T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI VEKTÖR-DEĞERLİ ORLICZ DİZİ UZAYLARI ÜZERİNDEKİ OPERATÖRLER

Ali Kemal ALAGÖZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

MALATYA
Ocak 2013

Tezin Başlığı: Bazı Vektör-Değerli Orlicz Dizi Uzayları Üzerindeki Operatörler

Tezi Hazırlayan: Ali Kemal ALAGÖZ

Sınav Tarihi: 11 Ocak 2013

Yukarıda adı geçen tez, jürimizce değerlendirilerek Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Sınav Jürisi Üyeleri (ilk isim jüri başkanı, ikinci isim tez danışmanı)

Prof. Dr. Hüsamettin ÇOŞKUN (İnönü Üniv.) ____________________

Yrd. Doç. Dr. Murat CANDAN (İnönü Üniv.) ____________________

Yrd. Doç. Dr. M. Kemal ÖZDEMİR (İnönü Üniv.) ____________________

İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Onayı

____

Prof.Dr. Mehmet ALPASLAN

Enstitü Müdürü

Anneme, Babama, Kardeşlerime

ve Zamanından Önce Yitirdiklerime ...

ONUR SÖZÜ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum "*Bazı Vektör-Değerli Orlicz Dizi Uzayları Üzerindeki Operatörler*" başlıklı bu çalışmamın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığını ve yararlandığım bütün kaynakların hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Ali Kemal ALAGÖZ

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

BAZI VEKTÖR-DEĞERLİ ORLICZ DİZİ UZAYLARI ÜZERİNDEKİ OPERATÖRLER

Ali Kemal ALAGÖZ

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

78+iv sayfa

2013

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Murat CANDAN

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır. Giriş bölümünde; Orlicz dizi uzaylarının gelişim süreci özetlendi.

İkinci bölümde; sonraki bölümlerde kullanılacak temel tanım, kavram, teorem ve örnekler verildi.

Üçüncü bölümde; en genel vektör değerli dizi uzayı olan $s\left(X\right)$ tanıtıldı ve bazı tanım ve önermeler verildi. Ayrıca, vektör değerli dizi uzaylarının Köthe-Toeplitz dualleri, normalliği, monotonluğu, perfectliği tanıtıldı ve bunlarla ilgili önerme, teorem ve sonuçlar verildi.

Dördüncü bölümde; skaler değerli Orlicz dizi uzayları ve vektör değerli Orlicz dizi uzayları verildi ve bu uzayların bazı özellikleri incelendi.

Son bölümde; vektör değerli Orlicz dizi uzayları üzerine bazı sonuçlar verildi ve bir baz ile aynı işleve sahip bir teorem ispatlandı. Ayrıca, bu uzaylar üzerinde tanımlı operatörleri karakterize eden önemli bir teorem ispatlandı ve bu teoremin sonuçları örneklerle incelendi.

ANAHTAR KELİMELER: Vektör değerli dizi uzayları, Orlicz dizi uzayları, Orlicz fonksiyonu, Operatörlerin karakterizasyonu, Operatörlerin temsilleri.

ABSTRACT

MSc Thesis

OPERATORS ON SOME VEKTOR-VALUED ORLICZ SEQUENCE SPACES

Ali Kemal ALAGÖZ

İnönü University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

78+iv pages

2013

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Murat CANDAN

This work consists of five chapters. In the introduction, the Orlicz sequence spaces are summarized in the development process.

In the second chapter, the basic definitions, concepts, theorems and examples which will be useful in the next chapters have been given.

In the third chapter, $s(X)$ which is the most common vector-valued sequence space is introduced, and some the definitions and propositions have been given. Further, Köthe-Toeplitz duals, normality, monotony, perfectness of the vector-valued sequence spaces have been introduced and related to these propositions, theorems, and the results have been given.

In the fourth chapter, the scalar-valued and vector-valued Orlicz sequence spaces Orlicz sequence spaces have been given and some properties of these spaces have been examined.

In the last chapter, some results on vector-valued Orlicz sequence spaces have been given and a theorem which has the same function with a basis have been proved. In addition, a significant theorem which characterizes operators defined on these spaces have been proved and the results of this theorem have been examined with examples.

KEY WORDS: Vector-valued sequence spaces, Orlicz sequence spaces, Orlicz function, Characterization of The Operators, Representations of The Operators.

TEŞEKKÜR

Beni bu konuda çalışmaya teşvik ederek, bilgi ve tecrübeleriyle beni yönlendiren, bu çalışmanın her aşamasında önerileri, eleştirileri ve kaynakları ile çalışmama katkı sunan ve benim daha iyi olmam için sürekli olarak çaba sarf eden tez danışmanım değerli hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Murat CANDAN'a üzerimdeki emeklerinden dolayı en içten teşekkürlerimi sunarım.

Lisansüstü öğrenimim boyunca sağladığı imkanlar ve teşviklerinden dolayı bölüm başkanımız Sayın Prof. Dr. Sadık KELEŞ'e;

Tez yazımında bana büyük kolaylık sağlayan Latex programını öğreten, kaynaklarını bana açan ve araştırmalarımda yardımcı olan Sayın Yrd. Doç. Dr. M. Kemal ÖZDEMİR'e;

Bu çalışmanın oluşması sırasında araştırmalarımda yardımcı olan Sayın Doç. Dr. Yılmaz YILMAZ'a;

Bu çalışmanın oluşması sırasında maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen arkadaşlarım Şener YANAN'a, Mücahit SÜLÜ'ye ve Arş. Gör. Mehmet GÜLBAHAR'a çok teşekkür ederim.

Haklarını asla ödeyemeyeceğim sevgili anneme, babama, kardeşlerime ve onların ailelerine ve adlarını burada tek tek anamayacağım beni dektekleyen herkese sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Konveks fonksiyonlar teorisinin temeli, 1906'da J. Jensen tarafından oluşturulmuştur. 1934'te G. Hardy & J. Littlewood & G. Polya, "Inequalities" adlı eserde konveks fonksiyonları ayrıntılı olarak incelediler. 1931'de Z. W. Birnbaum & W. Orlicz, "Über die Verallgemeinerung des Begriffes der zueinander konjugierten Potenzen" isimli çalışmayla konveks fonksiyonların özel bir sınıfında yer alan N-fonksiyonları tanıtmışlardır. N-fonksiyonların ayrıntılı bir incelemesi, 1961'de M. A. Krasnosel'skii & Y. B. Rutickii [1] tarafından "Convex Functions and Orlicz Spaces" adlı çalışmayla yapılmıştır.

$M(a) = 0$ koşulunu sağlayan her konveks fonksiyonun

$$M(x) = \int_a^x p(t)dt$$

şeklinde bir integral gösterimine sahip olması, bu konveks fonksiyonun sahip olduğu özelliklerin $p(t)$ fonksiyonu ile incelenmesine imkân verir. Örneğin, bir $M(x)$ N-fonksiyonunun integral temsili, M'nin tamamlayanı denilen ve çekirdeği

$$q(s) = \sup\{t : p(t) \leq s\}$$

ile elde edilebilen

$$N(y) = \int_a^{|y|} q(s)ds$$

N-fonksiyonunun belirlenmesinde önemli bir rol oynar. Bir N-fonksiyonu ile onun tamamlayanı arasında Young eşitsizliği denilen bir bağıntı vardır. Bu eşitsizlik yardımıyla, M'nin tamamlayanı, her $y \in \mathbb{R}$ için,

$$N(y) = \sup\{x\,|y| - M(x) : x \geq 0\}$$

ile tanımlanabilir.

W. Orlicz, ℓ_p uzayının inşasında t^p fonksiyonunun rol oynamasından esinlenerek, t^p yerine daha genel bir M fonksiyonu alıp, $\sum_{k=1}^{\infty} M(|a_k|)$ serisi yakınsak olacak şekilde tüm (a_k) dizilerinin cümlesinde çalışılabileceği fikrini doğal bularak, bu şekildeki dizilerin cümlesinin bir Banach uzayı yapısına sahip olması için M üzerinde ne gibi kısıtlamalar yapılması gerektiğini araştırmıştır. Bu yüzden, söz konusu fonksiyon, Orlicz fonksiyonu ve bu fonksiyon ile tanımlanan uzay, Orlicz dizi uzayı olarak adlandırılmıştır.

Bir Orlicz fonksiyonu, Sonuç 4.1.2'deki gibi seçilişi ile ℓ_p $(1 \leqslant p < \infty)$'ye izomorf, teorem 4.1.8'de belirtilen iki limit durumu ile, ℓ_1, ℓ_∞ ve c_0 uzaylarına izomorf Orlicz dizi uzayları üretir.

Bir N-fonksiyonu ile bir Orlicz fonksiyonu arasında çok yakın bir ilişki vardır. Bir N-fonksiyonu,

$$\lim_{x\to 0} \frac{M(x)}{x} = 0, \ \lim_{x\to\infty} \frac{M(x)}{x} = \infty$$

şartlarını sağlayan bir Orlicz fonksiyonudur. Orlicz dizi uzaylarında Δ_2-şartının önemli bir yeri vardır. M Orlicz fonksiyonu sıfırda Δ_2-şartını sağladığında, ℓ_M ayrılabilirdir ve ℓ_M'nin kapalı bir alt uzayı olan h_M uzayı, ℓ_M ile çakışır.

1999'da D. Ghosh & P.D. Srivastava [2], Orlicz dizi uzayı tartışmasını vektör değerli dizi uzaylarına taşıyarak, yeni ve oldukça genel bir dizi uzayı tanımladılar. Normlu uzayların bir dizisi ve Bölüm 4'te belirtilen özelliklere sahip bir normal dizi uzayı yardımıyla elde ettikleri bu dizi uzayını, normlu uzay yapısına sahip olacak şekilde bir norm ile donattılar. $F(X_k, M)$ ile gösterdikleri bu dizi uzayında, $F = \ell_1$ ve her bir k için, $X_k = \mathbb{C}$ alınırsa, skaler değerli ℓ_M dizi uzayı elde edilir. $F(X_k, M)$'de $F = \ell_1$ ve her bir k için, $X_k = X$ alınırsa, vektör değerli $\ell_M(X)$ dizi uzayı elde edilir.

Bu çalışmayı, 2005'te yayınlanmış olan "Operators on Some Vector-Valued Orlicz Sequence Spaces" [3] adlı çalışmanın bir incelemesini yaparak tamamladık. Bu çalışmada, bazı vektör değerli Orlicz dizi uzayları için bir baz ile aynı işleve sahip olan bir operatör dizisi tanımlanmıştır. Ayrıca, bundan faydalanarak, $h_M(X)$ uzayından bir Y Banach uzayına sürekli operatörlerin $B(h_M(X), Y)$ uzayı karakterize edilmiştir. Aslında, tam olarak, bazı şartlar altında her bir $T \in B(h_M(X), Y)$ operatörünün her bir $k \in \mathbb{N}$ için, $A_k \in B(X, Y)$ operatörlerinin bir $A = (A_k)_{k=1}^{\infty}$ dizisine denk olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

BÖLÜM 2

TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Fonksiyonel Analizin Temel Kavramları

Bu bölümde, ilerideki bölümlerde kullanacağımız bazı temel bilgilere yer verilmiştir. Bu çalışmada vektör uzaylarının cismi olarak $\mathcal{F} = \mathbb{C}$ (ya da $\mathbb{R}$) alınacaktır.

Tanım 2.1.1. *X boştan farklı bir küme olsun. X üzerinde toplama ve skalerle çarma işlemleri*

$$\begin{array}{rcl} +: X \times X \to X & & .: \mathcal{F} \times X \to X \\ (x, y) \to x + y & \textit{ve} & (\lambda, x) \to \lambda.x \end{array}$$

şeklinde tanımlansın. Eğer her $x, y, z \in X$ ve her $\lambda, \mu \in \mathcal{F}$ için,

(i) $x + y = y + x$

(ii) $(x + y) + z = x + (y + z)$

(iii) $x + \theta = x$ *olacak şekilde bir* $\theta \in X$ *vardır*

(iv) *Her* $x \in X$ *için,* $x + x' = \theta$ *olacak şekilde bir* $x' \in X$ *vardır*

(v) $1.x = x$

(vi) $\lambda.(x + y) = \lambda.x + \lambda.y$

(vii) $(\lambda + \mu).x = \lambda.x + \mu.x$

(viii) $\lambda.(\mu.x) = (\lambda.\mu).x$

koşulları sağlanıyorsa, bu taktirde, X'e, $\mathcal{F}$ cismi üzerinde bir lineer uzay veya vektör uzayı denir. $\mathcal{F}$ cisminin $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi ya da $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi olmasına bağlı olarak X'e kompleks ya da reel lineer uzay denir [4-7].

Tanım 2.1.2. *X ve Y iki lineer uzay olsun. Eğer her λ, $\mu \in \mathcal{F}$ ve her x_1, $x_2 \in X$ için,*

$$f(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda f(x_1) + \mu f(x_2)$$

ise, bu taktirde, $f : X \to Y$ *fonksiyonuna bir lineer operatör veya lineer dönüşüm denir.* X*'den* Y *içine bütün lineer operatörlerin kümesi* $L(X,Y)$ *ile gösterilir.* $L(X,Y)$ *kümesi,* $f,\ g \in L(X,Y)$, $\lambda \in \mathcal{F}$ *ve* $x \in X$ *için,*

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \ \ ve \ \ (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

işlemleri altında bir lineer uzaydır [4-7].

Tanım 2.1.3. X *bir lineer uzay olsun. Eğer* $f : X \to \mathcal{F}$ *bir lineer operatör ise,* f*'ye* X *üzerinde bir lineer fonksiyoneldir denir [4-7].*

Tanım 2.1.4. X *ve* Y *iki lineer uzay ve* $f \in L(X,Y)$ *olsun. Bu taktirde,*

$$Ker(f) = \{x \in X : f(x) = \theta\}$$

kümesine f *operatörünün çekirdeği denir.* $Ker(f)$, X*'in bir altuzayıdır. Ayrıca,* $Ker(f) = \{\theta\}$ *olması,* f*'nin birebir olması için gerek ve yeter koşuldur [4,5]*

Aşağıda tanımını vereceğimiz metrik uzay kavramı ilk olarak Fréchet tarafından 1906'da ortaya atılmıştır. Ancak metrik uzay deyimini ilk kullanan Hausdorff olmuştur.

Tanım 2.1.5. X *boştan farklı bir küme olsun. Her* $x, y, z \in X$ *için,*

(i) $d(x,x) = 0$

(ii) $d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$

(iii) $d(x,y) = d(y,x)$

(iv) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

özelliklerine sahip $d : X \times X \to \mathbb{R}$ *fonksiyonuna bir metrik ve* (X,d) *ikilisine de bir metrik uzay denir. (i), (iii), (iv) şartlarını sağlayan* d *fonksiyonuna bir yarımetrik,* (X,d) *ikilisine de yarımetrik uzay denir [4-8].*

Tanım 2.1.6. (X,d) *bir metrik uzay ve* (x_n), X*'te bir dizi olsun. Eğer*

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$$

olacak şekilde bir $x \in X$ *noktası varsa,* (x_n) *dizisine* x*'e yakınsaktır denir. Bu* x *noktasına,* (x_n) *dizisinin limiti de denir ve* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ *veya* $x_n \to x \ (n \to \infty)$ *gösterimlerinden birisi ile gösterilir [4-7].*

Tanım 2.1.7. *(X,d) ve (Y,ρ) iki metrik uzay ve $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için, $d(x,x_0) < \delta$ olduğunda*

$$\rho\left(f\left(x\right), f\left(x_0\right)\right) < \varepsilon$$

olacak şekilde ε ve x_0'a bağlı bir $\delta > 0$ sayısı varsa, f'ye $x_0 \in X$ noktasında süreklidir denir. Eğer f, her $x \in X$ noktasında sürekli ise, f'ye X'te süreklidir veya kısaca süreklidir denir. Eğer f, sürekli ve her bir $x \in X$ için bulunan $\delta > 0$ sayısı sadece ε'na bağlı ise, f'ye X üzerinde düzgün süreklidir denir [4,5].

Tanım 2.1.8. *(X,d) bir metrik uzay ve (x_n), X'te bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için, $n,m > N$ olduğunda*

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı varsa, (x_n) dizisine, X'te bir Cauchy dizisi denir [4-7].

Tanım 2.1.9. *Bir (X,d) metrik uzayında her (x_n) Cauchy dizisi metrik uzayın bir noktasına yakınsıyorsa, bu metrik uzaya tamdır denir. Daha açık bir ifadeyle, $d(x_n,x_m) \to 0$ $(n,m \to \infty)$ olduğunda*

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$$

olacak şekilde bir $x \in X$ varsa, bu metrik uzaya tamdır denir [4-7].

Tanım 2.1.10. *(X,d) metrik uzay ve $S \subseteq X$ olsun. Eğer $\bar{S} = X$ ise, S'ye X'te yoğundur denir [4-7].*

Tanım 2.1.11. *Sayılabilir yoğun bir alt küme içeren bir (X,d) metrik uzayına ayrılabilirdir denir [4-7].*

Tanım 2.1.12. *X boştan farklı bir küme ve τ, X'in alt kümelerinin bir sınıfı olsun. Eğer τ,*

(i) $\emptyset \in \tau$ *ve* $X \in \tau$

(ii) *τ'daki kümelerin herhangi bir birleşimi τ'dadır*

(iii) *τ'daki kümelerin herhangi bir sonlu sayıda kesişimi τ'dadır*

koşullarını sağlıyorsa, τ'daki kümelere açık kümeler ve τ'ya X için bir topoloji, (X,τ) ikilisine de bir topolojik uzay denir [4-6,9,10].

Bir metrik uzayın, üzerindeki metrik ile oluşturulan açık kümelerle bir topolojik uzay olduğunu biliyoruz. Yani, bir metrik uzay özel bir topolojik uzaydır. Herhangi bir topolojik uzayın bir metrik ile oluşturulabilmesi bizim için önemlidir.

Tanım 2.1.13. (X, τ) *bir topolojik uzay,* d, X *üzerinde bir metrik ve* τ_d, d *metriği tarafından oluşturulan açık kümelerin bir sınıfı olsun. Eğer* $\tau_d = \tau$ *ise, bu durumda,* (X, τ) *topolojik uzayına metriklenebilirdir denir [4-7,10].*

Tanım 2.1.14. X, Y *topolojik uzaylar,* $f : X \to Y$ *olsun. Eğer,* X*'te yakınsak her* (x_n) *dizisi için,*

$$x_n \to x \Rightarrow f(x_n) \to f(x) \quad (n \to \infty)$$

ise, f*'ye* X*'te dizisel süreklidir denir [4-7,10].*

Teorem 2.1.1. X, Y *topolojik uzaylar,* $f : X \to Y$ *olsun.*

(i) f, X *üzerinde sürekli ise, bu durumda* f, X *üzerinde dizisel süreklidir, fakat genelde tersi doğru değildir.*

(ii) Eğer X *ve* Y *metrik uzaylar ise, bu durumda* X *üzerinde dizisel süreklilik ile* X *üzerinde süreklilik denktir [4-7,10].*

Uyarı 2.1.1. *Topolojik uzaylarda dizisel süreklilik genelde sürekliliği gerektirmez. Örneğin,* $\mathbb{R}$ *reel sayılar kümesi üzerinde*

$$\tau = \{\emptyset\} \cup \{A \subset \mathbb{R} \mid \mathbb{R} \backslash A \text{ sayılabilir}\}$$

topolojisini göz önüne alalım. (x_n), $\mathbb{R}$*'de bir dizi ve* $x_n \to x \in \mathbb{R}$ $(n \to \infty)$ *olsun. Bu taktirde, her* $n > k$ *için,* $x_n = x$ *olacak şekilde bir* $k \in \mathbb{N}$ *sayısı vardır. Buna göre,* (x_n) *dizisi,*

$$(x_1, x_2, x_3, ..., x_k, x, x, ...)$$

şeklindedir. υ, $\mathbb{R}$ *üzerindeki alışılmış topoloji olmak üzere,* $I : (\mathbb{R}, \tau) \to (\mathbb{R}, \upsilon)$ *birim fonksiyonunu ele alalım.* $x_n \to x$ $(n \to \infty)$ *iken*

$$I(x_n) = x_n \to x = I(x) \quad (n \to \infty)$$

olduğundan

$$I(x_n) \to I(x) \quad (n \to \infty)$$

dur, yani, I, fonksiyonu dizisel süreklidir. Fakat, $(0,1) \in \upsilon$ *için,*

$$I^{-1}\left[(0,1)\right] = (0,1) \subset \mathbb{R}$$

kümesi, τ topolojisine göre açık küme değildir. Çünkü,

$$\mathbb{R} - (0,1) = (-\infty, 0] \cup [1, \infty)$$

kümesi, sayılamaz bir kümedir. O halde, I fonksiyonu sürekli değildir [10].

Tanım 2.1.15. *X bir vektör uzayı ve τ, X üzerinde bir topoloji olsun. Bu taktirde, eğer*

$$\begin{array}{ccc} +: X \times X \to X & & .: \mathcal{F} \times X \to X \\ & ve & \\ (x,y) \to x+y & & (\lambda, x) \to \lambda.x \end{array}$$

dönüşümleri sürekli ise, bu durumda (X,τ) topolojik uzayına bir topolojik vektör uzayı (kısaca TVU) denir. (X,τ) topolojik vektör uzayı üzerindeki topolojiye lineer ya da vektör topoloji denir [4-7,9,11].

Tanım 2.1.16. *X bir lineer uzay olsun. Her $x, y \in X$ için,*

(i) $p(\theta) = 0$

(ii) $p(x) = p(-x)$

(iii) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$

(iv) *Eğer $\lambda_n, \lambda_0 \in \mathcal{F}$ için, $\lambda_n \to \lambda_0$ $(n \to \infty)$ ve $x_n, x_0 \in X$ için,*
$p(x_n - x_0) \to 0$ $(n \to \infty)$ *iken* $p(\lambda_n x_n - \lambda_0 x_0) \to 0$ $(n \to \infty)$

şartlarını sağlayan $p : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna bir paranorm, (X,p) ikilisine de bir paranormlu uzay denir. Ayrıca $p(x) = 0 \Rightarrow x = \theta$ şartı da sağlanıyorsa, p'ye bir total paranorm, (X,p) ikilisine de bir total paranormlu uzay denir [4-8]

Uyarı 2.1.2. *Eğer X bir lineer uzay ve p bir paranorm ise, bu durumda*

$$d(x,y) = p(x-y)$$

eşitliği ile tanımlanan d fonksiyonu bir yarımetriktir. Şayet p total ise, d fonksiyonu metrik olur [4-7].

Tanım 2.1.17. *Yarımetriği bir paranormdan elde edilebilen lineer uzaya lineer yarımetrik uzay ve yarımetriği bir total paranormdan elde edilebilen lineer uzaya lineer metrik uzay denir [4-7].*

Uyarı 2.1.3. *Bu tanımdan bir lineer metrik uzay ve bir total paranormlu uzayın aslında aynı şey olduğu anlaşılır. Benzer şekilde, bir yarımetrik lineer uzay, bir paranormlu uzaya denktir [4].*

Tanım 2.1.18. *X bir lineer uzay olsun. Her $\lambda \in \mathcal{F}$ ve her $x, y \in X$ için,*

(i) $q(\theta) = 0$

(ii) $q(\lambda x) = |\lambda|\, q(x)$

(iii) $q(x + y) \leq q(x) + q(y)$

şartlarını sağlayan $q : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna bir yarınorm, (X, q) ikilisine de bir yarınormlu uzay denir. (i) ve (ii) şartlarının yanında $q(x) = 0 \Rightarrow x = \theta$ şartı da sağlanıyorsa, $q = \|.\|$ fonksiyonuna norm, $(X, \|.\|)$ ikilisine de normlu uzay denir. Yarınormun tanımından her $x \in X$ için, $q(x) \geq 0$ dır [4-8].

