

**KİSMİ METRİK UZAYLARDA SABİT NOKTA
TEOREMLERİ**

Abdullah AY

**Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Yrd. Doç. Dr. İsa YILDIRIM
2013
Her hakkı saklıdır**

**ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KİSMİ METRİK UZAYLARDA SABİT NOKTA TEOREMLERİ

Abdullah AY

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

ERZURUM

2013

Her hakkı saklıdır



T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



TEZ ONAY FORMU

KISMİ METRİK UZAYLARDA SABİT NOKTA TEOREMLERİ

Yrd. Doç. Dr. İsa YILDIRIM danışmanlığında Abdullah AY tarafından hazırlanan bu çalışma 10/09/2013 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans tezi olarak **oybirliği** ile kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Murat ÖZDEMİR

İmza :

Üye : Yrd. Doç. Dr. İsa YILDIRIM

İmza :

Üye : Yrd. Doç. Dr. Alper ÇİLTAŞ

İmza :

Yukarıdaki sonucu onaylıyorum

Prof. Dr. İhsan EFEOĞLU
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

KİSMİ METRİK UZAYLARDA SABİT NOKTA TEOREMLERİ

Abdullah AY

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. İsa YILDIRIM

Bu çalışmada, son yıllarda tanımlanan kısmi metrik uzay kavramı verilerek bu uzayda sabit nokta teorisi incelendi. İlk olarak sabit nokta teorisi ile ilgili ön bilgiler, bazı temel tanım ve teoremler verildi. Kısmi metrik uzayın tanımı, bu uzaylar için örnekler ve kısmi metrik uzayların bazı özellikleri verildi. Kısmi metrik uzay üzerinde bazı temel topolojik kavramlar ve tanımlar genelleştirildi. Ayrıca tam kısmi metrik uzayın tanımı verildi ve kısmi metrik uzaylar üzerindeki daraltan dönüşümlerin sabit noktaları araştırıldı.

2013, 52 sayfa

Anahtar Kelimeler: Metrik uzay, Kısmi metrik uzay, Sabit nokta, Daraltan dönüşüm

ABSTRACT

MS Thesis

FIXED POINT THEOREMS ON PARTIAL METRIC SPACES

Abdullah AY

Ataturk University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Asst. Prof. Dr. İsa YILDIRIM

In this study, recently identified partial metric space term was given, fixed point theorem were investigated for this space. Initially, background information, some essential definitions and theorems were given about fixed point theorem. Definition of partial metric spaces, examples for this spaces and some properties of partial metric spaces have been given. Some topological concepts and definitions were generalized to partial metric spaces. Also definition of complete partial metric spaces were given and the fixed points of contraction mappings on partial metric spaces were examined.

2013, 52 pages

Keywords: Metric space, Partial metric space, Fixed point, Contraction mapping

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu alışma Atatürk Üniversitesi Fen Fakóltesi Matematik Bölümü'nde hazırlanmıştır.

Yüksek lisans tez konumu belirlemede bana yardımcı olan ve tezimin hazırlanması esnasında hiçbir konuda yardımını, zamanını ve ilgisini esirgemeyen saygıdeğer danışman hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. İsa YILDIRIM'a en içten dileklerle teşekkür eder saygılarımı sunarım.

Yüksek lisans eğitimim boyunca ve çalışmalarım esnasında engin görüş, öneri, bilgi ve tecrübelerinden faydalandığım Atatürk Üniversitesi Fen Fakóltesi Matematik Bölümü öğretim üyelerinden Sayın Prof. Dr. Murat ÖZDEMİR ve Sayın Doç. Dr. Hükmi KIZILTUNÇ hocama destek ve yardımlarından dolayı teşekkür ederim.

Ayrıca öğrenim hayatım boyunca kendilerinden görmüş olduğum destek ve güvenden dolayı aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Abdullah AY

Eylül - 2013

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
SİMGELER DİZİNİ	v
1. GİRİŞ	1
1.1. Çalışmanın Amacı	2
2. KURAMSAL TEMELLER	3
2.1. Bazı Temel Tanımlar ve Kavramlar	3
2.2. Sabit Nokta Kavramı	5
3. MATERYAL ve YÖNTEM	14
3.1. Kısmi Metrik Uzay Kavramı ve Genel Özellikleri	14
3.2. Tam Kısmi Metrik Uzaylar.....	27
4. ARAŞTIRMA BULGULARI	32
5. TARTIŞMA ve SONUÇ	49
KAYNAKLAR	51
ÖZGEÇMİŞ	53

SİMGELER DİZİNİ

\forall	Her (herhangi)
\exists	En azından bir
\mathbb{N}	Doğal sayılar kümesi
\mathbb{R}	Reel sayılar kümesi
\mathbb{R}^+	Pozitif reel sayılar kümesi
(X, d)	Metrik uzay
$B_p(x; \varepsilon)$	x merkezli ε yarıçaplı p -açık yuvar
$F(T)$	T nin tüm sabit noktalarının kümesi
$T^n(x)$	x in T altındaki n . iterasyonu
$\mathfrak{R}(x)$	x in bütün komşuluklarının kümesi
\bar{A}	A kümesinin kapanışı
(X, p)	Kısmi metrik uzay
$f \circ g$	f ile g nin bileşkesi
f^{-1}	f nin tersi
\mathfrak{I}	\mathbb{R} de boştan farklı kapalı sınırlı aralıkların kümesi
$X - F$	F nin tümleyeni
$p(x, A)$	$x \in X$ noktasının $A \subseteq X$ kümesine olan uzaklığı

1. GİRİŞ

Kısmi metrik uzaylar, S.G. Matthews tarafından, genel topoloji ve uygulamaları 8. yaz konferansında tanıtıldı. Dört aksiyomla verilen kısmi metrik uzay kavramı, kendisine uzaklığı sıfırdan farklı olan kümeler kavramını da içermekte olup bu manada metrik uzay kavramından daha geniş bir kavramdır. Bu aksiyomlar üçüncü bölümde verilmiştir.

Kısmi metrik uzay kavramına en belirgin örnek $a, b \in \mathbb{R}^+$ iken $p(a, b) = \max\{a, b\}$ ile tanımlanan bağıntıdır. Bu bağıntıya göre (\mathbb{R}^+, p) çifti bir kısmi metrik uzaydır. Bir başka örnek \mathbb{R} de tanımlı boş olmayan kapalı sınırlı aralıkların bir ailesi $\tau = \{[a, b] : a, b \in \mathbb{R}, a \leq b\}$ üzerinde verilebilir. $[a, b], [c, d] \in \tau$ olmak üzere

$$p([a, b], [c, d]) = \max\{b, d\} - \min\{a, c\}$$

ile tanımlanırsa p , τ üzerinde kısmi metrik olur. Bu kavram reel sayılar kümesi üzerindeki alışılmış metrikle de yakından alakalıdır. Kısmi metrik kavramıyla $[a, b]$ nin kendisine uzaklığı $b - a$ dır. Bu yolla her $a \in \mathbb{R}$ elemanını $[a, a]$ ifadesine taşırız. Böylece alışılmış metrik kavramı kısmi metrik başlığına taşınmış olur (Künzi 2001).

Kısmi metrik uzay kavramı

$$\{B_p(x, \varepsilon) : x \in X, \varepsilon > 0\}$$

p -açık yuvar ailesini taban kabul eden bir T_0 topolojisini üretir (Matthews 1994).

Referanslar arasında da yer alan M. Schellekens, S. Romaguera, S. Oltra ve O. Valero gibi pek çok matematikçinin ilgisini çeken bu kavramların Banach teoremine uygulanması hakkında çok sayıda makale yazılmıştır (Oltra *et al.* 2002; Waszkiewicz 2003; Oltra and Valero 2004; Valero 2005; Altun ve Şimşek 2008). Son zamanlarda bilgisayar yoluyla Banach sabit nokta teoreminin bazı genellemeleri kısmi metrik uzaylar için kısmen de olsa ifade edilmiştir (Seda 1996; Escardo 1996; Bukatin and Scott 1997; Bukatin and Shorina 1998; Romaguera and Schellekens 1999, 2001, 2005; Schellekens 1995, 2003, 2004).

Bu makalelerden Oltra ve Valero (2004) tarafından ‘‘Banach’s fixed point theorem for partial metric spaces’’ ve Valero (2005) tarafından ‘‘On Banach fixed point theorems for partial metric spaces’’ adlı makaleler temel alınarak, Banach teoreminin kısmi metrik uzaylarda geçerli Banach sabit nokta teoremine ve onun bazı genişlemelerine taşınması durumu araştırılacaktır.

Temel kavramlarda A.F. Rabarison (2007)’un makalesinden, R.P. Agarwal, M. Meehan, D. O’Regan’ın ‘‘Fixed Point Theory and Applications’’ ve J. Dugundji, A. Granas’ın ‘‘Fixed Point Theory’’ kitaplarından faydalanılmıştır.

1.1. Çalışmanın Amacı

Bizim bu tezde amacımız S.J. O’Neill ve S.G. Matthews’e ait tanımlar ışığında kısmi metrik uzaylar için Banach Teoremi hakkında, son yıllarda yapılan bazı çalışmalarını incelemektir.

2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde ileride kullanacağımız temel tanım ve kavramlar verilecektir.

2.1. Bazı Temel Tanımlar ve Kavramlar

Tanım 2.1.1. X boş olmayan bir küme ve $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $x, y, z \in X$ için,

$$M1. \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$M2. \quad d(x, y) = d(y, x)$$

$$M3. \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

şartları sağlanıyorsa d ye X üzerinde bir metrik, d ile birlikte X e metrik uzay denir. Bu metrik uzay $X = (X, d)$ veya X_d ile gösterilir.

Tanım 2.1.2. (X, d) bir metrik uzay ve (x_n) bu uzayda bir dizi olsun.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0$$

olacak şekilde bir $x \in X$ varsa (x_n) dizisine X de yakınsak dizi ve x e de bu dizinin limiti denir.

Tanım 2.1.3. (X, d) bir metrik uzay ve (x_n) bu uzayda bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $n, m > n_0$ olduğunda

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon)$ sayısı varsa (x_n) dizisine Cauchy dizisi denir.

Tanım 2.1.4. (X, d) bir metrik uzay olsun. X deki her (x_n) Cauchy dizisi yakınsak ise, (X, d) metrik uzayına tam metrik uzay denir.

Tanım 2.1.5. (X, d) bir metrik uzay olsun. X deki her dizi yakınsak bir alt diziye sahip ise (X, d) uzayına kompakt metrik uzay denir.

Tanım 2.1.6. (X, d) ve (Y, ℓ) iki metrik uzay, $f : X \rightarrow Y$ bir dönüşüm ve $x_0 \in X$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısı için, $d(x, x_0) < \delta$ olduğunda $\ell(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ veya denk bir ifade ile

$$f(B(x_0, \delta)) \subseteq B(f(x_0), \varepsilon)$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa, f ye x_0 noktasında süreklidir denir. f , X in her noktasında sürekli ise f ye X de süreklidir denir.

Tanım 2.1.7. (X, d) bir metrik uzay olsun. $r > 0$ bir reel sayı ve $a \in X$ olmak üzere

$$B_a(a, r) = \{x \in X : d(x, a) < r\}$$

şeklinde tanımlı yuvara, a merkezli r yarıçaplı yuvar denir.

Tanım 2.1.8. $A \subset \mathbb{R}$ olsun. $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Eğer her $x \in A$ için $m \leq f(x)$ olacak şekilde en az bir $m \in \mathbb{R}$ varsa f fonksiyonu alttan sınırlıdır denir.

Tanım 2.1.9. $A \subset \mathbb{R}$ olsun. $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Eğer her $x \in A$ için $m \geq f(x)$ olacak şekilde en az bir $m \in \mathbb{R}$ varsa f fonksiyonu üstten sınırlıdır denir.

2.2. Sabit Nokta Kavramı

Tanım 2.2.1. X boş olmayan bir küme ve $T : X \rightarrow X$ herhangi bir dönüşüm olsun. Eğer $Tx = x$ olacak şekilde bir $x \in X$ varsa, bu x noktasına T nin sabit noktası denir. O halde $Tx = x$ denkleminin çözümü veya çözümleri T nin sabit noktalarıdır. T nin tüm sabit noktalarının kümesi $F(T)$ veya $Fix(T)$ ile gösterilir. Örneğin,

1. $X = [0, 4]$ olmak üzere $T : X \rightarrow X$, $Tx = 4 - x$ dönüşümü için $F(T) = \{2\}$ dir.
2. $X \neq \emptyset$ olmak üzere $I : X \rightarrow X$ özdeş dönüşümü için X in her bir noktası bir sabit noktadır.
3. $T : (0, 2] \rightarrow (0, 2]$, $Tx = \frac{x}{3}$ dönüşümünün sabit noktası yoktur. Bu dönüşüm için $x = 0$ noktası tek sabit nokta olabilirdi. Fakat $0 \notin (0, 2]$ dir.

