K+X = U + (K \cap N) + (K \cap (X+U)) + X = U + (K \cap N) + X$$

yazılabilir. Böylece

$$\begin{aligned} \left(U \cap \left((K \cap N)+X\right)\right) &\leq \left[(K \cap N) \cap (U+X)\right] + \left[X \cap \left((K \cap N)+U\right)\right] \\ &\leq (K \cap N) + \left(X \cap (K+U)\right) \\ &\leq Rad(M) \end{aligned}$$

olur. O halde $M = U + (K \cap N) + X$, $\left(U \cap \left[(K \cap N)+X\right]\right) \leq Rad(M)$ olduğundan $(K \cap N)+X$, M de U nun zayıf Rad-tümleyenidir.

M bir $R-$modül ve

$\Omega=\{K \leq M \mid K,\ M$ de bir maksimal alt modülün zayıf Rad-tümleyeni$\}$

olsun. Ω daki bütün alt modüllerin toplamı olan $R-$modülünü $mzr(M)$ ile gösterelim.

Teorem 5.1.25. Bir M $R-$modülü için aşağıdaki ifadeler denktir:

(i) M dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiştir.

(ii) M nin her maksimal alt modülü bir zayıf Rad-tümleyene sahiptir.

(iii) $M/mzr(M)$ bölüm modülü maksimal alt modül içermez.

İspat:

(i)$\Rightarrow$**(ii)** Her maksimal alt modül dual sonlu olduğundan ispat açıktır.

(ii)$\Rightarrow$**(iii)** Kabul edelim ki $M/mzr(M)$ nin $N/mzr(M)$ gibi bir maksimal alt modülü olsun. Bu takdirde Teorem 3.2.9 dan N, M nin bir maksimal alt modülüdür. Hipotezden $M=N+K$, $N \cap K \leq Rad(M)$ olacak şekilde bir $K \leq M$ vardır. Ω kümesinin tanımından $K \in \Omega$ dir. Dolayısıyla $K \leq mzr(M) \leq N \leq M$ olur. Buradan $N=N+K=M$ olur ki bu ise N nin maksimal alt modül olmasıyla çelişir. O halde kabulümüz yanlış olup $M/mzr(M)$ bölüm modülü maksimal alt modül içermez.

(iii)$\Rightarrow$**(i)** U, M nin dual sonlu bir alt modülü olsun. O halde M/U sonlu üretilmiştir. Teorem 3.3.7 den

$$\left[(M/U)\big/\left((U+mzr(M))/U\right)\right] \cong \left[M\big/\left(U+mzr(M)\right)\right]$$

sonlu üretilmiştir. Yani $U+mzr(M)$, M nin dual sonlu alt modülüdür. Eğer $M \neq U+mzr(M)$ olsa Sonuç 3.2.11 den M nin $U+mzr(M)$ alt modülünü kapsayan bir N maksimal alt modülü vardır. Buradan Teorem 3.2.9 ile $N/mzr(M)$, $M/mzr(M)$ nin bir maksimal alt modülü olur. Bu ise hipotez ile çelişir. O halde $M=U+mzr(M)$ dir. Diğer taraftan M/U sonlu üretilmiş olduğundan $M/U=\langle x_1+U,\ldots,x_m+U\rangle$ olacak şekilde $x_1,x_2,\ldots,x_m \in M$ vardır. Buradan $M=Rx_1+Rx_2+\cdots+Rx_n+U$ elde edilir. Ayrıca $M=U+mzr(M)$ olduğundan her

$i=1,2,\ldots,m$ için $x_i=u_i+c_i$ olacak şekilde $u_i\in U$, $c_i\in mzr(M)$ vardır. Her $i=1,2,...,m$ için c_i, Ω daki alt modüllerin sonlu bir toplamı tarafından içerilir. Bu sonlu toplamı oluşturan Ω daki alt modüller $K_1,K_2,\ldots,K_n$ ise $M=U+K_1+\cdots+K_n$ yazılabilir. $M=(U+K_1+\cdots+K_{n-1})+K_n$ modülü sıfır aşikar zayıf Rad-tümleyenine sahiptir. Yardımcı Teorem 5.1.24 den $U+K_1+\cdots+K_{n-1}$, M de bir zayıf Rad-tümleyenine sahip olur. Benzer şekilde devam edilirse Yardımcı Teorem 5.1.24 ile U nun M de bir zayıf Rad-tümleyene sahip olduğu görülür. Sonuç olarak M dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiştir.

Teorem 5.1.26. M bir $R-$modül ve $Rad(M)\leq N\leq M$ olsun. M dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiş bir modül ise M/N bölüm modülünün dual sonlu her alt modülü bir direkt toplam terimidir.

İspat: U/N, M/N bölüm modülünün dual sonlu bir alt modülü olsun. Teorem 3.3.7 den $(M/N)/(U/N)\cong M/U$ sonlu üretilmiş olup U, M nin dual sonlu bir alt modülüdür. M dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiş olduğundan $M=U+V$, $U\cap V\leq Rad(M)$ olacak şekilde bir $V\leq M$ vardır. Yardımcı Teorem 4.6.4 gereği $(V+N)/N$, U/N nin M/N de bir zayıf Rad-tümleyenidir. Yani

$$M/N=((V+N)/N)+(U/N) \text{ ve}$$

$$((V+N)/N)\cap(U/N)=((V\cap U)+N)/N\leq Rad(M/N)$$

yazılabilir. Buradan $V\cap U\leq Rad(M)\leq N$ olduğu göz önünde tutulursa $((V+N)/N)\cap(U/N)=((V\cap U)+N)/N=0$ olup U/N, M/N nin bir direkt toplam terimi olur.

Sonuç 5.1.27. M dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiş bir $R-$modül olsun. Bu takdirde $M/Rad(M)$ bölüm modülünün dual sonlu her alt modülü bir direkt toplam terimidir.