Bir yarınormun bir paranorm olduğu kolayca görülebilir. Böylece, her yarınormlu uzay bir paranormlu uzaydır. Benzer şekilde, her normlu uzayın bir total paranormlu uzay olduğu kolayca görülür. Fakat, her paranorm bir yarınorm ve her total paranorm bir norm değildir. Örneğin, (p_k), tam olarak pozitif reel sayıların sınırlı bir dizisi ve $0 < p_k \leq \sup p_k = H < \infty$ olsun. $M = \max(1, H)$ olmak üzere

$$\ell(p) = \left\{ x = (x_k) \in s : \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^{p_k} \right\}$$

uzayı,

$$g(x) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^{p_k} \right)^{1/M}$$

şeklinde tanımlanan g total paranormu ile bir total paranormlu uzaydır. Eğer her $k \in \mathbb{N}$ için, $p_k = 1/k$ alınırsa, $0 < \frac{1}{k} \leq \sup \frac{1}{k} = 1 = H < \infty$ ve $M = \max(1, H) = 1$ olacağından

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^{1/k}$$

şeklinde tanımlanan g fonksiyonu bir total paranorm (dolayısıyla paranorm) olur. Fakat, $x = (0, 1, 0, ..., 0, ...) \in \ell(p)$ için,

$$g(2x) = \sqrt{2}g(x) < 2g(x)$$

olduğundan g bir norm (dolayısıyla yarınorm) değildir.

Tanım 2.1.19. $(X, \|.\|)$ *bir normlu uzay olmak üzere*

$$d : X \times X \to \mathbb{R},\ d(x, y) = \|x - y\|$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon X *üzerinde bir metrik ve* (X, d) *bir metrik uzaydır. Bu metriğe* $\|.\|$ *normundan türetilen metrik veya norm metriği denir [4-7].*

Tanım 2.1.20. $(X, \|.\|)$ *bir normlu uzay olsun. Eğer* X, $d(x, y) = \|x - y\|$ *norm metriğine göre tam ise, bu uzaya tam normlu uzay ya da Banach uzayı denir [4-7].*

Tanım 2.1.21. *Bir metriklenebilir ve tam topolojik vektör uzayına bir Fréchet uzayı denir [4,11].*

Her Banach uzayı bir Fréchet uzayıdır. Fakat tersi doğru değildir.

Tanım 2.1.22. X *bir lineer uzay ve* $\|.\|_1$ *ve* $\|.\|_2$, X *üzerinde iki norm olsun. Bu taktirde, her* $x \in X$ *için,*

$$k_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq k_2 \|x\|_1$$

olacak şekilde k_1, $k_2 > 0$ *sayıları varsa,* $\|.\|_1$ *ve* $\|.\|_2$ *normlarına denktir denir [4-7].*

Tanım 2.1.23. X, Y *topolojik uzaylar ve* $f : X \to Y$ *fonksiyonu birebir, örten, sürekli ve* f^{-1} *de sürekli ise,* f*'ye* X *ve* Y *uzayları arasında bir homeomorfizm denir [4-7].*

Tanım 2.1.24. (X, d) *ve* (Y, ρ) *iki metrik uzay ve* $f : X \to Y$, *örten bir fonksiyon olsun. Eğer her* $x_1, x_2 \in X$ *için,*

$$\rho(f(x_1), f(x_2)) = d(x_1, x_2)$$

bağıntısı sağlanıyorsa, f*'ye bir izometri ve* (X, d) *ve* (Y, ρ) *metrik uzaylarına da izometrik uzaylar denir [4-7].*

f, bir izometri olsun. Eğer keyfi $x_1, x_2 \in X$ için, $f(x_1) = f(x_2)$ ise,

$$0 = \rho(f(x_1), f(x_2)) = d(x_1, x_2)$$

eşitliğinden $x_1 = x_2$ olur. Böylece, f, birebirdir. Ayrıca, her $\varepsilon > 0$ ve her $x_1, x_2 \in X$ için, $d(x_1, x_2) < \delta$ olduğunda

$$\rho(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon = \delta$$

olacak şekilde ε'a bağlı bir $\delta > 0$ sayısı varolduğundan, f, süreklidir. Benzer şekilde, her $\varepsilon > 0$ ve her $x_1, x_2 \in X$ için, $\rho(f(x_1), f(x_2)) < \delta'$ olduğunda

$$d(x_1, x_2) = d\left(f^{-1}(f(x_1)), f^{-1}(f(x_2))\right) < \varepsilon = \delta'$$

olacak şekilde ε'a bağlı bir $\delta' > 0$ sayısı varolduğundan, f^{-1}, süreklidir. Dolayısıyla, her izometri bir homeomorfizmdir. Fakat bunun karşıtı doğru değildir. Örneğin, $\mathbb{R}$ ve $(0, \infty) \subset \mathbb{R}$ kümeleri üzerine $\mathbb{R}$'nin mutlak değer metriğini koyalım.

$$f : (0, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \ln x$$

fonksiyonu birebir, örten ve süreklidir. Ayrıca,

$$f^{-1} : \mathbb{R} \to (0, \infty),\ f^{-1}(x) = e^x$$

fonksiyonu da birebir, örten ve süreklidir. Bu taktirde, f, bir homeomorfizmdir. Fakat,

$$d(\ln x, \ln y) = |\ln x - \ln y| = \left|\ln\left(\frac{x}{y}\right)\right| \neq |x - y| = d(x, y)$$

olduğundan f, bir izometri değildir [5].

Tanım 2.1.25. *X ve Y iki lineer uzay olsun. Eğer $f : X \to Y$ dönüşümü, lineer, birebir, örten dönüşüm ise, f'ye X'ten Y'ye bir izomorfizm, X ve Y uzaylarına da izomorf uzaylar denir ve $X \approx Y$ ile gösterilir. Eğer $(X, \|.\|_X)$ ve $(Y, \|.\|_Y)$ iki normlu uzay ve $f : X \to Y$ içine bir lineer izomorfizm olmak üzere her $x \in X$ için, $\|f(x)\|_Y = \|x\|_X$ ise, f dönüşümüne bir lineer izometri denir. Eğer X'ten Y üzerine bir lineer izometri varsa, X ve Y uzaylarına izometrik olarak izomorf veya eşdeğer uzaylar denir ve $X \cong Y$ ile gösterilir [4,6,12].*

Tanım 2.1.26. *X ve Y iki normlu uzay ve $f : X \to Y$ bir izomorfizm olsun. Eğer f ve f^{-1} dönüşümleri sürekli ise, f'ye bir topolojik izomorfizm ve X, Y uzaylarına da topolojik olarak izomorf uzaylar denir [5]*

Bu tanımda, f, aynı zamanda bir lineer homeomorfizmdir. Bunun için bazen topolojik izomorf yerine lineer homeomorf deyimi kullanılır. Eğer f bir izometri ve aynı zamanda izomorfizm ise, bu durumda X, Y uzaylarına izometrik olarak izomorf veya eşdeğerdir denir. İki uzay topolojik olarak izomorf oldukları halde eşdeğer olmayabilirler, fakat eşdeğer uzaylar her zaman topolojik olarak izomorfturlar [5].

Teorem 2.1.2. *X ve Y iki normlu uzay olsun. Bu taktirde, X ve Y normlu uzaylarına denktir denir ancak ve ancak bu uzaylar izometrik izomorfik uzaylar ise. Bu, $T : X \to Y$ şeklinde üzerine bir lineer izometrinin var olduğu anlamına gelir [4,13].*

Tanım 2.1.27. *(X, g) bir paranormlu uzay olsun. Her bir $x \in X$ için,*

$$g\left(x - \sum_{n=1}^{k} a_n x_n\right) \to 0 \ (k \to \infty)$$

olacak şekilde skalerlerin bir tek (a_n) dizisi varsa, (x_n) dizisine X için bir Schauder bazı denir [4,13].

Bir (x_n) Schauder bazına sahip bir X uzayı, (a_n) katsayılar dizisi yardımıyla tek türlü yazılabilen $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ dizilerin uzayı olarak düşünülebilir. Her normlu uzay bir paranormlu uzay olduğundan bu tanım normlu uzaylar için de geçerlidir.

X sonlu boyutlu ve $B = (b_1, b_2, ..., b_k)$, X için bir Hamel bazı ise, her bir $x \in X$ tek türlü olarak $x = \sum_{n=1}^{k} a_n b_n$ şeklinde yazılabilir.

$$x_n = \begin{cases} b_n & , \quad n \leq k \\ \theta & , \quad n > k \end{cases}$$

ile tanımlı (x_n) dizisi X için bir Schauder bazıdır. O halde, sonlu boyutlu uzaylarda bir Hamel bazı aynı zamanda bir Schauder bazıdır. Her lineer uzayın bir Hamel bazı olmasına rağmen, sonsuz boyutlu normlu lineer uzayların bazılarının Schauder bazı olmayabilir [5].

Bu çalışmada bazen "Schauder bazı" yerine kısaca "baz" ifadesini kullanacağız.

Örnek 2.1.1. *(i) Sıfıra yakınsayan dizilerin*

$$c_0 = \left\{ x = (x_k) \in s : \lim_{k \to \infty} x_k = 0 \right\}$$

uzayı

$$\|x\| = \sup_k |x_k|$$

normu ile bir normlu lineer uzaydır. e_k*,* k*-ıncı terimi* 1 *diğer terimleri* 0 *olan diziyi göstersin. Her bir* $k \in \mathbb{N}$ *için,* $e_k \in c_0$*'dır. Şimdi,* (e_k) *dizisinin* c_0 *için bir Schauder bazı olduğunu gösterelim.* $x = (x_k) \in c_0$ *ise,*

$$\begin{aligned} \left\| x - \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \right\| &= \|(0, 0, ..., x_{n+1}, x_{n+2}, ...)\| \\ &= \sup_{k \geq n+1} |x_k| \to 0 \ \ (n \to \infty) \end{aligned}$$

olduğundan

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k$$

şeklinde yazılabilir.

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k$$

yazılışının x *için başka bir yazılış olduğunu kabul edelim. Bu durumda,*

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^{n} (x_k - a_k) e_k \right\| &= \left\| \sum_{k=1}^{n} x_k e_k - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \right\| \\ &= \left\| \sum_{k=1}^{n} x_k e_k - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k - x + x \right\| \\ &\leq \left\| x - \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \right\| + \left\| x - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \right\| \to 0 \ \ (n \to \infty) \end{aligned}$$

eşitsizliğinden

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} (x_k - a_k) e_k \right\| = \sup_{1 \leq k \leq n} |x_k - a_k| \to 0 \ \ (n \to \infty)$$

olur. Buradan, her $k \in \mathbb{N}$ *için,* $x_k = a_k$ *bulunur ki bu,* x*'in yazılışının tek türlü olduğunu gösterir [5,7,13].*

(ii) (p_k)*, tam olarak pozitif reel sayıların sınırlı bir dizisi ve* $0 < p_k \leq \sup p_k = H < \infty$ *olsun.* $M = \max(1, H)$ *olmak üzere*

$$\ell(p) = \left\{ x = (x_k) \in s : \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^{p_k} \right\}$$

uzayı,

$$g(x) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^{p_k} \right)^{1/M}$$

şeklinde tanımlanan g *total paranormu ile bir total paranormlu uzaydır. (i)'de tanımlanan* (e_k) *dizisi,* $\ell(p)$ *uzayı için bir Schauder bazıdır.* $x = (x_k) \in \ell(p)$ *olsun. Her* $n \in \mathbb{N}$ *için,*

$$y_n = x - \sum_{k=1}^{n} x_k e_k = (0, 0, ..., x_{n+1}, x_{n+2}, ...)$$

yazalım. $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^{p_k}$ *serisi yakınsak olduğundan*

$$[g(y_n)]^M = \sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^{p_k} \to 0 \ \ (n \to \infty)$$

olur. x *için,*

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k$$

yazılışı tektir. x*'in bir başka yazılışı*

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k$$

olsun. Bu durumda,

$$|\lambda_1 - x_1|^{p_1} + |\lambda_2 - x_2|^{p_2} + ... + |\lambda_n - x_n|^{p_n} \to 0 \ \ (n \to \infty)$$

olduğundan

$$g\left(\sum_{k=1}^{n} (\lambda_k - x_k) e_k \right) \leq g\left(x - \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \right) + g\left(x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \right) \to 0 \ \ (n \to \infty)$$

bulunur ki bu, her $k \in \mathbb{N}$ *için,* $x_k = \lambda_k$ *demektir. Yani,* x*'in yazılışı tek türlüdür [4,5,7,13].*

Yukarıdaki örnekte c_0 ve $\ell(p)$ uzayları için verilen birim vektörlerden oluşan (e_k) bazına birim vektör baz denir.

Tanım 2.1.28. *X ve Y Banach uzayları, (x_n), X için bir baz ve (y_n), Y için bir baz olsun. Skalerlerin herhangi bir (a_n) dizisi için,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \text{ yakınsak} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n \text{ yakınsak}$$

ise, (x_n) ve (y_n) bazlarına denktir denir [14].

Bu tanıma göre, (x_n) ve (y_n) bazlarının denk olması, her $n \in \mathbb{N}$ için, $T(x_n) = y_n$ olacak şekilde bir $T : X \to Y$ topolojik izomorfizmin var olmasına denktir. Böylece, topolojik olarak izomorf uzayların bazlarının birbirlerine denk olacağı anlaşılır.

Teorem 2.1.3. *X bir normlu lineer uzay olsun. Eğer X, bir Schauder bazına sahipse, X ayrılabilirdir [5,7].*

Tanım 2.1.29. *X, Y normlu uzaylar ve $A \in L(X,Y)$ olsun. Bu taktirde, her $x \in X$ için, $\|A(x)\| \leq M\|x\|$ olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı varsa A'ya bir sınırlı lineer operatör denir. X'den Y içine tüm sınırlı lineer operatörlerin kümesi $B(X,Y)$ ile gösterilir ve $B(X,Y)$, $L(X,Y)$'nin bir alt uzaydır [4,5,7,13].*

Teorem 2.1.4. *X, Y normlu uzaylar ve $A \in L(X,Y)$ olsun.*

(i) A, $\theta \in X$'de sürekli ise A, X'de düzgün süreklidir.

(ii) A, X'de süreklidir $\Leftrightarrow$ A sınırlıdır [4,5,7,13].

Tanım 2.1.30. *$A \in B(X,Y)$ olsun. Bu taktirde, A'nın normu*

$$\|A\| = \sup_{x \neq \theta} \frac{\|A(x)\|}{\|x\|} < \infty \tag{2.1.1}$$

olarak tanımlanır. Ayrıca, A'nın normu

$$\|A\| = \sup\{\|A(x)\| : \|x\| \leq 1\} \text{ ve } \|A\| = \sup\{\|A(x)\| : \|x\| = 1\}$$

biçimlerinde de gösterilebilir. $B(X,Y)$, (2.1.1) normu ile bir normlu uzaydır. Eğer Y bir Banach uzayı olursa $B(X,Y)$ de Banach uzayı olur [4,5,7,13].

Teorem 2.1.5. *X, Y, Z normlu uzaylar ve $A_1 : X \to Y$, $A_2 : Y \to Z$ birer sınırlı lineer operatör olsun. Bu taktirde, her $x \in X$ için, $A_2(A_1(x)) = (A_2A_1)(x)$ olmak üzere*

(i) $A_2A_1 \in B(X, Z)$

(ii) $\|A_2A_1\| \leq \|A_2\| \|A_1\|$

dir [7].

Teorem 2.1.6. *(Banach-Steinhaus) Eğer (A_n), bir X Banach uzayından bir Y normlu uzayı içine tanımlı sınırlı lineer operatörlerin bir dizisi ve X üzerinde*

$$\limsup_n \|A_n(x)\| < \infty$$

ise, bu durumda, $\sup_n \|A_n\| < \infty$, yani, $(\|A_n\|)$ dizisi sınırlıdır [4,5,7,13].

Sonuç 2.1.1. *X bir Banach uzayı, Y bir normlu uzay ve (A_n), $B(X, Y)$'de bir dizi olsun. Eğer her bir $x \in X$ için,*

$$\lim_n A_n(x) = A(x) \in Y$$

ise, bu durumda, $A \in B(X, Y)$'dir [4,5,7,13].

Tanım 2.1.31. *X bir lineer uzay olsun. X üzerinde tanımlanan bütün lineer fonksiyonellerin kümesi $X^\dagger = L(X, \mathbb{C})$ ile gösterilir. $X^\dagger = L(X, \mathbb{C})$ uzayına X'in cebirsel duali denir. $X^* = B(X, \mathbb{C}) \subset L(X, \mathbb{C})$ alt uzayına ise X'in topolojik (sürekli) duali denir. Çoğu zaman topolojik duale kısaca dual denir. X^*, (2.1.1) normu ile bir Banach uzayıdır. X^*'ın duali X'in ikinci duali olarak adlandırılır ve X^{**} ile gösterilir [4,5,7,13].*

Örnek 2.1.2. $c^* = c_0^* = \ell_1$ *ve* $\ell_1^* = \ell_\infty$*'dur [4,5,8].*

Tanım 2.1.32. *Bir X vektör uzayı üzerinde reel değerli bir p fonksiyoneli verilmiş olsun. Eğer p fonksiyoneli alt toplamsal, yani, her $x, y \in X$ için,*

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y)$$

ve pozitif-homojen, yani, $\mathbb{R}$'deki her $\alpha \geq 0$ ve her $x \in X$ için,

$$p(\alpha x) = \alpha p(x)$$

ise, p fonksiyoneline, alt lineer fonksiyoneldir denir [7].

Norm fonksiyonun alt lineer fonksiyonel olduğu tanımdan hemen görülebilir [7].

Teorem 2.1.7. *(Hahn-Banach teoremi) X, bir reel vektör uzayı ve p, X üzerinde bir alt lineer fonksiyonel olsun. Ayrıca, f'nin, X'in bir S alt uzayı üzerinde tanımlı olup, her $x \in S$ için,*

$$f(x) \leq p(x)$$

koşulunu gerçekleyen lineer bir fonksiyonel olduğunu kabul edelim. Bu durumda, f fonksiyoneli, her $x \in X$ için,

$$F(x) \leq p(x)$$

olacak şekilde X üzerinde tanımlı bir F lineer fonksiyoneline genişletilebilir ve her $x \in S$ için, $F(x) = f(x)$'dir [4,5,7,13].

Bu teorem reel vektör uzaylara ilişkin olup, bu teoremin kompleks vektör uzaylarını da içeren bir genelleştirilmesi H. F. Bohnenblust ve A. Sobczyk (1938) tarafından elde edilmiştir.

Teorem 2.1.8. *(Genelleştirilmiş Hahn-Banach teoremi) X, reel ya da kompleks bir vektör uzayı ve p, X üzerinde alt toplamsal olan, yani, her $x, y \in X$ için,*

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y)$$

eşitsizliğini ve her α skaleri için,

$$p(\alpha x) = |\alpha| \, p(x)$$

eşitliğini sağlayan reel değerli bir fonksiyonel olsun. Ayrıca, f, X'in bir S alt uzayı üzerinde tanımlanan ve her $x \in S$ için,

$$|f(x)| \leq p(x)$$

eşitsizliğini sağlayan bir lineer fonksiyonel olsun. Bu durumda, f,

$$|F(x)| \leq p(x)$$

eşitsizliğini sağlayan X üzerinde tanımlı bir F lineer fonksiyoneline genişletilebilir [7].

Sonuç 2.1.2. *X bir normlu reel lineer uzay, $S \subseteq X$ bir alt vektör uzayı ve $f \in S^*$ olsun. Bu durumda, f fonksiyoneli, $\|f\| = \|F\|$ olacak şekilde bir $F \in X^*$ fonsiyoneline genişletilebilir [4-7,13].*

Sonuç 2.1.3. *$X \neq \{\theta\}$ bir normlu uzay ve $\theta \neq x_0 \in X$ olsun. Bu taktirde, $\|f\| = 1$ ve $f(x_0) = \|x_0\|$ olacak şekilde bir $f \in X^*$ vardır [4-7,13].*

X ve Y aynı $\mathcal{F}$ cismi üzerinde normlu uzaylar, $A \in B(X, Y)$ ve $g \in Y^*$ olsun.

$$f(x) = (g \circ A)(x) = g(A(x))$$

biçiminde bir $f : X \to \mathcal{F}$ fonksiyonelini tanımlayalım. Burada, g ve A, sınırlı ve lineer olduklarından f, sınırlı ve lineer olacaktır. $g \in Y^*$ verildiğinde buna karşı yukarıdaki gibi tanımlanan f fonksiyonelinin tek olduğu açıktır. Bu nedenle, bir $A \in B(X, Y)$ için, $f = g \circ A$ olmak üzere,

$$A^* : Y^* \to X^*,\ g \to A^*(g) = g \circ A = f$$

biçiminde bir A^* operatörü tanımlanabilir [7,12,13].

Tanım 2.1.33. *X ve Y birer normlu uzay ve $A \in B(X, Y)$ olsun. $g \in Y^*$ olmak üzere*

$$A^* : Y^* \to X^*,\ g \to A^*(g) = g \circ A$$

biçiminde tanımlanan A^* operatörüne A'nın adjoint operatörü denir [7,12,13].

Lemma 2.1.1. *X ve Y birer normlu uzay ve $A \in B(X, Y)$ olsun. Bu taktirde, $A^* \in B(Y^*, X^*)$ ve $\|A^*\| = \|A\|$'dır [7,12,13].*

X, Y, Z birer normlu uzay ve $A \in B(X, Y)$ ve $B \in B(Y, Z)$ olsun. Bu durumda,
i) $(BA)^* = A^*B^*$
ii) $(A + B)^* = A^* + B^*$
iii) $\alpha \in \mathcal{F}$ için, $(\alpha A)^* = \alpha A^*$
dır [7,12].

Tanım 2.1.34. *X bir lineer uzay ve E, X'in boştan farklı bir alt kümesi olsun. Eğer λ, $\mu \geq 0$ için, $\lambda + \mu = 1$ olmak üzere her $x, y \in E$ için, $\lambda x + \mu y \in E$ ise, E'ye konvekstir denir [4,5].*

Tanım 2.1.35. *X bir lineer uzay, E, X'in konveks bir alt kümesi ve $f : E \to \mathbb{R}$ olsun. Eğer λ, $\mu \geq 0$ için, $\lambda + \mu = 1$ olmak üzere her $x, y \in E$ için, $f(\lambda x + \mu y) \leq \lambda f(x) + \mu f(y)$ ise, f'ye, E üzerinde bir konveks fonksiyondur denir [4,5].*

2.2 Dizi Uzayları

Kompleks terimli tüm dizilerin kümesi s ile gösterilir. $x = (x_k), y = (y_k) \in s$ ve $\alpha \in \mathcal{F}$ olmak üzere s kümesi,

$$x + y = (x_k) + (y_k) = (x_k + y_k) \text{ ve } \alpha x = \alpha(x_k) = (\alpha x_k)$$

ile tanımlanan dizilerin koordinatsal toplamı ve skaler çarpmımı işlemleri ile birlikte $\mathcal{F}$ cismi üzerinde bir vektör uzayıdır. s'nin bir alt vektör uzayına bir dizi uzayı denir [8,11,15].

s'de $e^{(n)} = \left(e_k^{(n)}\right)$, $(n \in \mathbb{N})$ ve $e = (e_k)$ dizileri, her $n, k \in \mathbb{N}$ için,

$$\delta_{nk} = \begin{cases} 0 & , \quad n \neq k \text{ ise} \\ 1 & , \quad n = k \text{ ise} \end{cases}$$

Kronecker delta olmak üzere

$$e^{(n)} = \left(e_k^{(n)}\right) = (\delta_{nk})$$

ve her $k \in \mathbb{N}$ için, $e_k = 1$ olmak üzere

$$e = (1, 1, 1, ..., 1, ...)$$

olarak tanımlanır. $e^{(n)} = \left(e_k^{(n)}\right)$, $(n \in \mathbb{N})$ ve $e = (e_k)$ dizilerine, sırasıyla, s'nin n-inci birim vektörü ve birimi denir.

