

CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**MINKOWSKI UZAYINDAKİ REGLE YÜZEYLERİN VE DUAL
LORENTZ UZAYINDAKİ KÜRESEL EĞRİLERİN EĞRİLİK
TEORİLERİ YARDIMIYLA ROBOT UÇ-İŞLEVCİ HAREKETİNİN
İNCELENMESİ**

DOKTORA TEZİ

Arş. Gör. Burak ŞAHİNER

Anabilim Dalı: MATEMATİK

Programı: GEOMETRİ

MANİSA 2013

CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**MINKOWSKI UZAYINDAKİ REGLE YÜZEYLERİN VE DUAL
LORENTZ UZAYINDAKİ KÜRESEL EĞRİLERİN EĞRİLİK
TEORİLERİ YARDIMIYLA ROBOT UÇ-IŞLEVCI HAREKETİNİN
İNCELENMESİ**

DOKTORA TEZİ

Arş. Gör. Burak ŞAHİNER

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 13 Kasım 2013

Tezin Savunulduğu Tarih : 09 Aralık 2013

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Mustafa KAZAZ

Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Ali ÇALIŞKAN

Prof. Dr. Hasan Hüseyin UĞURLU

Prof. Dr. Mehmet SEZER

Yrd. Doç. Dr. Hüseyin KOCAYİĞİT

MANİSA 2013

İÇİNDEKİLER

SEMBOL LİSTESİ	iii
ŞEKİL LİSTESİ	v
TEŞEKKÜR	vi
ÖZET	vii
ABSTRACT	viii
 1. GİRİŞ	 1
 2. IR_1^3 MINKOWSKI UZAYININ TEMEL KAVRAMLARI	 3
 3. IR_1^3 MINKOWSKI UZAYINDA AYKIRI REGLE YÜZEYLERİN EĞRİLİK TEORİSİ	 6
3.1. IR_1^3 Minkowski Uzayında Spacelike Regle Yüzeylerin Eğrilik Teorisi	7
3.1.1. Boğaz Çizgisi ve Üreteç Üçyüzlüsü	7
3.1.2. Merkez Normal Yüzey ve Doğal Üçyüzlü	10
3.2. IR_1^3 Minkowski Uzayında Timelike Regle Yüzeylerin Eğrilik Teorisi	15
3.2.1. IR_1^3 Minkowski Uzayında Spacelike Doğuranlı Timelike Regle Yüzeylerin Eğrilik Teorisi	15
3.2.1.1. Boğaz Çizgisi ve Üreteç Üçyüzlüsü	15
3.2.1.2. Merkez Normal Yüzey ve Doğal Üçyüzlü	17
3.2.2. IR_1^3 Minkowski Uzayında Timelike Doğuranlı Timelike Regle Yüzeylerin Eğrilik Teorisi	24
3.2.2.1. Boğaz Çizgisi ve Üreteç Üçyüzlüsü	24
3.2.2.2. Merkez Normal Yüzey ve Doğal Üçyüzlü	26
 4. IR_1^3 MINKOWSKI UZAYINDA AÇILABİLİR REGLE YÜZEYLERİN EĞRİLİK TEORİSİ	 36
4.1. IR_1^3 Minkowski Uzayında Silindirlerin Eğrilik Teorisi	36
4.1.1. Spacelike Silindirlerin Eğrilik Teorisi	37
4.1.2. Timelike Silindirlerin Eğrilik Teorisi	42
4.1.2.1. Spacelike Doğuranlı Timelike Silindirlerin Eğrilik Teorisi	42
4.1.2.2. Timelike Doğuranlı Timelike Silindirlerin Eğrilik Teorisi	46

4.2. IR_1^3 Minkowski Uzayında Konilerin Eğrilik Teorisi	50
4.3. IR_1^3 Minkowski Uzayında Teğet Yüzeylerin Eğrilik Teorisi	55
5. IR_1^3 MINKOWSKI UZAYINDA ROBOT UÇ-İŞLEVCI HAREKETİ	63
5.1. Spacelike Regle Yüzeylerin Eğrilik Teorisi Yardımıyla Robot Uç-ışlevci Hareketinin İncelenmesi	64
5.1.1. Robot Uç-ışlevci Hareketinin Diferansiyel Özellikleri	67
5.2. Timelike Regle Yüzeylerin Eğrilik Teorisi Yardımıyla Robot Uç-ışlevci Hareketinin İncelenmesi	71
5.2.1. Spacelike Doğuranlı Timelike Regle Yüzeylerin Eğrilik Teorisi Yardımıyla Robot Uç-ışlevci Hareketinin İncelenmesi	71
5.2.1.1. Robot Uç-ışlevci Hareketinin Diferansiyel Özellikleri	74
5.2.2. Timelike Doğuranlı Timelike Regle Yüzeylerin Eğrilik Teorisi Yardımıyla Robot Uç-ışlevci Hareketinin İncelenmesi	78
5.2.2.1. Robot Uç-ışlevci Hareketinin Diferansiyel Özellikleri	80
6. ID^3 DUAL VE ID_1^3 DUAL LORENTZ UZAYLARININ TEMEL KAVRAMLARI	87
6.1. ID^3 Dual Uzayının Temel Kavramları	87
6.2. ID_1^3 Dual Lorentz Uzayının Temel Kavramları	90
7. ID_1^3 DUAL LORENTZ UZAYINDA KÜRESEL EĞRİLER YARDIMIYLA ROBOT UÇ-İŞLEVCI HAREKETİNİN İNCELENMESİ	93
7.1. Dual Hiperbolik Küresel Eğriler Yardımıyla Robot Uç-ışlevci Hareketinin İncelenmesi	93
7.2. Dual Lorentziyen Küresel Eğriler Yardımıyla Robot Uç-ışlevci Hareketinin İncelenmesi	97
7.2.1. Dual Lorentziyen Küresel Spacelike Eğriler Yardımıyla Robot Uç-ışlevci Hareketinin İncelenmesi	97
7.2.2. Dual Lorentziyen Küresel Timelike Eğriler Yardımıyla Robot Uç-ışlevci Hareketinin İncelenmesi	102
REFERANSLAR	117
ÖZGEÇMİŞ	122

SEMBOL LİSTESİ

$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^3$	: 3-boyutlu reel uzay
$\mathbb{D}$	: Dual sayılar kümesi
$\mathbb{D}^3$	: 3-boyutlu dual uzay
$\mathbb{R}_1^3$	: 3-boyutlu Lorentziyen uzay
$\mathbb{D}_1^3$	: 3-boyutlu dual Lorentziyen uzay
$\langle \cdot, \cdot \rangle_E$	: Öklidyen iç çarpım
$\wedge$	: Öklidyen vektörel çarpım
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	: Lorentziyen iç çarpım
$\times$	: Lorentziyen vektörel çarpım
c	: Regle yüzeyin boğaz çizgisi
d	: Regle yüzeyin dağılma parametresi
s	: Regle yüzeyin boğaz çizgisinin yay uzunluğu parametresi
R	: Regle yüzeyin ana doğrularının doğrultman vektörleri
α	: Regle yüzeyin dayanak eğrisi
$\{q, h, a\}$	: Regle yüzeyin üreteç üçyüzlüsü
$\{h, n, b\}$	: Merkez normal yüzeyin doğal üçyüzlüsü
κ	: Merkez normal yüzeyin eğriliği
τ	: Merkez normal yüzeyin burulması
Γ, Δ	: Regle yüzeyin eğrilikleri
γ	: Regle yüzeyin jeodezik eğriliği
X	: Regle yüzey
X_h	: Merkez normal yüzey
Γ_h, Δ_h	: Merkez normal yüzeyin eğrilikleri
c_h	: Merkez normal yüzeyin boğaz çizgisi
w_q	: Üreteç üçyüzlüsünün Darboux ani dönme vektörü
w_h	: Doğal üçyüzlünün Darboux ani dönme vektörü
$\{t_\alpha, n_\alpha, b_\alpha\}$	: α eğrisinin Frenet üçyüzlüsü
κ_α	: α eğrisinin eğriliği

τ_{α}	: α eğrisinin burulması
$\{O, A, N\}$	: Araç çatısı
$\{O, S_n, S_b\}$	: Yüzey çatısı
η	: Spin açısı
σ	: Yüzey normali ile merkez normal vektör arasındaki açı
φ	: Yüzey normali ile yaklaşım vektörü arasındaki açı
w_o	: Araç çatısının ani dönme vektörü
$\tilde{\alpha}$	: Dual küresel eğri
$\{\tilde{e}, \tilde{t}, \tilde{g}\}$	: Dual eğrinin dual jeodezik üçyüzlüsü
$\{\tilde{O}, \tilde{A}, \tilde{N}\}$	: Dual araç çatısı
$\bar{\gamma}$	: Dual jeodezik eğrilik
$\mathcal{E}$	: Dual birim
$\tilde{w}_e$	: Dual jeodezik üçyüzlünün dual Darboux vektörü
$\tilde{w}_o$	: Dual araç çatısının dual ani dönme vektörü
$\bar{a}$	: Dual ivme

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 3.1. Regle yüzeyin üreteç üçyüzlüsü ile merkez normal yüzeyin doğal üçyüzlüsü arasındaki ilişki.....	13
Şekil 3.2. Üreteç üçyüzlüsünün timelike merkez teğet vektörü ile doğal üçyüzlünün spacelike asal normal vektörü arasındaki timelike açısı.....	19
Şekil 3.3. Üreteç üçyüzlüsünün timelike merkez teğet vektörü ile doğal üçyüzlünün timelike asal normal vektörü arasındaki hiperbolik açısı.....	22
Şekil 3.4. Üreteç üçyüzlüsünün spacelike merkez teğet vektörü ile doğal üçyüzlünün spacelike asal normal vektörü arasındaki merkez açısı.....	27
Şekil 3.5. Üreteç üçyüzlüsünün spacelike merkez teğet vektörü ile doğal üçyüzlünün timelike asal normal vektörü arasındaki timelike açısı.....	29
Şekil 3.6. $X(s, v) = (\sinh s + v \cosh s, \sqrt{3}v, \cosh s + v \sinh s)$ denklemlili spacelike regle yüzey ve merkez normal yüzeyi.....	35
Şekil 4.1. Silindir yüzeyi ve üreteç üçyüzlüsü.....	38
Şekil 4.2. $x_1^2 - x_3^2 = -r^2$ ($r > 0$) hiperbolik silindiri.....	42
Şekil 4.3. $x_1^2 - x_3^2 = r^2$ ($r > 0$) Lorentziyen dairesel silindiri.....	46
Şekil 4.4. $x_1^2 + x_2^2 = r^2$ ($r > 0$) 1-indeksli dairesel silindiri.....	50
Şekil 4.5. Koni yüzeyi ve üreteç üçyüzlüsü.....	52
Şekil 4.6. $X(s, v) = (\cosh s + v \cosh s, -v, \sinh s + v \sinh s)$ spacelike konisi ve merkez teğet yüzeyi.....	55
Şekil 4.7. α eğrisinin teğetlerinin oluşturduğu teğet yüzey.....	56
Şekil 4.8. $\alpha(s) = \left(\frac{\sqrt{2}}{3} s^{3/2}, \frac{\sqrt{2}}{3} (1-s)^{3/2}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} s \right)$ eğrisinin teğetlerinin oluşturduğu teğet yüzey ve merkez teğet yüzeyi.....	62
Şekil 5.1. Robot uç-işlevci ve araç çatısı.....	63
Şekil 5.2. Spin açısı.....	64
Şekil 5.3. Çatılar arasındaki ilişkiler.....	66
Şekil 5.4. $X(s, v) = (v \cos s, v \sin s, cs)$ helikoid yüzeyi ve merkez normal yüzeyi.....	86
Şekil 7.1. Robot uç-işlevci ve dual araç çatısı.....	95
Şekil 7.2. $X(u, v) = (\cos u - v \sin u, \sin u + v \cos u, cv)$, ($ c > 1$) tek kanatlı hiperboloit yüzeyi üzerinde hareket eden bir robot uç-işlevci örneği.....	112

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım sırasında desteğini esirgemeyen, tecrübelerinden faydalandığım danışman hocam sayın Doç. Dr. Mustafa Kazaz'a teşekkürlerimi sunarım.

Zaman ve mekân gözetmeksizin akademik desteği ile bana yardımcı olan, her daim bilgisinden ve tecrübesinden yararlandığım ikinci danışman hocam sayın Prof. Dr. Hasan Hüseyin Uğurlu'ya teşekkürü bir borç bilirim.

Lisans eğitimi aldığım yıllardan bu yana, tecrübesi ile beni en iyi şekilde yönlendiren, kıymetli bilgilerini benimle paylaşan sayın hocam Prof. Dr. Ali Çalışkan'a minnet duygularım ile birlikte teşekkürlerimi sunarım.

Değerli fikirlerini benimle paylaşan sayın hocam Yrd. Doç. Dr. Hüseyin Kocayiğit'e ve bu çalışma sırasında yanına her gittiğimde beni geri çevirmeyip yardımcı olan sayın hocam Yrd. Doç. Dr. Mehmet Önder'e teşekkürlerimi sunarım.

Doktora eğitimim süresince maddi anlamda destek sunan TÜBİTAK-BİDEB'e teşekkür ederim.

Eğitim hayatım boyunca hiçbir fedakârlıktan kaçınmayan ailem ile anlayışı ve ilgisini esirgemeyip her zaman bana destek olan eşim Sinem ŞAHİNER'e de sonsuz teşekkürler.

ÖZET

Bu tez çalışması, yedi bölümden oluşmuştur.

Birinci bölüm tezin giriş bölümüdür. Bu bölümde, eğrilik teorisi ve robot uç-işlevci hareketinde kullanılması ile ilgili literatür bilgisi ve bu tezde yapılanlar hakkında kısaca bilgi verilir.

İkinci bölümde, IR_1^3 Minkowski uzayının temel kavramları verilir.

Üçüncü bölümde, IR_1^3 Minkowski uzayında spacelike ve timelike aykırı regle yüzeylerin eğrilik teorileri detaylı bir şekilde incelenir. Regle yüzeylerin ve bunların merkez normal yüzeylerinin çatıları bulunur. Bu çatılar arasındaki ilişkiler veriler. Regle yüzeyler ve merkez normal yüzeylerinin eğrilik fonksiyonları elde edilir.

Dördüncü bölümde, IR_1^3 Minkowski uzayında yegâne açılabilir regle yüzeyler olan silindir, koni ve teğet yüzeylerin eğrilik teorileri incelenir. Bu yüzeylerin eğrilik teorilerinin aykırı regle yüzeylerin eğrilik teorisinden farklılıkları ortaya koyulur.

Beşinci bölümde, üçüncü bölümde ele alınan spacelike ve timelike aykırı regle yüzeylerin eğrilik teorileri yardımıyla robot uç-işlevci hareketi incelenir. Robot uç-işlevci hareketinin lineer ve açısal özellikleri, regle yüzeylerin diferansiyel özelliklerinden belirlenir.

Altıncı bölümde, dual uzay ve dual Lorentziyen uzay ile ilgili temel kavramlar verilir.

Yedinci bölümde, üçüncü bölümde ele alınan regle yüzeylere dual Lorentziyen uzayında karşılık gelen dual küresel eğriler bulunur. Robot uç-işlevci hareketinin diferansiyel özellikleri dual küresel eğrilerin eğrilik teorisi yardımıyla incelenir.

ABSTRACT

This thesis consists of seven sections.

First section is introduction. In this section, literature review about curvature theory and its using in robot end-effector motion and Some information about this thesis is given.

In section two, preliminaries of Minkowski space IR_1^3 is given.

In section three, the curvature theories of spacelike and timelike ruled surfaces in Minkowski space IR_1^3 are examined in detail. Frames of ruled surfaces and their central normal surfaces is found. Relations between these frames are given. Curvature functions of the ruled surfaces and their central normal surfaces are obtained.

In section four, the curvature theory of cylinder, cone and tangent surface that are developable surfaces in Minkowski space IR_1^3 , are examined. Differences between the curvature theory of these developable surfaces and the curvature theory of general ruled surfaces are showed.

In section five, motion of robot end-effector is examined using the curvature theories of spacelike and timelike ruled surfaces which are considered in section three. Linear and angular properties of the motion of robot end-effector are determined by using the differential properties of ruled surfaces.

In section six, preliminaries of dual space and dual Lorentzian space are given.

In section seven, dual spherical curves in dual Lorentzian space corresponding the ruled surfaces that are considered in section three, are obtained. The differential properties of the motion of robot end-effector is investigated by using the curvature theory of the dual spherical curves.

1. GİRİŞ

Eğrilik teorisi, hareketli katı bir cisim üzerindeki bir noktanın ya da bir doğrunun iç geometrik özelliklerini araştırır [30]. Uzayda katı bir cisme sabitlenmiş bir nokta ve bir doğru, cisim hareket ederken, sırasıyla, bir eğri ve bir regle yüzey çizerler. Bir nokta yörüngesinin eğrilik teorisi alanında, düzlem kinematiğinde yüksek mertebeden yörünge eğriliği kavramını ilk olarak Müller [23] tanımlamıştır. Düzlem kinematiğinde yüksek mertebeden yörünge eğriliği analizleri üzerine çalışan Freudenstein [13], karakteristik sayılar denilen skaler sayıları kullanarak, düzlemsel eğrilerin bir noktada nasıl karakterize edilebileceğini gösterdi. Freudenstein'in çalışmalarının sonuçları, düzlemsel mekanizmaların analiz ve sentezine uygulanabilmektedir.

Düzlem kinematiğinde katı cisim hareketini karakterize etmek için kullanılan ani invaryantlar ilk kez, Bottema [7] tarafından tanımlanmıştır. Veldkamp [43], ani invaryantları uzay kinematiğine genişletti. Freudenstein'in [13] çalışmasını düzlemde küreye genişleten Yang ve Roth [46], küresel hareketi ani invaryantlar cinsinden ifade ettiler. Onların çalışmalarının sonuçları da küresel mekanizmaların analiz ve sentezine uygulanabilmektedir. Kirson [19], dual sayıları ve vida hesabını kullanarak bir katı cisim hareketini tam olarak belirleyen kanonik koordinat sistemlerin ve ani invaryantların bulunması için bir yöntem geliştirdi. McCarthy [22] doğru yörüngelerinin skaler ve dual formülasyonlarını tekrar türeterek, bir regle yüzeyin şeklini karakterize eden temel eğrilik fonksiyonlarını ifade etti. Schaaf [33] ise küresel evölütler ve transfer teorisini kullanarak, doğru yörüngelerinin yüksek mertebeden özelliklerini dual ani invaryantlar cinsinden ifade etmiştir.

Eğrilik teorisi, sadece Öklid uzayında yapılan çalışmalar ile sınırlı kalmamış, Minkowski uzayında da araştırmacıların ilgisini çekmiştir. Ayyıldız ve Yücesan [2], [22] deki tekniği kullanarak Lorentziyen uzayda null olmayan eğriler için doğru yörüngelerinin eğrilik teorisinin skaler ve dual Lorentziyen formüllerini türettirler. Ersoy ve Tosun [12], bir null eğri boyunca hareket eden bir null yönlü doğru ile doğrudan ilişkisi olan Minkowski 3-uzaydaki yörünge null scrolleri verdiler. Turhan ve Ayyıldız [38], null doğuranlı bir regle yüzeyin şeklini belirleyen eğrilik fonksiyonlarını türettirler. Bu fonksiyonlar ile spacelike doğuranlı merkez normal yüzeyin fonksiyonları arasındaki ilişkileri verdiler. Uğurlu ve Önder [28,39] spacelike ve timelike regle yüzeylerin Frenet çatıları ve Frenet invaryantlarını verdiler.

Günümüzde robot uç-işlevciler, madde taşınması, boyacılık, kaynak endüstrisi ve tıp gibi birçok farklı alanda kullanılmaktadır [3]. Robot uç-işlevcinin göz ameliyatı gibi hassasiyet

gerektiren alanlarda kullanıldığı da dikkate alınırsa, uç-işlevcinin hareketinin hatasız gerçekleşmesi önem kazanır. Ryuh ve Pennock [31], robot uç-işlevcinin hatasız hareketi için bilinen matris yöntemlerinden farklı bir yöntem ortaya attılar. Onlar, bir regle yüzeyin eğrilik teorisini kullanarak robot uç-işlevci hareketini incelediler. Ayrıca, regle yüzeyin bir parametrik denklem ile ifade edilemediği durumlar için bir geometrik modelleme tekniği kullandılar [32]. Regle yüzeylerin eğrilik teorisinin robot uç-işlevci hareketinde kullanılması ve bir geometrik modelleme tekniği ile oluşturulması, Ryuh'un tezinde [30] detaylı bir şekilde anlatılmıştır.

Minkowski 3-uzayda Ekici ve diğerleri [11] timelike doğuranlı timelike regle yüzeylerin eğrilik teorisini kullanarak robot uç-işlevci hareketini incelemişlerdir. Fakat bu çalışmada, Lorentziyen iç çarpım ile vektörel çarpım birbiri ile uyumlu değildir. Ayrıca bu çalışmada, tek bir durum ele alınmış, diğer durumlar incelenmemiştir. Bu tezin 3. bölümünde, [11] de yapılan çalışma, tüm olası durumlar için incelenmiş ve gerekli düzeltmeler belirtilmiştir.

Bu tezde, Minkowski 3-uzayındaki regle yüzeylerin eğrilik teorileri yardımıyla robot uç-işlevci hareketi incelenir. III. Bölümde, aykırı regle yüzeylerin eğrilik teorisi, regle yüzeylerin merkez normal yüzeyleri de ele alınarak, detaylı bir şekilde verilmiştir. Aykırı regle yüzeyler için verilen eğrilik teorisi, açılabilir regle yüzeyler için kullanılamaz. Robot uç-işlevci hareketinde oluşacak regle yüzeyin bir açılabilir regle yüzey olabileceği de göz önünde bulundurularak, yegane açılabilir yüzeyler olan silindir, koni ve teğet yüzey için eğrilik teorileri, IV. Bölümde ayrı ayrı incelenmiştir. V. Bölümde, IR_1^3 Minkowski 3-uzayındaki spacelike ve timelike regle yüzeylerin eğrilik teorisi kullanılarak, robot uç-işlevci hareketinin diferansiyel özellikleri olan uç-işlevcinin lineer hız ve ivmesi ile açısal hız ve ivmesi verilmiştir. VI. Bölümde, ID^3 ve ID_1^3 dual Öklidyen ve dual Lorentziyen uzayların temel kavramları ile E. Study dönüşümleri (transfer prensipleri) ifade edilmiştir. Son bölümde, timelike ve spacelike regle yüzeylere karşılık gelen dual hiperbolik ve dual Lorentziyen küresel eğriler yardımıyla, robot uç-işlevcinin diferansiyel özellikleri tetkik edilmiştir.

2. IR_1^3 MINKOWSKI UZAYININ TEMEL KAVRAMLARI

Tanım 2.1. IR^3 reel vektör uzayı üzerinde

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 - u_3 v_3$$

ile verilen Lorentziyen iç çarpım tanımlanırsa, IR^3 Afin uzayı, Minkowski 3-uzay, 3 boyutlu Lorentz uzayı veya Lorentziyen 3-uzay olarak isimlendirilir ve IR_1^3 ile gösterilir [25]. Burada $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ve $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in IR^3$ dır. $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ vektörlerinin iç çarpımı için $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ gösterimi de kullanılabilir.

Lorentziyen iç çarpımı pozitif tanımlı olmadığından IR_1^3 deki vektörler aşağıdaki gibi üç farklı Lorentziyen karaktere sahip olabilirler.

Tanım 2.2. $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, IR_1^3 de keyfi bir vektör olsun.

- i) $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle > 0$ ya da $\mathbf{v} = 0$ ise $\mathbf{v}$ vektörüne spacelike,
- ii) $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle < 0$ ise $\mathbf{v}$ vektörüne timelike,
- iii) $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$ ve $\mathbf{v} \neq 0$ ise $\mathbf{v}$ vektörüne null (lightlike)

vektör denir [25].

Tanım 2.3. Bir $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in IR_1^3$ vektörünün normu

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{|\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle|}$$

olarak tanımlanır. Normu 1 olan vektörlere birim vektörler denir [25].

Tanım 2.4. $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ve $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, IR_1^3 de iki vektör olsun. $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ vektörlerinin Lorentziyen vektörel çarpımı

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} -\mathbf{e}_1 & -\mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = (-u_2 v_3 + u_3 v_2, u_1 v_3 - u_3 v_1, u_1 v_2 - u_2 v_1)$$

biçiminde tanımlanır [36,40].

Teorem 2.1. $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ ve $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$, IR_1^3 uzayında üç vektör olsun. Bu durumda

- i) $\langle \mathbf{u} \times \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = -\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$
- ii) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = -\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle \mathbf{v} + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \mathbf{u}$
- iii) $\langle \mathbf{u} \times \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = 0$ ve $\langle \mathbf{u} \times \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$
- iv) $\langle \mathbf{u} \times \mathbf{v}, \mathbf{u} \times \mathbf{v} \rangle = -\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle + (\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle)^2$

dir [40].

Tanım 2.5. IR_1^3 uzayındaki orijin merkezli Lorentziyen ve hiperbolik birim küreler sırasıyla

$$S_1^2 = \{ \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in IR_1^3 : \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 1 \}$$

ve

$$H_0^2 = \{ \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in IR_1^3 : \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = -1 \}$$

olarak tanımlanır [40].

Tanım 2.6. Minkowski 3-uzayında bir $\alpha = \alpha(s)$ eğrisinin hız vektörü $\alpha'(s)$ bir spacelike, timelike ya da null vektör ise $\alpha = \alpha(s)$ eğrisine de sırasıyla spacelike, timelike ya da null eğri denir [25].

Tanım 2.7. Minkowski 3-uzayında bir yüzeyin her noktasındaki normal vektörü spacelike (sırasıyla, timelike) ise bu yüzeye timelike (sırasıyla, spacelike) yüzey denir [48].

Tanım 2.8. i) **Hiperbolik açı:** $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$, IR_1^3 de timelike iki vektör olsun.

$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = -\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cosh \theta$ olacak şekilde bir $\theta \geq 0$ reel sayısına $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ vektörleri arasındaki hiperbolik açı denir [29].

ii) **Merkez açı:** $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$, IR_1^3 de spacelike iki vektör ve bu vektörlerin gerdiği düzlem timelike

olsun. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cosh \theta$ olacak şekilde bir $\theta \geq 0$ reel sayısına $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ vektörleri arasındaki merkez açı denir [29].

iii) Spacelike aç: $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$, IR_1^3 de spacelike iki vektör ve bu vektörlerin gerdiği düzlem spacelike olsun. $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \theta$ olacak şekilde bir $\theta \geq 0$ reel sayısına $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ vektörleri arasındaki spacelike aç denir [29].

iv) Lorentziyen timelike aç: $\mathbf{u}$, IR_1^3 de bir spacelike vektör ve $\mathbf{v}$, IR_1^3 de bir timelike vektör olsun. $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \sinh \theta$ olacak şekilde bir $\theta \geq 0$ reel sayısına $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ vektörleri arasındaki Lorentziyen timelike aç denir [29].

3. IR_1^3 MINKOWSKI UZAYINDA AYKIRI REGLE YÜZEYLERİN EĞRİLİK TEORİSİ

Bu bölümde, Minkowski 3-uzayında regle yüzeylerin eğrilik teorisi detaylı bir şekilde incelenmiştir. Regle yüzeylerin boğaz çizgileri üzerinde tanımlı olan üreteç üçyüzlüleri ve bu üçyüzlülerin türev formülleri bulunmuştur. Regle yüzeylerin merkez normal yüzeyleri ve bu yüzeylerin boğaz çizgileri üzerinde tanımlı olan doğal üçyüzlüler incelenmiş, bu üçyüzlüler ile üreteç üçyüzlüleri arasındaki ilişkiler elde edilmiştir.

Uzayda bir doğrunun hareketi ile oluşan yüzeylere regle yüzeyler denir [10]. Bir regle yüzey

$$X(u, v) = \alpha(u) + v R(u) \quad (3.1)$$

denklemleri ile gösterilebilir [24]. Burada, $\alpha(u)$ eğrisine regle yüzeyin dayanak eğrisi, regle yüzeyi oluşturan ana doğruların yön vektörleri olan $R(u)$ vektörlerine de regle yüzeyin doğruları denir. Burada u ve v reel parametrelerdir. α ve R , 3-boyutlu uzayda iki vektör olduğundan bir regle yüzeyi ifade etmek için altı bağımsız parametreye ihtiyaç vardır. Regle yüzeyin doğrularının boyunun sabit büyüklükte olduğu kabul edilirse, bu bir kısıt oluşturur. Böylece bir regle yüzey beş bağımsız parametre ile ifade edilebilir.

(3.1) denklemindeki u parametresi keyfidir. Bu parametreyi normalleştirilmenin iki yolu vardır. Normalleştirilmiş parametre

$$s(u) = \int_0^u \left\| \frac{d\alpha(u)}{du} \right\| du$$

biçiminde dayanak eğrisine ya da

$$s(u) = \int_0^u \left\| \frac{dR(u)}{du} \right\| du \quad (3.2)$$

biçiminde doğurana bağlı olabilir [30]. Uç-işlevcinin açısal hızı ile ilgilenildiğinde, (3.2) denklemindeki parametrisasyon daha uygun olacağından, bu bölümde (3.2) denklemindeki normalleştirme işlemi kullanılacaktır.

Doğuran sabit bir vektör olduğunda, doğuranın türevi sıfıra eşit olur. Bu durumda tüm doğrular birbirine paraleldir. Bu tür regle yüzeyler, silindirleri ifade ederler. Silindirlerin eğrilik teorisi, 4. bölümde anlatılacak olup, bu bölümde incelenecek regle yüzeylerin doğrularının sabit olmadığı varsayılacaktır.

Bir $X(u, v)$ regle yüzeyinin dağılma parametresi

$$d = \frac{\det(\dot{\alpha}, R, \dot{R})}{\langle \dot{R}, \dot{R} \rangle} \quad (3.3)$$

olarak tanımlanır [24]. Burada " $\cdot$ ", u parametresine göre türevi gösterir. Eğer, $d = 0$ ise doğuran boyunca teğet düzlem değişmez. Böyle bir doğurana açılabilir doğuran ve tüm doğuranları açılabilir doğuran olan regle yüzeylere de açılabilir regle yüzeyler denir [10]. Açılabilir regle yüzeylerin eğrilik teorisi, 4. bölümde incelenecektir. Bu bölümde incelenen regle yüzeylerin açılabilir olmayan (aykırı) regle yüzeyler olduğu varsayılacaktır.

Minkowski 3-uzayında regle yüzeylerin eğrilik teorisi, spacelike ve timelike regle yüzeylerin eğrilik teorisi olmak üzere iki bölümde incelenecektir. Null regle yüzeylerin eğrilik teorisi incelenmemiş olup, null regle yüzeylerin eğrilik teorisi için [37] ye bakılabilir.

3.1. IR_1^3 Minkowski Uzayında Spacelike Regle Yüzeylerin Eğrilik Teorisi

$\alpha(u)$, IR_1^3 uzayında bir eğri, $R(u)$ ana doğruların yön vektörü ve u, v reel değerli parametreler olmak üzere, bir spacelike regle yüzey

$$X(u, v) = \alpha(u) + v R(u)$$

denklemleri verilebilir. Burada $\alpha(u)$ dayanak eğrisi ve $R(u)$ doğuran vektörleri spacelike vektörlerdir. Regle yüzeyler diğer yüzeylerden farklı olarak bir boğaz çizgisine ve boğaz çizgisi üzerinde tanımlanan bir üreteç üçyüzlüsüne sahiptirler.

3.1.1. Boğaz Çizgisi ve Üreteç Üçyüzlüsü

Bir X regle yüzeyinin ana doğrularından biri D ve bu ana doğruya sonsuz yakın ana doğru ise D^* olsun. D ve D^* ana doğrularının ortak dikmesinin D üzerindeki ayağına, D ana doğrusunun boğaz noktası, boğaz noktalarının geometrik yerine ise boğaz çizgisi denir [4]. Boğaz çizgisi dayanak eğrisinin seçilişinden bağımsızdır.

Bir spacelike regle yüzeyin boğaz çizgisinin dayanak eğrisine göre denklemi

$$c(s) = \alpha(s) - \mu(s)R(s)$$

biçiminde verilebilir [30], burada μ reel değerli bir parametredir. R doğuranın boyu olmak üzere doğuran üzerinde boğaz çizgisinden dayanak eğrisine olan uzaklık μR dir.

$$c' \cdot R' = 0 \quad (3.4)$$

denklemleri boğaz çizgisini karakterize eder [10]. Boğaz çizgisinin türevi

$$c' = \alpha' - \mu'R - \mu R' \quad (3.5)$$

dir. (3.5) denklemi, (3.4) denkleminde yerine yazılırsa

$$c' \cdot R' = \alpha' \cdot R' - \mu' R \cdot R' - \mu R' \cdot R' = 0$$

olur. Buradan μ parametresi

$$\mu = -\alpha' \cdot R' \quad (3.6)$$

biçiminde elde edilir. Böylece spacelike regle yüzeyin boğaz çizgisi

$$c = \alpha + (\alpha' \cdot R')R$$

biçiminde yazılabilir.

Üreteç üçyüzlüsü, spacelike regle yüzeyin boğaz çizgisi üzerinde birbirine dik, üç birim vektörden oluşur; bunlar üreteç vektörü q , merkez normal vektör h ve merkez teğet vektör a dir. Spacelike regle yüzeyin doğuranları, birim vektör olmak zorunda olmadığından üreteç vektörü

$$q = \frac{R}{R} \quad (3.7)$$

olarak tanımlanır. Merkez normal vektör ve merkez teğet vektör sırasıyla

$$h = R' \quad (3.8)$$

ve

$$a = -q \times h \quad (3.9)$$

biçiminde tanımlanır [39].

Tanım 2.7. den, bir spacelike regle yüzeyin her noktasındaki birim normal vektörünün timelike vektör olduğu bilinmektedir. Merkez normal vektör h , regle yüzeyin boğaz çizgisi üzerinde birim normal vektöre karşılık geldiğinden, merkez normal vektör h da timelike vektördür, dolayısıyla üreteç vektörü q ve merkez teğet vektör a spacelike vektörlerdir. Üreteç üçyüzlüsünün vektörleri arasında

$$q \times h = -a, \quad h \times a = -q, \quad a \times q = h \quad (3.10)$$

bağıntıları mevcuttur.

Üreteç üçyüzlüsünün birinci mertebeden açılma değişiminin belirlenmesi için q, h, a birim vektörlerinin türevlerinin bulunması gerekmektedir. (3.7) denkleminin türevi alınıp (3.8) denklemi burada yerine yazılırsa

$$q' = \frac{R'}{R} = \frac{h}{R} \quad (3.11)$$

elde edilir. Merkez normal vektörün birinci mertebeden türevi, üreteç üçyüzlüsü elemanlarının lineer bileşimi olarak

$$h' = \lambda q + \mu h + \nu a$$

biçiminde yazılabilir. q ve h vektörleri birbirine dik olduğundan

$$\mathbf{h} \cdot \mathbf{q} = 0 \quad (3.12)$$

eşitliği mevcuttur. (3.12) denkleminin türevi alınır

$$\mathbf{h}' \cdot \mathbf{q} + \mathbf{h} \cdot \mathbf{q}' = 0 \quad (3.13)$$

elde edilir. (3.11) denkleminin (3.13) denkleminde yerine yazılması ile

$$\lambda = \frac{1}{R}$$

bulunur. $\mathbf{h}$ vektörü birim olduğundan türevine diktir, yani

$$\mu = 0$$

dır. Dolayısıyla, merkez normal vektörün türevi $\mathbf{v} = \frac{\gamma}{R}$ olmak üzere

$$\mathbf{h}' = \frac{1}{R}(\mathbf{q} + \gamma \mathbf{a}) \quad (3.14)$$

biçiminde yazılabilir. Burada γ , üçüncü bileşen $\mathbf{v}$ den tanımlanan

$$\gamma = R(\mathbf{h}' \cdot \mathbf{a}) \quad (3.15)$$

fonksiyonudur ve bu fonksiyona spacelike regle yüzeyin jeodezik eğriliği denir. (3.14) denklemi, (3.15) denkleminde yerine yazılarak ve (3.7-3.9) denklemleri kullanılarak jeodezik eğrilik regle yüzeyin doğuranları cinsinden

$$\gamma = (R, R', R'')$$

biçiminde yazılabilir. Merkez teğet vektörün birinci mertebeden türevinin bulunması için (3.9) denkleminin türevi alınarak

$$\mathbf{a}' = -\mathbf{q}' \times \mathbf{h} - \mathbf{q} \times \mathbf{h}'$$

elde edilir. (3.11), (3.14) ve (3.10) denklemleri kullanılarak merkez teğet vektörün birinci mertebeden türevi

$$\mathbf{a}' = \frac{\gamma}{R} \mathbf{h}$$

olarak bulunur. Böylece üreteç üçyüzlüsünün birinci mertebeden açısal değişimleri matris formda

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{h} \\ \mathbf{a} \end{bmatrix} = \frac{1}{R} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \gamma \\ 0 & \gamma & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{h} \\ \mathbf{a} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

biçiminde ifade edilebilir [39].

Ayrıca, üreteç üçyüzlüsünün Darboux ani dönme vektörü

$$\mathbf{w}_q = \frac{1}{R}(-\gamma \mathbf{q} + \mathbf{a}) \quad (3.17)$$

olarak bulunur. Bu vektör

$$\mathbf{q}' = \mathbf{w}_q \times \mathbf{q}, \quad \mathbf{h}' = \mathbf{w}_q \times \mathbf{h}, \quad \mathbf{a}' = \mathbf{w}_q \times \mathbf{a}$$

eşitliklerini sağlar.

Boğaz çizgisinin birinci mertebeden konumsal değişiminin üreteç üçyüzlüsünün vektörleri cinsinden ifade edilebilmesi için

$$\mathbf{c}' = \lambda \mathbf{q} + \mu \mathbf{h} + \nu \mathbf{a} \quad (3.18)$$

eşitliğindeki λ, μ, ν katsayılarının bulunması gerekmektedir. λ katsayısının bulunması için (3.18) denkleminde eşitliğin her iki tarafı $\mathbf{q}$ vektörü ile çarpılırsa ve (3.5) denklemi kullanılırsa

$$\lambda = \mathbf{c}' \cdot \mathbf{q} = (\boldsymbol{\alpha}' - \mu' \mathbf{R} - \mu \mathbf{R}') \cdot \frac{\mathbf{R}}{R} = \frac{1}{R} (\boldsymbol{\alpha}' \cdot \mathbf{R}) - \mu' R$$

elde edilir. (3.18) denkleminde eşitliğin her iki tarafı $\mathbf{h}$ vektörü ile çarpılırsa ve (3.8) denklemi, (3.4) denkleminde yerine yazılırsa

$$\mu = \mathbf{c}' \cdot \mathbf{h} = 0$$

elde edilir. ν katsayısının bulunması için (3.18) denkleminde eşitliğin her iki tarafı $\mathbf{a}$ vektörü ile çarpılır ve (3.5) denklemi kullanılarak

$$\nu = \mathbf{c}' \cdot \mathbf{a} = (\boldsymbol{\alpha}' - \mu' \mathbf{R} - \mu \mathbf{R}') \cdot \mathbf{a} = \boldsymbol{\alpha}' \cdot \mathbf{a} = \boldsymbol{\alpha}' \cdot (-\mathbf{q} \times \mathbf{h}) = -\frac{1}{R} \boldsymbol{\alpha}' \cdot (\mathbf{R} \times \mathbf{R}')$$

elde edilir. Böylece boğaz çizgisinin birinci mertebeden konumsal değişimi

$$\mathbf{c}' = \Gamma \mathbf{q} + \Delta \mathbf{a} \quad (3.19)$$

biçiminde yazılabilir. Burada

$$\Gamma = \frac{1}{R} (\boldsymbol{\alpha}' \cdot \mathbf{R}) - \mu' R \quad (3.20)$$

ve

$$\Delta = -\frac{1}{R} \boldsymbol{\alpha}' \cdot (\mathbf{R} \times \mathbf{R}') \quad (3.21)$$

dir.

Sırasıyla (3.15), (3.20) ve (3.21) denklemlerindeki γ, Γ, Δ parametrelerine spacelike regle yüzeyin eğrilik fonksiyonları denir.

3.1.2. Merkez Normal Yüzey ve Doğal Üçyüzlü

Üreteç üçyüzlüsü boğaz çizgisi boyunca hareket ederken merkez normal vektör, merkez normal yüzey ya da normalia denilen başka bir regle yüzey çizer [30]. Spacelike regle yüzeyin merkez normal yüzeyi

$$X_h(s, v) = c(s) + v h(s)$$

denklemleri ile verilebilir. Burada c , X spacelike regle yüzeyin boğaz çizgisi ve h , X spacelike regle yüzeyin merkez normal vektörüdür.

