T.C.
SÜLEYMAN DEMİREL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

AYRIK DUHAMEL ÇARPIMI VE BAZI OPERATÖRLERİN SPEKTRAL KATLILIĞI

Tevfik KUNT

Danışman
Doç. Dr. Suna SALTAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
ISPARTA - 2013

TEZ ONAYI

Tevfik KUNT tarafından hazırlanan "**Ayrık Duhamel Çarpımı ve Bazı Operatörlerin Spektral Katlılığı**" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri üyeleri önünde Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak başarı ile savunulmuştur.

Danışman **Doç.Dr. Suna SALTAN**
Süleyman Demirel Üniversitesi

Jüri Üyesi **Doç.Dr. Mehmet GÜRDAL**
Süleyman Demirel Üniversitesi

Jüri Üyesi **Yrd.Doç.Dr. Ayşe Nur GÜNCAN**
Süleyman Demirel Üniversitesi

Enstitü Müdürü **Prof. Dr. Mehmet Cengiz KAYACAN**

TAAHHÜTNAME

Bu tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek tezde yer aldığını beyan ederim.

Tevfik KUNT

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

AYRIK DUHAMEL ÇARPIMI VE BAZI OPERATÖRLERİN SPEKTRAL KATLILIĞI

Tevfik KUNT

Süleyman Demirel Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Suna SALTAN

Bazı sınıf operatörlerin direkt toplamının spektral katını hesaplamak, operatörlerin genel karakteristik özelliklerinin belirlenmesini sağladığından oldukça önemlidir. Tezin amacı, A ve B bazı sınıf iki operatör olmak üzere, literatürde iyi bilinen $\max\{\mu(A), \mu(B)\} \leq \mu(A \oplus B) \leq \mu(A) + \mu(B)$ eşitsizliğinin ne zaman eşitliğe dönüştüğünü araştırmaktır.

Bu sonuca ulaşmak amacıyla $\mu(T|_{X_i} \oplus A) \leq \mu(T|_{X_i}) + \mu(A)$ formülünün doğruluğu ayrık Duhamel çarpımının özellikleri ve Banach cebiri teknikleri kullanılarak hesaplanacaktır. Ayrıca, hesaplamaları yapmak için analiz ve fonksiyonel analizin metodları kullanılacaktır.

Anahtar Kelimeler: Duhamel çarpımı, Ayrık Duhamel çarpımı, spektral katlılık, Ağırlıklı kaydırma operatörü, Direkt toplam, invaryant altuzay.

2013, 35 sayfa

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

DISCRETE DUHAMEL PRODUCT AND SPECTRAL MULTIPLICITIES OF SOME OPERATORS

Tevfik KUNT

Süleyman Demirel University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Suna SALTAN

Computing the spectral multiplicities of direct sum of the some class of operators is very important because it provides identification of the general characteristic properties. The aim of our project is to investigate, two operators A and B as some class, when inequality well-known in the literature $\max\{\mu(A), \mu(B)\} \leq \mu(A \oplus B) \leq \mu(A) + \mu(B)$, is written into an equation.

In order to achieve this result, the accuracy of formula, $\mu(T|_{X_i} \oplus A) \leq \mu(T|_{X_i}) + \mu(A)$, shall be calculated by using the techniques of Banach algebras and properties of discrete Duhamel product. In addition, the analysis and functional analysis methods shall be used for calculation.

Keywords: Duhamel product, Discrete Duhamel product, spectral multiplicities, Weighted shift operators, Direct sum, invariant subspace.

2013, 35 pages

TEŞEKKÜR

Bu araştırma için beni yönlendiren, karşılaştığım zorlukları bilgi ve tecrübesi ile aşmamda yardımcı olan değerli danışman hocam Doç.Dr. Suna SALTAN'a teşekkürlerimi sunarım.

Aynı zamanda maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen aileme ve tüm arkadaşlarıma sonsuz sevgi ve saygılarımı sunarım.

3465-YL1-13 No'lu Proje ile tezimi maddi olarak destekleyen Süleyman Demirel Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Yönetim Birimi Başkanlığı'na teşekkür ederim.

Tevfik KUNT
ISPARTA, 2013

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathcal{B}$	Borel dönüşümü
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$Cyc(A)$	A operatörünün devirli vektörleri
$\mathbb{D}$	Birim disk
$\widehat{f}$	f nin Taylor katsayısı
$H^2(\mathbb{D})$	Birim disk üzerindeki Hardy uzayı
$Hol(\mathbb{D})$	Holomorfik fonksiyonlar uzayı
J	Volterra integral operatörü
$\mathcal{L}(X)$	X deki tüm sınırlı lineer operatörlerin kümesi
$\ell_A^p(\mathbb{D})$	Analitik fonksiyonlar uzayı
$*$	Konvolüsyon çarpımı
$\circledast$	Duhamel çarpımı
$\underset{i}{\tilde{\circledast}}$	Ayrık Duhamel çarpımı
$\mu(A)$	A operatörünün spektral katı

1. GİRİŞ

$\mathbb{C}$ komleks düzlemde $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ birim disk olsun. f ve g, $\mathbb{D}$ birim diskinde iki analitik fonksiyon olmak üzere,

$$(f \circledast g)(z) = \frac{d}{dz}\int_0^z f(z-t)g(t)dt = \int_0^z f'(z-t)g(t)dt + f(0)g(z)$$

ifadesine f ve g fonksiyonlarının Duhamel çarpımı denir (Wigley, 1974).

Duhamel çarpımı son yıllarda operatör teorinin birçok aktüel probleminde uygulamaları vardır. Örneğin, adi diferensiyel denklemler teorisinde, operatörlerin invaryant altuzayının belirlenmesinde, devirli vektörlerin incelenmesinde, operatörlerin direkt toplamının spektral katının hesaplanmasında Duhamel çarpımından yararlanılmıştır.

X Banach uzayı üzerinde tüm sınırlı lineer operatörlerin kümesi $\mathcal{L}(X)$ ile tanımlansın. $A \in \mathcal{L}(X)$ sabitlenmiş bir operatör ve $E \subset X$ olsun. O halde,

$$span\{A^n E : n \geq 0\} = X$$

ise E uzayına A operatörünün devirli altuzayı denir ve A operatörünün devirli altuzaylarının kümesi $Cyc(A)$ ile gösterilir (Abramovich and Aliprantis, 2002). A operatörünün spektral katlılığı ise

$$\mu(A) = \min\{\dim E : E \in Cyc(A)\}$$

şeklinde ifade edilen ∞ veya negatif olmayan tamsayıdır.

Bir operatörün spektral katlılığını bilmek, operatör teorinin problemlerinde ve uygulamalarında oldukça önemlidir. Örneğin, Hilbert uzayında iki normal operatörün (A normal operatör ise $AA^* = A^*A$ dır) spektral katları eşit ise bu iki operatör üniter denktir. Yani $\mu(A) = \mu(B) \Longrightarrow A = \mathcal{U}^{-1}B\mathcal{U} \Longrightarrow A \cong B$ dir. Ayrıca iki operatörün direkt toplamının spektral katının öğrenilmesi, operatörün kendisinin spektral katının öğrenilmesi için önemlidir. Operatör teoriden bilindiği gibi bazı durumlarda bir operatör, iki operatörün direkt toplamına üniter denk olabilir. Örneğin , Hilbert uzayında bir A operatörü $A \cong A_1 \oplus A_2$ şeklinde ifade edilebiliyorsa $A \cong \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$ şeklinde yazılabilir ve işlemler kolaylaşır.

A ve B sınırlı lineer operatörlerinin direkt toplamının spektral katlılığı için,

$$\max\{\mu(A), \mu(B)\} \leq \mu(A \oplus B) \leq \mu(A) + \mu(B)$$

eşitsizliği mevcuttur. Belirli koşullar altında, Nikolski ve öğrencisi Vasjunin tarafından eşitsizliğin birinci kısmının

$$\max\{\mu(A), \mu(B)\} = \mu(A \oplus B)$$

eşitliğe dönüştüğü ifade edilmiştir.

Bu tez çalışmasının amacı yukarıdaki eşitsizliğin sağ tarafının belirli koşullar altında ,

$$\mu(A \oplus B) = \mu(A) + \mu(B)$$

şeklinde ifade edilebildiğini göstermektir. Çalışmamızda ayrık Duhamel çarpımı metodu ve Banach cebiri teknikleri kullanılarak, $T|_{X_i}$ ağırlıklı kaydırma operatörü ve Banach uzayında uygun bir A operatörü için,

$$\mu(T|_{X_i} \oplus A) = 1 + \mu(A)$$

formülünün doğru olduğu ispatlanmıştır.

2. KAYNAK ÖZETLERİ

f ve g analitik fonksiyonları için Duhamel çarpımının tanımı 1974-1975 yıllarında Wigley tarafından

$$(f \circledast g)(z) = \frac{d}{dz}\int_0^z f(z-t)g(t)dt = \int_0^z f'(z-t)g(t)dt + f(0)g(z)$$

şeklinde ifade edilmiştir (Wigley, 1974; 1975).

Duhamel çarpımı, analizin çeşitli problemlerinde birçok uygulamaya sahiptir. Adi diferansiyel denklemler teorisinde ve matematiksel fiziğin sınır değer problemlerinde rol oynar. Son yıllarda Duhamel çarpımının operatörler teorisinin birçok aktüel problemlerinde uygulamaları vardır. Banach cebiri teorisi, operatörlerin invaryant altuzaylarının resmedilmesi, devirli vektörlerin belirlenmesi ve operatörlerin komutantının incelenmesi Duhamel çarpımı metodunun uygulanması ile araştırılmıştır (Bozhinov, 1988; Cartan, 1963; Dimovski, 1990; Gürdal, 2009; Karaev, 2005(a); Karaev, 2005(b); Karaev, 2005(c); Karaev ve Saltan, 2005; Karaev ve Gürdal, 2011).