$0 < p < \infty$ olmak üzere kompleks sayıların tüm sınırlı, yakınsak, sıfır ve mutlak p-toplanabilir dizilerinin klasik dizi uzayları, sırasıyla, ℓ_∞, c, c_0 ve ℓ_p ile gösterilir. $\phi = sp\left\{e^{(n)} : n \geq 1\right\}$ ile sonlu sayıda elemanı sıfırdan farklı olan dizilerin uzayı gösterilir. Ayrıca, bs ve cs ile, sırasıyla, tüm sınırlı ve yakınsak serilerin uzayları gösterilir. bv_1 ve bv, sırasıyla, $(x_k - x_{k-1}) \in \ell_1$ ve $(x_k - x_{k+1}) \in \ell_1$ olmak üzere tüm $x = (x_k)$ dizilerinden oluşan sınırlı salınımlı dizilerin uzaylarıdır ve bv_0, bv ve c_0 uzaylarının kesişimidir.

Aksi belirtilmediği sürece bundan böyle, $1 \leq p < \infty$ ve q, p'nin eşleniği, yani, eğer $p = 1$ ise, $q = \infty$ ve $1 < p < \infty$ için, $q = p/(p-1)$ olduğunu kabul edelim [8,11].

s **Uzayı**. Kompleks terimli tüm dizilerin kümesi s,

$$s = \{x = (x_k) : x_k \in \mathcal{F}, \text{ her } k \in \mathbb{N} \text{ için}\} \tag{2.2.1}$$

ile gösterilir. s kümesi,

$$d(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k - y_k|}{2^k (1 + |x_k - y_k|)}; \; x = (x_k), y = (y_k) \in s$$

şeklinde tanımlanan metrik ile birlikte bir metrik uzaydır [8,11,15].

ℓ_∞ **Uzayı**. Sınırlı dizilerin ℓ_∞ uzayı,

$$\ell_\infty = \left\{ x = (x_k) \in s : \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k| < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanır. ℓ_∞ uzayı üzerindeki doğal metrik,

$$d_\infty(x,y) = \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k - y_k| ; \; x = (x_k), y = (y_k) \in \ell_\infty$$

ile tanımlıdır [8,11,15].

c ve c_0 **Uzayları**. Yakınsak ve sıfır dizilerinin c ve c_0 uzayları,

$$c = \left\{ x = (x_k) \in s : \lim_{k \to \infty} |x_k - l| = 0, \text{ en az bir } l \in \mathbb{C} \text{ için} \right\}$$
$$c_0 = \left\{ x = (x_k) \in s : \lim_{k \to \infty} x_k = 0 \right\}$$

şeklinde tanımlanır. d_∞ metriği, c ve c_0 uzayları için de bir metriktir. c ve c_0 uzayları üzerinde supremum ve maksimum denk olduğundan d_∞ metriği, c_0 uzayı üzerinde

$$d_0(x,y) = \max_{k \in \mathbb{N}} |x_k - y_k| ; \; x = (x_k), y = (y_k) \in c_0$$

ile tanımlı d_0 metriğine indirgenir [8,11,15].

ℓ_p **Uzayı**. Mutlak p-toplanabilir dizilerin ℓ_p uzayı,

$$\ell_p = \left\{ x = (x_k) \in s : \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty \right\}, \; 0 < p < \infty$$

olarak tanımlanır. $1 \leq p < \infty$ durumunda, ℓ_p üzerinde d_p metriği,

$$d_p(x,y) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|^p\right)^{1/p} \; ; \; x = (x_k), y = (y_k) \in \ell_p$$

ile verilir. Ayrıca, $0 < p < 1$ durumunda, ℓ_p üzerinde $\tilde{d}_p$ metriği,

$$\tilde{d}_p(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|^p \; ; \; x = (x_k), y = (y_k) \in \ell_p$$

ile verilir [8,11,15].

bs **Uzayı**. Sınırlı serilerin bs uzayı,

$$bs = \left\{ x = (x_k) \in s : \sup_{k \in \mathbb{N}} \left| \sum_{k=0}^{n} x_k \right| < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanır. bs uzayı üzerindeki doğal metrik,

$$d(x,y) = \sup_{k \in \mathbb{N}} \left| \sum_{k=0}^{n} (x_k - y_k) \right| ; \; x = (x_k), y = (y_k) \in bs$$

ile tanımlıdır [8,11,15].

cs ve cs_0 **Uzayları**. Yakınsak serilerin cs uzayı ve sıfıra yakınsak serilerin cs_0 uzayı,

$$cs = \left\{ x = (x_k) \in s : \lim_{n \to \infty} \left| \sum_{k=0}^{n} x_k - l \right| = 0, \text{ en az bir } l \in \mathbb{C} \text{ için} \right\}$$

$$cs_0 = \left\{ x = (x_k) \in s : \lim_{n \to \infty} \left| \sum_{k=0}^{n} x_k \right| = 0 \right\}$$

şeklinde tanımlanır.

$$d(x,y) = \sup_{k \in \mathbb{N}} \left| \sum_{k=0}^{n} (x_k - y_k) \right| ; \; x = (x_k), y = (y_k) \in bs$$

metriği, cs ve cs_0 uzayları üzerindeki doğal metriktir [8,11,15].

bv_1 **Uzayı**. Sınırlı salınımlı dizilerin bv_1 uzayı,

$$bv_1 = \left\{ x = (x_k) \in s : \sum_{k=1}^{\infty} |x_k - x_{k-1}| < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanır. $u_{-1} = 0$ ile her $k \in \mathbb{N}$ için, $\left(\Delta^{(1)} u\right)_k = u_k - u_{k-1}$ ile $\Delta^{(1)} u = \left(\left(\Delta^{(1)} u\right)_k\right)$ fark dizisini tanımlayalım. bv_1 uzayı üzerindeki doğal metrik,

$$d(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \left| \Delta^{(1)} (x_k - y_k) \right| ; \; x = (x_k), y = (y_k) \in bv_1$$

ile tanımlıdır [8,11,15].

m_0 **Uzayı**.

$$A = \{x = (x_k) \in s : x_k \in \{0,1\},\ k \geq 1\}$$

sıfırlar ve birlerden oluşan tüm dizilerin kümesi olmak üzere m_0 uzayı,

$$m_0 = sp\{A\} = \{x = (x_k) \in s : \{x_k : k \in \mathbb{N}\} \text{ sonlu bir küme}\}$$

ile tanımlanır. d_∞ metriği, m_0 uzayı için de bir metriktir [11,15].

Tanım 2.2.1. *Eğer $M \subset \mathbb{N}$ ise, $S_M : s \to s$ lineer dönüşümü*

$$(S_M(x))_i = \begin{cases} x_i & , \quad i \in M \quad ise \\ 0 & , \quad i \notin M \quad ise \end{cases}$$

ile tanımlanır. Eğer $M = \{1,2,3,...,n\}$ ise, S_M için, S_n yazarız. $S_n(x)$ öğesine $x \in s$'nin n-inci kısmı adı verilir; bazen $S_n(x)$ için, $x^{(n)}$ sembolü de kullanılır. Yani, $x_1, x_2, x_3, ...$'ler x'in koordinatları ise,

$$S_n(x) = x^{(n)} = \{x_1, x_2, ..., x_n, 0, 0, ...\} = \sum_{i=1}^{n} x_i e^i$$

dir [11].

Tanım 2.2.2. *λ bir dizi uzayı ve $y \in s$ olsun.*

(i) Eğer $\forall u \in A = \{x = (x_n) \in s : x_n \in \{0,1\}, n \geq 1\}$ ve $\forall x \in \lambda$ için, $ux \in \lambda$ ise, λ'ya monoton dizi uzayı denir.

(ii) Eğer en az bir $x \in \lambda$ için, $|y_n| \leq |x_n|, n \geq 1$ olduğunda $y \in \lambda$ olursa λ'ya normal (ya da solid) dizi uzayı denir [8,11,15].

Her bir normal dizi uzayının bir monoton dizi uzayı olduğu açıktır.

Önerme 2.2.1. *λ bir dizi uzayı ve $y \in s$ olsun. Bu taktirde,*

(i) λ *monotondur* $\Leftrightarrow m_0\lambda \subset \lambda$

(ii) λ *normaldir* $\Leftrightarrow$ *En az bir $x \in \lambda$ için, $|y_n| = |x_n|, n \geq 1$ ise $y \in \lambda$'dır [11].*

Tanım 2.2.3. *λ bir dizi uzayı olsun.*

$$\begin{aligned}
&(i) \quad \lambda^{\alpha} &=& \left\{ x=(x_n)\in s : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| < \infty,\ her\ y\in\lambda\ için \right\} \\
&(ii) \quad \lambda^{\beta} &=& \left\{ x=(x_n)\in s : \left|\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n\right| < \infty,\ her\ y\in\lambda\ için \right\} \\
&(iii) \quad \lambda^{\gamma} &=& \left\{ x=(x_n)\in s : \sup_k \left|\sum_{n=1}^{k} x_n y_n\right| < \infty,\ her\ y\in\lambda\ için \right\} \\
&(iv) \quad \lambda^{\delta} &=& \left\{ x=(x_n)\in s : \sum_{n=1}^{\infty} \left|x_n y_{\rho(n)}\right| < \infty,\ her\ y\in\lambda\ ve\ \rho\in\Pi\ için \right\}
\end{aligned}$$

cümleleri verilsin. Burada Π, $\mathbb{N}$'nin tüm permütasyonlarının cümlesidir. Bu cümlelere sırasıyla λ'nın α, β, γ ve δ-dualleri denir. λ^{α}, λ^{β}, λ^{γ} ve λ^{δ} birer dizi uzayıdır ve $\phi\subset\lambda^{\delta}\subset\lambda^{\alpha}\subset\lambda^{\beta}\subset\lambda^{\gamma}$'dır. Bazı kaynaklarda λ^{α} yerine λ^{x} kullanılır. λ^{α} ve λ^{β} uzayları

$$\begin{aligned}
\lambda^{\alpha} &= \{x=(x_n)\in s : xy\in\ell_1,\ her\ y\in\lambda\ için\} \\
\lambda^{\beta} &= \{x=(x_n)\in s : xy\in cs,\ her\ y\in\lambda\ için\}
\end{aligned}$$

şeklinde de yazılabilir.

Herhangi bir λ dizi uzayı için, $\lambda\subset\left(\lambda^{\xi}\right)^{\xi}=\lambda^{\xi\xi}$, $\xi=\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$'dır [11].

Örnek 2.2.1. *$1\le p<\infty$ ve q, p'nin eşleniği olmak üzere*

Dizi Uzayı	*α-dual*	*β-dual*	*γ-dual*
c_0	ℓ_1	ℓ_1	ℓ_1
c	ℓ_1	ℓ_1	ℓ_1
ℓ_p $(1<p<\infty)$	ℓ_q	ℓ_q	ℓ_q
ℓ_∞	ℓ_1	ℓ_1	ℓ_1
ℓ_1	ℓ_∞	ℓ_∞	ℓ_∞
ℓ_p $(0<p<1)$	ℓ_∞	ℓ_∞	ℓ_∞

dur [8,11,15].

Uyarı 2.2.1. *$\xi=\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$ olsun. Bu durumda, I bir indis kümesi olmak üzere*

(i) Eğer $\lambda\subset\mu$ ise, $\mu^{\xi}\subset\lambda^{\xi}$.

(ii) Eğer $\lambda=\cup\{\lambda_i : i\in I\}$ ise, $\lambda^{\xi}=\cap\left\{\lambda_i^{\xi} : i\in I\right\}$ [11].

Tanım 2.2.4. *λ bir dizi uzayı olsun. Eğer $\lambda=\lambda^{\xi\xi}$ ise λ'ya bir ξ-uzay ($\xi=\alpha$, β, γ, δ) denir. Özel olarak bir α-uzayına bir Köthe uzayı ya da perfect dizi uzayı denir [11].*

Örnek 2.2.2. *(i)* ϕ, *s*, ℓ_∞, ℓ_1 *dizi uzayları birer perfect dizi uzayıdır.*

(ii) c monoton dizi uzayı değildir ve bundan dolayı normal dizi uzayı da değildir.

(iii) c_0 *normal dizi uzayıdır, fakat perfect dizi uzayı değildir.*

(iv) m_0 *monoton dizi uzayıdır, fakat normal dizi uzayı değildir [11].*

Önerme 2.2.2. λ *bir dizi uzayı olsun. Bu taktirde,*

(i) λ *monoton ise,* $\lambda^\alpha = \lambda^\beta$

(ii) λ *normal ise,* $\lambda^\alpha = \lambda^\gamma$ *[11].*

Teorem 2.2.1. λ *bir dizi uzayı olsun.*

(a) λ *perfect dizi uzayı ise,* λ *normal dizi uzayıdır.*

(b) λ *normal dizi uzayı ise,* $\lambda^\alpha = \lambda^\beta = \lambda^\gamma$

(c) λ *perfect dizi uzayı ise,* λ *bir* α*-uzayı,* β*-uzayı,* γ*-uzayıdır*

(d) λ *normal dizi uzayı ve* $e = (1, 1, 1, ...) \in \lambda$ *ise,* $\ell_\infty \subset \lambda$ *ve* $\lambda^\alpha = \lambda^\beta = \lambda^\gamma \subset \ell_1$ *[8,15].*

Önerme 2.2.3. λ *bir dizi uzayı olsun. Bu taktirde,* $\lambda^\xi = \lambda^{\xi\xi\xi}$, $\xi = \alpha$, β, γ *ya da* δ*'dır; özel olarak,* $\lambda^\alpha (\lambda^x)$ *bir Köthe uzayı,* λ^β *bir* β*-uzayı,* λ^γ *bir* γ*-uzayıdır. Bundan dolayı,* $\lambda^\alpha (\lambda^x)$ *dual uzayına,* λ *dizi uzayının Köthe duali de denir. Ayrıca, bir* λ *dizi uzayı için,*

$$\textit{perfectlik} \;\Rightarrow\; \textit{normallik} \;\Rightarrow\; \textit{monotonluk}$$

sağlanır [11].

Tanım 2.2.5. *Eğer her* $i \in \mathbb{N}$ *için,* $p_i(x) = x_i$ *ile tanımlanan* $p_i : \lambda \to \mathcal{F}$ *dönüşümlerinin her biri sürekli ise, bir lineer topoloji ile birlikte bir* λ *dizi uzayına K-uzayı denir [8,11].*

Tanım 2.2.6. λ*, bir K-uzayı olsun. Eğer* λ *K-uzayı, bir Fréchet uzayı (bir Banach uzayı) ise, yani, bir tam lineer metrik uzay ise,* λ *K-uzayına bir FK-uzayı (BK-uzayı) denir [8,11].*

Örnek 2.2.3. c_0,c, ℓ_∞ *uzayları* $\|x\|_\infty = \sup_k |x_k|$ *normu ile Banach uzayı ve her bir* k *için,* $|x_k| \leq \|x\|_\infty$ *olduğundan bu uzayların koordinat projeksiyonları süreklidir.*

Bu nedenle, c_0,c ve ℓ_∞ uzaylarının her biri BK-uzayıdır. Bundan başka, $1 \leq p < \infty$ ise, ℓ_p uzayı

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p}$$

normu ile bir BK-uzayıdır [4].

Tanım 2.2.7. *(X, τ) bir K-uzayı ve $x = (x_k) \in (X, \tau)$ olsun. Bu taktirde, eğer,*

$$x^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} x_k e^k \to x \in (X, \tau)$$

ise, x, AK-özelliğine sahiptir denir. Eğer (X, τ) uzayının her x elemanı AK-özelliğine sahipse, (X, τ) uzayına AK-uzayı denir [8,15].

Örnek 2.2.4. *$(c_0, \|.\|_\infty)$ ve her $p \in [1, \infty)$ için, $\left(\ell_p, \|.\|_p\right)$ birer AK-uzayıdır [15].*

Lemma 2.2.1. *$X \supset \phi$ bir FK-uzayı ve $a = (a_k)$, $\mathbb{C}$'de bir dizi olsun. Eğer her $x = (x_k) \in X$ için, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k x_k$ yakınsak ise,*

$$f_a(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$$

şeklinde tanımlan $f_a : X \to \mathbb{C}$ lineer fonksiyoneli her $x = (x_k) \in X$ için süreklidir [8].

Teorem 2.2.2. *$X \supset \phi$ bir FK-uzayı olsun. Bu taktirde, X^*, X'in sürekli duali olmak üzere*

(i) Bir $g : X^\beta \to X^*$ lineer, birebir dönüşümü vardır.

(ii) Eğer X, AK-uzayı ise, $g : X^\beta \to X^*$ dönüşümü bir izomorfizmdir [8].

Teorem 2.2.3. *Aşağıdaki ifadeler sağlanır:*

(i) $1 \leq p < \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. Bu taktirde, ℓ_p'nin ℓ_p^* sürekli duali, ℓ_q'ya norm izomorfiktir; bu, $f \in \ell_p^*$ olması için gerek ve yeter şart bazı $a = (a_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \ell_q$ için,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k \ \ (x \in \ell_p)$$

ve $\|f\| = \|a\|$ olması demektir.

(ii) c_0'ın c_0^* sürekli duali ℓ_1'e norm izomorfiktir [8].

Tanım 2.2.8. *(λ, q) yarınormlu bir dizi uzayı olsun. Her $x = (x_k)$, $y = (y_k) \in \lambda$ ve $k \geq 1$ için, $|y_k| \leq |x_k|$ olduğunda $q(y) \leq q(x)$ oluyorsa, q'ya mutlak monoton yarınorm denir [11].*

Örnek 2.2.5. *$(c_0, \|.\|_\infty)$, $(\ell_\infty, \|.\|_\infty)$ ve her $p \in [1, \infty)$ için, $\left(\ell_p, \|.\|_p\right)$ normlu uzayları üzerindeki normlar birer mutlak monoton yarınormdur.*

Yukarıdaki tanım ve örnek ile mutlak monoton ya da kısaca monoton normun tanımlanabileceği açıktır. Gerçekten, $(X, \|.\|)$ herhangi bir normlu uzay olmak üzere, eğer her $x = (x_k)$, $y = (y_k) \in X$ ve $k \geq 1$ için, $|y_k| \leq |x_k|$ olduğunda $\|y\| \leq \|x\|$ oluyorsa, $\|.\|$ normuna monoton norm denir.

Tanım 2.2.9. *Bir (X, τ) topolojik vektör uzayında $\mathbb{N}$'nin herbir σ permütasyonu için, $\sum_{k=1}^{\infty} x_{\sigma(k)}$ serisi (X, τ)'da yakınsak ise, $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ serisine koşulsuz (unconditionally) yakınsaktır denir [11].*

Tanım 2.2.10. *(X, τ), bir topolojik vektör uzayı ve $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$, (X, τ)'da bir seri olsun. Eğer $\mathbb{N}$'deki herhangi bir artan J dizisi için, $\sum_{i \in J} x_i$ serisi (X, τ)'da yakınsak ise, $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ serisine altseri yakınsaktır denir [11].*

Tanım 2.2.11. *Bir $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ serisinin terimlerinin mutlak değerinden teşkil edilen $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|$ serisi yakınsak ise, $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ serisine mutlak yakınsaktır denir [4].*

Önerme 2.2.4. *Bir Fréchet uzayında tanımlı serilerin altseri yakınsaklığı ile koşulsuz yakınsaklığı denktir ([11]).*

Teorem 2.2.4. *(Dvoretsky -Rogers Teoremi) X bir Banach uzayı olsun. Bu taktirde, herbir koşulsuz yakınsak seri mutlak yakınsaktır ancak ve ancak X sonlu boyutludur [11].*

2.3 Matris Dönüşümleri

Matris dönüşümlerinin genel teorisi Cesáro, Borel, Nörlund, Riesz ve diğerleri tarafından elde edilen toplanabilme teorisindeki özel ve klasik sonuçlardan doğmuştur.

Diğer yandan, bir dizi uzayından bir başka dizi uzayına bir lineer operatör aslında çoğu zaman bir sonsuz matris ile verilir. Bu yüzden, matris dönüşümleri teorisi, dizi uzaylarının incelenmesinde büyük ilgi çeker. Lineer uzay teorisinin tekniklerinin matris dönüşümlerini karakterize etmek için kullanılabileceğini 1911'de ilk olarak ünlü Alman matematikçi O. Toeplitz gözlemledi. Daha sonra, Banach-Steinhaus teoremi ve ilgili sonuçlar bu gibi problemlerle ilgilenenler için son derece kullanışlı araçlar oldular.

$A = (a_{nk})$, her $n, k \in \mathbb{N}$ ve $x = (x_k) \in s$ için, kompleks ya da reel a_{nk} sayılarının bir sonsuz matrisi olsun. Bu taktirde, x'in A-dönüşümü,

$$
\begin{aligned}
Ax &= \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & \cdots & a_{0k} & \cdots \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & \cdots \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ a_{n0} & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_{00}x_0 + a_{01}x_1 + a_{02}x_2 + \cdots \\ a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots \\ a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots \\ \vdots \\ a_{n0}x_0 + a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots \\ \vdots \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{\infty} a_{0k}x_k \\ \sum_{k=1}^{\infty} a_{1k}x_k \\ \sum_{k=1}^{\infty} a_{3k}x_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}x_k \\ \vdots \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

olağan matris çarpımı ile Ax dizisi elde edilir. Bundan dolayı, bu şekilde x dizisi,

$$A_n(x) = (Ax)_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k \ \ (n \in \mathbb{N}) \tag{2.3.1}$$

ile $Ax = ((Ax)_n)$ dizisine dönüştürülür. Her bir $n \in \mathbb{N}$ için, (2.3.1)'in sağ tarafındaki seri yakınsaktır.

λ ve μ, herhangi iki dizi uzayı olsun. Eğer her $x = (x_k) \in \lambda$ dizisi için, Ax var ve μ'de ise, bu durumda, A'ya, λ'dan μ'ye bir matris dönüşümü tanımlar denir ve $A : \lambda \to \mu$ ile gösterilir. λ'dan μ'ye tüm matris dönüşümlerinin sınıfı (λ, μ) ile gösterilir. Böylece, $A \in (\lambda, \mu)$ olması için gerek ve yeter şart her bir $n \in \mathbb{N}$ ve her $x = (x_k) \in \lambda$ için, (2.3.1)'in sağ tarafındaki serinin yakınsak ve tüm $x = (x_k) \in \lambda$ için,

$$Ax = ((Ax)_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mu \tag{2.3.2}$$

olmasıdır [8,13].

Dizilerle matris dönüşümleri arasındaki ilgiyi Euler'in verdiği şu yanlış ifadeyi aktaralım: Euler,

$$(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$$

formülünde $x = 1$ yazarak,

$$1 - 1 + 1 - \cdots = \frac{1}{2}$$

garip sonucunu elde etti. Bilindiği gibi, bu formül $|x| < 1$ için doğrudur.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - \cdots$$

serisi veya bunun kısmi toplamlar dizisi olan $s = (s_k) = (1, 0, 1, 0, \cdots)$ dizisi, Cauchy anlamında ıraksaktır. Bu durumda, $(\varepsilon, N(\varepsilon))$ yakınsaklık tanımına göre (s_k) dizisinin limiti $\frac{1}{2}$ olamaz. Euler'in yaptığı bu yanlış başka bir limitleme fikrinin ortaya çıkmasına sebep olmuştur. (s_k) dizisinin genel terimi

$$s_k = \frac{1}{2}\left(1 + (-1)^k\right)$$

olduğundan, dizinin terimlerinin 0 ve 1 arasında salınması,

$$t_k = \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_k}{k+1}$$

aritmetik ortalamasının teşkili fikrini verir. Böylece,

$$t_k = \frac{\left(1+(-1)^0\right)+\left(1+(-1)^1\right)+\cdots+\left(1+(-1)^k\right)}{2\,(k+1)}$$

$$= \frac{(k+1)+\left(1-1+\cdots+(-1)^k\right)}{2\,(k+1)}$$

$$= \frac{(k+1)+\frac{1}{2}\left(1+(-1)^k\right)}{2\,(k+1)}$$

$$= \frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1+(-1)^k}{k+1}$$

olur. Buradan,

$$\lim_{k\to\infty} t_k = \lim_k \left[\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1+(-1)^k}{k+1}\right] = \frac{1}{2}$$

elde edilir.