Teorem 5.1.28. $0\longrightarrow L\xrightarrow{f}M\xrightarrow{g}N\longrightarrow 0$ kısa tam dizisi verilsin. L ve N dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiş modüller olmak üzere; $f(L)$, M de bir zayıf tümleyene sahip olsun. Bu takdirde M dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiştir.

İspat: $f(L) \cong L$ olduğundan genelliği bozmadan $L \leq M$ alabiliriz. S, M de L nin zayıf tümleyeni olsun. Yani $M = S + L$ ve $S \cap L \ll M$ olsun. Buradan $M/(S \cap L) = \left[S/(S \cap L)\right] \oplus \left[L/(S \cap L)\right]$ yazılabilir. Teorem 5.1.14 den $L/(S \cap L)$ dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiş modüldür. Diğer taraftan Teorem 3.3.6 gereği $S/(S \cap L) \cong (S + L)/L = M/L \cong N$ olduğundan $S/(S \cap L)$ bölüm modülü de dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiş olup Teorem 5.1.22 den $M/(S \cap L)$ dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiştir. Sonuç 5.1.19 dan M dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiştir.

Teorem 5.1.29. M bir $R-$modül ve K, M nin bir lineer kompakt alt modülü olsun. M nin dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiş olması için gerek ve yeter koşul M/K bölüm modülünün dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiş olmasıdır.

İspat: $(\Rightarrow)$ Teorem 5.1.14 den görülür.

$(\Leftarrow)$ $0 \to K \to M \to M/K \to 0$ kısa tam dizisini alalım. K lineer kompakt olduğundan Teorem 4.3.6 gereği dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiştir. Teorem 4.3.5 den K, M de bol tümleyene sahip olduğundan K, M de zayıf tümleyene sahiptir. Teorem 5.1.28 den M dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiştir.

Teorem 5.1.30. M bir $R-$modül olsun. Bu takdirde aşağıdakiler denktir:

(i) M dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiştir.

(ii) $M/Rad(M)$ dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiştir.

(iii) $M/Rad(M)$ nin dual sonlu her alt modülü bir direkt toplam terimidir.

(iv) $M/Rad(M)$ nin her maksimal alt modülü bir direkt toplam terimidir.

(v) M nin her maksimal alt modülü bir zayıf Rad-tümleyene sahiptir.

İspat:

(i)$\Rightarrow$**(ii)** Teorem 5.1.14 den açıktır.

(ii)$\Rightarrow$**(iii)** $N/Rad(M)$, $M/Rad(M)$ nin dual sonlu bir alt modülü olmak üzere hipotez gereği

$$M/Rad(M) = \left(N/Rad(M)\right) + \left(K/Rad(M)\right) \text{ ve}$$

$$\left(N/Rad(M)\right) \cap \left(K/Rad(M)\right) \leq Rad\left(M/Rad(M)\right) = 0$$

olacak şekilde $K/Rad(M) \leq M/Rad(M)$ vardır. Buradan

$$M/Rad(M) = (N/Rad(M)) \oplus (K/Rad(M))$$

yani $N/Rad(M)$, $M/Rad(M)$ nin bir direkt toplam terimidir.

(iii) $\Rightarrow$ **(iv)** Her maksimal alt modül dual sonlu olduğundan istenilen elde edilir.

(iv) $\Rightarrow$ **(v)** U, M nin bir maksimal alt modülü olsun. O halde Teorem 3.2.9 dan $U/Rad(M)$, $M/Rad(M)$ maksimal alt modülüdür. Hipotez gereği

$$M/Rad(M) = (U/Rad(M)) \oplus (K/Rad(M))$$

olacak şekilde $K/Rad(M) \leq M/Rad(M)$ vardır. Buradan $M = U + K$ ve $U \cap K \leq Rad(M)$ olup K, M de U nun bir zayıf Rad-tümleyenidir.

(v) $\Rightarrow$ **(i)** Teorem 5.1.25 den açıktır.

Sonuç 5.1.31. $Rad(M)$, M $R-$modülünün dual sonlu alt modülü olsun. Bu takdirde M nin dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiş olması için gerek ve yeter koşul M nin yarı lokal olmasıdır.

İspat: $(\Rightarrow)$ M dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiş bir modül olsun. $Rad(M)$, M nin dual sonlu alt modülü olduğundan, $M/Rad(M)$ sonlu üretilmiştir. Teorem 3.2.5 den $M/Rad(M)$ nin her alt modülü dual sonlu olup Sonuç 5.1.27 den $M/Rad(M)$ yarı basittir. Yani M yarı lokaldir.

$(\Leftarrow)$ M yarı lokal olduğundan $M/Rad(M)$ yarı basit olup her alt modülü bir direkt toplam terimi olduğundan Teorem 5.1.30 den M dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiştir.

Aşağıdaki örnek her dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiş modülün bir zayıf Rad-tümlenmiş modül olmadığını göstermektedir.

Örnek 5.1.32. $R = \mathbb{Z}$ için Teorem 3.10.6 daki M $R-$modülünü alalım ve $T(M) = \bigoplus_{i \in I} (\mathbb{Z}/P_i)$ olsun. Bu takdirde $M/T(M) \cong \mathbb{Q}^{(J)}$ yazılabilir. M modülünün $N/T(M) \cong \mathbb{Q}$ olacak şekilde $T(M) \leq N \leq M$ alt modülünü alırsak $Rad(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ olduğundan N nin $T(M)$ torsion alt modülünü içeren bir maksimal alt modülü mevcut değildir. P, N nin keyfi bir maksimal alt modülü olsun. $T(M) \not\subset P$ olduğundan Teorem 3.5.3 ile $P + T(M) = N$ yazılabilir. Diğer taraftan $T(M)$ yarı basit olduğundan $(P \cap T(M)) \oplus X = T(M)$ olacak şekilde $X \leq T(M)$ vardır. Buradan

$$P \cap X = P \cap \big(T(M) \cap X\big) = \big(P \cap T(M)\big) \cap X = 0$$

olup,

$$N = P + T(M) = P + \big[\big(P \cap T(M)\big) \oplus X\big] = P + X = P \oplus X$$

bulunur. Dolayısıyla Teorem 5.1.30 dan N dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiştir. N nin zayıf Rad-tümlenmiş olduğunu kabul edelim. $Rad(N) \leq Rad(M) = 0$ olduğundan $Rad(N) = 0$ olup Teorem 4.6.8 ile N yarı basittir. Bu takdirde Teorem 3.5.9 dan $N/T(M)$ yarı basit olup $\mathbb{Q}$ $R-$modülü yarı basit bulunur. Bu ise bir çelişkidir. Sonuç olarak N dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiştir fakat N zayıf Rad-tümlenmiş değildir.