X boştan farklı bir küme ve $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Herhangi bir $x \in X$ için $T^n(x)$, $T^0(x) = x$ ve $T^{n+1}(x) = T(T^n(x))$ şeklinde tanımlanır. $T^n(x)$ e, x in T altındaki n . iterasyonu denir. T^n ($n \geq 1$) dönüşümüne de T nin n . iterasyonu denir. Bundan sonra $T(x)$ yerine Tx notasyonu kullanılacaktır.

$T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeleri yazabiliriz.

1. Keyfi bir $n \in \mathbb{N}$ için $F(T) \subset F(T^n)$ dir.

2. Keyfi bir $n \in \mathbb{N}$ için $F(T^n) = \{x\}$ ise, $F(T) = \{x\}$ dir. Ancak bunun tersi genelde doğru değildir. Örneğin, $T: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ dönüşümü $T(1) = 3, T(2) = 2, T(3) = 1$ olarak tanımlanırsa, $F(T^2) = \{1, 2, 3\}$ olduğu halde $F(T) = \{2\}$ dir.

X boştan farklı bir küme ve $T, S: X \rightarrow X$ herhangi iki dönüşüm olsun. Eğer $Tx = Sx = x$ olacak şekilde bir $x \in X$ varsa bu x noktasına T ve S dönüşümlerinin ortak sabit noktası denir. Bu dönüşümlerin ortak sabit noktalarının kümesi $F = F(T) \cap F(S)$ ile gösterilir. Şimdi birden fazla dönüşümün ortak sabit noktalarıyla ilgili örnekler vereceğiz.

Örnek 2.2.1.1. Eğer $X = \mathbb{R}, Tx = x^2 + x - 1$ ve $Sx = x^3$ ise $F = F(T) \cap F(S) = \{1, -1\}$ dir.

Aşağıdaki örneklerden de görüleceği gibi bir T fonksiyonunun herhangi bir sabit noktası olmayabileceği gibi bir veya birden fazla sabit noktası da olabilir.

Örnek 2.2.1.2. $a \neq 0$ olmak üzere $T(x, y) = (x + a, y - a)$ ile tanımlanan $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ fonksiyonunun sabit noktası yoktur.

Örnek 2.2.1.3. $T(x, y) = (x^3 + x, 2y + 2)$ ile verilen $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ fonksiyonunun bir sabit noktası vardır. Bu nokta $(0, -2)$ noktasıdır.

Örnek 2.2.1.4. $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}, T: X \rightarrow X, T(x, y) = (x, 0)$ olarak tanımlanan T fonksiyonu için $(x, 0)$ şeklindeki noktalar sabit noktalardır.

Tanım 2.2.2. (X, d) bir metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y)$$

olacak şekilde bir $k \geq 0$ sabit sayısı varsa T ye Lipschitz (Lipschitzian) dönüşüm denir.

Tanım 2.2.3. (X, d) bir metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir Lipschitz dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için,

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y)$$

eşitsizliği $0 \leq k < 1$ olması halinde sağlanıyorsa, T ye daraltan dönüşüm veya büzülme dönüşümü (contraction) denir.

Teorem 2.2.4. (X, d) bir tam metrik uzay olmak üzere $T : X \rightarrow X$ bir daraltan dönüşüm olsun. Bu durumda T nin bir tek $x \in X$ sabit noktası vardır ve herhangi bir $x_0 \in X$ için $(T^n x)$ iterasyon dizisi, T nin bu sabit noktasına yakınsar. Yani her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = T(x_{n-1})$ ile tanımlı x_n iterasyon dizisi T nin bu sabit x noktasına yakınsar.

İspat: Önce sabit bir noktanın varlığını ispatlayalım. $x_0 \in X$ başlangıç noktasını seçelim.

$$x_1 = Tx_0, \quad x_2 = Tx_1 = T^2x_0, \dots, x_n = T_{n-1} = \dots = T^n x_0$$

iterasyon dizisini göz önüne alalım. $n < m$ için

$$\begin{aligned}
d(x_n, x_m) &= d(T^n x_0, T^m x_0) = d(T^n x_0, T^n T^{m-n} x_0) \\
&\leq a^n d(x_0, T^{m-n} x_0) = a^n d(x_0, x_{m-n}) \\
&\leq a^n \{d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2) + \dots + d(x_{m-n-1}, x_{m-n})\} \\
&\leq a^n d(x_0, x_1) \{1 + a + a^2 + \dots + a^{m-n-1}\} \\
&\leq a^n d(x_0, x_1) \sum_{j=0}^{\infty} a^j \\
&\leq \frac{a^n}{1-a} d(x_0, x_1)
\end{aligned}$$

elde edilir. $0 < a < 1$ olduğundan (x_n) dizisinin bir Cauchy dizisi olduğu sonucuna ulaşırız. Fakat (X, d) bir tam metrik uzay olduğundan bu (x_n) dizisi $x \in X$ e yakınsar. Şimdi x elemanın T nin bir sabit noktası olduğunu göstereceğiz.

$$\begin{aligned}
d(Tx, x) &\leq d(T_n, T^n x_0) + d(T^n x_0, x) \\
&\leq ad(x, x_{n-1}) + d(x_n, x)
\end{aligned}$$

olduğundan ve (x_n) dizisi x e yakınsadığından $d(Tx, x) = 0$ elde edilir ve buradan

$$Tx = x$$

sonucuna ulaşılır. Şimdi T nin sabit noktasının tek olduğunu gösterelim. Herhangi bir $y \in X$ için $Ty = y$ olsun. O zaman $d(x, y) = d(Tx, Ty) \leq ad(x, y)$ olur. $0 < a < 1$ olduğundan $d(x, y) = 0$ olur. Dolayısıyla $x = y$ sonucuna varılır (Soykan 2008).

Tam olmayan metrik uzaylarda tanımlanan daraltan dönüşümlerin sabit noktaya sahip olması gerekmez. Örneğin, $X = (0, 1]$ olmak üzere $T: X \rightarrow X$ ve $Tx = \frac{x}{2}$ dönüşümünü alalım. Bu T dönüşümü daraltan dönüşümdür, fakat sabit noktası yoktur.

Daraltan bir dönüşüm aynı zamanda süreklidir. Dolayısıyla T sürekli değilse, bir daraltan dönüşüm de olamaz. Buna karşın T daraltan dönüşüm olmasa bile, herhangi bir n için T^n daraltan bir dönüşüm olabilir.

Teorem 2.2.5. (X, d) bir tam metrik uzay ve $n \in \mathbb{N}$ için T^n bir daraltan dönüşüm olacak şekilde bir $T: X \rightarrow X$ dönüşümü verilsin. Bu durumda T bir tek sabit noktaya sahiptir (Khamsi and Kirk 2001).

İspat: Banach sabit nokta teoremi gereğince, T^n bir tek x_0 sabit noktasına sahiptir. Dolayısıyla

$$T^{n+1}x_0 = T(T^n x_0) = Tx_0$$

yazılır. Ayrıca Tx_0 , T^n nin bir sabit noktasıdır. T^n nin sabit noktası tek olduğu için $Tx_0 = x_0$ olur. Eğer $Ty = y$ ise, bu durumda $T^n y = y$ olur. Bu da $y = x_0$ olmasını gerektirir.

Örnek 2.2.6. $T: [0, 2] \rightarrow [0, 2]$, $Tx = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1] \\ 1, & x \in (1, 2] \end{cases}$ olsun. T dönüşümü $x = 1$ de süreksizdir. Bu nedenle daraltan dönüşüm değildir. Diğer taraftan, $T^2: \{0, 1\} \rightarrow \{0\}$, $T^2(x) = 0$ olup T^2 daraltan bir dönüşümdür. Ayrıca $x = 0$, T^2 nin tek sabit noktasıdır.

Tanım 2.2.7. (X, d) bir metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ ve $x \neq y$ için,

$$d(Tx, Ty) < d(x, y)$$

ise, T ye kesin daraltan dönüşüm (contractive) denir. Bu tip dönüşümlerin sabit noktasını garanti etmek için çalışılan uzayın kompakt olması yeterlidir.

Teorem 2.2.8. (X, d) bir kompakt metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ kesin daraltan bir dönüşüm olsun. Bu durumda T bir tek x_0 sabit noktasına sahiptir. Üstelik her $x \in X$ için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T^n x = x_0$$

dir (Khamsi and Kirk 2001).

İspat: $x \in X$ için,

$$\phi(x) = d(x, Tx)$$

şartını sağlayan bir $\phi: X \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonunu tanımlayalım. Bu durumda ϕ sürekli ve alttan sınırlıdır. Bu yüzden ϕ , bir $x_0 \in X$ noktasında minimum değerini alır. $x_0 \neq Tx_0$ olduğunu kabul edelim. Buradan

$$\phi(Tx_0) = d(Tx_0, T^2x_0) < d(x_0, Tx_0) = \phi(x_0)$$

elde edilir. Bu ise $x_0 = Tx_0$ olmasını gerektirir. Şimdi $x \in X$ noktası ve $(d(T^n x, x_0))$ dizisi verilsin. Şayet $T^n x \neq x_0$ ise,

$$d(T^{n+1} x, x_0) = d(T^{n+1} x, Tx_0) < d(T^n x, x_0)$$

olur. Bu nedenle $(d(T^n x, x_0))$ dizisi kesin azalandır. Sonuç olarak $n \rightarrow \infty$ için

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} d(T^n x, x_0)$$

limiti vardır ve $r \geq 0$ dır. Ayrıca X kompakt olduğu için $(T^n x)$ dizisi yakınsak bir $(T^{n_k} x)$ alt dizisine sahiptir. $\lim_{k \rightarrow \infty} T^{n_k} x = z$ diyelim. $(T^n x)$ dizisi azalan olduğundan

$$r = d(z, x_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} d(T^{n_k} x, x_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} d(T^{n_k+1} x, x_0) = d(Tz, x_0)$$

olur. Eğer $z \neq x_0$ ise, bu durumda

$$d(Tz, x_0) = d(Tz, Tx_0) < d(z, x_0)$$

dir. Bu ise $(T^n x)$ in herhangi yakınsak alt dizisinin x_0 noktasına yakınsadığını gösterir.

O halde $\lim_{n \rightarrow \infty} T^n x = x_0$ dır.

Örnek 2.2.9. $X = [a, b]$, $d(x, y) = |x - y|$ ve $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Eğer T , $[a, b]$ kapalı aralığında sürekli, (a, b) açık aralığında türevlenebilir bir dönüşüm ve her $x \in (a, b)$ için,

$$|T'x| \leq k < 1$$

şartını sağlıyorsa bu durumda T nin X de bir tek sabit noktası vardır. Gerçekten de ortalama değer teoreminden her $x, y \in [a, b]$ için $c \in (a, b)$ olmak üzere,

$$|Tx - Ty| = T'(c)|(x - y)| \leq k|x - y|$$

olur. Böylece Banach daralma ilkesi gereği T nin bir tek sabit noktası vardır.

Teorem 2.2.10. (X, d) bir tam metrik uzay ve $x_0 \in X$ olmak üzere $T : B(x_0, r) \rightarrow X$ k -daraltan bir dönüşüm olsun. Eğer

$$d(Tx_0, x_0) < (1-k)r$$

ise bu durumda T dönüşümü $B(x_0, r)$ diskinde bir tek sabit noktaya sahiptir (Agarwal *et al.* 2001).

İspat: $d(Tx_0, x_0) < (1-k)r$ olmak üzere $0 \leq r_0 < r$ şartını sağlayan bir r_0 vardır. Göstereceğiz ki $T : \overline{B(x_0, r_0)} \rightarrow \overline{B(x_0, r_0)}$ dir. $x \in \overline{B(x_0, r_0)}$ için

$$d(Tx, x_0) \leq d(Tx, Tx_0) + d(Tx_0, x_0) \leq kd(x, x_0) + (1-k)r_0 \leq r_0$$

olur. Banach sabit nokta teoreminden dolayı T nin $\overline{B(x_0, r_0)} \subset B(x_0, r)$ da bir tek sabit noktası vardır.

Tam olmayan metrik uzaylarda tanımlanan daraltan dönüşümlerin sabit noktası olması gerekmediği aşağıdaki örnekte gösterilmiştir.

Örnek 2.2.11. $X = (0, 1]$ ve $T : X \rightarrow X$, $Tx = \frac{2x}{7}$ dönüşümü verilsin. Bu durumda

$$d(Tx, Ty) = \left| \frac{2x}{7} - \frac{2y}{7} \right| = \frac{2}{7} |x - y| = \frac{2}{7} d(x, y)$$

olduğundan T bir daraltan dönüşümdür. Fakat T nin X de bir sabit noktası yoktur.