Merkez normal yüzeyin boğaz çizgisi, spacelike regle yüzeyin boğaz çizgisi yardımıyla

$$c_h = c - \mu_h h \quad (3.22)$$

biçiminde verilebilir, burada μ_h , merkez normal vektör boyunca iki boğaz çizgisi arasındaki uzaklıktır.

Boğaz çizgisinin tanımından

$$c'_h \cdot h' = c' \cdot h' - \mu'_h h \cdot h' - \mu_h h' \cdot h' = 0$$

eşitliği elde edilir ve buradan

$$\mu_h = \frac{c' \cdot h'}{h' \cdot h'} = \frac{(\Gamma + \Delta\gamma)R}{1 + \gamma^2}$$

olarak bulunur. Böylece merkez normal yüzeyin boğaz çizgisi

$$c_h = c - \frac{(\Gamma + \Delta\gamma)R}{1 + \gamma^2} h$$

biçiminde yazılabilir.

Merkez normal yüzeyin boğaz çizgisi üzerinde birbirine dik, üç birim vektör ile tanımlanan çatıya doğal üçyüzlü denir. Doğal üçyüzlüyü oluşturan vektörler; üreteç vektörü h , asal normal vektör n ve binormal vektör b dir. X spacelike regle yüzeyin merkez normal vektörü olan h , merkez normal yüzeyin üreteç vektörü konumundadır ve daha önce de tanımlandığı gibi

$$h = R'$$

biçiminde verilebilir. Asal normal vektör

$$n = \frac{h'}{\kappa}$$

olarak tanımlanır ve burada

$$\kappa = \|h'\|$$

merkez normal yüzeyin eğriliğidir. Son olarak binormal vektör

$$b = -h \times n \quad (3.23)$$

biçiminde verilir. h vektörü bir timelike vektör olduğundan ve n, b vektörleri h vektörüne dik olduklarından, n ve b vektörleri spacelike vektörlerdir.

Doğal üçyüzlünün birinci mertebeden açılma değişiminin belirlenmesi için h, n, b birim vektörlerinin türevleri bulunmalıdır. Asal normal vektörün tanımından, merkez normal vektörün birinci mertebeden türevi, doğal üçyüzlüde

$$\mathbf{h}' = \kappa \mathbf{n} \quad (3.24)$$

biçimindedir. Asal normal vektörün birinci mertebeden türevinin elde edilmesi için

$$\mathbf{n}' = \lambda \mathbf{h} + \mu \mathbf{n} + \nu \mathbf{b} \quad (3.25)$$

eşitliğindeki λ, μ, ν katsayılarının bulunması gerekir. λ katsayısının bulunması için (3.25) eşitliğinin her iki tarafı $\mathbf{h}$ vektörü ile çarpılır ve (3.24) denklemini kullanılarak

$$-\lambda = \mathbf{n}' \cdot \mathbf{h} = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{h}' = -\kappa \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = -\kappa$$

elde edilir ve buradan

$$\lambda = \kappa$$

olduğu görülür. $\mathbf{n}$ vektörü birim vektör olduğundan, türevi kendisine diktir, dolayısıyla

$$\mu = 0$$

dir. $\nu = \mathbf{n}' \cdot \mathbf{b} = \tau$ olmak üzere asal normal vektörün türevi

$$\mathbf{n}' = \kappa \mathbf{h} + \tau \mathbf{b} \quad (3.26)$$

dir. (3.23) denkleminin türevi alınırsa

$$\mathbf{b}' = -\mathbf{h}' \times \mathbf{n} - \mathbf{h} \times \mathbf{n}'$$

elde edilir. (3.24) ve (3.26) denklemlerinin kullanılması ile binormal vektörün türevi

$$\mathbf{b}' = -\tau \mathbf{n}$$

olarak bulunur. Böylece doğal üçyüzlünün birinci mertebeden açısal değişimi matris formda

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} \mathbf{h} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ \kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{h} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}$$

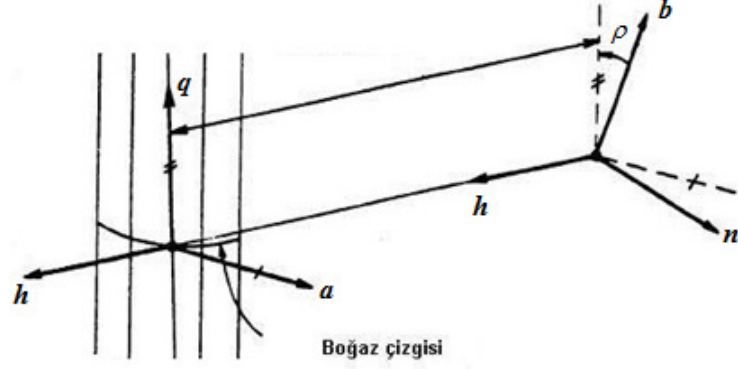
biçiminde ifade edilebilir, burada κ merkez normal yüzeyin eğriliği ve τ merkez normal yüzeyin burulmasıdır. Ayrıca,

$$\mathbf{h}' = \mathbf{w}_h \times \mathbf{h}, \quad \mathbf{n}' = \mathbf{w}_h \times \mathbf{n}, \quad \mathbf{b}' = \mathbf{w}_h \times \mathbf{b}$$

eşitliklerini sağlayan doğal üçyüzlünün Darboux ani dönme vektörü

$$\mathbf{w}_h = -\tau \mathbf{h} - \kappa \mathbf{b}$$

olarak bulunur.



Şekil 3.1. Regle yüzeyin üreteç üçyüzlüsü ile merkez normal yüzeyin doğal üçyüzlüsü arasındaki ilişki

Şekil 3.1 de gösterildiği gibi, üreteç üçyüzlüsü ve doğal üçyüzlü, h ortak merkez normal vektörüne sahiptirler. Üreteç üçyüzlüsünün q ve a vektörleri ile doğal üçyüzlünün n ve b vektörleri, aynı spacelike düzlemindedir. Üreteç üçyüzlüsünün merkez teğet vektörü a ile doğal üçyüzlünün asal normal vektörü n arasındaki spacelike açı ρ olmak üzere, bu vektörler arasındaki ilişki

$$n = \sin \rho q + \cos \rho a$$

$$b = \cos \rho q - \sin \rho a$$

biçiminde veya matris formda

$$\begin{bmatrix} n \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \rho & \cos \rho \\ \cos \rho & -\sin \rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ a \end{bmatrix}$$

biçiminde yazılabilir. Böylece üçyüzlüler arasındaki ilişki matris formda

$$\begin{bmatrix} h \\ n \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \sin \rho & 0 & \cos \rho \\ \cos \rho & 0 & -\sin \rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ h \\ a \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

biçiminde verilebilir.

(3.14) denklemi, (3.24) denkleminde yerine yazılarak ve (3.27) matris eşitliğinin ikinci satırı kullanılarak

$$\sin \rho q + \cos \rho a = \frac{1}{R\kappa} (q + \gamma a)$$

eşitliği elde edilir. Buradan

$$\sin \rho = \frac{1}{R\kappa} \quad (3.28)$$

ve

$$\cos \rho = \frac{\gamma}{R\kappa} \quad (3.29)$$

bağıntıları bulunur. (3.28) ve (3.29) denklemlerinden, spacelike regle yüzeyin jeodezik eğriliği γ ile spacelike ρ açısı arasında

$$\gamma = \cot \rho \quad (3.30)$$

ilişkisi olduğu ve merkez normal yüzeyin eğriliğinin de

$$\kappa = \frac{\sqrt{1+\gamma^2}}{R} \quad (3.31)$$

olduğu görülür. Böylece üreteç üçyüzlüsü ve doğal üçyüzlü arasındaki ilişki matris formda

$$\begin{bmatrix} \mathbf{h} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = \frac{1}{R\kappa} \begin{bmatrix} 0 & R\kappa & 0 \\ 1 & 0 & \gamma \\ \gamma & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{h} \\ \mathbf{a} \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

biçiminde de ifade edilebilir. (3.17) denklemi ile (3.32) matris eşitliğinin üçüncü satırı karşılaştırılırsa, üreteç üçyüzlüsünün Darboux ani dönme vektörü ile doğal üçyüzlünün binormal vektörü arasında

$$\mathbf{w}_q = -\kappa \mathbf{b} \quad (3.33)$$

ilişkisi olduğu görülür. (3.30) ve (3.31) denklemleri kullanılarak merkez normal yüzeyin eğriliği κ ile spacelike ρ açısı arasındaki ilişkinin

$$\kappa = \frac{\csc \rho}{R}$$

olduğu görülür. (3.27) matris eşitliğinin ikinci satırının türevi alınıp üçüncü satırı ile çarpılırsa merkez normal yüzeyin burulması τ ile spacelike ρ açısı arasındaki ilişki

$$\tau = \rho'$$

biçiminde bulunur.

(3.22) denkleminin türevi alınarak, merkez normal yüzeyin boğaz çizgisinin birinci mertebeden konumsal değişimi

$$\mathbf{c}_h' = \mathbf{c}' - \mu_h' \mathbf{h} - \mu_h \mathbf{h}' \quad (3.34)$$

biçiminde yazılabilir. (3.19) ve (3.24) denklemleri, (3.34) denkleminde yerine yazılırsa

$$\mathbf{c}_h' = \Gamma \mathbf{q} + \Delta \mathbf{a} - \mu_h' \mathbf{h} - \mu_h \kappa \mathbf{n}$$

elde edilir. (3.32) matris eşitliği yardımıyla merkez normal yüzeyin boğaz çizgisinin birinci mertebeden konumsal değişimi, doğal üçyüzlü elemanları cinsinden

$$c_h' = \Gamma_h h + \Delta_h b$$

biçiminde ifade edilebilir. Burada

$$\Gamma_h = -\mu_h'$$

ve

$$\Delta_h = \frac{\gamma \Gamma - \Delta}{\sqrt{1 + \gamma^2}}$$

dir.

Bu bölümde tanımlanan üreteç üçyüzlüsü ve doğal üçyüzlü sırasıyla, [17] de verilen Öklid uzayındaki yönlü koninin çatısı ve regle yüzeyin Frenet çatısına karşılık gelmektedir.

3.2. IR_1^3 Minkowski Uzayında Timelike Regle Yüzeylerin Eğrilik Teorisi

IR_1^3 Minkowski uzayında timelike bir regle yüzeyin her noktasındaki yüzey normali spacelike vektördür. Bu durumda bir regle yüzeyin doğuranları spacelike ya da timelike vektör olabilir. Bu bölümde, Minkowski 3-uzayda timelike regle yüzeylerin eğrilik teorisi, regle yüzeyin doğuranlarının spacelike ya da timelike olma durumlarına göre iki bölümde incelenecektir.

3.2.1. IR_1^3 Minkowski Uzayında Spacelike Doğuranlı Timelike Regle Yüzeylerin Eğrilik Teorisi

$\alpha(u)$ dayanak eğrisi, $R(u)$ ana doğruların yön vektörü ve u, v reel değerli parametreler olmak üzere bir spacelike doğuranlı timelike regle yüzey

$$X(u, v) = \alpha(u) + v R(u)$$

denklemleriyle verilebilir. Burada $R(u)$ doğuranları, spacelike vektörlerdir.

3.2.1.1. Boğaz Çizgisi ve Üreteç Üçyüzlüsü

Spacelike doğuranlı bir timelike regle yüzeyin boğaz çizgisinin dayanak eğrisine göre denklemi

$$c(s) = \alpha(s) - \mu(s)R(s) \quad (3.35)$$

biçiminde verilebilir. Boğaz çizgisinin tanımı kullanılarak μ parametresi

$$\mu = \alpha' \cdot R' \quad (3.36)$$

biçiminde elde edilir. Böylece spacelike doğuranlı bir timelike regle yüzeyin boğaz çizgisi

$$c = \alpha - (\alpha' \cdot R')R \quad (3.37)$$

biçiminde yazılabilir.

Spacelike doğuranlı bir timelike regle yüzeyin boğaz çizgisi üzerinde üreteç üçyüzlüsünü oluşturan üreteç vektörü

$$q = \frac{R}{R}, \quad (3.38)$$

merkez normal vektör

$$h = R' \quad (3.39)$$

ve merkez teğet vektör

$$a = q \times h \quad (3.40)$$

biçiminde tanımlanır.

Spacelike doğuranlı bir timelike regle yüzeyin her noktasındaki birim normal vektörü spacelike vektör olduğundan ve merkez normal vektör h , bu regle yüzeyin boğaz çizgisi üzerinde birim normal vektöre karşılık geldiğinden, merkez normal vektör h da spacelike vektördür. Bu bölümde spacelike doğuranlı regle yüzeyler ele alındığından üreteç vektörü q da spacelike vektördür, dolayısıyla merkez teğet vektör a , timelike vektör olmalıdır. Bununla birlikte, üreteç üçyüzlüsünün vektörleri arasında

$$q \times h = a, \quad h \times a = -q, \quad a \times q = -h \quad (3.41)$$

bağıntıları vardır.

Üreteç üçyüzlüsünün birinci mertebeden açılal değişiminin bulunması için gerekli olan q, h, a birim vektörlerinin türevleri, Bölüm 3.1.1 deki işlemlere benzer şekilde bulunabilir. Üreteç üçyüzlüsünün birinci mertebeden açılal değişimleri, matris formda

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} q \\ h \\ a \end{bmatrix} = \frac{1}{R} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \gamma \\ 0 & \gamma & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ h \\ a \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

biçiminde ifade edilebilir. Burada

$$\gamma = -R(h' \cdot a) \quad (3.43)$$

fonksiyonu spacelike doğuranlı bir timelike regle yüzeyin jeodezik eğriliğidir ve bu regle yüzeyin doğuranları cinsinden

$$\gamma = (R, R', R'')$$

biçiminde yazılabilir.

Diğer taraftan, üreteç üçyüzlüsünün Darboux ani dönme vektörü

$$w_q = \frac{1}{R}(\gamma q - a) \quad (3.44)$$

olarak bulunur. Bu vektör

$$\mathbf{q}' = \mathbf{w}_q \times \mathbf{q}, \quad \mathbf{h}' = \mathbf{w}_q \times \mathbf{h}, \quad \mathbf{a}' = \mathbf{w}_q \times \mathbf{a}$$

eşitliklerini sağlar.

Boğaz çizgisinin birinci mertebeden konumsal değişimi

$$\mathbf{c}' = \Gamma \mathbf{q} + \Delta \mathbf{a} \quad (3.45)$$

biçiminde yazılabilir. Burada

$$\Gamma = \frac{1}{R} (\boldsymbol{\alpha}' \cdot \mathbf{R}) - \mu' R \quad (3.46)$$

ve

$$\Delta = -\frac{1}{R} \boldsymbol{\alpha}' \cdot (\mathbf{R} \times \mathbf{R}') \quad (3.47)$$

dir.

Sırasıyla (3.43), (3.46) ve (3.47) denklemlerindeki γ, Γ, Δ parametreleri spacelike doğuranlı bir timelike regle yüzeyin eğrilik fonksiyonlarıdır.

3.2.1.2. Merkez Normal Yüzey ve Doğal Üçyüzlü

Spacelike doğuranlı bir timelike regle yüzeyin merkez normal yüzeyi

$$\mathbf{X}_h(s, v) = \mathbf{c}(s) + v \mathbf{h}(s)$$

denklemleri ile verilebilir. Burada $\mathbf{c}$, spacelike doğuranlı $\mathbf{X}$ timelike regle yüzeyinin boğaz çizgisi ve $\mathbf{h}$, $\mathbf{X}$ regle yüzeyinin merkez normal vektörüdür.

Merkez normal yüzeyin boğaz çizgisi

$$\mathbf{c}_h = \mathbf{c} - \mu_h \mathbf{h} \quad (3.48)$$

biçiminde verilebilir.

μ_h parametresi, boğaz çizgisinin tanımı kullanılarak

$$\mu_h = \frac{\mathbf{c}' \cdot \mathbf{h}'}{\mathbf{h}' \cdot \mathbf{h}'} = -\frac{(\Gamma + \Delta \gamma) R}{1 - \gamma^2}$$

biçiminde bulunur. Böylece merkez normal yüzeyin boğaz çizgisi

$$\mathbf{c}_h = \mathbf{c} + \frac{(\Gamma + \Delta \gamma) R}{1 - \gamma^2} \mathbf{h}$$

biçiminde yazılabilir.

Merkez normal yüzeyin boğaz çizgisi üzerinde tanımlı olan doğal üçyüzlüyü oluşturan vektörler; $\mathbf{h}$ üreteç vektörü, $\mathbf{n}$ asal normal vektör ve $\mathbf{b}$ binormal vektördür. $\mathbf{X}$ spacelike

doğuranlı timelike regle yüzeyinin merkez normal vektörü olan $\mathbf{h}$, X_h merkez normal yüzeyinin üreteç vektörü konumundadır ve bir spacelike vektördür. $\mathbf{n}$ asal normal vektör, spacelike veya timelike vektör olabilir ve bu iki durum ayrı ayrı incelenmelidir.

1. Durum: $\mathbf{n}$ asal normal vektörü spacelike olsun.

Doğal üçyüzlünün üreteç vektörü, üreteç üçyüzlüsünün merkez normal vektörü olup

$$\mathbf{h} = \mathbf{R}'$$

biçiminde verilebilir. Asal normal vektör

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{h}'}{\kappa}$$

olarak tanımlanır, burada

$$\kappa = \|\mathbf{h}'\|$$

merkez normal yüzeyin eğriliğidir. Son olarak binormal vektör

$$\mathbf{b} = \mathbf{h} \times \mathbf{n}$$

biçiminde verilir. $\mathbf{h}$ vektörü timelike regle yüzeyin boğaz çizgisindeki normal vektörüne karşılık geldiğinden spacelike bir vektördür ve $\mathbf{n}$ vektörü de spacelike vektör olduğundan, $\mathbf{b}$ vektörü bir timelike vektördür.

Doğal üçyüzlünün birinci mertebeden açısal değişiminin belirlenmesi için gerekli olan $\mathbf{h}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ birim vektörlerinin türevleri, Bölüm 3.1.2 deki işlemlere benzer şekilde bulunabilir. Doğal üçyüzlünün birinci mertebeden açısal değişimi matris formda

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} \mathbf{h} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{h} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

biçiminde ifade edilebilir, burada κ , merkez normal yüzeyin eğriliği ve τ , merkez normal yüzeyin burulmasıdır. Doğal üçyüzlünün Darboux ani dönme vektörü ise

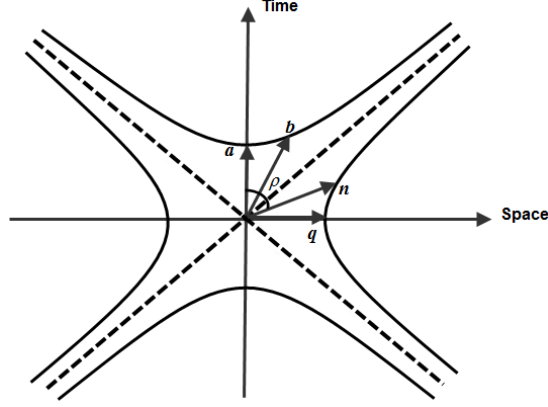
$$\mathbf{w}_h = \tau \mathbf{h} - \kappa \mathbf{b}$$

olarak bulunur. Bu vektör

$$\mathbf{h}' = \mathbf{w}_h \times \mathbf{h}, \quad \mathbf{n}' = \mathbf{w}_h \times \mathbf{n}, \quad \mathbf{b}' = \mathbf{w}_h \times \mathbf{b}$$

eşitliklerini sağlar.

Üreteç üçyüzlüsü ve doğal üçyüzlü, $\mathbf{h}$ ortak merkez normal vektörüne sahiptirler. Üreteç üçyüzlüsünün $\mathbf{q}$ ve $\mathbf{a}$ vektörleri ile doğal üçyüzlünün $\mathbf{n}$ ve $\mathbf{b}$ vektörleri, aynı timelike düzlemedir.



Şekil 3.2. Üreteç üçyüzlüsünün timelike merkez teğet vektörü ile doğal üçyüzlünün spacelike asal normal vektörü arasındaki timelike açı

Şekil 3.2 de gösterildiği gibi, üreteç üçyüzlüsünün merkez teğet vektörü a ile doğal üçyüzlünün asal normal vektörü n arasındaki timelike açı ρ olmak üzere bu vektörler arasındaki ilişki

$$n = \cosh \rho q + \sinh \rho a$$

$$b = \sinh \rho q + \cosh \rho a$$

biçiminde veya matris formda

$$\begin{bmatrix} n \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh \rho & \sinh \rho \\ \sinh \rho & \cosh \rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ a \end{bmatrix}$$

biçiminde yazılabilir [5]. Böylece üçyüzlüler arasındaki ilişki matris formda

$$\begin{bmatrix} h \\ n \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \cosh \rho & 0 & \sinh \rho \\ \sinh \rho & 0 & \cosh \rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ h \\ a \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

biçiminde verilebilir.

(3.42) matris eşitliğinin ikinci satırı, (3.49) matris eşitliğinin birinci satırında yerine yazılır ve (3.50) matris eşitliğinin ikinci satırı kullanılırsa

$$\cosh \rho q + \sinh \rho a = \frac{1}{R\kappa} (-q + \gamma a)$$

eşitliği bulunur. Buradan

$$\cosh \rho = -\frac{1}{R\kappa} \quad (3.51)$$

ve

$$\sinh \rho = \frac{\gamma}{R\kappa} \quad (3.52)$$

bağıntıları elde edilir. Böylece (3.51) ve (3.52) denklemlerinden, spacelike doğuranlı bir timelike regle yüzeyin eğriliği γ ile timelike ρ açısı arasında

$$\gamma = -\tanh \rho \quad (3.53)$$

ilişkisi olduğu ve merkez normal yüzeyin eğriliğinin de

$$\kappa = \frac{\sqrt{|1-\gamma^2|}}{R} \quad (3.54)$$

olduğu görülür. Dolayısıyla (3.50) ile verilen üreteç üçyüzlüsü ve doğal üçyüzlü arasındaki ilişki, matris formda

$$\begin{bmatrix} \mathbf{h} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = \frac{1}{R\kappa} \begin{bmatrix} 0 & R\kappa & 0 \\ -1 & 0 & \gamma \\ \gamma & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{h} \\ \mathbf{a} \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

biçiminde de ifade edilebilir. Üreteç üçyüzlüsünün Darboux ani dönme vektörü olan (3.44) denklemi, doğal üçyüzlünün binormal vektörü olan (3.55) matris eşitliğinin üçüncü satırı ile karşılaştırılırsa

$$\mathbf{w}_q = +\kappa \mathbf{b} \quad (3.56)$$

olduğu görülür. (3.53) ve (3.54) denklemleri kullanılarak merkez normal yüzeyin eğriliği κ ile timelike ρ açısı arasında

$$\kappa = \frac{\operatorname{sech} \rho}{R}$$

ilişkisinin olduğu görülür. (3.50) matris eşitliğinin ikinci satırının türevi alınıp, elde edilen asal normal vektörün türevi, üçüncü satır ile çarpılırsa, merkez normal yüzeyin burulması τ ile timelike ρ açısı arasındaki ilişki

$$\tau = \rho'$$

biçiminde bulunur.

(3.48) denkleminin türevi alınarak merkez normal yüzeyin boğaz çizgisinin birinci mertebeden konumsal değişimi

$$\mathbf{c}_h' = \mathbf{c}' - \mu_h' \mathbf{h} - \mu_h \mathbf{h}' \quad (3.57)$$

biçiminde yazılabilir. (3.45) denklemi ve (3.49) matris eşitliğinin birinci satırı, (3.57) denkleminde yerine yazılırsa

$$\mathbf{c}_h' = \Gamma \mathbf{q} + \Delta \mathbf{a} - \mu_h' \mathbf{h} - \mu_h \kappa \mathbf{n}$$

elde edilir. (3.55) matris eşitliği yardımıyla merkez normal yüzeyin boğaz çizgisinin birinci mertebeden konumsal değişimi doğal üçyüzlü elemanları cinsinden

$$\mathbf{c}_h' = \Gamma_h \mathbf{h} + \Delta_h \mathbf{b}$$

biçiminde ifade edilebilir. Burada

$$\Gamma_h = -\mu_h'$$

ve

$$\Delta_h = \frac{\gamma \Gamma + \Delta}{\sqrt{|\gamma^2 - 1|}}$$

dir.

2. Durum: n asal normal vektörü timelike olsun.

Doğal üçyüzlünün üreteç vektörü

$$\mathbf{h} = \mathbf{R}'$$

dir. Asal normal vektör

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{h}'}{\kappa}$$

dır, burada

$$\kappa = \|\mathbf{h}'\|$$

merkez normal yüzeyin eğriliğidir. Son olarak binormal vektör

$$\mathbf{b} = -\mathbf{h} \times \mathbf{n}$$

biçiminde tanımlanır. $\mathbf{h}$ vektörü timelike regle yüzeyin boğaz çizgisindeki normal vektörüne karşılık geldiğinden, bir spacelike vektördür. $\mathbf{n}$ vektörü timelike vektör olduğundan, $\mathbf{b}$ vektörü bir spacelike vektördür.

Doğal üçyüzlünün birinci mertebeden açısal değişimi matris formda

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} \mathbf{h} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ \kappa & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{h} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}$$

biçiminde bulunur, burada κ merkez normal yüzeyin eğriliği ve τ merkez normal yüzeyin burulmasıdır. Doğal üçyüzlünün Darboux ani dönme vektörü ise

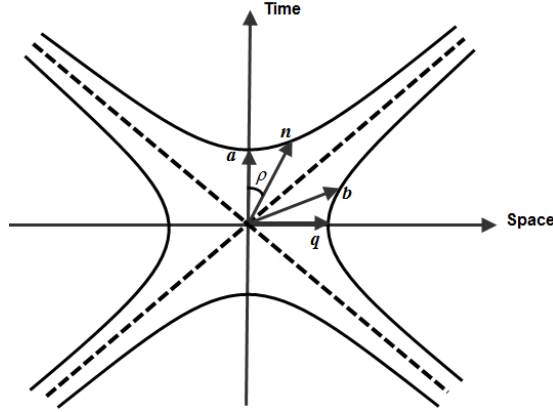
$$\mathbf{w}_h = -\tau \mathbf{h} + \kappa \mathbf{b}$$

dir. Bu vektör

$$\mathbf{h}' = \mathbf{w}_h \times \mathbf{h}, \quad \mathbf{n}' = \mathbf{w}_h \times \mathbf{n}, \quad \mathbf{b}' = \mathbf{w}_h \times \mathbf{b}$$

eşitliklerini sağlar

Üreteç üçyüzlüsü ve doğal üçyüzlü, h ortak merkez normal vektörüne sahiptirler. Üreteç üçyüzlüsünün q ve a vektörleri ile doğal üçyüzlünün n ve b vektörleri, aynı timelike düzlemde dir.



Şekil 3.3. Üreteç üçyüzlüsünün timelike merkez teğet vektörü ile doğal üçyüzlünün timelike asal normal vektörü arasındaki hiperbolik açı

Şekil 3.3 de gösterildiği gibi, üreteç üçyüzlüsünün merkez teğet vektörü a ile doğal üçyüzlünün asal normal vektörü n arasındaki hiperbolik açı ρ olmak üzere, bu vektörler arasındaki ilişki

$$n = \sinh \rho q + \cosh \rho a$$

$$b = \cosh \rho q + \sinh \rho a$$

biçiminde veya matris formda

$$\begin{bmatrix} n \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sinh \rho & \cosh \rho \\ \cosh \rho & \sinh \rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ a \end{bmatrix}$$

biçiminde yazılabilir [5]. Böylece üçyüzlüler arasındaki ilişki matris formda

$$\begin{bmatrix} h \\ n \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \sinh \rho & 0 & \cosh \rho \\ \cosh \rho & 0 & \sinh \rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ h \\ a \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

biçiminde verilebilir.

(3.42) matris eşitliğinin ikinci satırı, (3.49) matris eşitliğinin birinci satırında yerine yazılır ve (3.58) matris eşitliğinin ikinci satırı kullanılırsa

$$\sinh \rho q + \cosh \rho a = \frac{1}{R\kappa} (-q + \gamma a)$$

eşitliği bulunur. Buradan

$$\cosh \rho = \frac{\gamma}{R\kappa} \quad (3.59)$$

ve

$$\sinh \rho = -\frac{1}{R\kappa} \quad (3.60)$$

bağıntıları elde edilir. (3.59) ve (3.60) denklemlerinden, spacelike doğuranlı timelike regle yüzeyin jeodezik eğriliği γ ile hiperbolik ρ açısı arasındaki ilişkinin

$$\gamma = -\coth \rho \quad (3.61)$$

olduğu görülür. Merkez normal yüzeyin eğriliği, regle yüzeyin jeodezik eğriliği cinsinden

$$\kappa = \frac{\sqrt{|\gamma^2 - 1|}}{R} \quad (3.62)$$

olarak bulunur. Böylece (3.58) ile verilen üreteç üçyüzlüsü ve doğal üçyüzlü arasındaki ilişki, matris formda

$$\begin{bmatrix} \mathbf{h} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = \frac{1}{R\kappa} \begin{bmatrix} 0 & R\kappa & 0 \\ -1 & 0 & \gamma \\ \gamma & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{h} \\ \mathbf{a} \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

biçiminde de ifade edilebilir. (3.44) denklemi, (3.63) matris eşitliğinin üçüncü satırı ile karşılaştırılırsa, üreteç üçyüzlüsünün Darboux ani dönme vektörü ile doğal üçyüzlünün binormal vektörü arasında

$$\mathbf{w}_q = \kappa \mathbf{b} \quad (3.64)$$

ilişkisi olduğu görülür. (3.61) ve (3.62) denklemleri kullanılarak merkez normal yüzeyin eğriliği κ ile hiperbolik ρ açısı arasında

$$\kappa = \frac{|\operatorname{csch} \rho|}{R}$$

bağıntısı bulunur. (3.58) matris eşitliğinin ikinci satırının türevi alınıp, elde edilen asal normal vektörün türevi, üçüncü satır ile çarpılırsa merkez normal yüzeyin burulması τ ile hiperbolik ρ açısı arasındaki ilişkinin

$$\tau = \rho'$$

olduğu görülür.

(3.63) matris eşitliği yardımıyla, merkez normal yüzeyin boğaz çizgisinin birinci mertebeden konumsal değişiminin, doğal üçyüzlü elemanları cinsinden ifadesi

$$\mathbf{c}_h' = \Gamma_h \mathbf{h} + \Delta_h \mathbf{b}$$

biçiminde bulunur. Burada

$$\Gamma_h = -\mu_h'$$

ve

$$\Delta_h = \frac{\gamma \Gamma + \Delta}{\sqrt{|\gamma^2 - 1|}}$$

dir.

3.2.2. IR_1^3 Minkowski Uzayında Timelike Doğuranlı Timelike Regle Yüzeylerin Eğrilik Teorisi

$\alpha(u)$ dayanak eğrisi, $R(u)$ timelike ana doğruların yön vektörü ve u, v reel değerli parametreler olmak üzere, timelike doğuranlı bir timelike regle yüzey

$$X(u, v) = \alpha(u) + v R(u)$$

denklemleriyle verilebilir. Burada $R(u)$ doğuranları, timelike vektörlerdir.

3.2.2.1. Boğaz Çizgisi ve Üreteç Üçyüzlüsü

Timelike doğuranlı bir timelike regle yüzeyin boğaz çizgisinin dayanak eğrisine göre konumu

$$c(s) = \alpha(s) - \mu(s)R(s) \quad (3.65)$$

biçiminde verilebilir. Boğaz çizgisini karakterize eden (3.4) denklemi yardımıyla

$$\mu = \alpha' \cdot R' \quad (3.66)$$

olarak bulunur. Böylece timelike doğuranlı timelike regle yüzeyin boğaz çizgisi

$$c = \alpha - (\alpha' \cdot R')R \quad (3.67)$$

biçiminde ifade edilebilir [28].

Timelike doğuranlı timelike regle yüzeyin boğaz çizgisi üzerinde tanımlı olan üreteç üçyüzlüsünü oluşturan üreteç vektörü, merkez normal vektör ve merkez teğet vektör sırasıyla

$$q = \frac{R}{R}, \quad h = R', \quad a = -q \times h \quad (3.68)$$

olarak tanımlanır [28].

Timelike doğuranlı timelike regle yüzeyin her noktasındaki birim normal vektörü spacelike vektör olduğundan ve merkez normal vektör h , regle yüzeyin boğaz çizgisi üzerinde, birim normal vektöre karşılık geldiğinden, merkez normal vektör h da spacelike vektördür. Bu bölümde timelike doğuranlı regle yüzeyler ele alındığından, üreteç vektörü q timelike vektördür,

dolayısıyla merkez teğet vektör $\mathbf{a}$ spacelike vektördür. Ayrıca, üreteç üçyüzlüsünün vektörleri arasında

$$\mathbf{q} \times \mathbf{h} = -\mathbf{a}, \quad \mathbf{h} \times \mathbf{a} = \mathbf{q}, \quad \mathbf{a} \times \mathbf{q} = \mathbf{h}$$

bağıntıları vardır.

Üreteç üçyüzlüsünün birinci mertebeden açısal değişimleri, matris formda

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{h} \\ \mathbf{a} \end{bmatrix} = \frac{1}{R} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \gamma \\ 0 & -\gamma & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{h} \\ \mathbf{a} \end{bmatrix} \quad (3.69)$$

biçiminde ifade edilebilir [28]. Burada

$$\gamma = R(\mathbf{h}' \cdot \mathbf{a}) \quad (3.70)$$

fonksiyonuna timelike doğuranlı timelike regle yüzeyin jeodezik eğriliği denir ve regle yüzeyin doğuranları cinsinden

$$\gamma = (R, R', R'')$$

biçiminde yazılabilir.

Ayrıca, üreteç üçyüzlüsünün Darboux ani dönme vektörü

$$\mathbf{w}_q = \frac{1}{R}(-\gamma \mathbf{q} - \mathbf{a}) \quad (3.71)$$

olarak bulunur [28]. Bu vektör

$$\mathbf{q}' = \mathbf{w}_q \times \mathbf{q}, \quad \mathbf{h}' = \mathbf{w}_q \times \mathbf{h}, \quad \mathbf{a}' = \mathbf{w}_q \times \mathbf{a}$$

eşitliklerini sağlar.

Boğaz çizgisinin birinci mertebeden konumsal değişimi

$$\mathbf{c}' = \Gamma \mathbf{q} + \Delta \mathbf{a} \quad (3.72)$$

biçiminde yazılabilir [11]. Burada

$$\Gamma = -\frac{1}{R}(\alpha' \cdot \mathbf{R}) + \mu' R \quad (3.73)$$

ve

$$\Delta = -\frac{1}{R} \alpha' \cdot (\mathbf{R} \times \mathbf{R}') \quad (3.74)$$

dir. [11] de

$$\Gamma = -\frac{1}{R}(\alpha' \cdot \mathbf{R}) - \frac{1}{R} \mu'$$

biçiminde verilen regle yüzeyin eğriliği, burada (3.73) denkleminde görüldüğü üzere, [11] de verilenden farklı bulunmuştur.

Sırasıyla (3.70), (3.73) ve (3.74) denklemlerindeki γ, Γ, Δ parametrelerine timelike doğuranlı timelike regle yüzeyin eğrilik fonksiyonları denir.

3.2.2.2. Merkez Normal Yüzey ve Doğal Üçyüzlü

Timelike doğuranlı timelike regle yüzeyin merkez normal yüzeyi

$$X_h(s, v) = c(s) + v h(s)$$

denklemleri ile verilebilir [11]. Burada c , X regle yüzeyinin boğaz çizgisi ve h , X regle yüzeyinin merkez normal vektörüdür.

Merkez normal yüzeyin boğaz çizgisi

$$c_h = c - \mu_h h \quad (3.75)$$

biçiminde verilebilir.

Boğaz çizgisinin tanımı yardımıyla

$$\mu_h = \frac{c' \cdot h'}{h' \cdot h'} = \frac{(-\Gamma + \Delta\gamma)R}{\gamma^2 - 1}$$

bulunur [11]. Böylece merkez normal yüzeyin boğaz çizgisi

$$c_h = c - \frac{(-\Gamma + \Delta\gamma)R}{\gamma^2 - 1} h$$

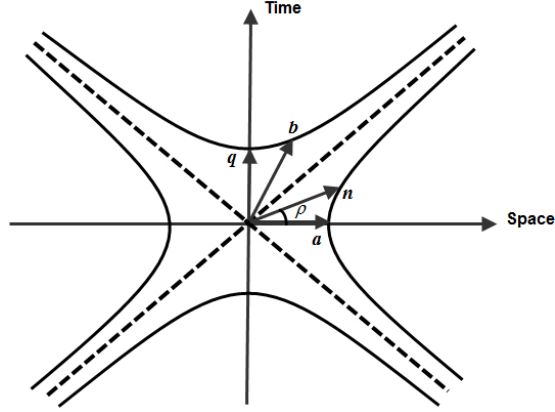
biçiminde ifade edilebilir.

Merkez normal yüzeyin boğaz çizgisi üzerinde tanımlı olan doğal üçyüzlüyü oluşturan vektörler; üreteç vektörü h , asal normal vektör n ve binormal vektör b dir. X timelike doğuranlı timelike regle yüzeyin merkez normal vektörü olan h , merkez normal yüzeyin üreteç vektörü konumundadır ve bir spacelike vektördür. Asal normal vektör n , spacelike veya timelike vektör olabilir ve bu iki durum ayrı ayrı incelenmelidir. [11] de, sadece n asal normal vektörünün spacelike olma durumu ele alınmış olup, iki durum için ayrı ayrı inceleme yapılmamıştır.

1. Durum: n asal normal vektörü spacelike olsun.

Doğal üçyüzlünün üreteç vektörleri, türev formülleri ve Darboux vektörü Bölüm 3.2.1.2 de bulunmuştur.

Üreteç üçyüzlüsü ve doğal üçyüzlü, h ortak merkez normal vektörüne sahiptirler. Üreteç üçyüzlüsünün q ve a vektörleri ile doğal üçyüzlünün n ve b vektörleri, aynı timelike düzlemindedir.



Şekil 3.4. Üreteç üçyüzlüsünün spacelike merkez teğet vektörü ile doğal üçyüzlünün spacelike asal normal vektörü arasındaki merkez açısı

Şekil 3.4 de gösterildiği gibi, üreteç üçyüzlüsünün merkez teğet vektörü a ile doğal üçyüzlünün asal normal vektörü n arasındaki merkez açısı ρ olmak üzere bu vektörler arasındaki ilişki

$$n = \sinh \rho \, q + \cosh \rho \, a$$

$$b = \cosh \rho \, q + \sinh \rho \, a$$

biçiminde veya matris formda

$$\begin{bmatrix} n \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sinh \rho & \cosh \rho \\ \cosh \rho & \sinh \rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ a \end{bmatrix}$$

biçiminde yazılabilir [5]. Böylece üçyüzlüler arasındaki ilişki matris formda

$$\begin{bmatrix} h \\ n \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \sinh \rho & 0 & \cosh \rho \\ \cosh \rho & 0 & \sinh \rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ h \\ a \end{bmatrix} \quad (3.76)$$

biçiminde verilebilir [11].

(3.42) matris eşitliğinin ikinci satırı (3.49), matris eşitliğinin birinci satırında yerine yazılarak ve (3.76) matris eşitliğinin ikinci satırı kullanılarak

$$\sinh \rho \, q + \cosh \rho \, a = \frac{1}{R\kappa} (q + \gamma a)$$

eşitliği elde edilir [11]. Buradan

$$\cosh \rho = \frac{\gamma}{R\kappa} \quad (3.77)$$

ve

$$\sinh \rho = \frac{1}{R\kappa} \quad (3.78)$$

bağıntılarının olduğu görülür. (3.77) ve (3.78) denklemlerinden timelike doğuranlı timelike regle yüzeyin jeodezik eğriliği γ ile ρ merkez açısı arasında

$$\gamma = \coth \rho \quad (3.79)$$

ilişkisi olduğu görülür [11]. Merkez normal yüzeyin eğriliği de

$$\kappa = \frac{\sqrt{|\gamma^2 - 1|}}{R} \quad (3.80)$$

olarak bulunur. (3.77) ve (3.78) denklemleri, (3.76) matris eşitliğinde yerine yazılarak üreteç üçyüzlüsü ve doğal üçyüzlü arasındaki ilişkinin matris formda

$$\begin{bmatrix} \mathbf{h} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = \frac{1}{R\kappa} \begin{bmatrix} 0 & R\kappa & 0 \\ 1 & 0 & \gamma \\ \gamma & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{h} \\ \mathbf{a} \end{bmatrix} \quad (3.81)$$

biçiminde de ifade edilebileceği görülür. Üreteç üçyüzlüsünün Darboux ani dönme vektörü olan (3.71) denklemi, doğal üçyüzlünün binormal vektörü olan (3.81) matris eşitliğinin üçüncü satırı ile karşılaştırılırsa

$$\mathbf{w}_q = -\kappa \mathbf{b}$$

ilişkisi olduğu görülür. (3.79) ve (3.80) denklemleri kullanılarak, merkez normal yüzeyin eğriliği κ ile ρ merkez açısı arasındaki ilişki

$$\kappa = \frac{|\operatorname{csch} \rho|}{R}$$

olarak bulunur. (3.76) matris eşitliği yardımıyla, merkez normal yüzeyin burulması τ ile ρ merkez açısı arasındaki ilişki

$$\tau = \rho'$$

biçiminde bulunur.