X Banach uzayı ve $A : X \to X$ lineer sınırlı bir operatör olsun. $span\,\{A^n E : n \geq 0\} = X$ ise, $E \subset X$ uzayına A operatörünün devirli altuzayı denir. A operatörünün spektral katı ise

$$\mu(A) = \min\{\dim E : span\,\{A^n E : n \geq 0\}\}$$

eşitliği ile ifade edilir. Nikolski ve öğrencileri Vasjunin, Solomyak iki operatörün direkt toplamı olarak yazılabilen bazı operatörlerin spektral özelliklerini incelemişlerdir (Nikolski, 1986; 1989; Nikolski ve Vasjunin, 1981; Solomyak, 1988). $A \oplus B$ direkt toplam operatörlerinin spektral katı için,

$$\max\{\mu(A), \mu(B)\} \leq \mu(A \oplus B) \leq \mu(A) + \mu(B)$$

bilinen eşitsizlikten yola çıkan Nikolski belirli koşullar altında

$$\max\{\mu(A), \mu(B)\} = \mu(A \oplus B)$$

olduğunu göstermiştir (Nikolski, 1986). $\mu(A \oplus B) = \mu(A) + \mu(B)$ olduğu problemi ise yenidir ve son yıllarda çalışılmaktadır. Karaev; Karaev ve Gürdal bu eşitliğin mevcut olduğunu gösterirken birim diskteki analitik fonksiyonlar için ifade edilen Duhamel çarpımı metodunu kullanmışlardır (Karaev, 2006; Karaev ve Gürdal, 2011; Karaev, 2012). Saltan ve Gürdal tarafından, $Jf(z) = \int\limits_0^z f(t)dt$ Volterra integral operatörü olmak üzere $J \oplus A$ direkt toplam operatörünün spektral katı için $\mu(J \oplus A) = \mu(J) + \mu(A) = 1 + \mu(A)$ toplam formülünün doğruluğu ispatlanmıştır. İspat metodu, Duhamel çarpımı kullanarak verilen uzayın Banach cebiri olduğunu göstermeye ve banach cebiri tekniklerine dayanır. Bu metod pek çok matematikçi tarafından kullanılmaktadır (Karaev, 2012; Merryfield ve Watson, 1991; Saltan ve Gürdal, 2011; Sz-Nagy ve Foias, 1970).

Bu çalışmadaki esas yöntem ise klasik Duhamel çarpımının genelleştirilmesi olan ayrık Duhamel çarpımı metodunu kullnarak $T|_{X_i}$ kısıtlanmış ağırlıklı kaydırma operatörü ile direkt toplam olarak ifade edilen Q lineer sınırlı operatörünün spektral katı için $\mu(T|_{X_i} \oplus Q) = 1 + \mu(Q)$ ifadesinin doğruluğunu göstermeye dayanır.

3. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, çalışmada kullanılacak olan gerekli bazı kavramlar ve bu kavramlarla ilgili tanım, notasyon ve teoremler verilecektir.

Tanım 3.1. X ve Y iki vektör uzayları olmak üzere $T : X \to Y$ operatörü verilsin. Her $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ve $f, g \in X$ için

$$T(\alpha f + \beta g) = \alpha T(f) + \beta T(g)$$

eşitliği sağlanıyorsa T operatörüne *lineer operatör* denir (Dunford and Schwartz, 1958).

Teorem 3.2. X ve Y normlu uzaylar ve $\mathcal{D}(T) \subset X$ olmak üzere $T : \mathcal{D}(T) \to Y$ lineer operatör olsun. Bu durumda T nin sınırlı olması için gerek ve yeter koşul T nin sürekli olmasıdır (Kreyszig, 1989).

Tanım 3.3. X normlu vektör uzayı olmak üzere X uzayı tam, yani X de alınan her Cauchy dizisi yakınsak ve yakınsadığı değer X in bir elemanı ise X uzayına Banach uzayı denir (Kreyszig, 1989).

Tanım 3.4. X kompleks (veya reel) vektör uzayı olsun. Her $x, y, z \in X$ ve her α kompleks (veya reel) sayısı için X üzerinde aşağıdaki özellikleri sağlayan bir çarpma işlemi varsa bu uzaya *kompleks (reel) cebir* denir.

i) $\alpha(x.y) = (\alpha x).y = x.(\alpha y)$
ii) $x.(y + z) = x.y + x.z$ ve $(x + y).z = x.z + y.z$
iii) $x.(y.z) = (x.y).z$

Eğer X bir cebir ve her $x, y \in X$ için $x.y = y.x$ oluyorsa, X e *değişmeli* veya *komütatif* cebir denir. X in çarpma işlemine göre etkisiz elemanı varsa, yani her $x \in X$ için

$$x.e = e.x = x$$

olacak şekilde $e \in X$ varsa X e *birimli cebir* ve e ye de X in birim elemanı (etkisiz elemanı) denir (Rudin, 1991).

Tanım 3.5. X cebiri üzerinde tanımlanan norm her $x, y \in X$ için

$$\|xy\| \leq \|x\| \, \|y\|$$

eşitsizliğini sağlıyorsa (alt çarpımsallık özelliği) ve X cebirinin birim elemanlı olması halinde,

$$\|e\| = 1$$

ise X e *normlu cebir* denir.

$(X, \|.\|)$ normlu cebiri tam ise bu normlu cebire *Banach cebiri* denir (Rudin, 1991).

Tanım 3.6. X değişmeli bir Banach cebiri ve I, X in lineer alt uzayı olsun. Her $x \in X$ için $xI \subset I$ ise I ya X in *ideali* denir (Meise and Vogt, 1997).

Tanım 3.7. X değişmeli bir Banach cebiri olsun. X in hiçbir ideali tarafından içerilmeyen ve X cebirinden farklı olan I idealine *maksimal ideal* denir (Meise and Vogt, 1997).

Teorem 3.8. **(Weierstrass Yaklaşım Teoremi)** $f(x)$, $[a, b]$ aralığında reel değerli sürekli bir fonksiyon olsun. O zaman $[a, b]$ aralığı üzerinde $f(x)$ e düzgün olarak yakınsayan bir $P_n(x)$ polinomlar dizisi vardır. Diğer bir deyişle keyfi $f \in C[a, b]$ olmak üzere, her $\varepsilon > 0$ için $|f(x) - p(x)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $p(x) \in P_n(x)$ mevcuttur (Stoll, 2000).

Tanım 3.9. X lineer bir uzay ve $S \subset X$ olsun. S nin vektörlerinin lineer kombinasyonlarının cümlesine S nin *lineer hulu veya S nin gereni* denir ve $lin.hullS = spanS$ ile gösterilir (Maddox 1970).

Tanım 3.10. X bir Banach uzayı ve $T : X \to X$ lineer sınırlı bir operatör olsun. $x \in X$ olmak üzere $span\{x, Tx, T^2x, T^3x, ...\} = X$ ise x e T nin *devirli vektörü* denir (Abramovich and Aliprantis, 2002).

Tanım 3.11. (**Devirli Altuzay**) X Banach uzayı ve $T : X \to X$ lineer sınırlı bir operatör olsun. $E \subset X$ olmak üzere

$$span\left\{T^n E : n \geq 0\right\} = X$$

ise E ye T operatörünün devirli altuzayı denir ve T operatörünün devirli altuzaylarının kümesi $Cyc\left(T\right)$ ile gösterilir.

Tanım 3.12.**(Spektral Katlılık)** X Banach uzayı, $T : X \to X$ lineer sınırlı bir operatör ve $E \subset X$ olsun. E, T operatörünün devirli alt uzayı olmak üzere

$$\mu\left(T\right) = \min\left\{\dim E : E \in Cyc\left(T\right)\right\}$$

ifadesine T operatörünün spektral katı denir. $\mu\left(T\right)$ negatif olmayan tamsayı veya ∞ dur. $\mu\left(T\right) = 1$ ise T ya devirli operatör denir.

Örneğin, $X = C\left[0,1\right]$ uzayı, $T = Jf(x) = \int\limits_0^x f(t)dt$ integralleme operatörü ve $M_x f\left(x\right) = xf\left(x\right)$ çarpım operatörü olmak üzere Weierstrass yaklaşım teoreminden

$$span\left\{J^n 1 : n \geq 0\right\} = C\left[0,1\right],$$

$$span\left\{M_x^n 1 : n \geq 0\right\} = C\left[0,1\right]$$

olup $\mu(J) = \mu(M_x) = 1$ dir. Böylece J ve M_x operatörleri devirli operatörlerdir.

Şimdi, direkt toplam olarak yazılabilen iki operatörün spektral katı ile ilgili eşitsizliği ifade edelim:

X, Y Banach uzayı ve $A : X \to Y$, $B : X \to Y$ iki sınırlı operatör olsun. X Banach uzayı üzerindeki sınırlı lineer operatörlerin kümesi $\mathcal{L}\left(X\right)$ olmak üzere, $A \in \mathcal{L}\left(X\right)$ ve $B \in \mathcal{L}\left(Y\right)$ operatörlerinin direkt toplamı $A \oplus B$ ile gösterilir. $x \oplus y \in X \oplus Y$ için,

$$\left(A \oplus B\right)\left(x \oplus y\right) = Ax \oplus By$$

dir. 1986 yılında Nikolski, iki operatörün direkt toplamı olarak ifade edilen operatörün spektral katının $A \oplus B \in \mathcal{L}(X \oplus Y)$ için,

$$\mu(A \oplus B) \leq \mu(A) + \mu(B)$$

eşitsizliğinin sağlandığını göstermiştir (Nikolski, 1986).

Tanım 3.13. (**İnvaryant Altuzay**) T bir operatör ve M bir altuzay olsun. Eğer $TM \subset M$ ise M ye T nin invaryant altuzayı denir. Yani $f \in M$ iken $Tf \subset M$ ise M ye T altında invaryanttır denir. (Kreyszig, 1989).

$\{0\}$ ve H (Hilbert uzay) trivial altuzayları her operatör altında invaryanttır. Analizde çözülmemiş en ünlü problemlerden biri (invaryant altuzay problemi) "sonsuz boyutlu Hilbert uzayı üzerinde her sınırlı operatörün nontrivial invaryant altuzaya" sahip olup olamıyacağı sorusudur.

f vektörü ve T sınırlı lineer operatörü verildiğinde f tarafından üretilen invaryant altuzay

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} \{T^n f\} = span\{T^n f\}$$

altuzayıdır. Eğer

$$M = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{T^n g\} = span\{T^n g\}$$

olacak şekilde g vektörü mevcut ise T nin M invaryant altuzayına devirlidir denir. Eğer

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} \{T^n g\} = span\{T^n g\} = H$$

ise g ye T için devirli vektör denir. Buradan invaryant aluzay problemi tekrar ifade edilebilir. "Hilbert uzay üzerinde her sınırlı lineer operatör sıfırdan başka bir devirli olmayan vektöre sahip midir?"