Çünkü sabit noktanın tanımından $\frac{2x}{7} = x \Rightarrow 2x = 7x \Rightarrow x = 0$ olur. Burada $x = 0 \notin (0,1] = X$ olduğundan T nin X de bir sabit noktası yoktur.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu bölümde, metrik uzayların bir genişlemesi olan kısmi metrik uzaylar ile ilgili tanımları vereceğiz ve metrik uzaylarda verilen benzer özelliklerin kısmi metrik uzaylar için de doğruluğunu göstereceğiz.

3.1. Kısmi Metrik Uzay Kavramı ve Genel Özellikleri

Tanım 3.1.1. X boştan farklı bir küme ve $x, y, z \in X$ olmak üzere $p : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu aşağıda verilen şartları sağlayan bir fonksiyon olsun.

$$(P1) \quad x = y \Leftrightarrow p(x, x) = p(x, y) = p(y, y)$$

$$(P2) \quad p(x, x) \leq p(x, y)$$

$$(P3) \quad p(x, y) = p(y, x)$$

$$(P4) \quad p(x, z) \leq p(x, y) + p(y, z) - p(y, y).$$

Bu durumda p ye X üzerinde kısmi metrik, (X, p) ikilisine de kısmi metrik uzay denir.

Eğer $p(x, y) = 0$ ise (P1) ve (P2) den $x = y$ elde edilir. Fakat $x = y$ ise $p(x, y)$ değeri 0 olmayabilir.

Lemma 3.1.2. Her metrik uzay bir kısmi metrik uzaydır (Matthews 2008).

Örnek 3.1.3. $p : [0, \infty) \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $p(a, b) = \max\{a, b\}$ dönüşümünü alalım. $a, b, c \in [0, \infty)$ ve $0 \leq a \leq b \leq c$ olsun.

(P1) $\max\{a, a\} = \max\{a, b\} = \max\{b, b\}$ olabilmesi için gerek ve yeter şart $a = b$ olmasıdır.

(P2) $a \leq b$ olduğundan $\max\{a, a\} \leq \max\{a, b\}$ dir.

(P3) $\max\{a, b\} = \max\{b, a\}$ olduğu açıktır.

(P4) $\max\{a, b\} = b, \max\{a, c\} = c, \max\{c, b\} = c, \max\{c, c\} = c$ olduğundan

$\max\{a, b\} \leq \max\{a, c\} + \max\{c, b\} - \max\{c, c\}$ olduğu kolaylıkla görülür.

Kısmi metrik aksiyomları sağlandığından p bir kısmi metrik ve $([0, \infty), p)$ de kısmi metrik uzay olur. Fakat (M1) aksiyomu sağlanmadığından p metrik değildir.

Örnek 3.1.4. \mathfrak{I} , \mathbb{R} de boştan farklı kapalı sınırlı aralıkların kümesi, yani $\mathfrak{I} = \{[a, b] \mid a \leq b\}$ olsun. $[a, b], [c, d], [e, f] \in \mathfrak{I}$ için

$$p([a, b], [c, d]) = \max\{b, d\} - \min\{a, c\}$$

olsun ve $a \leq c \leq e$ ve $b \leq d \leq f$ alalım.

(P1) Eğer $\max\{b, b\} - \min\{a, a\} = \max\{b, d\} - \min\{a, c\} = \max\{d, d\} - \min\{c, c\}$ ise $b - a = d - a = d - c$ dir. Yani $a = c$ ve $b = d$ dir.

(P2) $b - a \leq d - a$ olduğundan $\max\{b, b\} - \min\{a, a\} \leq \max\{b, d\} - \min\{a, c\}$ elde edilir.

(P3) $\max\{b, d\} - \min\{a, c\} = \max\{d, b\} - \min\{c, a\}$ olduğu açıktır.

(P4) $\max\{b, d\} - \min\{a, c\} = d - a$, $\max\{b, f\} - \min\{a, e\} = f - a$
 $\max\{f, d\} - \min\{e, c\} = d - e$ ve $\max\{f, f\} - \min\{e, e\} = f - e$ olduğundan
 $d - a \leq (f - a) + (f - c) - (f - e)$ dir. Bu durumda

$$p([a, b], [c, d]) \leq p([a, b], [e, f]) + p([e, f], [c, d]) - p([e, f], [e, f])$$

elde edilir. Kısmi metrik aksiyomları sağlandığından p bir kısmi metrik ve (\mathfrak{I}, p) de kısmi metrik uzay olur.

Teorem 3.1.5. (X, p) bir kısmi metrik uzay olsun.

$$d(x, y) = 2p(x, y) - p(x, x) - p(y, y)$$

olarak tanımlansın. Buradan (X, d) bir metrik uzaydır (Matthews 1994).

İspat: 1) a) $x, y, z \in X$ alalım.

$$\begin{aligned} d(x, y) = 0 &\Rightarrow 2p(x, y) - p(x, x) - p(y, y) = 0 \\ &\Rightarrow 2p(x, y) = p(x, x) + p(y, y) \\ &\Rightarrow 2p(x, y) = p(x, x) + p(x, x) \wedge 2p(x, y) = p(y, y) + p(y, y) \\ &\Rightarrow 2p(x, y) = 2p(x, x) \wedge 2p(x, y) = 2p(y, y) \\ &\Rightarrow p(x, y) = p(x, x) = p(y, y) \\ &\Rightarrow x = y \end{aligned}$$

elde edilir.

b) $x = y$ olsun. $d(x, y) = 0$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} d(x, y) &= 2p(x, y) - p(x, x) - p(y, y) \\ &= 2p(x, y) - p(x, y) - p(x, y) \\ &= 2p(x, y) - 2p(x, y) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur.

2) $d(x, y) = d(y, x)$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} d(x, y) &= 2p(x, y) - p(x, x) - p(y, y) \\ &= 2p(y, x) - p(y, y) - p(x, x) \\ &= d(y, x) \end{aligned}$$

dir.

3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} d(x, y) &= 2p(x, y) - p(x, x) - p(y, y) \\ &\leq 2[p(x, z) + p(z, y) - p(z, z)] - p(x, x) - p(y, y) \\ &\leq 2p(x, z) + 2p(z, y) - p(z, z) - p(z, z) - p(x, x) - p(y, y) \\ &= [2p(x, z) - p(x, x) - p(z, z)] + [2p(z, y) - p(z, z) - p(y, y)] \\ &= d(x, z) + d(z, y) \end{aligned}$$

yazılır. O halde $\forall x, y, z \in X$ için 1, 2, 3 şartları sağlandığından (X, d) bir metrik uzaydır.

Tanım 3.1.6. $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, $x \in X$ ve (X, p) kısmi metrik uzay olsun.

$$B_p(x; \varepsilon) = \{y \mid p(x, y) < p(x, x) + \varepsilon\}$$

kümesine x merkezli ε yarıçaplı p -açık yuvar denir.

Örnek 3.1.7. $X = \mathbb{R}$ olmak üzere $p : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ ve $p(x, y) = |x - y|$ olarak tanımlanırsa p bir kısmi metrik ve (\mathbb{R}, p) kısmi metrik uzay olur. Gerçekten de her $x, y, z \in \mathbb{R}$ için

(P1) $x = y$ ise $p(x, x) = |x - x| = 0$, $p(x, y) = |x - y| = 0$, $p(y, y) = |y - y| = 0$ olduğundan $p(x, x) = p(x, y) = p(y, y)$ dir. $p(x, x) = p(x, y) = p(y, y)$ ise $|x - x| = |y - y| = |x - y| = 0$ dan $x = y$ olur. Dolayısıyla $x = y \Leftrightarrow p(x, x) = p(x, y) = p(y, y)$ olur.

(P2) $p(x, x) = |x - x| = 0 \leq p(x, y) = |x - y|$ dir.

(P3) $p(x, y) = |x - y| = |y - x| = p(y, x)$ dir.

(P4) $p(x, z) = |x - z| = |x - y + y - z| \leq |x - y| + |y - z| - |y - y|$
 $= p(x, y) + p(y, z) - p(y, y)$

olur. Dolayısıyla kısmi metrik aksiyomları sağlandığından $p(x, y) = |x - y|$ kısmi metriğine göre (X, p) bir kısmi metrik uzay olur. Şimdi p kısmi metriğine göre açık yuvar kümesini bulalım.

$$\begin{aligned} B_p(x; \varepsilon) &= \{y : p(x, y) < p(x, x) + \varepsilon\} = \{y : |x - y| < |x - x| + \varepsilon\} \\ &= \{y : |x - y| < 0 + \varepsilon\} = \{y : |y - x| < \varepsilon\} \\ &= (x - \varepsilon, x + \varepsilon). \end{aligned}$$

Tanım 3.1.8. $V \subseteq X$ bir küme ve (X, p) kısmi metrik uzay olsun. $B_p(x; \varepsilon) \subseteq V$ olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ sayısı varsa V kümesine x in bir komşuluğu denir.

$\mathfrak{R}(x)$, x in bütün komşuluklarının kümesini gösterir.

Tanım 3.1.9. (X, p) kısmi metrik uzay ve $G \subseteq X$ olsun. Her $x \in G$ için $B_p(x; \varepsilon) \subseteq G$ olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ varsa G ye p -açık denir.

Teorem 3.1.10. Bütün p -açık yuvarlar p -açıktır (Rabarison 2007).

İspat: (X, p) kısmi metrik uzay ve $B_p(z; r)$ p -açık yuvar olsun. $x \in B_p(z; r)$ alalım ve $\varepsilon = r + p(z, z) - p(x, z)$ seçelim. $B_p(x; \varepsilon) \subseteq B_p(z; r)$ olduğunu göstereceğiz. $y \in B_p(x; \varepsilon)$ alalım. Bu durumda $p(x, y) < p(x, x) + \varepsilon$ olur. Buradan

$$\begin{aligned} p(z, y) &\leq p(z, x) + p(x, y) - p(x, x) \\ &< p(z, x) + p(x, x) + \varepsilon - p(x, x) \\ &= p(z, x) + \varepsilon \\ &= p(z, x) + r + p(z, z) - p(x, z) \\ &= p(z, z) + r \end{aligned}$$

dir. Böylece $y \in B_p(z; r)$ elde edilir.

Tanım 3.1.11. $F \subseteq X$ olsun. Eğer F nin tümleyeni $X - F$ p -açık ise F alt kümesine p -kapalıdır denir.

Tanım 3.1.12. (X, p) kısmi metrik uzay olsun ve X in bir A alt kümesini alalım. x in her komşuluğu A kümesinde bir nokta içeriyorsa, X deki bütün x noktalarının

kümesine A nın kapanışı denir ve $\bar{A} = \{\forall x \in X \mid \forall V \in \mathfrak{R}(x), V \cap A \neq \emptyset\}$ şeklinde gösterilir.

Bir $x \in X$ noktasının $A \subseteq X$ kümesine olan uzaklığı $p(x, A) = \inf \{p(x, a) : a \in A\}$ şeklinde tanımlanır. \bar{A} , A nın kapanışı olmak üzere $a \in \bar{A} \Leftrightarrow p(a, A) = p(a, a)$ dır.

Tanım 3.1.13. (X, p) kısmi metrik uzay ve $S \subseteq X$ olsun. Eğer $\bar{S} = X$ oluyorsa S ye X de yoğun denir.

(X, p) kısmi metrik uzay olsun. $p^s, d_m : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ olmak üzere

$$p^s(x, y) = 2p(x, y) - p(x, x) - p(y, y),$$

$$d_m(x, y) = \max \{p(x, y) - p(x, x), p(x, y) - p(y, y)\}$$

dönüşümleri X üzerinde (alışılmış) metriklerdir. p^s ve d_m nin denk metrik oldukları açıktır. Bu dönüşümler için eğer $([0, \infty), p)$ kısmi metrik uzayında $p(x, y) = \max \{x, y\}$ kısmi metriğini alırsak $p^s(x, y) = |x - y| = d_m(x, y)$ sonucunu elde ederiz.

Tanım 3.1.14. (X, p) kısmi metrik uzayındaki bir (x_n) dizisinin $x \in X$ e yakınsaması için gerek ve yeter şart $\lim_{n \rightarrow \infty} p(x_n, x) = p(x, x)$ olmasıdır.

Teorem 3.1.15. Bir (X, p) kısmi metrik uzayındaki bir (x_n) dizisinin X de bir x_0 noktasına yakınsaması için gerek ve yeter şart her $n \geq N$ için $x_n \in V$ olacak şekilde x_0 ın her V komşuluğu için bir $N \in \mathbb{N}$ olmasıdır (Rabarisson 2007).