(3.75) denkleminin türevi alınarak merkez normal yüzeyin birinci mertebeden konumsal değişimi

$$\mathbf{c}_h' = \mathbf{c}' - \mu_h' \mathbf{h} - \mu_h \mathbf{h}' \quad (3.82)$$

biçiminde yazılabilir. (3.49) matris eşitliğinin birinci satırı ve (3.72) denklemi, (3.82) denkleminde yerine yazılırsa

$$\mathbf{c}_h' = \Gamma \mathbf{q} + \Delta \mathbf{a} - \mu_h' \mathbf{h} - \mu_h \kappa \mathbf{n}$$

elde edilir. (3.81) matris eşitliği yardımıyla, merkez normal yüzeyin boğaz çizgisinin birinci mertebeden konumsal değişimi, doğal üçyüzlü elemanları cinsinden

$$\mathbf{c}_h' = \Gamma_h \mathbf{h} + \Delta_h \mathbf{b}$$

biçiminde ifade edilebilir [11]. Burada

$$\Gamma_h = -\mu_h'$$

ve

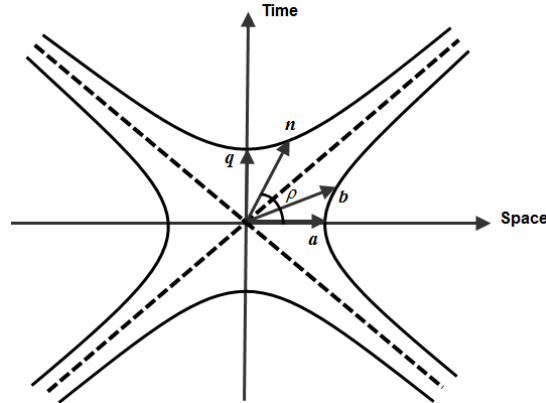
$$\Delta_h = \frac{\gamma \Gamma - \Delta}{\sqrt{|\gamma^2 - 1|}}$$

dir.

2. Durum: n asal normal vektörü timelike olsun.

Doğal üçyüzlünün üreteç vektörleri, türev formülleri ve Darboux vektörü Bölüm 3.2.1.2 de bulunmuştur.

Üreteç üçyüzlüsü ve doğal üçyüzlü, h ortak merkez normal vektörüne sahiptirler. Üreteç üçyüzlüsünün q ve a vektörleri ile doğal üçyüzlünün n ve b vektörleri, aynı timelike düzlemindedir.



Şekil 3.5. Üreteç üçyüzlüsünün spacelike merkez teğet vektörü ile doğal üçyüzlünün timelike asal normal vektörü arasındaki timelike açı

Şekil 3.5 de gösterildiği gibi, üreteç üçyüzlüsünün merkez teğet vektörü a ile doğal üçyüzlünün asal normal vektörü n arasındaki timelike açı ρ olmak üzere, bu vektörler arasındaki ilişki

$$n = \cosh \rho \, q + \sinh \rho \, a$$

$$b = \sinh \rho \, q + \cosh \rho \, a$$

biçiminde veya matris formda

$$\begin{bmatrix} \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh \rho & \sinh \rho \\ \sinh \rho & \cosh \rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{a} \end{bmatrix}$$

biçiminde yazılabilir [5]. Böylece üçyüzlüler arasındaki ilişki, matris formda

$$\begin{bmatrix} \mathbf{h} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \cosh \rho & 0 & \sinh \rho \\ \sinh \rho & 0 & \cosh \rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{h} \\ \mathbf{a} \end{bmatrix} \quad (3.83)$$

biçiminde verilebilir.

(3.42) matris eşitliğinin ikinci satırı, (3.49) matris eşitliğinin birinci satırında yerine yazılarak ve (3.83) matris eşitliğinin ikinci satırı kullanılarak

$$\cosh \rho \mathbf{q} + \sinh \rho \mathbf{a} = \frac{1}{R\kappa} (\mathbf{q} + \gamma \mathbf{a})$$

eşitliği bulunur. Buradan

$$\cosh \rho = \frac{1}{R\kappa} \quad (3.84)$$

ve

$$\sinh \rho = \frac{\gamma}{R\kappa} \quad (3.85)$$

bağıntıları elde edilir. (3.84) ve (3.85) denklemlerinden, timelike doğuranlı timelike regle yüzeyin jeodezik eğriliği γ ile timelike ρ açısı arasında

$$\gamma = \tanh \rho \quad (3.86)$$

ilişkisi olduğu görülür. Merkez normal yüzeyin eğriliği ile regle yüzeyin jeodezik eğriliği arasındaki ilişki

$$\kappa = \frac{\sqrt{|1 - \gamma^2|}}{R} \quad (3.87)$$

olarak bulunur. (3.84) ve (3.85) denklemleri, (3.83) denkleminde yerine yazılarak üreteç üçyüzlüsü ve doğal üçyüzlü arasındaki ilişkinin matris formda

$$\begin{bmatrix} \mathbf{h} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = \frac{1}{R\kappa} \begin{bmatrix} 0 & R\kappa & 0 \\ 1 & 0 & \gamma \\ \gamma & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{h} \\ \mathbf{a} \end{bmatrix} \quad (3.88)$$

biçiminde de ifade edilebileceği görülür. Üreteç üçyüzlüsünün Darboux ani dönme vektörü olan (3.71) denklemi, doğal üçyüzlünün binormal vektörü olan (3.88) matris eşitliğinin üçüncü satırı ile karşılaştırılırsa

$$\mathbf{w}_q = -\kappa \mathbf{b}$$

olduğu görülür. (3.86) ve (3.87) denklemleri kullanılarak merkez normal yüzeyin eğriliği κ ile timelike ρ açısı arasındaki ilişki

$$\kappa = \frac{\operatorname{sech} \rho}{R}$$

olarak bulunur. (3.76) matris eşitliği yardımıyla, merkez normal yüzeyin burulması τ ile timelike ρ açısı arasındaki ilişki

$$\tau = \rho'$$

biçiminde bulunur.

(3.75) denkleminin türevi alınarak, merkez normal yüzeyin boğaz çizgisinin birinci mertebeden konumsal değişimi

$$\mathbf{c}_h' = \mathbf{c}' - \mu_h' \mathbf{h} - \mu_h \mathbf{h}' \quad (3.89)$$

biçiminde yazılabilir. (3.49) matris eşitliğinin birinci satırı ve (3.72) denklemi, (3.89) denkleminde yerine yazılırsa

$$\mathbf{c}_h' = \Gamma \mathbf{q} + \Delta \mathbf{a} - \mu_h' \mathbf{h} - \mu_h \kappa \mathbf{n}$$

elde edilir. (3.88) matris eşitliği yardımıyla, merkez normal yüzeyin boğaz çizgisinin birinci mertebeden konumsal değişimi doğal üçyüzlü elemanları cinsinden

$$\mathbf{c}_h' = \Gamma_h \mathbf{h} + \Delta_h \mathbf{b}$$

biçiminde ifade edilebilir. Burada

$$\Gamma_h = -\mu_h'$$

ve

$$\Delta_h = \frac{\gamma \Gamma - \Delta}{\sqrt{|1 - \gamma^2|}}$$

dir.

Örnek 3.1. $X(s, v) = (\sinh s + v \cosh s, \sqrt{3}v, \cosh s + v \sinh s)$ regle yüzeyi verilsin. Bu yüzeyin regle formu

$$X(s, v) = (\sinh s, 0, \cosh s) + v(\cosh s, \sqrt{3}, \sinh s)$$

biçiminde yazılabilir. Regle yüzeyin dayanak eğrisi

$$\alpha(s) = (\sinh s, 0, \cosh s)$$

ve doğuranları

$$\mathbf{R}(s) = (\cosh s, \sqrt{3}, \sinh s)$$

dir. Ana doğruların yön vektörlerinin boyu

$$R = \|\mathbf{R}(s)\| = 2$$

dir. Doğuranların türevi

$$\mathbf{R}'(s) = (\sinh s, 0, \cosh s)$$

olarak bulunur ve $\|\mathbf{R}'(u)\| = 1$ olduğundan s parametresi normalleştirilmiş parametredir. Regle yüzeyin boğaz çizgisi

$$\mathbf{c} = \boldsymbol{\alpha} - \mu \mathbf{R}$$

denklemini yardımıyla bulunabilir. Burada

$$\mu = \langle \boldsymbol{\alpha}', \mathbf{R}' \rangle = 0$$

olduğundan regle yüzeyin boğaz çizgisinin dayanak eğrisine eşit olduğu görülür, yani

$$\mathbf{c} = \boldsymbol{\alpha} = (\sinh s, 0, \cosh s)$$

dir. Regle yüzeyin boğaz çizgisi üzerinde tanımlı olan $\{\mathbf{q}, \mathbf{h}, \mathbf{a}\}$ üreteç üçyüzlüsü aşağıdaki gibi bulunabilir. Regle yüzeyin üreteç vektörü

$$\mathbf{q} = \frac{\mathbf{R}}{\|\mathbf{R}\|} = \frac{1}{2} (\cosh s, \sqrt{3}, \sinh s)$$

olarak bulunur. $\langle \mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle = 1$ olduğundan, $\mathbf{q}$ üreteç vektörü spacelike vektördür. Regle yüzeyin merkez normal vektörü

$$\mathbf{h} = \mathbf{R}' = (\sinh s, 0, \cosh s)$$

dir. $\langle \mathbf{h}, \mathbf{h} \rangle = -1$ olduğundan, $\mathbf{h}$ merkez normal vektör timelike vektördür. Regle yüzeyin merkez teğet vektörü ise

$$\mathbf{a} = -\mathbf{q} \times \mathbf{h} = \frac{1}{2} (\sqrt{3} \cosh s, -1, \sqrt{3} \sinh s)$$

biçiminde bulunur. $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = 1$ olduğundan, $\mathbf{a}$ merkez teğet vektör spacelike vektördür. Üreteç üçyüzlüsünü oluşturan vektörlerin türevleri

$$\mathbf{q}' = \frac{1}{2} (\sinh s, 0, \cosh s)$$

$$\mathbf{h}' = (\cosh s, 0, \sinh s)$$

$$\mathbf{a}' = \frac{1}{2} (\sqrt{3} \sinh s, 0, \sqrt{3} \cosh s)$$

olarak bulunur. $\mathbf{a}' = \frac{\gamma}{R} \mathbf{h}$ olduğundan regle yüzeyin jeodezik eğriliği

$$\gamma = \sqrt{3}$$

olarak bulunur. Üreteç üçyüzlüsünün Darboux ani dönme vektörü

$$\mathbf{w}_q = \frac{1}{R}(-\gamma \mathbf{q} + \mathbf{a}) = (0, -1, 0)$$

dır. Boğaz çizgisinin teğet vektörü

$$\mathbf{c}' = \Gamma \mathbf{q} + \Delta \mathbf{a} = (\cosh s, 0, \sinh s)$$

biçiminde yazılabilir. Burada

$$\Gamma = \frac{1}{R} \langle \boldsymbol{\alpha}', \mathbf{R} \rangle - \mu' R = \frac{1}{2}$$

ve

$$\Delta = -\frac{1}{R} \langle \boldsymbol{\alpha}', \mathbf{R} \times \mathbf{R}' \rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

dir.

Regle yüzeyin merkez normal yüzeyi

$$\mathbf{X}_h(s, v) = \mathbf{c}(s) + v \mathbf{h}(s) = (\sinh s, 0, \cosh s) + v(\sinh s, 0, \cosh s)$$

denklemleri ile verilebilir. Merkez normal yüzeyin boğaz çizgisi

$$\mathbf{c}_h = \mathbf{c} - \mu_h \mathbf{h}$$

denklemleri yardımıyla bulunabilir. Burada

$$\mu_h = \frac{\langle \mathbf{c}', \mathbf{h}' \rangle}{\langle \mathbf{h}', \mathbf{h}' \rangle} = 1$$

olduğundan merkez normal yüzeyin boğaz çizgisi

$$\mathbf{c}_h = \mathbf{c} - \mathbf{h} = (0, 0, 0)$$

biçiminde bulunur. Buradan merkez normal yüzeyin, boğaz çizgisi orijin olan bir koni olduğu söylenebilir. Boğaz çizgisi, bir tek noktadan ibaret olduğundan boğaz çizgisinin teğeti sıfırdır.

Merkez normal yüzeyin doğal üçyüzlüsü, boğaz çizgisi dışındaki herhangi bir dayanak eğrisi üzerinde tanımlanabilir. Merkez normal yüzeyin üreteç vektörü, regle yüzeyin merkez normal vektörüdür ve

$$\mathbf{h} = (\sinh s, 0, \cosh s)$$

denklemleri ile verilir. Asal normal vektör

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{h}'}{\kappa} = (\cosh s, 0, \sinh s)$$

olarak elde edilir, burada $\kappa = \|\mathbf{h}'\| = 1$ merkez normal yüzeyin eğriliğidir. $\langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle = 1$ olduğundan,

$\mathbf{n}$ asal normal vektörü spacelike vektördür. Binormal vektör ise

$$\mathbf{b} = -\mathbf{h} \times \mathbf{n} = (0, 1, 0)$$

olarak bulunur. $\langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle = 1$ olduğundan, $\mathbf{b}$ binormal vektörü spacelike vektördür. Doğal üçyüzlüyü oluşturan $\mathbf{h}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ vektörlerinin türevleri

$$\mathbf{h}' = (\cosh s, 0, \sinh s)$$

$$\mathbf{n}' = (\sinh s, 0, \cosh s)$$

$$\mathbf{b}' = (0, 0, 0)$$

biçiminde bulunur. $\mathbf{b}' = -\tau \mathbf{n}$ olduğundan merkez normal yüzeyin burulması

$$\tau = 0$$

dır. Üreteç üçyüzlüsünün merkez teğet vektörü $\mathbf{a}$ ile doğal üçyüzlünün asal normal vektörü $\mathbf{n}$ arasındaki spacelike açı

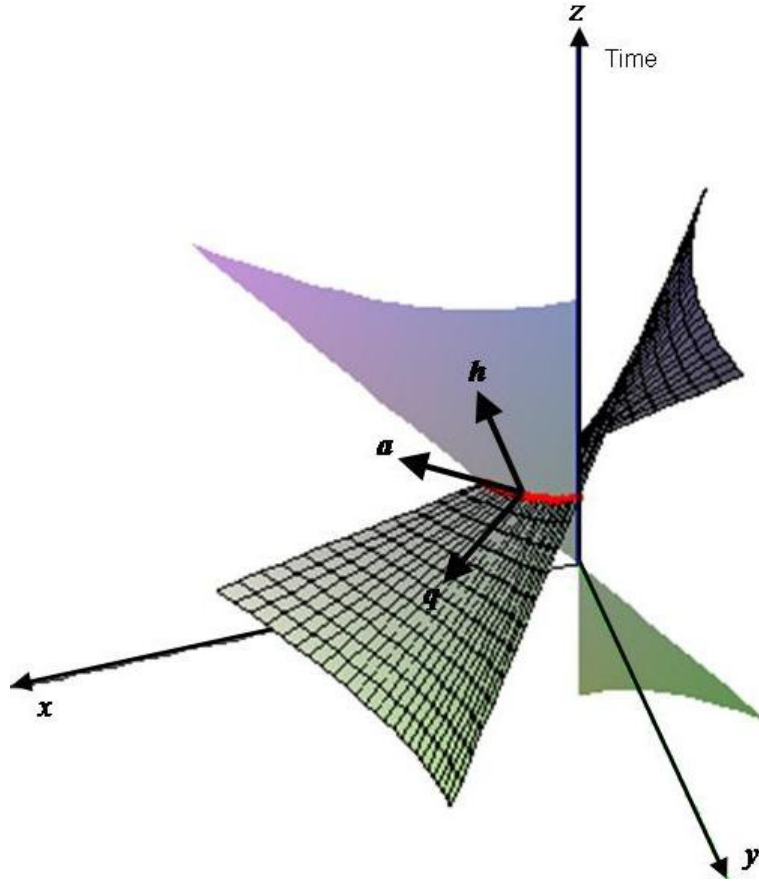
$$\cot \rho = \gamma$$

eşitliği kullanılarak

$$\rho = \frac{\pi}{6}$$

olarak bulunur.

Şekil 3.6, $X(s, v) = (\sinh s + v \cosh s, \sqrt{3}v, \cosh s + v \sinh s)$ denklemi ile verilen regle yüzeyi, bu yüzeyin boğaz çizgisi üzerinde tanımlı olan üreteç üçyüzlüsünü ve bu yüzeyin merkez normal yüzeyini göstermektedir.



Şekil 3.6. $X(s, v) = (\sinh s + v \cosh s, \sqrt{3}v, \cosh s + v \sinh s)$ denklemlı spacelike regle yüzey ve merkez normal yüzeyi

4. IR_1^3 MINKOWSKI UZAYINDA AÇILABİLİR REGLE YÜZEYLERİN EĞRİLİK TEORİSİ

Bir regle yüzeyin (3.3) denklemi ile verilen dağılma parametresinin sıfıra eşit olması durumunda, bu regle yüzeye açılabilir regle yüzey denir [10]. Bölüm 3 de verilen regle yüzeylerin eğrilik teorisi, açılabilir regle yüzeyler için uygun değildir. Bu bölümde, Minkowski 3-uzayında yegane açılabilir regle yüzeyler olan silindirler, koniler ve teğet yüzeyler için eğrilik teorisi geliştirilmiştir.

4.1. IR_1^3 Minkowski Uzayında Silindirlerin Eğrilik Teorisi

Silindirler aykırı regle yüzeyler olmadığından aykırı regle yüzeyler için oluşturulan eğrilik teorisi silindirler için kullanılamaz. Bu bölümde Minkowski 3-uzayındaki silindirler için eğrilik teorisi geliştirilecektir.

Silindir bir açılabilir regle yüzeydir ve

$$X(t, v) = \alpha(t) + v R$$

denklemi ile verilebilir [34]. Burada v reel değerli bir parametre, α dayanak eğrisi ve R ana doğruların yön vektörüdür. Silindirin tüm ana doğruları birbirine paralel olduğundan, R sabit bir vektördür ve buna aykırı regle yüzeylerde olduğu gibi doğuran denir. Doğuran sabit vektör olduğundan, normalleştirme işlemi doğuranın türevi kullanılarak değil, dayanak eğrisinin türevi kullanılarak yapılır. Dayanak eğrisinin yay uzunluğu parametresi

$$s(t) = \int_0^t \left\| \frac{d\alpha(t)}{dt} \right\| dt \quad (4.1)$$

ile verilir.

Aykırı regle yüzeyler için kullanılan boğaz çizgisi tanımı, silindirler için geçerli değildir. Silindirin boğaz çizgisi, doğuran boyunca Kartezyen referans çatısı (x, y, z) nin orijininin en kısa uzaklıkta olan, yüzey üzerindeki noktaların geometrik yeri olarak tanımlanabilir [30]. Bu tanıma göre boğaz çizgisi ve doğuran birbirine diktir, yani

$$c(s) \cdot R = 0 \quad (4.2)$$

dir. Burada $c(s)$, silindirin boğaz çizgisini gösterir. Silindirin boğaz çizgisi, verilen tanıma göre tektir. (4.2) denkleminin türevi alınır ve R' nün sıfır olduğu göz önünde bulundurulursa

$$\mathbf{c}'(s) \cdot \mathbf{R} = 0 \quad (4.3)$$

elde edilir. (4.3) denklemi, boğaz çizgisinin teğet vektörünün doğurana dik olduğu anlamına gelir. Boğaz çizgisinin dayanak eğrisine göre konumu, μ reel değerli bir parametre olmak üzere

$$\mathbf{c}(s) = \boldsymbol{\alpha}(s) - \mu(s) \mathbf{R}(s) \quad (4.4)$$

biçiminde verilebilir. Doğuran üzerinde boğaz çizgisinden dayanağa olan uzaklık μR dir.

Burada R , doğuran vektörünün boyudur.

(4.4) denklemi, (4.2) denkleminde yerine yazılırsa

$$[\boldsymbol{\alpha}(s) - \mu(s) \mathbf{R}(s)] \cdot \mathbf{R}(s) = 0$$

elde edilir ve buradan

$$\mu = \frac{\boldsymbol{\alpha}(s) \cdot \mathbf{R}(s)}{\mathbf{R}(s) \cdot \mathbf{R}(s)}$$

olarak bulunur.

Silindirin tüm doğuranları boğaz çizgisinden geçtiğinden, boğaz çizgisi silindirin dayanak eğrisi olarak alınabilir. Böylece silindir denklemi

$$\mathbf{X}(s, v) = \mathbf{c}(s) + v \mathbf{R}$$

biçiminde ifade edilebilir.

Minkowski 3-uzayında silindirler, doğuranın ve boğaz çizgisinin Lorentziyen karakterine göre sınıflandırılabilir. Bu bölümde, Minkowski 3-uzayında spacelike ve timelike silindirlerin eğrilik teorisi incelenecektir.

4.1.1. Spacelike Silindirlerin Eğrilik Teorisi

$\mathbf{c}(s)$ bir spacelike eğri, $\mathbf{R}$ bir spacelike vektör ve v reel değerli bir parametre olmak üzere bir spacelike silindir

$$\mathbf{X}(s, v) = \mathbf{c}(s) + v \mathbf{R}$$

denklemi ile verilebilir. Burada $\mathbf{c}(s)$ spacelike eğrisi, silindirin boğaz çizgisidir ve yukarıda belirtildiği gibi dayanak eğrisi olarak alınmıştır; spacelike $\mathbf{R}$ vektörü, silindiri oluşturan ana doğruların yön vektörüdür ve sabittir.

Spacelike silindirin üreteç üçyüzlüsü; $\mathbf{q}$ üreteç vektörü, $\mathbf{h}$ merkez normal vektör ve $\mathbf{a}$ merkez teğet vektörden oluşmaktadır. Üreteç vektörü

$$\mathbf{q} = \frac{\mathbf{R}}{R}$$

olarak tanımlanır, burada R doğuran vektörünün boyudur. Doğuran spacelike vektör olduğundan, $\mathbf{q}$ üreteç vektörü de spacelike vektördür. Aykırı regle yüzeylerin üreteç

üçyüzlüsünün oluşturulmasından farklı olarak, önce $\mathbf{a}$ merkez teğet vektör ve daha sonra $\mathbf{h}$ merkez normal vektör tanımlanacaktır. Merkez teğet vektör, boğaz çizgisinin teğeti yardımıyla

$$\mathbf{a} = \mathbf{c}' / \Delta \quad (4.5)$$

biçiminde tanımlanır. Burada

$$\Delta = \|\mathbf{c}'\|$$

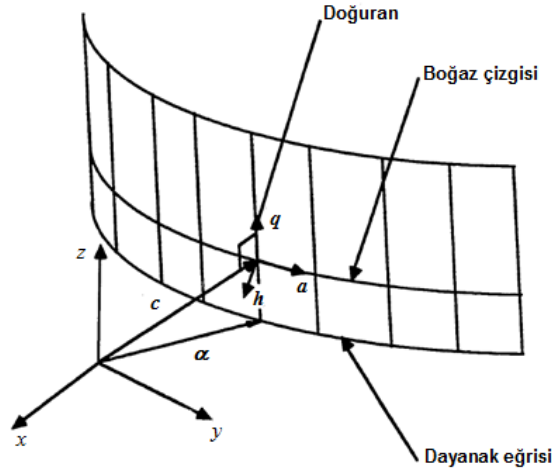
dir. Boğaz çizgisi spacelike eğri olduğundan, $\mathbf{a}$ merkez teğet vektör de spacelike vektördür.

Son olarak, merkez normal vektör

$$\mathbf{h} = \mathbf{a} \times \mathbf{q} \quad (4.6)$$

şeklinde belirlenir. Merkez normal vektör, silindirin yüzey normaline karşılık geldiğinden bir timelike vektördür.

Şekil 4.1, silindir yüzeyi, dayanak eğrisi, boğaz çizgisi ve üreteç üçyüzlüsünü göstermektedir.



Şekil 4.1. Silindir yüzeyi ve üreteç üçyüzlüsü [30]

(4.5) denkleminde, boğaz çizgisinin birinci mertebeden konumsal değişiminin

$$\mathbf{c}' = \Delta \mathbf{a} \quad (4.7)$$

olduğu görülür.

Üreteç üçyüzlüsünün birinci mertebeden açısal değişimi aşağıdaki gibi belirlenebilir. Silindirin tanımından

$$\mathbf{R}' = \mathbf{q}' = 0 \quad (4.8)$$

olduğu bilinmektedir. $\mathbf{a}$ merkez teğet vektörünün birinci mertebeden türevinin belirlenmesi için boğaz çizgisinin ikinci mertebeden konumsal değişimin belirlenmesi gerekmektedir. (4.7) denkleminin türevi alınarak

$$\mathbf{c}'' = \Delta \mathbf{a}' + \Delta' \mathbf{a} \quad (4.9)$$

elde edilir. Δ sabit bir parametre olduğundan türevi sıfırdır. Böylece (4.9) denklemi

$$\mathbf{c}'' = \Delta \mathbf{a}' \quad (4.10)$$

şeklinde yazılabilir.

Boğaz çizgisi, sabit doğuran vektörüne daima diktir ve düzlemsel bir eğridir. Düzlemsel bir eğrinin eğrilik teorisinden, boğaz çizgisinin ikinci mertebeden konumsal değişiminin boyunun düzlemsel eğrinin eğriliği olduğu bilinmektedir. Eğrilik merkezi, merkez normal vektörün doğrultusu üzerindedir. Bu yüzden, boğaz çizgisinin ikinci mertebeden konumsal değişimi

$$\mathbf{c}'' = \kappa_c \mathbf{h} \quad (4.11)$$

denklemi ile ifade edilebilir. Burada

$$\kappa_c = \|\mathbf{c}''\|$$

boğaz çizgisinin eğriliğidir. (4.10) denklemi (4.11) denklemi ile karşılaştırılırsa merkez teğet vektörün birinci mertebeden türevinin

$$\mathbf{a}' = \gamma \mathbf{h} \quad (4.12)$$

olduğu görülür. Burada $\gamma = \frac{\kappa_c}{\Delta}$ spacelike silindirin eğriliğidir.

(4.6) denkleminin türevi alınır ve (4.8) denklemi burada yerine yazılırsa

$$\mathbf{h}' = \mathbf{a}' \times \mathbf{q} \quad (4.13)$$

elde edilir. (4.12) denklemi, (4.13) denkleminde yerine yazılarak merkez normal vektörün birinci mertebeden türevi

$$\mathbf{h}' = \gamma \mathbf{a}$$

olarak bulunur.

Böylece, üreteç üçyüzlüsünün birinci mertebeden açısal değişimi matris formda

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{h} \\ \mathbf{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & \gamma & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{h} \\ \mathbf{a} \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

biçiminde ifade edilebilir. Burada $\gamma = \frac{\kappa_c}{\Delta}$ spacelike silindirin eğriliğidir. (4.14) matris eşitliği

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{h} \\ \mathbf{a} \end{bmatrix} = \mathbf{w}_q \times \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{h} \\ \mathbf{a} \end{bmatrix}$$

biçiminde de ifade edilebilir. Burada

$$\mathbf{w}_q = -\gamma \mathbf{q}$$

olup, spacelike silindirin üreteç üçyüzlüsünün Darboux ani dönme vektörüdür.

Silindirin boğaz çizgisinin düzlemsel olmasından dolayı, silindirin merkez normal vektörü daima aynı düzlem içinde kalır. Bu yüzden silindirin yüksek mertebeden özelliklerinin incelenmesi, düzlemsel bir eğrinin eğrilik teorisinin incelenmesine dönüşür ve düzlemsel eğrilerin eğrilik teorisi burada anlatılmayacaktır.

Örnek 4.1. $x_1^2 - x_3^2 = -r^2$, $r > 0$ hiperbolik silindiri verilsin [49]. Bu yüzeyin parametrik formu

$$X(t, v) = (r \sinh t, v, r \cosh t)$$

biçimindedir. Hiperbolik silindir, regle formda

$$X(t, v) = (r \sinh t, 0, r \cosh t) + v(0, 1, 0)$$

biçiminde yazılabilir. Hiperbolik silindirin dayanak eğrisi

$$\alpha(t) = (r \sinh t, 0, r \cosh t)$$

ve doğurarı

$$R = (0, 1, 0)$$

dır. Silindirin boğaz çizgisi tanımından, hiperbolik silindirin dayanak eğrisinin aynı zamanda boğaz çizgisi olduğu görülür. (4.1) denklemi kullanılarak normalleştirilmiş parametre $s(t) = r t$ olarak bulunur. Hiperbolik silindir denklemi, normalleştirme işleminden sonra

$$X(s, v) = \left(r \sinh \frac{s}{r}, 0, r \cosh \frac{s}{r} \right) + v(0, 1, 0)$$

biçiminde yeniden yazılabilir. Böylece hiperbolik silindirin boğaz çizgisi

$$c(s) = \left(r \sinh \frac{s}{r}, 0, r \cosh \frac{s}{r} \right)$$

olur. Boğaz çizgisinin türevi ise

$$c'(s) = \left(\cosh \frac{s}{r}, 0, \sinh \frac{s}{r} \right)$$

olarak bulunur. $\langle c', c' \rangle = 1$ olduğundan boğaz çizgisi bir spacelike eğridir. $\langle R, R \rangle = 1$ olduğundan R doğurarı da spacelike vektördür.

Hiperbolik silindirin üreteç üçyüzlüsü;

$$q = R = (0, 1, 0)$$

üreteç vektörü,

$$a = \frac{c'}{\|c'\|} = \left(\cosh \frac{s}{r}, 0, \sinh \frac{s}{r} \right)$$

merkez teğet vektör ve

$$\mathbf{h} = \mathbf{a} \times \mathbf{q} = \left(\sinh \frac{s}{r}, 0, \cosh \frac{s}{r} \right)$$

merkez normal vektöründen oluşur. $\mathbf{R}$ doğuranı spacelike vektör olduğundan, $\mathbf{q}$ üreteç vektörü de spacelike vektördür. $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = 1$ olduğundan, $\mathbf{a}$ merkez teğet vektör spacelike vektör ve $\langle \mathbf{h}, \mathbf{h} \rangle = -1$ olduğundan, $\mathbf{h}$ merkez normal vektör timelike vektördür. Merkez normal vektör timelike vektör olduğundan, hiperbolik silindir bir spacelike yüzeydir.

Üreteç üçyüzlüsünü oluşturan vektörlerin türevleri

$$\mathbf{q}' = (0, 0, 0),$$

$$\mathbf{a}' = \left(\frac{1}{r} \sinh \frac{s}{r}, 0, \frac{1}{r} \cosh \frac{s}{r} \right)$$

ve

$$\mathbf{h}' = \left(\frac{1}{r} \cosh \frac{s}{r}, 0, \frac{1}{r} \sinh \frac{s}{r} \right)$$

biçiminde bulunur.

Hiperbolik silindirin üreteç üçyüzlüsünün birinci mertebeden açısai değişimi matris formda

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{h} \\ \mathbf{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/r \\ 0 & 1/r & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{h} \\ \mathbf{a} \end{bmatrix}$$

biçiminde yazılabilir.

Hiperbolik silindirin eğriliği

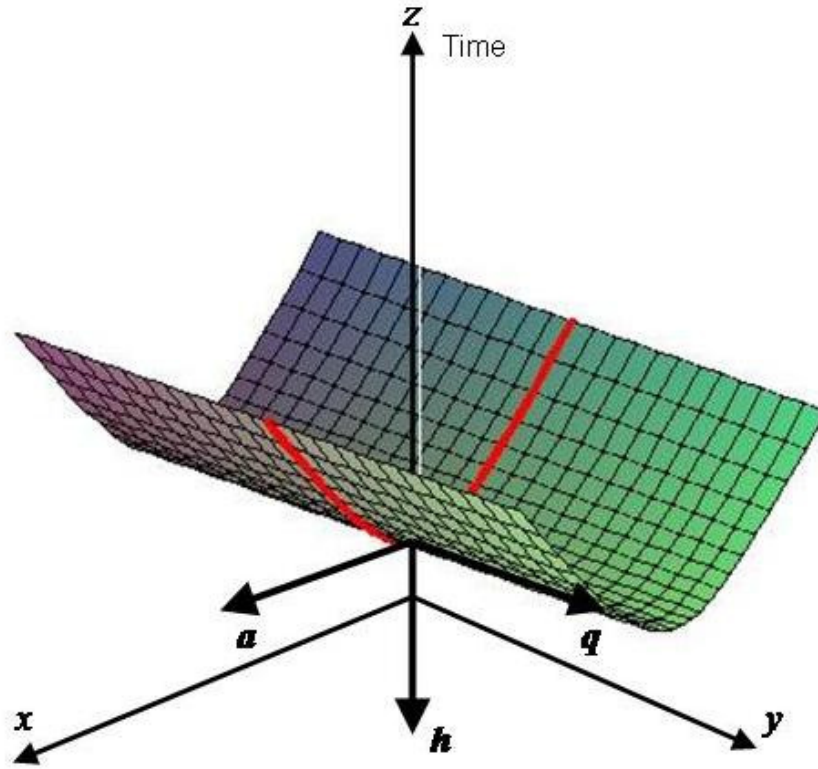
$$\gamma = 1/r$$

ve Darboux ani dönme vektörü

$$\mathbf{w}_q = -\frac{1}{r} \mathbf{q}$$

olarak bulunur.

Şekil 4.2, $x_1^2 - x_3^2 = -r^2$ ($r > 0$) denklemlı hiperbolik silindiri ve üreteç üçyüzlüsünü göstermektedir.



Şekil 4.2. $x_1^2 - x_3^2 = -r^2$ ($r > 0$) hiperbolik silindiri

4.1.2. Timelike Silindirlerin Eğrilik Teorisi

Bir timelike silindirin h merkez normal vektörü bir spacelike vektör olduğundan, doğuran vektörü spacelike ya da timelike vektör olabilir. Bu bölümde timelike silindirlerin eğrilik teorisi, doğuranı spacelike olan timelike silindirler ve doğuranı timelike olan timelike silindirlerin eğrilik teorisi olarak iki bölümde incelenecektir.

4.1.2.1. Spacelike Doğuranlı Timelike Silindirlerin Eğrilik Teorisi

Bir spacelike doğuranlı timelike silindir

$$X(s, v) = c(s) + v R$$

denklemleri ile verilebilir. Burada $c(s)$ eğrisi, silindirin boğaz çizgisidir ve aynı zamanda dayanak eğrisi olarak alınmıştır; spacelike R vektörü, silindiri oluşturan ana doğruların yön vektörüdür ve sabittir.

Spacelike doğuranlı timelike silindirin üreteç üçyüzlüsü $\mathbf{q}$ üreteç vektörü, $\mathbf{h}$ merkez normal vektör ve $\mathbf{a}$ merkez teğet vektörden oluşmaktadır. Üreteç vektörü

$$\mathbf{q} = \frac{\mathbf{R}}{R}$$

olarak tanımlanır. Doğuran spacelike vektör olduğundan $\mathbf{q}$ üreteç vektörü de spacelike vektördür. Merkez teğet vektör boğaz çizgisinin teğeti yardımıyla

$$\mathbf{a} = \mathbf{c}'/\Delta, \quad (\Delta = \|\mathbf{c}'\|) \quad (4.15)$$

biçiminde tanımlanır. Merkez normal vektör de

$$\mathbf{h} = -\mathbf{a} \times \mathbf{q} \quad (4.16)$$

şeklinde belirlenir. $\mathbf{h}$ merkez normal vektörü, silindirin yüzey normaline karşılık geldiğinden bir timelike vektördür. Bu durumda $\mathbf{a}$ merkez teğet vektör, spacelike vektördür, dolayısıyla silindirin boğaz çizgisi de bir spacelike eğridir.

(4.15) denkleminde, boğaz çizgisinin birinci mertebeden konumsal değişiminin

$$\mathbf{c}' = \Delta \mathbf{a} \quad (4.17)$$

olduğu görülür.

Silindirin tanımından

$$\mathbf{R}' = \mathbf{q}' = 0 \quad (4.18)$$

olduğu bilinmektedir. (4.17) denkleminin türevi alınıp, Δ nın sabit bir parametre olduğu göz önünde bulundurularak

$$\mathbf{c}'' = \Delta \mathbf{a}' \quad (4.19)$$

elde edilir. Diğer taraftan, boğaz çizgisinin ikinci mertebeden konumsal değişimi için

$$\mathbf{c}'' = -\kappa_c \mathbf{h} \quad (4.20)$$

yazılabilir. (4.19) denklemi, (4.20) denklemi ile karşılaştırılırsa merkez teğet vektörün birinci mertebeden türevinin

$$\mathbf{a}' = -\gamma \mathbf{h} \quad (4.21)$$

olduğu görülür. Burada $\gamma = \frac{\kappa_c}{\Delta}$ spacelike doğuranlı timelike silindirin eğriliğidir.

(4.16) denkleminin türevi alınıp (4.18) ve (4.21) denklemleri burada yerine yazılırsa, merkez normal vektörün birinci mertebeden türevi

$$\mathbf{h}' = -\gamma \mathbf{a}$$

olarak bulunur.

Böylece, üreteç üçyüzlüsünün birinci mertebeden açılal değişimi matris formda

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{h} \\ \mathbf{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma \\ 0 & -\gamma & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{h} \\ \mathbf{a} \end{bmatrix}$$

biçiminde ifade edilebilir. Burada $\gamma = \frac{\kappa_c}{\Delta}$ spacelike doğuranlı timelike silindirin eğriliğidir. Ayrıca, spacelike doğuranlı timelike silindirin üreteç üçyüzlüsünün Darboux ani dönme vektörü

$$\mathbf{w}_q = -\gamma \mathbf{q}$$

olarak bulunur. Bu vektör

$$\mathbf{q}' = \mathbf{w}_q \times \mathbf{q}, \quad \mathbf{h}' = \mathbf{w}_q \times \mathbf{h}, \quad \mathbf{a}' = \mathbf{w}_q \times \mathbf{a}$$

eşitliklerini sağlar.

Örnek 4.2. $x_1^2 - x_3^2 = r^2$, $r > 0$ Lorentziyen dairesel silindiri verilsin [49]. Bu yüzey parametrik formda

$$\mathbf{X}(t, v) = (r \cosh t, v, r \sinh t)$$

biçiminde, regle formda ise

$$\mathbf{X}(t, v) = (r \cosh t, 0, r \sinh t) + v(0, 1, 0)$$

biçiminde ifade edilebilir. Lorentziyen dairesel silindirin dayanak eğrisi

$$\boldsymbol{\alpha}(t) = (r \cosh t, 0, r \sinh t)$$

ve doğurani

$$\mathbf{R} = (0, 1, 0)$$

dır. Silindirin boğaz çizgisi tanımından, Lorentziyen dairesel silindirin dayanak eğrisinin aynı zamanda boğaz çizgisi olduğu görülür. (4.1) denklemi kullanılarak normalleştirilmiş parametre $s(t) = r t$ olarak bulunur. Lorentziyen dairesel silindir denklemi normalleştirme işleminden sonra

$$\mathbf{X}(s, v) = \left(r \cosh \frac{s}{r}, 0, r \sinh \frac{s}{r} \right) + v(0, 1, 0)$$

biçiminde yeniden yazılabilir. Böylece Lorentziyen dairesel silindirin boğaz çizgisi

$$\mathbf{c}(s) = \left(r \cosh \frac{s}{r}, 0, r \sinh \frac{s}{r} \right)$$

olur. Boğaz çizgisinin türevi ise

$$\mathbf{c}'(s) = \left(\sinh \frac{s}{r}, 0, \cosh \frac{s}{r} \right)$$

olarak bulunur. $\langle \mathbf{c}', \mathbf{c}' \rangle = -1$ olduğundan boğaz çizgisi bir timelike eğridir. $\langle \mathbf{R}, \mathbf{R} \rangle = 1$ olduğundan $\mathbf{R}$ doğuranı bir spacelike vektördür.