Tanım 3.14. (**Direkt Toplam**) X bir vektör uzayı, Y ve Z uzayları, X in iki altuzayı olsun. Her $x \in X$ elemanı, $y \in Y$ ve $z \in Z$ olmak üzere

$$x = y + z$$

şeklinde bir tek gösterime sahip ise X vektör uzayı Y ve Z alt uzaylarının direkt toplamıdır denir ve

$$X = Y \oplus Z$$

olarak yazılır. Y ye Z nin (Z ye Y nin) cebirsel tümleyeni denir (Kreyszig, 1989).

Tanım 3.15. (**Shauder Bazı**) X normlu uzayı, her $x \in X$ için,

$$\|x - (\alpha_1 e_1 + ... + \alpha_n e_n)\| \to 0, (n \to \infty)$$

olacak şekilde bir tek (α_n) skaler dizisi var olmak üzere, bir (e_n) dizisi içeriyorsa, (e_n) dizisine, X uzayının Shauder bazı denir.

Tanım 3.16. $S \subset \mathbb{C}$ olmak üzere $f : S \to \mathbb{C}$ kompleks fonksiyon ve $z_0 \in S$ olsun. f kompleks fonksiyonu z_0 noktasının bir

$$\mathbb{D}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$$

komşuluğunun bütün noktalarında türevlenebilir ise f, z_0 *noktasında analitiktir* denir.

Eğer f kompleks fonksiyonu bir S bölgesinin bütün noktalarında analitik ise f fonksiyonuna S *kümesi üzerinde analitiktir* denir. f kompleks fonksiyonu $\mathbb{C}$ nin tüm noktalarında analitik ise f fonksiyonuna *tam fonksiyon* denir (Rudin, 1991).

Teorem 3.17. f fonksiyonu z_0 noktasında analitik ise fonksiyonun her mertebeden türevi de o noktada analitiktir (Rudin, 1991).

Teorem 3.18. f fonksiyonu z_0 noktasında analitik olsun. z_0 noktasının komşuluğundaki z ler için f fonksiyonu

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

Taylor açılımına sahiptir. Bu kuvvet serisi bir $D(z_0, r)$ diski üzerinde mutlak yakınsak ve bu diskin kompakt alt kümeleri üzerinde düzgün yakınsaktır (Rudin, 1987).

Tanım 3.19. $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ birim disk olmak üzere,

$$Hol(\mathbb{D}) = \left\{ f(z) : f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f}(n) z^n \right\}$$

kümesine birim disk üzerinde *tek değerli analitik fonksiyonların (holomorfik fonksiyonların) uzayı* denir. Burada $\widehat{f}(n)$, f fonksiyonunun n. Taylor katsayısıdır ve $\widehat{f}(n) = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$ şeklinde ifade edilir (Lavrent'ev and Shabat, 1973).

Tanım 3.20. $Hol(\mathbb{D})$ birim disk üzerinde holomorfik fonksiyonların uzayı olmak üzere $f, g \in Hol(\mathbb{D})$ için,

$$(f * g)(z) = \int_0^z f(z-t) g(t) dt$$

ifadesine f ve g fonksiyonlarının *konvolüsyon çarpımı* denir (Mikusinski 1956; Krabbe, 1970).

Tanım 3.21. (**Duhamel Çarpımı**) $f, g \in Hol(\mathbb{D})$ için,

$$\begin{aligned} (f \circledast g)(z) &= \frac{d}{dz} \int_0^z f(z-t) g(t) dt \\ &= \int_0^z f'(z-t) g(t) dt + f(0) g(z) \end{aligned}$$

ifadesine f ve g fonksiyonlarının *Duhamel çarpımı* denir (Wigley, 1974).

$f(z) = \sum\limits_{n \geq 0} \widehat{f}(n) z^n$ ve $g(z) = \sum\limits_{n \geq 0} \widehat{g}(n) z^n \in Hol(\mathbb{D})$ iki analitik fonksiyon olmak üzere, klasik Duhamel çarpımı

$$\begin{aligned} (f \circledast g)(z) &= \frac{d}{dz} \int_0^z f(z-t) g(t) dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{n! m!}{(n+m)!} \widehat{f}(n) \widehat{g}(m) z^{n+m}, \end{aligned}$$

şeklinde de ifade edilir. Yani,

$$
\begin{aligned}
(f \circledast g)(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f}(n)\, z^n \circledast \sum_{m=0}^{\infty} \widehat{g}(m)\, z^m \\
&= \frac{d}{dz} \int_0^z \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f}(n)\,(z-t)^n \sum_{m=0}^{\infty} \widehat{g}(m)\, t^m dt \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f}(n) \sum_{m=0}^{\infty} \widehat{g}(m)\, \frac{d}{dz} \int_0^z (z-t)^n t^m dt \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f}(n) \sum_{m=0}^{\infty} \widehat{g}(m) \int_0^z n(z-t)^{n-1} t^m dt
\end{aligned}
$$

bulunur. Bu integralde $(z-t)^{n-1} = u$ ve $t^m dt = dv$ denilip $(n-1)$ kez kısmi integral alınırsa,

$$
(f \circledast g)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{n!m!}{(n+m)!} \widehat{f}(n)\, \widehat{g}(m)\, z^{n+m}
$$

elde edilir. $Hol(\mathbb{D})$ uzayı Duhamel çarpımına göre birimli cebirdir.

Duhamel Çarpımının Özellikleri :

f, g, h analitik fonksiyonlar olmak üzere;

$i)\,(f \circledast g) = (g \circledast f)$

$ii)\,(f \circledast g) \circledast h = f \circledast (g \circledast h)$

$iii) f(z) \equiv 1$ Duhamel çarpımına göre birim elemandır.

$iv) f \circledast (g+h) = (f \circledast g) + (f \circledast h)$.

Tanım 3.22. (**Ayrık Duhamel Çarpımı**) X, $(e_n)_{n \geqslant 0}$ Shauder bazına sahip bir Banach uzayı olsun. $(\lambda_n)_{n \geqslant 0} \subset \mathbb{C}$ sınırlı bir dizi olmak üzere $w_n := \lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_{n-1}$, $w_0 := 1$ şeklinde ifade edilsin.

$$
X_i := span\{e_k : k \geqslant i\}, i = 0, 1, 2, ...,
$$

olmak üzere $x = \sum_{n=i}^{\infty} x_n e_n$, $y = \sum_{n=i}^{\infty} y_n e_n \in X_i$ vektörleri için ayrık Duhamel çarpımı

$$
x \underset{i}{\tilde{\circledast}} y := \sum_{n=i}^{\infty} \sum_{m=i}^{\infty} \frac{w_{n+m-i}}{w_n w_m} x_n y_n e_{n+m-i}.
$$

ifadesine x ve y nin ayrık Duhamel çarpımı (genelleştirilmiş Duhamel çarpımı) denir (Karaev, 2005(a), Karaev and Gürdal, 2011). Ayrık Duhamel çarpımı değişmeli ve birleşmelidir.

Yukarıdaki ifadenin $i = 0$ ve $\lambda_n := \frac{1}{n+1}$, $n \geq 0$ alındığında klasik Duhamel çarpımına karşılık geldiği kolayca görülür.

Şimdi X Banach uzayı üzerinde tanımlanan ağırlıklı kaydırma operatörünün tanımını verelim.

Tanım 3.23. (**Ağırlıklı kaydırma operatörü**) X, $(e_n)_{n\geqslant 0}$ Shauder bazına sahip bir Banach uzayı olsun. $(\lambda_n)_{n\geqslant 0}$ komleks sayıların sınırlı bir dizisi olmak üzere

$$Te_n = \lambda_n e_{n+1},\ n = 0, 1, 2, ...,$$

formülü ile tanımlanan T operatörüne ağırlıklı kaydırma operatörü denir

Tanım 3.24. (H^p **Hardy Uzayı**) $1 \leq p < \infty$ için $\mathbb{D}$ birim diski üzerindeki

$$\|f\|_p = \sup_{0<r<1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|f\left(re^{it}\right)\right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

normu sonlu olacak şekilde tüm analitik f fonksiyonlarının oluşturduğu uzaya yani,

$$H^p(\mathbb{D}) = \left\{ f \in Hol(\mathbb{D}) : \sup_{0<r<1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|f\left(re^{it}\right)\right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty \right\}$$

uzayına H^p Hardy uzayı denir.

$p = 2$ için $H^2(\mathbb{D})$ uzayı ℓ_2 uzayına izomorftur. Yani $H^2(\mathbb{D}) \cong \ell_2$ dir. Böylece, $f \in H^2(\mathbb{D})$ ise $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \widehat{f}(n) z^n$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \|f\|_{H^2} = \|f\|_2 &= \sup_{0<r<1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|f\left(re^{it}\right)\right|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left|\widehat{f}(n)\right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

dir.

Tanım 3.25. $f \in Hol(\mathbb{D})$ olmak üzere,

$$\mathcal{B} : Hol(\mathbb{D}) \to \mathbb{C}[[Z]]$$

$$(\mathcal{B}f)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

ifadesine f nin Borel dönüşümü denir. Burada $\mathbb{C}[[Z]] = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n Z^n : a_n \in \mathbb{C} \right\}$ formal kuvvet serilerinin halkasıdır.

Böylece $f = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n \in Hol(\mathbb{D})$ ve $g = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_m}{m!} z^m \in Hol(\mathbb{D})$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
(f \circledast g)(z) &= \frac{d}{dz} \int_0^z f(z-t)\, g(t)\, dt \\
&= \frac{d}{dz} \int_0^z \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(z-t)^n}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} b_k \frac{t^k}{k!} dt \\
&= \frac{d}{dz} \int_0^z \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_n \frac{(z-t)^n}{n!} b_{n-k} \frac{t^{n-k}}{(n-k)!} dt \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_n b_{n-k} \frac{1}{n!} z^n = f(z)\, g(z)
\end{aligned}$$

dir. Yani Duhamel çarpımı Cauchy çarpımı olarak ifade edilir.

Bu durumda,

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}(f \circledast g)(Z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_n b_{n-k} Z^n \\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n Z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n Z^n \right) \\
&= (\mathcal{B}f)(Z)\, (\mathcal{B}g)(Z)
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir.