İspat: a) $x_n \rightarrow x_0$ ve $V \in \mathfrak{R}(x_0)$ alalım. Buradan $B_p(x_0; \varepsilon) \subseteq V$ olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ sayısı vardır. $x_n \rightarrow x_0$ olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p(x_n, x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} p(x_n, x_n) = p(x_0, x_0)$$

dır. Bu durumda her $n \geq N$ için $|p(x_n, x_0) - p(x_0, x_0)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ vardır.

$$p(x_n, x_0) < p(x_0, x_0) + \varepsilon$$

ve buradan $x_n \in B_p(x_0; \varepsilon) \subseteq V$ dir.

b) Her $n \geq N$ için $x_n \in V$ olacak şekilde x_0 in her V komşuluğu için bir $N \in \mathbb{N}$ olduğunu varsayalım. $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned} p(x_n, x_0) &< p(x_0, x_0) + \varepsilon \\ p(x_n, x_0) - p(x_0, x_0) &< \varepsilon \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Bu durumda $B_p(x_0; \varepsilon) \in \mathfrak{R}(x_0)$ dir ve her $n \geq N$ için $x_n \in B_p(x_0; \varepsilon)$ olacak şekilde $N \in \mathbb{N}$ vardır. (P2) den $p(x_n, x_0) \geq p(x_0, x_0)$ dir. Dolayısıyla $|p(x_n, x_0) - p(x_0, x_0)| < \varepsilon$ eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} |p(x_n, x_n) - p(x_0, x_0)| &\leq |p(x_n, x_0) + p(x_0, x_n) - p(x_0, x_0) - p(x_0, x_0)| \\ &= 2|p(x_n, x_0) - p(x_0, x_0)| \\ &< 2\varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise $\lim_{n \rightarrow \infty} p(x_n, x_n) = p(x_0, x_0)$ olmasını gerektirir. Bu durumda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p(x_n, x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} p(x_n, x_n) = p(x_0, x_0)$$

olur. Yani $x_n \rightarrow x_0$ dır.

Lemma 3.1.16. (X, p) kısmi metrik uzay ve (x_n) , X de bir dizi olsun. $x_n \rightarrow x \in X$ ve $p(x, x) = 0$ ise her $z \in X$ için $\lim_{n \rightarrow +\infty} p(x_n, z) = p(x, z)$ dir.

İspat: Üçgen eşitsizliğinden

$$p(x, z) - p(x_n, x) \leq p(x_n, z) \leq p(x, z) + p(x_n, x)$$

dir. Buradan $n \rightarrow \infty$ iken $p(x_n, z) \rightarrow p(x, z)$ elde edilir (Bari and Vetro 2011).

Teorem 3.1.17. Kısmi metrik uzaydaki yakınsak her dizinin sadece bir tane yakınsadığı nokta vardır (Rabarison 2007).

İspat: x_1 ve x_2 ye yakınsayan bir (x_n) dizisini alalım. $p(x_1, x_1) = p(x_1, x_2) = p(x_2, x_2)$ olduğunu göstereceğiz. $\varepsilon > 0$ ve her $n \geq N_1$ için $|p(x_n, x_1) - p(x_1, x_1)| < \varepsilon$ ve $|p(x_1, x_1) - p(x_n, x_n)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N_1 \in \mathbb{N}$ vardır. Ayrıca $\varepsilon > 0$ ve her $n \geq N_2$ için $|p(x_n, x_2) - p(x_2, x_2)| < \varepsilon$ ve $|p(x_2, x_2) - p(x_n, x_n)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N_2 \in \mathbb{N}$ vardır. $N = \max\{N_1, N_2\}$ seçersek her $n \geq N$ için

$$\begin{aligned}
|p(x_1, x_1) - p(x_2, x_2)| &\leq |p(x_1, x_n) + p(x_n, x_2) - p(x_n, x_n) - p(x_2, x_2)| \\
&\leq |p(x_1, x_1) + \varepsilon + p(x_2, x_2) + \varepsilon - p(x_n, x_n) - p(x_2, x_2)| \\
&= |p(x_1, x_1) + 2\varepsilon - p(x_n, x_n)| \\
&\leq |p(x_1, x_1) - p(x_n, x_n)| + 2\varepsilon \\
&\leq \varepsilon + 2\varepsilon \\
&= 3\varepsilon
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda $p(x_1, x_2) = p(x_2, x_2)$ ve $p(x_1, x_2) = p(x_1, x_1)$ dir. Dolayısıyla $p(x_1, x_1) = p(x_1, x_2) = p(x_2, x_2)$ olur ve (P1) den $x_1 = x_2$ elde edilir.

Teorem 3.1.18. Kısmi metrik uzayda sırasıyla $x, y \in X$ e yakınsayan (x_n) ve (y_n) dizileri için $\lim_{n \rightarrow \infty} p(x_n, y_n) = p(x, y)$ dir (Rabarisson 2007).

İspat: Kısmi metrik uzayda sırasıyla $x, y \in X$ e yakınsayan (x_n) ve (y_n) dizilerini alalım. $\varepsilon > 0$ ve her $n \geq N_1$ için $|p(x_n, x) - p(x, x)| < \varepsilon$ ve $|p(x_n, x) - p(x_n, x_n)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N_1 \in \mathbb{N}$ vardır. Her $n \geq N_2$ için $|p(y_n, y) - p(y, y)| < \varepsilon$ ve $|p(y_n, y) - p(y_n, y_n)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N_2 \in \mathbb{N}$ vardır. $N = \max\{N_1, N_2\}$ seçersek her $n \geq N$ için

$$\begin{aligned}
p(x_n, y_n) - p(x, y) &\leq p(x_n, x) + p(x, y_n) - p(x, x) - p(x, y) \\
&\leq p(x_n, x) + p(x, y) + p(y, y_n) - p(y, y) - p(x, x) - p(x, y) \\
&\leq p(x_n, x) - p(x, x) + p(y_n, y) - p(y, y) \\
&\leq |p(x_n, x) - p(x, x)| + |p(y_n, y) - p(y, y)| \\
&< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon
\end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
p(x, y) - p(x_n, y_n) &\leq p(x, x_n) + p(x_n, y) - p(x_n, x_n) - p(x_n, y_n) \\
&\leq p(x_n, x) + p(x_n, y_n) + p(y_n, y) - p(y_n, y_n) - p(x_n, x_n) - p(x_n, y_n) \\
&\leq p(x_n, x) - p(x_n, x_n) + p(y_n, y) - p(y_n, y_n) \\
&\leq |p(x_n, x) - p(x_n, x_n)| + |p(y_n, y) - p(y_n, y_n)| \\
&< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Dolayısıyla $|p(x_n, y_n) - p(x, y)| < 2\varepsilon$ dur.

Teorem 3.1.19. A , (X, p) kısmi metrik uzayının bir alt kümesi ve $x \in X$ olsun. $x \in \bar{A}$ olması için gerek ve yeter şart A da x e yakınsayan bir (x_n) dizisinin bulunmasıdır (Rabbarison 2007).

İspat: a) $x \in \bar{A}$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $B_p\left(x; \frac{1}{n}\right) \in \mathfrak{R}(x)$ alalım. Bu durumda

$B_p\left(x; \frac{1}{n}\right) \cap A \neq \emptyset$ olur. $x_n \in B_p\left(x; \frac{1}{n}\right) \cap A$ seçersek $x_n \in B_p\left(x; \frac{1}{n}\right)$ elde edilir.

Dolayısıyla $p(x, x_n) < p(x, x) + \frac{1}{n}$ dir. (P2) den $0 \leq p(x, x) \leq p(x, x_n) < p(x, x) + \frac{1}{n}$

yazılır. Böylece $\lim_{n \rightarrow \infty} p(x, x_n) = p(x, x)$ dir. Ayrıca

$$\begin{aligned}
|p(x_n, x_n) - p(x, x)| &\leq |p(x_n, x) + p(x, x_n) - p(x, x) - p(x, x)| \\
&= 2|p(x_n, x) - p(x, x)| \\
&< \frac{2}{n}
\end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla $\lim_{n \rightarrow \infty} p(x_n, x_n) = p(x, x)$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} p(x_n, x) = p(x, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} p(x_n, x_n)$ elde edilir. Bu yüzden $x_n \rightarrow x$ dir.

b) A da x e yakınsayan bir dizi alalım. $V \in \mathfrak{R}(x)$ olsun. Bu durumda $\exists \varepsilon > 0$ için $B_p(x; \varepsilon) \subseteq V$ olur. $x_n \rightarrow x$ olduğu için her $n \geq N$ için $|p(x_n, x) - p(x, x)| < \varepsilon$ ve $|p(x_N, x) - p(x, x)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N_1 \in \mathbb{N}$ vardır. Böylece $x_N \in B_p(x; \varepsilon) \subseteq V$ dir ve $x_N \in V \cap A$ olduğundan $x \in \overline{A}$ dir.

Tanım 3.1.20. (X, p) ve (Y, p') kısmi metrik uzay, $x_0 \in X$ ve $f: X \rightarrow Y$ bir dönüşüm olsun. $f(x_0)$ in her W komşuluğu için $f^{-1}(W)$, x_0 in bir komşuluğu ise f fonksiyonu x_0 noktasında süreklidir denir.

Teorem 3.1.21. (X, p) ve (Y, p') kısmi metrik uzay, $x_0 \in X$ ve $f: X \rightarrow Y$ olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

(a) f , x_0 da süreklidir;

(b) $\forall x \in X$ için $p(x, x_0) < p(x_0, x_0) + \delta \Rightarrow p'(f(x), f(x_0)) < p'(f(x_0), f(x_0)) + \varepsilon$ olacak şekilde $\forall \varepsilon > 0$ için $\delta > 0$ vardır;

(c) X de x_0 a yakınsayan herhangi bir (x_n) dizisi için, $(f(x_n))$ dizisi de Y de $f(x_0)$ a yakınsar (Rabarison 2007).

İspat: (a) \Rightarrow (c) f fonksiyonu x_0 da sürekli olsun. Yani $\forall W \in \mathfrak{R}(f(x_0))$ için $f^{-1}[W] \in \mathfrak{R}(x_0)$ olsun. $x_n \rightarrow x_0$ iken $(f(x_n)) \rightarrow f(x_0)$ olduğunu göstereceğiz. $V \in \mathfrak{R}(f(x_0))$ komşuluğunu alalım. $f^{-1}[V] \in \mathfrak{R}(x_0)$ ve $x_n \rightarrow x_0$ olduğundan her $n \geq N$ için $x_n \in f^{-1}[V]$ olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ vardır. Böylece $f(x_n) \in V$ olur.

(c) \Rightarrow (b) $p(x, x_0) < p(x_0, x_0) + \delta$ ve $p'(f(x), f(x_0)) \geq p'(f(x_0), f(x)) + \varepsilon$ olacak şekilde $x \in X$, $\varepsilon > 0$ ve $\delta > 0$ alalım. Özellikle $n \in \mathbb{N}$ için $\delta = \frac{1}{n}$ olsun. Böylece her bir $n \in \mathbb{N}$ için

$$p(x_n, x_0) < p(x_0, x_0) + \frac{1}{n} \text{ ve } p'(f(x_n), f(x_0)) \geq p'(f(x_0), f(x_0)) + \varepsilon$$

olacak şekilde X de bir (x_n) dizisi elde ederiz. Böylece her $n \in \mathbb{N}$ için

$$|p(x_n, x_0) - p(x_0, x_0)| < \frac{1}{n} \text{ ve } p'(f(x_n), f(x_0)) \geq p'(f(x_0), f(x_0)) + \varepsilon$$

olur. Yani (x_n) , x_0 a yakınsar fakat $(f(x_n))$, $f(x_0)$ a yakınsamaz.

(b) \Rightarrow (a) $W \in \mathfrak{R}(f(x_0))$ olsun. Bu durumda $\varepsilon > 0$ için $B_p(f(x_0); \varepsilon) \subseteq W$ olur. Kabulden dolayı $\exists \delta > 0$ ve $\forall x \in X$ için

$$p(x, x_0) < p(x_0, x_0) + \delta \Rightarrow p'(f(x), f(x_0)) < p'(f(x_0), f(x_0)) + \varepsilon$$

dur. $x \in B_p(x_0; \delta)$ alalım. Buradan $p(x, x_0) < p(x_0, x_0) + \delta$ dır. Böylece $p'(f(x), f(x_0)) < p'(f(x_0), f(x_0)) + \varepsilon$ eşitsizliği yazılır. Yani $f(x) \in B_p(f(x_0); \varepsilon)$ dur. Ve buradan $f(x) \in W$ yani $x \in f^{-1}[W]$ olur.

3.2. Tam Kısmi Metrik Uzaylar

Tanım 3.2.1. (x_n) , X de bir dizi ve (X, p) kısmi metrik uzay olsun. (x_n) dizisinin Cauchy dizisi olması için gerek ve yeter şart $\lim_{n,m \rightarrow \infty} p(x_n, x_m)$ limitinin var (ve sonlu) olmasıdır.