5.2. Noetherian Halkalar Üzerinde Dual Sonlu Zayıf Rad-Tümlenmiş Modüller

Teorem 5.2.1. R bir Dedekind bölgesi, $M/Rad(M)$ sonlu üretilmiş ve $Rad(M) \trianglelefteq M$ olsun. Eğer $Rad(M)$ dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiş ise M dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiştir.

İspat: $M/Rad(M)$ sonlu üretilmiş olduğundan $1 \leq i \leq n$ için $M/Rad(M) = \langle m_1 + Rad(M), \ldots, m_n + Rad(M) \rangle$ olacak şekilde $m_i \in M$ elemanları vardır. Buradan M nin $K = Rm_1 + Rm_2 + \cdots + Rm_n$ sonlu üretilmiş alt modülü için $M = Rad(M) + K$ yazılır. Ayrıca Teorem 3.10.11 den R noetherian halka olup, Teorem 3.7.4 den K noetheriandır. Teorem 3.7.5 gereği $K \cap Rad(M)$ sonlu üretilmiş olup $K \cap Rad(M) \leq Rad(M)$ olduğundan Teorem 3.9.11 den $K \cap Rad(M) \ll M$ olur. Dolayısıyla $M = Rad(M) + K$ ve $K \cap Rad(M) \ll M$ olduğundan K, $Rad(M)$ nin M de bir zayıf tümleyenidir. Şimdi $Rad(M) \trianglelefteq M$ iken $M/Rad(M)$ nin bir torsion modül olduğunu gösterelim. $m + Rad(M) \in M/Rad(M)$ alalım. Eğer $m + Rad(M) = Rad(M)$ ise her $0 \neq r \in R$

için $r\left(m+Rad\left(M\right)\right)=Rad\left(M\right)$ olduğu açıktır. Eğer $m+Rad(M)\neq Rad\left(M\right)$ ise $0\neq m\in M$ dir. $Rad\left(M\right)\trianglelefteq M$ olduğundan Teorem 3.8.3 den $0\neq rm\in Rad\left(M\right)$ olacak şekilde bir sıfırdan farklı $r\in R$ vardır. Buradan $r\left(m+Rad\left(M\right)\right)=rm+Rad\left(M\right)=Rad\left(M\right)$ yazılır. Böylece $M/Rad\left(M\right)$ torsiondur. Teorem 3.9.9 ve Teorem 3.10.10 kullanılırsa $\left(M/Rad\left(M\right)\right)/Rad\left(M/Rad\left(M\right)\right)=\left(M/Rad\left(M\right)\right)/0\cong M/Rad\left(M\right)$ yarı basit olup dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiştir. $0\rightarrow Rad\left(M\right)\rightarrow M\rightarrow M/Rad\left(M\right)\rightarrow 0$ kısa tam dizisi alınırsa Teorem 5.1.28 den M dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiştir.

Sonuç 5.2.2. Bir Dedekind bölgesi üzerindeki her torsion modül dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiştir.

İspat: Teorem 3.10.10 gereği $M/Rad\left(M\right)$ yarı basit olup her alt modülü bir direkt toplam terimi olduğundan Teorem 5.1.30 dan M dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiştir.

Teorem 5.2.3. R bir halka olsun. Bu takdirde aşağıdakiler denktir:

(i) R sol noetherian V-halkadır.

(ii) Her zayıf Rad-tümlenmiş $R-$modül injektiftir.

İspat:

(i)$\Rightarrow$(ii) M zayıf Rad-tümlenmiş bir $R-$modül olsun. R sol V-halka olduğundan Villamayor Teoremi gereği $Rad\left(M\right)=0$ olup Teorem 4.6.8 ile M yarı basittir. O halde M $\oplus-$tümlenmiş olup Teorem 4.2.4 den M injektiftir.

(ii)$\Rightarrow$(i) M $\oplus-$tümlenmiş $R-$modül olsun. M zayıf Rad-tümlenmiş modül olup hipotez gereği M injektiftir. Dolayısıyla Teorem 4.2.4 den R sol noetherian V-halkadır.

Sonuç 5.2.4. R değişmeli bir halka olsun. Bu takdirde aşağıdakiler denktir:

(i) Her zayıf Rad-tümlenmiş $R-$modül injektiftir.

(ii) R yarı basittir.

İspat:

(i)$\Rightarrow$(ii) M zayıf Rad-tümlenmiş $R-$modülü injektif olsun. Teorem 5.2.3 den R noetherian V-halkadır. Yardımcı Teorem 3.7.7 ve Sonuç 3.7.8 den R yarı basittir.

(ii)$\Rightarrow$(i) R yarı basit olsun. Teorem 3.6.9 dan her zayıf Rad-tümlenmiş $R-$modül injektiftir.

Teorem 5.2.5. M lokal noetherian bir $R-$modül olsun. M modülünün dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiş modül olması için gerek ve yeter koşul dual sonlu zayıf tümlenmiş olmasıdır.

İspat: $(\Leftarrow)$ Açıktır.