Yukarıdaki işleme dikkat edilirse, $t=(t_k)$ dizisi, $s_k = \frac{1}{2}\left(1+(-1)^k\right)$ olmak üzere (s_k) dizisinin

$$a_{nk} = \begin{cases} \frac{1}{k+1} & , \quad 0 \le n \le k \quad \text{ise} \\ 0 & , \quad n > k \qquad \text{ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $A=(a_{nk})$ matrisiyle (2.3.1)'de tanımladığımız biçimde dönüşümünden ibarettir. Yine, (2.3.2)'de verilen gösterime göre $s=(s_k)\in \ell_\infty$ için, $\left((A_n s)_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \in c$ olduğundan özel bir A matrisi, sınırlı fakat ıraksak bir diziyi, yakınsak bir diziye dönüştürmüş olur.

Teorem 2.3.1. $A=(a_{nk})\in(c_0,c_0)$ *matrisi için aşağıdaki özellikler sağlansın.*

(i) $a_{nk}\to 0\,(n\to\infty,\ k$ *sabit*$)$

(ii) $M=\sup_n \sum_k |a_{nk}| < \infty.$

Bu taktirde, $A\in B\,(c_0,c_0)$ *ve* $\|A\| = M$*'dir [8,16].*

Teorem 2.3.2. $A\in B\,(c_0,c_0)$ *olsun. Bu taktirde, A sınırlı lineer dönüşümü, her* $x\in c_0$ *için,*

$$A_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}x_k \quad (n\in\mathbb{N})$$

olacak şekilde bir $(a_{nk}) \in (c_0, c_0)$ *matrisi tayin eder. Ayrıca, bu matris için,*

(i) $a_{nk} \to 0\,(n \to \infty,\ k$ *sabit*$)$

(ii) $\|A\| = \sup_n \sum\limits_k |a_{nk}| < \infty$

şartları sağlanır [8,16].

Teorem 2.3.3. *X, Y; BK-uzayları ve X, AK-uzayı olsun.*

(i) Eğer $A \in B\,(X, Y)$ ise, bu taktirde, her bir $n \in \mathbb{N}$ ve her bir $x \in X$ için, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k$ serisi yakınsak olacak şekilde bir (a_{nk}) sonsuz matrisi vardır ve her bir $x \in X$ için,

$$Ax = \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k \right)_{n \in \mathbb{N}} \in Y \tag{2.3.3}$$

dir.

(ii) Eğer herhangi bir (a_{nk}) sonsuz matrisi, her bir $x \in X$ için,

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k \right)_{n \in \mathbb{N}} \in Y$$

şartını sağlarsa, bu taktirde, (2.3.3) bağıntısı bir $A \in B\,(X, Y)$ operatörü tanımlar [4].

Uyarı 2.3.1. *Bu teorem belirli koşullara sahip X, Y dizi uzayları için, $B\,(X, Y)$ uzayının elemanlarının sonsuz matrisler ile temsil edilebildiğini gösterir [4].*

BÖLÜM 3

VEKTÖR-DEĞERLİ DİZİ UZAYLARI

Bu bölümde k-ıncı terimi X_k yarınormlu uzayından olan en genel vektör değerli dizi uzayı $s\,(X_k)$ verildi ve bu uzay temel alınarak, özel durumda X herhangi bir Banach uzayı olmak üzere her bir k için, $X_k = X$ seçilerek X üzerinde tanımlı tüm dizilerin uzayı olan $s\,(X)$ elde edildi. Ayrıca, bir önceki bölümde s dizi uzayının alt uzayları için verilen bazı özellikler $s\,(X)$ vektör değerli dizi uzayının alt uzayları için verildi.

3.1 s(X) Dizi uzayı

(X_k, q_k), yarınormlu uzayların sonlu olmayan bir dizisi olsun. k-ıncı terimi X_k'dan olmak üzere tüm $x = (x_k)$ dizilerinin

$$\alpha x = (\alpha x_k), \alpha \in \mathcal{F} \quad \text{ve} \quad x + y = (x_k + y_k)$$

koordinatsal işlemleri altında lineer uzayı $s\,(X_k)$ ile gösterilsin. $x \in s(X_k)$ ve $\lambda = (\lambda_k)$, bir skaler dizi olmak üzere λx çarpımı, $\lambda x = (\lambda_k x_k)$ olarak tanımlansın. Eğer her bir k için, $X_k = \mathbb{C}$ alınırsa $s\,(X_k)$, en genel skaler dizi uzayı olan s olur. X_k'ların topolojileri yardımıyla $s\,(X_k)$ üzerine bir topoloji kurulabilir. $s\,(X_k)$, X_k'ların çarpım uzayı ve $s\,(X_k)$'nın topolojisi de X_k'ların topolojilerinin çarpım topolojisidir. Yani,

$$s\,(X_k) = \prod_{k=1}^{\infty} X_k$$

dır [17].

$s\,(X_k)$ dizi uzayında $(X, \|.\|)$, herhangi bir Banach uzayı olmak üzere eğer her bir k için, $X_k = X$ ve $q_k = \|.\|$ seçilirse, bu durumda,

$$s\,(X) = \prod_{k=1}^{\infty} X = \{x = (x_k) \mid x : \mathbb{N} \to X,\ n \to x(n) = x_n\}$$

kümesi X üzerinde tanımlı tüm dizilerin uzayı olur. Herhangi bir X-değerli dizi uzayı $s\,(X)$'in bir alt vektör uzayıdır. X-değerli dizilerin uzayına vektör değerli dizilerin uzayı da denir. X bir Banach uzayı olduğundan $s(X)$'in topolojisi total paranormdan gelir ve $s(X)$ tamdır. Bu nedenle, $s(X)$, bir Fréchet uzayıdır.

$(X, \|.\|)$ uzayının özdeşlik elemanını (sıfırını) 0 ile gösterelim ve bir $n \in \mathbb{N}$ için,

$$\phi(X) = \{x = (x_k) \in s(X) : \ k > n \text{ iken } x_k = 0\}$$

kümesini tanımlayalım. Aşikar olarak, $\phi(X) \subseteq s(X)$'dir. Bu alt uzaya X üzerinde tüm sonlu dizilerin uzayı denir. $X = \mathcal{F}$ alınırsa, $s(X)$ ve $\phi(X)$ uzayları, iyi bilinen skaler değerli s ve ϕ dizi uzayları olur [17].

Tanım 3.1.1. *E, bir vektör değerli dizi uzayı ve τ, E üzerinde bir lineer topoloji olsun. Eğer her bir k için,*

$$P_k : E \to X \ ; \ P_k(x) = x_k$$

ile tanımlanan k-ıncı koordinat dönüşümü E üzerinde sürekli ise, E'ye bir K-uzayı denir. Ayrıca, eğer (E, τ) bir Fréchet (Banach) uzayı ise, E'ye bir FK- (BK-) uzayı denir [18].

Tanım 3.1.2. *$s(X)$'de $x \in X$ ve $k \in \mathbb{N}$ için, $e^{(k)}(x)$ ve $e(x)$ dizileri,*

$$e^{(k)}(x) = \left(0, 0, 0, ..., 0, \overset{k\text{-ıncı yer}}{x}, 0, ...\right) \ \text{ve } e(x) = (x, x, x, ...)$$

olarak tanımlanır [18].

Tanım 3.1.3. *E, $\phi(X)$'i içeren bir vektör değerli K-uzayı olsun. Eğer her $x = (x_k) \in E$ için,*

$$\sum_{k=1}^{n} e^{(k)}(x_k) \to x \in E \ \ (n \to \infty)$$

ise, E'ye AK-özelliğe sahiptir denir [18].

Skaler durumda olduğu gibi $s(X)$'in bazı önemli alt uzayları ve bu alt uzayların bazı özellikleri verilebilir. Bu alt uzayları şu şekilde tanımlayalım. $\lambda \subset s$ bir normal skaler değerli dizi uzayı ise $s(X)$'in bir $\lambda(X)$ alt uzayı

$$\lambda(X) = \{x = (x_k) \in s(X) : (\|x_k\|) \in \lambda\}$$

ile tanımlıdır. Buna göre, $c_0(X)$, $\ell_\infty(X)$, $\ell_p(X)$ vektör değerli dizi uzayları

$$\begin{aligned} c_0(X) &= \left\{ x = (x_k) \in s(X) : \lim_{k\to\infty} \|x_k\| = 0 \right\} \\ \ell_\infty(X) &= \left\{ x = (x_k) \in s(X) : \sup_k \|x_k\| < \infty \right\} \\ \ell_p(X) &= \left\{ x = (x_k) \in s(X) : \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^p < \infty \right\} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. $\ell_p(X)$ $(1 \le p < \infty)$,

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^p \right)^{1/p}$$

normuna göre tamdır. $\ell_\infty(X)$, $c_0(X)$, $c(X)$ uzayları ise $\|x\|_\infty = \sup_k \|x_k\|$ normuna göre tamdır. Bu durumda, bu uzayların hepsi Fréchet uzayıdır. Öte yandan,

$$\|P_k(x)\| = \|x_k\| \le \|x\|$$

olduğundan $\ell_p(X)$ $(1 \le p < \infty)$, $\ell_\infty(X)$, $c_0(X)$, $c(X)$ uzayları üzerinde projeksiyon (koordinat) dönüşümleri süreklidir. Böylece, bu uzayların her biri FK-uzayı olur. Ayrıca, bu uzayların topolojileri normdan elde edildiğinden bu uzayların her biri BK-uzayıdır [17].

Tanım 3.1.4. *(X, τ) bir topolojik vektör uzayı ve $\{V_k\}_{k=1}^{\infty}$, X'in alt uzaylarının bir dizisi olsun. Her bir $k \in \mathbb{N}$ için,*

$$\eta_k : V_k \to X$$

bir lineer dönüşüm olmak üzere, her bir $x \in X$ için,

$$x - \sum_{k=1}^{n} (\eta_k \circ R_k)(x) \to 0 \ \ (n \to \infty) \tag{3.1.1}$$

olacak şekilde $R_k : X \to V_k$ lineer dönüşümlerinin bir tek (R_k) dizisi varsa, (η_k) dizisine X'in (V_k)'ya göre operatör bazı denir. Özel olarak, (X, τ), X_k topolojik vektör uzaylarının çarpımı veya alt uzayı ve (V_k) dizisi de çarpanlar veya çarpanların alt uzaylarından teşkil edilirse, bu durumda, (η_k) dizisine (X, τ)'nun koordinatsal bazı denir [17].

Örnek 3.1.1. *$s=\mathbb{C}^{\mathbb{N}}=\prod_{k=1}^{\infty}\mathbb{C}$ olduğunu biliyoruz. Bu uzayın alt uzaylarından olan c_0 ve c için koordinatsal bazları verebiliriz.*

$$\eta_k:\mathbb{C}\to c_0\ ,\ \eta_k(a)=\Big(0,0,...,0,\overset{k\text{-ıncı yer}}{a},0,...\Big)$$

şeklinde tanımlanan η_k dönüşümleri içerme dönüşümleridir ve genel olarak I_k ile gösterilir. Tanımda $V_k=\mathbb{C}$ olarak alınırsa, (I_k) dizisinin c_0 için bir koordinatsal baz olduğu görülür. Gerçekten,

$$R_k=P_k\ ,\ \ (P_k(x)=x_k)$$

koordinat dönüşümleri seçilirse, bu durumda, (3.1.1) şartını sağlayan bir tek (R_k) dizisi elde edilir. İçerme dönüşümlerinin bu dizisi ℓ_p uzayları için de bir koordinatsal bazdır. Diğer taraftan,

$$\eta:\mathbb{C}\to c\ ,\ \eta(a)=(a,a,...,a,...)$$

ile η dönüşümünü tanımlarsak, bu durumda, $(\eta,I_1,I_2,...,I_{k-1},...)$ dizisi c için bir koordinatsal bazdır. Gerçekten, $x=(x_k)\in c$ için, $\lim_{k\to\infty}x_k=l$ olmak üzere,

$$R_1(x)=\lim_{k\to\infty}x_k=l \text{ ve } R_k(x)=P_{k-1}(x)-l\ \ (k\geq 2)$$

olarak tanımlı dönüşümlerin (R_k) dizisi (3.1.1) şartını sağlayan aradığımız dizidir [17].

Örnek 3.1.2. *Her bir X_k birer Banach uzayı olmak üzere,*

$$\eta_k:X_k\to c_0(X_k)\ \ ,\ \eta_k(x)=\Big(0,0,...,0,\overset{k\text{-ıncı yer}}{x},0,...\Big)$$

şeklinde tanımlanan η_k içerme dönüşümlerini, yani (I_k) dizisini düşünelim. Bu dizi, $c_0(X_k)$ için bir koordinatsal bazdır ($V_k=X_k$ alınmaktadır). Gerçekten, her bir $k\in\mathbb{N}$ için, $R_k=P_k$ alınırsa, bu durumda, her $x\in c_0(X_k)$ için,

$$\left\|x-\sum_{k=1}^{n}(I_k\circ P_k)(x)\right\|_{\infty}=\|(0,0,..,x_{n+1},x_{n+2},...)\|_{\infty}\to 0\ \ (n\to\infty)$$

olur. Benzer şekilde, bu dizinin $\ell_p(X_k)$ için de bir koordinatsal baz olduğu gösterilebilir.

$c(X_k)$ için de koordinatsal baz verilebilir. $V_1 = \cap X_k$, $V_k = X_{k-1}$ $(k \geq 2)$ alırsak ve

$$\eta : X_k \to c(X_k) \ , \ \eta(t) = (t, t, ..., t, ...)$$

ile η dönüşümünü tanımlarsak, bu durumda, bu dönüşüm ve yukarıda tanımladığımız içerme dönüşümleriyle teşkil edilen $(\eta, I_1, I_2, ..., I_{k-1}, ...)$ dizisi $c(X_k)$ için bir koordinatsal bazdır. Gerçekten, $x = (x_k) \in c(X_k)$ için, $\lim_{k\to\infty} x_k = l$ olmak üzere,

$$R_1(x) = l \ \textit{ve} \ R_k(x) = P_{k-1}(x) - l \ \ (k \geq 2)$$

olarak tanımlı dönüşümlerin (R_k) dizisi (3.1.1) şartını sağlayan dizidir [17].

Tanım 3.1.5. *$\lambda(X)$, $\phi(X)$'i içeren bir FK-uzayı ve*

$$I_k : X \to \lambda(X) \ , \ I_k(a) = \left(0, 0, ..., 0, \overset{k\text{-ıncı yer}}{a}, 0, ...\right)$$

içerme dönüşümlerinin (I_k) dizisi $\lambda(X)$ için bir koordinatsal baz olsun. Bu taktirde, $\lambda(X)$'e AK-uzayı veya AK-özelliğe sahiptir denir [17].

(I_k) dizisinin $\lambda(X)$ için bir koordinatsal baz olması, her $x \in \lambda(X)$ için,

$$x^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} e^{(k)}(x_k) \to x \ \ (n \to \infty)$$

olması ve her $x \in \lambda(X)$'in

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} (I_k \circ P_k)(x)$$

şeklinde tek türlü temsil edilebilmesi denk kavramlardır [17].

3.2 Köthe-Toeplitz Dualleri

Bu kısımda $s(X)$ uzayı ve onun bazı alt uzaylarının Köthe-Toeplitz duallerini ve vektör değerli dizi uzayları için skaler durumdakine benzer olarak monotonluk, normallik ve perfectlikle ilgili bazı tanım, teorem, önerme ve sonuçlar vereceğiz.

Tanım 3.2.1. *s, her $k \in \mathbb{N}$ için, a_k kompleks sayılarının tüm sonsuz $a = (a_k)$ dizilerinin lineer uzayı ve E, s'nin boştan farklı bir altuzayı olmak üzere,*

$$E^{\beta} = \left\{ a \in s : \ \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k \right| < \infty, \ \textit{her } x \in E \ \textit{için} \right\}$$

dizi uzayına E'nin Köthe-Toeplitz Duali denir. Ayrıca, bu dizi uzayının temel bir sonucu olarak

$$E^{\alpha} = \left\{ a \in s : \sum_{k=1}^{\infty} |a_k x_k| < \infty, \textit{ her } x \in E \textit{ için} \right\}$$

şeklinde E'nin α-duali tanımlanır. E^{β} ve E^{α} duallerine E'nin Köthe-Toeplitz Dualleri denir [8,11,19].

Bu tanımda, (a_k) kompleks sayılar dizisinin yerine, X ve Y Banach uzayları olmak üzere, her bir $k \in \mathbb{N}$ için, $A_k : X \to Y$ operatörleri ile oluşturulan (A_k) operatör dizisi alınırsa ve $s(X)$, tüm X- terimli dizilerin uzayı ve $E \subset s(X)$ boştan farklı bir altuzay olmak üzere, E'nin genelleştirilmiş Köthe-Toeplitz Dualleri aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$E^{\beta} = \left\{ (A_k) \in s(L(X,Y)) : \left\| \sum_{k=1}^{\infty} A_k x_k \right\|_Y < \infty, \text{ her } x \in E \text{ için} \right\}$$

ve

$$E^{\alpha} = \left\{ (A_k) \in s(L(X,Y)) : \sum_{k=1}^{\infty} \|A_k x_k\|_Y < \infty, \text{ her } x \in E \text{ için} \right\},$$

burada,

$$s(L(X,Y)) = \{(A_k) : \ A_k : X \to Y \text{ lineer operatör, her } k \in \mathbb{N} \text{ için}\}$$

dir [19].

Bu tanımı sınırlı lineer operatörlere genişletirsek E'nin genelleştirilmiş β- ve α-dualleri

$$E^{\beta} = \left\{ (A_k) \in s(B(X,Y)) : \left\| \sum_{k=1}^{\infty} A_k x_k \right\|_Y < \infty, \text{ her } x \in E \text{ için} \right\}$$

ve

$$E^{\alpha} = \left\{ (A_k) \in s(B(X,Y)) : \sum_{k=1}^{\infty} \|A_k x_k\|_Y < \infty, \text{ her } x \in E \text{ için} \right\}$$

dir [20].

Burada eğer $Y = \mathcal{F}$ alınırsa, sınırlı lineer fonksiyoneller için E'nin genelleştirilmiş α- ve β-dualleri

$$E^{\alpha} = \left\{ (f_k) \in s(X^*) : \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x_k)| < \infty, \text{ her } (x_k) \in E \text{ için} \right\}$$

ve

$$E^{\beta}=\left\{(f_k)\in s\left(X^{*}\right):\left|\sum_{k=1}^{\infty}f_k\left(x_k\right)\right|<\infty,\text{ her }\ (x_k)\in E\text{ için}\right\}$$

olarak elde edilir.

Vektör değerli dizi uzayları için verdiğimiz bu tanımda $X=\mathbb{C}$ alırsak, $\mathbb{C}^{*}=\mathbb{C}$ olduğundan her bir $g_k\in\mathbb{C}^{*}$ operatörü bir $y_k\in\mathbb{C}$ kompleks sayısı ile özdeşleştirilerek $g_k\left(x_k\right)=x_ky_k$ yazılır. Böylece, kompleks sayılar için yukarıda verilen E'nin α- ve β-duali tanımı elde edilir.

Daima $E^{\alpha}\subseteq E^{\beta}$'dır. Ayrıca, E'nin ikinci α- ve β-duali, sırasıyla, $E^{\alpha\alpha}=(E^{\alpha})^{\alpha}$ ve $E^{\beta\beta}=\left(E^{\beta}\right)^{\beta}$ ile verilir. Eğer $E=E^{\alpha\alpha}$ ise, E'ye perfecttir denir.

Tanım 3.2.2. *E, bir X-değerli dizi uzayı olsun. Eğer $(x_k)\in E$ ve her $k\in\mathbb{N}$ için, $\|y_k\|\leq\|x_k\|$ koşulu ile $(y_k)\in s(X)$ olduğunda $(y_k)\in E$ olursa, E'ye normaldir denir [18].*

Bu tanım skaler durum için verilen normallik tanımının doğal bir genelleştirmesidir. Gerçekten, bu tanımda $X=\mathbb{C}$ alınırsa skaler durumdaki tanıma ulaşırız. Ancak, bu tanım dualiteyle uyumlu bir genelleştirme değildir. Buna göre, normalliğin dualiteyle uyumlu daha yetkin bir hali aşağıdaki verilen operatör normallik tanımıdır.

Tanım 3.2.3. *X, Y Banach uzayları ve E, bir X-değerli dizi uzayı olsun. Eğer bazı $x=(x_k)\in E$ ve her $(T_k)\in s\left(B(X,Y)\right)$ için,*

$$\|T_ky_k\|_Y\leq\|T_kx_k\|_Y$$

olduğunda $y=(y_k)\in E$ ise, E'ye operatör normaldir denir [21].

Eğer bu tanımda $X=Y=\mathbb{C}$ alırsak, bu durumda her bir $T_k\in B(X,Y)=B(\mathbb{C},\mathbb{C})=\mathbb{C}$ operatörü

$$|T_ky_k|\leq|T_kx_k|\Leftrightarrow|a_ky_k|\leq|a_kx_k|\Leftrightarrow|y_k|\leq|x_k|$$

olacak şekilde bir a_k kompleks sayısı ile özdeşleştirilebilir. Bu, skaler diziler için iyi bilinen normallik tanımıdır [21].

Eğer bu tanımda $Y=\mathbb{C}$ alırsak, operatör normallik tanımını sınırlı lineer fonksiyoneller için aşagıdaki gibi elde ederiz:

E, X-değerli dizi uzayı ve $x = (x_k) \in E$ keyfi olsun. Her $(f_k) \in s(X^*)$ için,

$$|f_k(y_k)| \leq |f_k(x_k)|$$

olduğunda $y = (y_k) \in E$ oluyorsa E'ye normaldir denir [17].

Skaler dizi uzayları için verdiğimiz monotonluk tanımını hemen hemen hiç değiştirmeden $s(X)$'in alt uzayları için de vermek mümkündür. $\zeta = \{x = (x_n) \in s : x_n \in \{0,1\}, n \geq 1\}$ olmak üzere $m_0 = sp\{\zeta\}$ dizi uzayı verilsin. E, vektör değerli dizi uzayı olmak üzere, $a \in m_0$ ve $y \in E$ için

$$m_0 E = \{x : x_k = a_k y_k\}$$

kümesi tanımlansın.