Lemma 3.2.2. (X, p) kısmi metrik uzay olsun.

a) (x_n) dizisinin (X, p) de Cauchy dizisi olması için gerek ve yeter şart (x_n) dizisinin (X, p^s) metrik uzayında Cauchy dizisi olmasıdır.

b) (X, p) kısmi metrik uzayının tam olması için gerek ve yeter şart (X, p^s) metrik uzayının tam olmasıdır. Ayrıca $p(x, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} p(x_n, x) = \lim_{n,m \rightarrow \infty} p(x_n, x_m)$ eşitliğinin sağlanması için gerek ve yeter şart $\lim_{n \rightarrow \infty} p^s(x_n, x) = 0$ olmasıdır (Matthews 1994; Oltra and Valero 2004).

Teorem 3.2.3. Kısmi metrik uzaydaki her yakınsak dizi bir Cauchy dizisidir (Rabbarison 2007).

İspat: (X, p) kısmi metrik uzayında x e yakınsayan bir (x_n) dizisini alalım. $\varepsilon > 0$ olsun. Her $n \geq N_1$ için $|p(x_n, x) - p(x_n, x_n)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N_1 \in \mathbb{N}$ ve her $n \geq N_2$ için $|p(x_n, x) - p(x, x)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N_2 \in \mathbb{N}$ vardır. Her $m, n \geq N$ için $N = \max\{N_1, N_2\}$ olsun. Buradan

$$\begin{aligned}
2p(x_m, x_n) - p(x_m, x_m) - p(x_n, x_n) &\leq 2p(x_m, x) + 2p(x, x_n) - 2p(x, x) - p(x_m, x_m) \\
&\quad - p(x_n, x_n) \\
&= p(x_m, x) - p(x_m, x_m) + p(x_m, x) - p(x, x) \\
&\quad + p(x, x_n) - p(x_n, x_n) + p(x, x_n) - p(x, x) \\
&\leq |p(x_m, x) - p(x_m, x_m)| + |p(x_m, x) - p(x, x)| \\
&\quad + |p(x, x_n) - p(x_n, x_n)| + |p(x, x_n) - p(x, x)| \\
&\leq 4\varepsilon
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Tanım 3.2.4. Bir (X, p) kısmi metrik uzayındaki her Cauchy dizisi X de bir noktaya yakınsıyor ise (X, p) kısmi metrik uzayına tamdır denir.

Örnek 3.2.5. $X = [0,1] \cup [2,3]$ olmak üzere $p : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ dönüşümü

$$p(x, y) = \begin{cases} \max\{x, y\}, & \{x, y\} \cap [2,3] \neq \emptyset \\ |x - y|, & \{x, y\} \subset [0,1] \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Böylece (X, p) tam kısmi metrik uzaydır.

Teorem 3.2.6. Tam kısmi metrik uzayın kapalı bir alt kümesi tamdır (Rabbarison 2007).

İspat: (X, p) tam kısmi metrik uzayında kapalı bir F alt kümesini alalım. (x_n) , F de bir Cauchy dizisi olsun. Dolayısıyla (x_n) , X kümesinde de bir Cauchy dizisidir. X tam olduğundan (x_n) dizisi X de bir elemana yakınsar. Böylece $x \in \overline{F} = F$ olur. Dolayısıyla F tamdır.

Teorem 3.2.7. Kısmi metrik uzayın tam alt uzayı kapalı bir alt kümedir (Rabarison 2007).

İspat: (X, p) kısmi metrik uzay olsun. Y tam alt uzay ve $y \in \bar{Y}$ olsun. Dolayısıyla $y_n \rightarrow y$ olacak şekilde Y kümesinde bir (y_n) dizisi vardır. Böylece (y_n) , X de bir Cauchy dizisi dolayısıyla da Y de bir Cauchy dizisi olur. Y tam olduğundan (y_n) bir $y_0 \in Y$ elemanına yakınsar. Fakat $y_n \rightarrow y$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla $y_n = y$ olur. Buradan $\bar{Y} = Y$ elde edilir.

Tanım 3.2.8. (X, p) kısmi metrik uzayından (Y, p') kısmi metrik uzayına bir f fonksiyonu alalım. Eğer her $a, b \in X$ için $p(a, b) = p'(f(a), f(b))$ oluyorsa f ye izometridir denir.

Teorem 3.2.9. f , (X, p) kısmi metrik uzayından (Y, p') kısmi metrik uzayına bir izometri ise f sürekli fonksiyondur (Rabarison 2007).

İspat: $f : (X, p) \rightarrow (Y, p')$ bir izometri $x_0 \in X$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. $p(x_0, x) < p(x_0, x_0) + \varepsilon$ olacak şekilde $x \in X$ alalım. Böylece

$$p'(f(x_0), f(x)) - p'(f(x_0), f(x_0)) = p(x_0, x) - p(x_0, x_0) < \varepsilon$$

olur. Yani $p'(f(x_0), f(x)) < p'(f(x_0), f(x_0)) + \varepsilon$ dur. Dolayısıyla f süreklidir.

Teorem 3.2.10. A , (X, p) kısmi metrik uzayının yoğun bir alt kümesi ve f de A dan (Y, p') tam kısmi metrik uzayına bir izometri olsun. Dolayısıyla X den Y ye f nin tamlaması olan bir tek g izometrisi vardır (Rabarison 2007).

İspat: (X, p) kısmi metrik uzay ve (Y, p') tam kısmi metrik uzay ve A , X in yoğun bir alt kümesi, f de A dan Y ye bir izometri olsun. Bu ispat 5 adımda verilecektir.

1. Adım: ($g : X \rightarrow Y$ dönüşümünü tanımlayalım.)

$x \in X$ olsun. $\bar{A} = X$ olduğundan $x_n \rightarrow x$ olacak şekilde A da bir (x_n) dizisi vardır.

Böylece (x_n) , A da bir Cauchy dizisidir ve $(f(x_n))$ de Y de bir Cauchy dizisidir. Y tam olduğundan $(f(x_n))$ dizisi yakınsaktır. g fonksiyonu, her $x \in X$ için (x_n) dizisi A da x e yakınsayan bir dizi iken $g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ şeklinde tanımlanır.

2. Adım: (g dönüşümü iyi tanımlıdır yani dizi seçiminden bağımsızdır.)

$\bar{A} = X$ kümesinde x e yakınsayan ve terimleri A da olan x_n ve y_n dizilerini alalım. Dolayısıyla $(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n, \dots)$ dizisi x e yakınsamak zorundadır. Bu yüzden $(f(x_1), f(y_1), f(x_2), f(y_2), \dots, f(x_n), f(y_n), \dots)$ dizisi de Y de bir z elemanına yakınsar. $(f(x_1), f(x_2), \dots)$ ve $(f(y_1), f(y_2), \dots)$ dizileri de onun alt dizileri olduğundan bu diziler de z ye yakınsamalıdır. Böylece $z = g(x)$ dizi seçimine bağlı değildir.

3. Adım: (g , f nin bir tamlamasıdır.)

$\forall n \in \mathbb{N}$ için $a \in A$ ve $a_n = a$ alalım. Böylece (a_n) , A da a ya yakınsayan bir dizidir. Bu durumda $g(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(a)$ dır. Bu da g nin f nin bir tamlaması olduğunu gösterir.

4. Adım: (g bir izometridir.)

$a, b \in X$ olsun. $a_n \rightarrow a$ ve $b_n \rightarrow b$ olacak şekilde A da (a_n) ve (b_n) dizileri vardır.

Böylece

$$\begin{aligned}
 p'(g(a), g(b)) &= p'\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n), \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n)\right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} p'(f(a_n), f(b_n)) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} p(a_n, b_n) \\
 &= p\left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n\right) \\
 &= p(a, b)
 \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

5. Adım: (g tektir.)

A nın yoğun bir alt kümesi üzerinde f nin genişlemesi olan g ve h izometrilerini alalım. $x \in X$ için $g = h$ olduğunu göstereceğiz. Burada x e yakınsayan A da bir (x_n) dizisi vardır. g ve h in sürekliliğinden $g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} h(x_n) = h(x)$ dir.

Buradan $g = h$ elde edilir.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde kısmi metrik uzaydaki daraltan dönüşüm teoremi verilecek ve bu uzaydaki daraltan dönüşümlerin sabit noktalarının varlığı ve tekliği ile alakalı bazı teoremler ifade edilecektir.

Teorem 4.1. (X, p) tam kısmi metrik uzayında $f : X \rightarrow X$ dönüşümü verilsin. Eğer her $x, y \in X$ için

$$p(f(x), f(y)) \leq cp(x, y)$$

olacak şekilde $c \in [0, 1)$ sayısı varsa, f dönüşümünün bir tek $x \in X$ sabit noktası vardır (Matthews 1992).

İspat: $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_n = f(x_{n-1})$ ve sabit bir $x_0 \in X$ alalım. Buradan

$$p(x_2, x_1) = p(f(x_1), f(x_0)) \leq cp(x_1, x_0)$$

ve

$$p(x_3, x_2) = p(f(x_2), f(x_1)) \leq cp(x_2, x_1) \leq c^2 p(x_1, x_0)$$

dır. Böylece tümevarımdan $\forall m \in \mathbb{N}$ için

$$p(x_{m+1}, x_m) = p(f(x_m), f(x_{m-1})) \leq cp(x_m, x_{m-1}) \leq c^m p(x_1, x_0)$$

dır. Dolayısıyla $\forall m, n \in \mathbb{N}$ ve $n \geq m$ için

$$\begin{aligned}
p(x_n, x_m) &\leq p(x_n, x_{n-1}) + p(x_{n-1}, x_m) - p(x_{n-1}, x_{n-1}) \\
&\leq c^{n-1} p(x_1, x_0) + p(x_{n-1}, x_m) - p(x_{n-1}, x_{n-1}) \\
&\leq c^{n-1} p(x_1, x_0) + p(x_{n-1}, x_{n-2}) + \dots + p(x_{m+1}, x_m) - \sum_{i=m+1}^{n-1} p(x_i, x_i) \\
&\leq (c^{n-1} + c^{n-2} + \dots + c^{m-1} + c_m) p(x_1, x_1) \\
&\leq \sum_{i=m+1}^{\infty} c^i p(x_1, x_0)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
2p(x_n, x_m) - p(x_n, x_n) - p(x_n, x_m) &\leq 2 \sum_{i=m+1}^{\infty} c^i p(x_1, x_0) - p(x_n, x_n) - p(x_n, x_m) \\
&\leq 2 \sum_{i=m+1}^{\infty} c^i p(x_1, x_0) \\
&= 2 \frac{c^{m+1}}{1-c} p(x_1, x_0) \rightarrow 0, \quad n > m \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu da bazı $x \in X$ ler için (X, p) de x e yakınsayan bir (x_n) dizisinin Cauchy dizisi olduğunu gösterir. f nin sürekliliğinden $f(x_n) \rightarrow f(x)$ dir. Fakat, $f(x_n) = x_{n+1} \rightarrow x$ dir. Limitin tekliğinden $f(x) = x$ olur.. $f(x) = x$ ve $f(y) = y$ olacak şekilde x ve y noktalarının olduğunu kabul edelim. Buradan $p(x, y) = p(f(x), f(y)) \leq cp(x, y)$ olur. Eğer $p(x, y) > 0$ ise $1 \leq c$ olur ve bu da bir çelişkidir. Bu yüzden $p(x, y) = 0$ dir. Benzer şekilde $p(x, x) = 0$ ve $p(y, y) = 0$ elde edilir. Buradan $p(x, x) = 0 = p(x, y) = 0 = p(y, y)$ dir. (P1) den $x = y$ olur. Ve böylece f tek sabit noktaya sahiptir.

Teorem 4.2. (X, p) tam kısmi metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun.

$a \in [0, 1)$ ve her $x, y \in X$ için

$$p(Tx, Ty) \leq \max \{ap(x, y), p(x, x), p(y, y)\}$$

şartı sağlansın. Bu durumda:

(1) $X_p = \{x \in X : p(x, x) = \inf \{p(x, y) : x, y \in X\}\}$ kümesi boştan farklıdır;

(2) $Tu = u$ olacak şekilde bir tek $u \in X_p$ vardır;

(3) Her $x \in X_p$ için $(T^n x)_{n \geq 1}$ dizisi p^s metriğine göre u ya yakınsar (Ilić *et al.* 2011).

Teorem 4.3. (X, p) tam kısmi metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun.