Lorentziyen dairesel silindirin üreteç üçyüzlüsü;

$$\mathbf{q} = \mathbf{R} = (0, 1, 0)$$

üreteç vektörü,

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{c}'}{\|\mathbf{c}'\|} = \left(\sinh \frac{s}{r}, 0, \cosh \frac{s}{r} \right)$$

merkez teğet vektör ve

$$\mathbf{h} = -\mathbf{a} \times \mathbf{q} = \left(-\cosh \frac{s}{r}, 0, -\sinh \frac{s}{r} \right)$$

merkez normal vektöründen oluşur. $\mathbf{R}$ doğuranı spacelike vektör olduğundan, $\mathbf{q}$ üreteç vektörü de spacelike vektördür. $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = -1$ olduğundan, $\mathbf{a}$ merkez teğet vektör timelike vektör ve $\langle \mathbf{h}, \mathbf{h} \rangle = 1$ olduğundan, $\mathbf{h}$ merkez normal vektör spacelike vektördür. Merkez normal vektör spacelike vektör olduğundan, Lorentziyen dairesel silindir bir timelike yüzeydir.

Üreteç üçyüzlüsünü oluşturan vektörlerin türevleri

$$\mathbf{q}' = (0, 0, 0),$$

$$\mathbf{a}' = \left(\frac{1}{r} \cosh \frac{s}{r}, 0, \frac{1}{r} \sinh \frac{s}{r} \right)$$

ve

$$\mathbf{h}' = \left(-\frac{1}{r} \sinh \frac{s}{r}, 0, -\frac{1}{r} \cosh \frac{s}{r} \right)$$

biçiminde bulunur.

Lorentziyen dairesel silindirin üreteç üçyüzlüsünün birinci mertebeden açısal değişimi matris formda

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{h} \\ \mathbf{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/r \\ 0 & -1/r & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{h} \\ \mathbf{a} \end{bmatrix}$$

biçiminde yazılabilir.

Lorentziyen dairesel silindirin eğriliği

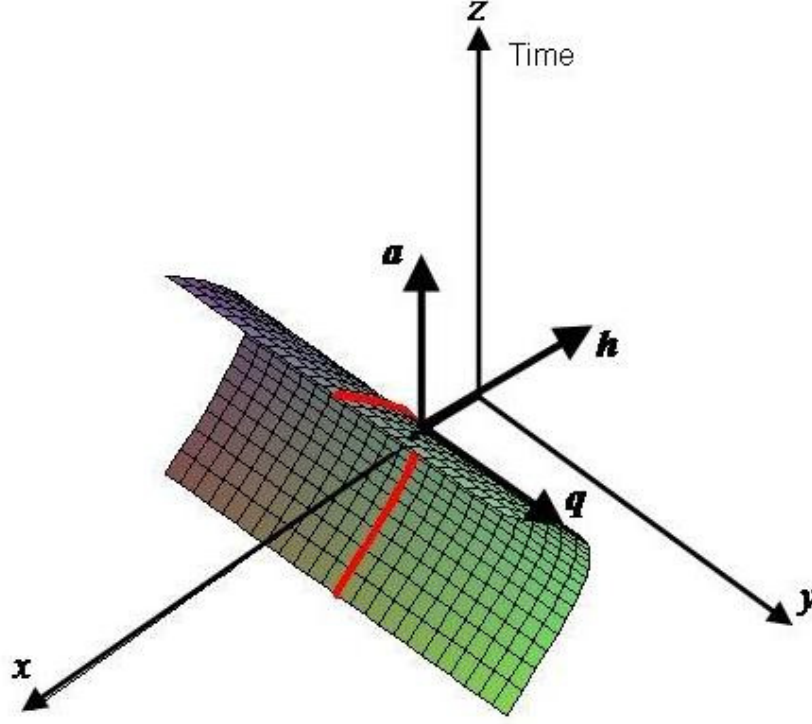
$$\gamma = 1/r$$

ve Darboux ani dönme vektörü

$$w_q = -\frac{1}{r}q$$

olarak bulunur.

Şekil 4.3, $x_1^2 - x_3^2 = r^2$ ($r > 0$) denklemleri Lorentziyen dairesel silindiri ve üreteç üçyüzlüsünü göstermektedir.



Şekil 4.3. $x_1^2 - x_3^2 = r^2$ ($r > 0$) Lorentziyen dairesel silindiri

4.1.2.2. Timelike Doğuranlı Timelike Silindirlerin Eğrilik Teorisi

Bir timelike doğuranlı timelike silindir

$$X(s, v) = c(s) + v R$$

denklemleri ile verilebilir. Burada $c(s)$ eğrisi silindirin boğaz çizgisidir ve aynı zamanda dayanak eğrisi olarak alınmıştır; timelike R vektörü silindiri oluşturan ana doğruların yön vektörüdür ve sabittir.

Timelike doğuranlı timelike silindirin üreteç üçyüzlüsü; q üreteç vektörü, h merkez normal vektör ve a merkez teğet vektörden oluşmaktadır. Üreteç vektörü

$$\mathbf{q} = \frac{\mathbf{R}}{R}$$

olarak tanımlanır. Doğuran timelike vektör olduğundan, $\mathbf{q}$ üreteç vektörü de timelike vektördür. Merkez teğet vektör, boğaz çizgisinin teğeti yardımıyla

$$\mathbf{a} = \mathbf{c}' / \Delta, \quad (\Delta = \|\mathbf{c}'\|) \quad (4.22)$$

biçiminde tanımlanır. $\mathbf{a}$ merkez teğet vektörü bir spacelike vektördür. Merkez normal vektör de

$$\mathbf{h} = -\mathbf{a} \times \mathbf{q} \quad (4.23)$$

şeklinde belirlenir. $\mathbf{h}$ merkez normal vektör, silindirin yüzey normaline karşılık geldiğinden spacelike vektördür.

(4.22) denkleminde, boğaz çizgisinin birinci mertebeden konumsal değişiminin

$$\mathbf{c}' = \Delta \mathbf{a} \quad (4.24)$$

olduğu görülür.

Silindirin tanımından

$$\mathbf{R}' = \mathbf{q}' = 0 \quad (4.25)$$

olduğu bilinmektedir. (4.24) denkleminin türevi alınıp Δ nın sabit bir parametre olduğu göz önünde bulundurulursa

$$\mathbf{c}'' = \Delta \mathbf{a}' \quad (4.26)$$

elde edilir. Diğer taraftan, boğaz çizgisinin ikinci mertebeden konumsal değişimi

$$\mathbf{c}'' = -\kappa_c \mathbf{h} \quad (4.27)$$

yazılabilir. (4.26) denklemini, (4.27) denklemini ile karşılaştırılırsa merkez teğet vektörün birinci mertebeden türevinin

$$\mathbf{a}' = -\gamma \mathbf{h} \quad (4.28)$$

olduğu görülür. Burada $\gamma = \frac{\kappa_c}{\Delta}$ timelike doğuranlı timelike silindirin eğriliğidir.

(4.23) denkleminin türevi alınır ve (4.25) denklemini burada yerine yazılırsa

$$\mathbf{h}' = -\mathbf{a}' \times \mathbf{q} \quad (4.29)$$

elde edilir. (4.28) denklemini, (4.29) denkleminde yerine yazılırsa merkez normal vektörün birinci mertebeden türevi

$$\mathbf{h}' = \gamma \mathbf{a}$$

olarak bulunur.

Dolayısıyla, üreteç üçyüzlüsünün birinci mertebeden açısal değişimi matris formda

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{h} \\ \mathbf{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & -\gamma & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{h} \\ \mathbf{a} \end{bmatrix}$$

biçiminde ifade edilebilir. Burada $\gamma = \frac{\kappa_c}{\Delta}$ timelike doğuranlı timelike silindirin eğriliğidir. Ayrıca, timelike doğuranlı timelike silindirin üreteç üçyüzlüsünün Darboux ani dönme vektörü

$$\mathbf{w}_q = -\gamma \mathbf{q}$$

dür. Bu vektör

$$\mathbf{q}' = \mathbf{w}_q \times \mathbf{q}, \quad \mathbf{h}' = \mathbf{w}_q \times \mathbf{h}, \quad \mathbf{a}' = \mathbf{w}_q \times \mathbf{a}$$

eşitliklerini sağlar.

Örnek 4.3. $x_1^2 + x_2^2 = r^2$, ($r > 0$) 1-indeksli dairesel silindiri verilsin [49]. Bu yüzey parametrik formda

$$\mathbf{X}(t, v) = (r \cos t, r \sin t, v)$$

biçiminde, regle formda ise

$$\mathbf{X}(t, v) = (r \cos t, r \sin t, 0) + v(0, 0, 1)$$

biçiminde yazılabilir. 1-indeksli dairesel silindirin dayanak eğrisi

$$\boldsymbol{\alpha}(t) = (r \cos t, r \sin t, 0)$$

ve doğuranı

$$\mathbf{R} = (0, 0, 1)$$

dır. Silindirin boğaz çizgisi tanımından, 1-indeksli dairesel silindirin dayanak eğrisinin aynı zamanda boğaz çizgisi olduğu görülür. (4.1) denklemi kullanılarak normalleştirilmiş parametre $s(t) = r t$ olarak elde edilir. 1-indeksli dairesel silindir denklemi, normalleştirme işleminden sonra

$$\mathbf{X}(s, v) = \left(r \cos \frac{s}{r}, r \sin \frac{s}{r}, 0 \right) + v(0, 0, 1)$$

biçiminde yeniden yazılabilir. Böylece 1-indeksli dairesel silindirin boğaz çizgisi

$$\mathbf{c}(s) = \left(r \cos \frac{s}{r}, r \sin \frac{s}{r}, 0 \right)$$

olur. Boğaz çizgisinin türevi ise

$$\mathbf{c}'(s) = \left(-\sin \frac{s}{r}, \cos \frac{s}{r}, 0 \right)$$

olarak bulunur. $\langle \mathbf{c}', \mathbf{c}' \rangle = 1$ olduğundan, boğaz çizgisi bir spacelike eğridir. $\langle \mathbf{R}, \mathbf{R} \rangle = -1$ olduğundan $\mathbf{R}$ doğurani timelike vektördür.

1-indeksli dairesel silindirin üreteç üçyüzlüsü;

$$\mathbf{q} = \mathbf{R} = (0, 0, 1)$$

üreteç vektörü,

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{c}'}{\|\mathbf{c}'\|} = \left(-\sin \frac{s}{r}, \cos \frac{s}{r}, 0 \right)$$

merkez teğet vektör ve

$$\mathbf{h} = -\mathbf{a} \times \mathbf{q} = \left(\cos \frac{s}{r}, \sinh \frac{s}{r}, 0 \right)$$

merkez normal vektöründen oluşur. $\mathbf{R}$ doğurani timelike vektör olduğundan, $\mathbf{q}$ üreteç vektörü de timelike vektördür. $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = 1$ olduğundan, $\mathbf{a}$ merkez teğet vektör spacelike vektör ve $\langle \mathbf{h}, \mathbf{h} \rangle = 1$ olduğundan, $\mathbf{h}$ merkez normal vektör spacelike vektördür. Merkez normal vektör spacelike vektör olduğundan, 1-indeksli dairesel silindir bir timelike yüzeydir.

Üreteç üçyüzlüsünü oluşturan vektörlerin türevleri

$$\mathbf{q}' = (0, 0, 0),$$

$$\mathbf{a}' = \left(-\frac{1}{r} \cos \frac{s}{r}, -\frac{1}{r} \sin \frac{s}{r}, 0 \right) = -\frac{1}{r} \mathbf{h}$$

ve

$$\mathbf{h}' = \left(-\frac{1}{r} \sin \frac{s}{r}, \frac{1}{r} \cos \frac{s}{r}, 0 \right) = \frac{1}{r} \mathbf{a}$$

biçiminde bulunur.

Böylece, 1-indeksli dairesel silindirin üreteç üçyüzlüsünün birinci mertebeden açısal değişimi matris formda

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{h} \\ \mathbf{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/r \\ 0 & -1/r & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{h} \\ \mathbf{a} \end{bmatrix}$$

biçiminde yazılabilir.

1-indeksli dairesel silindirin eğriliği

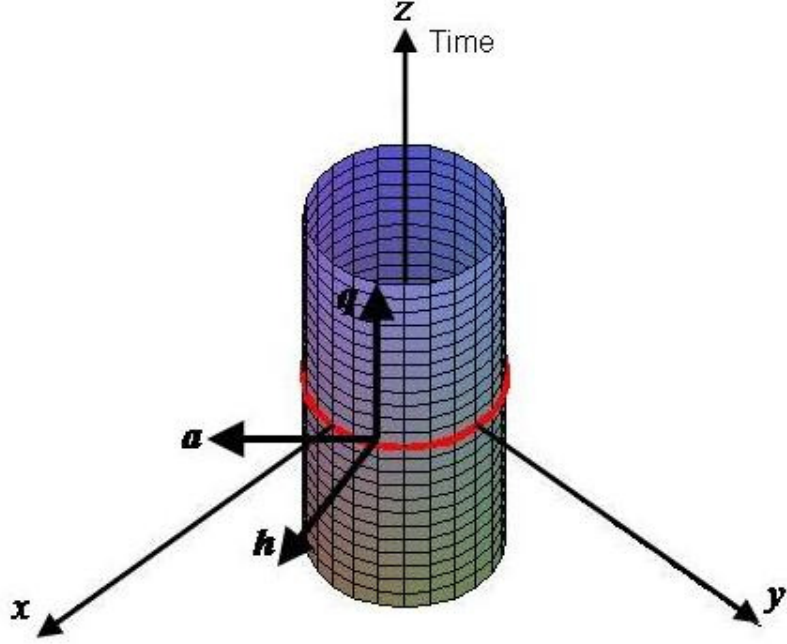
$$\gamma = 1/r$$

ve Darboux ani dönme vektörü

$$w_q = -\frac{1}{r}q$$

olarak bulunur.

Şekil 4.4, $x_1^2 + x_2^2 = r^2$ ($r > 0$) denklemli 1-indeksli dairesel silindiri ve üreteç üçyüzlüsünü göstermektedir.



Şekil 4.4. $x_1^2 + x_2^2 = r^2$ ($r > 0$) 1-indeksli dairesel silindiri

4.2. IR_1^3 Minkowski Uzayında Konilerin Eğrilik Teorisi

Boğaz çizgisi bir noktaya dejenere olan regle yüzeylere koni denir. Bir koni yüzeyi

$$X(s, v) = c_0 + v R(s)$$

denklemleri ile ifade edilebilir [24]. Burada c_0 boğaz noktası, $R(s)$ ana doğruların yön vektörü ve v reel değerli bir parametredir. Koninin dayanak eğrisi, boğaz noktası yardımıyla

$$\alpha(s) = c_0 + \mu R(s)$$

biçiminde yazılabilir. Burada μ reel değerli bir parametredir. Koni, tepe noktasında diferansiyellenebilir olmadığından, koninin üreteç üçyüzlüsü tepe noktası dışındaki bir dayanak

eğrisi üzerinde tanımlanmalıdır. Üreteç üçyüzlüsünü oluşturan vektörler; $\mathbf{q}$ spacelike, $\mathbf{h}$ spacelike ve $\mathbf{a}$ timelike olmak üzere sırasıyla

$$\mathbf{q} = \frac{\mathbf{R}}{R}, \quad \mathbf{h} = \mathbf{R}' \quad \text{ve} \quad \mathbf{a} = \mathbf{q} \times \mathbf{h} \quad (4.30)$$

biçiminde tanımlanabilir. Burada $\mathbf{q}$, aykırı regle yüzeylerde olduğu gibi üreteç vektörü ve R doğuranın boyudur. $\mathbf{h}$ ve $\mathbf{a}$ hakkında yorum yapılabilmesi için, öncelikle koni yüzeyinin normal vektörü bulunmalıdır. Koninin s ve v parametrelerine göre türevleri sırasıyla

$$\mathbf{X}_s(s, v) = v\mathbf{R}'(s) \quad (4.31)$$

ve

$$\mathbf{X}_v(s, v) = \mathbf{R}(s) \quad (4.32)$$

olarak bulunur. Koni yüzeyinin normali

$$\mathbf{S}_n = \frac{\mathbf{X}_s \times \mathbf{X}_v}{\|\mathbf{X}_s \times \mathbf{X}_v\|} \quad (4.33)$$

dir. (4.31) ve (4.32) denklemleri, (4.33) denkleminde yerine yazılarak ve (4.30) denklemleri kullanılarak, koninin yüzey normalinin, $\mathbf{a}$ vektörüne karşılık geldiği bulunur. Aykırı regle yüzeylerde $\mathbf{a}$ vektörü, merkez teğet vektör iken konilerde $\mathbf{a}$ vektörü merkez normal vektör konumundadır. Bu durumda, $\mathbf{h}$ vektörüne de koninin merkez teğet vektörü denilebilir. Sonuç olarak, aykırı regle yüzeylerdeki merkez normal vektör ve merkez teğet vektörün konilerde yer değiştirdiği söylenebilir. Aykırı regle yüzeyler ile koniler arasındaki bu farklılık, koninin açılabilir regle yüzey olmasından, dolayısıyla teğet düzleminin doğuran boyunca sabit kalmasından kaynaklanmaktadır.

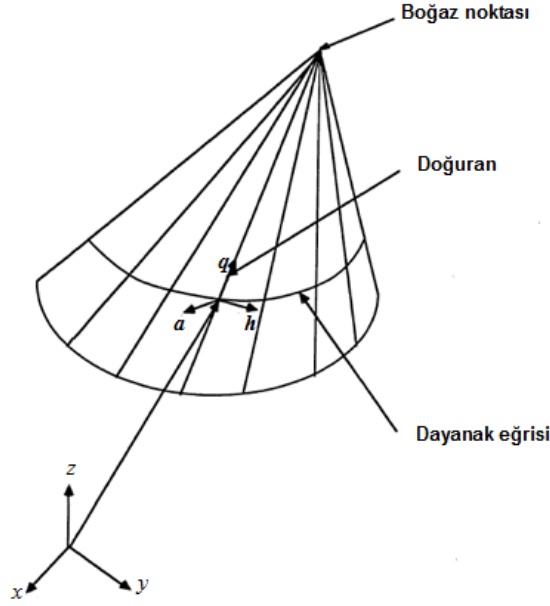
Koninin normali ile $\mathbf{a}$ vektörü aynı Lorentziyen karaktere sahip olduklarından koninin Lorentziyen karakterinin belirlenmesi için $\mathbf{a}$ vektörü kullanılabilir. (4.30) denklemi ile verilen üreteç üçyüzlüsünde, $\mathbf{a}$ vektörü timelike vektör olduğundan, bu üçyüzlü spacelike konilerin üreteç üçyüzlüsüdür.

Timelike konilerde, $\mathbf{a}$ merkez normal vektörü spacelike vektör olacağından, $\mathbf{q}$ üreteç vektörü spacelike ya da timelike vektör olabilir. $\mathbf{q}$ vektörü spacelike vektör olan timelike konilere spacelike doğuranlı timelike koniler, $\mathbf{q}$ vektörü timelike vektör olan timelike konilere ise timelike doğuranlı timelike koniler denir ve her iki durum için de üreteç üçyüzlüsü

$$\mathbf{q} = \frac{\mathbf{R}}{R}, \quad \mathbf{h} = \mathbf{R}' \quad \text{ve} \quad \mathbf{a} = -\mathbf{q} \times \mathbf{h}$$

biçiminde verilir.

Şekil 4.5, koni yüzeyini ve bu yüzeyin dayanak eğrisi üzerindeki üreteç üçyüzlüsünü göstermektedir.



Şekil 4.5. Koni yüzeyi ve üreteç üçyüzlüsü [30]

Üreteç üçyüzlülerinin türev formülleri ve Darboux vektörleri, aykırı regle yüzeylerde yapılan işlemler ile aynı tarzda bulunabilir.

Konilerde, $\mathbf{a}$ merkez normal vektörün oluşturduğu merkez normal yüzeyin doğal üçyüzlüsü ile koninin üreteç üçyüzlüsü çakışıktır. Bu sebeple konilerin merkez normal yüzeyinin incelenmesi ilgi çekici değildir.

Aykırı regle yüzeylerden farklı olarak, konilerin boğaz çizgisi, tek bir noktaya dönüştüğünden, konilerin boğaz çizgisinin konumsal değişimi sıfırdır.

Bir koninin $\mathbf{h}$ merkez teğet vektörünün oluşturduğu yüzeye merkez teğet yüzeyi denir. Koninin merkez teğet yüzeyi

$$X_h(s, v) = \alpha(s) + v\mathbf{h}(s)$$

denklemleri ile gösterilebilir. Burada $\alpha(s)$ hem koninin hem de merkez teğet yüzeyin dayanak eğrisi konumundadır.

Konilerin merkez teğet yüzeyleri, aykırı regle yüzeylerin merkez normal yüzeyinin incelenmesi ile aynı tarzda incelenebilir. Merkez teğet yüzeyin boğaz çizgisi üzerindeki çatı, bu çatının türev formülleri, Darboux vektörü ve merkez teğet yüzeyin çatısı ile koninin üreteç üçyüzlüsü arasındaki ilişkiler bulunabilir.

Örnek 4.4. $X(s, v) = (\cosh s + v \cosh s, -v, \sinh s + v \sinh s)$ konisi verilsin. Bu koninin regle formu

$$X(s, v) = (\cosh s, 0, \sinh s) + v(\cosh s, -1, \sinh s)$$

biçimindedir. Koninin dayanak eğrisi ve ana doğrularının doğrultman vektörleri sırasıyla

$$\alpha(s) = (\cosh s, 0, \sinh s)$$

ve

$$R(s) = (\cosh s, -1, \sinh s)$$

dir. Koninin üreteç vektörü

$$q = \frac{R}{R} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\cosh s, -1, \sinh s)$$

olarak bulunur, burada R doğrultman vektörlerinin boyudur. $\langle q, q \rangle = 1$ olduğundan, q üreteç vektörü spacelike vektördür. Koninin merkez teğet vektörü

$$h = R' = (\sinh s, 0, \cosh s)$$

dir. $\langle h, h \rangle = -1$ olduğundan, h merkez teğet vektör timelike vektördür. Koninin merkez normal vektörü

$$a = -q \times h = \frac{1}{\sqrt{2}} (-\cosh s, -1, -\sinh s)$$

dir. $\langle a, a \rangle = 1$ olduğundan merkez normal vektör a spacelike vektördür. Üreteç üçyüzlüsünü oluşturan vektörlerin türevleri

$$q' = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sinh s, 0, \cosh s)$$

$$h' = (\cosh s, 0, \sinh s)$$

$$a' = \frac{1}{\sqrt{2}} (-\sinh s, 0, -\cosh s)$$

dir. $a' = \frac{1}{R} \gamma h$ olduğundan koninin jeodezik eğriliği $\gamma = -1$ olarak bulunur. Buradan üreteç

üçyüzlüsünün türev formülleri matris formda

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} q \\ h \\ a \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ h \\ a \end{bmatrix}$$

biçiminde yazılabilir. Üreteç üçyüzlüsünün Darboux ani dönme vektörü

$$w_q = (-\gamma q + a) / R = (0, -1, 0)$$

dir. Koninin merkez teğet yüzeyi

$$X_h(s, v) = \alpha(s) + v h(s) = (\cosh s, 0, \sinh s) + v (\sinh s, 0, \cosh s)$$

şeklinde oluşturulur. Merkez teğet yüzeyin doğal üçyüzlüsü; h üreteç vektörü, n asal normal

vektör ve $\mathbf{b}$ binormal vektörlerinden oluşur. Doğal üçyüzlünün üreteç vektörü koninin merkez teğet vektörü olup

$$\mathbf{h} = (\sinh s, 0, \cosh s)$$

dir. Asal normal vektör

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{h}'}{\kappa} = (\cosh s, 0, \sinh s)$$

dir, burada $\kappa = \|\mathbf{h}'\| = 1$ merkez teğet yüzeyin eğriliğidir. $\langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle = 1$ olduğundan, $\mathbf{n}$ asal normal vektörü spacelike vektördür. Binormal vektör ise

$$\mathbf{b} = -\mathbf{h} \times \mathbf{n} = (0, 1, 0)$$

olarak bulunur. $\langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle = 1$ olduğundan, $\mathbf{b}$ binormal vektörü spacelike vektördür. Doğal üçyüzlüyü oluşturan vektörlerin türevleri

$$\mathbf{h}' = (\cosh s, 0, \sinh s),$$

$$\mathbf{n}' = (\sinh s, 0, \cosh s),$$

$$\mathbf{b}' = (0, 0, 0)$$

olarak bulunur. $\mathbf{b}' = -\tau \mathbf{n}$ olduğundan, merkez teğet yüzeyin burulması olan $\tau = 0$ dır. Doğal üçyüzlünün türev formülleri matris formda

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} \mathbf{h} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{h} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}$$

biçiminde yazılabilir. Doğal üçyüzlünün Darboux ani dönme vektörü

$$\mathbf{w}_h = -\tau \mathbf{h} - \kappa \mathbf{b} = (0, 1, 0)$$

dir.

Üreteç üçyüzlüsü ve doğal üçyüzlü ortak $\mathbf{h}$ vektörüne sahiptirler. Üreteç üçyüzlüsünün merkez normal vektörü $\mathbf{a}$ ile doğal üçyüzlünün asal normal vektörü $\mathbf{n}$ arasındaki spacelike açı ρ olmak üzere üçyüzlüler arasındaki ilişki matris formda

$$\begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{h} \\ \mathbf{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \sin \rho & \cos \rho \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \rho & -\sin \rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{h} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}$$

biçimindedir. Burada

$$\sin \rho = \frac{1}{R\kappa} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ve

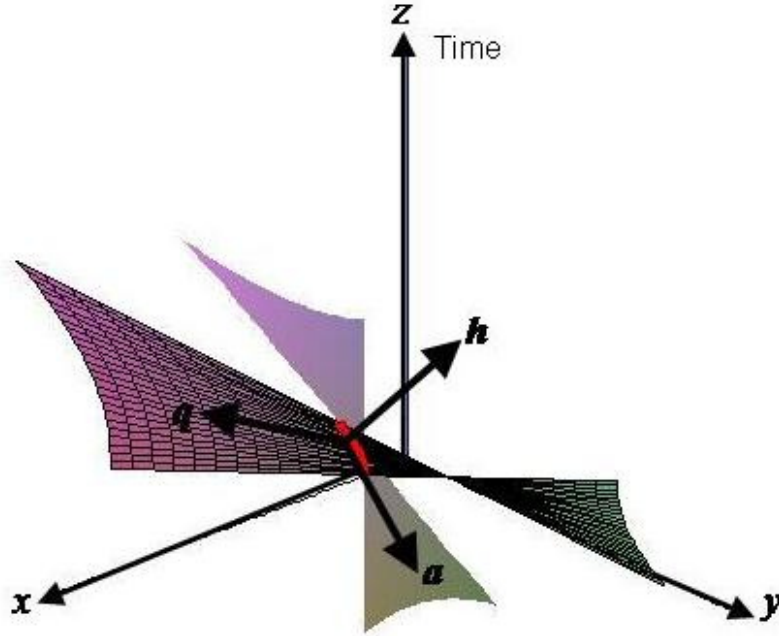
$$\cos \rho = \frac{\gamma}{R\kappa} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

dir. Böylece spacelike ρ açısı

$$\rho = \operatorname{arccot}(-1) = \frac{3\pi}{4} = 2.356$$

olarak bulunur.

Şekil 4.6, $X(s, v) = (\cosh s + v \cosh s, -v, \sinh s + v \sinh s)$ denklemleri spacelike koni, bu koninin dayanak eğrisi üzerindeki üreteç üçyüzlüsü ve koninin merkez teğet yüzeyini göstermektedir.



Şekil 4.6. $X(s, v) = (\cosh s + v \cosh s, -v, \sinh s + v \sinh s)$ spacelike konisi ve merkez teğet yüzeyi

4.3. IR_1^3 Minkowski Uzayında Teğet Yüzeylerin Eğrilik Teorisi

Teğet yüzey, bir uzay eğrisinin teğet vektörlerinin oluşturduğu regle yüzeydir [34]. Teğet yüzeyin doğurana, uzay eğrisinin teğet vektörü olduğundan, teğet yüzeylerin eğrilik teorisi, uzay eğrilerinin eğrilik teorisi yardımıyla incelenebilir.

s yay uzunluğu parametresi olmak üzere $\alpha(s)$ uzay eğrisinin teğet vektörü

$$t_\alpha(s) = \alpha'(s),$$

asal normal vektörü

$$\mathbf{n}_\alpha(s) = \frac{\mathbf{t}'_\alpha(s)}{\kappa_\alpha(s)}$$

ve binormal vektörü

$$\mathbf{b}_\alpha(s) = \mathbf{t}_\alpha(s) \times \mathbf{n}_\alpha(s) \quad (4.34)$$

olarak tanımlanabilir. Burada $\kappa_\alpha(s)$ eğrinin eğriliğidir. $\{\mathbf{t}_\alpha, \mathbf{n}_\alpha, \mathbf{b}_\alpha\}$ vektörlerinin oluşturduğu çatıya, eğrinin Frenet çatısı denir [21]. Burada $\mathbf{t}_\alpha(s)$ teğet vektörü spacelike, $\mathbf{n}_\alpha(s)$ asal normal vektörü spacelike ve $\mathbf{b}_\alpha(s)$ binormal vektörü timelike vektör olarak alınmıştır. Dolayısıyla $\alpha(s)$ uzay eğrisi bir spacelike egridir. Eğrinin Frenet türev formülleri matris formda

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t}'_\alpha \\ \mathbf{n}'_\alpha \\ \mathbf{b}'_\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_\alpha & 0 \\ -\kappa_\alpha & 0 & \tau_\alpha \\ 0 & \tau_\alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t}_\alpha \\ \mathbf{n}_\alpha \\ \mathbf{b}_\alpha \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

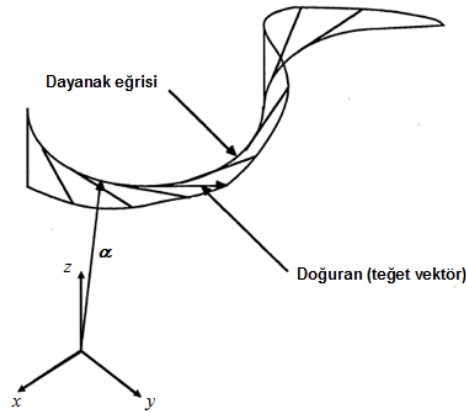
biçiminde ifade edilebilir. Burada τ_α eğrinin burulmasıdır.

$\alpha(s)$ uzay eğrisinin teğet vektörlerinin oluşturduğu teğet yüzey

$$\mathbf{X}(s, v) = \alpha(s) + v \mathbf{t}_\alpha(s) \quad (4.36)$$

denklemleri ile verilebilir. Burada, $\alpha(s)$, teğet yüzeyin dayanak eğrisi ya da sırt eğrisi olarak isimlendirilir [16]. Ayrıca, v reel değerli bir parametre, s eğrinin yay uzunluğu parametresi ve $\mathbf{t}_\alpha(s)$ eğrinin teğet vektörüdür.

Şekil 4.7, α eğrisinin teğetlerinin oluşturduğu teğet yüzeyi göstermektedir.



Şekil 4.7. α eğrisinin teğetlerinin oluşturduğu teğet yüzey [30]

Bir teğet yüzeyin Lorentziyen karakterinin belirlenmesi için, öncelikle yüzeyin normali bulunmalıdır. (4.36) denkleminin s ve v parametrelerine göre türevleri sırasıyla

$$\mathbf{X}_s(s, v) = \boldsymbol{\alpha}'(s) + v \mathbf{t}'_\alpha(s) \quad (4.37)$$

ve

$$\mathbf{X}_v(s, v) = \mathbf{t}_\alpha(s) \quad (4.38)$$

olarak bulunur. Teğet yüzeyin normali

$$\mathbf{S}_n = \frac{\mathbf{X}_s \times \mathbf{X}_v}{\|\mathbf{X}_s \times \mathbf{X}_v\|} \quad (4.39)$$

dir. (4.37) ve (4.38) denklemleri, (4.39) denkleminde yerine yazılarak ve Frenet türev formülleri kullanılarak, teğet yüzeyin normalinin dayanak eğrisinin $\mathbf{b}_\alpha(s)$ binormal vektörüne karşılık geldiği görülür. Dolayısıyla teğet yüzeyin Lorentziyen karakterine, dayanak eğrisinin $\mathbf{b}_\alpha(s)$ binormal vektörüne bakılarak karar verilebilir. (4.34) denkleminde verilen $\mathbf{b}_\alpha(s)$ vektörü timelike olduğundan, (4.36) denklemi ile verilen teğet yüzey bir spacelike yüzeydir.

Spacelike teğet yüzeyin boğaz çizgisi, dayanak eğrisi yardımıyla

$$\mathbf{c}(s) = \boldsymbol{\alpha}(s) - \mu \mathbf{t}_\alpha(s) \quad (4.40)$$

biçiminde verilebilir. (4.40) denkleminin türevi alınır ve boğaz çizgisinin tanımı olan

$$\mathbf{c}'(s) \cdot \mathbf{t}'_\alpha(s) = 0$$

denkleminde yerine yazılırsa

$$\mu = 0$$

bulunur. Böylece (4.40) denkleminde, dayanak eğrisinin boğaz çizgisi olduğu sonucuna varılır, yani

$$\boldsymbol{\alpha}(s) = \mathbf{c}(s)$$

dir.

Spacelike aykırı regle yüzeylerin üreteç üçyüzlü formülleri kullanılarak teğet yüzeyin üreteç üçyüzlüsünü oluşturan vektörler ile eğrinin Frenet çatısını oluşturan vektörler arasında

$$\mathbf{q}(s) = \mathbf{t}_\alpha(s), \quad \mathbf{h}(s) = \mathbf{n}_\alpha(s), \quad \mathbf{a}(s) = \mathbf{b}_\alpha(s) \quad (4.41)$$

ilişkilerinin olduğu görülür. (4.41) denkleminde, $\mathbf{q}(s)$ teğet yüzeyin üreteç vektörüdür. Teğet yüzeyin yüzey normaline, dayanak eğrisinin binormali karşılık geldiğinden aykırı regle yüzeylerden farklı olarak $\mathbf{a}(s)$ vektörüne teğet yüzeyin merkez normal vektörü denilebilir. $\mathbf{h}(s)$ ise teğet yüzeyin merkez teğet vektörüdür. Sonuç olarak, aykırı regle yüzeylerdeki merkez normal vektör ve merkez teğet vektörün teğet yüzeylerde yer değiştirdiği söylenebilir. Aykırı regle yüzeyler ile teğet yüzeyler arasındaki bu farklılık, teğet yüzeylerin açılabilir regle yüzeyler

olmasından ve dolayısıyla teğet düzlemlerinin doğuran boyunca sabit kalmasından kaynaklanmaktadır.

(4.41) denkleminin, eğrinin Frenet türev formülleri olan (4.35) de yerine yazılması ile spacelike teğet yüzeyin üreteç üçyüzlüsünün açılal değışimi matris formda

$$\begin{bmatrix} \mathbf{q}' \\ \mathbf{h}' \\ \mathbf{a}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_\alpha & 0 \\ -\kappa_\alpha & 0 & \tau_\alpha \\ 0 & \tau_\alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{h} \\ \mathbf{a} \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

biçiminde ifade edilebilir. (4.42) matris eşitliğı

$$\begin{bmatrix} \mathbf{q}' \\ \mathbf{h}' \\ \mathbf{a}' \end{bmatrix} = \mathbf{w}_q \times \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{h} \\ \mathbf{a} \end{bmatrix}$$

biçiminde de yazılabilir, burada

$$\mathbf{w}_q = \tau_\alpha \mathbf{q} - \kappa_\alpha \mathbf{a}$$

spacelike teğet yüzeyin üreteç üçyüzlüsünün Darboux ani dönme vektörüdür.

Dayanak eğrisi, aynı zamanda boğaz çizgisi olduğundan boğaz çizgisinin birinci mertebeden konumsal değışimi

$$\mathbf{c}'(s) = \mathbf{t}_\alpha(s)$$

dir.

Teğet yüzeylerde $\mathbf{a}$ merkez normal vektörün oluşturduğu merkez normal yüzeyin doğal üçyüzlüsü ile teğet yüzeyin üreteç üçyüzlüsü çakışıkır. Bu sebeple teğet yüzeylerin merkez normal yüzeyinin incelenmesi ilgi çekici değildir.

Bir spacelike teğet yüzeyin $\mathbf{h}$ merkez teğet vektörünün oluşturduğu regle yüzeye merkez teğet yüzey denir. Merkez teğet yüzey

$$\mathbf{X}_h(s, v) = \mathbf{c}(s) + v\mathbf{h}(s)$$

denklemleri ile gösterilebilir.

Merkez teğet yüzeyin boğaz çizgisinin spacelike teğet yüzeyin boğaz çizgisine göre konumu

$$\mathbf{c}_h(s) = \mathbf{c}(s) - \mu_h \mathbf{h}(s)$$

biçiminde yazılabilir. Boğaz çizgisinin tanımı yardımıyla μ_h parametresi

$$\mu_h = -\frac{\kappa_\alpha}{\kappa_\alpha^2 - \tau_\alpha^2}$$

olarak bulunur. Böylece merkez teğet yüzeyin boğaz çizgisi

$$\mathbf{c}_h(s) = \mathbf{c}(s) + \frac{\kappa_\alpha}{\kappa_\alpha^2 - \tau_\alpha^2} \mathbf{h}(s)$$

biçiminde elde edilir.

Merkez teğet yüzeyin doğal üçyüzlüsünü oluşturan $\mathbf{h}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ vektörleri, bunların türev formülleri, bu üçyüzlünün Darboux ani dönme vektörü ve doğal üçyüzlü ile spacelike teğet yüzeyin üreteç üçyüzlüsü arasındaki ilişkiler, aykırı regle yüzeylerin merkez normal yüzeyinin incelenmesi ile aynı tarzda incelenir. Spacelike teğet yüzeyin $\mathbf{h}$ merkez teğet vektörü bir spacelike vektör olduğundan, $\mathbf{n}$ vektörü spacelike ya da timelike vektör olabilir. Dolayısıyla doğal üçyüzlünün bu iki durum göz önüne alınarak incelenmesi gerekmektedir.

Timelike teğet yüzeylerde, yüzeyin normaline karşılık gelen, üreteç üçyüzlüsünün $\mathbf{a}$ merkez normal vektörü (dayanak eğrisinin $\mathbf{b}_\alpha$ binormal vektörü) bir spacelike vektördür. Bu durumda $\mathbf{q}$ üreteç vektörü (dayanak eğrisinin teğeti) spacelike ya da timelike vektör olabilir. Dolayısıyla timelike teğet yüzeylerin, spacelike doğuranlı timelike teğet yüzeyler ve timelike doğuranlı timelike teğet yüzeyler olarak iki durumda incelenmesi gerekmektedir. Bu inceleme, spacelike teğet yüzeylerin incelemesine benzer bir şekilde yapılabilir.

Örnek 4.5. $\alpha(s) = \left(\frac{\sqrt{2}}{3} s^{3/2}, \frac{\sqrt{2}}{3} (1-s)^{3/2}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} s \right)$ eğrisinin teğetlerinin oluşturduğu regle yüzey

ele alınsın. Bu yüzeyin regle formu

$$\begin{aligned} X(s, v) = \alpha(s) + v\alpha'(s) = & \left(\frac{\sqrt{2}}{3} s^{3/2}, \frac{\sqrt{2}}{3} (1-s)^{3/2}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} s \right) \\ & + v \left(\frac{\sqrt{2}}{2} s^{1/2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} (1-s)^{1/2}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \right) \end{aligned}$$

biçiminde yazılabilir.