$(\Rightarrow)$ M dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiş modül olmak üzere U, M nin keyfi bir dual sonlu alt modülü olsun. Bu takdirde $M = U + V$, $U \cap V \leq Rad(M)$ olacak şekilde $V \leq M$ vardır. Yardımcı Teorem 5.1.2 den U, M de V tarafından içerilen sonlu üretilmiş bir $W \leq V$ zayıf Rad-tümleyenine sahiptir. W sonlu üretilmiş olduğundan $W = Rm_1 + Rm_2 + \cdots + Rm_n$ olacak şekilde $m_i \in V$, $i = 1, 2, \ldots, n$ vardır. Ayrıca W, U nun zayıf Rad-tümleyeni olduğundan $M = U + W$, $U \cap W \leq Rad(M)$ yazılabilir. M lokal noetherian modül olduğundan W noetherian olup Teorem 3.7.5 ile $U \cap W$ sonlu üretilmiştir. Böylece $U \cap W, M$ nin $Rad(M)$ tarafından kapsanan sonlu üretilmiş bir alt modülüdür ve Teorem 3.9.11 gereği $U \cap W \ll M$ olur. Sonuç olarak M dual sonlu zayıf tümlenmiştir.

Sonuç 5.2.6. R bir Dedekind bölgesi olsun. Bu takdirde her dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiş modül dual sonlu zayıf tümlenmiştir.

Teorem 5.2.7. M lokal noetherian bir $R-$modül ve $N \leq Rad(M)$ olsun. Bu takdirde M nin dual sonlu zayıf tümlenmiş modül olması için gerek ve yeter koşul M/N bölüm modülünün dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiş modül olmasıdır.

İspat: $(\Rightarrow)$ Teorem 5.1.14 den bu ispat açıktır.

$(\Leftarrow)$ K, M nin maksimal alt modülü olmak üzere $N \leq Rad(M) \leq K$ olup Teorem 3.2.9 dan K/N, M/N nin bir maksimal alt modülüdür. Her maksimal alt modül dual sonlu olduğundan hipotez gereği $M/N = (K/N) + (U/N)$ ve $(K/N) \cap (U/N) = (K \cap U)/N \leq Rad(M/N) = Rad(M)/N$ olacak şekilde $U/N \leq M/N$ vardır. Buradan $K \cap U \leq Rad(M)$ yazılabilir. Genelliği bozmadan Yardımcı Teorem 5.1.2 gereği U/N alt modülünü devirli alabiliriz. Böylece $U = Rx + N$ olacak şekilde $x \in U$ vardır. Buradan $M = K + U = K + Rx + N = K + Rx$ ve $K \cap Rx \leq K \cap U \leq Rad(M)$ olur. M lokal noetherian modül ve $K \cap Rx \leq Rx$ olduğundan Teorem 3.7.5 ile $K \cap Rx$ sonlu üretilmiştir ve Teorem 3.9.11 den $K \cap Rx \ll M$ olur.

Dolayısıyla Rx, M de K maksimal alt modülünün zayıf tümleyenidir. Teorem 4.5.4 den M dual sonlu zayıf tümlenmiş modüldür.

R bir halka ve I, R halkasının bir ideali olsun. M bir $R-$modül olmak üzere $I \leq Ann(M)$ ise her $m \in M$ ve her $r+I \in R/I$ için $(r+I)m = rm$ ile tanımlı işleme göre M bir $(R/I)-$modüldür ve M modülünün her $R-$alt modülü $(R/I)-$alt modüldür.

Tersine, M bir $(R/I)-$modül ise her $m \in M$ ve her $r \in R$ elemanları için $rm = (r+I)m$ ile tanımlı işleme göre M bir $R-$modül yapısına sahiptir ve M nin her $(R/I)-$alt modülü $R-$alt modüldür. Ayrıca bu durumda $I \leq Ann(M)$ olur (Sharpe ve Vamos, 1972).

Teorem 5.2.8. R değişmeli bölgesi için aşağıdaki ifadeler denktir:

(i) R h-yarı lokaldir.

(ii) Her devirli torsion $R-$modül zayıf Rad-tümlenmiştir.

(iii) Küçük radikale sahip olan her torsion $R-$modül zayıf Rad-tümlenmiştir.

(iv) Her torsion M $R-$modülü için M nin her maksimal alt modülü M de bir zayıf Rad-tümleyene sahiptir.

(v) Her torsion $R-$modül dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiştir.

İspat:

(i)$\Rightarrow$(ii) R h-yarı lokal bir bölge ve M devirli torsion $R-$modül olsun. Bu durumda $M = Rm$ olacak şekilde bir $m \in M$ vardır. Ayrıca M torsion olduğundan $I = Ann(m) \neq 0$ ve $M = Rm$ olduğundan $Ann(m) = Ann(M)$ elde edilir. Her $r \in R$ için $\varphi(r) = rm$ şeklinde tanımlı $\varphi : R \to Rm$ dönüşümü bir epimorfizmadır ve $Çek(\varphi) = I$ olur. Homomorfizma Teoreminden $R/I \cong M = Rm$ olup R h-yarı lokal olduğundan R/I yarı lokal halkadır. Dolayısıyla R/I yarı lokal $R/I-$modül olup R/I yarı lokal $R-$modüldür. Böylece M yarı lokal $R-$modüldür ve Teorem 4.6.8 den M zayıf Rad-tümlenmiştir.

(ii)$\Rightarrow$(iii) M küçük radikale sahip bir torsion $R-$modül olsun. Torsion bir modülün her alt modülü de torsion olduğundan hipotez gereği her $m \in M$ için Rm zayıf Rad-tümlenmiştir. $Rad(Rm) \ll Rm$ olduğundan her $m \in M$ için Rm zayıf tümlenmiştir. $Rad(M) \ll M$ olduğundan Teorem 4.4.5 den M zayıf tümlenmiştir.

(iii) $\Rightarrow$ **(iv)** M torsion $R-$modül olsun. Torsion bir modülün her alt modülü de torsion olduğundan her $m \in M$ için Rm torsion olup Sonuç 3.9.6 ve hipotez gereği Rm zayıf Rad-tümlenmiştir. Dolayısıyla Rm dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiştir. Teorem 5.1.22 den $M = \sum_{m \in M} Rm$ dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiştir.