Şimdi $A \oplus B$ operatörünün spektral katı için bilinen

$$\max\{\mu(A), \mu(B)\} \leq \mu(A \oplus B) \leq \mu(A) + \mu(B) \tag{3.1}$$

eşitsizliğinin hangi durumda eşitliğe dönüştüğünü araştıralım. (3.1) ifadesinin birinci tarafı Nikolski tarafından verilmiştir (Nikolski, 1986; 1989). $Jf(z) = \int_o^z f(t)\, dt$ Volterra integral operatörü olmak üzere $J \oplus A$ direkt toplam operatörünün spektral katının, operatörlerin spektral katlarının toplamına eşit olduğunu gösteren,

$$\mu\left(J \oplus A\right) \leq \mu\left(J\right) + \mu\left(A\right)$$

formülünün doğruluğunu ispatlayalım. Önce, üzerinde çalışacağımız $C_A^{(m)}\left(\mathbb{D}\right)$ uzayını ifade edelim.

Tanım 3.26. $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ kompleks düzlemde birim disk olmak üzere, $\overline{\mathbb{D}}$ da m. mertebeden türevleri sürekli ve $\mathbb{D}$ de holomorfik olan fonksiyonların uzayını $C_A^{(m)}\left(\mathbb{D}\right)$ ile gösterelim. O halde,

$$\begin{aligned} C_A^{(m)}\left(\mathbb{D}\right) &= C^{(m)}\left(\overline{\mathbb{D}}\right) \cap Hol(\mathbb{D}) \\ &= \left\{f\left(z\right) : f\left(z\right) \in C^{(m)}\left(\overline{\mathbb{D}}\right) \text{ ve } f\left(z\right) \in Hol(\mathbb{D})\right\} \end{aligned}$$

olarak ifade edilir.

$C_A^{(m)}\left(\mathbb{D}\right)$ uzayı,

$$\|f\|_m = \max\left\{\max_{z \in \overline{\mathbb{D}}} |f\left(z\right)|, \max_{z \in \overline{\mathbb{D}}} \left|f'\left(z\right)\right|, ..., \max_{z \in \overline{\mathbb{D}}} \left|f^{(m)}\left(z\right)\right|\right\}$$

normu ile Banach uzayıdır.

$H^2\left(\mathbb{D}\right)$ Hardy uzayı,

$$\begin{aligned} H^2\left(\mathbb{D}\right) &= \left\{f \in Hol\left(\mathbb{D}\right) : f\left(z\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f}\left(n\right) z^n \text{ ve } \sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|f\left(re^{it}\right)\right|^2 dt < \infty\right\} \\ &= \left\{f \in Hol\left(\mathbb{D}\right) : \sum_{n=0}^{\infty} \left|\widehat{f}\left(n\right)\right|^2 < \infty\right\} \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilebilir (Hoffmann, 1962; Duren, 1970).

Böylece $C_A^{(m)}\left(\mathbb{D}\right) \subset H^2\left(\mathbb{D}\right)$ dir ve buradan $\|f\|_{H^2} \leq \|f\|_m$ olarak ifade edilir.

Şimdi Teorem 3.29 un ispatını yaparken kullanacağımız Karaev (2005(a)) ve Karaev, Tuna (2004) tarafından ifade edilen Yardımcı teoremleri verelim.

Yardımcı Teorem 3.27. $f, g \in Hol(\mathbb{D})$ olmak üzere, aşağıdaki ifadeler sağlanır.

a) $f \circledast g = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \widehat{f}\left(k\right) \widehat{g}\left(n-k\right) \dfrac{k!\left(n-k\right)!}{n!} z^n$

b) $f \circledast g = \left(\mathcal{B}f\right)\left(J\right) g = \left(\mathcal{B}g\right)\left(J\right) f$

burada

$(\mathcal{B}f)(J)\,g = \sum\limits_{n\geq 0} n!\widehat{f}(n)\,(J^n g)(z)$
dir.

Yardımcı Teorem 3.28. $f\ ,g \in C_A^{(m)}(\mathbb{D})$ olmak üzere $f \circledast g \in C_A^{(m)}(\mathbb{D})$ dir ve

$$\|f \circledast g\|_m \leq (m+2)\,\|f\|_m\,\|g\|_m$$

eşitsizliği sağlanır. $f \in C_A^{(m)}(\mathbb{D})$ olmak üzere $f \circledast g = 1$ olacak şekilde $g \in C_A^{(m)}(\mathbb{D})$ olması için gerekli ve yeterli koşul $f(0) \neq 0$ olmasıdır.

Yardımcı Teorem 3.28 den $C_A^{(m)}(\mathbb{D})$ uzayının Duhamel çarpımına göre bir Banach cebiri olduğunu söyleyebiliriz. Buradan $\left(C_A^{(m)}(\mathbb{D}), \circledast\right)$ cebirinin maksimal ideali $\left\{f \in C_A^{(m)}(\mathbb{D}) : f(0) = 0\right\}$ şeklinde ifade edilir.

Teorem 3.29. X ayrılabilir Banach uzayı üzerindeki sınırlı lineer operatörlerin cebiri $\mathcal{L}(X)$ olsun. $Jf(z) = \int\limits_0^z f(t)dt$, $C_A^{(m)}(\mathbb{D})$ uzayında integralleme operatörü olmak üzere $A \in \mathcal{L}(X)$ operatörü her $x \in X$ $(x \neq 0)$ için, $\sum_{n\geq 0} \|n!A^n x\|^2 = C_x < +\infty$ koşulunu sağlar ise,

$$\mu(J \oplus A) = \mu(J) + \mu(A) = 1 + \mu(A)$$

dır.

İspat : $J \oplus A$ operatörünün spektral katı için bilinen

$$\max\{\mu(J), \mu(A)\} \leq \mu(J \oplus A) \leq \mu(J) + \mu(A) \tag{3.2}$$

eşitsizliklerini gözönüne alalım.

$\mu(A) = +\infty$ ise, X in sonlu boyutlu devirli altuzayı yoktur. Devirli altuzay sonlu değilse uzay da sonlu boyutlu değildir ve dolayısıyla $\mu(J \oplus A) = \mu(J) + \mu(A)$ olduğu aşikardır.
O halde $\mu(A) = n$ olduğunu kabul edelim. J integralleme operatörünün spektral katı $\mu(J) = 1$ olduğundan, (3.2) eşitsizliği

$$n \leq \mu(J \oplus A) \leq n + 1$$

şeklinde yazılır. Amacımız

$$\mu(J \oplus A) = \mu(J) + \mu(A) = 1 + n$$

olduğunu göstermektir.

Öncelikle $\mu(J \oplus A) = \mu(A) = n$ olduğunu kabul edelim. $\{f_i \oplus x_i\}_{i=1}^{n}$ kümesi $J \oplus A$ operatörünün devirli kümesidir. Yani

$$span\left\{(J \oplus A)^k (f_i \oplus x_i) : i = 1, 2, ..., n; k = \overline{0, \infty}\right\} = C_A^{(m)}(\mathbb{D}) \oplus X$$

dir. Buradan $\{f_i\}_{i=1}^{n} \in Cyc(J)$ olduğu açıkca görülür. Karaev ve Tuna (2004) nın çalışmasından, $f \in Cyc(J)$ olması için gerekli ve yeterli koşulun $f(0) \neq 0$ olduğunu biliyoruz. Bu ifade göz önünde bulundurulduğunda, $f_{i_0}(0) \neq 0$ olacak şekilde $i_0 \in \{1, 2, ..., n\}$ sayısı vardır.

Genelliği bozmadan $i_0 = 1$ alalım, yani $f_1(0) \neq 0$ olsun. Yardımcı teorem 3.28 den, $(C_A^{(m)}(\mathbb{D}), \circledast)$ Banach cebirinde f_1 elemanı Duhamel çarpımına göre tersinebilir olduğundan $F_1 \circledast f_1 = 1$ olacak şekilde $F_1(0) \neq 0$ vardır.
Şimdi aşağıdaki şekilde ifade edilen $M(Z)$ matrisini gözönüne alalım.

$$M(Z) = \begin{pmatrix} F_1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ -f_2 \circledast F_1 & 1 & 0 & ... & 0 \\ -f_3 \circledast F_1 & 0 & 1 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -f_n \circledast F_1 & 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

olmak üzere Yardımcı teorem 3.27 kulanılarak,

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{B}M)(J)\vec{f} &= \begin{pmatrix} (\mathcal{B}F_1)(J) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \mathcal{B}(-f_2 \circledast F_1)(J) & I & 0 & \dots & 0 \\ \mathcal{B}(-f_3 \circledast F_1)(J) & 0 & I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{B}(-f_n \circledast F_1)(J) & 0 & 0 & \dots & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (\mathcal{B}F_1)(J)f_1 \\ (\mathcal{B}(-f_2 \circledast F_1))(J)f_1 + f_2 \\ (\mathcal{B}(-f_3 \circledast F_1))(J)f_1 + f_3 \\ \vdots \\ (\mathcal{B}(-f_n \circledast F_1))(J)f_1 + f_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} F_1 \circledast f_1 \\ (-f_2 \circledast F_1) \circledast f_1 + f_2 \\ (-f_3 \circledast F_1) \circledast f_1 + f_3 \\ \vdots \\ (-f_n \circledast F_1) \circledast f_1 + f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

elde edilir.