$\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle = -1$ olduğundan $\alpha(s)$ eğrisi birim hızlı bir timelike eğridir ve s , eğrinin yay uzunluğu parametresidir. α eğrisinin birim teğet vektörü

$$t_\alpha = \alpha' = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} s^{1/2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} (1-s)^{1/2}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \right)$$

dir. α eğrisinin asal normal vektörü

$$n_\alpha = \frac{t'_\alpha}{\kappa_\alpha} = (\sqrt{1-s}, \sqrt{s}, 0)$$

olarak bulunur, burada $\kappa_\alpha = \|t'_\alpha\| = \frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{1-s}\sqrt{s}}$, α eğrisinin eğriliğidir. α eğrisinin

binormal vektörü ise

$$\mathbf{b}_\alpha = -\mathbf{t}_\alpha \times \mathbf{n}_\alpha = \left(-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\sqrt{s}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\sqrt{1-s}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

olarak bulunur. α eğrisinin Frenet çatısını oluşturan $\mathbf{t}_\alpha$, $\mathbf{n}_\alpha$ ve $\mathbf{b}_\alpha$ vektörlerinin türevleri sırasıyla

$$\mathbf{t}'_\alpha = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}s^{-1/2}, \frac{\sqrt{2}}{4}(1-s)^{-1/2}, 0 \right)$$

$$\mathbf{n}'_\alpha = \left(-\frac{1}{2\sqrt{1-s}}, \frac{1}{2\sqrt{s}}, 0 \right)$$

$$\mathbf{b}'_\alpha = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}\sqrt{s}}, -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}\sqrt{1-s}}, 0 \right)$$

dir. $\mathbf{b}'_\alpha = -\tau_\alpha \mathbf{n}_\alpha$ olduğundan α eğrisinin burulması olan $\tau_\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}\sqrt{s}\sqrt{1-s}}$ olarak bulunur.

Teğet yüzeyin boğaz çizgisi

$$\mathbf{c}(s) = \alpha(s) = \left(\frac{\sqrt{2}}{3}s^{3/2}, \frac{\sqrt{2}}{3}(1-s)^{3/2}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}s \right)$$

dir. Teğet yüzeyin boğaz çizgisi üzerinde tanımlı olan üreteç üçyüzlüsünü oluşturan $\mathbf{q}$ üreteç vektörü, $\mathbf{h}$ merkez teğet vektör ve $\mathbf{a}$ merkez normal vektörünün, α eğrisinin Frenet elemanları cinsinden ifadesi

$$\mathbf{q} = \mathbf{t}_\alpha, \mathbf{h} = \mathbf{n}_\alpha, \mathbf{a} = \mathbf{b}_\alpha$$

biçimindedir. Üreteç üçyüzlüsünün türev formülleri, α eğrisinin Frenet türev formülleri yardımıyla matris formda

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{h} \\ \mathbf{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_\alpha & 0 \\ \kappa_\alpha & 0 & \tau_\alpha \\ 0 & -\tau_\alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{h} \\ \mathbf{a} \end{bmatrix}$$

biçiminde yazılabilir. Burada

$$\kappa_\alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{1-s}\sqrt{s}}$$

ve

$$\tau_\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}\sqrt{s}\sqrt{1-s}}$$

dir. Üreteç üçyüzlüsünün Darboux ani dönme vektörü

$$\mathbf{w}_q = \tau_\alpha \mathbf{q} - \kappa_\alpha \mathbf{a} = \left(0, 0, \frac{5}{4\sqrt{s}\sqrt{1-s}} \right)$$

olarak bulunur.

Teğet yüzeyin merkez teğet yüzeyi regle formda

$$\mathbf{X}_h(s, v) = \mathbf{c}(s) + v\mathbf{h}(s) = \left(\frac{\sqrt{2}}{3} s^{3/2}, \frac{\sqrt{2}}{3} (1-s)^{3/2}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} s \right) + v(\sqrt{1-s}, \sqrt{s}, 0)$$

biçiminde yazılabilir. Merkez teğet yüzeyin boğaz çizgisi

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_h(s) &= \mathbf{c}(s) + \frac{\kappa_\alpha}{\kappa_\alpha^2 - \tau_\alpha^2} \mathbf{h}(s) \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{3} s^{3/2} + \sqrt{2}\sqrt{s}\sqrt{1-s}, \frac{\sqrt{2}}{3} (1-s)^{3/2} + \sqrt{2}\sqrt{s}\sqrt{1-s}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} s \right) \end{aligned}$$

biçiminde bulunur.

Doğal üçyüzlü merkez teğet yüzeyin boğaz çizgisi üzerinde tanımlıdır. Merkez teğet yüzeyin üreteç vektörü teğet yüzeyin merkez teğet vektörü olup

$$\mathbf{h} = (\sqrt{1-s}, \sqrt{s}, 0)$$

biçiminde bulunmuştur. Asal normal vektör

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{h}'}{\kappa} = (-\sqrt{s}, \sqrt{1-s}, 0)$$

dir, burada $\kappa = \frac{1}{\sqrt{2s(1-s)}}$ merkez teğet yüzeyin eğriliğidir. $\langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle = 1$ olduğundan, $\mathbf{n}$ asal

normal vektör spacelike vektördür. Binormal vektör ise

$$\mathbf{b} = \mathbf{h} \times \mathbf{n} = (0, 0, 1)$$

olarak bulunur. $\langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle = -1$ olduğundan, $\mathbf{b}$ binormal vektör timelike vektördür. Doğal üçyüzlüyü oluşturan vektörlerin türevleri

$$\mathbf{h}' = \left(-\frac{1}{2\sqrt{1-s}}, \frac{1}{2\sqrt{s}}, 0 \right),$$

$$\mathbf{n}' = \left(-\frac{1}{2\sqrt{s}}, -\frac{1}{2\sqrt{1-s}}, 0 \right),$$

$$\mathbf{b}' = (0, 0, 0)$$

olarak bulunur. $\mathbf{b}' = \tau \mathbf{n}$ olduğundan teğet yüzeyin burulması $\tau = 0$ dır. Doğal üçyüzlünün Darboux ani dönme vektörü

$$\mathbf{w}_h = \tau \mathbf{h} - \kappa \mathbf{b} = \left(0, 0, -\frac{1}{\sqrt{2s(1-s)}} \right)$$

biçiminde bulunur. Üreteç üçyüzlüsünün merkez normal vektörü $\mathbf{a}$ ile doğal üçyüzlünün asal normal vektörü $\mathbf{n}$ arasındaki timelike ρ

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{n} \rangle = \sinh \rho$$

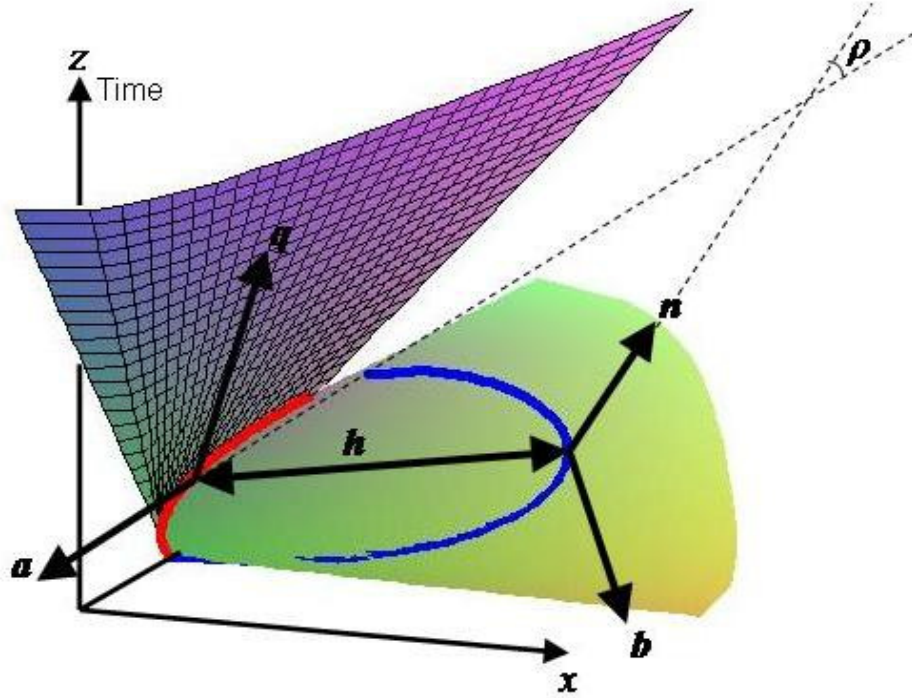
bağıntısı yardımıyla

$$\rho = \operatorname{arcsinh} \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \right) = 1.031$$

olarak bulunur.

Şekil 4.8, $\alpha(s) = \left(\frac{\sqrt{2}}{3} s^{3/2}, \frac{\sqrt{2}}{3} (1-s)^{3/2}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} s \right)$ eğrisinin teğetlerinin oluşturduğu teğet

yüzey, bu yüzeyin boğaz çizgisi üzerindeki üreteç üçyüzlüsü, merkez teğet yüzeyi ve doğal üçyüzlüyü göstermektedir.



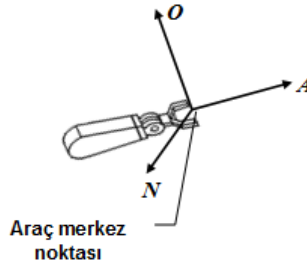
Şekil 4.8. $\alpha(s) = \left(\frac{\sqrt{2}}{3} s^{3/2}, \frac{\sqrt{2}}{3} (1-s)^{3/2}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} s \right)$ eğrisinin teğetlerinin oluşturduğu teğet yüzey ve merkez

teğet yüzeyi

5. IR_1^3 MINKOWSKI UZAYINDA ROBOT UÇ-IŞLEVCI HAREKETİ

Bu bölümde, 3. bölümde verilen regle yüzeylerin eğrilik teorisi kullanılarak robot uç-işlevci hareketi incelenir. Öncelikle, bir regle yüzey kullanılarak, bir robot yörüngesinin nasıl temsil edilebileceği açıklanır. Daha sonra, regle yüzeylerin eğrilik teorisi yardımıyla robot uç-işlevcinin araç merkez noktasının lineer hız ve ivmesi ile araç çatısının açısal hız ve ivmesi belirlenir.

Robot uç-işlevcinin konumu ve yönlenmesi, araç çatısı ve araç merkez noktası kullanılarak tam olarak belirlenebilir. Şekil 5.1 de gösterildiği gibi, araç çatısı üç birim vektörden oluşur; bunlar O yönlenme vektörü, A yaklaşım vektörü ve N normal vektördür. Araç çatısının orijini, araç merkez noktasıdır.



Şekil 5.1. Robot uç-işlevci ve araç çatısı

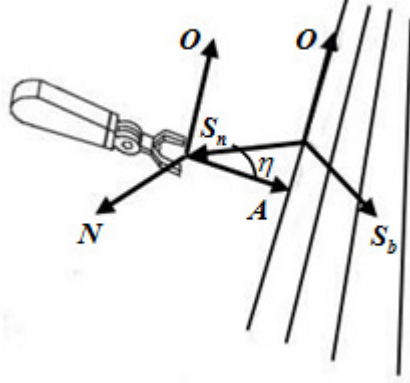
Robot uç-işlevci belirli bir yörünge üzerinde hareket ederken, uç-işlevciye sıkı bir şekilde bağlı olan araç çatısının üç birim vektöründen her biri, bir regle yüzey oluştururlar. Bu çalışmada O yönlenme vektörü ile oluşturulan regle yüzey ele alınacaktır. Uç-işlevci regle yüzey üzerinde hareket ederken, regle yüzeye daima dik konumda olmayabilir ve belirli bir açı yapabilir. Spin açısı denilen bu açı, Şekil 5.2 de gösterildiği gibi, uç işlevci üzerindeki araç çatısının A yaklaşım vektörü ile regle yüzeyin S_n normal vektörü arasındaki açıdır ve η ile gösterilir. Böylece altı serbestlik derecesine sahip olan bir uç işlevci hareketi, beş bağımsız parametreye bağlı bir regle yüzey ve spin açısı yardımıyla tam olarak açıklanabilir. Robot uç-işlevci hareketini tam olarak belirleyen regle yüzey ve spin açısı sırasıyla

$$X(u, v) = \alpha(u) + vR(u)$$

ve

$$\eta = \eta(u)$$

dur. Burada α , uç-işlevcinin takip ettiği dayanak eğrisi, v bir reel değerli parametre ve R doğurandır. O yönlenme vektörü, doğuran yönünde birim vektör olarak seçilir.



Şekil 5.2. Spin açısı

Bu bölümde robot uç-işlevci hareketi, spacelike ve timelike regle yüzeylerin eğrilik teorisi kullanılarak iki bölümde incelenecektir.

5.1. Spacelike Regle Yüzeylerin Eğrilik Teorisi Yardımıyla Robot Uç-işlevci Hareketinin İncelenmesi

Spacelike regle yüzeyin yüzey çatısı, dayanak eğrisi üzerindedir. Yüzey çatısını oluşturan vektörler; O yönlenme vektörü, S_n yüzey normal vektörü ve S_b binormal vektörüdür. Spacelike yüzeylerde, S_n yüzey normal vektörü timelike vektör olduğundan, O yönlenme ve S_b binormal vektörleri spacelike vektörlerdir.

Yönlenme vektörü doğuranlar yönünde birim vektör olup

$$O = q$$

şeklindedir. Yüzey normal vektörü

$$S_n = \frac{X_v \times X_s}{\|X_v \times X_s\|} \quad (5.1)$$

eşitliği ile verilir. Burada X regle yüzey, s regle yüzeyin boğaz çizgisinin yay uzunluğu parametresi ve v reel değerli bir parametredir. Araç merkez noktası üzerindeki yüzey normal

vektörü, dayanak eğrisi üzerinde olduğundan (5.1) denkleminde v sıfır alınır. X regle yüzeyinin s ve v parametrelerine göre türevleri sırasıyla

$$X_s = \alpha' + vR'$$

ve

$$X_v = R$$

dir. (3.7), (3.8) ve (3.9) denklemleri kullanılarak yüzey normal vektörü, üreteç üçyüzlüsü vektörleri cinsinden

$$S_n = \frac{-\Delta h - \mu a}{\sqrt{-\Delta^2 + \mu^2}} \quad (5.2)$$

biçiminde bulunur. Burada μ ve Δ sırasıyla (3.6) ve (3.21) denklemleri ile tanımlanır.

Yüzey binormal vektörü de

$$S_b = -O \times S_n$$

dir. Yönlenme vektörü, üreteç vektörü ile çakışık olduğundan ve (3.7), (3.8), (3.9) ve (5.2) denklemleri kullanılarak, yüzey binormal vektörü, üreteç üçyüzlüsü vektörleri cinsinden

$$S_b = \frac{-\mu h - \Delta a}{\sqrt{-\Delta^2 + \mu^2}}$$

biçiminde elde edilir.

Üreteç vektörü, üreteç üçyüzlüsü ve yüzey çatısı için ortak vektördür. Yüzey çatısının S_n ve S_b vektörleri ile üreteç üçyüzlüsünün h ve a vektörleri aynı timelike düzlemedir. Yüzey çatısının S_n timelike normal vektörü ile üreteç üçyüzlüsünün h timelike merkez normal vektörü arasındaki hiperbolik açı σ olmak üzere bu vektörler arasındaki ilişki

$$S_n = \cosh \sigma h + \sinh \sigma a$$

$$S_b = \sinh \sigma h + \cosh \sigma a$$

biçiminde veya matris formda

$$\begin{bmatrix} S_n \\ S_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh \sigma & \sinh \sigma \\ \sinh \sigma & \cosh \sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ a \end{bmatrix}$$

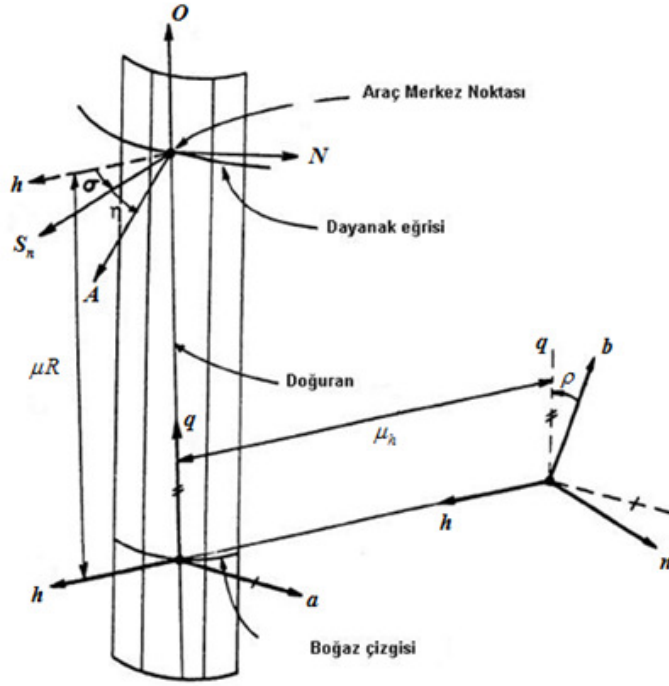
biçiminde yazılabilir. Böylece yüzey çatısının üreteç üçyüzlüsüne göre yönlenmesi

$$\begin{bmatrix} O \\ S_n \\ S_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh \sigma & \sinh \sigma \\ 0 & \sinh \sigma & \cosh \sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ h \\ a \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

biçiminde bulunur.

Yüzey çatısı ve araç çatısının O yönlenme vektörü ortaktır ve bu vektör spacelike vektördür. Araç çatısının A yaklaşım vektörü spacelike ya da timelike vektör olabilir. Yüzey çatısı ve araç çatısı arasındaki ilişki, A yaklaşım vektörünün spacelike ya da timelike vektör olma durumlarına göre ayrı ayrı incelenmelidir.

Şekil 5.3, regle yüzeyin üreteç üçyüzlüsü, yüzey çatısı, merkez normal yüzeyin doğal üçyüzlüsü ve robot uç-işlevcinin araç çatısı arasındaki ilişkileri göstermektedir.



Şekil 5.3. Çatılar arasındaki ilişkiler [30]

i) A yaklaşım vektörü spacelike olsun.

Spacelike regle yüzeyin S_n timelike yüzey normal vektörü ile araç çatısının A spacelike yaklaşım vektörü arasındaki açı η timelike spin açısı olmak üzere, yüzey çatısı ile araç çatısı arasındaki ilişki

$$\begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sinh \eta & \cosh \eta \\ 0 & \cosh \eta & \sinh \eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O \\ S_n \\ S_b \end{bmatrix}$$

biçimindedir. (5.3) matris eşitliği yardımıyla, araç çatısı ile üreteç üçyüzlüsü arasındaki ilişki

$$\begin{bmatrix} \mathbf{O} \\ \mathbf{A} \\ \mathbf{N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sinh \varphi & \cosh \varphi \\ 0 & \cosh \varphi & \sinh \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{h} \\ \mathbf{a} \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

biçiminde bulunur. Burada

$$\varphi = \eta + \sigma \quad (5.5)$$

dır.

ii) $\mathbf{A}$ yaklaşım vektörü timelike olsun.

Spacelike regle yüzeyin $\mathbf{S}_n$ timelike yüzey normal vektörü ile araç çatısının $\mathbf{A}$ timelike yaklaşım vektörü arasındaki açı η hiperbolik spin açısı olmak üzere, yüzey çatısı ile araç çatısı arasındaki ilişki

$$\begin{bmatrix} \mathbf{O} \\ \mathbf{A} \\ \mathbf{N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh \eta & \sinh \eta \\ 0 & \sinh \eta & \cosh \eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{O} \\ \mathbf{S}_n \\ \mathbf{S}_b \end{bmatrix}$$

biçimindedir. (5.3) matris eşitliği yardımıyla, araç çatısı ile üreteç üçyüzlüsü arasındaki ilişki

$$\begin{bmatrix} \mathbf{O} \\ \mathbf{A} \\ \mathbf{N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh \varphi & \sinh \varphi \\ 0 & \sinh \varphi & \cosh \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{h} \\ \mathbf{a} \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

biçiminde bulunur. Burada

$$\varphi = \eta + \sigma \quad (5.7)$$

dır.

5.1.1. Robot Uç-işlevci Hareketinin Diferansiyel Özellikleri

Robot uç-işlevci hareketinin diferansiyel özelliklerinin, yine $\mathbf{A}$ yaklaşım vektörünün spacelike ve timelike vektör olma durumlarına göre incelenmesi gerekmektedir.

i) $\mathbf{A}$ yaklaşım vektörü spacelike olsun.

Spacelike regle yüzeyin α dayanak eğrisi robot uç-işlevcinin yörüngesi olduğundan, robot uç-işlevcinin birinci mertebeden konumsal değişimi, (3.5) denkleminde

$$\alpha' = c' + \mu' R + \mu h \quad (5.8)$$

biçiminde yazılabilir. (3.19) denklemi ve (3.7) denklemi, (5.8) denkleminde yerine yazılırsa, robot uç-işlevcinin birinci mertebeden konumsal değişimi, üreteç üçyüzlüsü elemanları cinsinden

$$\alpha' = (\Gamma + \mu' R)q + \mu h + \Delta a \quad (5.9)$$

biçiminde elde edilir. Araç çatısı ile üreteç üçyüzlüsü arasındaki ilişki olan (5.4) matris eşitliği kullanılarak, robot uç-işlevcinin birinci mertebeden konumsal değişimi, araç çatısı elemanları cinsinden

$$\alpha' = (\Gamma + \mu' R)O + (-\mu \sinh \varphi + \Delta \cosh \varphi)A + (\mu \cosh \varphi - \Delta \sinh \varphi)N$$

biçiminde yazılabilir.

(5.9) denkleminin türevi alınır ve (3.16) daki formüller kullanılırsa, araç merkez noktasının ikinci mertebeden konumsal değişimi, üreteç üçyüzlüsünde

$$\alpha'' = \left(\Gamma' + \mu'' R + \frac{\mu}{R} \right) q + \left(\frac{\Gamma}{R} + 2\mu' + \frac{\Delta \gamma}{R} \right) h + \left(\frac{\mu \gamma}{R} + \Delta' \right) a$$

olarak bulunur. (5.4) matris eşitliği kullanılarak, araç merkez noktasının ikinci mertebeden konumsal değişimi, araç çatısı elemanları cinsinden

$$\begin{aligned} \alpha'' = & \left(\Gamma' + \mu'' R + \frac{\mu}{R} \right) O + \left[- \left(\frac{\Gamma}{R} + 2\mu' + \frac{\Delta \gamma}{R} \right) \sinh \varphi + \left(\frac{\mu \gamma}{R} + \Delta' \right) \cosh \varphi \right] A \\ & + \left[\left(\frac{\Gamma}{R} + 2\mu' + \frac{\Delta \gamma}{R} \right) \cosh \varphi - \left(\frac{\mu \gamma}{R} + \Delta' \right) \sinh \varphi \right] N \end{aligned}$$

biçiminde yazılabilir.

Araç çatısının birinci mertebeden açısal değişiminin belirlenmesi için, (5.4) matris eşitliğinin her iki tarafının türevi alınarak

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} = \varphi' \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh \varphi & \sinh \varphi \\ 0 & \sinh \varphi & \cosh \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ h \\ a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sinh \varphi & \cosh \varphi \\ 0 & \cosh \varphi & \sinh \varphi \end{bmatrix} \frac{d}{ds} \begin{bmatrix} q \\ h \\ a \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

elde edilir. (3.16) matris eşitliği, (5.10) da yerine yazılırsa

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{R} & 0 \\ \frac{1}{R} \sinh \varphi & \left(\varphi' + \frac{\gamma}{R} \right) \cosh \varphi & \left(\varphi' + \frac{\gamma}{R} \right) \sinh \varphi \\ \frac{1}{R} \cosh \varphi & \left(\varphi' + \frac{\gamma}{R} \right) \sinh \varphi & \left(\varphi' + \frac{\gamma}{R} \right) \cosh \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ h \\ a \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

elde edilir. (5.4) matris eşitliğinin tersi, (5.11) matris eşitliğinde yerine yazılırsa, araç çatısının birinci mertebeden açısal değişimi

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} \mathbf{O} \\ \mathbf{A} \\ \mathbf{N} \end{bmatrix} = \frac{1}{R} \begin{bmatrix} 0 & -\sinh \varphi & \cosh \varphi \\ \sinh \varphi & 0 & \delta R \\ \cosh \varphi & \delta R & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{O} \\ \mathbf{A} \\ \mathbf{N} \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

biçiminde bulunur. Burada

$$\delta = \varphi' + \frac{\gamma}{R} \quad (5.13)$$

dir. (5.12) matris eşitliği

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} \mathbf{O} \\ \mathbf{A} \\ \mathbf{N} \end{bmatrix} = \mathbf{w}_o \times \begin{bmatrix} \mathbf{O} \\ \mathbf{A} \\ \mathbf{N} \end{bmatrix}$$

biçiminde de yazılabilir. Burada

$$\mathbf{w}_o = \delta \mathbf{O} + \frac{1}{R} (-\cosh \varphi \mathbf{A} + \sinh \varphi \mathbf{N})$$

dır ve araç çatısının Darboux ani dönme vektörü olarak adlandırılır.

(5.4) matris eşitliği yardımıyla, araç çatısının Darboux ani dönme vektörü, üreteç üçyüzlüsünde

$$\mathbf{w}_o = \delta \mathbf{q} - \frac{1}{R} \mathbf{a} \quad (5.14)$$

biçiminde yazılabilir. (5.13) eşitliği, (5.14) denkleminde yerine yazılırsa

$$\mathbf{w}_o = \varphi' \mathbf{q} + \frac{\gamma}{R} \mathbf{q} - \frac{1}{R} \mathbf{a}$$

elde edilir. (3.32) matris eşitliğinin üçüncü satırından

$$\mathbf{w}_o = \varphi' \mathbf{q} + \kappa \mathbf{b}$$

bulunur. (3.33) denklemini yardımıyla, araç çatısının Darboux ani dönme vektörü ile üreteç üçyüzlüsünün Darboux ani dönme vektörü arasındaki ilişki

$$\mathbf{w}_o = \varphi' \mathbf{q} - \mathbf{w}_q$$

şeklinde bulunur.

(5.14) denkleminin türevi alınarak

$$\mathbf{w}_o' = \delta' \mathbf{q} + \delta \mathbf{q}' - \frac{1}{R} \frac{\gamma}{R} \mathbf{h} \quad (5.15)$$

elde edilir. (3.16) matris eşitliği ve (5.13) eşitliği, (5.15) denkleminde yerine yazılarak, araç çatısının ikinci mertebeden açısal değişimi

$$\mathbf{w}_o' = \delta' \mathbf{q} + \frac{\varphi'}{R} \mathbf{h}$$

biçiminde bulunur.

ii) A yaklaşım vektörü timelike olsun.

A yaklaşım vektörünün spacelike vektör olma durumunda yapılan işlemlere benzer işlemler yapılarak, robot uç-işlevcinin birinci mertebeden konumsal değişimi, araç çatısı elemanları cinsinden

$$\alpha' = (\Gamma + \mu' R)O + (\mu \cosh \varphi - \Delta \sinh \varphi)A + (-\mu \sinh \varphi + \Delta \cosh \varphi)N$$

biçiminde bulunur.

Araç merkez noktasının ikinci mertebeden konumsal değişimi, araç çatısı elemanları cinsinden

$$\begin{aligned} \alpha'' = & \left(\Gamma' + \mu'' R + \frac{\mu}{R} \right) O + \left[\left(\frac{\Gamma}{R} + 2\mu' + \frac{\Delta \gamma}{R} \right) \cosh \varphi - \left(\frac{\mu \gamma}{R} + \Delta' \right) \sinh \varphi \right] A \\ & + \left[- \left(\frac{\Gamma}{R} + 2\mu' + \frac{\Delta \gamma}{R} \right) \sinh \varphi + \left(\frac{\mu \gamma}{R} + \Delta' \right) \cosh \varphi \right] N \end{aligned}$$

biçiminde yazılabilir.

Araç çatısının birinci mertebeden açısal değişimi

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} = \frac{1}{R} \begin{bmatrix} 0 & \cosh \varphi & -\sinh \varphi \\ \cosh \varphi & 0 & \delta R \\ \sinh \varphi & \delta R & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix}$$

biçiminde bulunur. Burada

$$\delta = \varphi' + \frac{\gamma}{R}$$

dir. Araç çatısının Darboux ani dönme vektörü

$$w_o = -\delta O + \frac{1}{R} (-\sinh \varphi A + \cosh \varphi N)$$

olarak bulunur. Bu vektör

$$O' = w_o \times O, \quad A' = w_o \times A, \quad N' = w_o \times N$$

eşitliklerini sağlar. (5.6) matris eşitliği yardımıyla, araç çatısının Darboux ani dönme vektörü üreteç üçyüzlüsünde

$$w_o = -\delta q + \frac{1}{R} a$$

biçiminde yazılabilir.

Araç çatısının Darboux ani dönme vektörü ile üreteç üçyüzlüsünün Darboux ani dönme vektörleri arasındaki ilişki

$$\mathbf{w}_o = -\phi' \mathbf{q} + \mathbf{w}_q$$

şeklinde bulunur.

Araç çatısının ikinci mertebeden açısal değişimi ise

$$\mathbf{w}_o' = -\delta' \mathbf{q} - \frac{\phi'}{R} \mathbf{h}$$

olarak elde edilir.

Robot uç-işlevcinin araç merkez noktasının lineer hızı ve ivmesi sırasıyla

$$\|\alpha'\| = \sqrt{(\Gamma + \mu' R)^2 - \mu^2 + \Delta^2}$$

ve

$$\|\alpha''\| = \sqrt{\left(\Gamma' + \mu'' R + \frac{\mu}{R}\right)^2 - \left(\frac{\Gamma}{R} + 2\mu' + \frac{\Delta\gamma}{R}\right)^2 + \left(\frac{\mu\gamma}{R} + \Delta'\right)^2}$$

biçiminde elde edilir. Robot uç-işlevcinin açısal hızı ve ivmesi ise sırasıyla

$$\|\mathbf{w}_o\| = \sqrt{\delta^2 + \frac{1}{R^2}}$$

ve

$$\|\mathbf{w}_o'\| = \sqrt{\delta'^2 - \left(\frac{\phi'}{R}\right)^2}$$

biçiminde bulunur. Robot uç-işlevcinin araç merkez noktasının lineer hızı ve ivmesi ile robot uç-işlevcinin açısal hızı ve ivmesi, $\mathbf{A}$ yaklaşım vektörünün spacelike veya timelike olma durumlarına göre değişmez.

5.2. Timelike Regle Yüzeylerin Eğrilik Teorisi Yardımıyla Robot Uç-işlevci Hareketinin İncelenmesi

Bu bölümde robot uç-işlevci hareketi, spacelike doğuranlı timelike regle yüzeylerin ve timelike doğuranlı timelike regle yüzeylerin eğrilik teorileri kullanılarak iki bölümde incelenecektir.

5.2.1. Spacelike Doğuranlı Timelike Regle Yüzeylerin Eğrilik Teorisi Yardımıyla Robot Uç-işlevci Hareketinin İncelenmesi

Spacelike doğuranlı timelike regle yüzeyin dayanak eğrisi üzerindeki yüzey çatısını oluşturan vektörler; $\mathbf{O}$ yönlenme vektörü, $\mathbf{S}_n$ yüzey normal vektörü ve $\mathbf{S}_b$ binormal vektördür.

Spacelike doğuranlı timelike yüzeylerde, S_n yüzey normal vektörü ve O yönlenme vektörü spacelike olduğundan, S_b binormal vektörü timelike vektördür.

Yönlenme vektörü, doğuran yönünde birim vektör olduğundan

$$O = q \quad (5.16)$$

dur. Yüzey normal vektörü

$$S_n = \frac{X_v \times X_s}{\|X_v \times X_s\|} \quad (5.17)$$

biçiminde verilir. X regle yüzeyinin s ve v parametrelerine göre türevleri alınıp, bu türevler (5.17) denkleminde yerine yazılır ve (3.38), (3.39), (3.40) denklemleri kullanılırsa

$$S_n = \frac{\Delta h + \mu a}{\sqrt{|\Delta^2 - \mu^2|}} \quad (5.18)$$

elde edilir. Burada μ ve Δ sırasıyla (3.36) ve (3.47) denklemleri ile tanımlanır.

Yüzey binormal vektörü

$$S_b = O \times S_n \quad (5.19)$$

biçiminde verilir. (5.16) ve (5.18) denklemleri, (5.19) denkleminde yerine yazılarak ve (3.41) deki eşitlikler kullanılarak

$$S_b = \frac{\mu h + \Delta a}{\sqrt{|\Delta^2 - \mu^2|}}$$

biçiminde elde edilir.

Üreteç vektörü, üreteç üçyüzlüsü ve yüzey çatısı için ortak vektördür. Yüzey çatısının S_n ve S_b vektörleri ile üreteç üçyüzlüsünün h ve a vektörleri aynı timelike düzlemindedir. Yüzey çatısının S_n timelike normal vektörü ile üreteç üçyüzlüsünün h timelike merkez normal vektörü arasındaki hiperbolik açı σ olmak üzere bu vektörler arasındaki ilişki

$$S_n = \cosh \sigma h + \sinh \sigma a$$

$$S_b = \sinh \sigma h + \cosh \sigma a$$

biçiminde veya matris formda

$$\begin{bmatrix} S_n \\ S_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh \sigma & \sinh \sigma \\ \sinh \sigma & \cosh \sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ a \end{bmatrix}$$

biçiminde yazılabilir. Böylece yüzey çatısının S_n spacelike normal vektörü ile üreteç üçyüzlüsünün h spacelike merkez normal vektörü arasındaki merkez açı σ olmak üzere yüzey çatısının üreteç üçyüzlüsüne göre yönlenmesi

$$\begin{bmatrix} \mathbf{O} \\ \mathbf{S}_n \\ \mathbf{S}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh \sigma & \sinh \sigma \\ 0 & \sinh \sigma & \cosh \sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{h} \\ \mathbf{a} \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

biçiminde bulunur.

Yüzey çatısı ve araç çatısının $\mathbf{O}$ yönlenme vektörü ortaktır ve bu vektör spacelike vektördür. Araç çatısının $\mathbf{A}$ yaklaşım vektörü spacelike ya da timelike olabilir. Yüzey çatısı ve araç çatısı arasındaki ilişki, $\mathbf{A}$ yaklaşım vektörünün spacelike ya da timelike olma durumlarına göre ayrı ayrı incelenmelidir.

i) $\mathbf{A}$ yaklaşım vektörü spacelike olsun.

Spacelike doğuranlı timelike regle yüzeyin $\mathbf{S}_n$ spacelike yüzey normal vektörü ile araç çatısının $\mathbf{A}$ spacelike yaklaşım vektörü arasındaki açı η merkez spin açısı olmak üzere, yüzey çatısı ile araç çatısı arasındaki ilişki

$$\begin{bmatrix} \mathbf{O} \\ \mathbf{A} \\ \mathbf{N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh \eta & \sinh \eta \\ 0 & \sinh \eta & \cosh \eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{O} \\ \mathbf{S}_n \\ \mathbf{S}_b \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

biçimindedir. (5.20) matris eşitliği, (5.21) de yerine yazılırsa, araç çatısı ile üreteç üçyüzlüsü arasındaki ilişki

$$\begin{bmatrix} \mathbf{O} \\ \mathbf{A} \\ \mathbf{N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh \varphi & \sinh \varphi \\ 0 & \sinh \varphi & \cosh \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{h} \\ \mathbf{a} \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

biçiminde bulunur. Burada

$$\varphi = \eta + \sigma \quad (5.23)$$

dir.

ii) $\mathbf{A}$ yaklaşım vektörü timelike olsun.

Spacelike doğuranlı timelike regle yüzeyin $\mathbf{S}_n$ spacelike yüzey normal vektörü ile araç çatısının $\mathbf{A}$ timelike yaklaşım vektörü arasındaki açı η timelike spin açısı olmak üzere yüzey çatısı ile araç çatısı arasındaki ilişki

$$\begin{bmatrix} \mathbf{O} \\ \mathbf{A} \\ \mathbf{N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sinh \eta & \cosh \eta \\ 0 & \cosh \eta & \sinh \eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{O} \\ \mathbf{S}_n \\ \mathbf{S}_b \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

biçimindedir. (5.20) matris eşitliği, (5.24) de yerine yazılırsa, araç çatısı ile üreteç üçyüzlüsü arasındaki ilişki

$$\begin{bmatrix} \mathbf{O} \\ \mathbf{A} \\ \mathbf{N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sinh \varphi & \cosh \varphi \\ 0 & \cosh \varphi & \sinh \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{h} \\ \mathbf{a} \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

biçiminde bulunur. Burada

$$\varphi = \eta + \sigma \quad (5.26)$$

dir.

5.2.1.1. Robot Uç-işlevci Hareketinin Diferansiyel Özellikleri

Robot uç-işlevci hareketinin diferansiyel özelliklerinin, yine $\mathbf{A}$ yaklaşım vektörünün spacelike ve timelike vektör olma durumlarına göre incelenmesi gerekmektedir.

i) $\mathbf{A}$ yaklaşım vektörü spacelike olsun.

Spacelike doğuranlı timelike regle yüzeyin α dayanak eğrisi, robot uç-işlevcinin yörüngesi olduğundan, robot uç-işlevcinin birinci mertebeden konumsal değişimi, (3.35) denkleminin türevi alınarak

$$\alpha' = c' + \mu' R + \mu h \quad (5.27)$$

biçiminde yazılabilir. (3.38) ve (3.45) denklemleri, (5.27) denkleminde yerine yazılırsa, robot uç-işlevcinin birinci mertebeden konumsal değişimi, üreteç üçyüzlüsü elemanları cinsinden

$$\alpha' = (\Gamma + \mu' R)q + \mu h + \Delta a \quad (5.28)$$

biçiminde elde edilir. (5.22) matris eşitliğinden, robot uç-işlevcinin birinci mertebeden konumsal değişimi, araç çatısında

$$\alpha' = (\Gamma + \mu' R)\mathbf{O} + (\mu \cosh \varphi - \Delta \sinh \varphi)\mathbf{A} + (-\mu \sinh \varphi + \Delta \cosh \varphi)\mathbf{N} \quad (5.29)$$

biçiminde yazılabilir.

(5.28) denkleminin türevi alınır ve (3.42) deki türev formülleri kullanılırsa, araç merkez noktasının ikinci mertebeden konumsal değişimi, üreteç üçyüzlüsünde

$$\alpha'' = \left(\Gamma' + \mu'' R - \frac{\mu}{R} \right) q + \left(\frac{\Gamma}{R} + 2\mu' + \frac{\Delta \gamma}{R} \right) h + \left(\frac{\mu \gamma}{R} + \Delta' \right) a$$

olarak bulunur. (5.22) matris eşitliği kullanılarak, araç merkez noktasının ikinci mertebeden konumsal değişimi, araç çatısı elemanları cinsinden

$$\begin{aligned} \alpha'' = & \left(\Gamma' + \mu'' R - \frac{\mu}{R} \right) \mathbf{O} + \left[\left(\frac{\Gamma}{R} + 2\mu' + \frac{\Delta\gamma}{R} \right) \cosh \varphi - \left(\frac{\mu\gamma}{R} + \Delta' \right) \sinh \varphi \right] \mathbf{A} \\ & + \left[- \left(\frac{\Gamma}{R} + 2\mu' + \frac{\Delta\gamma}{R} \right) \sinh \varphi + \left(\frac{\mu\gamma}{R} + \Delta' \right) \cosh \varphi \right] \mathbf{N} \end{aligned} \quad (5.30)$$

biçiminde yazılabilir.

Araç çatısının birinci mertebeden açısal değişiminin belirlenmesi için (5.22) matris eşitliğinin her iki tarafının türevi alınarak

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} \mathbf{O} \\ \mathbf{A} \\ \mathbf{N} \end{bmatrix} = \varphi' \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sinh \varphi & \cosh \varphi \\ 0 & \cosh \varphi & \sinh \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{h} \\ \mathbf{a} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh \varphi & \sinh \varphi \\ 0 & \sinh \varphi & \cosh \varphi \end{bmatrix} \frac{d}{ds} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{h} \\ \mathbf{a} \end{bmatrix} \quad (5.31)$$

elde edilir. (3.42) matris eşitliği, (5.31) de yerine yazılırsa

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} \mathbf{O} \\ \mathbf{A} \\ \mathbf{N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{R} & 0 \\ -\frac{1}{R} \cosh \varphi & \left(\varphi' + \frac{\gamma}{R} \right) \sinh \varphi & \left(\varphi' + \frac{\gamma}{R} \right) \cosh \varphi \\ -\frac{1}{R} \sinh \varphi & \left(\varphi' + \frac{\gamma}{R} \right) \cosh \varphi & \left(\varphi' + \frac{\gamma}{R} \right) \sinh \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{h} \\ \mathbf{a} \end{bmatrix}$$

elde edilir. (5.22) matris eşitliği kullanılarak, araç çatısının birinci mertebeden açısal değişimi

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} \mathbf{O} \\ \mathbf{A} \\ \mathbf{N} \end{bmatrix} = \frac{1}{R} \begin{bmatrix} 0 & \cosh \varphi & -\sinh \varphi \\ -\cosh \varphi & 0 & \delta R \\ -\sinh \varphi & \delta R & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{O} \\ \mathbf{A} \\ \mathbf{N} \end{bmatrix} \quad (5.32)$$

biçiminde bulunur. Burada

$$\delta = \varphi' + \frac{\gamma}{R} \quad (5.33)$$

dir. (5.32) matris eşitliği

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} \mathbf{O} \\ \mathbf{A} \\ \mathbf{N} \end{bmatrix} = \mathbf{w}_o \times \begin{bmatrix} \mathbf{O} \\ \mathbf{A} \\ \mathbf{N} \end{bmatrix}$$

biçiminde de yazılabilir. Burada

$$\mathbf{w}_o = \delta \mathbf{O} + \frac{1}{R} (\sinh \varphi \mathbf{A} - \cosh \varphi \mathbf{N})$$

araç çatısının Darboux ani dönme vektörüdür.