(iv) $\Rightarrow$ **(v)** Teorem 5.1.30 dan görülür.

(v) $\Rightarrow$ **(i)** I, R nin sıfırdan farklı bir ideali olmak üzere her $a + I \in R/I$ ve her $0 \neq r \in I \subseteq R$ için $r(a+I) = I$ olduğundan R/I torsion $R-$modüldür. Hipotezden R/I dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiştir. Diğer taraftan R/I sonlu üretilmiş olduğundan R/I zayıf tümlenmiş $R-$modüldür. O zaman R/I zayıf tümlenmiş $R/I-$modüldür. Böylece Teorem 4.4.6 dan R/I yarı lokal halkadır. Sonuç olarak R h-yarı lokaldir.

Sonuç 5.2.9. R h-yarı lokal bir bölge ve M bir $R-$modül olmak üzere $T(M)$, M de bir zayıf tümleyene sahip olsun. Eğer $M/T(M)$ dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiş bir modül ise M dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiştir.

İspat: Teorem 5.2.8 den $T(M)$ dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiştir. $0 \to T(M) \to M \to M/T(M) \to 0$ kısa tam dizisini göz önüne alalım. Teorem 5.1.28 den M dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiştir.

R bir Dedekind bölgesi olsun. $D(M)$ ile M nin bölünebilir kısmını gösterelim. Önerme 3.6.4 ile her injektif modülün bölünebilir olduğunu biliyoruz. Ayrıca Teorem 3.10.5 ile Dedekind bölgesinde injektiflik ve bölünebilirlik çakıştığından $D(M)$ injektiftir. Teorem 3.6.5 gereği $M = D(M) \oplus N$ olacak şekilde $N \leq M$ vardır. Burada N alt modülüne M modülünün **indirgenmiş kısmı** denir. $D(M)$ injektif olduğundan Teorem 3.10.5 gereği $D(M)$ hiçbir maksimal alt modül içermez. Sonuç 3.2.11 den $D(M)$ nin dual sonlu öz alt modülü yoktur. Böylece $D(M)$ dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiş modüldür. Bu durumda $M = D(M) \oplus N$ olduğundan M nin dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiş modül olması için gerek ve yeter koşul M nin indirgenmiş kısmının dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiş modül olmasıdır.

Sonuç 5.2.10. R bir Dedekind bölgesi, M bir $R-$modül ve N, M modülünün indirgenmiş kısmı olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir:

(i) M dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiştir.

(ii) N dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiştir.

(iii) $N/Rad(N)$ nin her maksimal alt modülü bir direkt toplam terimidir.

İspat:

(i) $\Leftrightarrow$ **(ii)** Açıktır.

(ii) $\Leftrightarrow$ **(iii)** Teorem 5.1.30 den açıktır.

Sonuç 5.2.11. R bir Dedekind bölgesi ve M bir $R-$modül olsun. Ayrıca N, M modülünün indirgenmiş kısmı olmak üzere N torsion $R-$modül olsun. Bu takdirde M dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiştir.

İspat: R Dedekind bölgesi olduğundan h-yarı lokal bölgedir. Teorem 5.2.8 den N dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiş modül olup Sonuç 5.2.10 gereği M dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiştir.

5.3.Tamamen Dual Sonlu Zayıf Rad-Tümlenmiş Modüller

Tanım 5.3.1. M bir $R-$modül olsun. M nin her alt modülü dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiş ise M modülüne **tamamen dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiş modül** denir.

Artinian ve yarı basit modüller tamamen dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiştir.

Örnek 5.3.2. Tamamen dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiş modülün dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiş olduğu açıktır. Fakat bunun tersi her zaman doğru değildir. Yani dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiş bir modülün her alt modülü dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiş olmak zorunda değildir.

$\mathbb{Q}$ $\mathbb{Z}-$modülünü göz önüne alalım. $\mathbb{Q}$ hiçbir maksimal alt modüle sahip olmadığından $\mathbb{Q}$ nun dual sonlu alt modülü yalnızca kendisidir. O halde $\mathbb{Q}$ dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiştir.

$\mathbb{Q}$ $\mathbb{Z}-$modülünün $\mathbb{Z}$ $\mathbb{Z}-$alt modülünün dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiş olmadığını Örnek 5.1.17 den biliyoruz. O halde $\mathbb{Q}$ $\mathbb{Z}-$modülü tamamen dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiş değildir.

Yardımcı Teorem 5.3.3. Tamamen dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiş bir modülün her alt modülü de tamamen dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiştir.

İspat: $N \leq U \leq M$ olsun. M tamamen dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiş olduğundan N dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiştir. Dolayısıyla U tamamen dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiştir.

Teorem 5.3.4. Tamamen dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiş bir modülün her bölüm modülü de tamamen dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiştir.

İspat: M tamamen dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiş modül olsun. $L \le M$ olmak üzere M/L bölüm modülünün N/L alt modülünü alalım. K/L, N/L nin dual sonlu alt modülü olsun. Teorem 3.3.7 den $(N/L)/(K/L) \cong N/K$ olup K, N nin dual sonlu alt modülüdür. M tamamen dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiş modül olduğundan N dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiş modül olup $N = K + V$ ve $K \cap V \le Rad(N)$ olacak şekilde $V \le N$ vardır. Böylece Yardımcı Teorem 4.6.4 gereği $(V+L)/L$, K/L nin N/L de zayıf Rad-tümleyenidir. Sonuç olarak N/L dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiş modül olup M/L tamamen dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiştir.

Sonuç 5.3.5. Tamamen dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiş bir modülün homomorf görüntüsü de tamamen dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiştir.

Teorem 5.3.6. M bir $R-$modül olsun. N , M nin tamamen dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiş bir alt modülü ve N nin her bir alt modülü kendisini kapsayan her alt modülde bir zayıf tümleyene sahip olsun. Bu takdirde M nin tamamen dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiş olması için gerek ve yeter koşul M/N nin tamamen dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiş modül olmasıdır.

İspat: $(\Rightarrow)$ Teorem 5.3.4 den açıktır.