$\circledast$-det $(\mathcal{B}M)(0) = (\mathcal{B}F_1)(0) \neq 0$ olduğundan, $\left(C_A^{(m)}(\mathbb{D})\right)^n := C_A^{(m)}(\mathbb{D}) \times \dots \times C_A^{(m)}(\mathbb{D})$ ve $X^n := X \times \dots \times X$ olmak üzere, $(\mathcal{B}F)(J)$ operatörü $\left(C_A^{(m)}(\mathbb{D})\right)^n$ de ve $(\mathcal{B}F)(A)$ operatörü de X^n de Duhamel çarpımına göre tersinebilirdir. Buradan,

$$\{((\mathcal{B}M)(J)f)_i \oplus ((\mathcal{B}M)(A)x)_i\} : i = 1, 2, \dots, n\}$$

kümesinin $J \oplus A$ operatörü için devirli kümesi olduğu görülür. Böylece yeni devirli kümemiz $\{1 \oplus y_1, 0 \oplus y_2, \dots, 0 \oplus y_n\}$ şeklinde olacaktır. Yani

$$span\left\{(J \oplus A)^k(1 \oplus y_1), (J \oplus A)^k(0 \oplus y_2), \dots, (J \oplus A)^k(0 \oplus y_n)\right\} = C_A^{(m)}(\mathbb{D}) \oplus X$$

dir. Bu durumda, her $g \in C_A^{(m)}(\mathbb{D})$ ve her $x \in X$ için,

$$g \oplus x = \lim_{j \to \infty} \sum_{i=1}^{n} p_{j,i}(J \oplus A)(f_i \oplus y_i)$$

olacak şekilde $\{p_{j,i}\}_{i=1}^n$ polinomlar ailesi vardır. Özel olarak, $g = 0$ seçildiğinde,

$$\begin{aligned} 0 \oplus x &= \lim_{j\to\infty} \sum_{i=1}^{n} p_{j,i}(J \oplus A)(f_i \oplus y_i) \\ &= \lim_{j\to\infty} \sum_{i=1}^{n} p_{j,i}(J) f_i \oplus \lim_{j\to\infty} \sum_{i=1}^{n} p_{j,i}(A) y_i \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan $\lim_{j\to\infty} \sum_{i=1}^{n} p_{j,i}(J) f_i = 0$ ve $\lim_{j\to\infty} \sum_{i=1}^{n} p_{j,i}(A) y_i = x$ olduğu görülür.

$\lim_{j\to\infty} \sum_{i=1}^{n} p_{j,1}(J) f_i = 0$ ifadesini açık yazıp düzenlediğimizde

$$\lim_{j\to\infty} (p_{j,1}(J) f_1 + p_{j,2}(J) f_2 + ... + p_{j,k}(J) f_k)$$
$$= \lim_{j\to\infty} (p_{j,1}(J) 1 + p_{j,2}(J) 0 + ... + p_{j,k}(J) 0) = 0$$

elde edilir. Böylece, $\lim_{j\to\infty} p_{j,1}(J) 1 = 0$ değeri, $C_A^{(m)}(\mathbb{D})$ uzayında ve $\lim_{j\to\infty} \sum_{i=1}^{n} p_{j,i}(A) y_i = x$ değeri ise, X uzayında bulunur.

Borel dönüşümün özelliklerinin verildiği Yardımcı teorem 3.27 (b) yi kullanarak $\|p_{j,1}(A) y_1\|$ ifadesini hesaplayalım.

$$p_{j,1} = \mathcal{B}(\mathcal{B}^{-1} p_{j,1})$$

olarak ifade edilebildiğinden,

$$q_{j,1}(z) = (\mathcal{B}^{-1} p_{j,1})(z) = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!} \hat{p}_{j,1}(k) z^k$$

olmak üzere,

$$p_{j,1}(J) 1 = (\mathcal{B} q_{j,1})(J) 1 = q_{j,1} \circledast 1 = q_{j,1}$$

bulunur. Böylece

$$\lim_{j\to\infty} p_{j,1}(J) 1 = \lim_{j\to\infty} q_{j,1} = 0 \text{ değeri, } C_A^{(m)}(\mathbb{D}) \text{ uzayında}$$

olur.

$C_A^{(m)}(\mathbb{D}) \subset H^2(\mathbb{D})$ ifadesinden dolayı $\|f\|_{H^2} \leq \|f\|_m$ olduğunu ve teoremin koşulundan $\sum_{n\geq 0} \|n! A^n x\|^2 = C_x \leq +\infty$ olduğunu biliyoruz. Bu ifadeler göz önünde bulundurulduğunda,

$$\begin{aligned}
\|p_{j,1}Ay_1\|_{H^2} &= \|\mathcal{B}q_{j,1}Ay_1\| \\
&= \left\| \mathcal{B}\left(\sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!}\hat{p}_{j,1}(k)\, A^k y_1 \right) \right\| \\
&= \left\| \left(\sum_{k\geq 0} \hat{p}_{j,1}(k)\, A^k y_1 \right) \right\| \\
&\leq \sum_{k\geq 0} |\hat{p}_{j,1}(k)| \left\| A^k y_1 \right\| \\
&\leq \left(\sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!} \left(|\hat{p}_{j,1}(k)| \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k\geq 0} \left(k! \left\| A^k y_1 \right\| \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= C_{y_1}^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k\geq 0} \|\hat{q}_{j,1}(k)\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= C_{y_1}^{\frac{1}{2}} \|q_{j,1}\|_{H^2(D)} \\
&\leq C_{y_1}^{\frac{1}{2}} \|q_{j,1}\|_m \to 0, \quad (j \to \infty)
\end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Böylece $i = 1$ için $p_{j,1}(A)\, y_1 = 0$ olduğunu hesapladık. Dolayısıyla

$$\lim_{j\to\infty} \sum_{i=2}^{\infty} p_{j,i}(A)\, y_1 = x, X \text{ de}$$

bulunur. x keyfi bir vektör olduğundan $\{y_i\}_{i=2}^{n}$ kümesi A operatörü için devirli kümedir. Yani

$$span\,\{A^n y_i : n \geq 0, i = 2, 3, 4, ...\} = X$$

dir. Buradan A operatörünün spektral katının $\mu(A) \leq n-1$ olduğu görülür.

Bu da $\mu(A) = n$ olması ile çelişir. O halde $\mu(J \oplus A) = \mu(A) = n$ kabulümüz yanlış olup $\mu(J \oplus A) = n+1$ dir. Buradan da

$$\mu(J \oplus A) = \mu(J) + \mu(A) = 1 + n$$

dir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1. Ayrık Duhamel Çarpımları ve Bazı Operatörlerin Spektral Katlılığı

Bu kısımda, bazı operatörlerin direkt toplamlarının spektral katını ayrık Duhamel çarpımı metodunu uygulayarak hesaplayacağız.

X Banach uzayı, $X_i \subset X$ ve T ağırlıklı kaydırma operatörü olmak üzere T operatörünün X_i uzayı üzerinde kısıtlanmış şekli $T|_{X_i}$ için

$$\mu\left(T|_{X_i} \oplus A\right) = 1 + \mu(A)$$

eşitliğinin sağlandığını doğrulayacağız. Burada A, X Banach uzayında bir operatördür.

Hatırlandığı gibi iki analitik fonksiyon $f(z) = \sum\limits_{n \geq 0} \widehat{f}(n) z^n$ ve $g(z) = \sum\limits_{n \geq 0} \widehat{g}(n) z^n \in Hol(\mathbb{D})$ için klasik Duhamel çarpımı

$$\begin{aligned}
(f \circledast g)(z) &= \frac{d}{dz} \int\limits_0^z f(z-t) g(t) dt \\
&= \int\limits_0^z f'(z-t) g(t) dt + f(0) g(z) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{n! m!}{(n+m)!} \widehat{f}(n) \widehat{g}(m) z^{n+m}
\end{aligned} \tag{4.1}$$

dir. (4.1) olarak ifade edilen alışılmış Duhamel çarpımının bir genelleştirilmesini düşünerek, yani ayrık Duhamel çarpımını kullanarak, operatörlerin direkt toplamlarının spektral katını inceleyeceğiz.

X Banach uzayı ve $A \in \mathcal{L}(X)$ olmak üzere $E \subset X$ altuzayı için

$$span\left\{A^n E : n = 0, 1, 2, ...\right\} = X$$

ise E altuzayının A operatörünün devirli altuzayı olduğu ifade edilmişti. A operatörünün spektral katlılığı $\mu(A)$ ise,

$$\mu(A) = \min\left\{\dim E : span\left\{A^n E : n \geq 0\right\} = X\right\}$$

negatif olmayan tamsayı veya sonsuzdur. $A \in \mathcal{L}(X)$ ve $B \in \mathcal{L}(Y)$ operatörlerinin direkt toplam operatörü $A \oplus B$ olmak üzere, $(A \oplus B)(x \oplus y) = Ax \oplus By$,

$x \oplus y \in X \oplus Y$ dir. Operatörlerin direkt toplamının spektral katını ifade eden

$$\mu(A \oplus B) \leq \mu(A) + \mu(B)$$

eşitsizliğini biliyoruz. Burada amacımız $\mu(A \oplus B) = \mu(A) + \mu(B)$ eşitliğini araştırmaktır.

X, $(e_n)_{n \geq 0}$ Shauder bazına sahip bir Banach uzayı olsun. $(\lambda_n)_{n \geq 0} \subset \mathbb{C}$; $\lambda_n \neq 0$ sınırlı bir dizi olmak üzere $w_n := \lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_{n-1}, w_0 := 1$ şeklinde ifade edilsin.

$$X_i := span \{e_k : k = i, i+1, ...\}, i = 0, 1, 2, ...$$

olmak üzere X_i deki $x = \sum\limits_{n=i}^{\infty} x_n e_n$ ve $y = \sum\limits_{n=i}^{\infty} y_n e_n$ $(i = 0, 1, 2, ...)$ vektörleri için ayrık Duhamel çarpımı

$$x \underset{i}{\tilde{\circledast}} y = \sum_{n=i}^{\infty} \sum_{m=i}^{\infty} \frac{w_{n+m-i}}{w_n w_m} x_n y_n e_{n+m-i} \tag{4.2}$$

ile tanımlanır. (4.2) ifadesinde $i = 0$ ve $\lambda_n := \frac{1}{n+1}$, $n \geq 0$ alınırsa özdeşliğin klasik Duhamel çarpımına karşılık geldiği kolayca görülebilir.

T, X üzerinde ağırlıklı kaydırma operatörü olmak üzere

$$Te_n = \lambda_n e_{n+1}, \ n = 0, 1, 2, ...$$

şeklinde ifade edilmektedir. X_i $(i \geq 0)$ altuzayları T uzaylarının invaryant altuzaylarıdır (T-invaryant altuzaylarıdır). Yani $TX_i \subset X_i$, $i \geq 0$ dir. Böylece kısıtlanmış ağırlıklı kaydırma operatörleri $T|_{X_i}$ $(i \geq 0)$, X_i nin iyi tanımlı operatörleridir.

Bu tez çalışmasında ki amacımız, bazı operatörlerin spektral katlılıklarının bulunması ile ilgili olan metodumuzu geliştirmek ve Y Banach uzayı üzerindeki A sınırlı lineer operatörleri için $T|_{X_i} \oplus A$ direkt toplam operatörünün spektral katının araştırılmasıdır. Şimdi Teorem 4.1.4 ve Sonuç 4.1.5 de kullanacağımız genelleştirilmiş Borel dönüşümü, $\ell_A^p(w_n)$ analitik fonksiyonlar uzayı, $\ell^p(w_n)$ sayı dizileri uzayı tanımlarını ve yardımcı teoremleri verelim.