(5.22) matris eşitliğinden, araç çatısının Darboux ani dönme vektörü, üreteç üçyüzlüsünde

$$\mathbf{w}_o = \delta \mathbf{q} - \frac{1}{R} \mathbf{a} \quad (5.34)$$

biçiminde yazılabilir.

(5.33) eşitliği, (5.34) denkleminde yerine yazılırsa

$$\mathbf{w}_o = \phi' \mathbf{q} + \frac{\gamma}{R} \mathbf{q} - \frac{1}{R} \mathbf{a}$$

elde edilir. Doğal üçyüzlünün $\mathbf{n}$ asal normal vektörü spacelike ise (3.55) matris eşitliğinin üçüncü satırı kullanılarak, $\mathbf{n}$ vektörü timelike ise (3.63) matris eşitliğinin üçüncü satırı kullanılarak

$$\mathbf{w}_o = \phi' \mathbf{q} + \kappa \mathbf{b}$$

bulunur. $\mathbf{n}$ vektörünün spacelike ve timelike olma durumları için sırasıyla, (3.56) ve (3.64) denklemleri yardımıyla, araç çatısının Darboux ani dönme vektörü ile üreteç üçyüzlüsünün Darboux ani dönme vektörü arasındaki ilişki

$$\mathbf{w}_o = \phi' \mathbf{q} + \mathbf{w}_q$$

şeklinde bulunur.

(5.34) denkleminin türevi alınarak

$$\mathbf{w}_o' = \delta' \mathbf{q} + \delta \mathbf{q}' - \frac{1}{R} \frac{\gamma}{R} \mathbf{h} \quad (5.35)$$

elde edilir. (3.42) ve (5.33), (5.35) denkleminde yerine yazılırsa, araç çatısının ikinci mertebeden açısal değişimi

$$\mathbf{w}_o' = \delta' \mathbf{q} + \frac{\phi'}{R} \mathbf{h}$$

biçiminde bulunur.

ii) $\mathbf{A}$ yaklaşım vektörü timelike olsun.

$\mathbf{A}$ yaklaşım vektörünün spacelike vektör olma durumunda yapılan işlemlere benzer işlemler yapılarak, robot uç-işlevcinin birinci mertebeden konumsal değişimi, araç çatısı elemanları cinsinden

$$\mathbf{a}' = (\Gamma + \mu' R) \mathbf{O} + (-\mu \sinh \phi + \Delta \cosh \phi) \mathbf{A} + (\mu \cosh \phi - \Delta \sinh \phi) \mathbf{N}$$

biçiminde bulunur.

Araç merkez noktasının ikinci mertebeden konumsal değişimi, araç çatısı elemanları cinsinden

$$\begin{aligned}\alpha'' = & \left(\Gamma' + \mu''R - \frac{\mu}{R} \right) \mathbf{O} + \left[- \left(\frac{\Gamma}{R} + 2\mu' + \frac{\Delta\gamma}{R} \right) \sinh \varphi + \left(\frac{\mu\gamma}{R} + \Delta' \right) \cosh \varphi \right] \mathbf{A} \\ & + \left[\left(\frac{\Gamma}{R} + 2\mu' + \frac{\Delta\gamma}{R} \right) \cosh \varphi - \left(\frac{\mu\gamma}{R} + \Delta' \right) \sinh \varphi \right] \mathbf{N}\end{aligned}$$

dir.

Araç çatısının birinci mertebeden açısal değişimi

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} \mathbf{O} \\ \mathbf{A} \\ \mathbf{N} \end{bmatrix} = \frac{1}{R} \begin{bmatrix} 0 & -\sinh \varphi & \cosh \varphi \\ -\sinh \varphi & 0 & \delta R \\ -\cosh \varphi & \delta R & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{O} \\ \mathbf{A} \\ \mathbf{N} \end{bmatrix}$$

biçiminde bulunur. Burada

$$\delta = \varphi' + \frac{\gamma}{R}$$

dir. Araç çatısının Darboux ani dönme vektörü

$$\mathbf{w}_o = -\delta \mathbf{O} + \frac{1}{R} (\cosh \varphi \mathbf{A} - \sinh \varphi \mathbf{N})$$

dir. (5.25) matris eşitliği yardımıyla, araç çatısının Darboux ani dönme vektörü, üreteç üçyüzlüsünde

$$\mathbf{w}_o = -\delta \mathbf{q} + \frac{1}{R} \mathbf{a}$$

biçiminde yazılabilir. Doğal üçyüzlünün $\mathbf{n}$ asal normal vektörünün hem spacelike hem de timelike vektör olma durumları için, araç çatısının Darboux ani dönme vektörü ile üreteç üçyüzlüsünün Darboux ani dönme vektörü arasındaki ilişki

$$\mathbf{w}_o = -\varphi' \mathbf{q} - \mathbf{w}_q$$

şeklinde bulunur.

Araç çatısının ikinci mertebeden açısal değişimi ise

$$\mathbf{w}_o' = -\delta' \mathbf{q} - \frac{\varphi'}{R} \mathbf{h}$$

olarak elde edilir.

Robot uç-işlevcinin araç merkez noktasının lineer hızı ve ivmesi sırasıyla

$$\|\alpha'\| = \sqrt{(\Gamma + \mu'R)^2 + \mu^2 - \Delta^2}$$

ve

$$\|\alpha''\| = \sqrt{\left(\Gamma' + \mu''R + \frac{\mu}{R} \right)^2 + \left(\frac{\Gamma}{R} + 2\mu' + \frac{\Delta\gamma}{R} \right)^2 - \left(\frac{\mu\gamma}{R} + \Delta' \right)^2}$$

biçiminde elde edilir. Robot uç-işlevcinin açısal hızı ve ivmesi ise sırasıyla

$$\|w_o\| = \sqrt{\left|\delta^2 - \frac{1}{R^2}\right|}$$

ve

$$\|w_o'\| = \sqrt{\delta'^2 + \left(\frac{\phi'}{R}\right)^2}$$

biçiminde bulunur. Robot uç-işlevcinin araç merkez noktasının lineer hızı ve ivmesi ile robot uç-işlevcinin açısal hızı ve ivmesi, A yaklaşım vektörünün spacelike veya timelike olma durumlarına göre değişmez.

5.2.2. Timelike Doğuranlı Timelike Regle Yüzeylerin Eğrilik Teorisi Yardımıyla Robot Uç-işlevci Hareketinin İncelenmesi

Timelike doğuranlı timelike regle yüzeyin dayanak eğrisi üzerindeki yüzey çatısını oluşturan vektörler, O yönlenme vektörü, S_n yüzey normal vektörü ve S_b binormal vektördür. Timelike doğuranlı timelike yüzeylerde, S_n yüzey normal vektörü spacelike ve O yönlenme vektörü timelike olduğundan, S_b binormal vektörü spacelike vektördür.

Yönlenme vektörü üreteç vektörüne eşittir, yani

$$O = q \quad (5.36)$$

şeklindedir. Yüzey normal vektörü

$$S_n = \frac{X_v \times X_s}{\|X_v \times X_s\|} \quad (5.37)$$

biçiminde verilir. X regle yüzeyinin s ve v parametrelerine göre türevleri alınıp bu türevler (5.37) denkleminde yerine yazılır ve (3.68) eşitlikleri kullanılırsa

$$S_n = \frac{\Delta h - \mu a}{\sqrt{\Delta^2 + \mu^2}} \quad (5.38)$$

biçiminde bulunur. Burada μ ve Δ sırasıyla (3.66) ve (3.74) denklemleri ile tanımlanır.

Yüzey binormal vektörü

$$S_b = -O \times S_n \quad (5.39)$$

dir. [11] de

$$S_b = O \times S_n$$

biçiminde verilen yüzey binormal vektörünün, (5.39) denkleminde ifade edildiği gibi olması gerekmektedir. (5.36) ve (5.38) denklemleri, (5.39) denkleminde yerine yazılır ve (3.68) denklemi kullanılırsa

$$S_b = \frac{\mu h + \Delta a}{\sqrt{\Delta^2 + \mu^2}}$$

biçiminde bulunur [11].

Üreteç vektörü, üreteç üçyüzlüsü ve yüzey çatısı için ortak vektördür. Yüzey çatısının S_n ve S_b vektörleri ile üreteç üçyüzlüsünün h ve a vektörleri aynı spacelike düzlemindedir. Yüzey çatısının S_n spacelike normal vektörü ile üreteç üçyüzlüsünün h spacelike merkez normal vektörü arasındaki spacelike açı σ olmak üzere bu vektörler arasındaki ilişki

$$S_n = \cos \sigma h + \sin \sigma a$$

$$S_b = -\sin \sigma h + \cos \sigma a$$

biçiminde veya matris formda

$$\begin{bmatrix} S_n \\ S_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \sigma & \sin \sigma \\ -\sin \sigma & \cos \sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ a \end{bmatrix}$$

biçiminde yazılabilir. Böylece yüzey çatısının üreteç üçyüzlüsüne göre yönlenmesi

$$\begin{bmatrix} O \\ S_n \\ S_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \sigma & \sin \sigma \\ 0 & -\sin \sigma & \cos \sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ h \\ a \end{bmatrix} \quad (5.40)$$

biçiminde bulunur [11].

Yüzey çatısı ve araç çatısının O yönlenme vektörü ortaktır ve bu vektör timelike vektördür. Araç çatısının A yaklaşım vektörü ve N normal vektörü spacelike vektörlerdir.

Timelike doğuranlı timelike regle yüzeyin S_n spacelike yüzey normal vektörü ile araç çatısının A spacelike yaklaşım vektörü arasındaki açı η spacelike spin açısı olmak üzere, yüzey çatısı ile araç çatısı arasındaki ilişki

$$\begin{bmatrix} O \\ A \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \eta & \sin \eta \\ 0 & -\sin \eta & \cos \eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O \\ S_n \\ S_b \end{bmatrix} \quad (5.41)$$

biçimindedir [11]. (5.40) matris eşitliği, (5.41) de yerine yazılarak, araç çatısı ile üreteç üçyüzlüsü arasındaki ilişki

$$\begin{bmatrix} \mathbf{O} \\ \mathbf{A} \\ \mathbf{N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{h} \\ \mathbf{a} \end{bmatrix} \quad (5.42)$$

biçiminde bulunur [11]. Burada

$$\varphi = \eta + \sigma \quad (5.43)$$

dır.

5.2.2.1. Robot Uç-işlevci Hareketinin Diferansiyel Özellikleri

Timelike doğuranlı timelike regle yüzeyin α dayanak eğrisi robot uç-işlevcinin yörüngesi olduğundan, robot uç-işlevcinin birinci mertebeden konumsal değişimi, (3.65) denkleminin türevi alınarak

$$\alpha' = c' + \mu' R + \mu h \quad (5.44)$$

biçiminde yazılabilir. (3.72) denklemi, (5.44) denkleminde yerine yazılırsa, robot uç-işlevcinin birinci mertebeden konumsal değişimi, üreteç üçyüzlüsü elemanları cinsinden

$$\alpha' = (\Gamma + \mu' R)q + \mu h + \Delta a \quad (5.45)$$

biçiminde elde edilir [11]. (5.42) matris eşitliği yardımıyla, robot uç-işlevcinin birinci mertebeden konumsal değişimi, araç çatısında

$$\alpha' = (\Gamma + \mu' R)\mathbf{O} + (\mu \cos \varphi + \Delta \sin \varphi)\mathbf{A} + (-\mu \sin \varphi + \Delta \cos \varphi)\mathbf{N}$$

biçiminde yazılabilir [11].

(5.45) denkleminin türevi alınırsa ve (3.69) daki türev formülleri kullanılırsa araç merkez noktasının ikinci mertebeden konumsal değişimi, üreteç üçyüzlüsünde

$$\alpha'' = \left(\Gamma' + \mu'' R + \frac{\mu}{R} \right) q + \left(\frac{\Gamma}{R} + 2\mu' - \frac{\Delta \gamma}{R} \right) h + \left(\frac{\mu \gamma}{R} + \Delta' \right) a$$

olarak bulunur [11]. (5.42) matris eşitliği kullanılarak, araç merkez noktasının ikinci mertebeden konumsal değişimi, araç çatısı elemanları cinsinden

$$\begin{aligned} \alpha'' = & \left(\Gamma' + \mu'' R + \frac{\mu}{R} \right) \mathbf{O} + \left[\left(\frac{\Gamma}{R} + 2\mu' - \frac{\Delta \gamma}{R} \right) \cos \varphi + \left(\frac{\mu \gamma}{R} + \Delta' \right) \sin \varphi \right] \mathbf{A} \\ & + \left[- \left(\frac{\Gamma}{R} + 2\mu' - \frac{\Delta \gamma}{R} \right) \sin \varphi + \left(\frac{\mu \gamma}{R} + \Delta' \right) \cos \varphi \right] \mathbf{N} \end{aligned}$$

biçiminde yazılabilir [11].

Araç çatısının birinci mertebeden açısal değişiminin belirlenmesi için (5.42) matris eşitliğinin türevi alınarak

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} \mathbf{O} \\ \mathbf{A} \\ \mathbf{N} \end{bmatrix} = \varphi' \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \\ 0 & -\cos \varphi & -\sin \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{h} \\ \mathbf{a} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \frac{d}{ds} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{h} \\ \mathbf{a} \end{bmatrix} \quad (5.46)$$

elde edilir [11]. (3.69) matris eşitliğinin, (5.46) da yerine yazılırsa

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} \mathbf{O} \\ \mathbf{A} \\ \mathbf{N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{R} & 0 \\ \frac{1}{R} \cos \varphi & -\left(\varphi' + \frac{\gamma}{R}\right) \sin \varphi & \left(\varphi' + \frac{\gamma}{R}\right) \cos \varphi \\ -\frac{1}{R} \sin \varphi & -\left(\varphi' + \frac{\gamma}{R}\right) \cos \varphi & -\left(\varphi' + \frac{\gamma}{R}\right) \sin \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{h} \\ \mathbf{a} \end{bmatrix}$$

elde edilir [11]. (5.42) matris eşitliği kullanılarak, araç çatısının birinci mertebeden açısal değişimi

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} \mathbf{O} \\ \mathbf{A} \\ \mathbf{N} \end{bmatrix} = \frac{1}{R} \begin{bmatrix} 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \cos \varphi & 0 & \delta R \\ -\sin \varphi & -\delta R & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{O} \\ \mathbf{A} \\ \mathbf{N} \end{bmatrix} \quad (5.47)$$

biçiminde bulunur [11]. Burada

$$\delta = \varphi' + \frac{\gamma}{R} \quad (5.48)$$

dir. (5.47) matris eşitliği

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} \mathbf{O} \\ \mathbf{A} \\ \mathbf{N} \end{bmatrix} = \mathbf{w}_o \times \begin{bmatrix} \mathbf{O} \\ \mathbf{A} \\ \mathbf{N} \end{bmatrix}$$

biçiminde de yazılabilir. Burada

$$\mathbf{w}_o = -\delta \mathbf{O} + \frac{1}{R} (-\sin \varphi \mathbf{A} - \cos \varphi \mathbf{N}) \quad (5.49)$$

araç çatısının Darboux ani dönme vektörüdür [11]. (5.42) matris eşitliği yardımıyla, araç çatısının Darboux ani dönme vektörü, üreteç üçyüzlüsünde

$$\mathbf{w}_o = -\delta \mathbf{q} - \frac{1}{R} \mathbf{a}$$

biçiminde yazılabilir. Doğal üçyüzlünün $\mathbf{n}$ asal normal vektörünün hem spacelike hem de timelike vektör olma durumları için, araç çatısının Darboux ani dönme vektörü ile üreteç üçyüzlüsünün Darboux ani dönme vektörü arasındaki ilişki

$$\mathbf{w}_o = -\varphi' \mathbf{q} + \mathbf{w}_q$$

şeklinde bulunur.

(5.49) denkleminin türevi alınıp (5.36) ve (5.42) denklemleri burada yerine yazılırsa

$$\mathbf{w}_o' = -\delta' \mathbf{q} - \delta \mathbf{q}' - \frac{1}{R} \frac{\gamma}{R} \mathbf{h} \quad (5.50)$$

elde edilir. (3.69) matris eşitliğinin birinci satırı ve (5.48) eşitliği, (5.50) denkleminde yerine yazılarak, araç çatısının ikinci mertebeden açısal değişimi

$$\mathbf{w}_o' = -\delta' \mathbf{q} - \frac{\phi'}{R} \mathbf{h}$$

biçiminde bulunur [11].

Robot uç-işlevcinin araç merkez noktasının lineer hızı ve ivmesi sırasıyla

$$\|\alpha'\| = \sqrt{-(\Gamma + \mu' R)^2 + \mu^2 + \Delta^2}$$

ve

$$\|\alpha''\| = \sqrt{-\left(\Gamma' + \mu'' R + \frac{\mu}{R}\right)^2 + \left(\frac{\Gamma}{R} + 2\mu' + \frac{\Delta\gamma}{R}\right)^2 + \left(\frac{\mu\gamma}{R} + \Delta'\right)^2}$$

biçiminde elde edilir. Robot uç-işlevcinin açısal hızı ve ivmesi ise sırasıyla

$$\|\mathbf{w}_o\| = \sqrt{-\delta^2 + \frac{1}{R^2}}$$

ve

$$\|\mathbf{w}_o'\| = \sqrt{-\delta'^2 + \left(\frac{\phi'}{R}\right)^2}$$

biçiminde bulunur.

Örnek 5.1. Robot uç-işlevci, Şekil 5.4 de gösterildiği gibi, $\mathbf{X}(s, v) = (v \cos s, v \sin s, cs)$ helikoid yüzeyi üzerinde η açısı ile hareket etsin. Bu helikoid yüzeyinin regle formu

$$\mathbf{X}(s, v) = (0, 0, cs) + v(\cos s, \sin s, 0)$$

biçimindedir. Helikoidin dayanak eğrisi ve doğurani, sırasıyla,

$$\alpha(s) = (0, 0, cs)$$

ve

$$\mathbf{R}(s) = (\cos s, \sin s, 0)$$

dır. Helikoidin boğaz çizgisi

$$\mathbf{c} = \alpha - \mu \mathbf{R}$$

denklemleri yardımıyla bulunabilir. Burada

$$\mu = \langle \alpha', R' \rangle = 0$$

olduğundan, helikoidin boğaz çizgisinin dayanak eğrisine eşit olduğu görülür, yani

$$c = \alpha = (0, 0, cs)$$

dir. Boğaz çizgisi üzerinde tanımlanan üreteç üçyüzlüsünün vektörleri

$$q = (\cos s, \sin s, 0),$$

$$h = (-\sin s, \cos s, 0),$$

$$a = (0, 0, 1)$$

dir. $\langle q, q \rangle = 1$ olduğundan, üreteç vektörü q , spacelike, $\langle h, h \rangle = 1$ olduğundan, merkez normal vektör h , spacelike ve $\langle a, a \rangle = -1$ olduğundan, merkez teğet vektör a , timelike vektördür.

Üreteç üçyüzlüsünü oluşturan vektörlerin türevleri

$$q' = (-\sin s, \cos s, 0),$$

$$h' = (-\cos s, -\sin s, 0),$$

$$a' = (0, 0, 0)$$

dir. $a' = \gamma h$ olduğundan helikoidin jeodezik eğriliği

$$\gamma = 0$$

dir. Üreteç üçyüzlüsünün Darboux ani dönme vektörü

$$w_q = \frac{1}{R}(\gamma q - a) = (0, 0, -1)$$

dir, burada R , doğuranın boyu olup 1 e eşittir. Helikoidin boğaz çizgisinin teğeti

$$c' = \Gamma q + \Delta a = (0, 0, c)$$

olup, regle yüzeyin eğrilik fonksiyonları olan

$$\Gamma = 0$$

ve

$$\Delta = c$$

dir.

Helikoidin merkez normal yüzeyi

$$X_h(s, v) = c(s) + v h(s) = (0, 0, cs) + v(-\sin s, \cos s, 0)$$

denklemleri ile verilebilir. Merkez normal yüzeyin boğaz çizgisi

$$c_h = c - \mu_h h$$

denklemleri yardımıyla bulunabilir. Burada

$$\mu_h = \frac{\langle \mathbf{c}', \mathbf{h}' \rangle}{\langle \mathbf{h}', \mathbf{h}' \rangle} = 0$$

olduğundan, merkez normal yüzeyin boğaz çizgisi ile helikoidin boğaz çizgisi aynıdır, yani

$$\mathbf{c}_h = \mathbf{c} = (0, 0, cs)$$

dir. Merkez normal yüzeyin doğal üçyüzlüsünü oluşturan vektörler

$$\mathbf{h} = (-\sin s, \cos s, 0),$$

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{h}'}{\kappa} = (-\cos s, -\sin s, 0),$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{h} \times \mathbf{n} = (0, 0, 1)$$

dir, burada κ , merkez normal yüzeyin eğriliği olup 1 e eşittir. $\langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle = 1$ olduğundan, asal normal vektör $\mathbf{n}$, spacelike ve $\langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle = -1$ olduğundan, binormal vektör $\mathbf{b}$, timelike vektördür.

Doğal üçyüzlüyü oluşturan vektörlerin türevleri

$$\mathbf{h}' = (-\cos s, -\sin s, 0),$$

$$\mathbf{n}' = (\sin s, -\cos s, 0),$$

$$\mathbf{b}' = (0, 0, 0)$$

dir. $\mathbf{b}' = \tau \mathbf{n}$ olduğundan, merkez normal yüzeyin burulması

$$\tau = 0$$

dir. Merkez normal yüzeyin Darboux ani dönme vektörü

$$\mathbf{w}_h = \tau \mathbf{h} - \kappa \mathbf{b} = (0, 0, -1)$$

dir. Merkez normal yüzeyin boğaz çizgisinin teğeti

$$\mathbf{c}'_h = \Gamma_h \mathbf{q} + \Delta_h \mathbf{a} = (0, 0, c)$$

olup, merkez normal yüzeyin eğrilik fonksiyonları olan

$$\Gamma_h = 0$$

ve

$$\Delta_h = c$$

dir.

Üreteç üçyüzlüsü ile doğal üçyüzlü ortak $\mathbf{h}$ spacelike vektörüne sahiptirler. Üreteç üçyüzlüsünün vektörleri ile doğal üçyüzlünün diğer vektörleri arasında

$$\mathbf{q} = -\mathbf{n}, \mathbf{a} = \mathbf{b}$$

ilişkileri mevcuttur.

Boğaz çizgisi, aynı zamanda dayanak eğrisi olduğundan, yüzeyin dayanak eğrisi üzerindeki yüzey normali ile boğaz çizgisi üzerindeki merkez normal vektörü arasındaki açı olan

$$\sigma = 0$$

dır.

Uç-işlevcinin A yaklaşım vektörü ile yüzey çatısının S_n yüzey normali arasındaki merkez açı, η spin açısı olmak üzere, (5.23) denkleminde

$$\varphi = \eta$$

olduğu görülür. Yukarıdaki eşitliğin her iki tarafının türevi alınır

$$\varphi' = \eta'$$

elde edilir. Böylece (5.33) denkleminde

$$\delta = \varphi' = \eta'$$

bulunur.

Araç çatısının O yönlenme vektörü, helikoidin üreteç üçyüzlüsünün q üreteç vektörüne eşittir. Yaklaşım vektörü ve normal vektör sırasıyla

$$A = (-\sin s, \cos s, 0)$$

ve

$$N = (0, 0, 1)$$

olarak bulunur.

(5.29) ve (5.30) denklemlerinin yardımıyla, araç merkez noktasının birinci ve ikinci mertebeden konumsal değişimi, araç çatısında sırasıyla

$$\alpha' = cN = (0, 0, c)$$

ve

$$\alpha'' = (0, 0, 0)$$

biçiminde bulunur.

Araç çatısının Darboux ani dönme vektörü

$$w_o = \eta'O - N$$

dir. Araç çatısının Darboux ani dönme vektörü, üreteç üçyüzlüsünde

$$w_o = \eta'q - a$$

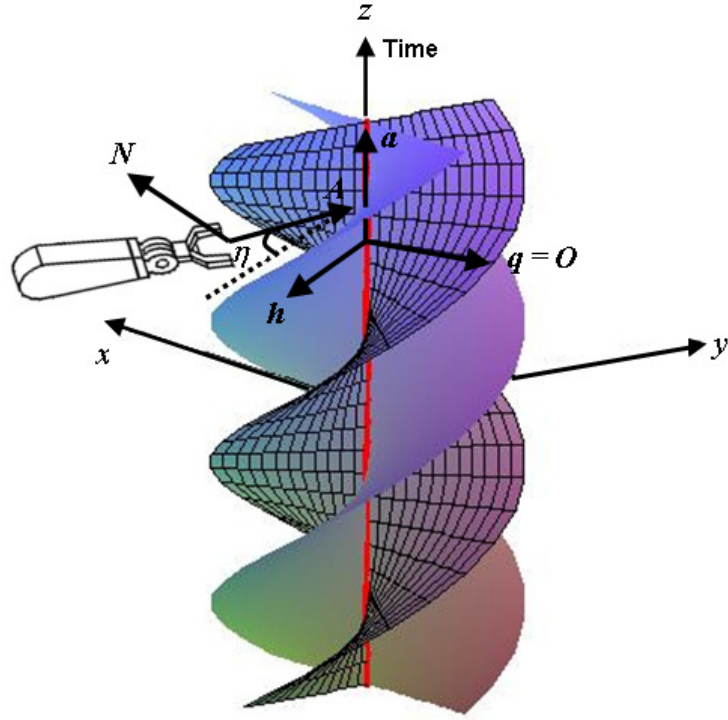
biçiminde ifade edilebilir. Araç çatısının Darboux ani dönme vektörünün türevi, üreteç üçyüzlüsünde

$$w_o' = \eta''q + \eta'h$$

olarak bulunur. Araç çatısının Darboux ani dönme vektörünün türevinin araç çatısındaki ifadesi ise

$$w_o' = \eta''O + \eta'A$$

biçiminde yazılabilir.



Şekil 5.4. $X(s, v) = (v \cos s, v \sin s, cs)$ helikoid yüzeyi ve merkez normal yüzeyi

6. ID^3 DUAL VE ID_1^3 DUAL LORENTZ UZAYLARININ TEMEL KAVRAMLARI

6.1. ID^3 Dual Uzayının Temel Kavramları

W. Clifford tarafından tanıtılan dual sayılar, bileşenleri reel sayılar olan (a, a^*) sıralı ikilileri olarak tanımlanabilirler [33]. a ve a^* reel sayılarına, sırasıyla, dual sayının reel ve dual kısmı denir [33]. a ve a^* reel sayılarının her ikisi de sıfırdan farklı ise dual sayıya “tam dual sayı”, sadece reel kısım sıfır ise dual sayıya “sıfır dual sayı” denir. Sadece dual kısım sıfır ise dual sayıya bir reel sayı olarak bakılabilir [45].

Dual sayılar kümesi ID ile gösterilir. Buna göre

$$ID = \{ \bar{a} = (a, a^*) : a, a^* \in \mathbb{R}, \}$$

dir. ID üzerinde iki iç işlem ve eşitlik aşağıdaki gibi tanımlanır [33]:

- i) Toplama : $(a, a^*) + (b, b^*) = (a + b, a^* + b^*)$
- ii) Çarpma : $(a, a^*) \cdot (b, b^*) = (ab, ab^* + a^*b)$
- iii) Eşitlik : $(a, a^*) = (b, b^*)$ olması için gerek ve yeter şart $a = b$, $a^* = b^*$ olmasıdır.

Tanım 6.1. $\varepsilon = (0, 1)$ dual sayısına dual birim denir ve ε , aşağıdaki kuralları sağlar:

$$\varepsilon \neq 0, \quad 0\varepsilon = \varepsilon 0 = 0, \quad 1\varepsilon = \varepsilon 1 = \varepsilon, \quad \varepsilon^2 = 0 \quad [44].$$

Teorem 6.1. Her $\bar{a} = (a, a^*) \in ID$ dual sayısı, $\bar{a} = a + \varepsilon a^*$ biçiminde yazılabilir [15].

Tanım 6.2. Bir $\bar{a} = a + \varepsilon a^*$ dual sayısının, $b \neq 0$ olan bir $\bar{b} = b + \varepsilon b^*$ dual sayısına bölümü

$$\frac{\bar{a}}{\bar{b}} = \frac{a}{b} + \varepsilon \frac{a^*b - ab^*}{b^2}$$

biçiminde tanımlanır [8].

Tanım 6.3. $|a| \neq 0$ olmak üzere bir $\bar{a} = a + \varepsilon a^*$ dual sayısının mutlak değeri

$$|\bar{a}| = |a| + \varepsilon \frac{a}{|a|} a^*$$

biçiminde tanımlanır [44].

Teorem 6.2. ID kümesi, yukarıda tanımlanan toplama ve çarpma işlemlerine göre bir değişmeli halkadır [8].

Sırf dual sayılar ile bölme işlemi tanımlı olmadığından ID , verilen işlemlere göre bir cisim değildir.

Teorem 6.3. Bir dual sayıya bağlı bir $f(\bar{a})$ fonksiyonunun ε değişkenine göre Maclaurin serisine açılımı, $n > 1$ tamsayısı için $\varepsilon^n = 0$ olduğundan,

$$f(\bar{a}) = f(a + \varepsilon a^*) = f(a) + \varepsilon a^* f'(a)$$

dır [9]. Burada $f'(a)$, $f(a)$ nın a ya göre türevidir.

Tanım 6.4. Dual sayılara benzer şekilde bir dual vektör de (a, a^*) sıralı ikilisi ile tanımlanabilir [45]. Burada $a, a^* \in IR^3$ dür. Dual vektörlerin kümesi ID^3 ile gösterilir ve

$$ID^3 = \{ \tilde{a} = (\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3) : \bar{a}_i \in ID, i = 1, 2, 3 \}$$

biçimindedir.

Tanım 6.5. $\tilde{a} = (\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3), \tilde{b} = (\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3) \in ID^3$ ve $\bar{\lambda} \in ID$ olsun. İki dual vektörün eşitliği, iki dual vektörün toplanması ve bir dual vektör ile bir skalerin çarpımı aşağıdaki gibi tanımlanır [15].

- i) Eşitlik : $\tilde{a} = \tilde{b} \Leftrightarrow \bar{a}_i = \bar{b}_i, (i = 1, 2, 3),$
- ii) Toplama : $\tilde{a} + \tilde{b} = (\bar{a}_1 + \bar{b}_1, \bar{a}_2 + \bar{b}_2, \bar{a}_3 + \bar{b}_3),$
- iii) Skalerle çarpma : $\bar{\lambda} \tilde{a} = (\bar{\lambda} \bar{a}_1, \bar{\lambda} \bar{a}_2, \bar{\lambda} \bar{a}_3).$

Teorem 6.4. ID^3 kümesi, yukarıdaki toplama ve skalerle çarpma işlemleri ile ID halkası üzerinde bir modül yapısı oluşturur ve buna kısaca ID – modül denir [15].

Teorem 6.5. $a, a^* \in IR^3$ ve $\varepsilon^2 = 0$ olmak üzere bir dual vektör $\tilde{a} = a + \varepsilon a^*$ biçiminde ifade edilebilir [33].

Tanım 6.6. ID^3 deki herhangi iki $\tilde{a} = a + \varepsilon a^*$ ve $\tilde{b} = b + \varepsilon b^*$ dual vektörün skaler ve vektörel çarpımları sırasıyla

$$\langle \tilde{a}, \tilde{b} \rangle_E = \langle a, b \rangle_E + \varepsilon \left(\langle a, b^* \rangle_E + \langle a^*, b \rangle_E \right)$$

ve

$$\tilde{a} \wedge \tilde{b} = a \wedge b + \varepsilon (a \wedge b^* + a^* \wedge b)$$

biçiminde tanımlanır [8].

Tanım 6.7. $\|a\| \neq 0$ olmak üzere bir $\tilde{a}$ dual vektörünün normu

$$\|\tilde{a}\| = \|a\| + \varepsilon \frac{\langle a, a^* \rangle_E}{\|a\|}$$

ile verilir [15]. Normu 1 olan dual vektörlere, birim dual vektörler denir.

Tanım 6.8. Birim dual vektörlerin kümesi

$$\tilde{S}^2 = \left\{ \tilde{a} = (\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3) \in ID^3 : \langle \tilde{a}, \tilde{a} \rangle_E = (1, 0) \right\}$$

ile gösterilir ve buna birim dual küre denir [6,15].

Teorem 6.6. $\tilde{S}^2$ dual birim kürenin noktaları, IR^3 deki yönlü doğrulara birebir karşılık gelir [14]. Bu karşılık getirmeye “E.Study dönüşümü” [35] ya da “transfer prensibi” [20] denir.

Tanım 6.9. Study tarafından tanıtılan, iki birim dual vektör arasındaki dual açı, $\bar{\theta} = \theta + \varepsilon \theta^*$ biçiminde tanımlanır. Burada θ ve θ^* , sırasıyla, birim dual vektörlere karşılık gelen yönlü doğrular arasındaki açı ve en kısa uzaklıktır [33].

Tanım 6.10. ID^3 dual uzayında $\tilde{\alpha}(t) = \alpha(t) + \varepsilon \alpha^*(t)$ ifadesine bir dual uzay eğrisi denir. Burada $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$ ve $\alpha^*(t) = (\alpha_1^*(t), \alpha_2^*(t), \alpha_3^*(t))$, IR^3 de reel değerli eğrilerdir. Eğer $\alpha_i(t)$ and $\alpha_i^*(t)$, $(1 \leq i \leq 3)$ fonksiyonları diferansiyellenebilir ise

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha} : I \subset IR &\rightarrow ID^3 \\ t &\rightarrow \tilde{\alpha}(t) = (\alpha_1(t) + \varepsilon \alpha_1^*(t), \alpha_2(t) + \varepsilon \alpha_2^*(t), \alpha_3(t) + \varepsilon \alpha_3^*(t)) \\ &= \alpha(t) + \varepsilon \alpha^*(t) \end{aligned}$$

dual uzay eğrisi de diferansiyellenebilir. $\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}(t)$ dual eğrisinin $\alpha(t)$ reel kısmına gösterge eğrisi denir [1].

6.2. ID_1^3 Dual Lorentz Uzayının Temel Kavramları

ID^3 dual uzayı üzerinde iç çarpım olarak, Lorentziyen iç çarpım alınır, ID^3 dual uzayına dual Lorentziyen uzay denir. ID_1^3 ile gösterilen bu uzay

$$ID_1^3 = \{ \tilde{a} = a + \varepsilon a^* : a, a^* \in IR_1^3 \}$$

biçiminde gösterilebilir [18,42].

Tanım 6.11. ID^3 deki herhangi iki $\tilde{a} = a + \varepsilon a^*$ ve $\tilde{b} = b + \varepsilon b^*$ dual vektörün dual Lorentziyen iç (skaler) çarpımı ve dual Lorentziyen vektörel çarpımı, sırasıyla,

$$\langle \tilde{a}, \tilde{b} \rangle = \langle a, b \rangle + \varepsilon (\langle a, b^* \rangle + \langle a^*, b \rangle)$$

ve

$$\tilde{a} \times \tilde{b} = a \times b + \varepsilon (a \times b^* + a^* \times b)$$

biçiminde tanımlanır. Burada $\langle , \rangle$, Lorentz iç çarpımı ve $\times$, Lorentziyen vektörel çarpımı gösterir [18,42].

Tanım 6.12. $\tilde{a} = a + \varepsilon a^* \in ID_1^3$ olsun.

- i) $a \in IR_1^3$ bir timelike vektör ise, $\tilde{a} = a + \varepsilon a^* \in ID_1^3$ vektörüne dual timelike vektör,
- ii) $a \in IR_1^3$ bir spacelike vektör ise, $\tilde{a} = a + \varepsilon a^* \in ID_1^3$ vektörüne dual spacelike vektör,
- iii) $a \in IR_1^3$ bir null vektör ise, $\tilde{a} = a + \varepsilon a^* \in ID_1^3$ vektörüne dual null vektör

denir [42].

Tanım 6.13. $\|a\| \neq 0$ olmak üzere bir $\tilde{a} = a + \varepsilon a^* \in ID_1^3$ dual vektörünün normu

$$\|\tilde{a}\| = \|a\| + \varepsilon \frac{\langle a, a^* \rangle}{\|a\|}$$

biçiminde verilir [42].

Tanım 6.14. $\tilde{a} = a + \varepsilon a^* \in ID_1^3$ olmak üzere,

$$\tilde{S}_1^2 = \{ \tilde{a} = a + \varepsilon a^* : \|\tilde{a}\| = 1 ; a, a^* \in IR_1^3 \text{ ve } a \text{ spacelike vektör} \}$$

kümesine dual Lorentziyen birim küre ve

$$\tilde{H}_0^2 = \{ \tilde{a} = a + \varepsilon a^* : \|\tilde{a}\| = 1 ; a, a^* \in IR_1^3 \text{ ve } a \text{ timelike vektör} \}$$

kümesine ise dual hiperbolik birim küre denir [47].

Teorem 6.7. ID_1^3 uzayındaki $\tilde{H}_0^2$ dual hiperbolik birim kürenin ve $\tilde{S}_1^2$ dual Lorentziyen birim kürenin noktaları, sırasıyla, IR_1^3 Lorentziyen uzayındaki yönlü timelike ve spacelike doğrulara birebir karşılık gelirler [42].

Tanım 6.15. i) Dual hiperbolik açısı: $\tilde{a}$ ve $\tilde{b}$, ID_1^3 de iki birim dual timelike vektör olsun. $\langle \tilde{a}, \tilde{b} \rangle = -\cosh \bar{\theta}$ olacak şekilde $\bar{\theta} = \theta + \varepsilon \theta^*$ dual sayısına, $\tilde{a}$ ve $\tilde{b}$ birim dual vektörleri arasındaki dual hiperbolik açı denir. Burada θ ve θ^* , sırasıyla, birim dual vektörlere karşılık gelen yönlü doğrular arasındaki hiperbolik açı ve en kısa uzaklıktır [41].

ii) Dual merkez açısı: $\tilde{a}$ ve $\tilde{b}$, ID_1^3 de iki birim dual spacelike vektör ve bu vektörlerin gerdiği dual düzlem timelike olsun. $|\langle \tilde{a}, \tilde{b} \rangle| = \cosh \bar{\theta}$ olacak şekilde $\bar{\theta} = \theta + \varepsilon \theta^*$ dual sayısına, $\tilde{a}$ ve $\tilde{b}$ birim dual vektörleri arasındaki dual merkez açı denir. Burada θ ve θ^* , sırasıyla, birim dual vektörlere karşılık gelen yönlü doğrular arasındaki merkez açı ve en kısa uzaklıktır [41].

iii) Dual spacelike açısı: $\tilde{a}$ ve $\tilde{b}$, ID_1^3 de iki birim dual spacelike vektör ve bu vektörlerin gerdiği dual düzlem spacelike olsun. $\langle \tilde{a}, \tilde{b} \rangle = \cos \bar{\theta}$ olacak şekilde $\bar{\theta} = \theta + \varepsilon \theta^*$ dual sayısına, $\tilde{a}$ ve $\tilde{b}$ birim dual vektörleri arasındaki dual spacelike açı denir. Burada θ ve θ^* , sırasıyla, birim dual vektörlere karşılık gelen yönlü doğrular arasındaki spacelike açı ve en kısa uzaklıktır [41].

iv) Dual Lorentziyen timelike açısı: $\tilde{a}$, ID_1^3 de bir birim dual spacelike vektör ve $\tilde{b}$, ID_1^3 de bir birim dual timelike vektör olsun. $|\langle \tilde{a}, \tilde{b} \rangle| = \sinh \bar{\theta}$ olacak şekilde $\bar{\theta} = \theta + \varepsilon \theta^*$ dual sayısına, $\tilde{a}$ ve $\tilde{b}$ birim dual vektörleri arasındaki dual Lorentziyen timelike açı denir. Burada θ ve θ^* ,

sırasıyla, birim dual vektörlere karşılık gelen yönlü doğrular arasındaki Lorentziyen timelike açı ve en kısa uzaklıktır [41].