$(\Leftarrow)$ $K \le M$ olsun. Eğer $K \le N$ ise N tamamen dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiş bir modül olduğundan Yardımcı Teorem 5.3.3 gereği K dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiştir.

Eğer K, N nin bir alt modülü değil ise $(K+N)/N$, M/N nin bir alt modülüdür. $0 \to N \cap K \to K \to K/(N \cap K) \to 0$ kısa tam dizisini alalım. M/N tamamen dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiş olduğundan Teorem 3.3.6 gereği $(K+N)/N \cong K/(N \cap K)$ dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiştir. Ayrıca hipotezden $N \cap K$, K da bir zayıf tümleyene sahip ve $N \cap K$ dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiş olduğundan Teorem 5.1.28 den K dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiştir. Dolayısıyla M tamamen dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiştir.

Teorem 5.3.7. $M = M_1 \oplus M_2$, M_2 yarı basit olacak şekilde M_1 ve M_2 alt modüllerinin direkt toplamı olsun. Bu takdirde M nin tamamen dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiş olması için gerek ve yeter koşul M_1 in tamamen dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiş olmasıdır.

İspat: $(\Rightarrow)$ $M = M_1 \oplus M_2$ olsun. $M_1 \cong M/M_2$ ve M tamamen dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiş olduğundan Teorem 5.3.4 ile M_1 tamamen dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiştir.

$(\Leftarrow)$ Tersine M_1 tamamen dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiş modül ve $N \leq M$ olsun. M_2 yarı basit olduğundan $M_2 = (N \cap M_2) \oplus L$ olacak şekilde $L \leq M_2$ vardır. $N = N \cap M = N \cap ((M_1 \oplus L) \oplus (N \cap M_2))$ olduğundan modüler kuraldan $N = (N \cap (M_1 \oplus L)) \oplus (N \cap M_2)$ olur. $M_1 \oplus L$ nin $H = N \cap (M_1 \oplus L)$ alt modülünü göz önüne alalım. $H \cap L = \left(N \cap \left(M_1 \oplus L\right)\right) \cap L \leq N \cap L = 0$ olduğundan H, M_1 içine gömülebilir. Çünkü

$$H \cap M_2 = (N \cap (M_1 \oplus L)) \cap M_2 = N \cap ((M_1 \cap M_2) + L) = 0$$

dır. $\pi_1 : M \to M_1$ izdüşüm homomorfizması için $H \cong \pi_1|_H (H) \leq M_1$ dir. Dolayısıyla H dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiştir. Diğer taraftan M_2 yarı basit olduğundan Sonuç 3.5.8 den $N \cap M_2$ yarı basit olup dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiştir. Böylece Teorem 5.1.22 den $N = H \oplus \left(N \cap M_2\right)$ modülü de dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiştir. Sonuç olarak M tamamen dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiştir.

Önerme 5.3.8. M her (devirli) sonlu üretilmiş alt modülü dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiş olan bir $R-$modül olsun. Bu takdirde M tamamen dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiştir.

İspat: $N \leq M$ olsun. Hipotez gereği her $x \in N$ için Rx dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiştir. Teorem 5.1.22 den $N = \sum_{x \in N} Rx$ dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiş olup M tamamen dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiştir.

Teorem 5.3.9. R bir halka, $M=\underset{i\in I}{\oplus}M_i$ her $i\in I$ için tamamen dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiş M_i alt modüllerinin direkt toplamı olsun. Eğer M nin her U alt modülü için $U=\underset{i\in I}{\oplus}(U\cap M_i)$ ise M tamamen dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiştir.

İspat: U, M nin bir alt modülü ve V, U nun dual sonlu bir alt modülü olsun. Kabulümüz gereği $U=\underset{i\in I}{\oplus}(U\cap M_i)$ ve $V=\underset{i\in I}{\oplus}(V\cap M_i)$ olduğundan

$$U/V=\left[\underset{i\in I}{\oplus}(U\cap M_i)\right]\Big/\left[\underset{i\in I}{\oplus}(V\cap M_i)\right]\cong\underset{i\in I}{\oplus}\left[(U\cap M_i)/(V\cap M_i)\right]$$

sonlu üretilmiştir. O halde

$$(U/V)\Big/\underset{j\in I,\ i\neq j}{\oplus}\left((U\cap M_j)/(V\cap M_j)\right)\cong(U\cap M_i)/(V\cap M_i)$$

sonlu üretilmiş olup her $i\in I$ için $V\cap M_i$, $U\cap M_i$ nin dual sonlu alt modülüdür. M_i ler tamamen dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiş modüller olduğundan $U\cap M_i$ dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiştir. Bu takdirde her $i\in I$ için $V\cap M_i$, $U\cap M_i$ de bir K_i zayıf Rad-tümleyenine sahiptir. $K=\underset{i\in I}{\oplus}K_i$ olsun. Böylece

$$U=\underset{i\in I}{\oplus}(U\cap M_i)=\underset{i\in I}{\oplus}\left[(V\cap M_i)+K_i\right]=\underset{i\in I}{\oplus}(V\cap M_i)+\left(\underset{i\in I}{\oplus}K_i\right)=V+K$$

olur. Diğer taraftan her $i\in I$ için $(V\cap M_i)\cap K_i=V\cap K_i\leq Rad(U\cap M_i)$ olduğundan Teorem 3.9.12 ile

$$V\cap K=\underset{i\in I}{\oplus}(V\cap K_i)\leq\underset{i\in I}{\oplus}Rad(U\cap M_i)=Rad(\underset{i\in I}{\oplus}(U\cap M_i))=Rad(U)$$

elde edilir. Sonuç olarak U dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiş olduğundan M tamamen dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiştir.

Sonuç 5.3.10. $M=\overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}}M_i$, her $i=1,2,\ldots,n$ için M_i tamamen dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiş alt modüllerinin direkt toplamı olan bir eş modül olsun. Bu takdirde M tamamen dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiştir.