Tanım 3.2.4. *Bir E, vektör değerli dizi uzayı için, $m_0 E \subseteq E$ ise E'ye monotondur denir [21].*

Teorem 3.2.1. *E, bir X-değerli dizi uzayı olsun. E, operatör normal ise monotondur [21].*

İspat. $x = (x_n) \in m_0 E$ olsun. Burumda, bir $a = (a_k) \in m_0$ ve bir $y = (y_k) \in E$ için,

$$x_k = a_k y_k$$

yazabiliriz. m_0'ın tanımından, $a = (a_k)$ dizisinde sonlu adette birbirinden farklı terim sonsuz defa tekrarlanır. Bu terimler $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n$ olsun.

$$\sigma = \max\{|\sigma_i| : 1 \leq i \leq n\}$$

diyelim. Her bir k için, $|a_k| \leq \sigma$ olduğu açıktır. Diğer yandan, her $(g_k) \in s(B(X,Y)$ için,

$$\begin{aligned}
\|g_k(x_k)\|_Y &= \|g_k(a_k y_k)\|_Y \\
&= \|a_k g_k(y_k)\|_Y \\
&= |a_k| \, \|g_k(y_k)\|_Y \\
&\leq \sigma \, \|g_k(y_k)\|_Y
\end{aligned}$$

olur. E, operatör normal olduğundan $x = (x_n) \in E$ elde edilir. Böylece, $m_0 E \subseteq E$ olur, yani, E monotondur. $\square$

Önerme 3.2.1. *Y, sonlu boyutlu bir Banach uzayı, X, herhangi bir Banach uzayı ve E, bir X-değerli dizi uzayı olsun. E monoton ise $E^\alpha = E^\beta$'dır [21].*

İspat. Daima $E^\alpha \subseteq E^\beta$ içermesi var olduğundan $E^\beta \subseteq E^\alpha$ olduğunu göstermek yeterlidir. $(T_k) \in E^\beta$ olsun. Bu taktirde, her $x = (x_n) \in E$ için,

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k(x_k)$$

serisi, Y'de yakınsaktır. $m_0 E \subseteq E$ olduğundan

$$E^\beta \subseteq (m_0 E)^\beta$$

dır. O halde, $(T_k) \in (m_0 E)^\beta$ olup, her $a = (a_k) \in m_0$ için,

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k(a_k x_k)$$

serisi, Y'de yakınsaktır. Doğal sayıların kesin artan bir (k_i) dizisini ve

$$b_k = \begin{cases} 1 \quad , & k = k_i \quad \text{ise} \\ 0 \quad , & k \neq k_i \quad \text{ise} \end{cases}$$

olacak şekilde bir $b = (b_k)$ dizini tanımlayalım. Bu taktirde, $b = (b_k) \in m_0$ olup,

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k(b_k x_k) = \sum_{i=1}^{\infty} T_{k_i}(x_{k_i})$$

serisi, Y'de yakınsaktır. Yani, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} T_k(x_k)$ serisi, Y'de altseri yakınsaktır. Bundan dolayı, bu seri Y'de koşulsuz yakınsaktır. Diğer yandan, Y sonlu boyutlu olduğundan Dvoretzky-Rogers Teoremi'nden $\sum\limits_{k=1}^{\infty} T_k(x_k)$ serisi, Y'de mutlak yakınsaktır. Bu ise, $(T_k) \in E^\alpha$, yani, $E^\beta \subseteq E^\alpha$ demektir. Böylece, $E^\alpha = E^\beta$'dır. $\square$

Daha önce bir λ skaler dizi uzayı yardımıyla $s(X)$'in bir $\lambda(X)$ alt uzayını tanımlamıştık. λ normal ise, $x \in \lambda(X)$ olması için gerek ve yeter koşulun $(\|x_k\|) \in \lambda$ olduğunu tekrar belirtelim. Buna göre, aşağıdaki önermeyi verebiliriz.

Önerme 3.2.2. *$\lambda \subset s$ normal bir dizi uzayı ise, $\lambda(X)$ de normaldir [17].*

İspat. $x = (x_k) \in \lambda(X)$ ve her $(g_k) \in s(X^*)$ için,

$$|g_k(y_k)| \leq |g_k(x_k)|$$

olsun. Hahn-Banach teoreminin (2.1.3) sonucundan her bir k için,

$$f_k(y_k) = \|y_k\| \text{ ve } \|f_k\| = 1$$

olacak şekilde bir $f_k \in X^*$ vardır. Bu şekilde bulanan f_k'lar ile oluşturulan $(f_k) \in s(X^*)$ dizisi için de

$$|f_k(y_k)| \leq |f_k(x_k)|$$

olur. Yani,

$$\begin{aligned} \|y_k\| &= |f_k(y_k)| \\ &\leq |f_k(x_k)| \\ &\leq \|f_k\| \, \|x_k\| \\ &= \|x_k\| \end{aligned}$$

dır. $(\|x_k\|) \in \lambda$ ve λ normal olduğundan $(\|y_k\|) \in \lambda$ olur. Yani,

$$y = (y_k) \in \lambda(X)$$

tir. O halde, $\lambda(X)$, normaldir. □

Örnek 3.2.1. *$\ell_p(X)$ $(p > 0)$, $\ell_\infty(X)$, $c_0(X)$, $\phi(X)$, $s(X)$ uzayları, $Y = \mathbb{C}$ için operatör normaldir. O halde bu uzaylar aynı zamanda monoton olup β- ve α-dualleri çakışıktır [21].*

Teorem 3.2.2. *Eğer λ bir normal skaler dizi uzayı ise, bu taktirde*

$$[\lambda(X)]^\alpha = \lambda^\alpha(B(X, Y))$$

dir, burada sağ taraftaki α-dual klasik (skaler) tarzdadır [21].

İspat. $(T_k) \in [\lambda(X)]^\alpha$ olduğunu kabul edelim. O halde, her bir $x \in \lambda(X)$ için,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|T_k x_k\|_Y < \infty$$

olur. $\|T_k\|$'nın tanımından her bir $k \in \mathbb{N}$ için,

$$\|T_k\| \leqslant 2\,\|T_k y_k\|_Y \tag{3.2.1}$$

olacak şekilde bir

$$y_k \in B_X = \{v \in X : \|v\|_X \leqslant 1\}$$

bulabiliriz. Bir $z = (z_k)$ dizisini, her bir $u = (u_k) \in \lambda$ için, $z_k = u_k y_k$ olacak şekilde tanımlayım. Bu taktirde,

$$\|z_k\|_X = \|u_k y_k\|_X = |u_k|\,\|y_k\|_X \leqslant |u_k| \;\; (\,\|y_k\|_X \leq 1)$$

olduğundan $z = (z_k) \in \lambda\,(X)$'tir. Böylece, (3.2.1)'den

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} \|T_k\|\,|u_k| &\leqslant 2\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|\,\|T_k y_k\|_Y \\ &= 2\sum_{k=1}^{\infty} \|T_k\,(u_k y_k)\|_Y \\ &= 2\sum_{k=1}^{\infty} \|T_k z_k\|_Y < \infty\end{aligned}$$

olur. Bu ise, $(\|T_k\|) \in \lambda^\alpha$ demektir, yani $(T_k) \in \lambda^\alpha\,(\mathcal{B}\,(X,Y))$'dir. Böylece

$$[\lambda\,(X)]^\alpha \subset \lambda^\alpha\,(\mathcal{B}\,(X,Y)) \tag{3.2.2}$$

elde edilir.

Tersine olarak, $(T_k) \in \lambda^\alpha\,(\mathcal{B}\,(X,Y))$, yani $(\|T_k\|) \in \lambda^\alpha$ olduğunu kabul edelim. Bu taktirde, her bir $u = (u_k) \in \lambda$ için,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|T_k\|\,|u_k| < \infty$$

olur. Buradan, her bir $x = (x_k) \in \lambda\,(X)$ için, $(\|x_k\|_X) \in \lambda$ olduğundan

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|T_k x_k\|_Y \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \|T_k\|\,\|x_k\|_X < \infty$$

elde ederiz. Bu ise, $(T_k) \in [\lambda\,(X)]^\alpha$ demektir. Böylece,

$$\lambda^\alpha\,(\mathcal{B}\,(X,Y)) \subset [\lambda\,(X)]^\alpha \tag{3.2.3}$$

olur. Sonuç olarak, (5.2.3) ve (3.2.3)'den

$$[\lambda(X)]^{\alpha} = \lambda^{\alpha}(\mathcal{B}(X,Y))$$

eşitliği elde edilir. $\square$

Lemma 3.2.1. *E, FK-uzayı olan ve $\phi(X)$'i içeren bir X-değerli dizi uzayı olsun. Bu taktirde, her bir $k \in \mathbb{N}$ için,*

$$T_k x = e^k(x) = \left(0, 0, 0, ..., 0, \overset{k\text{-ıncı yer}}{x}, 0, ...\right)$$

ile tanımlanan $T_k : X \to E$ dönüşümü süreklidir [18].

BÖLÜM 4

ORLICZ DİZİ UZAYLARI

Bu bölümde, konveks fonksiyonların özel bir sınıfında yer alan N-fonksiyon kısaca tanıtılarak N-fonksiyon ile yakın ilişkili olan Orlicz fonksiyon verildi. Ayrıca, W. Orlicz'in $\ell_p, 1 \leq p < \infty$ uzayını Orlicz fonksiyonu yardımıyla genelleştirmesi ile başlayan ve W. Orlicz'ten sonra K. J. Lindberg, J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, P. K. Kamthan, M. Gupta ve daha bir çok matematikçinin katkılarıyla genelleştirilen skaler değerli Orlicz dizi uzayları, D. Ghosh, P. D. Srivastava ve daha bir çok matematikçinin katkılarıya son zamanlarda gelişmekte olan vektör değerli Orlicz dizi uzayları ve bu uzaylarla ilgili olarak bazı tanım, lemma, önerme, teorem ve sonuçlar verildi.

4.1 Skaler Değerli Orlicz Dizi Uzayları

Tanım 4.1.1. *Her $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ için,*

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\left[M\left(x_1\right) + M\left(x_2\right)\right]$$

eşitsizliğini sağlayan reel değerli M fonksiyonuna konvekstir denir [1].

Teorem 4.1.1. *$M\left(a\right) = 0$ şartını sağlayan her konveks $M(x)$ fonksiyonu*

$$M\left(x\right) = \int_a^x p\left(t\right) dt$$

formunda temsil edilebilir, burada $p(t)$ fonksiyonu, azalmayan, sağdan sürekli bir fonksiyondur [1].

Tanım 4.1.2. *Çift, sürekli, konveks ve $M\left(0\right) = 0$, $M\left(x\right) \to \infty$ $\left(x \to \infty\right)$ özelliklerine sahip bir $M\colon \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty)$ fonksiyonuna bir Orlicz fonksiyonu denir. Eğer en az bir $x > 0$ için, $M\left(x\right) = 0$ ise, $M\left(x\right)$ Orlicz fonksiyonuna, dejenere Orlicz fonksiyonu denir [14,22].*

$p(t)$, azalmayan, sağdan sürekli bir fonksiyon olmak üzere $M(x)$ Orlicz fonksiyonu, $M(0) = 0$ şartını sağladığından

$$M(x) = \int_0^x p(t)\,dt$$

şeklinde integral formunda gösterilebilir. Buradaki $p(t)$ fonksiyonu, $M(x)$'in çekirdeği olarak bilinir [11].

İntegral gösterim kullanılarak her Orlicz fonksiyonu, $p(t)$'nin durumuna göre üç farklı gruba ayrılabilir:

i) $p(0) = a$ olacak şekilde bir $a > 0$ vardır.

ii) $0 \leq t \leq t_0$ için, $p(t) = 0$ olacak şekilde bir $t_0 > 0$ vardır.

iii) $p(0) = 0$ ve $t > 0$ için $p(t) > 0$'dır.

Birinci ve ikinci gruptaki Orlicz fonksiyonu dejenere Orlicz fonksiyonudur. Üçüncü gruptaki Orlicz fonksiyonuna N-fonksiyon denir [22].

Tanım 4.1.3. *(N-fonksiyonun birinci tanımı)*

$$M(x) = \int_0^{|x|} p(t)\,dt \tag{4.1.1}$$

gösterimine sahip bir $M(x)$ fonksiyonuna N-fonksiyon denir, burada $p(t)$ fonksiyonu, $t \geq 0$ için sağdan sürekli, $t > 0$ için pozitif ve

$$p(0) = 0, \;\; p(\infty) = \lim_{t\to\infty} p(t) = \infty \tag{4.1.2}$$

koşullarını sağlayan azalmayan bir fonksiyondur [1].

Bir $M(x)$ N-fonksiyonu, bazı $[0, K]\,, K \in \mathbb{R}$ aralıkları üzerinde

$$M(x) = \int_0^{|x|} p(t)\,dt$$

olarak temsil edilebilen bir Orlicz fonksiyonudur [14].

Örnek 4.1.1. $M_1(x) = \frac{|x|^\alpha}{\alpha}$ *$(\alpha > 1)$ ve $M_2(x) = e^{x^2} - 1$ fonsiyonları birer N-fonksiyondurlar. Gerçekten, $p_1(t) = M_1'(t) = t^{\alpha-1}$ ve $p_2(t) = M_2'(t) = 2te^{t^2}$ fonksiyonları, $t \geq 0$ için sağdan sürekli, $t > 0$ için pozitif ve (4.1.2) şartlarını sağlayan azalmayan fonksiyonlardır [1].*

(4.1.1) gösteriminden, her N-fonksiyon çift, sürekli, orjinde sıfır değerini alan ve değişkenin pozitif değerleri için artan bir fonksiyondur [1].

Tanım 4.1.4. *(N-fonksiyonun ikinci tanımı)*

$$\lim_{x\to 0}\frac{M(x)}{x}=0,\ \lim_{x\to\infty}\frac{M(x)}{x}=\infty$$

şartlarını sağlayan çift, sürekli, konveks bir $M(x)$ fonksiyonuna, N-fonksiyon denir [1].

N-fonksiyonun ve Orlicz fonksiyonun tanımları dikkate alındında, bir N-fonksiyonun

$$\lim_{x\to 0}\frac{M(x)}{x}=0,\ \lim_{x\to\infty}\frac{M(x)}{x}=\infty$$

şartlarını sağlayan bir Orlicz fonksiyonu olduğu görülebilir.

$p(t)$, $t>0$ için pozitif, $t\geq 0$ için sağdan sürekli, azalmayan ve (4.1.2) şartlarını sağlayan bir fonksiyon olsun. $s\geq 0$ için,

$$q(s)=\sup\{t\colon p(t)\leq s\}$$

eşitliği ile $q(s)$ fonksiyonu tanımlansın. $q(s)$ fonksiyonunun, $p(t)$ fonksiyonu ile aynı özelliklere sahip olduğunu görmek kolaydır: $q(s)$, $s>0$ için pozitif, $s\geq 0$ için sağdan sürekli, azalmayan ve

$$q\left(0\right)=0,\ q\left(\infty\right)=\lim_{s\to\infty}q\left(s\right)=\infty \tag{4.1.3}$$

koşullarını sağlayan bir fonksiyondur. Eğer $p(t)$ fonksiyonu sürekli ve monoton artan ise bu durumda $q(s)$ fonksiyonu, $p(t)$'nin ters fonksiyonudur. Genellikle, $q(s)$ fonksiyonuna, $p(t)$'nin sağ tersi denir. Aynı şekilde, $p(t)$ fonksiyonu da, $q(s)$'nin sağ tersidir [1].

Tanım 4.1.5. $M\left(x\right)$,

$$M\left(x\right)=\int_0^{|x|}p\left(t\right)dt$$

integral gösterimine sahip bir N-fonksiyon ve q, p'nin sağ tersi olsun. Bu durumda,

$$N(y)=\int_0^{|y|}q\left(s\right)ds$$

ile tanımlanan $N(y)$ N-fonksiyonuna $M(x)$'in tamamlayanı denir. $M(x)$ ve $N(y)$ fonksiyonlarına, karşılıklı tamamlayan N-fonksiyonları denir [1].

Örnek 4.1.2. *$M(x) = e^{|x|} - |x| - 1$ N-fonksiyonunun tamamlayan N-fonksiyonunu bulalım. $p(t) = M'(t) = e^t - 1$ $(t \geq 0)$'dır. Buradan, $q(s) = \ln(s+1)$ $(s \geq 0)$ olacaktır. Böylece,*

$$N(y) = \int_0^{|y|} q(s)\,ds = (1+|y|)\ln(1+|y|) - |y|$$

olur [1].

Bir çok durumda, tamamlayan N-fonksiyon için açık bir formül bulmak mümkün olmaz. Örneğin, $M(x) = e^{x^2} - 1$ alınırsa, $p(t) = 2te^{t^2}$'dir ve $q(s)$, açık formda ifade edilemez [1].

Tanım 4.1.6. *(Δ_2-şartı) $x \geq x_0$ için,*

$$M(2x) \leq kM(x) \tag{4.1.4}$$

olacak şekilde $k > 0$, $x_0 \geq 0$ sabitleri varsa, $M(x)$ N-fonksiyonu, x'in büyük değerleri için (ya da sonsuzda) Δ_2-şartını sağlar denir. Eğer $0 \leq x \leq x_0$ için, (4.1.4) eşitsizliği sağlanırsa, $M(x)$ N-fonksiyonu, x'in küçük değerleri için (ya da sıfırda) Δ_2-şartını sağlar denir [1].

Önerme 4.1.1. *M, N karşılıklı tamamlayan Orlicz fonksiyonları olsun. Bu taktirde,*

(i) $x, y \geq 0$ *için,* $xy \leq M(x) + N(y)$ *(YoungEşitsizliği)*

(ii) $x \geq 0$ *için,* $xp(x) = M(x) + N(p(x))$

(iii) $x \geq 0$ *ve* $0 < \alpha < 1$ *için,* $M(\alpha x) < \alpha M(x)$

dir [11,14].

Tanım 4.1.7. *Her bir M Orlicz fonksiyonu için,*

$$\tilde{\ell}_M = \left\{ x = (x_k) \in s : \delta(x; M) = \sum_{k=1}^{\infty} M(|x_k|) < \infty \right\}$$

ile tanımlanan $\tilde{\ell}_M$ cümlesine Orlicz dizi sınıfı denir [11].

Tanım 4.1.8. *M bir Orlicz fonksiyonu olmak üzere*

$$\ell_M = \left\{ x = (x_k) \in s : \sum_{k=1}^{\infty} M\left(\frac{|x_k|}{\rho}\right) < \infty, \text{ en az bir } \rho > 0 \text{ için} \right\}$$

ile tanımlanan dizi uzayına Orlicz dizi uzayı denir [14,22].

Açık olarak, $\tilde{\ell}_M \subset \ell_M$ dir. M ve N karşılıklı tamamlayan Orlicz fonksiyonları olmak üzere, ℓ_M'nin bir başka tanımı,

$$\ell_M = \left\{ x = (x_k) \in s \colon \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k \text{ yakınsak, her } y \in \widetilde{\ell}_N \text{ için} \right\}$$

biçiminde verilir [11].

Teorem 4.1.2. *Her bir $x \in \ell_M$ için,*

$$\sup \left\{ \left| \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k \right| : \delta\left(y; N\right) \le 1 \right\} < \infty$$

dir [11,14].

Bu teorem ile ℓ_M üzerinde

$$\|x\|_M = \sup \left\{ \left| \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k \right| : \delta\left(y; N\right) \le 1 \right\}$$

şeklinde bir norm tanımlanabilir. ℓ_M Orlicz dizi uzayı, bu norm ile bir Banach uzayıdır [11].

Teorem 4.1.3. $(\ell_M, \|\cdot\|_M)$ *bir BK-uzayıdır [11].*

ℓ_M Orlicz dizi uzayı, $\|x\|_M$ normundan faklı olarak

$$\|x\|_{(M)} = \inf \left\{ \rho > 0 : \sum_{k=1}^{\infty} M\left(\frac{|x_k|}{\rho}\right) \le 1 \right\}$$

şeklinde tanımlanan ve $\|x\|_M$ normuna denk olan $\|x\|_{(M)}$ normuyla da bir BK-uzayı yapılabilir [11,14].

Teorem 4.1.4. *$x \in \ell_M$ için,*

$$\sum_{k=1}^{\infty} M\left(\frac{|x_k|}{\|x\|_{(M)}}\right) \le 1$$

dir [11].

Önerme 4.1.2. *$\|x\|_M \le 1$ olmak üzere $x \in \ell_M$ olsun. Bu taktirde, $y = \{p(|x_k|)\} \in \tilde{\ell}_N$ ve $\sum_{k=1}^{\infty} N\left(|y_k|\right) \le 1$ dir [11].*

Önerme 4.1.3. *$\|x\|_M \leq 1$ olmak üzere $x \in \ell_M$ olsun. Bu taktirde, $x \in \tilde{\ell}_M$ ve $\sum\limits_{k=1}^{\infty} M(|x_k|) \leq \|x\|_M$ dir [11].*

Teorem 4.1.5. *$x \in \ell_M$ için,*

$$\sum_{k=1}^{\infty} M\left(\frac{|x_k|}{\|x\|_M}\right) \leq 1$$

dir [11].

Teorem 4.1.6. *$x \in \ell_M$ için,*

$$\|x\|_{(M)} \leq \|x\|_M \leq 2\,\|x\|_{(M)}$$

dir [11].

Sonuç 4.1.1. *$\left(\ell_M, \|\cdot\|_{(M)}\right)$ bir BK-uzayıdır [11].*

Tanım 4.1.9. *M bir Orlicz fonksiyonu olmak üzere, ℓ_M'nin bir alt uzayı olan ve normu ℓ_M'nin $\|\cdot\|_M$ normu ile verilebilen h_M uzayı,*

$$h_M = \left\{ x = (x_k) \in \ell_M : \sum_{k=1}^{\infty} M\left(\frac{|x_k|}{\rho}\right) < \infty, \text{ her } \rho > 0 \text{ için} \right\}$$

ile tanımlanır [11,14].

Önerme 4.1.4. *M bir Orlicz fonksiyonu olsun. Bu taktirde, $(h_M, \|x\|_M)$ uzayı bir AK-BK-uzayıdır [11].*

Bir BK-uzayı olan $(\ell_M, \|\cdot\|_M)$, genelde AK-uzayı değildir. Δ_2-şartının önemini gösteren aşağıdaki önerme, ℓ_M'nin hangi durumlarda bir AK-uzayı olacağını ifade eder.

Önerme 4.1.5. *M bir Orlicz fonsiyonu olsun. Bu taktirde, aşağıdaki şartlar denktir:*

i) M, 0'da Δ_2-şartını sağlar.

ii) $h_M = \ell_M$

iii) ℓ_M bir AK-uzaydır [11].

Teorem 4.1.7. *M bir Orlicz fonsiyonu olsun. Bu taktirde, M, 0'da Δ_2-şartını sağlar ancak ve ancak ℓ_M ayrılabilirdir [11].*

Tanım 4.1.10. *M_1 ve M_2 iki Orlicz fonksiyonu olsun. Eğer $0 \leq x \leq x_0$ ve her x için,*

$$M_1(\alpha x) \leq M_2(x) \leq M_1(\beta x)$$

olacak şekilde α, β pozitif sabitleri ve x_0 varsa, M_1 ve M_2 Orlicz fonksiyonları denktir denir [11].

Önerme 4.1.6. *M_1 ve M_2 iki Orlicz fonksiyonu olsun. Bu taktirde, M_1 ve M_2 denktir ancak ve ancak $\ell_{M_1} = \ell_{M_2}$ ve $I : \left(\ell_{M_1}, \|x\|_{M_1}\right) \to \left(\ell_{M_2}, \|x\|_{M_2}\right)$ özdeşlik dönüşümü bir topolojik izomorfizmdir [11].*

Teorem 4.1.8. *M bir Orlicz fonksiyonu ve p, M'nin çekirdeği olsun. Bu durumda,*

(i) *$\ell_M \approx \ell_1$ ancak ve ancak $p(0) = a > 0$*

(ii) *Eğer $x_0 > 0$ olmak üzere $0 \leq x \leq x_0$ için, $p(x) = 0$ ise, bu taktirde $\ell_M \approx \ell_\infty$, $h_M \approx c_0$'dır ve h_M'nin birim vektör bazı, ℓ_M'nin birim vektör bazına denktir [11].*

Sonuç 4.1.2. *M bir Orlicz fonksiyonu olsun. O halde, $\ell_M \approx \ell_p \, (1 \leq p < \infty)$ olması için gerek ve yeter şart M'nin $M_p(x) = x^p$ fonksiyonuna denk olmasıdır [11].*

Teorem 4.1.9. *Her ℓ_M Orlicz dizi uzayı, en az bir $p \geq 1$ için, ℓ_p'ye izomorfik bir alt uzay içerir [11,23].*

Önerme 4.1.7. *M ve N karşılıklı tamamlayan Orlicz fonksiyonları olsun. Bu taktirde, $h_M^\beta = \ell_N$ ve bundan dolayı $h_M^* = \ell_N$ dir [11].*

Sonuç 4.1.3. $h_M^\alpha = h_M^\gamma = h_M^\beta = h_M^* = \ell_N$ *[11].*

4.2 Vektör-Değerli Orlicz Dizi Uzayları

4.2.1 $F(X_k, M)$ Dizi Uzayı

Bu kısımda, D. Ghosh & P. D. Srivastava [2] tarafından tanımlanan $F(X_k, M)$ vektör değerli dizi uzayı ve bu uzayın bazı cebirsel ve topolojik özellikleri verildi.