7. ID_1^3 DUAL LORENTZ UZAYINDA KÜRESEL EĞRİLER YARDIMIYLA ROBOT UÇ-İŞLEVCI HAREKETİNİN İNCELENMESİ

Robot uç-işlevci bir yörüngede hareket ederken, buna sıkı bir şekilde bağlı olan, araç merkez noktasından geçen ve yön vektörü, O yönlenme vektörü olan bir doğru, bir regle yüzey çizer. Bu regle yüzeye, bir dual Lorentziyen küresel eğri karşılık gelir. Bu bölümde, dual Lorentziyen uzaydaki dual küresel eğrilerin eğrilik teorisi yardımıyla, robot uç-işlevci hareketi incelenecektir. Dual küresel eğrilerin eğrilik teorisi, dual hiperbolik küresel eğriler ve dual Lorentziyen küresel eğriler olmak üzere iki bölümde ele alınacaktır.

7.1. Dual Hiperbolik Küresel Eğriler Yardımıyla Robot Uç-işlevci Hareketinin İncelenmesi

Robot uç-işlevcinin, üzerinde hareket ettiği timelike doğuranlı timelike regle yüzey

$$X(s, v) = c(s) + ve(s)$$

denklemleri ile verilsin. Burada c , regle yüzeyin boğaz çizgisi ve e , ana doğruların doğrultman vektörüdür. Teorem 6.7. den, bu regle yüzeye, dual hiperbolik küre üzerinde bir dual eğri karşılık geldiği söylenebilir. Bu dual eğri

$$\tilde{e}(s) = e(s) + \varepsilon e^*(s)$$

biçiminde gösterilebilir [27]. Burada e^* moment vektörü olup

$$e^*(s) = c(s) \times e(s)$$

biçiminde yazılır. Burada

$$\langle e, e \rangle = -1, \langle e', e' \rangle = 1, \langle c', e' \rangle = 0 \quad (7.1)$$

özellikleri sağlanır [27].

$e(u)$ birim vektörü reel hiperbolik birim küre üzerinde bir eğri çizer ve bu eğriye $\tilde{e}$ dual eğrisinin reel gösterge eğrisi denir. Burada gösterge eğrisinin bir tek noktadan ibaret olmadığı varsayılır.

$t = e'$ vektörü, gösterge eğrisinin teğetine paralel, birim vektördür. (7.1) denklemlerinden, e nin timelike vektör ve t nin spacelike vektör olduğu görülür.

Dual hiperbolik eğrinin türevinin normu

$$\|\tilde{e}'\| = 1 - \varepsilon\Delta$$

biçiminde yazılabilir [27]. Burada $\Delta = \det(c', e, t)$ açılabilir timelike regle yüzeyleri karakterize eder. Timelike regle yüzeyin açılabilir olması için gerek ve yeter şart $\Delta = 0$ olmasıdır. $\tilde{e}$ dual eğrisinin dual yay uzunluğu

$$\bar{s} = \int_0^s \|\tilde{e}'(u)\| du = \int_0^s (1 - \varepsilon\Delta) du = s - \varepsilon \int_0^s \Delta du \quad (7.2)$$

olarak verilir [27]. (7.2) denkleminde $\bar{s}' = 1 - \varepsilon\Delta$ olduğu görülür. Böylece $\tilde{e}(s)$ dual eğrisinin birim dual teğeti

$$\tilde{t} = \frac{d\tilde{e}}{d\bar{s}} = \frac{\tilde{e}'}{\bar{s}'} = \frac{\tilde{e}'}{1 - \varepsilon\Delta} = t + \varepsilon(c \times t)$$

biçiminde verilir [27]. $\tilde{g}$ birim dual vektörü de

$$\tilde{g} = -\tilde{e} \times \tilde{t} = g + \varepsilon c \times g$$

biçiminde verilebilir [27]. Burada e timelike vektör ve t spacelike vektör olduğundan g spacelike vektördür. Böylece $\tilde{e}$ dual hiperbolik eğrisinin dual Darboux çatısı ya da dual jeodezik üçyüzlüsü olarak bilinen $\{\tilde{e}, \tilde{t}, \tilde{g}\}$ dual çatısı elde edilir.

Dual Darboux çatısının türev formülleri matris formda

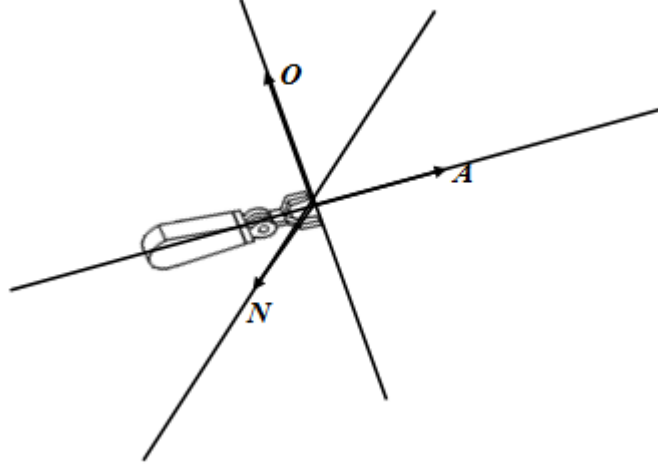
$$\frac{d}{d\bar{s}} \begin{bmatrix} \tilde{e} \\ \tilde{t} \\ \tilde{g} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \bar{\gamma} \\ 0 & -\bar{\gamma} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{e} \\ \tilde{t} \\ \tilde{g} \end{bmatrix} \quad (7.3)$$

biçiminde yazılabilir [27]. Burada $\bar{\gamma}$ dual jeodezik eğriliktir. Dual Darboux üçyüzlüsünün dual Darboux ani dönme vektörü

$$\tilde{w}_e = -\bar{\gamma}\tilde{e} - \tilde{g}$$

dir [27].

Dual araç çatısı, Şekil 7.1 de gösterildiği gibi, robot uç-işlevcinin araç merkez noktasından geçen üç doğru ile tanımlanabilir. Bunlar; yön vektörü, O yönlenme vektörü olan yönlenme doğrusu, yön vektörü, A yaklaşım vektörü olan yaklaşım doğrusu ve yön vektörü, N normal vektör olan normal doğrudur. Yönlenme doğrusuna karşılık gelen birim dual vektör $\tilde{O}$, yaklaşım doğrusuna karşılık gelen birim dual vektör $\tilde{A}$ ve normal doğruya karşılık gelen birim dual vektör $\tilde{N}$ ile gösterilebilir. $\tilde{O}$, $\tilde{A}$ ve $\tilde{N}$ birim dual vektörlerine de sırasıyla dual yönlenme vektörü, dual yaklaşım vektörü ve dual normal vektör denilebilir.



Şekil 7.1. Robot uç-işlevci ve dual araç çatısı

Dual araç çatısının $\tilde{O}$ birim dual vektörü ile dual Darboux çatısının $\tilde{e}$ birim dual vektörü aynı vektördür. Dual hiperbolik eğrilerde $\tilde{e}$ birim dual vektörü timelike vektör olduğundan dual araç çatısının $\tilde{O}$ dual yönlenme vektörü de timelike vektördür. Dolayısıyla $\tilde{A}$ ve $\tilde{N}$ birim dual vektörleri spacelike vektörlerdir.

$\tilde{A}$ ve $\tilde{t}$ birim dual vektörleri arasındaki dual spacelike açı $\bar{\varphi} = \varphi + \varepsilon \varphi^*$ olsun. Burada φ , $\tilde{A}$ ve $\tilde{t}$ birim dual vektörlerine karşılık gelen doğrular arasındaki spacelike açı ve φ^* ise bu doğrular arasındaki en kısa Lorentziyen uzaklıktır. Buradaki φ spacelike açısı (5.43) denklemindeki açıdır ve φ^* ise boğaz çizgisi ile dayanak eğrisi arasındaki uzaklık olan μR dir.

Dual Darboux çatısı ile dual araç çatısı arasındaki ilişki matris formda

$$\begin{bmatrix} \tilde{O} \\ \tilde{A} \\ \tilde{N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \bar{\varphi} & -\sin \bar{\varphi} \\ 0 & \sin \bar{\varphi} & \cos \bar{\varphi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{e} \\ \tilde{t} \\ \tilde{g} \end{bmatrix} \quad (7.4)$$

biçiminde verilebilir. (7.4) matris eşitliğinin her iki tarafının türevi alınırsa

$$\begin{bmatrix} \tilde{O}' \\ \tilde{A}' \\ \tilde{N}' \end{bmatrix} = \bar{\varphi}' \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin \bar{\varphi} & -\cos \bar{\varphi} \\ 0 & \cos \bar{\varphi} & -\sin \bar{\varphi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{e} \\ \tilde{t} \\ \tilde{g} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \bar{\varphi} & -\sin \bar{\varphi} \\ 0 & \sin \bar{\varphi} & \cos \bar{\varphi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{e}' \\ \tilde{t}' \\ \tilde{g}' \end{bmatrix} \quad (7.5)$$

elde edilir. Dual Darboux çatısının türev formülleri olan (7.3) matris eşitliği, (7.5) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathcal{O}}' \\ \tilde{\mathcal{A}}' \\ \tilde{\mathcal{N}}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \cos \bar{\varphi} & -\bar{\delta} \sin \bar{\varphi} & -\bar{\delta} \cos \bar{\varphi} \\ \sin \bar{\varphi} & \bar{\delta} \cos \bar{\varphi} & -\bar{\delta} \sin \bar{\varphi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{e}} \\ \tilde{\mathbf{t}} \\ \tilde{\mathbf{g}} \end{bmatrix}$$

bulunur. Burada $\bar{\delta} = \delta + \varepsilon \delta^* = \bar{\varphi}' - \bar{\gamma}$ olup, "''", $\tilde{\mathbf{e}}$ dual hiperbolik eğrisinin $\bar{s}$ dual yay uzunluğu parametresine göre türevi gösterir. (7.4) yardımıyla, dual araç çatısının türev formülleri matris formda

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathcal{O}}' \\ \tilde{\mathcal{A}}' \\ \tilde{\mathcal{N}}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cos \bar{\varphi} & \sin \bar{\varphi} \\ \cos \bar{\varphi} & 0 & -\bar{\delta} \\ \sin \bar{\varphi} & \bar{\delta} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathcal{O}} \\ \tilde{\mathcal{A}} \\ \tilde{\mathcal{N}} \end{bmatrix}$$

biçiminde elde edilir. Dual araç çatısının dual ani dönme vektörü ise

$$\tilde{\mathbf{w}}_o = \bar{\delta} \tilde{\mathcal{O}} + \sin \bar{\varphi} \tilde{\mathcal{A}} - \cos \bar{\varphi} \tilde{\mathcal{N}}$$

olarak bulunur. (7.4) matris eşitliği kullanılarak, dual araç çatısının dual ani dönme vektörü, dual Darboux çatısı cinsinden

$$\tilde{\mathbf{w}}_o = \bar{\delta} \tilde{\mathbf{e}} - \tilde{\mathbf{g}} \quad (7.6)$$

biçiminde ifade edilebilir. Dual araç çatısının dual ani dönme vektörü ile dual Darboux çatısının dual Darboux ani dönme vektörü arasındaki ilişkinin

$$\tilde{\mathbf{w}}_o = \bar{\varphi}' \tilde{\mathbf{e}} + \tilde{\mathbf{w}}_e$$

olduğu görülür.

Dual araç çatısının ani dönme vektörü, robot uç-işlevcinin dual hız vektörüdür. Dual araç çatısının dual ani dönme vektörünün normu

$$\bar{w}_o = \|\tilde{\mathbf{w}}_o\| = \sqrt{|-\bar{\delta}^2 + 1|} \quad (7.7)$$

dir. $\bar{w}_o = w_o + \varepsilon w_o^*$ olmak üzere (7.7) denklemi reel ve dual kısımlara ayrılırsa

$$w_o = \sqrt{|-\delta^2 + 1|}, \quad w_o^* = \left(\frac{-\delta^2 + 1}{|-\delta^2 + 1|} \right) \frac{-\delta \delta^*}{\sqrt{|-\delta^2 + 1|}}$$

elde edilir. Burada w_o , robot uç-işlevcinin açısal hızı ve w_o^* , robot uç-işlevcinin öteleme (lineer) hızıdır.

(7.6) denkleminin türevi alınır ve (7.3) daki türev formülleri kullanılırsa, robot uç-işlevcinin dual ivme vektörü

$$\tilde{\mathbf{w}}_o' = \bar{\delta}' \tilde{\mathbf{e}} + \bar{\varphi}' \tilde{\mathbf{t}}$$

biçiminde elde edilir. Dual ivme vektörünün normu

$$\bar{a} = \left\| \tilde{w}_o' \right\| = \sqrt{|\bar{\delta}'^2 + \bar{\varphi}'^2|} \quad (7.8)$$

olarak bulunur. $\bar{a} = a + \varepsilon a^*$ olmak üzere, (7.8) denklemini reel ve dual kısımlara ayırırsa

$$a = \sqrt{|\delta'^2 + \varphi'^2|}, \quad a^* = \left(\frac{-\delta'^2 + \varphi'^2}{|\delta'^2 + \varphi'^2|} \right) \frac{-\delta' \delta^{*'} + \varphi' \varphi^{*'}}{\sqrt{|\delta'^2 + \varphi'^2|}}$$

elde edilir. Burada a , robot uç-işlevcinin açısal ivmesi ve a^* , robot uç-işlevcinin öteleme ivmesidir.

7.2. Dual Lorentziyen Küresel Eğriler Yardımıyla Robot Uç-işlevci Hareketinin İncelenmesi

Bu bölümde, robot uç-işlevci hareketinin incelenmesinde kullanılan dual Lorentziyen küresel eğrilerin eğrilik teorisi, dual Lorentziyen küresel spacelike eğrilerin eğrilik teorisi ve dual Lorentziyen küresel timelike eğrilerin eğrilik teorisi olmak üzere iki bölümde ele alınacaktır.

7.2.1. Dual Lorentziyen Küresel Spacelike Eğriler Yardımıyla Robot Uç-işlevci Hareketinin İncelenmesi

Robot uç-işlevcinin, üzerinde hareket ettiği spacelike doğuranlı timelike regle yüzey

$$X(s, v) = c(s) + v e(s)$$

denklemini ile verilsin. Burada c , regle yüzeyin boğaz çizgisi ve e , ana doğruların doğrultman vektörüdür. Teorem 6.7. den, bu regle yüzeye, dual Lorentziyen küre üzerinde bir dual spacelike eğri karşılık geldiği söylenebilir. Bu dual eğri

$$\tilde{e}(s) = e(s) + \varepsilon e^*(s)$$

biçiminde gösterilebilir. Burada e^* moment vektörü olup

$$e^*(s) = c(s) \times e(s)$$

biçiminde yazılır. Burada

$$\langle e, e \rangle = 1, \quad \langle e', e' \rangle = 1, \quad \langle c', e' \rangle = 0 \quad (7.9)$$

özellikleri sağlanır [41].

$e(u)$ birim vektörü, reel Lorentziyen birim küre üzerinde bir eğri çizer ve bu eğriye $\tilde{e}$ dual eğrisinin reel gösterge eğrisi denir. Burada gösterge eğrisinin bir tek noktadan ibaret olmadığı varsayılır.

$\mathbf{t} = \mathbf{e}'$ vektörü, gösterge eğrisinin teğetine paralel birim vektördür. (7.9) denklemlerinden, $\mathbf{e}$ ve $\mathbf{t}$ vektörlerinin spacelike olduğu görülür.

Dual Lorentziyen eğrinin türevinin normu

$$\|\tilde{\mathbf{e}}'\| = 1 - \varepsilon\Delta \quad (7.10)$$

biçiminde yazılabilir. Burada $\Delta = \det(\mathbf{c}', \mathbf{e}, \mathbf{t})$ açılabilir spacelike doğuranlı timelike regle yüzeyleri karakterize eder. Spacelike doğuranlı timelike regle yüzeyin açılabilir olması için gerek ve yeter şart $\Delta = 0$ olmasıdır. $\tilde{\mathbf{e}}$ dual eğrisinin dual yay uzunluğu

$$\bar{s} = \int_0^s \|\tilde{\mathbf{e}}'(u)\| du = \int_0^s (1 - \varepsilon\Delta) du = s - \varepsilon \int_0^s \Delta du \quad (7.11)$$

olarak verilir [41]. (7.11) den $\bar{s}' = 1 - \varepsilon\Delta$ olduğu görülür. Böylece $\tilde{\mathbf{e}}(s)$ dual eğrisinin birim dual teğeti

$$\tilde{\mathbf{t}} = \frac{d\tilde{\mathbf{e}}}{d\bar{s}} = \frac{\tilde{\mathbf{e}}'}{\bar{s}'} = \frac{\tilde{\mathbf{e}}'}{1 - \varepsilon\Delta} = \mathbf{t} + \varepsilon(\mathbf{c} \times \mathbf{t})$$

biçiminde verilir [41]. Son olarak $\tilde{\mathbf{g}}$ birim dual vektörü de

$$\tilde{\mathbf{g}} = \tilde{\mathbf{e}} \times \tilde{\mathbf{t}} = \mathbf{g} + \varepsilon \mathbf{c} \times \mathbf{g}$$

biçiminde verilebilir [41]. Burada $\mathbf{e}$ ve $\mathbf{t}$ spacelike vektör olduklarından, $\mathbf{g}$ timelike vektördür. Böylece $\tilde{\mathbf{e}}$ dual Lorentziyen küresel spacelike eğrisinin dual Darboux çatısı ya da dual jeodezik üçyüzlüsü olarak bilinen $\{\tilde{\mathbf{e}}, \tilde{\mathbf{t}}, \tilde{\mathbf{g}}\}$ dual çatısı elde edilir.

Dual Darboux çatısının türev formülleri matris formda

$$\frac{d}{d\bar{s}} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{e}} \\ \tilde{\mathbf{t}} \\ \tilde{\mathbf{g}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \bar{\gamma} \\ 0 & \bar{\gamma} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{e}} \\ \tilde{\mathbf{t}} \\ \tilde{\mathbf{g}} \end{bmatrix} \quad (7.12)$$

biçiminde yazılabilir [41]. Burada $\bar{\gamma}$ dual jeodezik eğriliktir. Dual Darboux üçyüzlüsünün Dual Darboux ani dönme vektörü

$$\tilde{\mathbf{w}}_e = \bar{\gamma} \tilde{\mathbf{e}} - \tilde{\mathbf{g}}$$

dir [41].

Dual araç çatısı, robot uç-işlevcinin araç merkez noktasından geçen üç doğru ile tanımlanabilir. Bunlar; yön vektörü, $\mathbf{O}$ yönlenme vektörü olan yönlenme doğrusu, yön vektörü, $\mathbf{A}$ yaklaşım vektörü olan yaklaşım doğrusu ve yön vektörü, $\mathbf{N}$ normal vektör olan normal doğrusudur. Yönlenme doğrusuna karşılık gelen birim dual vektör, $\tilde{\mathbf{O}}$, yaklaşım doğrusuna karşılık gelen birim dual vektör, $\tilde{\mathbf{A}}$ ve normal doğruya karşılık gelen birim dual vektör, $\tilde{\mathbf{N}}$ ile

gösterilebilir. $\tilde{O}$, $\tilde{A}$ ve $\tilde{N}$ birim dual vektörlerine de sırasıyla dual yönlenme vektörü, dual yaklaşım vektörü ve dual normal vektör denilebilir. Dual araç çatısının $\tilde{O}$ birim dual vektörü ile dual Darboux çatısının $\tilde{e}$ birim dual vektörü aynı vektördür. Dual Lorentziyen küresel spacelike eğrilerde, $\tilde{e}$ birim dual vektörü spacelike vektör olduğundan, dual araç çatısının $\tilde{O}$ dual yönlenme vektörü de spacelike vektördür. Bu durumda $\tilde{A}$ birim dual vektörü spacelike ya da timelike vektör olabilir.

i) $\tilde{A}$ birim dual vektörü spacelike olsun.

$\tilde{A}$ ve $\tilde{t}$ birim dual vektörleri arasındaki dual merkez açısı $\bar{\varphi} = \varphi + \varepsilon \varphi^*$ olsun. Burada φ , $\tilde{A}$ ve $\tilde{t}$ birim dual vektörlerine karşılık gelen doğrular arasındaki merkez açısı ve φ^* ise bu doğrular arasındaki en kısa Lorentziyen uzaklıktır. Buradaki φ açısı (5.23) denklemindeki açı ve φ^* ise boğaz çizgisi ile dayanak eğrisi arasındaki uzaklık olan μR dir. Böylece dual Darboux çatısı ile dual araç çatısı arasındaki ilişki matris formda

$$\begin{bmatrix} \tilde{O} \\ \tilde{A} \\ \tilde{N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh \bar{\varphi} & \sinh \bar{\varphi} \\ 0 & \sinh \bar{\varphi} & \cosh \bar{\varphi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{e} \\ \tilde{t} \\ \tilde{g} \end{bmatrix} \quad (7.13)$$

biçiminde verilebilir. (7.13) matris eşitliğinin her iki tarafının türevi alınır

$$\begin{bmatrix} \tilde{O}' \\ \tilde{A}' \\ \tilde{N}' \end{bmatrix} = \bar{\varphi}' \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sinh \bar{\varphi} & \cosh \bar{\varphi} \\ 0 & \cosh \bar{\varphi} & \sinh \bar{\varphi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{e} \\ \tilde{t} \\ \tilde{g} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh \bar{\varphi} & \sinh \bar{\varphi} \\ 0 & \sinh \bar{\varphi} & \cosh \bar{\varphi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{e}' \\ \tilde{t}' \\ \tilde{g}' \end{bmatrix} \quad (7.14)$$

elde edilir. Dual Darboux çatısının türev formülleri olan (7.12), (7.14) matris eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{bmatrix} \tilde{O}' \\ \tilde{A}' \\ \tilde{N}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\cosh \bar{\varphi} & \bar{\delta} \sinh \bar{\varphi} & \bar{\delta} \cosh \bar{\varphi} \\ -\sinh \bar{\varphi} & \bar{\delta} \cosh \bar{\varphi} & \bar{\delta} \sinh \bar{\varphi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{e} \\ \tilde{t} \\ \tilde{g} \end{bmatrix}$$

bulunur. Burada $\bar{\delta} = \delta + \varepsilon \delta^* = \bar{\varphi}' + \bar{\gamma}$ olup, $\bar{\gamma}$, $\tilde{e}$ dual hiperbolik eğrisinin $\bar{s}$ dual yay uzunluğu parametresine göre türevi gösterir. (7.12) matris eşitliği kullanılarak, dual araç çatısının türev formülleri matris formda

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathcal{O}}' \\ \tilde{\mathcal{A}}' \\ \tilde{\mathcal{N}}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cosh \bar{\varphi} & -\sinh \bar{\varphi} \\ -\cosh \bar{\varphi} & 0 & \bar{\delta} \\ -\sinh \bar{\varphi} & \bar{\delta} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathcal{O}} \\ \tilde{\mathcal{A}} \\ \tilde{\mathcal{N}} \end{bmatrix}$$

biçiminde elde edilir. Dual araç çatısının dual ani dönme vektörü ise

$$\tilde{\mathbf{w}}_o = \bar{\delta} \tilde{\mathcal{O}} + \sinh \bar{\varphi} \tilde{\mathcal{A}} - \cosh \bar{\varphi} \tilde{\mathcal{N}}$$

olarak bulunur. (7.14) matris eşitliği kullanılarak, dual araç çatısının dual ani dönme vektörü, dual Darboux çatısı cinsinden

$$\tilde{\mathbf{w}}_o = \bar{\delta} \tilde{\mathbf{e}} - \tilde{\mathbf{g}}$$

biçiminde ifade edilebilir. Dual araç çatısının dual ani dönme vektörü ile dual Darboux çatısının dual Darboux ani dönme vektörü arasındaki ilişkinin

$$\tilde{\mathbf{w}}_o = \bar{\varphi}' \tilde{\mathbf{e}} + \tilde{\mathbf{w}}_e \quad (7.15)$$

olduğu görülür.

Dual araç çatısının ani dönme vektörü, robot uç-işlevcinin dual hız vektörüdür. Dual araç çatısının dual ani dönme vektörünün normu

$$\bar{w}_o = \|\tilde{\mathbf{w}}_o\| = \sqrt{|\bar{\delta}^2 - 1|} \quad (7.16)$$

dir. $\bar{w}_o = w_o + \varepsilon w_o^*$ olmak üzere (7.16) denklemi reel ve dual kısımlara ayrılırsa

$$w_o = \sqrt{|\delta^2 - 1|}, \quad w_o^* = \left(\frac{\delta^2 - 1}{|\delta^2 - 1|} \right) \frac{\delta \delta^*}{\sqrt{|\delta^2 - 1|}}$$

elde edilir. Burada w_o , robot uç-işlevcinin açısal hızı ve w_o^* , robot uç-işlevcinin öteleme hızıdır.

(7.15) denkleminin türevi alınır ve (7.12) daki türev formülleri kullanılırsa, robot uç-işlevcinin dual ivme vektörü

$$\tilde{\mathbf{w}}_o' = \bar{\delta}' \tilde{\mathbf{e}} + \bar{\varphi}' \tilde{\mathbf{t}}$$

biçiminde elde edilir. Dual ivme vektörünün normu

$$\bar{a} = \|\tilde{\mathbf{w}}_o'\| = \sqrt{\bar{\delta}'^2 + \bar{\varphi}'^2} \quad (7.17)$$

olarak bulunur. $\bar{a} = a + \varepsilon a^*$ olmak üzere (7.17) denklemi reel ve dual kısımlara ayrılırsa

$$a = \sqrt{\delta'^2 + \varphi'^2}, \quad a^* = \frac{\delta' \delta^{*'} + \varphi' \varphi^{*'}}{\sqrt{\delta'^2 + \varphi'^2}}$$

elde edilir. Burada a , robot uç-işlevcinin açısal ivmesi ve a^* , robot uç-işlevcinin öteleme ivmesidir.

ii) $\tilde{A}$ birim dual vektörü timelike olsun.

$\tilde{A}$ ve $\tilde{t}$ birim dual vektörleri arasındaki dual timelike açı $\bar{\varphi} = \varphi + \varepsilon \varphi^*$ olsun. Burada φ , $\tilde{A}$ ve $\tilde{t}$ birim dual vektörlerine karşılık gelen doğrular arasındaki timelike açı ve φ^* ise bu doğrular arasındaki en kısa Lorentziyen uzaklıktır. Buradaki φ açısı (5.26) denklemindeki açı ve φ^* ise boğaz çizgisi ile dayanak eğrisi arasındaki uzaklık olan μR dir. Böylece dual Darboux çatısı ile dual araç çatısı arasındaki ilişki matris formda

$$\begin{bmatrix} \tilde{O} \\ \tilde{A} \\ \tilde{N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sinh \bar{\varphi} & \cosh \bar{\varphi} \\ 0 & \cosh \bar{\varphi} & \sinh \bar{\varphi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{e} \\ \tilde{t} \\ \tilde{g} \end{bmatrix} \quad (7.18)$$

biçiminde verilebilir. (7.18) matris eşitliğinin her iki tarafının türevi alınır

$$\begin{bmatrix} \tilde{O}' \\ \tilde{A}' \\ \tilde{N}' \end{bmatrix} = \bar{\varphi}' \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh \bar{\varphi} & \sinh \bar{\varphi} \\ 0 & \sinh \bar{\varphi} & \cosh \bar{\varphi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{e} \\ \tilde{t} \\ \tilde{g} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sinh \bar{\varphi} & \cosh \bar{\varphi} \\ 0 & \cosh \bar{\varphi} & \sinh \bar{\varphi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{e}' \\ \tilde{t}' \\ \tilde{g}' \end{bmatrix} \quad (7.19)$$

elde edilir. Dual Darboux çatısının türev formülleri olan (7.12), (7.19) matris eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{bmatrix} \tilde{O}' \\ \tilde{A}' \\ \tilde{N}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\sinh \bar{\varphi} & \bar{\delta} \cosh \bar{\varphi} & \bar{\delta} \sinh \bar{\varphi} \\ -\cosh \bar{\varphi} & \bar{\delta} \sinh \bar{\varphi} & \bar{\delta} \cosh \bar{\varphi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{e} \\ \tilde{t} \\ \tilde{g} \end{bmatrix}$$

bulunur. Burada $\bar{\delta} = \delta + \varepsilon \delta^* = \bar{\varphi}' + \bar{\gamma}'$ olup, $\bar{\gamma}'$, $\tilde{e}$ dual hiperbolik eğrisinin $\bar{s}$ dual yay uzunluğu parametresine göre türevi gösterir. (7.12) matris eşitliği kullanılarak, dual araç çatısının türev formülleri matris formda

$$\begin{bmatrix} \tilde{O}' \\ \tilde{A}' \\ \tilde{N}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\sinh \bar{\varphi} & \cosh \bar{\varphi} \\ -\sinh \bar{\varphi} & 0 & \bar{\delta} \\ -\cosh \bar{\varphi} & \bar{\delta} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{O} \\ \tilde{A} \\ \tilde{N} \end{bmatrix}$$

biçiminde elde edilir. Dual araç çatısının dual ani dönme vektörü ise

$$\tilde{w}_o = -\bar{\delta} \tilde{O} + \cosh \bar{\varphi} \tilde{A} - \sinh \bar{\varphi} \tilde{N}$$

olarak bulunur. (7.18) matris eşitliği kullanılarak, dual araç çatısının dual ani dönme vektörü dual Darboux çatısı cinsinden

$$\tilde{w}_o = -\bar{\delta} \tilde{e} + \tilde{g} \quad (7.20)$$

biçiminde ifade edilebilir. Dual araç çatısının dual ani dönme vektörü ile dual Darboux çatısının dual Darboux ani dönme vektörü arasındaki ilişkinin

$$\tilde{w}_o = -\bar{\varphi}' \tilde{e} - \tilde{w}_e$$

olduğu görülür.

Dual araç çatısının ani dönme vektörü, robot uç-işlevcinin dual hız vektörüdür. Dual araç çatısının dual ani dönme vektörünün normu

$$\bar{w}_o = \|\tilde{w}_o\| = \sqrt{|\bar{\delta}^2 - 1|} \quad (7.21)$$

dir. $\bar{w}_o = w_o + \varepsilon w_o^*$ olmak üzere (7.21) denklemi reel ve dual kısımlara ayrılırsa

$$w_o = \sqrt{|\delta^2 - 1|}, \quad w_o^* = \left(\frac{\delta^2 - 1}{|\delta^2 - 1|} \right) \frac{\delta \delta^*}{\sqrt{|\delta^2 - 1|}}$$

elde edilir. Burada w_o robot uç-işlevcinin açısal hızı ve w_o^* robot uç-işlevcinin öteleme hızıdır.

(7.20) denkleminin türevi alınır ve (7.12) deki türev formülleri kullanılırsa, robot uç-işlevcinin dual ivme vektörü

$$\tilde{w}_o' = -\bar{\delta}' \tilde{e} - \bar{\varphi}' \tilde{t}$$

biçiminde elde edilir. Dual ivme vektörünün normu

$$\bar{a} = \|\tilde{w}_o'\| = \sqrt{\bar{\delta}'^2 + \bar{\varphi}'^2} \quad (7.22)$$

olarak bulunur. $\bar{a} = a + \varepsilon a^*$ olmak üzere (7.22) denklemi reel ve dual kısımlara ayrılırsa

$$a = \sqrt{\delta'^2 + \varphi'^2}, \quad a^* = \frac{\delta' \delta^{*'} + \varphi' \varphi^{*'}}{\sqrt{\delta'^2 + \varphi'^2}}$$

elde edilir. Burada a , robot uç-işlevcinin açısal ivmesi ve a^* , robot uç-işlevcinin öteleme ivmesidir.

7.2.2. Dual Lorentziyen Küresel Timelike Eğriler Yardımıyla Robot Uç-işlevci Hareketinin İncelenmesi

Robot uç-işlevcinin, üzerinde hareket ettiği spacelike regle yüzey

$$X(s, v) = c(s) + v e(s)$$

denklemleri ile verilsin. Burada c , regle yüzeyin boğaz çizgisi ve e , ana doğruların doğrultman vektörüdür. Teorem 6.7. den, bu regle yüzeye, dual Lorentziyen küre üzerinde bir dual timelike eğri karşılık geldiği söylenebilir. Bu dual eğri

$$\tilde{e}(s) = e(s) + \varepsilon e^*(s)$$

biçiminde gösterilebilir. Burada e^* moment vektörü olup

$$e^*(s) = c(s) \times e(s)$$

biçiminde yazılır. Burada

$$\langle e, e \rangle = 1, \langle e', e' \rangle = -1, \langle c', e' \rangle = 0 \quad (7.23)$$

özellikleri sağlanır [26].

$e(u)$ birim vektörü reel Lorentziyen birim küre üzerinde bir eğri çizer ve bu eğriye $\tilde{e}$ dual eğrisinin reel gösterge eğrisi denir. Burada gösterge eğrisinin bir tek noktadan ibaret olmadığı varsayılır.

$t = e'$ vektörü, gösterge eğrisinin teğetine paralel, birim vektördür. (7.23) denklemlerinden e vektörünün spacelike ve t vektörünün timelike olduğu görülür.

Dual Lorentziyen eğrinin türevinin normu

$$\|\tilde{e}'\| = 1 + \varepsilon \Delta$$

biçiminde yazılabilir. Burada $\Delta = \det(c', e, t)$ açılabilir spacelike regle yüzeyleri karakterize eder. Spacelike regle yüzeyin açılabilir olması için gerek ve yeter şart $\Delta = 0$ olmasıdır. $\tilde{e}$ dual eğrisinin dual yay uzunluğu

$$\bar{s} = \int_0^s \|\tilde{e}'(u)\| du = \int_0^s (1 + \varepsilon \Delta) du = s + \varepsilon \int_0^s \Delta du \quad (7.24)$$

olarak verilir [26]. (7.24) denkleminde $\bar{s}' = 1 + \varepsilon \Delta$ olduğu görülür. Böylece $\tilde{e}(s)$ dual eğrisinin birim dual teğeti

$$\tilde{t} = \frac{d\tilde{e}}{d\bar{s}} = \frac{\tilde{e}'}{\bar{s}'} = \frac{\tilde{e}'}{1 + \varepsilon \Delta} = t + \varepsilon(c \times t)$$

biçiminde verilir [26]. Son olarak $\tilde{g}$ birim dual vektörü de

$$\tilde{g} = -\tilde{e} \times \tilde{t} = g + \varepsilon c \times g$$

biçiminde verilebilir [26]. Burada e spacelike ve t timelike vektör olduğundan, g spacelike vektördür. Böylece $\tilde{e}$ dual Lorentziyen küresel spacelike eğrisinin dual Darboux çatısı ya da dual jeodezik üçyüzlüsü olarak bilinen $\{\tilde{e}, \tilde{t}, \tilde{g}\}$ dual çatısı elde edilir.

Dual Darboux çatısının türev formülleri matris formda

$$\frac{d}{d\bar{s}} \begin{bmatrix} \tilde{e} \\ \tilde{t} \\ \tilde{g} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \bar{\gamma} \\ 0 & \bar{\gamma} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{e} \\ \tilde{t} \\ \tilde{g} \end{bmatrix} \quad (7.25)$$

biçiminde yazılabilir [26]. Burada, $\bar{\gamma}$ dual jeodezik eğriliktir. Dual Darboux üçyüzlüsünün Dual Darboux ani dönme vektörü

$$\tilde{w}_e = -\bar{\gamma}\tilde{e} + \tilde{g}$$

dir [26].

Dual araç çatısı, robot uç-işlevcinin araç merkez noktasından geçen üç doğru ile tanımlanabilir. Bunlar; yön vektörü, $\mathbf{O}$ yönlenme vektörü olan yönlenme doğrusu, yön vektörü, $\mathbf{A}$ yaklaşım vektörü olan yaklaşım doğrusu ve yön vektörü, $\mathbf{N}$ normal vektör olan normal doğrusudur. Yönlenme doğrusuna karşılık gelen birim dual vektör, $\tilde{\mathbf{O}}$, yaklaşım doğrusuna karşılık gelen birim dual vektör, $\tilde{\mathbf{A}}$ ve normal doğruya karşılık gelen birim dual vektör, $\tilde{\mathbf{N}}$ ile gösterilebilir. $\tilde{\mathbf{O}}$, $\tilde{\mathbf{A}}$ ve $\tilde{\mathbf{N}}$ birim dual vektörlerine de sırasıyla dual yönlenme vektörü, dual yaklaşım vektörü ve dual normal vektör denilebilir. Dual araç çatısının $\tilde{\mathbf{O}}$ birim dual vektörü ile dual Darboux çatısının $\tilde{e}$ birim dual vektörü aynı vektördür. Dual Lorentziyen küresel spacelike eğrilerde, $\tilde{e}$ birim dual vektörü spacelike vektör olduğundan, dual araç çatısının $\tilde{\mathbf{O}}$ dual yönlenme vektörü de spacelike vektördür. Bu durumda $\tilde{\mathbf{A}}$ birim dual vektörü spacelike ya da timelike vektör olabilir.

i) $\tilde{\mathbf{A}}$ birim dual vektörü spacelike olsun.

$\tilde{\mathbf{A}}$ ve $\tilde{t}$ birim dual vektörleri arasındaki dual timelike açı $\bar{\varphi} = \varphi + \varepsilon \varphi^*$ olsun. Burada φ , $\tilde{\mathbf{A}}$ ve $\tilde{t}$ birim dual vektörlerine karşılık gelen doğrular arasındaki timelike açı ve φ^* ise bu doğrular arasındaki en kısa Lorentziyen uzaklıktır. Buradaki φ açısı, (5.5) denklemindeki açı ve φ^* ise boğaz çizgisi ile dayanak eğrisi arasındaki uzaklık olan μR dir. Böylece dual Darboux çatısı ile dual araç çatısı arasındaki ilişki matris formda

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{O}} \\ \tilde{\mathbf{A}} \\ \tilde{\mathbf{N}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sinh \bar{\varphi} & \cosh \bar{\varphi} \\ 0 & \cosh \bar{\varphi} & \sinh \bar{\varphi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{e} \\ \tilde{t} \\ \tilde{g} \end{bmatrix} \quad (7.26)$$

biçiminde verilebilir. (7.26) matris eşitliğinin her iki tarafının türevi alınırsa

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{O}}' \\ \tilde{\mathbf{A}}' \\ \tilde{\mathbf{N}}' \end{bmatrix} = \bar{\varphi}' \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh \bar{\varphi} & \sinh \bar{\varphi} \\ 0 & \sinh \bar{\varphi} & \cosh \bar{\varphi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{e} \\ \tilde{t} \\ \tilde{g} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sinh \bar{\varphi} & \cosh \bar{\varphi} \\ 0 & \cosh \bar{\varphi} & \sinh \bar{\varphi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{e}' \\ \tilde{t}' \\ \tilde{g}' \end{bmatrix} \quad (7.27)$$

elde edilir. Dual Darboux çatısının türev formülleri olan (7.25), (7.27) de yerine yazılırsa

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathcal{O}}' \\ \tilde{\mathcal{A}}' \\ \tilde{\mathcal{N}}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \sinh \bar{\varphi} & \bar{\delta} \cosh \bar{\varphi} & \bar{\delta} \sinh \bar{\varphi} \\ \cosh \bar{\varphi} & \bar{\delta} \sinh \bar{\varphi} & \bar{\delta} \cosh \bar{\varphi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathcal{e}} \\ \tilde{\mathcal{t}} \\ \tilde{\mathcal{g}} \end{bmatrix}$$

bulunur. Burada $\bar{\delta} = \delta + \varepsilon \delta^* = \bar{\varphi}' + \bar{\gamma}$ olup, "", $\tilde{\mathcal{e}}$ dual Lorentziyen küresel timelike eğrisinin $\bar{s}$ dual yay uzunluğu parametresine göre türevi gösterir. (7.25) yardımıyla dual araç çatısının türev formülleri matris formda

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathcal{O}}' \\ \tilde{\mathcal{A}}' \\ \tilde{\mathcal{N}}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\sinh \bar{\varphi} & \cosh \bar{\varphi} \\ \sinh \bar{\varphi} & 0 & \bar{\delta} \\ \cosh \bar{\varphi} & \bar{\delta} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathcal{O}} \\ \tilde{\mathcal{A}} \\ \tilde{\mathcal{N}} \end{bmatrix}$$

biçiminde elde edilir. Dual araç çatısının dual ani dönme vektörü ise

$$\tilde{\mathcal{W}}_o = \bar{\delta} \tilde{\mathcal{O}} - \cosh \bar{\varphi} \tilde{\mathcal{A}} + \sinh \bar{\varphi} \tilde{\mathcal{N}}$$

olarak bulunur. (7.26) matris eşitliği kullanılarak, dual araç çatısının dual ani dönme vektörü, dual Darboux çatısı cinsinden

$$\tilde{\mathcal{W}}_o = \bar{\delta} \tilde{\mathcal{e}} - \tilde{\mathcal{g}} \quad (7.28)$$

biçiminde ifade edilebilir. Dual araç çatısının dual ani dönme vektörü ile dual Darboux çatısının dual Darboux ani dönme vektörü arasındaki ilişkinin

$$\tilde{\mathcal{W}}_o = \bar{\varphi}' \tilde{\mathcal{e}} - \tilde{\mathcal{W}}_e$$

olduğu görülür.