İspat: M eş modül olduğundan her alt modülü karakteristik alt modül olup Teorem 3.4.9 gereği her $N\leq M$ için $N=\bigoplus_{i=1}^{n}(N\cap M_i)$ olur. Teorem 5.3.9 dan M tamamen dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiştir.

Teorem 5.3.11. M bir $R-$modül ve K, M nin lineer kompakt alt modülü olsun. M nin tamamen dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiş olması için gerek ve yeter koşul M/K nın tamamen dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiş olmasıdır.

İspat: $(\Rightarrow)$Teorem 5.3.4 den görülür.

$(\Leftarrow)$ K, M nin lineer kompakt alt modülü olmak üzere M/K tamamen dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiş modül ve $N \leq M$ olsun.

Eğer $N \leq K$ ise Teorem 4.3.4 den N lineer kompakttır. Teorem 4.3.6 dan N dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiştir.

Eğer N, K nın alt modülü değil ise $N \cap K \leq K$ olduğundan Teorem 4.3.4 den $N \cap K$ lineer kompakttır. Hipotezden $(N+K)/K$ dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiş olup $(N+K)/K \cong N/N \cap K$ dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiştir. Böylece Teorem 5.1.29 dan N dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiştir. Böylece M tamamen dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiştir.

Teorem 5.3.12. Bir R halkası için aşağıdaki ifadeler denktir:

(i) R halkası yarı lokaldir.

(ii) Her sol $R-$modül dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiştir.

(iii) Her sol $R-$modül tamamen dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiştir.

İspat: **(i)** $\Rightarrow$ **(ii)** R halkası yarı lokal olsun. Teorem 3.11.5 den her sol $R-$modül yarı lokaldir. Teorem 4.6.8 ile her sol $R-$modül zayıf Rad-tümlenmiş olduğundan her sol $R-$modül dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiştir.

(ii)$\Rightarrow$**(iii)** M bir sol $R-$modül olsun. Hipotez gereği M dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiştir. Her sol $R-$modül dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiş olduğundan özel olarak M nin her alt modülü de dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiştir. Dolayısıyla M tamamen dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiştir.

(iii)$\Rightarrow$**(i)** Hipotezden $_RR$ sol $R-$modülü dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiştir. $_RR$ sonlu üretilmiş sol $R-$modül olduğundan R zayıf Rad-tümlenmiştir. Teorem 4.6.8 den R halkası yarı lokaldir.

Sonuç 5.3.13. R yarı mükemmel bir halka ise her $R-$modül (tamamen) dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiştir.

İspat: R yarı mükemmel ise Teorem 4.3.2 den R yarı lokaldir.

Sonuç 5.3.14. R ayrık değerlendirme halkası ise her $R-$modül (tamamen) dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiştir.

İspat: R ayrık değerlendirme halkası olduğundan R lokal halkadır. Her lokal halka yarı lokal olup Teorem 5.3.12 den görülür.

Teorem 5.3.15. R yarı lokal olmayan değişmeli bir bölge ve M bir $R-$modül olsun. Eğer M tamamen dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiş ise M torsiondur.

İspat: Bir $m\in M$ için $Ann(m)=0_R$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $R\cong Rm$ olup Rm dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiştir. O zaman izomorfizmadan dolayı ${}_RR$ sol $R-$modülü dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiş olup zayıf Rad-tümlenmiştir. Teorem 4.6.8 den R yarı lokal olup bu bir çelişkidir. Dolayısıyla her $m\in M$ için $Ann(m)\neq 0_R$ olup M torsiondur.

Teorem 5.3.16. R yarı lokal olmayan Dedekind bölgesi ve M bir $R-$modül olsun. M modülünün tamamen dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiş olması için gerek ve yeter koşul M modülünün torsion ve her $P-$asıl bileşeninin tamamen dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiş olmasıdır.

İspat: $(\Rightarrow)$Teorem 5.3.15 den M modülü torsion olup Yardımcı Teorem 5.3.3 den her $P\in\Omega$ için $T_P(M)$ tamamen dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiştir.

$(\Leftarrow)$ M torsion modül olduğundan Teorem 3.10.8 gereği $M=\underset{P\in\Omega}{\oplus}T_P(M)$ yazılabilir. $N\leq M$ alalım. Torsion bir modülün her alt modülü de torsion olduğundan N torsion olup Teorem 3.10.8 den $N=\underset{P\in\Omega}{\oplus}T_P(N)$ yazılabilir. Kabulümüz gereği her $P\in\Omega$ için $T_P(M)$ tamamen dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiş ve $N=\underset{P\in\Omega}{\oplus}T_P(N)=\underset{P\in\Omega}{\oplus}\left(N\cap T_P(M)\right)$ olduğundan Teorem 5.3.9 dan M tamamen dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiştir.

Teorem 5.3.17. Bir Dedekind bölgesi üzerindeki her torsion modül tamamen dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiştir.

İspat: R bir Dedekind bölgesi, M bir torsion $R-$modül ve $N\leq M$ olsun. N torsion olup Teorem 3.10.10 dan $N/Rad(N)$ yarı basittir. Dolayısıyla Teorem 5.1.30 dan $N/Rad(N)$ dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiştir. Sonuç 5.1.19 dan N dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiş olup M tamamen dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiş olur.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde dual sonlu zayıf tümlenmiş modüller genelleştirilerek dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiş modüller tanımlandı. Bu modüllerin Dedekind bölgeleri ve noetherian halkalar üzerindeki yapısı incelendi. Ayrıca tamamen dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiş modüller çalışıldı. Keyfi ya da sonlu sayıda tamamen dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiş modüllerin direkt toplamının tamamen dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiş olması için bazı koşullar verildi.

Tamamen dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiş modüllerin toplamının tamamen dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiş modül olup olmadığı, eğer değilse hangi şartlar altında bunun sağlanacağı araştırılabilir.