X_k, $\|\cdot\|_{X_k}$, $(k = 1, 2, 3, ...)$ normu ile $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi üzerinde Banach uzayı; F, $\|\cdot\|_F$ monoton normu ile bir normal dizi uzayı ve e_k (burada k-ıncı yerde 1 ile $e_k = (0, 0, ..., 0, 1, 0, ...)$), F için bir Schauder bazı olsun. Her bir k için,

$$\alpha x = (\alpha x_k),\ \alpha \in \mathbb{C} \quad \text{ve} \quad x + y = (x_k + y_k)$$

koordinatsal işlemlerini ve $x_k \in X_k$ koşulunu sağlayan bütün $x = (x_k)$ dizilerinin lineer uzayı $s(X_k)$ ile gösterilir. Eğer $x \in s(X_k)$ ve $\lambda = (\lambda_k)$, bir skaler dizi ise, $\lambda x = (\lambda_k x_k)$ yazacağız. Dahası, M bir Orlicz fonksiyonu olsun. Bu taktirde, $F(X_k, M)$ vektör değerli dizi uzayı,

$$F(X_k, M) = \left\{ x = (x_k) \in s(X_k) : \left(M\left(\frac{\|x_k\|_{X_k}}{\rho} \right) \right) \in F, \text{ bazı } \rho > 0 \text{ için} \right\}$$

olarak tanımlanır. $x = (x_k) \in F(X_k, M)$ için, $F(X_k, M)$ üzerinde

$$\|x\| = \inf \left\{ \rho > 0 : \left\| \left(M\left(\frac{\|x_k\|_{X_k}}{\rho} \right) \right) \right\|_F \leq 1 \right\} \tag{4.2.1}$$

normu tanımlanır [2].

Teorem 4.2.1. $F(X_k, M)$, $\mathbb{C}$ *kompleks sayılar cismi üzerinde bir lineer uzaydır [2].*

Teorem 4.2.2. $F(X_k, M)$, *(4.2.1) normu ile bir normlu uzayıdır [2].*

Teorem 4.2.3. $F(X_k, M)$, *(4.2.1) normu ile bir Banach uzayıdır [2].*

Teorem 4.2.4.

$$F(X_k) = \left\{ x = (x_k) \in s(X_k) : \left(\frac{\|x_k\|_{X_k}}{\rho} \right) \in F, \textit{ bazı } \rho > 0 \textit{ için} \right\}$$

olmak üzere eğer M, $\triangle_2$-şartını sağlarsa,

$$F(X_k) \subset F(X_k, M)$$

dir [2].

Şimdi, $F(X_k, M)$ dizi uzayının aşağıda tanımlanan $[F(X_k, M)]$ alt uzayını ve bu alt uzayın bazı özelliklerini verelim.

$$[F(X_k, M)] = \left\{ x = (x_k) \in s(X_k) : \left(M\left(\frac{\|x_k\|_{X_k}}{\rho} \right) \right) \in F, \text{ her } \rho > 0 \text{ için} \right\}.$$

Burada, F ve X_k için yukarıdaki verilen şartlar geçerlidir ve $[F(X_k, M)]$ alt uzayının topolojisi, $F(X_k, M)$ uzayının (4.2.1) ile verilen norm topolojisidir [2].

Teorem 4.2.5. *$[F(X_k, M)]$, (4.2.1) normu ile bir Banach uzayıdır [2].*

Teorem 4.2.6. *$[F(X_k, M)]$ bir AK-uzayıdır [2].*

Teorem 4.2.7. *Eğer her bir k için X_k ayrılabilir ise $[F(X_k, M)]$ ayrılabilirdir [2].*

4.3 $\ell_M(X)$ Dizi Uzayı

Bu kısımda, özel seçimler ile $F(X_k, M)$ vektör değerli dizi uzayından skaler değerli Orlicz dizi uzayının vektör değerli bir genişlemesi elde edildi ve bu uzayın bazı özellikleri verildi.

$F_M = \left\{x = (x_k) \in s\colon \left(M\left(\frac{|x_k|}{\rho}\right)\right) \in F, \text{ bazı } \rho > 0 \text{ için}\right\}$ olsun. Bu durumda, $F_M(X_k) = F(X_k, M)$ yazabiliriz. M, azalmayan Orlicz fonksiyonu ve F, normal dizi uzayı olduğundan F_M normal dizi uzayıdır [20].

Eğer F'yi ℓ_1 olarak seçersek,

$$\ell_M(X_k) = \left\{x \in s(X_k) : \sum_{k=1}^{\infty} M\left(\frac{\|x_k\|_{X_k}}{\rho}\right) < \infty, \text{ bazı } \rho > 0 \text{ için}\right\}$$

elde ederiz. Bundan başka, skaler durumdaki gibi $\ell_M(X_k)$'nın $h_M(X_k)$ alt uzayı tanımlanır. Bu yüzden, $h_M(X_k)$, $x = (x_k) \in s(X_k)$'lardan oluşur öyle ki her $\rho > 0$ için,

$$\sum_{k=1}^{\infty} M\left(\frac{\|x_k\|_{X_k}}{\rho}\right) < \infty$$

olur. Eğer M, 0'da Δ_2-şartını sağlarsa, $h_M(X_k) = \ell_M(X_k)$ olur [20].

$(X, \|\cdot\|)$, $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi üzerinde herhangi bir Banach uzayı ve $s(X)$, tüm X-değerli dizilerin uzayı olmak üzere eğer $\ell_M(X_k)$'da her bir k için, $X_k = X$ seçilirse, bu durumda, ℓ_M uzayının vektör değerli genişlemesi

$$\ell_M(X) = \left\{x \in s(X) : \sum_{k=1}^{\infty} M\left(\frac{\|x_k\|}{\rho}\right) < \infty, \text{ bazı } \rho > 0 \text{ için}\right\}$$

şeklinde elde edilir. $\ell_M(X)$,

$$\|x\|_{(M)} = \inf\left\{\rho > 0 : \sum_{k=1}^{\infty} M\left(\frac{\|x_k\|}{\rho}\right) \le 1\right\}$$

ile bir Banach uzayıdır ve eğer $X = \mathbb{C}$ olursa, ℓ_M ile $\ell_M(X)$ uzayları çakışır. Bundan başka, $\ell_M(X)$'in kapalı altuzayı $h_M(X)$,

$$h_M(X) = \left\{ x \in s(X) : \sum_{k=1}^{\infty} M\left(\frac{\|x_k\|}{\rho}\right) < \infty, \text{ her } \rho > 0 \text{ için} \right\}$$

biçiminde tanımlanır. Eğer M, 0'da Δ_2-şartını sağlarsa, bu taktirde $\ell_M(X) = h_M(X)$ olur [3]. $h_M(X)$, bir Banach uzayı olduğundan ve teorem 4.2.6'dan bir AK-BK-uzayı olur.

Tanım 4.3.1. *X ve Y Banach uzayları olmak üzere $\ell_M(X)$'in genelleştirilmiş α- ve β-dualleri*

$$[\ell_M(X)]^{\alpha} = \left\{ (A_k) \in s(B(X,Y)) : \sum_{k=1}^{\infty} \|A_k x_k\|_Y < \infty, \textit{ her } x \in \ell_M(X) \textit{ için} \right\}$$

ve

$$[\ell_M(X)]^{\beta} = \left\{ (A_k) \in s(B(X,Y)) : \left\| \sum_{k=1}^{\infty} A_k x_k \right\|_Y < \infty, \textit{ her } x \in \ell_M(X) \textit{ için} \right\}$$

olarak tanımlanır.

$h_M(X)$'in genelleştirilmiş α- ve β-dualleri de benzer şekilde tanımlanabilir.

ℓ_M ve h_M, birer normal skaler dizi uzaylarıdır. Gerçekten, $x = (x_k) \in \ell_M$ ve herhangi bir $y = (y_k) \in s$ için, $|y_k| \le |x_k|$, $k \ge 1$ olsun. Bazı $\rho > 0$ için,

$$\frac{|y_k|}{\rho} \le \frac{|x_k|}{\rho}$$

olur. Buradan, M, azalmayan olduğundan

$$M\left(\frac{|y_k|}{\rho}\right) \le M\left(\frac{|x_k|}{\rho}\right)$$

bulunur. Böylece,

$$\sum_{k=1}^{\infty} M\left(\frac{|y_k|}{\rho}\right) \le \sum_{k=1}^{\infty} M\left(\frac{|x_k|}{\rho}\right) < \infty$$

eşitsizliği elde edilir. Bu ise, $y = (y_k) \in \ell_M$ demektir. O halde, ℓ_M bir normal skaler dizi uzayıdır. h_M, ℓ_M'nin kapalı alt uzayı olduğundan h_M de bir normal skaler dizi uzayı olur. Bu taktirde, teorem 3.2.2'den

$$[\ell_M(X)]^{\alpha} = \ell_M^{\alpha}(B(X,Y)) \text{ ve } [h_M(X)]^{\alpha} = h_M^{\alpha}(B(X,Y))$$

olur. Burada $Y = \mathbb{C}$ alırsak,

$$[\ell_M(X)]^\alpha = \ell_M^\alpha(X^*) \text{ ve } [h_M(X)]^\alpha = h_M^\alpha(X^*)$$

elde ederiz.

$h_M(X)$'in genelleştirilmiş α- ve β-dualleri

$$[h_M(X)]^\alpha = h_M^\alpha(B(X,Y)) = \ell_N(B(X,Y))$$

$$\begin{aligned}[h_M(X)]^\beta &= \left\{(A_k) \in s(B(X,Y)) : \sup_{f \in B_{Y^*}} \sum_{k=1}^{\infty} N\left(\frac{\|A_k^* f\|}{\rho}\right) < \infty, \text{ bazı } \rho > 0 \text{ için}\right\} \\ &= D_N\end{aligned}$$

dir. Burada, her bir k için A_k^*, A_k'nın adjoint operatörü ve B_{Y^*}, Y^*'ın kapalı birim yuvarıdır [20].

Eğer M, 0'da Δ_2-şartını sağlarsa,

$$[\ell_M(X)]^\alpha = \ell_M^\alpha(B(X,Y)) = \ell_N(B(X,Y))$$

ve

$$[\ell_M(X)]^\beta = D_N$$

olur. Y sonlu boyutlu olduğunda

$$D_N = \ell_N(B(X,Y))$$

ve böylece

$$[h_M(X)]^\beta = [h_M(X)]^\alpha = \ell_N(B(X,Y))$$

dir. Eğer Y sonlu boyutlu olursa ve M, 0'da Δ_2-şartını sağlarsa, bu durumda

$$[\ell_M(X)]^\beta = [\ell_M(X)]^\alpha = \ell_N(B(X,Y))$$

olur [20].

ℓ_M, bir normal skaler dizi uzayı olduğundan $Y = \mathbb{C}$ için, önerme 3.2.2'den $\ell_M(X)$ operatör normaldir. Böylece, teorem 3.2.1'den $\ell_M(X)$ bir monoton dizi uzayı olur. Bundan dolayı, önerme 3.2.1'den $[\ell_M(X)]^\beta = [\ell_M(X)]^\alpha$'dır.

Skaler durumdaki gibi vektör değerli Orlicz dizi sınıfını

$$\tilde{\ell}_M(X) = \left\{ x \in s(X) : \delta(x; M) = \sum_{k=1}^{\infty} M(\|x_k\|) < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlayabiliriz. Açık olarak, $\tilde{\ell}_M(X) \subset \ell_M(X)$'tir.

ℓ_M bir normal skaler dizi uzayı olduğundan $\ell_M(X)$'i,

$$\ell_M(X) = \{x \in s(X) : (\|x_k\|)_{k=1}^{\infty} \in \ell_M\}$$

şeklinde ifade edebiliriz. Eğer $\ell_M(X)$'te $X = X^*$ seçilirse, bu durumda

$$\ell_M(X^*) = \left\{ f = (f_k) \in s(X^*) : \sum_{k=1}^{\infty} M\left(\frac{\|f_k\|}{\rho}\right) < \infty, \text{ bazı } \rho > 0 \text{ için} \right\}$$

olur. $\ell_M(X^*)$,

$$\|f\|_{(M)} = \inf\left\{ \rho > 0 : \sum_{k=1}^{\infty} M\left(\frac{\|f_k\|}{\rho}\right) \leq 1 \right\}$$

normu ile bir Banach uzayı olur.

$\ell_M(X)$'in farklı bir tanımı, M'nin tamamlayanı olan N Orlicz fonksiyonu yardımı ile aşağıdaki gibi verilir:

$$\ell_M(X) = \left\{ x = (x_k) \in s(X) : \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_k) \text{ yakınsak, her } f = (f_k) \in \widetilde{\ell}_N(X^*) \text{ için} \right\}$$

burada

$$\widetilde{\ell}_N(X^*) = \left\{ f = (f_k) \in s(X^*) : \delta(f; N) = \sum_{k=1}^{\infty} N(\|f_k\|) < \infty \right\}$$

dir. Açık olarak, $\widetilde{\ell}_N(X^*) \subset \ell_N(X^*)$'dır [3].

BÖLÜM 5

BAZI VEKTÖR-DEĞERLİ ORLICZ DİZİ UZAYLARI ÜZERİNDEKİ OPERATÖRLER

5.1 Vektör-Değerli Orlicz Dizi Uzayları Üzerine Bazı Sonuçlar

Bu kısımda, $\ell_M(X)$ dizi uzayı üzerinde M'nin tamamlayanı olan N Orlicz fonksiyonu yardımı ile başka bir norm tanımlayıp bu normun $\|\cdot\|_{(M)}$ normuna denk olduğunu göstereceğiz. Ayrıca, $h_M(X)$ için bir baz ile aynı fonksiyona sahip bir teoremi ve bir sonraki kısım için kullanışlı bir lemmanın ispatını vereceğiz.

Lemma 5.1.1. *Her bir $x \in \ell_M(X)$ için,*

$$\|x\|_M = \sup\left\{\left|\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_k)\right| : \delta(f; N) \leq 1\right\} \tag{5.1.1}$$

ifadesi $\ell_M(X)$ lineer uzayı üzerinde bir normdur [3].

İspat. $x \in \ell_M(X)$ olsun. O halde $(\|x_k\|)_{k=1}^{\infty} \in \ell_M$'dir. Her bir $f_k \in X^*$ için,

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_k)\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x_k)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\| \|x_k\|$$

dır. $\widetilde{\ell}_N$, normal skaler dizi uzayı olduğundan her $f = (f_k) \in \widetilde{\ell}_N(X^*)$ için, $(\|f_k\|)_{k=1}^{\infty} \in \widetilde{\ell}_N$'dir. Teorem 4.1.2'den

$$\begin{aligned}
\sup\left\{\left|\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_k)\right| : \delta(f; N) \leq 1\right\} &\leq \sup\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\| \|x_k\| : \delta((\|f_k\|); N) \leq 1\right\} \\
&= \sup\left\{\left|\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\| \|x_k\|\right| : \delta((\|f_k\|); N) \leq 1\right\} \\
&< \infty
\end{aligned}$$

olur. Böylece, (5.1.1) fonksiyonu iyi-tanımlıdır. Şimdi, bu fonksiyonun bir norm olduğunu gösterelim. $x, y \in \ell_M(X)$, $\theta \neq (f_k) \in \widetilde{\ell}_N(X^*)$ ve $\alpha \in \mathbb{C}$ olsun.

$$\mathrm{N}_1) \quad \|x\|_M = 0 \Leftrightarrow \text{Her } k \in \mathbb{N} \text{ için, } f_k(x_k) = 0$$
$$\Leftrightarrow \text{Her } k \in \mathbb{N} \text{ için, } x_k = \theta$$
$$\Leftrightarrow x = \theta$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{N}_2) \quad \|\alpha x\|_M &= \sup\left\{\left|\sum_{k=1}^{\infty} f_k(\alpha x_k)\right| : \sum_{k=1}^{\infty} N(\|f_k\|) \leq 1\right\} \\
&= \sup\left\{\left|\sum_{k=1}^{\infty} \alpha f_k(x_k)\right| : \sum_{k=1}^{\infty} N(\|f_k\|) \leq 1\right\} \\
&= |\alpha| \sup\left\{\left|\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_k)\right| : \sum_{k=1}^{\infty} N(\|f_k\|) \leq 1\right\} \\
&= |\alpha| \, \|x\|_M
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{N}_3) \quad \left|\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_k + y_k)\right| &= \left|\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_k) + \sum_{k=1}^{\infty} f_k(y_k)\right| \\
&\leq \left|\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_k)\right| + \left|\sum_{k=1}^{\infty} f_k(y_k)\right|
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan, eşitsizliğin her iki yanında $\delta(f; N) \leq 1$ için supremum alırsak

$$\|x + y\|_M \leq \|x\|_M + \|y\|_M$$

eşitsizliğini elde ederiz.

Sonuç olarak, (5.1.1) fonksiyonu $\ell_M(X)$ lineer uzayı üzerinde bir norm olur. $\square$

Lemma 5.1.2. *$\ell_M(X)$ lineer uzayı üzerinde $\|\cdot\|_M$ ve $\|\cdot\|_{(M)}$ normları tanımlansın. Her $x \in \ell_M(X)$ için,*

$$\|x\|_{(M)} \leq \|x\|_M \leq 2\|x\|_{(M)}$$

eşitsizliği sağlandığından $\ell_M(X)$ lineer uzayı üzerinde $\|\cdot\|_M$ ve $\|\cdot\|_{(M)}$ normları denktir [3].

İspat. İlk olarak $\|x\|_M \leq 2\|x\|_{(M)}$ olduğunu ispatlayalım. $x \in \ell_M(X)$ olsun. Bu durumda,

$$\|x\|_{(M)} = \inf\left\{\rho > 0 : \sum_{k=1}^{\infty} M\left(\frac{\|x_k\|}{\rho}\right) \leq 1\right\}$$

olduğundan

$$\sum_{k=1}^{\infty} M\left(\frac{\|x_k\|}{\|x\|_{(M)}}\right) \leq 1 \tag{5.1.2}$$

dir. $\|x\|_{(M)} \leq 1$ olsun. Bu taktirde, $\frac{1}{\|x\|_{(M)}} \geq 1$ olur ve böylece önerme 4.1.1'den

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} M(\|x_k\|) &\leq \frac{1}{\|x\|_{(M)}} \sum_{k=1}^{\infty} M(\|x_k\|) \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} M\left(\frac{\|x_k\|}{\|x\|_{(M)}}\right) \\ &\leq 1 \\ &< \infty\end{aligned}$$

eşitsizliği bulunur ki bu ise $x \in \tilde{\ell}_M(X)$ demektir. Ayrıca, $\frac{x}{\|x\|_{(M)}} \in \ell_M(X)$ ve

$$\left\|\frac{x}{\|x\|_{(M)}}\right\|_{(M)} = \frac{\|x\|_{(M)}}{\|x\|_{(M)}} = 1$$

olduğundan (5.1.2) ile $\frac{x}{\|x\|_{(M)}} \in \tilde{\ell}_M(X)$ olur.

Şimdi keyfi bir $z \in \tilde{\ell}_M(X)$ alalım. Bu taktirde, lemma 5.1.1'den

$$\|z\|_M = \sup\left\{\left|\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z_k)\right| : \sum_{k=1}^{\infty} N(\|f_k\|) \leqslant 1\right\}$$

yazabiliriz. Her bir $(f_k) \in \tilde{\ell}_N(X^*)$ için, $(\|f_k\|)_{k=1}^{\infty} \in \tilde{\ell}_N$ olduğundan her $k \in \mathbb{N}$ için, $y_k = \|f_k\|$ koşulu ile $(y_k) \in \tilde{\ell}_N$ diyelim. Buna göre,

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z_k)\right| &\leq \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(z_k)| \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\| \|z_k\| \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} y_k \|z_k\|\end{aligned}$$

olur ve Young Eşitsizliği'nden

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|z_k\| y_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} M(\|z_k\|) + \sum_{k=1}^{\infty} N(y_k)$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned}
\|z\|_M &= \sup\left\{\left|\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z_k)\right| : \sum_{k=1}^{\infty} N(\|f_k\|) \leqslant 1\right\} \\
&\leq \sup\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \|z_k\| y_k : \sum_{k=1}^{\infty} N(\|y_k\|) \leqslant 1\right\} \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} M(\|z_k\|) + 1
\end{aligned}$$

elde edilir. $z \in \tilde{\ell}_M(X)$ keyfi olduğundan son eşitsizlik $z = \frac{x}{\|x\|_{(M)}}$ için de sağlanır ve (5.1.2)'den

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{x}{\|x\|_{(M)}}\right\|_M &\leq \sum_{k=1}^{\infty} M\left(\frac{\|x_k\|}{\|x\|_{(M)}}\right) + 1 \\
&\leqslant 2
\end{aligned}$$

elde edilir. Aynı zamanda

$$\frac{1}{\|x\|_{(M)}} \|x\|_M = \left\|\frac{x}{\|x\|_{(M)}}\right\|_M$$

olduğu da düşünülürse,

$$\frac{\|x\|_M}{\|x\|_{(M)}} \leq 2$$

eşitsizliğinden

$$\|x\|_M \leq 2\|x\|_{(M)} \tag{5.1.3}$$

sonucuna ulaşılır.

$\|x\|_{(M)} \leq \|x\|_M$ olduğunu ispat etmek için, p, M'nin sağdan türevi olmak üzere $x \in \ell_M(X)$ olsun. $\|(\|x_k\|)_{k=1}^{\infty}\|_M \leq 1$ olmak üzere $(\|x_k\|)_{k=1}^{\infty} \in \ell_M$ ve her $k \in \mathbb{N}$ için, $y_k = p(\|x_k\|)$ olsun. Her $t \geq 0$ için, $p(t) \geq 0$ olduğundan her $k \in \mathbb{N}$ için, $y_k = p(\|x_k\|) \geq 0$ dır. Bu taktirde, önerme 4.1.1'den her $k \in \mathbb{N}$ için,

$$\|x_k\| p(\|x_k\|) = M(\|x_k\|) + N(p(\|x_k\|))$$

eşitliği yazılabilir. Buradan,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| \, y_k = \sum_{k=1}^{\infty} M(\|x_k\|) + \sum_{k=1}^{\infty} N(y_k) \tag{5.1.4}$$

olur. Önerme 4.1.2'den $(y_k) = (p(\|x_k\|)) \in \tilde{\ell}_N$ ve $\sum\limits_{k=1}^{\infty} N(y_k) \leq 1$ elde ederiz.