Dual araç çatısının ani dönme vektörü, robot uç-işlevcinin dual hız vektörüdür. Dual araç çatısının dual ani dönme vektörünün normu

$$\bar{w}_o = \|\tilde{\mathcal{W}}_o\| = \sqrt{\bar{\delta}^2 + 1} \quad (7.29)$$

dir. $\bar{w}_o = w_o + \varepsilon w_o^*$ olmak üzere (7.29) denklemi reel ve dual kısımlara ayrılırsa

$$w_o = \sqrt{\delta^2 + 1}, \quad w_o^* = \frac{\delta \delta^*}{\sqrt{\delta^2 + 1}}$$

elde edilir. Burada w_o , robot uç-işlevcinin açısal hızı ve w_o^* , robot uç-işlevcinin öteleme hızıdır.

(7.28) denkleminin türevi alınır ve (7.25) kullanılırsa, robot uç-işlevcinin dual ivme vektörü

$$\tilde{\mathcal{W}}_o' = \bar{\delta}' \tilde{\mathcal{e}} + \bar{\varphi}' \tilde{\mathcal{t}}$$

biçiminde elde edilir. Dual ivme vektörünün normu

$$\bar{a} = \|\tilde{\mathcal{W}}_o'\| = \sqrt{\bar{\delta}'^2 - \bar{\varphi}'^2} \quad (7.30)$$

olarak bulunur. $\bar{a} = a + \varepsilon a^*$ olmak üzere (7.30) denklemi reel ve dual kısımlara ayrılırsa

$$a = \sqrt{|\delta'^2 - \varphi'^2|}, \quad a^* = \left(\frac{\delta'^2 - \varphi'^2}{|\delta'^2 - \varphi'^2|} \right) \frac{\delta' \delta'^* - \varphi' \varphi'^*}{\sqrt{|\delta'^2 - \varphi'^2|}}$$

elde edilir. Burada a , robot uç-işlevcinin açısal ivmesi ve a^* , robot uç-işlevcinin öteleme ivmesidir.

ii) $\tilde{A}$ birim dual vektörü timelike olsun.

$\tilde{A}$ ve $\tilde{t}$ birim dual vektörleri arasındaki dual hiperbolik açı $\bar{\varphi} = \varphi + \varepsilon \varphi^*$ olsun. Burada φ , $\tilde{A}$ ve $\tilde{t}$ birim dual vektörlerine karşılık gelen doğrular arasındaki hiperbolik açı ve φ^* ise bu doğrular arasındaki en kısa Lorentziyen uzaklıktır. Buradaki φ açısı (5.7) denklemindeki açı ve φ^* ise boğaz çizgisi ile dayanak eğrisi arasındaki uzaklık olan μR dir. Böylece dual Darboux çatısı ile dual araç çatısı arasındaki ilişki matris formda

$$\begin{bmatrix} \tilde{O} \\ \tilde{A} \\ \tilde{N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh \bar{\varphi} & \sinh \bar{\varphi} \\ 0 & \sinh \bar{\varphi} & \cosh \bar{\varphi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{e} \\ \tilde{t} \\ \tilde{g} \end{bmatrix} \quad (7.31)$$

biçiminde verilebilir. (7.31) matris eşitliğinin her iki tarafının türevi alınır

$$\begin{bmatrix} \tilde{O}' \\ \tilde{A}' \\ \tilde{N}' \end{bmatrix} = \bar{\varphi}' \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sinh \bar{\varphi} & \cosh \bar{\varphi} \\ 0 & \cosh \bar{\varphi} & \sinh \bar{\varphi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{e} \\ \tilde{t} \\ \tilde{g} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh \bar{\varphi} & \sinh \bar{\varphi} \\ 0 & \sinh \bar{\varphi} & \cosh \bar{\varphi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{e}' \\ \tilde{t}' \\ \tilde{g}' \end{bmatrix} \quad (7.32)$$

elde edilir. Dual Darboux çatısının türev formülleri olan (7.25), (7.32) de yerine yazılırsa

$$\begin{bmatrix} \tilde{O}' \\ \tilde{A}' \\ \tilde{N}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \sinh \bar{\varphi} & \bar{\delta} \sinh \bar{\varphi} & \bar{\delta} \cosh \bar{\varphi} \\ \cosh \bar{\varphi} & \bar{\delta} \cosh \bar{\varphi} & \bar{\delta} \sinh \bar{\varphi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{e} \\ \tilde{t} \\ \tilde{g} \end{bmatrix}$$

bulunur. Burada $\bar{\delta} = \delta + \varepsilon \delta^* = \bar{\varphi}' + \bar{\gamma}'$ olup, $\bar{\gamma}'$, $\tilde{e}$ dual hiperbolik eğrisinin $\bar{s}$ dual yay uzunluğu parametresine göre türevi gösterir. (7.25) türev denklemleri kullanılarak, dual araç çatısının türev formülleri matris formda

$$\begin{bmatrix} \tilde{O}' \\ \tilde{A}' \\ \tilde{N}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cosh \bar{\varphi} & -\sinh \bar{\varphi} \\ \cosh \bar{\varphi} & 0 & \bar{\delta} \\ \sinh \bar{\varphi} & \bar{\delta} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{O} \\ \tilde{A} \\ \tilde{N} \end{bmatrix}$$

biçiminde elde edilir. Dual araç çatısının dual ani dönme vektörü ise

$$\tilde{w}_o = -\bar{\delta} \tilde{O} - \sinh \bar{\varphi} \tilde{A} + \cosh \bar{\varphi} \tilde{N}$$

olarak bulunur. (7.31) matris eşitliği kullanılarak, dual araç çatısının dual ani dönme vektörü dual Darboux çatısı cinsinden

$$\tilde{w}_o = -\bar{\delta} \tilde{e} + \tilde{g} \quad (7.33)$$

biçiminde ifade edilebilir. Dual araç çatısının dual ani dönme vektörü ile dual Darboux çatısının dual Darboux ani dönme vektörü arasındaki ilişkinin

$$\tilde{w}_o = -\bar{\varphi}' \tilde{e} + \tilde{w}_e$$

olduğu görülür.

Dual araç çatısının ani dönme vektörü, robot uç-işlevcinin dual hız vektörüdür. Dual araç çatısının dual ani dönme vektörünün normu

$$\bar{w}_o = \|\tilde{w}_o\| = \sqrt{\bar{\delta}^2 + 1} \quad (7.34)$$

dir. $\bar{w}_o = w_o + \varepsilon w_o^*$ olmak üzere (7.34) denklemi reel ve dual kısımlara ayrılırsa

$$w_o = \sqrt{\delta^2 + 1}, \quad w_o^* = \frac{\delta \delta^*}{\sqrt{\delta^2 + 1}}$$

elde edilir. Burada w_o , robot uç-işlevcinin açısal hızı ve w_o^* , robot uç-işlevcinin öteleme hızıdır.

(7.33) denkleminin türevi alınır ve (7.25) türev formülleri kullanılırsa, robot uç-işlevcinin dual ivme vektörü

$$\tilde{w}_o' = -\bar{\delta}' \tilde{e} - \bar{\varphi}' \tilde{t}$$

biçiminde elde edilir. Dual ivme vektörünün normu

$$\bar{a} = \|\tilde{w}_o'\| = \sqrt{|\bar{\delta}'^2 - \bar{\varphi}'^2|} \quad (7.35)$$

olarak bulunur. $\bar{a} = a + \varepsilon a^*$ olmak üzere, (7.35) denklemi reel ve dual kısımlara ayrılırsa

$$a = \sqrt{|\delta'^2 - \varphi'^2|}, \quad a^* = \left(\frac{\delta'^2 - \varphi'^2}{|\delta'^2 - \varphi'^2|} \right) \frac{\delta' \delta'^* - \varphi' \varphi'^*}{\sqrt{|\delta'^2 - \varphi'^2|}}$$

elde edilir. Burada a , robot uç-işlevcinin açısal ivmesi ve a^* , robot uç-işlevcinin öteleme ivmesidir.

Örnek 7.1. $|c| > 1$ olmak üzere robot uç-işlevci, Şekil 7.2 de gösterildiği gibi,

$$X(u, v) = (\cos u - v \sin u, \sin u + v \cos u, cv)$$

tek kanatlı hiperboloit yüzeyi üzerinde η spin açısı ile hareket etsin. Tek kanatlı hiperboloidin regle formu

$$X(u, v) = (\cos u, \sin u, 0) + v(-\sin u, \cos u, c)$$

biçimindedir. Bu yüzeyin geometrisi için [41] e bakınız. Bu yüzeyin dayanak eğrisi

$$\alpha(u) = (\cos u, \sin u, 0)$$

ve ana doğrularının doğrultman vektörü

$$R(u) = (-\sin u, \cos u, c)$$

dir. Denklem (3.67) den, dayanak eğrisinin aynı zamanda boğaz çizgisi olduğu görülür, yani

$$c(u) = \alpha(u)$$

dir.

Tek kanatlı hiperboloit yüzeyine karşılık gelen dual eğri

$$\tilde{e}(u) = e(u) + \mathcal{E}e^*(u)$$

olsun. Bu dual eğrinin reel gösterge eğrisi

$$e(u) = \frac{R(u)}{\|R(u)\|} = \frac{1}{\sqrt{c^2 - 1}} (-\sin u, \cos u, c)$$

dir. Moment vektörü

$$\begin{aligned} e^*(u) &= c(u) \times e(u) = \frac{1}{\sqrt{c^2 - 1}} \begin{bmatrix} -e_1 & -e_2 & e_3 \\ \cos u & \sin u & 0 \\ -\sin u & \cos u & c \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{c^2 - 1}} (-c \sin u, c \cos u, 1) \end{aligned}$$

olduğundan, dual eğri

$$\tilde{e}(u) = \frac{1}{\sqrt{c^2 - 1}} [(-\sin u, \cos u, c) + \mathcal{E}(-c \sin u, c \cos u, 1)]$$

biçiminde yazılabilir. Reel gösterge eğrisinin teğet vektörü

$$e'(u) = \frac{1}{\sqrt{c^2 - 1}} (-\cos u, -\sin u, 0)$$

dir. Reel gösterge eğrisinin teğetinin normu

$$\|e'(u)\| = \frac{1}{\sqrt{c^2 - 1}} \neq 1$$

olduğundan, $e(u)$ birim hızlı değildir. Normalleştirilmiş parametre

$$s = s(u) = \int_0^u \frac{1}{\sqrt{c^2 - 1}} dl = \frac{1}{\sqrt{c^2 - 1}} u$$

biçiminde bulunur. Böylece regle yüzeyin boğaz çizgisi ve doğuranları ile reel gösterge eğrisi ve dual eğri, s parametresine göre sırasıyla

$$\begin{aligned}\mathbf{R}(s) &= (-\sin \sqrt{c^2-1}s, \cos \sqrt{c^2-1}s, c), \\ \mathbf{c}(s) &= (\cos \sqrt{c^2-1}s, \sin \sqrt{c^2-1}s, 0), \\ \mathbf{e}(s) &= \frac{1}{\sqrt{c^2-1}} \left(-\sin \sqrt{c^2-1}s, \cos \sqrt{c^2-1}s, c \right)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{e}}(s) &= \frac{1}{\sqrt{c^2-1}} \left[\left(-\sin \sqrt{c^2-1}s, \cos \sqrt{c^2-1}s, c \right) \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{E} \left(-c \sin \sqrt{c^2-1}s, c \cos \sqrt{c^2-1}s, 1 \right) \right]\end{aligned}$$

olarak yazılabilir. $\langle \mathbf{e}, \mathbf{e} \rangle = -1$ olduğundan, $\mathbf{e}$ timelike vektördür.

$$\mathbf{t} = \mathbf{e}' = \left(-\cos \sqrt{c^2-1}s, -\sin \sqrt{c^2-1}s, 0 \right)$$

elde edilir. $\langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle = 1$ olduğundan, $\mathbf{t}$ spacelike vektördür. Bu durumda $\mathbf{g}$ spacelike vektördür ve

$$\begin{aligned}\mathbf{g} = -\mathbf{e} \times \mathbf{t} &= -\frac{1}{\sqrt{c^2-1}} \begin{bmatrix} -\mathbf{e}_1 & -\mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ -\sin \sqrt{c^2-1}s & \cos \sqrt{c^2-1}s & c \\ -\cos \sqrt{c^2-1}s & -\sin \sqrt{c^2-1}s & 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{c^2-1}} \left(c \sin \sqrt{c^2-1}s, -c \cos \sqrt{c^2-1}s, -1 \right)\end{aligned}$$

olarak bulunur. $\langle \mathbf{g}, \mathbf{g} \rangle = 1$ dir.

$$\mathbf{t}^*(s) = \mathbf{c}(s) \times \mathbf{t}(s) = \begin{bmatrix} -\mathbf{e}_1 & -\mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \cos \sqrt{c^2-1}s & \sin \sqrt{c^2-1}s & 0 \\ -\cos \sqrt{c^2-1}s & -\sin \sqrt{c^2-1}s & 0 \end{bmatrix} = (0, 0, 0)$$

olduğundan

$$\tilde{\mathbf{t}}(s) = \left(-\cos \sqrt{c^2-1}s, -\sin \sqrt{c^2-1}s, 0 \right) \quad (7.36)$$

olarak bulunur.

$$\mathbf{g}^*(s) = \mathbf{c}(s) \times \mathbf{g}(s) = \frac{1}{\sqrt{c^2-1}} \begin{bmatrix} -\mathbf{e}_1 & -\mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \cos \sqrt{c^2-1}s & \sin \sqrt{c^2-1}s & 0 \\ c \sin \sqrt{c^2-1}s & -c \cos \sqrt{c^2-1}s & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{c^2-1}} \left(\sin \sqrt{c^2-1} s, -\cos \sqrt{c^2-1} s, -c \right)$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{g}}(s) = & \frac{1}{\sqrt{c^2-1}} \left[(c \sin \sqrt{c^2-1} s, -c \cos \sqrt{c^2-1} s, -1) \right. \\ & \left. + \varepsilon (\sin \sqrt{c^2-1} s, -\cos \sqrt{c^2-1} s, -c) \right] \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Boğaz çizgisinin birinci mertebeden türevi

$$\mathbf{c}'(s) = \left(-\sqrt{c^2-1} \sin \sqrt{c^2-1} s, \sqrt{c^2-1} \cos \sqrt{c^2-1} s, 0 \right)$$

dir.

(7.2) denkleminde, dual yay uzunluğu parametresinin türevinin

$$\overline{s}' = \frac{d\overline{s}}{ds} = 1 - \varepsilon \Delta$$

olduğu bilinmektedir. Burada

$$\Delta = \det(\mathbf{c}', \mathbf{e}, \mathbf{t}) = c$$

olarak bulunduğundan

$$\overline{s}' = 1 - \varepsilon c$$

biçiminde elde edilir.

(7.3) denkleminde

$$\frac{d\tilde{\mathbf{g}}}{d\overline{s}} = -\tilde{\gamma} \tilde{\mathbf{t}} \quad (7.37)$$

olduğu bilinmektedir. Zincir kuralı yardımıyla

$$\frac{d\tilde{\mathbf{g}}}{d\overline{s}} = \frac{d\tilde{\mathbf{g}}}{ds} \frac{ds}{d\overline{s}}$$

yazılabilir. $\tilde{\mathbf{g}}$ birim dual vektörünün s parametresine göre türevi alınarak ve yukarıdaki denklem kullanılarak

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\mathbf{g}}}{d\overline{s}} = & c \left(\cos \sqrt{c^2-1} s, \sin \sqrt{c^2-1} s, 0 \right) \\ & + \varepsilon (c^2+1) \left(\cos \sqrt{c^2-1} s, \sin \sqrt{c^2-1} s, 0 \right) \end{aligned} \quad (7.38)$$

bulunur. (7.36) ve (7.38) denklemleri, (7.37) denkleminde yerine yazılarak elde edilen eşitlik reel ve dual kısımlara ayrılırsa

$$\gamma = c \text{ ve } \gamma^* = c^2+1$$

elde edilir. Böylece dual jeodezik eğrilik

$$\bar{\gamma} = \gamma + \varepsilon \gamma^* = c + \varepsilon(c^2 + 1)$$

biçiminde bulunur.

$\tilde{A}$ ve $\tilde{t}$ birim dual vektörleri arasındaki dual açı

$$\bar{\varphi} = \varphi + \varepsilon \varphi^*$$

dır. Burada φ ve φ^* sırasıyla, birim dual vektörlere karşılık gelen doğrular arasındaki reel açı ve en kısa uzaklıktır. Dayanak eğrisi, boğaz çizgisine eşit olduğundan, dayanak eğrisi ile boğaz çizgisi arasındaki uzaklık olan φ^* sıfıra eşittir. Yüzeyin dayanak eğrisi üzerindeki normal vektörü S_n ile boğaz çizgisi üzerindeki merkez normal vektör h , aynı vektör olduklarından aralarındaki açı

$$\sigma = 0$$

dır. Böylece

$$\varphi = \eta + \sigma = \eta$$

olduğundan

$$\bar{\varphi} = \eta$$

olarak bulunur.

Dual araç çatısının dual ani dönme vektörünün

$$\tilde{w}_o = \bar{\delta} \tilde{e} - \tilde{g}$$

olduğu bilinmektedir. Burada

$$\bar{\delta} = \bar{\varphi}' - \bar{\gamma} = (\eta' - c) + \varepsilon(c^2 + 1)$$

olduğundan dual araç çatısının dual ani dönme vektörü ya da dual açısal hız vektörü

$$\begin{aligned} \tilde{w}_o &= \frac{1}{\sqrt{c^2 - 1}} \left(-\eta' \sin \sqrt{c^2 - 1} s, \eta' \cos \sqrt{c^2 - 1} s, \eta' c + c^2 + 1 \right) \\ &+ \varepsilon \frac{1}{\sqrt{c^2 - 1}} \left((-\eta' c - 2) \sin \sqrt{c^2 - 1} s, (\eta' c + 2) \cos \sqrt{c^2 - 1} s, \eta' + c + c^3 \right) \end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu dual vektörün normu alınarak uç-işlevcinin dual hızı

$$\bar{w}_o = \|\tilde{w}_o\| = \sqrt{|-\bar{\delta}^2 + 1|} \quad (7.39)$$

olarak yazılabilir. (7.39) denklemi, reel ve dual kısımlara ayrılırsa, uç-işlevcinin açısal ve lineer hızı sırasıyla

$$w_o = \sqrt{|-\delta^2 + 1|} = \sqrt{|-(\eta' - c)^2 + 1|}$$

ve

$$w_o^* = - \left(\frac{-\delta^2 + 1}{|-\delta^2 + 1|} \right) \frac{\delta \delta^*}{\sqrt{|-\delta^2 + 1|}} = - \left(\frac{-(\eta' - c)^2 + 1}{|-(\eta' - c)^2 + 1|} \right) \frac{(\eta' - c)(c^2 + 1)}{\sqrt{|-(\eta' - c)^2 + 1|}}$$

biçiminde bulunur. Robot uç-işlevcinin dual ivme vektörü

$$\bar{a} = \|\tilde{w}'_o\| = \sqrt{|-\delta'^2 + \varphi'^2|} \quad (7.40)$$

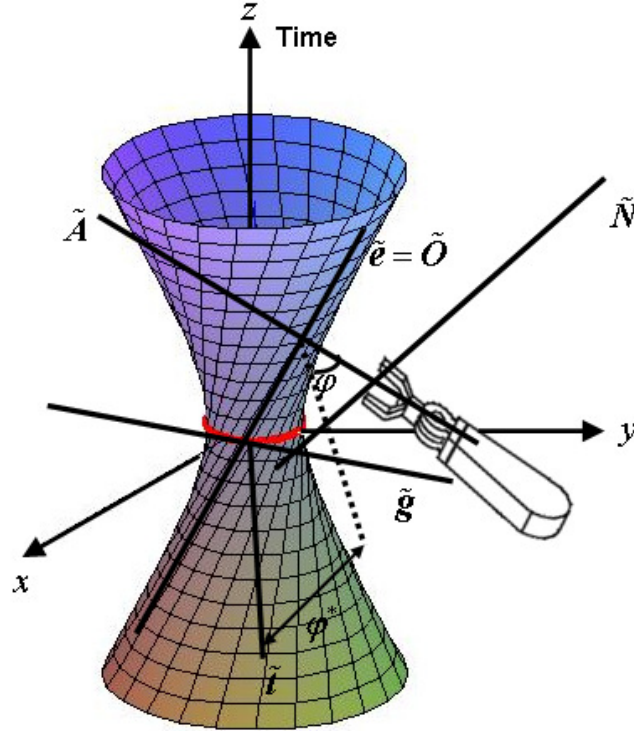
dir. (7.40) denklemi, reel ve dual kısımlara ayrılırsa, uç-işlevcinin açısal ve lineer ivmesi ise sırasıyla

$$a = \sqrt{|-\delta'^2 + \varphi'^2|} = \sqrt{|-\eta''^2 + \eta'^2|}$$

ve

$$a^* = \left(\frac{-\delta'^2 + \varphi'^2}{|-\delta'^2 + \varphi'^2|} \right) \frac{-\delta' \delta^{*'} + \varphi' \varphi^{*'}}{\sqrt{|-\delta'^2 + \varphi'^2|}} = 0$$

biçiminde bulunur.



Şekil 7.1. $X(u, v) = (\cos u - v \sin u, \sin u + v \cos u, cv)$, ($|c| > 1$) tek kanatlı hiperboloit yüzeyi üzerinde hareket eden bir robot uç-işlevci örneği

Örnek 7.2. $c \neq 0$ olmak üzere robot uç-işlevci

$$\mathbf{X}(u, v) = (v \cos u, v \sin u, cu)$$

helikoid yüzeyi üzerinde η spin açısı ile hareket etsin. Helikoidin regle formu

$$\mathbf{X}(u, v) = (0, 0, cu) + v(\cos u, \sin u, 0)$$

biçimindedir. Bu yüzeyin dayanak eğrisi

$$\boldsymbol{\alpha}(u) = (0, 0, cu)$$

ve ana doğrularının doğrultman vektörü

$$\mathbf{R}(u) = (\cos u, \sin u, 0)$$

dir. (3.37) denkleminde, dayanak eğrisinin aynı zamanda boğaz çizgisi olduğu görülür, yani

$$\mathbf{c}(u) = \boldsymbol{\alpha}(u)$$

dir.

Helikoid yüzeyine karşılık gelen dual eğri

$$\tilde{\mathbf{e}}(u) = \mathbf{e}(u) + \mathcal{E}\mathbf{e}^*(u)$$

olsun. Bu dual eğrinin reel gösterge eğrisi

$$\mathbf{e}(u) = \frac{\mathbf{R}(u)}{\|\mathbf{R}(u)\|} = (\cos u, \sin u, 0)$$

dir. Moment vektörü

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^*(u) = \mathbf{c}(u) \times \mathbf{e}(u) &= \begin{bmatrix} -\mathbf{e}_1 & -\mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 0 & 0 & cu \\ \cos u & \sin u & 0 \end{bmatrix} \\ &= (cu \sin u, -cu \cos u, 0) \end{aligned}$$

olduğundan, dual eğri

$$\tilde{\mathbf{e}}(u) = (\cos u, \sin u, 0) + \mathcal{E}(cu \sin u, -cu \cos u, 0)$$

biçiminde yazılabilir. Reel gösterge eğrisinin teğet vektörü

$$\mathbf{e}'(u) = (-\sin u, \cos u, 0)$$

dir. Reel gösterge eğrisinin teğetinin normu

$$\|\mathbf{e}'(u)\| = 1$$

olduğundan $\mathbf{e}(u)$ birim hızlı bir eğridir. Dolayısıyla u parametresi normalleştirilmiş parametre olup, u parametresi yerine s parametresi kullanılabilir. Böylece regle yüzeyin boğaz çizgisi ve doğuranları ile reel gösterge eğrisi ve dual eğri, s parametresine göre, sırasıyla,

$$\mathbf{R}(s) = (\cos s, \sin s, 0),$$

$$\mathbf{c}(s) = (0, 0, cs),$$

$$\mathbf{e}(s) = (\cos s, \sin s, 0)$$

ve

$$\tilde{\mathbf{e}}(s) = (\cos s, \sin s, 0) + \varepsilon(cu \sin s, -cu \cos s, 0)$$

olarak yazılabilir. $\langle \mathbf{e}, \mathbf{e} \rangle = 1$ olduğundan, $\mathbf{e}$ spacelike vektördür.

$$\mathbf{t} = \mathbf{e}' = \left(-\cos \sqrt{c^2 - 1} s, -\sin \sqrt{c^2 - 1} s, 0 \right)$$

elde edilir. $\langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle = 1$ olduğundan, $\mathbf{t}$ spacelike vektördür. Bu durumda $\mathbf{g}$ timelike vektördür ve

$$\mathbf{g} = \mathbf{e} \times \mathbf{t} = \begin{bmatrix} -\mathbf{e}_1 & -\mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \cos s & \sin s & 0 \\ -\sin s & \cos s & 0 \end{bmatrix} = (0, 0, 1)$$

olarak bulunur. $\langle \mathbf{g}, \mathbf{g} \rangle = -1$ dir.

$$\mathbf{t}^*(s) = \mathbf{c}(s) \times \mathbf{t}(s) = \begin{bmatrix} -\mathbf{e}_1 & -\mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 0 & 0 & cs \\ -\sin s & \cos s & 0 \end{bmatrix} = (cs \cos s, cs \sin s, 0)$$

olduğundan

$$\tilde{\mathbf{t}}(s) = (-\sin s, \cos s, 0) + \varepsilon(cs \cos s, cs \sin s, 0)$$

olarak bulunur.

$$\mathbf{g}^*(s) = \mathbf{c}(s) \times \mathbf{g}(s) = \begin{bmatrix} -\mathbf{e}_1 & -\mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 0 & 0 & cs \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (0, 0, 1)$$

olduğundan

$$\tilde{\mathbf{g}}(s) = (0, 0, 1)$$

olarak bulunur.

Boğaz çizgisinin birinci mertebeden türevi

$$\mathbf{c}'(s) = (0, 0, c)$$

dir.

(7.10) denkleminde, dual yay uzunluğu parametresinin türevinin

$$\overline{s}' = \frac{d\overline{s}}{ds} = 1 - \varepsilon \Delta$$

olduğu bilinmektedir. Burada

$$\Delta = \det(\mathbf{c}', \mathbf{e}, \mathbf{t}) = c$$

olarak bulunduğundan

$$\bar{s}' = 1 - \varepsilon c$$

biçiminde elde edilir.

(7.12) matris eşitliğinin üçüncü satırından

$$\frac{d\tilde{\mathbf{g}}}{ds} = \tilde{\gamma}\tilde{\mathbf{t}}$$

olduğu bilinmektedir. Zincir kuralı yardımıyla

$$\frac{d\tilde{\mathbf{g}}}{ds} = \frac{d\tilde{\mathbf{g}}}{ds} \frac{ds}{d\bar{s}}$$

yazılabilir. $\tilde{\mathbf{g}}$ birim dual vektörünün s parametresine göre türevi

$$\frac{d\tilde{\mathbf{g}}}{ds} = (0, 0, 0)$$

olduğundan dual jeodezik eğrilik

$$\bar{\gamma} = \gamma + \varepsilon\gamma^* = 0 + \varepsilon 0$$

biçiminde bulunur.

$\tilde{\mathbf{A}}$ ve $\tilde{\mathbf{t}}$ birim dual vektörleri arasındaki dual açı

$$\bar{\varphi} = \varphi + \varepsilon\varphi^*$$

dır. Burada φ ve φ^* sırasıyla, birim dual vektörlere karşılık gelen doğrular arasındaki reel açı ve en kısa uzaklıktır. Dayanak eğrisi boğaz çizgisine eşit olduğundan, dayanak eğrisi ile boğaz çizgisi arasındaki uzaklık olan φ^* sıfıra eşittir. Yüzeyin dayanak eğrisi üzerindeki normal vektörü S_n ile boğaz çizgisi üzerindeki merkez normal vektör $\mathbf{h}$, aynı vektör olduklarından aralarındaki açı

$$\sigma = 0$$

dır. Böylece

$$\varphi = \eta + \sigma = \eta$$

olduğundan

$$\bar{\varphi} = \eta$$

olarak bulunur.

Dual araç çatısının dual ani dönme vektörünün

$$\tilde{\mathbf{w}}_o = \bar{\delta}\tilde{\mathbf{e}} - \tilde{\mathbf{g}}$$

olduğu bilinmektedir. Burada

$$\bar{\delta} = \bar{\varphi}' - \bar{\gamma} = \eta' + \varepsilon 0$$

olduğundan, dual araç çatısının dual ani dönme vektörü ya da dual açısız hız vektörü

$$\tilde{\mathbf{w}}_o = (\eta' \cos s, \eta' \sin s, -1) + \varepsilon(cs \sin s, -cs \cos s, 0)$$

olarak bulunur. Bu dual vektörün normu alınarak uç-işlevcinin dual hızı

$$\bar{w}_o = \|\tilde{w}_o\| = \sqrt{|\delta^2 - 1|} \quad (7.41)$$

olarak yazılabilir. (7.41) denklemi, reel ve dual kısımlara ayrılırsa, uç-işlevcinin açısal ve lineer hızı sırasıyla

$$w_o = \sqrt{|\delta^2 - 1|} = \sqrt{|\eta'^2 - 1|}$$

ve

$$w_o^* = \left(\frac{\delta^2 - 1}{|\delta^2 - 1|} \right) \frac{\delta \delta^*}{\sqrt{|\delta^2 - 1|}} = 0$$

biçiminde bulunur. Robot uç-işlevcinin dual ivme vektörü

$$\bar{a} = \|\tilde{w}_o'\| = \sqrt{\delta'^2 + \varphi'^2} \quad (7.42)$$

dir. (7.42) denklemi, reel ve dual kısımlara ayrılırsa, uç-işlevcinin açısal ve lineer ivmesi ise sırasıyla

$$a = \sqrt{\delta'^2 + \varphi'^2} = \sqrt{\eta''^2 + \eta'^2}$$

ve

$$a^* = \frac{-\delta' \delta^{*'} + \varphi' \varphi^{*'}}{\sqrt{-\delta'^2 + \varphi'^2}} = 0$$

biçiminde bulunur.

REFERANSLAR

- [1] Abdel-All, N. H., Abdel-Baky, R. A., Hamdoon, F. M., "Ruled surfaces with timelike rulings", App. Math. and Comp., 147, pp. 241-256, (2004).
- [2] Ayyıldız, N., Yücesan, A., "On the scalar and dual formulations of the curvature theory of line trajectories in the Lorentzian space", Journal of the Korean Mathematical Society, 43, pp. 1339-1355, (2006).
- [3] Bingöl, Z., Küçük, S., "Robot Kinematiği", Birsan Yayınevi, (2009).
- [4] Biran, L., "Diferensiyel Geometri Dersleri", İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, Rektörlük No. 1546, Fakülte No. 98, (1970).
- [5] Birman, G.S, Nomizu, K., "Trigonometry in Lorentzian Geometry", Ann. Math. Month., 91, 543-549, (1984).
- [6] Blaschke, W., "Diferensiyel Geometri Dersleri", Çeviri: Kerim Erim, Şirketi Mürettebiye Basımevi, İstanbul, (1949).
- [7] Bottema, O., "Some Remarks on Theoretical Kinematics: I. On Instantaneous Invariants", Proceeding of the International Conference for Teachers of Mechanisms, Yale University, The Shoe String Press Inc., New Haven, Conn., pp. 159-164, (1961).
- [8] Bottema, O., Roth, B., "Theoretical Kinematics", North-Holland Publ. Co., Amsterdam, 556 pp., (1979).
- [9] Dimentberg, F. M., The Screw Calculus and its Application in Mechanics, (Izdat, Nauka, Moskow, USSR) English translation: AD680993, Clearinghouse for Federal and Scientific Technical Information, (1965).
- [10] DoCarmo, M.P., "Differential Geometry of Curves and Surfaces", Prentice-Hall, New Jersey, (1976).
- [11] Ekici, C., Ünlütürk, Y., Dede, M., Ryuh, B. S., "On motion of robot end-effector using the curvature theory of timelike ruled surfaces with timelike ruling", Mathematical Problems in Engineering, Vol. 2008, (2008).

- [12] Ersoy, S., Tosun, M., "On the trajectory null scrolls in 3-dimensional Minkowski space-time E_1^3 ", Kyungpook Math. J., 48, pp. 81-92, (2008).
- [13] Freudenstein, F., "Higher path-curvature analysis in plane kinematics", Journal of Engineering for Industry, vol. 87, no. 2, pp. 184-190, (1965).
- [14] Guggenheimer, H., "Differential Geometry", McGraw- Hill Book Comp. Inc. London, Lib. Cong. Cat. Card No. 68-12118, pp. 164, (1963).
- [15] Hacısalihoğlu, H. H., "Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi", Gazi Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi, (1983).
- [16] Hacısalihoğlu, H. H., "Diferansiyel Geometri", II. Cilt, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi, (2000).
- [17] Karger, A., Novak, J., "Space Kinematics and Lie Groups", STNL Publishers of Technical Lit., Prague, Czechoslovakia, (1978).
- [18] Kazaz, M., Özdemir, A., Uğurlu, H. H., "Elliptic motion on dual hyperbolic unit sphere $\tilde{H}_0^2$ ", Mechanism and Machine Theory", 44, 1450-1459, (2009).
- [19] Kirson, Y., "Curvature theory in space kinematics", Doctoral dissertation, University of California, Berkley, Calif, USA, (1975).
- [20] Kotelnikov, A. P., "Screw Calculus and Some Applications to Geometry and Mechanics", Annals of Imperial University of Kazan", (1895).
- [21] López, R., "Differential geometry of curves and surfaces in Lorentz–Minkowski space", arXiv:0810.3351v1 [math.DG], (2008).
- [22] McCarthy, J. M., "On the scalar and dual formulations of curvature theory of line trajectories", Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design, vol. 109, no. 1, pp.101–106, (1987).
- [23] Muller, R., "Über die Krümmung der Bahnevoluten bei Starren ebenen Systemen", Zeitschrift für Mathematik und Physik, Vol. 36, pp. 193-205, (1891).

- [24] O'Neill, B., "Elementary Differential Geometry", Revised Second Edition, Elsevier, London, (2006).
- [25] O'Neill, B., "Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity", Academic Press, London, (1983).
- [26] Önder, M., Uğurlu, H. H., "Dual Darboux Frame of a Spacelike Ruled Surface and Darboux Approach to Mannheim Offsets of Spacelike Ruled Surfaces", [arXiv:1201.6148v2](https://arxiv.org/abs/1201.6148v2) [math.DG], (2013).
- [27] Önder, M., Uğurlu, H. H., "Dual Darboux Frame of a Timelike Ruled Surface and Darboux Approach to Mannheim Offsets of Timelike Ruled Surfaces", Proceedings of the National Academy of Sciences, India Section A: Physical Sciences, Vol. 83, No. 2, 163-169, (2013).
- [28] Önder, M., Uğurlu, H.H., "Frenet Frames and Invariants of Timelike Ruled Surfaces", Ain Shams Engineering Journals, 4, 507-513, (2012).
- [29] Ratcliffe J. G., "Foundations of Hyperbolic Manifolds", Springer, New York, (2006).
- [30] Ryuh, B. S., "Robot trajectory planning using the curvature theory of ruled surfaces", Doctoral dissertation, Purdue University, West Lafayette, Ind, USA, (1989).
- [31] Ryuh, B. S., Pennock, G. R., "Accurate motion of a robot end-effector using the curvature theory of ruled surfaces", Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design, vol. 110, no. 4, pp. 383-388, (1988).
- [32] Ryuh, B. S., Pennock, G. R., "Trajectory planning using the Ferguson curve model and curvature theory of a ruled surface", Journal of Mechanical Design, vol. 112, pp. 377-383, (1990).
- [33] Schaaf, J. A., "Curvature theory of line trajectories in spatial kinematics", Doctoral dissertation, University of California, Davis, 111 pp., (1988).
- [34] Struik, D. J., "Lectures on classical differential geometry", Addison-Wesley, Reading, Mass., MR 12, 127, (1950).
- [35] Study, E., "Geometrie der Dynamen", Leipzig, (1903).

- [36] Turgut, A., "3-Boyutlu Minkowski Uzayında Spacelike ve Timelike Regle Yüzeyler", A.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, (1995).
- [37] Turhan, T., "Üç Boyutlu Minkowski Uzayında Lightlike Doğrultmanlı Regle Yüzeylerin Eğrilik Teorisi Üzerine", Yüksek lisans tezi, Süleyman Demirel Üniversitesi, Isparta, (2010).
- [38] Turhan, T., Ayyıldız, N., "On curvature theory of ruled surfaces with lightlike ruling in Minkowski 3-space", Int. J. Of Mathematical Sciences and Applications, Vol. 1, no. 3, (2011).
- [39] Uğurlu H. H., Önder M., "On Frenet Frames and Frenet Invariants of Skew Spacelike Ruled Surfaces in Minkowski 3-space", VII. Geometry Symposium, Kırşehir, Turkey, 7-10 July (2009).
- [40] Uğurlu, H. H., Çalışkan, A., "Darboux Ani Dönme Vektörleri ile Spacelike ve Timelike Yüzeyler Geometrisi", Celal Bayar Üniversitesi Yayınları, Manisa, (2012).
- [41] Uğurlu, H. H., Çalışkan, A., Kılıç, O., "Öklid ve Lorentz Uzaylarında Doğrular Geometrisi", Ders Notları, Basım aşamasında.
- [42] Uğurlu, H.H., Çalışkan, A., "The Study Mapping for Directed Spacelike and Timelike Lines in Minkowski 3-Space IR_1^3 ", Mathematical and Computational Applications, 1(2), 142–148, (1996).
- [43] Veldkamp, G. R., "Canonical Systems and Instantaneous Invariants in Spatial Kinematics", ASME Journal of Mechanisms, Vol. 3, pp. 329-388, (1967).
- [44] Veldkamp, G.R., "On the use of dual numbers, vectors and matrices in instantaneous spatial kinematics", Mechanism and Machine Theory, II, 141-156, (1976).
- [45] Yang, A. T., "Application of Quaternion Algebra and Dual Numbers to the Analysis of Spatial Mechanisms", Doctoral dissertation, Columbia University, (1963).
- [46] Yang, A. T., Roth, B., "Higher-Order Path Curvature in Spherical Kinematics", ASME Journal of Engineering for Industry, May, Series B., Vol. 95, No. 2, pp. 612-616, (1973).

- [47] Yaylı, Y., Çalışkan, A., Uğurlu, H. H., “The E. Study Maps of Circle on Dual Hyperbolic and Lorentzian Unit Spheres $\tilde{H}_0^2$ and $\tilde{S}_1^2$ ”, Mathematical Proceedings of the Royal Irish Academy, 102A (1), 37–47, (2002).
- [48] Yücesan, A., Ayyıldız, N., Çöken, A. C., “On Rectifying Dual Space Curves”, Rev. Mat. Comp. 20 (2), 497–506, (2007).
- [49] Yoon, D. W., “On the Gauss map of translation surfaces in Minkowski 3-space”, Taiwanese Journal of Mathematics, Vol. 6, No. 3, pp. 389-398, (2002).

ÖZGEÇMİŞ

ADI SOYADI : Burak ŞAHİNER
UNVANI : Araştırma Görevlisi
DOĞUM TARİHİ : 12.01.1986
DOĞUM YERİ : İZMİR

Lise öğrenimini 2004 yılında Buca Anadolu Lisesi'nde tamamlayan Burak ŞAHİNER, aynı yıl başladığı Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nün Bilgisayar Bilimleri Ağırlıklı Matematik programından 2008 yılında mezun oldu. 2010 yılında Ege Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalı Geometri Bilim Dalı'nda yüksek lisansını tamamladı. Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalı Geometri Bilim Dalı'nda, 2010 yılında doktora öğrenimine başladı. 2010 yılından bu yana Celal Bayar Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde Araştırma Görevlisi olarak görev yapmaktadır.