Tanım 4.1.1. $\mathcal{B}_w : X \to \mathbb{C}[[Z]]$ olmak üzere,

$$\mathcal{B}_w\left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n e_n\right) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{w_n} x_n e_n$$

ifadesine genelleştirilmiş Borel dönüşümü denir.

Burada $w_n = \lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_{n-1}$, $n \geq 0$ dır. Ters Borel dönüşümü ise

$$\mathcal{B}_w^{-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n e_n\right) := \sum_{n=0}^{\infty} w_n x_n e_n$$

şeklinde tanımlanır.

Açık olarak $Hol\,(\mathbb{D})$ analitik fonksiyonlar uzayından $\mathbb{C}\,[[Z]]$ formal kuvvet serileri üzerine tanımlanan klasik Borel dönüşümü $\lambda_n = \frac{1}{n+1}$, $n \geq 0$ seçilmesi ile elde edilir.

$\ell_A^p\,(w_n)$ ve $\ell^p\,(w_n)$ uzaylarının tanımlarını verelim.

$w_n \geq 0, n \leq 0$ ve $p \geq 1$ olmak üzere $\ell_A^p\,(w_n)$ analitik fonksiyonlar uzayı

$$\ell_A^p\,(w_n) := \left\{ f \in Hol\,(\mathbb{D}) : \|f\|_{\ell_A^p(w_n)} := \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left|\widehat{f}\,(n)\right|^p w_n^p\right)^{1/p} < +\infty \right\}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\widehat{f}\,(n) := \dfrac{f^{(n)}\,(0)}{n!}$, $f\,(z) = \sum\limits_{n\geq 0}^{\infty} \widehat{f}\,(n)\, z^n$ fonsiyonunun n. Taylor katsayısıdır.

(a) X Banach uzayı üzerinde her sınırlı lineer C operatörü için, $f \in \ell_A^1\,(\|C^n\|)$ olmak üzere

$$f\,(C) \stackrel{def}{=} \sum_{n\geq 0}^{\infty} \widehat{f}\,(n)\, C^n$$

dir. Böylece

$$\|f\,(C)\| = \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f}\,(n)\, C^n \right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left|\widehat{f}\,(n)\right| \|C^n\| = \|f\|_{\ell_A^1(\|C^n\|)}\,.$$

(b) Her $C \in \mathcal{L}\,(X)$ operatörü, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \|C^n\|^q < +\infty$ koşulunu sağlandığında

$$\ell_A^p := \ell_A^p\,(\mathbb{D}) = \left\{ f \in Hol\,(\mathbb{D}) : \|f\|_{\ell_A^p}^p = \sum_{n=0}^{\infty} \left|\widehat{f}\,(n)\right|^p < +\infty \right\}$$

olarak ifade edilir. Burada $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $p \geq 1$ dir. Gerçekten de,

$$
\begin{aligned}
\|f(C)\|_{\mathcal{L}(X)} &= \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f}(n) C^n \right\|_{\mathcal{L}(X)} \\
&\leq \sum_{n=0}^{\infty} \left| \widehat{f}(n) \right| \|C^n\|_{\mathcal{L}(X)} \\
&\leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left| \widehat{f}(n) \right|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \|C^n\|_{\mathcal{L}(X)}^q \right)^{1/q} \\
&= \|f\|_{\ell_A^p} M(C,q)
\end{aligned}
$$

şeklindedir. Burada $M(C,q) > 0$ bir sabittir.

$\{w_n\}_{n\geq 0}$ bir komleks sayı dizisi olmak üzere , $x = \{x_i\}_{i\geq 0}$ dizilerinin uzayı $\ell^p(w_n)$,

$$
\|x\| := \left(\sum_{n\geq 0} |x_n| \, |w_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty, \ p \geq 1 \text{ için}
$$

$$
\|x\| := \sup_{n\geq 0} |x_n| \, |w_n| < +\infty, \ p = +\infty \text{ için}
$$

koşullarını sağlar.

Yardımcı Teorem 4.1.2. X , $(e_n)_{n\geq 0}$ Shauder bazına sahip bir Banach uzayı olsun. $x, \ y \in X_i = span\{e_n : n = i, i+1, ...\}, \ i \geq 0$ uzayının iki elemanı $Te_n = \lambda_n e_{n+1}, \ \lambda_n \neq 0, \ n \geq 0$, X üzerinde sınırlı $(\lambda_n)_{n\geq 0}$ dizisine sahip sürekli ağırlıklı kaydırma operatörü olmak üzere

$$
x \underset{i}{\tilde{\circledast}} y = \sum_{n,m\geq i} x_n y_m \frac{w_{n+m-i}}{w_n w_m} e_{n+m-i} = (\mathcal{B}_w x) \left(T|_{X_i} \right) y = (\mathcal{B}_w g) \left(T|_{X_i} \right) x \tag{4.3}
$$

dir. Burada $T|_{X_i}$ kısıtlanmış ağırlıklı kaydırma operatörü ve

$$
(\mathcal{B}_w x) \left(T|_{X_i} \right) y = \sum_{n=i}^{\infty} \frac{1}{w_n} x_n \left(T|_{X_i} \right)^n y. \tag{4.4}
$$

dir.

Yardımcı Teorem 4.1.3. X, $p \geqslant 1$ olmak üzere ℓ^p de gömülü sürekli $(e_n)_{n\geq 0}$ Shauder bazına sahip bir Banach uzayı olsun. $Te_n = \lambda_n e_{n+1}$, $n \geq 0$, X üzerinde sürekli ağırlıklı kaydırma operatörü için $w_n = \lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_{n-1}$, $w_0 := 1$ ve $i \geqslant 1$, $N \geqslant i$ olmak üzere,

$$
\sum_{n,m\geq N} \left| \frac{w_{n+m-i}}{w_n w_m} \right|^q, p > 1 \text{ için}
$$

ve

$$\sum_{n,m\geq N}\left|\frac{w_{n+m-i}}{w_n w_m}\right|, p=1 \text{ için}$$

dir. Burada $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ dir. Her $n,m\geq i$ ve $M_i>0$ için $\|e_{n+m-1}\|\leq M_i\|e_n\|\|e_m\|$ olduğu kabul edilirse,

(a) Her $x,y\in X_i$ ve $C_i>0$

$$\left\|x\underset{i}{\tilde{\circledast}}y\right\|_{X_i}\leq C_i\|x\|_{X_i}\|y\|_{X_i} \tag{4.5}$$

dir. Yani $\left(X_i,\underset{i}{\tilde{\circledast}}\right)$ birim elemanı w_ie_i olan birimli Banach cebiridir.

(b) $x\in X_i$ için $\underset{i}{\tilde{\circledast}}$-tersinebilir olması için gerekli ve yeterli koşul $x_i\neq 0$ olmasıdır.

Teorem 4.1.4. X, ℓ^p de gömülü $(e_n)_{n\geq 0}$ Shauder bazına sahip Banach uzayı olsun. $p\geqslant 1$, $Te_n=\lambda_n e_{n+1}$, $n\geq 0$ X uzayı üzerindeki ağırlıklı kaydırma operatörü olmak üzere $w_n=\lambda_0,\lambda_1,...,\lambda_{n-1}$, $w_0:=1$ ve $i\geqslant 1$, $N\geqslant i$ tamsayısı için,

$$\sum_{n,m\geq N}\left|\frac{w_{n+m-i}}{w_n w_m}\right|^q, p>1 \tag{4.6}$$

ve

$$\sum_{n,m\geq N}\left|\frac{w_{n+m-i}}{w_n w_m}\right|, p=1 \tag{4.7}$$

koşulları sağlansın. Her $n,m\geq i$ ve $M_i>0$ için $\|e_{n+m-1}\|\underset{q}{\leq} M_i\|e_n\|\|e_m\|$ dir. Y Banach uzayı olmak üzere $Q:Y\to Y$, $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\|Q^k\|}{|w_k|}\right)^q<+\infty$ koşulunu sağlayan bir operatör olsun. Buna göre

$$\mu(T|_{X_i}\oplus Q)\leq\mu(T|_{X_i})+\mu(Q)=1+\mu(Q)$$

dur.

İspat: İlk olarak, $\mu(T|_{X_i})=1$ olduğundan $T|_{X_i}$ kısıtlanmış operatörünün her $i\geqslant 1$ için devirli operatör olduğunu söyleyebiliriz. Diğer taraftan, $T|_{X_i}\oplus Q$

operatörünün spektral katı ile ilgili

$$\max\left\{\mu(T|_{X_i}),\mu(Q)\right\}\leq\mu(T|_{X_i}\oplus Q)\leq\mu(T|_{X_i})+\mu(Q) \tag{4.8}$$

eşitsizliğini biliyoruz. $\mu(Q)=+\infty$ ise , Y nin sonlu boyutlu devirli altuzayı yoktur ve dolayısıyla

$$\begin{aligned}\mu(T|_{X_i}\oplus Q) &= \mu(T|_{X_i})+\mu(Q)\\ &= 1+\mu(Q)\end{aligned}$$

dur. $\mu(Q)=n<+\infty$ olduğunu kabul edelim. $\mu(T|_{X_i})=1$ olduğundan (4.8) eşitsizliği,

$$n\leq\mu(T|_{X_i}\oplus Q)\leq n+1$$

şeklinde yazılır.

Teoremin ispatı için çelişki yöntemini kullanalım. Yani, $\mu(T|_{X_i}\oplus Q)\neq n+1$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\mu(T|_{X_i}\oplus Q)<n+1$ veya $\mu(T|_{X_i}\oplus Q)=\mu(Q)=n$ olur. $T|_{X_i}\oplus Q$ operatörü için n-boyutlu devirli altuzayın kümesi $\left\{x^{(1)}\oplus y^{(1)},x^{(2)}\oplus y^{(2)},...,x^{(n)}\oplus y^{(n)}\right\}$ olsun. Böylece $\left\{x^{(1)},x^{(2)},...,x^{(n)}\right\}$ kümesi $T|_{X_i}$ kısıtlanmış ağırlıklı kaydırma operatörünün devirli altuzay kümesidir.