$a \in [0, 1)$ ve her $x, y \in X$ için

$$p(Tx, Ty) \leq \max \left\{ ap(x, y), \frac{p(x, x) + p(y, y)}{2} \right\}$$

şartı sağlansın. Bu durumda $Tz = z$ olacak şekilde bir tek $z \in X_p$ vardır. Ayrıca $z \in X_p$

ve her $x \in X_p$ için $\{T^n x\}_{n \geq 1}$ dizisi p^s metriğine göre z ye yakınsar (Ilić *et al.* 2011).

Teorem 4.4. (X, p) tam kısmi metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Her

$x, y \in X$ için

$$p(Tx, Ty) \leq ap(x, y) + bp(x, Tx) + cp(y, Ty) + dp(x, Ty) + ep(y, Tx) \quad (4.1)$$

ise T dönüşümünün tek sabit noktası vardır. Burada $a, b, c, d, e \geq 0$ dır. Eğer $d \geq e$ ise $a + b + c + d + e < 1$ ve $d < e$ ise $a + b + c + d + 2e < 1$ dir (Altun vd 2010).

İspat: Keyfi bir $x_0 \in X$ alalım. $n=1,2,3,\dots$ için $x_n = Tx_{n-1}$ olan X de bir $\{x_n\}$ dizisi tanımlayalım. Şimdi bazı $n_0 = 0,1,2,\dots$ için $x_{n_0} = x_{n_0+1}$ alırsak x_{n_0} in, T nin sabit noktası olduğu açıktır. Şimdi her n için $x_n \neq x_{n+1}$ olduğunu varsayalım. (4.1) den

$$\begin{aligned}
p(x_{n+1}, x_n) &= p(Tx_n, Tx_{n-1}) \leq ap(x_n, x_{n-1}) + bp(x_n, Tx_n) + cp(x_{n-1}, Tx_{n-1}) \\
&\quad + dp(x_n, Tx_{n-1}) + ep(x_{n-1}, Tx_n) \\
&= ap(x_n, x_{n-1}) + bp(x_n, x_{n+1}) + cp(x_{n-1}, x_n) \\
&\quad + dp(x_n, x_n) + ep(x_{n-1}, x_{n+1}) \\
&\leq (a+c+e)p(x_n, x_{n-1}) + (b+e)p(x_n, x_{n+1}) \\
&\quad + (d-e)p(x_n, x_n)
\end{aligned} \tag{4.2}$$

yazılır. Şimdi $d \geq e$ ise her n için (4.2) den

$$p(x_{n+1}, x_n) \leq \max \left\{ \frac{a+c+e}{1-b-e}, \frac{a+c+e}{1-b-d} \right\} p(x_n, x_{n-1}) \tag{4.3}$$

dir. Eğer $d < e$ ise (4.2) de $-ed(x_n, x_n)$ terimini dışarıda tutarak

$$p(x_{n+1}, x_n) \leq \max \left\{ \frac{a+c+d+e}{1-b-e}, \frac{a+c+e}{1-b-d-e} \right\} p(x_n, x_{n-1}) \tag{4.4}$$

elde edilir. (4.3) ve (4.4) den $p(x_{n+1}, x_n) \leq \lambda^n p(x_1, x_0)$ yazılır. Burada

$$\lambda = \begin{cases} \max \left\{ \frac{a+c+e}{1-b-e}, \frac{a+c+e}{1-b-d} \right\}, & d \leq e \\ \max \left\{ \frac{a+c+d+e}{1-b-e}, \frac{a+c+e}{1-b-d-e} \right\}, & d > e \end{cases}$$

dir. Yani $\lambda \in [0,1)$ olduğu açıktır.

Diğer yandan $\max \{p(x_n, x_n), p(x_{n+1}, x_{n+1})\} \leq p(x_n, x_{n+1})$ olduğu için

$$\max \{p(x_n, x_n), p(x_{n+1}, x_{n+1})\} \leq \lambda^n p(x_1, x_0) \quad (4.5)$$

olur. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} p^s(x_n, x_{n+1}) &\leq 2p(x_n, x_{n+1}) - p(x_n, x_n) - p(x_{n+1}, x_{n+1}) \\ &\leq 2p(x_n, x_{n+1}) + p(x_n, x_n) + p(x_{n+1}, x_{n+1}) \\ &\leq 4\lambda^n (x_1, x_0). \end{aligned}$$

Bu da bize $\lim_{n \rightarrow \infty} p^s(x_n, x_{n+1}) = 0$ olduğunu gösterir. Yani

$$\begin{aligned} p^s(x_{n+k}, x_n) &\leq p^s(x_{n+k}, x_{n+k-1}) + \dots + p^s(x_{n+1}, x_n) \\ &\leq 4\lambda^{n+k-1} p(x_1, x_0) + \dots + 4\lambda^n p(x_1, x_0) \\ &= 4 \frac{\lambda^n (1 - \lambda^k)}{1 - \lambda} p(x_1, x_0) \\ &\leq 4 \frac{\lambda^n}{1 - \lambda} p(x_1, x_0) \end{aligned}$$

dır. Bu bize $\{x_n\}$ in (X, p^s) metrik uzayında bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir. (X, p) tam olduğu için Lemma 3.2.2 den (X, p^s) de tam olur ve böylece $\{x_n\}$, (X, p^s) metrik uzayında yakınsak bir dizidir. Dolayısıyla $\lim_{n \rightarrow \infty} p^s(x_n, x) = 0$ olur. Yine Lemma 3.2.2 den

$$p(x, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} p(x_n, x) = \lim_{n, m \rightarrow \infty} p(x_n, x_m) \quad (4.6)$$

yazılabilir. Ayrıca $\{x_n\}$, (X, p^s) metrik uzayında Cauchy dizisi olduğu için $\lim_{n,m \rightarrow \infty} p^s(x_n, x_m) = 0$ dır ve (4.5) dan $\lim_{n \rightarrow \infty} p(x_n, x_n) = 0$ elde ederiz. Böylece p^s nin tanımından $\lim_{n,m \rightarrow \infty} p(x_n, x_m) = 0$ olur.

(4.6) dan $p(x, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} p(x_n, x) = \lim_{n,m \rightarrow \infty} p(x_n, x_m) = 0$ elde edilir. Şimdi $p(x, Tx) = 0$ olduğunu göstereceğiz. Bunun doğru olmadığını kabul edelim. (4.1) den

$$\begin{aligned} p(x, Tx) &\leq p(x, Tx_n) + p(Tx_n, Tx) - p(Tx_n, Tx_n) \\ &\leq p(x, x_{n+1}) + p(Tx_n, Tx) \\ &\leq p(x, x_{n+1}) + ap(x, x_n) + bp(x, Tx) + cp(x_n, x_{n+1}) + dp(x, x_{n+1}) \\ &\quad + ep(x_n, Tx) \\ &\leq p(x, x_{n+1}) + ap(x, x_n) + bp(x, Tx) + cp(x_n, x_{n+1}) + dp(x, x_{n+1}) \\ &\quad + ep(x_n, x) + ep(x, Tx) \end{aligned}$$

eşitsizliği yazılır. Her iki tarafın $n \rightarrow \infty$ için limiti alınırsa $p(x, Tx) \leq (b+e)p(x, Tx)$ elde edilir. Bu da bir çelişkidir. Dolayısıyla $p(x, Tx) = 0$ ve $x = Tx$ dir. Sabit noktanın tekliği (4.1) den elde edilir.

Teorem 4.5. (X, p) tam kısmi metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Her $t > 0$ için $\phi(t) < t$ olacak şekilde sürekli, azalmayan bir $\phi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ dönüşümü verilsin. Her $x, y \in X$ için

$$p(Tx, Ty) \leq \phi \left(\max \left\{ p(x, y), p(x, Tx), p(y, Ty), \frac{1}{2} [p(x, Ty) + p(y, Tx)] \right\} \right) \quad (4.7)$$

eşitsizliğini sağlayan T dönüşümünün tek sabit noktası vardır. (Altun vd 2010)

İspat: $t > 0$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi^n(t) = 0$ olduğu açıktır. Keyfi bir $x_0 \in X$ alalım. $n = 1, 2, 3, \dots$ için $x_n = Tx_{n-1}$ şeklinde X de bir $\{x_n\}$ dizisi tanımlayalım. Şimdi bazı $n_0 = 0, 1, 2, \dots$ için $x_{n_0} = x_{n_0+1}$ alırsak x_{n_0} in T nin sabit noktası olduğu açıktır. Şimdi her n için $x_n \neq x_{n+1}$ olduğunu varsayalım. $p(x_n, x_n) + p(x_{n-1}, x_{n+1}) \leq p(x_{n-1}, x_n) + p(x_n, x_{n+1})$ ve (4.7) eşitsizliklerinden ve ϕ nin azalmayan özelliğinden dolayı

$$\begin{aligned}
p(x_{n+1}, x_n) &= p(Tx_n, Tx_{n+1}) \\
&\leq \phi \left(\max \{ p(x_n, x_{n-1}), p(x_n, Tx_n), p(x_{n-1}, Tx_{n-1}), \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{2} [p(x_n, Tx_{n-1}) + p(x_{n-1}, Tx_n)] \right\} \Big) \tag{4.8} \\
&\leq \phi \left(\max \left\{ p(x_n, x_{n-1}), p(x_n, x_{n+1}), \frac{1}{2} [p(x_{n-1}, x_n) + p(x_n, x_{n+1})] \right\} \right) \\
&= \phi \left(\max \{ p(x_n, x_{n-1}), p(x_n, x_{n+1}) \} \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi bazı n ler için $\max \{ p(x_n, x_{n-1}), p(x_n, x_{n+1}) \} = p(x_n, x_{n+1})$ alırsak $p(x_{n+1}, x_n) > 0$ olduğu için (4.8) den $p(x_{n+1}, x_n) \leq \phi(p(x_n, x_{n+1})) < p(x_{n+1}, x_n)$ çelişkisini elde ederiz. Böylece her n için $\max \{ p(x_n, x_{n-1}), p(x_n, x_{n+1}) \} = p(x_n, x_{n-1})$ olur ve yine (4.8) den $p(x_{n+1}, x_n) \leq \phi(p(x_n, x_{n-1}))$ elde edilir. Bu durumda

$$p(x_{n+1}, x_n) \leq \phi^n(p(x_1, x_0)) \tag{4.9}$$

olur. Diğer yandan $\max \{ p(x_n, x_n), p(x_{n+1}, x_{n+1}) \} \leq p(x_n, x_{n+1})$ olduğu için (4.9) dan

$$\max \{ p(x_n, x_n), p(x_{n+1}, x_{n+1}) \} \leq \phi^n(p(x_1, x_0)) \tag{4.10}$$

elde ederiz. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}
p^s(x_n, x_{n+1}) &= 2p(x_n, x_{n+1}) - p(x_n, x_n) - p(x_{n+1}, x_{n+1}) \\
&\leq 2p(x_n, x_{n+1}) + p(x_n, x_n) + p(x_{n+1}, x_{n+1}) \\
&\leq 4\phi^n(p(x_1, x_0))
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise $\lim_{n \rightarrow \infty} p^s(x_n, x_{n+1}) = 0$ olmasını gerektirir. Ayrıca

$$\begin{aligned}
p^s(x_{n+k}, x_n) &\leq p^s(x_{n+k}, x_{n+k-1}) + \dots + p^s(x_{n+1}, x_n) \\
&\leq 4\phi^{n+k-1}(p(x_1, x_0)) + \dots + 4\phi^n(p(x_1, x_0))
\end{aligned}$$

eşitsizliği $\{x_n\}$ dizisinin (X, p^s) metrik uzayında bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir.

(X, p) tam olduğu için Lemma 3.2.2 den (X, p^s) uzayı da tamdır. Böylece $\{x_n\}$, (X, p^s) metrik uzayında yakınsak bir dizi olur. Dolayısıyla $\lim_{n \rightarrow \infty} p^s(x_n, x) = 0$ dır. Yine Lemma 3.2.2 den

$$p(x, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} p(x_n, x) = \lim_{n, m \rightarrow \infty} p(x_n, x_m) \quad (4.11)$$

yazılır. Ayrıca $\{x_n\}$, (X, p^s) metrik uzayında Cauchy dizisi olduğu için $\lim_{n, m \rightarrow \infty} p^s(x_n, x_m) = 0$ olur ve (4.10) dan $\lim_{n \rightarrow \infty} p(x_n, x_n) = 0$ elde ederiz. Böylece p^s nin tanımından $\lim_{n, m \rightarrow \infty} p(x_n, x_m) = 0$ olur.