Şimdi, her bir $(f_k) \in \tilde{\ell}_N(X^*)$ için, $(\|f_k\|)_{k=1}^{\infty} \in \tilde{\ell}_N$ olduğundan her $k \in \mathbb{N}$ için, $y_k = \|f_k\|$ koşulu ile $(y_k) \in \tilde{\ell}_N$ diyelim. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} N(\|f_k\|) &= \sum_{k=1}^{\infty} N(y_k) \\ &\leq 1 \end{aligned}$$

olur.

$$\begin{aligned} 1 \geq \|(\|x_k\|)_{k=1}^{\infty}\|_M &= \sup\left\{ \left| \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| \, y_k \right| : \sum_{k=1}^{\infty} N(y_k) \leq 1 \right\} \\ &= \sup\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| \, y_k : \sum_{k=1}^{\infty} N(y_k) \leq 1 \right\} \\ &\geq \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| \, y_k \end{aligned}$$

olduğundan için (5.1.4) ile

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} M(\|x_k\|) &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| \, y_k \\ &\leq 1 \end{aligned}$$

eşitsizliği bulunur. Böylece,

$$\begin{aligned} \|x\|_{(M)} &= \inf\left\{ \rho > 0 : \sum_{k=1}^{\infty} M\left(\frac{\|x_k\|}{\rho} \right) \leqslant 1 \right\} \\ &\leq 1 \end{aligned}$$

olur. Buradan, $\frac{x}{\|x\|_M} \in \ell_M(X)$ için,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{x}{\|x\|_M} \right\|_{(M)} &= \frac{\|x\|_{(M)}}{\|x\|_M} \\ &\leq 1 \end{aligned}$$

ve böylece,

$$\|x\|_{(M)} \leq \|x\|_M \tag{5.1.5}$$

olur. (5.1.3) ve (5.1.5) beraber düşünüldüğünde

$$\|x\|_{(M)} \leq \|x\|_M \leq 2\,\|x\|_{(M)}$$

eşitsizliği elde edilmiş olur ki bu da ispatı tamamlar. □

Genelde, $h_M(X)$ için bir Schauder bazı bilinmez. Fakat, teorem 4.2.7'den X Banach uzayı ayrılabilir olduğunda $h_M(X)$'in de ayrılabilir olduğu kolayca görülür. Skaler durumun bir genişlemesi olarak, X Banach uzayı ayrılabilir olsa bile $\ell_M(X)$ ayrılabilir olamaz. Çünkü, $\ell_M(X)$ bir AK-uzayı değildir. Genel olarak, teorem 4.1.7'den Orlicz dizi uzaylarının ayrılabilirliğinin M Orlicz fonksiyonunun sıfırda $\triangle_2$-şartını sağlayıp sağlamadığına bağlıdır. Çünkü, M Orlicz fonksiyonunun sıfırda $\triangle_2$-şartını sağladığında $\ell_M(X) = h_M(X)$ olur ki $h_M(X)$ bir AK-uzayıdır. Şimdi, $h_M(X)$ için, bir baz ile aynı fonksiyona sahip bir teorem verelim [3].

Teorem 5.1.1. *$k = 1, 2, \ldots$ için, $I_k : X \to h_M(X)$ ve $P_k : h_M(X) \to X$ dönüşümleri, sırasıyla, $I_k(u) = u \otimes e_k = (0, 0, \ldots, 0, \overset{k\text{-ıncı yer}}{u}, 0, \ldots)$ ve $P_k(x) = x_k$ şeklinde tanımlansın. Bu taktirde, her bir $x \in h_M(X)$ için,*

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} (I_k \circ P_k)(x)$$

dir. Yani, $\left\| x - \sum\limits_{k=1}^{n} (I_k \circ P_k)(x) \right\|_{(M)} \to 0 \ (n \to \infty)$'dır [3].

İspat. $x \in h_M(X)$ olsun. Bu durumda, $k = 1, 2, \ldots$ için,

$$\begin{aligned}(I_k \circ P_k)(x) &= I_k(P_k(x)) \\ &= I_k(x_k) \\ &= x_k \otimes e_k \\ &= (0, 0, \ldots, 0, x_k, 0, \ldots)\end{aligned}$$

olur ve buradan

$$\sum_{k=1}^{n} (I_k \circ P_k)(x) = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots)$$

elde edilir. Bu taktirde,

$$\begin{aligned}\left\|x-\sum_{k=1}^{n}(I_k\circ P_k)(x)\right\|_{(M)} &= \|(0,0,...,0,x_{n+1},x_{n+2},...)\|_{(M)}\\ &= \inf\left\{\rho>0:\sum_{k=n+1}^{\infty}M\left(\frac{\|x_k\|}{\rho}\right)\le 1\right\}\end{aligned}$$

olur. Her $\rho>0$ için, $\sum_{k=1}^{\infty}M\left(\frac{\|x_k\|}{\rho}\right)<\infty$ olduğundan $\sum_{k=m+1}^{\infty}M\left(\frac{\|x_k\|}{\rho}\right)\le 1$ olacak şekilde bazı $m=m(\rho)$ pozitif tam sayılarını bulabiliriz. Buna göre,

$$\left\|x-\sum_{k=1}^{n}(I_k\circ P_k)(x)\right\|_{(M)}=\inf\left\{\rho>0:\sum_{k=n+1}^{\infty}M\left(\frac{\|x_k\|}{\rho}\right)\le 1\right\}\to 0\ \ (n\to\infty)$$

olur. Yani, her bir $x\in h_M(X)$ için,

$$x=\sum_{k=1}^{\infty}(I_k\circ P_k)(x)$$

dir. □

Bu teorem ile (I_k) dizisinin $h_M(X)$ için bir koordinatsal baz olduğu anlaşılır. Böylece, $h_M(X)$, FK-uzayı ve $\phi(X)$'i içeren bir X-değerli dizi uzayı olduğundan tanım 3.1.5'ten $h_M(X)$, bir AK-uzayıdır.

Uyarı 5.1.1. *$h_M(X)$, FK-uzayı ve $\phi(X)$'i içeren bir X-değerli dizi uzayı olduğundan lemma 3.2.1'den her bir $k\in\mathbb{N}$ için, I_k dönüşümü süreklidir. Ayrıca, $h_M(X)$, FK-uzayı olduğundan her bir $k\in\mathbb{N}$ için, P_k koordinat dönüşümü süreklidir.*

Lemma 5.1.3. *M bir Orlicz fonksiyonu olsun. Bu taktirde,*

$$\Lambda_1=\left\{x\in s(X):\sum_{k=1}^{\infty}M(\|x_k\|)\le 1\right\}\ \ ve\ \Lambda_2=\left\{x\in s(X):\|x\|_{(M)}\le 1\right\}$$

kümeleri özdeştir [3].

İspat. $x\in\Lambda_1$ olsun. O halde, $\rho=1$ için, $\sum_{k=1}^{\infty}M(\|x_k\|)\le 1$ dir. Böylece,

$$\begin{aligned}\|x\|_{(M)} &= \inf\left\{\rho>0:\sum_{k=1}^{\infty}M\left(\frac{\|x_k\|}{\rho}\right)\le 1\right\}\\ &\le 1\end{aligned}$$

olur, yani $x \in \Lambda_2$'dir.

Tersine, $x \in \Lambda_2$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned}\|x\|_{(M)} &= \inf\left\{\rho > 0 : \sum_{k=1}^{\infty} M\left(\frac{\|x_k\|}{\rho}\right) \leq 1\right\} \\ &\leq 1\end{aligned}$$

olur. Bu, bazı $\rho \leq 1$ için, $\sum_{k=1}^{\infty} M\left(\frac{\|x_k\|}{\rho}\right) \leq 1$ demektir. Bununla birlikte, M azalmayan olduğundan

$$\sum_{k=1}^{\infty} M\left(\|x_k\|\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} M\left(\frac{\|x_k\|}{\rho}\right) \leq 1$$

olur, yani $x \in \Lambda_1$'dir. Yani, $\Lambda_1 = \Lambda_2$ olur. □

5.2 Operatörlerin Karakterizasyonları

Bu kısımda, $h_M(X)$'ten bir başka Y Banach uzayı içine tanımlanan operatörlerin temsillerini belirten bir teoremi ispat edeceğiz ve bir örnek vereceğiz. $\ell_N(B(X,Y)) \subseteq E_N$ içermesinin var olduğunu ve bazı durumlarda bu içermenin kesin olabileceğini bir örnekle göstereceğiz. Ayrıca, Y Banach uzayının sonlu boyutlu olması durumunda $E_N = \ell_N(B(X,Y))$ eşitliğinin sağlandığını gösteren bir teoremi ispat edeceğiz ve bazı sonuçlara varacağız.

Teorem 5.2.1. *X ve Y Banach uzayları, M ve N karşılıklı tamamlayan Orlicz fonksiyonları olsun. Bu taktirde, $B(h_M(X), Y)$ uzayı*

$$E_N = \left\{A = (A_k) \in s(B(X,Y)) : \|A\| = \sup_{f \in B_{Y^*}} \|(A_k^* f)_{k=1}^{\infty}\|_N < \infty\right\}$$

Banach uzayına $T \to (T \circ I_k)$ dönüşümü ile denktir. Burada, her bir I_k teorem 5.1.1'deki gibi tanımlanır ve bir denklik ile bir birebir, örten, lineer izometri kastedilir. Ayrıca, $B_{Y^*} = \{f \in Y^* : \|f\| \leq 1\}$, Y^* dual uzayının kapalı birim yuvarıdır [3].

İspat. İspatı iki adımda yapacağız. Öncelikle E_N lineer uzayının $\|A\|$ normu ile bir

Banach uzayı olduğunu gösterelim. $A, B \in E_N$, $\alpha \in \mathcal{F}$ keyfi olarak verilsin.

$$\begin{aligned}
\text{i)}\quad A = (0,0,...,0,...) &\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N} \text{ için, } A_k = 0 \\
&\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N} \text{ ve } \forall x \in X \text{ için, } A_k(x) = 0 \\
&\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}, \forall f \in Y^* \text{ ve } \forall x \in X \text{ için,} \\
&\ \left(A_k^* f\right)(x) = f\left(A_k\left(x\right)\right) = f\left(0\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N} \text{ ve } \forall f \in Y^* \text{ için, } A_k^* f = 0 \\
&\Leftrightarrow \|A\| = \sup_{f \in B_{Y^*}} \|(A_k^* f)_{k=1}^{\infty}\|_N = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{ii)}\quad \|\alpha A\| &= \sup_{f \in B_{Y^*}} \|((\alpha A_k)^* f)_{k=1}^{\infty}\|_N \\
&= \sup_{f \in B_{Y^*}} \|(\alpha A_k^* f)_{k=1}^{\infty}\|_N \\
&= \sup_{f \in B_{Y^*}} \|\alpha (A_k^* f)_{k=1}^{\infty}\|_N \\
&= \sup_{f \in B_{Y^*}} |\alpha| \,.\, \|(A_k^* f)_{k=1}^{\infty}\|_N \\
&= |\alpha| \,.\, \sup_{f \in B_{Y^*}} \|(A_k^* f)_{k=1}^{\infty}\|_N \\
&= |\alpha| \,.\, \|A\|
\end{aligned}$$

iii) $f \in B_{Y^*}$ keyfi verilsin. Buna göre,

$$\begin{aligned}
\|((A_k + B_k)^* f)_{k=1}^{\infty}\|_N &= \|((A_k^* + B_k^*) f)_{k=1}^{\infty}\|_N \\
&= \|(A_k^* f + B_k^* f)_{k=1}^{\infty}\|_N \\
&= \|(A_k^* f)_{k=1}^{\infty} + (B_k^* f)_{k=1}^{\infty}\|_N \\
&\leq \|(A_k^* f)_{k=1}^{\infty}\|_N + \|(B_k^* f)_{k=1}^{\infty}\|_N
\end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Buradan,

$$\begin{aligned}
\|A + B\| &= \sup_{f \in B_{Y^*}} \|((A_k + B_k)^* f)_{k=1}^{\infty}\|_N \\
&\leq \sup_{f \in B_{Y^*}} [\|(A_k^* f)_{k=1}^{\infty}\|_N + \|(B_k^* f)_{k=1}^{\infty}\|_N] \\
&\leq \sup_{f \in B_{Y^*}} \|(A_k^* f)_{k=1}^{\infty}\|_N + \sup_{f \in B_{Y^*}} \|(B_k^* f)_{k=1}^{\infty}\|_N \\
&= \|A\| + \|B\|
\end{aligned}$$

olur.

Böylece, $\|A\|$, E_N üzerinde bir norm ve bu norm ile E_N bir normlu uzay olur.

Şimdi, E_N normlu uzayının bir Banach uzayı olduğunu gösterelim. $(A_n)_{n=1}^{\infty}$, E_N'de keyfi bir Cauchy dizisi olsun. Her bir $n, k \in \mathbb{N}$ için, $A_{nk} \in B(X, Y)$ olmak üzere $A_n = (A_{nk})_{k=1}^{\infty} = (A_{n1}, A_{n2}, ..., A_{nk}, ...)$ olsun. Bu taktirde, her $\varepsilon > 0$ ve her $n, m \geq n_0$ için,

$$\|A_n - A_m\| < \varepsilon$$

olacak şekilde en az bir $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Buna göre,

$$\begin{aligned} \|A_n - A_m\| &= \|(A_{nk})_{k=1}^{\infty} - (A_{mk})_{k=1}^{\infty}\| \qquad (5.2.1) \\ &= \|(A_{nk} - A_{mk})_{k=1}^{\infty}\| \\ &= \sup_{f \in B_{Y^*}} \|((A_{nk} - A_{mk})^* f)_{k=1}^{\infty}\|_N \\ &= \sup_{f \in B_{Y^*}} \|(A_{nk}^* f - A_{mk}^* f)_{k=1}^{\infty}\|_N \\ &= \sup_{f \in B_{Y^*}} \|(A_{nk}^* f)_{k=1}^{\infty} - (A_{mk}^* f)_{k=1}^{\infty}\|_N < \varepsilon \end{aligned}$$

kalır. Bu durumda, her $\varepsilon > 0$, her $n, m \geq n_0$ ve her $f \in B_{Y^*}$ için,

$$\|(A_{nk}^* f)_{k=1}^{\infty} - (A_{mk}^* f)_{k=1}^{\infty}\|_N < \varepsilon \qquad (5.2.2)$$

olacak şekilde en az bir $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Böylece, her $k \in \mathbb{N}$ ve her $f \in B_{Y^*}$ için, $(A_{nk}^* f)_{n=1}^{\infty}$, $\ell_N(X^*)$'da bir Cauchy dizisi olur. $\ell_N(X^*)$ bir Banach uzayı olduğundan bu dizi $\ell_N(X^*)$'da bir noktaya yakınsar. Bu noktayı, her $k \in \mathbb{N}$ ve her $f \in B_{Y^*}$ için, $\lim\limits_{n\to\infty} A_{nk}^* f = A_k^* f$ ile gösterelim. (5.2.2)'de $m \to \infty$ iken limit alırsak

$$\|(A_{nk}^* f)_{k=1}^{\infty} - (A_k^* f)_{k=1}^{\infty}\|_N < \varepsilon$$

olur. Böylece, (5.2.1)'den $A = (A_k)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \|A_n - A\| &= \sup_{f \in B_{Y^*}} \|((A_{nk} - A_k)^* f)_{k=1}^{\infty}\|_N \\ &= \sup_{f \in B_{Y^*}} \|(A_{nk}^* f)_{k=1}^{\infty} - (A_k^* f)_{k=1}^{\infty}\|_N < \varepsilon \end{aligned}$$

bulunur. Buradan, $\lim\limits_{n\to\infty} \|A_n - A\| = 0$ olur. Yani, (A_n) dizisi A'ya yakınsaktır. Ayrıca,

$$|\|A_n\| - \|A\|| \leq \|A_n - A\| \to 0 \ \ (n \to \infty)$$

eşitsizliğinden $\|A_n\| \to \|A\|$ $(n \to \infty)$ olur. Böylece, $\|A\| < \infty$ bulunur. O halde $A \in E_N$'dir. Bu taktirde, E_N bir tam normlu uzay, yani Banach uzayı olur.

$T \in B(h_M(X), Y)$ ve her bir $k \in \mathbb{N}$ için, $A_k = T \circ I_k$ olsun. Açık olarak, her bir $k \in \mathbb{N}$ için, $A_k : X \to Y$ operatörü lineerdir. Uyarı 5.1.1'den I_k sürekli olduğundan her bir $k \in \mathbb{N}$ için, $A_k \in B(X, Y)$ olur. Bu durumda, $A = (A_k) \in s(B(X, Y))$'dir. Her bir $k \in \mathbb{N}$ için, P_k dönüşümü teorem 5.1.1'deki gibi tanımlanmak üzere her $x \in h_M(X)$ için,

$$\|(A_k \circ P_k)(x)\| = \|A_k(x_k)\| = 0 \Rightarrow A_k(x_k) = 0$$

dır. Teorem 5.1.1'den her bir $x \in h_M(X)$,

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} (I_k \circ P_k)(x)$$

şeklinde bir temsile sahip olduğundan

$$\begin{aligned} Tx &= T\left(\sum_{k=1}^{\infty} (I_k \circ P_k)(x)\right) \\ &= T\left(\sum_{k=1}^{\infty} I_k(x_k)\right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (T \circ I_k)(x_k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k(x_k) \end{aligned}$$

yazabiliriz.

Şimdi,

$$\Psi(T) = A = (A_k)_{k=1}^{\infty}; A_k = T \circ I_k$$

ile $\Psi : B(h_M(X), Y) \to E_N$ dönüşümünü tanımlayalım. Bu dönüşümün birebir, örten ve lineer izometri olduğunu gösterelim.

Ψ dönüşümü lineerdir. Gerçekten, $\alpha A^1 + \beta A^2 = A$, $\alpha T^1 + \beta T^2 = T$ ve $\Psi(T^1) = A^1$, $\Psi(T^2) = A^2$, $\Psi(T) = A$ bağıntıları sağlanacak şekilde $\alpha, \beta \in \mathcal{F}$, $A^1, A^2, A \in E_N$

ve $T^1, T^2, T \in B\left(h_M(X), Y\right)$ verilsin. Bu taktirde,

$$\begin{aligned}
\Psi\left(\alpha T^1 + \beta T^2\right) &= \Psi\left(T\right) \\
&= A \\
&= \alpha A^1 + \beta A^2 \\
&= \alpha \Psi\left(T^1\right) + \beta \Psi\left(T^2\right)
\end{aligned}$$

olur. Böylece, Ψ dönüşümü lineerdir.

Ψ dönüşümü birebirdir. Gerçekten, $T \in B\left(h_M\left(X\right), Y\right)$ keyfi ve $\Psi\left(T\right) = 0$ olsun. Bu taktirde, her bir $k \in \mathbb{N}$ için, $T \circ I_k = 0$ olur. I_k'nın tanımından her bir $k \in \mathbb{N}$ için, $I_k \neq 0$ olduğundan $T = 0$ bulunur. T keyfi verildiğinden $Ker\left(T\right) = \{0\}$ olur. Böylece, Ψ, birebirdir.

Ψ dönüşümü örtendir. Gerçekten, keyfi bir $A \in E_N$ için, $h_M\left(X\right)$ üzerinde T operatörünü $Tx = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(x_k)$ ile tanımlarsak, bu taktirde, Young eşitsizliğini kullanarak

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{k=m}^{n} A_k(x_k)\right\| &= \sup_{f \in B_{Y^*}} \left| f\left(\sum_{k=m}^{n} A_k(x_k)\right)\right| \\
&= \sup_{f \in B_{Y^*}} \left|\sum_{k=m}^{n} f\left(A_k(x_k)\right)\right| \\
&\leq \sup_{f \in B_{Y^*}} \sum_{k=m}^{n} \left| f\left(A_k(x_k)\right)\right| \\
&= \sup_{f \in B_{Y^*}} \sum_{k=m}^{n} \left|(A_k^* f)(x_k)\right| \\
&\leq \sup_{f \in B_{Y^*}} \sum_{k=m}^{n} \|A_k^* f\| \cdot \|x_k\| \\
&= \sup_{f \in B_{Y^*}} \sum_{k=m}^{n} \frac{\|A_k^* f\|}{\|(A_k^* f)_{k=1}^{\infty}\|_N} \cdot \|(A_k^* f)_{k=1}^{\infty}\|_N \cdot \|x_k\| \\
&\leq \sup_{f \in B_{Y^*}} \sum_{k=m}^{n} \left[N\left(\frac{\|A_k^* f\|}{\|(A_k^* f)_{k=1}^{\infty}\|_N}\right) + M\left(\|(A_k^* f)_{k=1}^{\infty}\|_N \cdot \|x_k\|\right)\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \sup_{f\in B_{Y^*}} \sum_{k=m}^{n} N\left(\frac{\|A_k^* f\|}{\|(A_k^* f)_{k=1}^{\infty}\|_N}\right) + \sup_{f\in B_{Y^*}} \sum_{k=m}^{n} M\left(\|(A_k^* f)_{k=1}^{\infty}\|_N \cdot \|x_k\|\right) \\
&\leq \sup_{f\in B_{Y^*}} \sum_{k=m}^{n} N\left(\frac{\|A_k^* f\|}{\|(A_k^* f)_{k=1}^{\infty}\|_N}\right) + \sum_{k=m}^{n} M\left(\|A\| \cdot \|x_k\|\right) \\
&= \sup_{f\in B_{Y^*}} \sum_{k=m}^{n} N\left(\frac{\|A_k^* f\|}{\|(A_k^* f)_{k=1}^{\infty}\|_N}\right) + \sum_{k=m}^{n} M\left(\frac{\|x_k\|}{1/\|A\|}\right)
\end{aligned}
$$

elde ederiz. Her bir $f \in B_{Y^*}$ için, $(A_k^* f)_{k=1}^{\infty} \in \ell_N(X^*)$ olduğundan ve teorem 4.1.5'den

$$
\sum_{k=m}^{n} N\left(\frac{\|A_k^* f\|}{\|(A_k^* f)_{k=1}^{\infty}\|_N}\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} N\left(\frac{\|A_k^* f\|}{\|(A_k^* f)_{k=1}^{\infty}\|_N}\right) \leq 1
$$

kalır. Buradan,

$$
\sup_{f\in B_{Y^*}} \sum_{k=m}^{n} N\left(\frac{\|A_k^* f\|}{\|(A_k^* f)_{k=1}^{\infty}\|_N}\right) \leq 1
$$

elde edilir. Böylece,

$$
\sup_{f\in B_{Y^*}} \sum_{k=m}^{n} N\left(\frac{\|A_k^* f\|}{\|(A_k^* f)_{k=1}^{\infty}\|_N}\right) \to 0 \ \ (n, m \to \infty)
$$

olur. Ayrıca, $x \in h_M(X)$ olduğundan

$$
\sum_{k=m}^{n} M\left(\frac{\|x_k\|}{1/\|A\|}\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} M\left(\frac{\|x_k\|}{1/\|A\|}\right) < \infty
$$

dur. Böylece,

$$
\sum_{k=m}^{n} M\left(\frac{\|x_k\|}{1/\|A\|}\right) \to 0 \ \ (n, m \to \infty)
$$

olur. Buradan,

$$
\left\|\sum_{k=1}^{n} A_k(x_k) - \sum_{k=1}^{m-1} A_k(x_k)\right\| = \left\|\sum_{k=m}^{n} A_k(x_k)\right\| \to 0 \ \ (n, m \to \infty)
$$

elde ederiz. Böylece, $\sum_{k=1}^{\infty} A_k(x_k)$ serisi yakınsak olur. Yani, T iyi-tanımlıdır. Dahası, T operatörü keyfi $A \in E_N$ için tanımlandığından Ψ dönüşümü örtendir.