Yardımcı Teorem 4.1.3 ü gözönünde bulundurduğumuzda (4.6) ve (4.7) koşulları altında $\left(X_i,\underset{i}{\tilde{\circledast}}\right)$ bir Banach cebiridir. Böylece her $x\in X_i$ için "ayrık Duhamel operatörü" $\mathcal{D}_x$ olmak üzere $y\in X$ için, $\mathcal{D}_xy:=x\underset{i}{\tilde{\circledast}}y$, $y\in X_i$, şeklinde ifade edilir ve (4.5) eşitsizliği $\|\mathcal{D}_x\|\leq C_i\|x\|_{X_i}$ olur. Diğer taraftan (4.2) eşitliği $m\geq 0$ için,

$$(T|_{X_i})^m y=w_{i+m}e_{i+m}\underset{i}{\tilde{\circledast}}y \tag{4.9}$$

olduğunu gösterir. O halde

$$span\left\{(T|_{X_i})^m y:m\geq 0\right\}=clos\mathcal{D}_y span\left\{w_{i+m}e_{i+m}:m\geq 0\right\}$$

dır. Yani $y\in Cyc\,(T|_{X_i})$ olması için gerekli ve yeterli koşul $\overline{\mathcal{D}_yX_i}=X_i$ olmasıdır. Bu durumda $\overline{\mathcal{D}_yX_i}=X_i$ olması için gerekli ve yeterli koşulun $y_i\neq 0$ olduğunu ispatlamak zor olmayacaktır. Yani y, $\left(X_i, \underset{i}{\tilde{\circledast}}\right)$ Banach cebirinin tersinebilir bir elemanı olup bu da ayrık Duhamel operatörü $\mathcal{D}_y$ nin tersinebilirliğine karşılık gelir. Böylece $\left\{x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(n)}\right\}$ devirli kümesi için , $x_i^{(i_0)} \neq 0$ özelliğini sağlayan $i_0 \in \{1, ..., n\}$ sayısı vardır. Genel olarak $i_0 = 1$ olduğunda $x_i^{(1)} \neq 0$ dır. Yukarıda bahsettiğimiz koşullar altında $x^{(1)}$, $\left(X_i, \underset{i}{\tilde{\circledast}}\right)$ de tersinebilirdir. Böylece $\left(X_i, \underset{i}{\tilde{\circledast}}\right)$ Banach cebirinde $z^{(1)} \underset{i}{\tilde{\circledast}} x^{(1)} = w_i e_i$ olacak şekilde $z^{(1)}$ elemanı mevcuttur. $\left(z^{(1)} \underset{i}{\tilde{\circledast}} x^{(1)}\right)_i = z_i^{(1)} x_i^{(1)}$ olduğundan $z_i^{(1)} \neq 0$ dır. Bu durumda M matrisini gözönünde bulundurup, Yardımcı Teorem 4.1.1 deki (4.3) ve (4.4) eşitliklerini ve (4.9) ifadesini kullanarak, aşağıdaki ifadeleri elde ederiz.

$$M = \begin{pmatrix} z^{(1)} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -x^{(2)} \underset{i}{\tilde{\circledast}} z^{(1)} & w_i e_i & 0 & \dots & 0 \\ -x^{(3)} \underset{i}{\tilde{\circledast}} z^{(1)} & 0 & w_i e_i & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -x^{(n)} \underset{i}{\tilde{\circledast}} z^{(1)} & 0 & 0 & \dots & w_i e_i \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
\left(\mathcal{B}_w M\right)\left(T|_{X_i}\right)\begin{pmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \\ x^{(3)} \\ \vdots \\ x^{(n)} \end{pmatrix}
&= \begin{pmatrix}
\left(\mathcal{B}_w z^{(1)}\right)\left(T|_{X_i}\right) & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\left(\mathcal{B}_w\left(-x^{(2)}\underset{i}{\tilde{\circledast}}z^{(1)}\right)\right)\left(T|_{X_i}\right) & I_{X_i} & 0 & \dots & 0 \\
\left(\mathcal{B}_w\left(-x^{(3)}\underset{i}{\tilde{\circledast}}z^{(1)}\right)\right)\left(T|_{X_i}\right) & 0 & I_{X_i} & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\left(\mathcal{B}_w\left(-x^{(n)}\underset{i}{\tilde{\circledast}}z^{(1)}\right)\right)\left(T|_{X_i}\right) & 0 & 0 & \dots & I_{X_i}
\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \\ x^{(3)} \\ \vdots \\ x^{(n)} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}
\left(\mathcal{B}_w z^{(1)}\right)\left(T|_{X_i}\right)x^{(1)} \\
\left(\mathcal{B}_w\left(-x^{(2)}\underset{i}{\tilde{\circledast}}z^{(1)}\right)\right)\left(T|_{X_i}\right)x^{(1)} + x^{(2)} \\
\left(\mathcal{B}_w\left(-x^{(3)}\underset{i}{\tilde{\circledast}}z^{(1)}\right)\right)\left(T|_{X_i}\right)x^{(1)} + x^{(3)} \\
\vdots \\
\left(\mathcal{B}_w\left(-x^{(n)}\underset{i}{\tilde{\circledast}}z^{(1)}\right)\right)\left(T|_{X_i}\right)x^{(1)} + x^{(n)}
\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}
x^{(1)}\underset{i}{\tilde{\circledast}}z^{(1)} \\
x^{(1)}\underset{i}{\tilde{\circledast}}\left(-x^{(2)}\underset{i}{\tilde{\circledast}}z^{(1)}\right) + x^{(2)} \\
x^{(1)}\underset{i}{\tilde{\circledast}}\left(-x^{(3)}\underset{i}{\tilde{\circledast}}z^{(1)}\right) + x^{(3)} \\
\vdots \\
x^{(1)}\underset{i}{\tilde{\circledast}}\left(-x^{(n)}\underset{i}{\tilde{\circledast}}z^{(1)}\right) + x^{(n)}
\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}
w_i e_i \\
-x^{(2)}\underset{i}{\tilde{\circledast}}\left(x^{(1)}\underset{i}{\tilde{\circledast}}z^{(1)}\right) + x^{(2)} \\
-x^{(3)}\underset{i}{\tilde{\circledast}}\left(x^{(1)}\underset{i}{\tilde{\circledast}}z^{(1)}\right) + x^{(3)} \\
\vdots \\
-x^{(n)}\underset{i}{\tilde{\circledast}}\left(x^{(1)}\underset{i}{\tilde{\circledast}}z^{(1)}\right) + x^{(n)}
\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}
w_i e_i \\
-x^{(2)}\underset{i}{\tilde{\circledast}}w_i e_i + x^{(2)} \\
-x^{(3)}\underset{i}{\tilde{\circledast}}w_i e_i + x^{(3)} \\
\vdots \\
-x^{(n)}\underset{i}{\tilde{\circledast}}w_i e_i + x^{(n)}
\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$= \begin{pmatrix} w_i e_i \\ -x^{(2)} + x^{(2)} \\ -x^{(3)} + x^{(3)} \\ \vdots \\ -x^{(n)} + x^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_i e_i \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

dir. Böylece

$$(\mathcal{B}_w M)\left(T|_{X_i}\right) \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \\ x^{(3)} \\ \vdots \\ x^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_i e_i \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

olup buradan da

$$\mathcal{B}_w M = \begin{pmatrix} \mathcal{B}_w z^{(1)} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \mathcal{B}_w \left(-x^{(2)} \underset{i}{\tilde{\circledast}} z^{(1)}\right) & e_i & 0 & \dots & 0 \\ \mathcal{B}_w \left(-x^{(3)} \underset{i}{\tilde{\circledast}} z^{(1)}\right) & 0 & e_i & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{B}_w \left(-x^{(n)} \underset{i}{\tilde{\circledast}} z^{(1)}\right) & 0 & 0 & \dots & e_i \end{pmatrix}$$

elde edilir.

$$\underset{i}{\tilde{\circledast}} - \det (B_w M) = \mathcal{B}_w z^{(1)} \underset{i}{\tilde{\circledast}} e_i \underset{i}{\tilde{\circledast}} \dots \underset{i}{\tilde{\circledast}} e_i = \frac{1}{w_i^{n-1}} \mathcal{B}_w z^{(1)}$$

böylece $\left(\underset{i}{\tilde{\circledast}} - \det (\mathcal{B}_w M)\right)_i = \frac{1}{w_i^{n-1}} \frac{1}{w_i} z_i^{(1)} = \frac{1}{w_i^n} z^{(1)} \neq 0$ olur. $(\mathcal{B}_w M)\left(T|_{X_i}\right)$ ve $(\mathcal{B}_w M)(Q)$ sırasıyla $X^n := \underbrace{X * X * \dots * X}_{n}$ ve $Y^n := \underbrace{Y * Y * \dots * Y}_{n}$ uzaylarında tersinebilirdir. Karaev'in 2012 deki çalışmasında elde ettiği sonuçlara göre

$$\left\{ \left((\mathcal{B}_w M)\left(T|_{X_i}\right) x \right)_j \oplus \left((\mathcal{B}_w M)(Q)\, y \right)_j : j = 1, 2, \dots, n \right\}$$

kümesi $T|_{X_i} \oplus Q$ operatörü için devirli altuzay kümesidir. Böylece yeni devirli altuzay kümesi $\{w_i e_i \oplus \bar{y}_1, 0 \oplus \bar{y}_2, \dots, 0 \oplus \bar{y}_n\}$ şeklinde olacaktır. Bu nedenle her $y \in Y$ için aşağıdaki özellikleri sağlayan $\{P_{m,j}\}_{j=1}^{n}$ bir vektör polinomları ailesi vardır.

$$\lim_{m\to\infty} P_{m,1}\left(T|_{X_i}\right) w_i e_i = 0, X_i \text{ uzayında} \tag{4.10}$$

ve

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{j=i}^{n} P_{m,j}(Q)\,\bar{y}_j = y, Y \text{ uzayında} \tag{4.11}$$

$q_{m,1}$ ifadesini,

$$q_{m,1} := \mathcal{B}_w^{-1} P_{m,1} = \sum_{k\geq 0} w_k \left(P_{m,1}\right)_k e_k$$

şeklinde yazabiliriz. Açıkca görülür ki $P_{m,1}\left(T|_{X_i}\right) w_i e_i = \sum\limits_{k\geq 0} w_k \left(P_{m,1}\right)_k e_k = q_{m,1}$ dir. (4.9) daki form ile X uzayında $\lim\limits_{m\to\infty} q_{m,1} = 0$ yazılabilir.