(4.11) den $p(x, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} p(x_n, x) = \lim_{n, m \rightarrow \infty} p(x_n, x_m) = 0$ elde edilir. Şimdi $p(x, Tx) = 0$ olduğunu göstereceğiz. Bunun doğru olmadığını kabul edelim. (4.7) den

$$\begin{aligned}
p(x, Tx) &\leq p(x, Tx_n) + p(Tx_n, Tx) - p(Tx_n, Tx_n) \\
&\leq p(x, x_{n+1}) + p(Tx_n, Tx) \\
&\leq p(x, x_{n+1}) + \phi\left(\max\{p(x, x_n), p(x, Tx), p(x_n, x_{n+1}),\right. \\
&\quad \left.\frac{1}{2}[p(x_n, x_{n+1}) + p(x_n, Tx)]\}\right) \\
&\leq p(x, x_{n+1}) + \phi\left(\max\{p(x, x_n), p(x, Tx), p(x_n, x_{n+1}),\right. \\
&\quad \left.\frac{1}{2}[p(x_n, x_{n+1}) + p(x_n, x) + p(x, Tx) - p(x, x)]\}\right) \\
&= p(x, x_{n+1}) + \phi\left(\max\{p(x, x_n), p(x, Tx), p(x_n, x_{n+1}),\right. \\
&\quad \left.\frac{1}{2}[p(x_n, x_{n+1}) + p(x_n, x) + p(x, Tx)]\}\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. $n \rightarrow \infty$ ve ϕ nin sürekliliğinden $p(x, Tx) \leq \phi(p(x, Tx))$ yazılır. Bu ise bir çelişkidir. Dolayısıyla $p(x, Tx) = 0$ ve $x = Tx$ olur.

Şimdi T nin başka bir z sabit noktasını alalım. Yani $x \neq z$ olsun. $p(x, x) = 0$ olduğu için (4.7) den

$$\begin{aligned}
p(x, z) &= p(Tx, Tz) \\
&\leq \phi\left(\max\left\{p(x, z), p(x, Tx), p(z, Tz), \frac{1}{2}[p(x, Tz) + p(z, Tx)]\right\}\right) \\
&= \phi\left(\max\left\{p(x, z), p(x, x), p(z, z), \frac{1}{2}[p(x, z) + p(z, x)]\right\}\right) \\
&= \phi\left(\max\{p(x, z), p(z, z)\}\right) \\
&= \phi(p(x, z))
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu bir çelişkidir. Yani $x = z$ dir.

Şimdi kısmi metrik uzayda iki dönüşümün ortak sabit noktasını tanımlayıp bununla ilgili bazı teoremlere yer vereceğiz.

Tanım 4.6. (X, p) tam kısmi metrik uzay ve $T, S : X \rightarrow X$ iki dönüşüm olsun. Eğer $Sz = Tz = z$ ise $z \in X$ noktasına S ve T nin ortak sabit noktası denir.

Teorem 4.7. (X, p) tam kısmi metrik uzay ve $T, S : X \rightarrow X$ iki dönüşüm olsun.

$$M(x, y) = \max \left\{ p(Tx, x), p(Sy, y), p(x, y), \frac{1}{2} [p(Tx, y) + p(Sy, x)] \right\}$$

olmak üzere her $x, y \in X$ için

$$p(Tx, Sy) \leq M(x, y) \quad (4.12)$$

olacak şekilde $r \in [0, 1)$ varsa $Sz = Tz = z$ olacak şekilde $z \in X$ vardır (Karapınar ve Yüksel 2011).

İspat: $x_0 \in X$ olsun. $k = 0, 1, 2, \dots$ için $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisini $x_{2k+2} = Tx_{2k+1}$, $x_{2k+1} = Sx_{2k}$ şeklinde tanımlayalım. $x_{2N} = x_{2N+1}$ olacak şekilde bir N pozitif tamsayısı varsa x_{2N} , T ve S nin sabit noktasıdır. Gerçekten $x_{2N} = x_{2N+1} = Sx_{2N}$ olduğundan $Sx_{2N} = Sx_{2N+1} = S^2x_{2N} \Rightarrow x_{2N} = Sx_{2N} = Sx_{2N+1} = x_{2N+1}$ dir. Buradan

$$\begin{aligned} M(x_{2N+1}, x_{2N+1}) &= \max \left\{ p(Tx_{2N+1}, x_{2N+1}), p(Sx_{2N}, x_{2N}), p(x_{2N+1}, x_{2N}), \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2} [p(Tx_{2N+1}, x_{2N}) + p(Sx_{2N}, x_{2N+1})] \right\} \\ &= \max \left\{ p(Tx_{2N+1}, x_{2N+1}), p(x_{2N}, x_{2N}), p(x_{2N+1}, x_{2N}), \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2} [p(Tx_{2N+1}, x_{2N}) + p(x_{2N+1}, x_{2N+1})] \right\} \\ &= p(Tx_{2N+1}, x_{2N+1}) = p(Tx_{2N+1}, x_{2N}) = p(Tx_{2N+2}, x_{2N+1}) \end{aligned}$$

olur ve (4.12) den

$$p(x_{2N+2}, x_{2N+1}) = p(Tx_{2N+1}, Sx_{2N}) \leq rM(x_{2N+1}, x_{2N}) \quad (4.13)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu durumda (4.13) den $(1-r)p(x_{2N+2}, x_{2N+1}) \leq 0$ olur. $r < 1$ olduğundan $p(x_{2N+2}, x_{2N+1}) = 0$ ve $Tx_{2N+1} = x_{2N+2} = x_{2N+1}$ dir. Buradan S nin sabit noktası $x_{2N+1} = x_{2N}$ olur. Böylece $x_{2N+1} = x_{2N}$, T ve S nin ortak sabit noktası olur. N pozitif tamsayıları için eğer $x_{2N+1} = x_{2N+2}$ alınırsa benzer sonuç elde edilir. Bu yüzden her k için $x_k \neq x_{k+1}$ olduğunu kabul edelim. Eğer k tek ise

$$M(x_k, x_{k+1}) = \max \left\{ p(x_{k+1}, x_k), p(x_{k+2}, x_{k+1}), p(x_k, x_{k+1}), \frac{1}{2} [p(x_{k+1}, x_{k+1}) + p(x_{k+2}, x_k)] \right\}$$

için (4.12) den

$$p(x_{k+1}, x_{k+2}) = p(Tx_k, Sx_{k+1}) \leq rM(x_k, x_{k+1}) \quad (4.14)$$

olur. (P4) den

$$p(x_{k+1}, x_{k+1}) + p(x_{k+2}, x_k) \leq p(x_{k+2}, x_{k+1}) + p(x_{k+1}, x_k)$$

yazılır. Bu durumda

$$\begin{aligned} M(x_k, x_{k+1}) &= \max \left\{ p(x_{k+1}, x_k), p(x_{k+2}, x_{k+1}), p(x_k, x_{k+1}), \frac{1}{2} [p(x_{k+2}, x_{k+1}) + p(x_{k+1}, x_k)] \right\} \\ &= \max \left\{ p(x_{k+1}, x_k), p(x_{k+2}, x_{k+1}) \right\} \end{aligned}$$

elde edilir. Eğer $M(x_k, x_{k+1}) = p(x_{k+2}, x_{k+1})$ ise $r < 1$ için (4.14) den çelişki elde edilir.

Dolayısıyla $M(x_k, x_{k+1}) = p(x_{k+1}, x_k)$ ve (4.14) den

$$p(x_{k+2}, x_{k+1}) \leq rp(x_{k+1}, x_k) \quad (4.15)$$

dır. Eğer k çift ise benzer şekilde (4.15) eşitsizliği elde edilir. Buradan negatif olmayan ve artmayan $\{p(x_k, x_{k+1})\}$ reel sayı dizisini elde ederiz.

(4.15) e göre $k = 0, 1, 2, \dots$ için

$$p(x_k, x_{k+1}) \leq r^k p(x_0, x_1) \quad (4.16)$$

elde edilir. Şimdi

$$\begin{aligned} p^s(x_{k+1}, x_{k+2}) &= 2p(x_{k+1}, x_{k+2}) - p(x_{k+1}, x_{k+1}) - p(x_{k+2}, x_{k+2}) \\ &\leq 2p(x_{k+1}, x_{k+2}) \\ &\leq 2r^{k+1} p(x_0, x_1) \end{aligned} \quad (4.17)$$

alalım. Böylece (4.16) dan $\lim_{k \rightarrow \infty} p^s(x_{k+1}, x_{k+2}) = 0$ elde ederiz. Ayrıca

$$\begin{aligned} p^s(x_{k+1}, x_{k+s}) &\leq p^s(x_{k+s-1}, x_{k+s}) + \dots + p^s(x_{k+1}, x_{k+2}) \\ &\leq 2r^{k+s} p(x_0, x_1) + \dots + 2r^{k+1} p(x_0, x_1) \end{aligned}$$

dır. $\{x_k\}$ dizisi (X, p^s) de bir Cauchy dizisidir. Yani $k, m \rightarrow \infty$ için $p^s(x_k, x_m) \rightarrow 0$ dır. (X, p) tam olduğundan Lemma 3.2.2. den (X, p^s) tamdır ve $\{x_k\}$ dizisi (X, p^s) de bir $z \in X$ e yakınsar. Tekrar Lemma 3.2.2. yi kullanırsak

$$p(z, z) = \lim_{k \rightarrow \infty} p(x_k, z) = \lim_{k, m \rightarrow \infty} p(x_k, x_m) \quad (4.18)$$

elde ederiz. $\{x_k\}$ dizisi (X, p^s) de bir Cauchy dizisi olduğundan $\lim_{k, m \rightarrow \infty} p^s(x_k, x_m) = 0$ dır. $\lim_{k, m \rightarrow \infty} p(x_k, x_m) = 0$ olduğunu kabul etmiştik. Her $n > m$ için

$$\begin{aligned} p(x_{n+2}, x_n) &\leq p(x_{n+2}, x_{n+1}) + p(x_{n+1}, x_n) - p(x_{n+1}, x_{n+1}) \\ &\leq p(x_{n+2}, x_{n+1}) + p(x_{n+1}, x_n) \end{aligned} \quad (4.19)$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} p(x_{n+3}, x_n) &\leq p(x_{n+3}, x_{n+2}) + p(x_{n+2}, x_n) - p(x_{n+2}, x_{n+2}) \\ &\leq p(x_{n+3}, x_{n+2}) + p(x_{n+2}, x_n) \end{aligned} \quad (4.20)$$

eşitsizliği yazılır.(4.19) ve (4.20) den

$$p(x_{n+3}, x_n) \leq p(x_{n+3}, x_{n+2}) + p(x_{n+2}, x_{n+1}) + p(x_{n+1}, x_n)$$

dir. Tümevarımdan

$$p(x_m, x_n) \leq p(x_m, x_{m-1}) + \dots + p(x_{n+2}, x_{n+1}) + p(x_{n+1}, x_n) \quad (4.21)$$

olur. (4.16) ve (4.21) kullanılarak

$$\begin{aligned} p(x_m, x_n) &\leq r^{m-1} p(x_1, x_0) + \dots + r^{n+1} p(x_1, x_0) + r^n p(x_1, x_0) \\ &\leq r^n (1 + r + r^{m-n-1}) p(x_1, x_0) \end{aligned}$$

yazılır. $r < 1$ olduğunu düşünürsek $\lim_{k, m \rightarrow \infty} p(x_k, x_m) = 0$ limiti elde edilir. (4.18) den

$$p(z, z) = \lim_{k \rightarrow \infty} p(x_k, z) = \lim_{k, m \rightarrow \infty} p(x_k, x_m) = 0 \quad (4.22)$$

olur. $Tz \neq z$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $p(Tz, z) > 0$ olur. $\{x_{2k}\}$ nin dolayısıyla da $\{x_k\}$ nin alt dizisi olan $\{x_{2k(i)}\}$ dizisini alalım.

$$\begin{aligned} M(x_{2k(i)}, z) &= \max \left\{ p(x_{2k(i)}, x_{2k(i)+1}), p(Tz, z), p(x_{2k(i)}, z), \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2} [p(Tz, x_{2k(i)}) + p(z, x_{2k(i)+1})] \right\} \end{aligned} \quad (4.23)$$

için (4.12) ifadesinden $p(Sx_{2k(i)}, Tz) \leq rM(x_{2k(i)}, z)$ olur. $k \rightarrow \infty$ ve (4.22) den

$$M(x_{2k(i)}, z) = \max \left\{ 0, p(Tz, z), 0, \frac{1}{2} p(Tz, z) \right\} = p(Tz, z)$$

elde edilir. Böylece

$$p(z, Tz) \leq rp(Tz, z)$$

dir. $r < 1$ olduğundan $p(Tz, z) = 0$ ve buradan da $Tz = z$ dir. Benzer şekilde $\{x_{2k+1}\}$ dizisinin $\{x_{2k(i)+1}\}$ alt dizisini seçersek $Sz = z$ olur. Böylece $Sz = Tz = z$ dir.