Bu tezde kullanılan küçük alt modül kavramından daha genel olan $\delta-$küçüklük kavramı kullanılarak elde edilen radikal yardımıyla genelleştirilmiş dual sonlu $\delta-$tümlenmiş (zayıf tümlenmiş) modüller tanımlanabilir ve benzer özellikler incelenebilir. Ayrıca bu tanımlar yardımıyla dual sonlu yarı mükemmel modüller genelleştirilebilir.

7. KAYNAKLAR

Alizade, R., Pancar, A., 1999. *Homoloji Cebire Giriş*, 1st. ed., Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Samsun.

Alizade, R., Bilhan, G., Smith, P.F., 2001. Modules whose maximal submodules have supplements, *Comm. Algebra*, 29(6), 2389-2405.

Alizade, R., Büyükaşık, E., 2003. Cofinitely weakly supplemented modules, *Comm. Algebra*, 31 (11), 5377-5390.

Alizade, R., Büyükaşık, E., 2008. Extension of weak supplemented modules, *Math. Scand.*, 103 (2), 161-168.

Anderson, F.W., Fuller, K.R., 1992. *Rings and Categories of Modules*, 2nd. ed., New York, Springer-Verlag.

Azumaya, G., 1992. A characterization of semi-perfect rings and modules, In Ring Theory, *Proc. Biennial Ohio-Denison Conference*, World Scientific Publication, Singapore.

Bass, H., 1960. Finitistic dimension and a homological generalization of semi-primary rings, *Trans. Amer. Math. Soc.,* 95, 466-488.

Büyükaşık, E., Lomp, C., 2008. On a recent generalization of semiperfect rings, *Bull. Aust. Math. Soc.*, 78 (2), 317-325.

Büyükaşık, E., 2009. On cofinitely weak supplemented modules, *Arab. J. Sci. Eng. Sec. A Sci.*, 34(1), 159-164.

Byrd, K.A., 1972. Rings whose quasi-injective modules are injective, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 33, 235-240.

Cohn, P.M., 1989. *Algebra*, Vol.2., 2nd. ed., Printed in Great Britain at The Bath Press, Avon.

Clark, J., Lomp, C.,Vajana, N., Wisbauer, R., 2006. *Lifting Modules*, 1st. ed., Birkhauser Verlag Basel, Boston-Berlin.

Facchini, A., 1998. *Module Theory*, 1st. ed., Progress in Mathematics, 167, Birkhauser, Verlag, Basel.

Golan, J., 1971. Quasiperfect Modules, *Quart. J. Math., Oxford Ser.* (2), 22, 173-182.

Harmancı, A., Keskin, D., Smith, P.F., 1999. On $\oplus-$supplemented modules. *Acta. Math. Hungar.*, 83(1-2), 161-169.

Hausen J., Johnson J.A., 1983. A characterization of two classes of Dedekind domains by properties of their modules, *Publ. Math. Debrecen*, 30(1-2), 53-55.

Hungerford, T.W., 1973. *Algebra*, 1st. ed., Springer-Verlag, New York.

Idelhadj, A., Tribak, R., 2003. On some properties of $\oplus-$supplemented modules, *Int. J. Math. Math. Sci*., 69, 4373-4387.

Kasch, F., 1982. *Modules and Rings*, 1st. ed., London Mathematical Society by Academic Press.

Koşan, M.T., 2009. Generalized cofinitely semiperfect modules, *Int. Electron. J. Algebra*, 5, 58-69.

Lomp, C., 1999. On semilocal modules and rings, *Comm. Algebra*, 27(4), 1921-1935.

Matlis, E., 1966. Decomposable modules, *Trans. Amer. Math. Soc*., 125, 147-179.

Mares, E.A., 1963. Semi-perfect modules, *Math. Z.*, 82(4), 347-360.

Mares, E. A., Kasch, F., 1966. Eine Kennzeichhnung semi-perfekter moduln, *Nagoya Math. J*., 27, 525-529.

Mohamed, S.H., Müller, B.J., 1990. *Continuous and Discrete Modules*, 1st. ed., Cambridge University Press, New-York, Sydney.

Özcan, A.Ç., Harmancı, A., Smith, P.F., 2006. Duo Modules, *Glasg. Math. J.* , 48(3), 533-545.

Rudlof, P., 1991. On the structure of couniform and complemented modules, *J. Pure Appl. Algebra*, 74(3), 281-305.

Sharp, R.Y., 2000. *Steps in Commutative Algebra*, 2nd. ed., Cambridge University Press.

Sharpe, D.W., Vamos, P., 1972. *Injective Modules*, 1st. ed., Lectures in Pure Mathematics University of Sheffield, The Great Britain.

Smith P.F., 2000. Finitely generated supplemented modules are amply supplemented, *Arab. J. Sci. Eng. Sect. C Theme Issues*, 25(2), 69-79.

Türkmen, E., 2007. Radikal Tümlenmiş Modüller, Yüksek Lisans Tezi, Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Samsun, 222413.

Wisbauer, R., 1991. *Foundations of Module and Ring Theory*, Revised and Updated English edition, Gordon and Breach, Philadelphia.

Wang, Y., Ding, N., 2006. Generalized supplemented modules, *Taiwanese J. Math.*, 10(6), 1589-1601.

Xue, W., 1996. Characterizations of semiperfect and perfect rings, *Publ. Math.*, 40(1), 115-125.

Zöschinger, H., 1974. Komplementierte moduln über Dedekindringen, *J. Algebra*, 29, 42-56.

Zöschinger, H., 1979. Komplemente für zyklische Moduln über Dedekindringen, *Arch. Math.* 32, 143-148.

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad:	**Figen ERYILMAZ**
Doğum Yeri ve Tarihi:	**Samsun-18.06.1982**
Adres:	**Toplu konut bulvarı, B.Oyumca mah., 5336. sok. 7/B blok, Daire:16 Atakum-Samsun**
E-Posta:	**fyuzbasi@omu.edu.tr**
Lisans:	**Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü (2004)**
YüksekLisans:	**Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı (2007)**

Mesleki Deneyim ve Ödüller:

Araştırma Görevlisi (2005---)