$$\sum_{k=i}^{\infty} \left(\frac{\left\|Q^k\right\|}{|w_k|}\right)^q = C < +\infty$$

koşulu gözönünde bulundurulursa

$$\begin{aligned}
\left\|P_{m,1}(Q)\right\|_{\mathcal{L}(Y)} &= \left\|\sum_{k\geq 0} \left(P_{m,1}\right)_k Q^k\right\|_{\mathcal{L}(Y)} \\
&\leq \sum_{k\geq 0} \left|\left(P_{m,1}\right)_k\right| \left\|Q^k\right\|_{\mathcal{L}(Y)} \\
&= \sum_{k\geq 0} |w_k| \left|\left(P_{m,1}\right)_k\right| \frac{1}{|w_k|} \left\|Q^k\right\|_{\mathcal{L}(Y)} \\
&\leq \left(\sum_{k\geq 0} \left|w_k \left(P_{m,1}\right)_k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k\geq 0} \left(\frac{\left\|Q^k\right\|_{\mathcal{L}(Y)}}{|w_k|}\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= C \left\|q_{m,1}\right\|_{\ell^p}
\end{aligned}$$

elde edilir. $X \subset \ell^p$ olduğundan, $\left\|q_{m,1}\right\|_{\ell^p} \leq \tilde{C} \left\|q_{m,1}\right\|_X$ ve böylece

$$\left\|q_{m,1}(Q)\right\|_{\mathcal{L}(Y)} \leq C\tilde{C} \left\|q_{m,1}\right\|_X$$

olur. X uzayında $q_{m,1} \to 0$ $(m \to \infty)$ olduğundan, bu eşitsizlikten $\lim\limits_{m\to\infty} q_{m,1}(Q) \rightrightarrows 0$ elde edilir ve böylece $\lim\limits_{m\to\infty} q_{m,1}(Q)\,\bar{y}_1 = 0$ dır. Sonuç olarak (4.10) eşitliğinden

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{j=2} P_{m,j}(Q)\,\bar{y}_j = y$$

sonucunu görmek kolaydır. $y \in Y$ keyfi olduğundan bu eşitlik bize $\{\bar{y}_2, \bar{y}_3, ..., \bar{y}_n\} \in Cyc(Q)$ sonucunu verir ve böylece $\mu(Q) \leq n-1$ elde edilir. Bu da bizim $\mu(Q) = n$ kabulümüzle çelişir. Buradan $\mu(T|_{X_i} \oplus Q) = 1 + n$ dir. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Sonuç 4.1.5. J operatörü $\ell_A^p(\mathbb{D})$, $1 \leq p < \infty$, uzayında $Jf(z) = \int\limits_0^z f(t)\,dt$ ile tanımlanan Volterra integral operatörü ve Q operatörü

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(k! \left\|Q^k\right\|\right)^q < +\infty,\ p > 1$$

ve

$$\left\|Q^k\right\| = O\left(\frac{1}{k!}\right), \ p = 1$$

koşullarını sağlayan Y ayrılabilir Banach uzayı üzerinde sınırlı operatör olsun. Burada $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ dir. O zaman

$$\mu(J \oplus Q) = 1 + \mu\left(Q\right)$$

dur.

Bu sonucu ispatlamak için Teorem 4.1.4 de $X = \ell_A^p$, $\lambda_n = \frac{1}{n+1}$ $(n \geq 0)$, $e_n = z^n$ $\left(n \geq 0\right)$, $i = 0$, yazmak yeterlidir.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Hazırlanan bu yüksek lisans tez çalışmasında, operatörlerin direkt toplamının spektral katını hesaplamak, operatörlerin genel karakteristik özelliklerinin belirlenmesini sağladığından operatörler teorisinin ve fonksiyonlar teorisinin aktif ve rekabetçi konuları arasında yer almaktadır. Az sayıda çalışmanın oluşu, tez sonuçlarını literatür ve paydaşları için oldukça önemli hale getirmektedir. Bu yüzden, bu çalışmada analiz ve fonksiyonel analiz metotların karşılaştırılması ve özelliklerin ortaya çıkartılması literatüre büyük ölçüde katkı sağlayacaktır. $T|_{X_i} \oplus Q$ direkt toplam operatörlerinin spektral katı için ifade edilen

$$\mu(T|_{X_i} \oplus Q) = \mu(T|_{X_i}) + \mu\,(Q)$$

formülünün doğruluğu ayrık Duhamel çarpımının özellikleri ve Banach cebiri teknikleri kullanılarak hesaplanmıştır. Bahsedilen bu problemin çözümü bazı sınıf operatörlerin direkt toplamı üzerine çalışan birçok matematikçi tarafından kullanılabileceği gibi, diğer bilimlerde ortaya çıkan operatörlerle ilgili problemlerin çözümlerinde de yardımcı olacaktır. Diğer taraftan ülkemizde bu konuda yapılan çalışmalar sınırlı kaldığı için tez kapsamında, bu konuda uluslararası konferanslarda ve dergilerde yayınlanabilecek makaleler ile ülkemizin adının duyurulmasına katkı sağlanacaktır.

KAYNAKLAR

Abramovich, Y. A., Aliprantis, C. D., 2002. An Invitation to Operator Theory. American Mathematical Society. 530s. United States of America.

Bozhinov N., 1988. Convolutional Representations of Commutants and Multipliers, Sofia.

Cartan H., 1963. Elementary Theory of Analytic Functions of One or Several Complex Variables, Paris.

Dimovski I., 1990.Convolutional calculus, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Dunford, N., Schwartz, J.T., 1958. Linear Operators. Part I: General Theory, Springer Verlag, New York.

Duren, P. L., 1970. Theory of H^p Space, Academic Press, New York.

Gürdal M., 2009. Descripton of extended elgenvalues and extended eigenvectors of integration operator on the Wiener algebra, Expositiones Mathematicae 27, 153-160.

Hoffmann, K., 1962. Banach Space of Analytic Functions, Prentice-Halli Englewood Cliffs, NJ.

Karaev, M.T., Tuna, H., 2004. Description of Maximal Ideal Space of Some Banach Algebra with Multiplication as Duhamel Product. Complex-Variables: Theory and Application, 49(6), 449-457.

Karaev, M.T., 2005(a). Some Applications of the Duhamel Product. Journal of Mathematical Sciences, 129 (4), 4009-4017.

Karaev M.T., 2005(b). Invariant subspaces, cyclic vectors, commutant and extended eigenvectors of some convolution operators. Methods Functional Analysis Topology 11 (1) , 48-59

Karaev M.T., 2005(c). On some applications of the ordinary and extended Duhamel products, Siberian Mathematical Journal 46 (3), 431-442.

Karaev M.T., and Saltan S., 2005. A Banach algebra structure for the Wiener algebra $W(\mathbb{D})$ of the disc, Complex Variables Theory and Applications 50 (4), 299-305

Karaev M.T., 2006. On the spectral multiplicity of a direct sum of operators, Colloquium Mathematicum 104 (1), 105-115.

Karaev M.T., Gürdal M. and Saltan S., 2011. Some applications of Banach algebra techniques, Mathematische Nachrichten, 284 (13), 1678-1689.

Karaev M.T., 2012. Domination conditions and spectral multiplicity of operators, Acta Mathematica Hungarica, 134 $(1-2)$ (2012), 79-98.

Krabbe, G., 1970. Operational Calculus. Springer Verlag, 349s. New York.

Kreyszig, E., 1989. Introductory Functional Analysis with Applications. Wiley Clasics Library Edition, 688s. New York.

Lavrent'ev, M.A., Shabat, B.V., 1973. Methods of the Theory of Functions of Complex Variable. Nauka, 736s. Moscow (in Russia).

Maddox, I.J., 1970. Elements of Functional Analysis. Cambridge University Press, 208s. New York.

Merryfield K.G. and Watson S., 1991. A local algebra structure for H^p of the polydisc, Colloquium Mathematicum. 62 (1), 73-79.

Meise, R., Vogt, D., 1997. Introduction to Functional Analysis. Oxford University Press, 437s. New York.

Mikusinski, J., 1956. Operational Calculus. Pergemon Press, 495s. Oxford Warszawa.

Nikolski N. K., and Vasjunin V. I., 1981. Control subspaces of minimal dimension. Elementary introduction. Discotheca (Russian), Zap, Nauchn. Smin LOMH 113, 41-75.

Nikolski N. K., 1986. Treatise on the Shift Operator, Springer-Verlag, Berlin.

Nikolski N. K., 1989. Multicyclicity phenomenon I. An introduction and maxi formulas, Oper. Theory: Advances and Application 42, 9-57.

Rudin, W., 1991. Functional Analysis. McGraw-Hill, 423s. New York.

Saltan S., and Gürdal M., 2011. Spectral multiplicities of some operators, Complex Variables and Elliptic Equatins, 56 (6), 513-520.

Solomyak B. M., 1988. Multipliciy of spectrum, calculus and multiplication operators, Siberian. Mathematical. Journal, 29, 167-175

Stoll, M., 2000. Introduction to Real Analysis. Addison Wesley Longman, 550s. New York.

Sz.-Nagy B. and Foias C., 1970. Harmonic analysis of operators on Hilbert space, North Holland, New York.

Wigley, N.M., 1974. The Duhamel Product of Analytic Functions. Duke Mathematical Journal, 41, 211-217.

Wigley N.M., 1975. A Banach algebra structure for H^p, Canadian Mathematical Bulletin, 18, 597-603.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	:	Tevfik KUNT
Doğum Yeri ve Yılı	:	SENİRKENT, 1982
Medeni Hali	:	Bekar
Yabancı Dili	:	İngilizce
E-posta	:	tevfik.kunt@gmail.com.tr

Eğitim Durumu

Lise	:	Gürkan Süper Lisesi, 1996-2000
Lisans	:	Süleyman Demirel Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü, 2001-2005
Yüksek Lisans	:	Süleyman Demirel Üniversitesi, 2011-2013

Yayınları

Saltan, S., Kunt, T., 2013. Discrete Duhamel Product, Restricted Weighted Shift Operators and Related Problems. 1st International Western Balkans Conference of Mathematical Sciences, 29 May-02 June, Elbasan, Albania 117 – 119.