Örnek 4.8. $X = [0,1]$ ve $p(x, y) = \max\{x, y\}$ alalım. (X, p) bir tam kısmi metrik uzaydır fakat p metrik değildir. $Sx = Tx = \frac{x}{3}$ ve $r = \frac{1}{2}$ olacak şekilde $S, T : X \rightarrow X$ dönüşümlerini alalım. $x \geq y$ için $M(x, y) = \max\left\{x, y, x, \frac{1}{2}[x + p(y, Sx)]\right\} = x$ dir.

Buradan

$$p(Tx, Sy) = \max\left\{\frac{x}{3}, \frac{y}{3}\right\} = \frac{x}{3} \leq \frac{1}{2}M(x, y)$$

olur. Böylece Teorem 4.7. nin tüm şartları sağlanır ve 0 , T ve S nin ortak sabit noktası olur (Karapınar ve Yüksel 2011).

Önerme 4.9. (X, p) tam kısmi metrik uzay ve $S, T : X \rightarrow X$ iki dönüşüm olsun.

$$M(x, y) = \max\left\{p(T^m x, x), p(S^n y, y), p(x, y), \frac{1}{2}[p(T^m x, y) + p(S^n y, x)]\right\}$$

olmak üzere her $x, y \in X$ ve m, n pozitif tamsayıları için

$$p(T^m x, S^n y) \leq rM(x, y)$$

olacak şekilde $r \in [0,1)$ varsa $T^m z = S^n z = z$ olacak şekilde $z \in X$ vardır (Karapınar ve Yüksel 2011).

Teorem 4.10. (X, p) tam kısmi metrik uzay ve $S, T : X \rightarrow X$ iki dönüşüm olsun.

$$M(x, y) = \max\left\{p(T^m x, x), p(S^n y, y), p(x, y), \frac{1}{2}[p(T^m x, y) + p(S^n y, x)]\right\}$$

olmak üzere her $x, y \in X$ ve m, n pozitif tamsayıları için

$$p(T^m x, S^n y) \leq rM(x, y) \quad (4.24)$$

olacak şekilde $r \in [0, 1)$ varsa T ve S nin $z \in X$ ortak sabit noktası vardır (Karapınar ve Yüksel 2011).

İspat: Önerme (4.9) dan z nin

$$T^m z = S^n z = z \quad (4.25)$$

şeklinde S ve T nin ortak sabit noktası olduğunu iddia ediyoruz.

$$\begin{aligned} M(Tz, z) &= \max \left\{ p(T^m Tz, Tz), p(S^n z, z), p(Tz, z), \frac{1}{2} [p(T^m Tz, z) + p(S^n z, Tz)] \right\} \\ &= \max \left\{ p(TT^m z, Tz), p(z, z), p(Tz, z), \frac{1}{2} [p(TT^m z, z) + p(z, Tz)] \right\} \\ &= \max \left\{ p(Tz, Tz), p(Tz, z), \frac{1}{2} [p(Tz, z) + p(z, Tz)] \right\} \\ &= \max \{ p(Tz, Tz), p(Tz, z) \} \end{aligned}$$

için (4.24) ve (4.25) den

$$p(Tz, z) = p(TT^m z, S^n z) = p(T^m Tz, S^n z) \leq rM(Tz, z) \quad (4.26)$$

elde edilir. (P3) den $p(Tz, Tz) \leq p(Tz, z)$ dir ve

$$M(Tz, z) = \max \{ p(Tz, Tz), p(Tz, z) \} = p(Tz, z)$$

olur. $r < 1$ için ve (4.26) ifadesinden $p(Tz, z) \leq rp(Tz, z)$ olur. Buradan $p(Tz, z) = 0$ ve dolayısıyla $Tz = z$ dir. Benzer şekilde $Sz = z$ elde edilir. Dolayısıyla $Tz = Sz = z$ dir. z nin tek ortak sabit nokta olduğunu iddia etmiştik. Tersine yani w nin S ve T nin başka bir ortak sabit noktası olduğunu kabul edelim. O halde

$$\begin{aligned} M(z, w) &= \max \left\{ p(T^m z, z), p(S^n w, w), p(z, w), \frac{1}{2} [p(T^m z, w) + p(S^n w, z)] \right\} \\ &= \max \left\{ p(z, z), p(w, w), p(z, w), \frac{1}{2} [p(z, w) + p(w, z)] \right\} = p(z, w) \end{aligned}$$

için $p(z, w) = p(T^m z, S^n w) \leq rM(z, w)$ dolayısıyla $p(z, w) \leq rp(z, w)$ olur. $0 \leq r < 1$ için $p(z, w) = 0$ ve buradan da $z = w$ elde edilir. Böylece z , S ve T nin ortak sabit noktası olur.

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu bölümde araştırma bulguları kısmındaki teoremlerle ilgili bazı sonuçlara yer verilecektir.

Sonuç 5.1. (X, p) tam kısmi metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ ve $\gamma \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ sabiti için

$$p(Tx, Ty) \leq \gamma [p(x, Tx) + p(y, Ty)]$$

olsun. Bu durumda T dönüşümünün bir tek $x^* \in X$ sabit noktası vardır ve $p(x^*, x^*) = 0$ dır (Samet *et al.* 2013).

Sonuç 5.2. (X, p) tam kısmi metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ ve $\alpha, \beta, \gamma \in [0, \infty)$ için $\alpha + \beta + \gamma < 1$ ve

$$p(Tx, Ty) \leq \alpha p(x, y) + \beta p(x, Tx) + \gamma p(y, Ty)$$

olsun. Bu durumda T dönüşümünün bir tek $x^* \in X$ sabit noktası vardır ve $p(x^*, x^*) = 0$ dır (Samet *et al.* 2013).

Sonuç 5.3. (X, p) tam kısmi metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ ve $k \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ sabiti için

$$p(Tx, Ty) \leq k [p(x, Ty) + p(y, Tx)]$$

olsun. Bu durumda T dönüşümünün tek $x^* \in X$ sabit noktası vardır ve $p(x^*, x^*) = 0$ dır (Samet *et al.* 2013).

Sonuç 5.4. (X, p) tam kısmi metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$, $\beta, \gamma \geq 0$ ve $\beta + \gamma < 1$ için

$$p(Tx, Ty) \leq \beta p(x, Tx) + \gamma p(y, Ty)$$

şartı sağlanıyorsa T dönüşümü tek sabit noktaya sahiptir (Altun vd 2010).

Teorem 4.5. de $\lambda \in [0, 1)$ için $\phi(t) = \lambda t$ alırsak Sonuç 5.5.'i elde ederiz.

Sonuç 5.5. (X, p) tam kısmi metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. $\lambda \in [0, 1)$ iken her $x, y \in X$ için

$$p(Tx, Ty) \leq \lambda \max \left\{ p(x, y), p(x, Tx), p(y, Ty), \frac{1}{2} [p(x, Ty) + p(y, Tx)] \right\}$$

şartı sağlanıyorsa T dönüşümü tek sabit noktaya sahiptir (Altun vd 2010).

(X, p) tam kısmi metrik uzay ve bu uzayda tanımlı iki $S, T: X \rightarrow X$ dönüşümlerini aldığımız zaman yukarıdaki gibi benzer sonuçlar elde edebiliriz.

KAYNAKLAR

- Agarwal, R.P., Meehan, M., O'Regan, D., 2001. Fixed Point Theory and Applications, Cambridge University Press.
- Altun, İ., Şimşek, H., 2008. Some fixed point theorem on dualistic partial metric spaces, J. Adv. Math. Studies, I, No:1-2, 01-08.
- Altun, İ., Sola F., Şimşek, H., 2010. Generalized contractions on partial metric spaces, Topology and its Applications, 157, 2778-2785
- Bari, C.D., Vetro P., 2011. Fixed points for weak ' ϕ ' -contractions on partial metric Spaces. 1, No. 1, 4-9.
- Bukatin, M.A., Scott, J.S., 1997. Towards computing distances between programs via Scott domains, in. Logical Foundations of Computer Science, Lecture Notes in Computer Science (eds. S. Adian and A. Nerode), 1234, Springer, 33-43, Berlin.
- Bukatin, M.A., Shorina, S.Y., 1998. Partial metrics and co-continuous valuations, in: Foundations of Software Science and Computation Structures, Lecture Notes in Computer Science (ED.M.Nivat), 1333, 43-78, Springer, Berlin.
- Escardo, M.H., 1996. PCF extended with real numbers, Theoretical Computer Science 162, 79-115.
- Hardy G.E., Rogers T.D., 1973. A generalization of a fixed point theorem of Reich, Canad. Math. Bull. 16, 201–206.
- Ilić, D., Pavlović, V., Rakočević, V., 2011. Some new extensions of Banach's contraction principle to partial metric space. Applied Mathematics Letters 24 (2011), 1326–1330
- Ilić, D., Pavlović, V., Rakočević, V., 2011. Extensions of the Zamfirescu theorem to partial metric spaces. Mathematical and Computer Modelling 55 (2012), 801–809
- Karapınar, E., Yüksel U., 2011. Some Common Fixed Point Theorems in Partial Metric Spaces. Hindawi Publishing Corporation Journal of Applied Mathematics, 2011, Article ID 263621, 16 pages
- Khamsi, M.A., Kirk W.A., 2001. An Introduction to Metric Spaces and Fixed Point Theory.
- Künzi, H.P.A., 2001. Nonsymmetric distances and their associated topologies: About the origins of basic ideas in the area of asymmetric topology, in: Handbook of the History of General Topology (eds.C.E. Aull and R.Lowen), 3, Kluwer Acad. Publ., 853-968, Dordrecht.
- Matthews, S.G., 1992. Partial metric topology, Research Report 212, Department of Computer Science, University of Warwick.
- Matthews, S.G., 1992. Partial metric topology in Proceedings of the 8th Summer Conference, Queen's College. General Topology and its Applications, Annals of the New York Academy of Sciences, 728, 183–197.
- Matthews, S.G., 1994. Partial metric topology, in: Proc. 8th Summer Conference on General Topology and Applications. Ann. New York Acad. Sci. 728, 183-197.
- Matthews, S.G., 2008. Partial Metric Spaces A Fuss about Nothing. The 2008 Summer Conference Universitaria de la UNAM Mexico City.

- Oltra, S., Valero, O., 2004. Banach's fixed point theorem for partial metric spaces, *Rend. Ist. Mat. Univ. Trieste* 36, 17-26.
- Oltra, S.G., Romaguera, S., Sanchez-Peres, E.A., 2002. Bicompleting weightable quasi metric spaces and partial metric spaces, *Rend. Circolo Mat. Palermo*, 50, 151-162.
- Rabarison, A.F., 2007. *Partial Metrics*, Annals of The New York. Academy of Sciences, 1994, pp. 183-197.
- Romaguera, S., Schellekens, M., 1999. Quasi metric properties of complexity spaces, *Topology Appl.* 98, 311-322.
- Romaguera, S., Schellekens, M., 2001. Weightable quasi metric semigroups and semilattices, *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, 40, 347-358.
- Romaguera, S., Schellekens, M., 2005. Partial metric monoids and semivaluation spaces, *Topology Appl.*, 153, 948-962.
- Samet, B., Vetro, C., Vetro F., 2013. From metric spaces to partial metric spaces, *Fixed Point Theory and Applications* 2013, 2013:5
- Schellekens, M., 1995. The Smyth completion: a common foundation for denotational semantics and complexity analysis, *Proc. MFPS 11*, *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, 1, 211-232.
- Schellekens, M., 2003. A characterization of partial metrizable domains: domains are quantifiable, *Theor. Comput. Sci.* 305, 409-432.
- Schellekens, M., 2004. The correspondence between partial metrics and semivaluations, *Theor. Comput. Sci.* 315, 135-149.
- Seda, A.K., 1996. Quasi metrics and fixed point in computing, *Bull. EATCS* 60, 154-163.
- Soykan, Y., 2008. *Çözümlü Fonksiyonel Analiz Araştırmaları*, Nobel Yayınları.
- Soykan, Y., 2008. *Fonksiyonel Analiz*. Nobel Yayınları
- Valero, O., 2005. On Banach fixed point theorems for partial metric spaces. *Applied Gen. Topology*, 6, no. 2, 229-240.
- Waszkiewicz, P., 2003. The local triangle axiom in topology and domain theory, *Apply. Gen. Topology* 4, 47-70.
- Waszkiewicz, P., 2003. Quantitative continuous domains, *Appl. Categor. Struct.* 11, 41-67.

ÖZGEÇMİŞ

1987 yılında Van'da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Kastamonu'da, lise öğrenimini Kayseri'de tamamladı. 2004-2008 yılları arasında Ankara Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde lisans eğitimini aldı. 2009-2010 yılları arasında Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Orta Öğretim Fen ve Matematik Alanları Öğretmenliği (tezsiz) yüksek lisansını bitirdi. 2011 yılında Atatürk Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde yüksek lisans öğrenimine başladı. Halen yüksek lisans eğitimine devam etmektedir.