Ψ dönüşümü bir izometridir. Gerçekten, $B_{h_M(X)}$, $h_M(X)$'in kapalı birim yuvarı olmak üzere $T \in B\left(h_M\left(X\right), Y\right)$ için,

$$\begin{aligned}
\|T\| &= \sup_{x \in B_{h_M(X)}} \|Tx\| \\
&= \sup_{x \in B_{h_M(X)}} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} A_k(x_k) \right\| \\
&= \sup_{x \in B_{h_M(X)}} \sup_{f \in B_{Y^*}} \left| f\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k(x_k) \right) \right| \\
&= \sup_{x \in B_{h_M(X)}} \sup_{f \in B_{Y^*}} \left| \sum_{k=1}^{\infty} f\left(A_k(x_k)\right) \right| \\
&= \sup_{x \in B_{h_M(X)}} \sup_{f \in B_{Y^*}} \left| \sum_{k=1}^{\infty} (A_k^* f)(x_k) \right| \\
&= \sup_{f \in B_{Y^*}} \sup_{x \in B_{h_M(X)}} \left| \sum_{k=1}^{\infty} (A_k^* f)(x_k) \right| \\
&= \sup_{f \in B_{Y^*}} \sup \left\{ \left| \sum_{k=1}^{\infty} (A_k^* f)(x_k) \right| : \sum_{k=1}^{\infty} M\left(\|x_k\|\right) \leq 1 \right\}, \text{ (Lemma 5.1.3 ile)} \\
&= \sup_{f \in B_{Y^*}} \|(A_k^* f)_{k=1}^{\infty}\|_N \\
&= \|A\| \\
&= \|\Psi\left(T\right)\|
\end{aligned}$$

olur. Böylece, Ψ dönüşümü, uzaklığı koruyan bir dönüşüm, yani bir izometridir. $\square$

Örnek 5.2.1. *$X = Y = c_0$ ve M, N karşılıklı tamamlayan Orlicz fonksiyonları olsun. Bu taktirde,*

$$h_M(c_0) = \left\{ x \in s\left(c_0\right) : \sum_{k=1}^{\infty} M\left(\frac{\|x_k\|_\infty}{\rho} \right) < \infty, \textit{ her } \rho > 0 \textit{ için} \right\}$$

c_0 değerli Orlicz dizi uzayı olur.

$$A_k = \begin{bmatrix} 1/k^2 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1/\left(2k^2\right) & 1/\left(2k^2\right) & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1/\left(2k^2\right) & 1/\left(2k^2\right) & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1/\left(2k^2\right) & 1/\left(2k^2\right) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \; k = 1, 2, ...$$

sonsuz matrisleri verilsin. Her bir $n,k\in\mathbb{N}$ *ve her* $x=(x_m)\in c_0$ *için,*

$$(A_kx)_n=\sum_{m=1}^{\infty}a^k_{nm}x_m$$

eşitliğinin sağ tarafındaki seri yakınsak ve her $k\in\mathbb{N}$ *ve her* $x=(x_m)\in c_0$ *için,*

$$A_kx=((A_kx)_n)_{n\in\mathbb{N}}\in c_0$$

olduğundan her $k\in\mathbb{N}$ *için,* $A_k=\left(a^k_{nm}\right)\in(c_0,c_0)$*'dır.* c_0 *dizi uzayı, AK-özelliğe sahip bir BK-uzayı olduğundan teorem 2.3.3'ten* $B(c_0,c_0)$ *uzayı,* (c_0,c_0) *sonsuz matris sınıfına denktir. Yani,* $B(c_0,c_0)$ *uzayının her bir elemanı bir sonsuz matris ile temsil edilebilir. Bu nedenle, teorem 2.3.1 ve teorem 2.3.2'den her bir* $k\in\mathbb{N}$ *için,* $A_k=\left(a^k_{nm}\right)$ *matrisi,*

i) $a_{nm}\to 0\,(n\to\infty,\ \text{her } m\in\mathbb{N})$

ii) $M=\sup_n\sum\limits_{m=1}^{\infty}\left|a^k_{nm}\right|=k^{-2}<\infty$

koşullarını sağladığından her bir $k\in\mathbb{N}$ *için,* $A_k\in B(c_0,c_0)$ *ve* $\|A_k\|=M$*'dir.*

Teorem 5.2.1'den $A=(A_k)$ *dizisi* $\ell_M(c_0)$*'dan* c_0 *içine bir sınırlı lineer operatördür. Bunun doğru olduğunu görmek için teorem 5.2.1'den* $B(h_M(c_0),c_0)$ *uzayı*

$$E_N(c_0)=\left\{A=(A_k)\in s(B(h_M(c_0),c_0)):\|A\|=\sup_{f\in B_{c_0^*}}\|(A_k^*f)_{k=1}^{\infty}\|_N<\infty\right\}$$

Banach uzayına denk olduğundan $A=(A_k)\in E_N(c_0)$ *olduğunu göstermek yeterlidir.* c_0*'ın birim vektör bazını ve* $c_0^*=\ell_1$ *olmasını kullanarak,*

$$A_k^*=\begin{bmatrix}1/k^2 & 1/(2k^2) & 0 & 0 & \cdots\\ 0 & 1/(2k^2) & 1/(2k^2) & 0 & \cdots\\ 0 & 0 & 1/(2k^2) & 1/(2k^2) & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & 1/(2k^2) & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots\end{bmatrix},\ k=1,2,...$$

adjoint operatörlerini elde ederiz. Açık olarak, her $k\in\mathbb{N}$ *için,* $A_k^*\in B(\ell_1,\ell_1)$*'dir. Bundan dolayı, her bir* $f=(a_1,a_2,...,a_n,...)\in\ell_1$; $a_1,a_2,...\in\mathcal{F}$ *için,*

$$A_k^*f=y_k=(y_k^n)_{n=1}^{\infty};\ y_k^n=\frac{a_n+a_{n+1}}{2k^2}$$

dir. Dahası,

$$\begin{aligned}\|A_k^*f\|_{\ell_1} &= \|y_k\|_{\ell_1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n + a_{n+1}|}{2k^2} \\ &\leq \|A_k^*\| \, \|f\|_{\ell_1} \\ &= \frac{1}{k^2} \|f\|_{\ell_1} \quad (\|A_k^*\| = \|A_k\| \ \textit{ ile})\end{aligned}$$

olduğundan her bir $f \in B_{\ell_1} = \{f \in \ell_1 : \|f\|_{\ell_1} \leq 1\}$ *ve her* $\rho > 0$ *için,*

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} N\left(\frac{\|A_k^*f\|_{\ell_1}}{\rho}\right) &\leq \sum_{k=1}^{\infty} N\left(\frac{1}{k^2\rho} \|f\|_{\ell_1}\right) \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} N\left(\frac{1}{k^2\rho}\right) \\ &\leq N\left(\frac{1}{\rho}\right) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \\ &= \frac{\pi^2}{6} N\left(\frac{1}{\rho}\right) \\ &< \infty\end{aligned}$$

olur. Böylece, $(A_k^*f)_{k=1}^{\infty} \in h_N(\ell_1)$ *bulunur. Eğer*

$$K = \inf\left\{\rho > 0 : N\left(\frac{1}{\rho}\right) \leq \frac{6}{\pi^2}\right\}$$

dersek, bu durumda,

$$\begin{aligned}\inf\left\{\rho > 0 : \sum_{k=1}^{\infty} N\left(\frac{\|A_k^*f\|_{\ell_1}}{\rho}\right) \leq 1\right\} &\leq \inf\left\{\rho > 0 : \frac{\pi^2}{6} N\left(\frac{1}{\rho}\right) \leq 1\right\} \\ &= \inf\left\{\rho > 0 : N\left(\frac{1}{\rho}\right) \leq \frac{6}{\pi^2}\right\} \\ &= K\end{aligned}$$

olacağından her bir $f \in B_{\ell_1}$ *için,*

$$\begin{aligned}\|(A_k^*f)_{k=1}^{\infty}\|_{(N)} &= \inf\left\{\rho > 0 : \sum_{k=1}^{\infty} N\left(\frac{\|A_k^*f\|_{\ell_1}}{\rho}\right) \leq 1\right\} \\ &\leq K\end{aligned}$$

olur. Lemma 5.1.2'den

$$\begin{aligned}\left\|(A_k^* f)_{k=1}^{\infty}\right\|_N &\leq 2\left\|(A_k^* f)_{k=1}^{\infty}\right\|_{(N)} \\ &\leq 2K\end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Böylece

$$\begin{aligned}\|A\| &= \sup_{f\in B_{\ell_1}} \left\|(A_k^* f)_{k=1}^{\infty}\right\|_N \\ &\leq 2K \\ &< \infty\end{aligned}$$

olur. Bu, $A = (A_k) \in E_N(c_0)$ *demektir.* $B(h_M(c_0), c_0) \subset B(\ell_M(c_0), c_0)$ *olduğundan* $A = (A_k) \in B(\ell_M(c_0), c_0)$ *bulunur [3].*

Uyarı 5.2.1. X *ve* Y *Banach uzayları olmak üzere,*

$$\ell_N(B(X,Y)) \subseteq E_N$$

dir. Bu içerme,

$$\|A_k^* f\| \leq \|A_k^*\| \|f\| = \|A_k\| \|f\|$$

eşitsizliğinden görülür. Gerçekten, eğer $(A_k) \in \ell_N(B(X,Y))$ *ve* $f \in B_{Y^*}$ *ise,* $(A_k^* f)_{k=1}^{\infty} \in \ell_N(X^*)$ *olacağından bazı* $\rho > 0$ *için,*

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} N\left(\frac{\|A_k^* f\|}{\rho}\right) &\leq \sum_{k=1}^{\infty} N\left(\frac{\|A_k\| \|f\|}{\rho}\right) \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} N\left(\frac{\|A_k\|}{\rho}\right) \\ &\leq 1\end{aligned}$$

yazabiliriz. Bu nedenle,

$$\left\|(A_k^* f)_{k=1}^{\infty}\right\|_{(N)} \leq \left\|(A_k)_{k=1}^{\infty}\right\|_{(N)}$$

dir. Böylece, lemma 5.1.2'den

$$\begin{aligned}\left\|(A_k^* f)_{k=1}^{\infty}\right\|_N &\leq 2\left\|(A_k^* f)_{k=1}^{\infty}\right\|_{(N)} \\ &\leq 2\left\|(A_k)_{k=1}^{\infty}\right\|_{(N)}\end{aligned}$$

olur. Buradan,

$$\begin{aligned}\|A\| &= \sup_{f\in B_{Y^*}} \|(A_k^* f)_{k=1}^{\infty}\|_N \\ &\leq 2\,\|(A_k)_{k=1}^{\infty}\|_{(N)} \\ &< \infty\end{aligned}$$

bulunur. Böylece, $(A_k) \in E_N$ *olur. Sonuç olarak,*

$$\ell_N\left(B\left(X,Y\right)\right) \subseteq E_N$$

elde edilir [3].

Örnek 5.2.2. *Uyarı 5.2.1'deki içerme bağıntısı kesin olabilir.* $X = \ell_1$, $Y = h_M$ *ve* M, N *karşılıklı tamamlayan Orlicz fonksiyonları olsun ve* $M\left(1\right) = 1$ *koşulu sağlansın.* $x = (x_n) \in \ell_1$ *için,*

$$A_k x = x_k \otimes e_k = (0,0,...,0,\overset{k\text{-ıncı yer}}{x_k},0,...)$$

eşitliği ile $A_k : \ell_1 \to h_M$ *operatörü tanımlanır. Önerme 4.1.7'den* $h_M^* = \ell_N$ *olduğundan bazı* $f \in B_{h_M^*}$ *için,*

$$f\left(x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$$

yazarız, burada $y = (y_n) \in \ell_N$ *ve* $\|y\|_{(N)} = \|f\|$ *dir. Bundan dolayı,*

$$\left(A_k^* f\right)\left(x\right) = f\left(A_k\left(x\right)\right) = x_k y_k$$

olur ve böylece

$$\begin{aligned}\left|\left(A_k^* f\right)\left(x\right)\right| &= |x_k y_k| \\ &= |x_k|\,|y_k| \\ &\leq |y_k| \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| \\ &= |y_k|\,\|x\|_{\ell_1}\end{aligned}$$

eşitsizliğinden $\|A_k^* f\| = |y_k|$ *bulunur. Teorem 4.1.4'ten*

$$\sum_{k=1}^{\infty} N\left(\frac{\|A_k^* f\|}{\|y\|_{(N)}}\right) \leq 1$$

olur ve $\|y\|_{(N)} = \|f\| \leq 1$ *ile* N *azalmayan olduğundan*

$$\sum_{k=1}^{\infty} N\left(\|A_k^* f\|\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} N\left(\frac{\|A_k^* f\|}{\|y\|_{(N)}}\right) \leq 1$$

bulunur. Lemma 5.1.3 ile $\|(A_k^* f)_{k=1}^{\infty}\|_{(N)} \leq 1$ *olur. Böylece,*

$$\|(A_k^* f)_{k=1}^{\infty}\|_N \leq 2\,\|(A_k^* f)_{k=1}^{\infty}\|_{(N)}$$

eşitsizliğinden

$$\|A\| = \sup_{f \in B_{h_M^*}} \|(A_k^* f)_{k=1}^{\infty}\|_N < \infty$$

olur. Yani, $(A_k) \in E_N$ *dir.*

Öte yandan, her bir k *için,* $\|A_k\| = 1$ *dir. Gerçekten, her bir* k *ve* $x \in B_{\ell_1}$ *için,* $A_k x \in h_M$ *olduğundan*

$$\begin{aligned} \|A_k x\|_{(M)} &= \|x_k \otimes e_k\|_{(M)} \\ &= \inf\left\{\rho > 0 : M\left(\frac{|x_k|}{\rho}\right) \leq 1\right\} \\ &= |x_k|\,,\ \text{(}M\,(1) = 1 \text{ olduğundan)} \\ &\leq \|x\|_{\ell_1} \\ &\leq 1 \end{aligned}$$

olur. Böylece, her bir k *için,*

$$\frac{\|A_k x\|_{(M)}}{\|x\|_{\ell_1}} \leq 1,\ \ x \neq \theta$$

ise

$$\begin{aligned} \|A_k\| &= \sup_{\|x\|_{\ell_1} \leq 1} \frac{\|A_k x\|_{(M)}}{\|x\|_{\ell_1}},\ \ x \neq \theta \\ &\leq 1 \end{aligned}$$

dir. Ayrıca, her bir k *için,*

$$x = e_k = (0, 0, ..., 0, \overset{k\text{-ıncı yer}}{1}, 0, ...) \in \ell_1$$

alınırsa,

$$\begin{aligned}\|A_k x\|_{(M)} &= \|A_k e_k\|_{(M)} \\ &= \|e_k\|_{\ell_1} \\ &= 1\end{aligned}$$

olur. Bu nedenle, her bir k için,

$$\begin{aligned}\|A_k\| &= \sup_{\|x\|_1 \leq 1} \frac{\|A_k x\|_{(M)}}{\|x\|_{\ell_1}}, \;\; x \neq \theta \\ &= \sup_{\|e_k\|=1} \frac{\|A_k x\|_{(M)}}{\|e_k\|_{\ell_1}} \\ &= 1\end{aligned}$$

dir. Her $\rho > 0$ için,

$$\sum_{k=1}^{\infty} N\left(\frac{\|A_k\|}{\rho}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} N\left(\frac{1}{\rho}\right) = \infty$$

olduğundan $(A_k) \notin \ell_N\left(B\left(\ell_1, h_M\right)\right)$'dir [3].

Y Banach uzayının sonlu boyutlu olması durumunda, Dvoretzky-Rogers Teoremi, uyarı 5.2.1'deki içerme bağıntısının bir eşitlik olduğunu iddia eder. Bunu göstermek için, m_0'ın $A = \{x = (x_n) \in s : x_n \in \{0,1\}, n \geq 1\}$ olmak üzere $m_0 = sp\{A\}$ şeklinde tanımlı olduğunu hatırlayalım [3].

Teorem 5.2.2. *Y sonlu boyutlu olduğu zaman $E_N = \ell_N\left(B\left(X,Y\right)\right)$'dir [3].*

İspat. Y sonlu boyutlu olsun. $(A_k) \in E_N$ ve $x = (x_k) \in h_M(X)$ olduğunu kabul edelim. Her bir $v = (v_k) \in m_0$ için, $vx = (v_k x_k) \in h_M(X)$'tir. Gerçekten, her bir $\rho > 0$ için, $\lambda = \max\limits_k |v_k|$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} M\left(\frac{\|v_k x_k\|}{\rho}\right) &= \sum_{k=1}^{\infty} M\left(\frac{|v_k|\,\|x_k\|}{\rho}\right) \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} M\left(\frac{\|x_k\|}{\rho/\lambda}\right) \\ &< \infty\end{aligned}$$

dur. Böylece, $vx = (v_k x_k) \in h_M(X)$ olur. Bundan başka, teorem 5.2.1'den

$$Tx = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(x_k)$$

operatörü $h_M(X)$ üzerinde iyi-tanımlı olduğundan her $v \in m_0$ için,

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k(v_k x_k)$$

serisi yakınsaktır. Şimdi, doğal sayıların kesin artan bir dizisi olarak $(k_i)_{i\in\mathbb{N}}$ dizisi ve

$$b_k = \begin{cases} 1 \quad , \quad k = k_i \quad \text{ise} \\ 0 \quad , \quad k \neq k_i \quad \text{ise} \end{cases}$$

ile $b = (b_k)$ dizisi tanımlansın. Bu taktirde, aşikar olarak $b \in m_0$ ve böylece

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k(b_k x_k) = \sum_{i=1}^{\infty} A_{k_i}(x_{k_i})$$

serisi yakınsaktır. Buna göre, tanım 2.2.10'dan $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k(x_k)$ serisi altseri yakınsaktır. Böylece bu seri koşulsuz yakınsak olur. Buradan, Y sonlu boyutlu olduğundan Dvoretzky-Rogers Teoremi'nden bu seri mutlak yakınsaktır. Yani, her bir $x = (x_k) \in h_M(X)$ için,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|A_k(x_k)\| < \infty$$

dur. Her bir $k \in \mathbb{N}$ için, $A_k \in B(X, Y)$ olduğundan

$$\|A_k\| \leq 2\|A_k y_k\| \tag{5.2.3}$$

olacak şekilde bazı $y_k \in B_X = \{v \in X : \|v\| \leq 1\}$ vektörlerini bulabiliriz. Bundan başka, bir $z = (z_k)$ dizisini her bir $u = (u_k) \in h_M$ için, $z_k = u_k y_k$ olacak şekilde tanımlayalım. Bu durumda,

$$\|u_k y_k\| = |u_k|\,\|y_k\| \leq |u_k|$$

olduğundan dolayı her bir $\rho > 0$ için,

$$\sum_{k=1}^{\infty} M\left(\frac{\|u_k y_k\|}{\rho}\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} M\left(\frac{|u_k|}{\rho}\right) < \infty$$

olur. O halde, $z = (z_k) \in h_M(X)$'tir. Böylece, (5.2.3)'ten

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} |\|A_k\| u_k| &= \sum_{k=1}^{\infty} \|A_k\| |u_k| \\ &\leq 2 \sum_{k=1}^{\infty} |u_k| \|A_k y_k\| \\ &= 2 \sum_{k=1}^{\infty} \|A_k (u_k y_k)\| \\ &= 2 \sum_{k=1}^{\infty} \|A_k z_k\| \\ &< \infty\end{aligned}$$

olur. Buradan, $(\|A_k\|)_{k=1}^{\infty} \in h_M^{\alpha}$'dır. Fakat, sonuç 4.1.3'ten $h_M^{\alpha} = \ell_N$'dir. Bu yüzden, bazı $\rho > 0$ için,

$$\sum_{k=1}^{\infty} N\left(\frac{\|A_k\|}{\rho}\right) < \infty$$

olur. Bu ise, $A = (A_k) \in \ell_N(B(X,Y))$ demektir. Sonuç olarak, uyarı 5.2.1 ile beraber $E_N = \ell_N(B(X,Y))$ elde edilir. $\square$

Sonuç 5.2.1. *M, N karşılıklı tamamlayan Orlicz fonksiyonları olsun. Bu taktirde, $[h_M(X)]^* = \ell_N(X^*)$'dır [3].*

İspat. $\mathcal{F}$, $h_M(X)$ ve X'in skaler cismi olmak üzere, teorem 5.2.1 ve teorem 5.2.2'de $Y = \mathcal{F}$ alınırsa,

$$B(h_M(X), \mathcal{F}) = [h_M(X)]^* = E_N$$

olur ve $\mathcal{F}$ sonlu boyutlu olduğundan

$$E_N = \ell_N(B(X,\mathcal{F})) = \ell_N(X^*)$$

olur. Böylece, $[h_M(X)]^* = \ell_N(X^*)$ elde edilir. $\square$

KAYNAKLAR

[1] M. A. Krasnosel'skii and Y. B. Rutickii, *Convex Functions and Orlicz Spaces*, Noordhoff Ltd., Groningen, Netherlands, 1961.

[2] D. Ghosh and P. D. Srivastava, *On some vector valued sequence spaces using Orlicz function*, Glas. Mat. Ser. III 34 (2)(1999), 819–826.

[3] Y. Yılmaz, M. Kemal Özdemir, İ. Solak ve M. Candan, Operators on Some Vector-Valued Orlicz Sequence Spaces, F. Ü. Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi, 17(1), 59-71, 2005.

[4] I. J. Maddox, *Elements of Functional Analysis*, Second Edition, Cambridge University Press, Cambridge, 1988.

[5] H. Kizmaz, Fonsiyonel Analize Giriş, K.T.Ü. Basımevi, Trabzon, 1993.

[6] E. S. Şuhubi, Fonksiyonel Analiz, İ.T.Ü. Vakfı Yayınları, İstanbul, 2001.

[7] E. Kreyszig, Introductory Functional Analysis with Applications, John Wiley & Sons Inc., New York, 1978.

[8] F. Başar, Summability Theory and Its Applications, Bentham Science Publishers, e-books, Monographs, İstanbul, 2011.

[9] A. Wilansky, Modern Methods in Topological Vector Spaces, McGraw Hill Inc., New York, 1978.

[10] S. Lipschutz, Schaum's Outline Theory and Problems of General Topology, McGraw-Hill Inc., Singapore, 1965.

[11] P. K. Kamthan and M. Gupta, *Sequence Spaces and Series*, Marcel Dekker, Inc., New York and Basel, 1981.

[12] B. Musayev ve M. Alp, Fonksiyonel Analiz, Balcı Yayınları, Kütahya, 2000.

[13] B. Choudhary and S. Nanda, Functional Analysis with Applications, John Wiley & Sons Inc., New York, 1989.

[14] K. J. Lindberg, Contractive projections in Orlicz sequence spaces and continuous function spaces, Ph. D. Thesis, University of California, Berkeley, 1971.

[15] J. Boos and P.Cass, Classical and Modern Methods in Summability, Oxford University Press, Inc. New York, 2000.

[16] I. J. Maddox, *Elements of Functional Analysis*, Second Edition, Cambridge University Press, Cambridge, 1970.

[17] Y. Yılmaz, Modülüs Fonksiyonu Yardımıyla Tanımlanmış Bazı Yeni Dizi Uzayları, Doktora Tezi, İnönü Üniversitesi, Malatya, 2003.

[18] S. Suantai ve W. Sanhan, On β-Dual of Vector Valued Sequence Space of Maddox, IJMMS 30:7 (2002) 383-392.

[19] I. J. Maddox, *Infinite Matrices of Operators*, Springer-Verlag, Berlin, Hiedelberg, New York, 1980.

[20] Y. Yılmaz ve M. Kemal Özdemir, Köthe-Toeplitz Duals of Some Vector-Valued Orlicz Sequence Spaces, Soochow Journal of Mathematics, Volume 31, No. 3, pp. 389-402, July 2005.

[21] Y. Yılmaz ve İ. Solak, Operator Perfectness and Normality of Vector-Valued Sequence Spaces, Thai Journal of Mathematics, Volume 2 (2004) Number 2: 247-257.

[22] K. J. Lindberg, On subspaces of *Orlicz sequence space, Studia Mathematica 45(1973), 119-146.*

[23] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, *On Orlicz sequence space*, Israel J. Math. 10(1971), 379–390.

ÖZGEÇMİŞ

7 Nisan 1986 tarihinde Adıyaman'nın Uğurlu köyünde doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Adıyaman'da tamamladı. 2003 yılında Mersin Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü lisans programına kayıt yaptırdı ve 2009 yılında mezun oldu. 2010 yılında İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans programına kayıt yaptırdı.