T.C.
AKSARAY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
ORTAK YÜKSEK LİSANS PROGRAMI

KISMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ ÜZERİNE YENİ YÖNTEMLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Talip BOZDEMİR

Danışman: Doç. Dr. Yıldıray KESKİN

AKSARAY , 2014

T.C.

AKSARAY ÜNİVERSİTESİ - SELÇUK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜLERİ

TEZ KABUL ve ONAY BELGESİ

Talip BOZDEMİR' in "Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemlerin Nümerik Çözümleri Üzerine Yeni Yöntemler" başlıklı lisansüstü tez çalışması, aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir

<u>**İmza**</u>

Danışman : Doç. Dr. Yıldıray Keskin (Selçuk Üniversitesi)

Üye : Yrd. Doç. Dr. Hasan Köse (Selçuk Üniversitesi)

Üye : Yrd. Doç. Dr. Halis Bilgil (Aksaray Üniversitesi)

Tezin Savunulduğu Tarih : 28/01/2014

ÖNSÖZ

Bu yüksek lisans tez çalışması Selçuk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi Doç. Dr. Yıldıray KESKİN yönetiminde hazırlanarak Aksaray Üniversitesi Fen Bilimler Enstitüsüne sunulmuştur.

Hazırlamış olduğum yüksek lisans tezim içerik olarak beş bölümden oluşmuştur. Birinci bölümde konu ile ilgili temel tanımlar verildi. İkinci bölümde nümerik yöntemler hakkında literatür özeti verilmiştir. Üçüncü bölümde ise nümerik ve analitik çözümlerin ifadeleri üzerinde durdum. Varyasyonel İterasyon yöntemi, Adomian Ayrışım yöntemi ve İndirgenmiş Diferansiyel Dönüşüm yöntemine giriş yapıldı. Dördüncü bölümde bazı özel kısmi türevli diferansiyel denklemleri indirgenmiş diferansiyel dönüşüm yöntemi ile çözüp diğer yöntemler ile kıyaslamalar yaptım. Son bölümde ise elde ettiğim verilerden faydalanarak, yöntemler hakkında değerlendirme yaptım.

Talip BOZDEMİR

AKSARAY 2014

İmza

TEŞEKKÜR

Tez çalışması seçimi ve yürütülmesi sürecinde yardımlarından ve yönlendirmelerinden dolayı tez yöneticisi sayın hocam Doç. Dr. Yıldıray KESKİN'e ve eğitim öğretim sürecinde maddi manevi desteklerini esirgemeyen aileme teşekkür ederim.

Talip BOZDEMİR

İÇİNDEKİLER

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KISMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ ÜZERİNE YENİ YÖNTEMLER

Talip BOZDEMİR

T.C.

Aksaray Üniversitesi – Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Yıldıray KESKİN

Birçok mühendislik problemleri ve fen bilimleri uygulamalarında karşılaştığımız kısmi türevli diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri kimi zaman zor, imkânsız veya karmaşık hesaplamalar olabileceğinden bu denklemlerin istenilen çözümlere daha pratik olarak bizi ulaştırabilecek bazı yeni yöntemler geliştirilmiştir. Bu yöntemleri kullanarak denklemlerin nümerik çözümleri daha kısa zamanda istenilen şartlara uygun olarak elde edilebilmektedir.

Bu tez çalışmasında seçilen bazı kısmi türevli diferansiyel denklemlerin var olan yeni yöntemler (indirgenmiş diferansiyel dönüşüm yöntemi, varyasyonel iterasyon yöntemi ve adomian ayrışım yöntemi) ve bilgisayar yardımıyla nasıl çözüleceği araştırılmış ve bu problemlere uygun prosedürler yazılmıştır.

2014, 34 sayfa

Anahtar Kelimeler : Kısmi Türevli Diferansiyel Denklem, İndirgenmiş Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi, Varyasyonel İterasyon Yöntemi, Adomian Ayrışım Yöntemi.

ABSTRACT

MS THESIS

NUMERICAL SOLUTIONS OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS'NEW METHODS

Talip BOZDEMİR

T.R.

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF AKSARAY UNIVERSITY – SELCUK UNIVERSITY

THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE IN MATHEMATICS

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Yıldıray KESKİN

Some new methods have been developed to reach there quested solutions more practically as several engineering problems and the numerical solutions of the partial differential equations seen on the science practises might sometimes be difficult , complex or even impossible.Through these methods numeric solutions of the quations may be obtained in a short time.

On this study, it is searched how to solve some partial differantial equations through current new methods (reduced differantial transform method, method of variational iteration and adomian decomposition method) and the help of ICT and also suitable procedures to these problems are noted.

2014, 34 Pages

Keywords: Partial Differential Equations, Reduced Differential Transform Method, Method of Variational Iteration , Adomian Decomposition Method.

SİMGELER DİZİNİ

A_n	AdomianPolinomu
L	Lineer operatör
L^{-1}	İntegral operatörü
N	Lineer olmayan operatör
λ	Lagrange çarpanı
$u(x,t)$	Çözüm fonksiyonu
$\tilde{u}_n$	Sınırlanmış varyasyon

1. GİRİŞ

1.1. Amaç ve Kapsam

Uygulamalı matematik, fizik ve mühendislik bilimlerindeki bir çok problemlerinin matematik analizinde ve temel tabiat kanunlarının modellenmesinde sıklıkla kısmi türevli diferansiyel denklemler (KTDD) karşımıza çıkmaktadır. Bu denklemler modern matematikte özellikle fizik, mühendislik, kimya, geometri ve analizde çok önemlidir. Bu denklemlerin çözümleri için analitik ve nümerik olarak birçok yöntem tanıtılmıştır. Genelde bu tür denklemlerin nümerik çözümlerine gereksinim duyulmaktadır. Bunun nedeni ise nümerik çözümlerin bilgisayarlar ile daha uyumlu olması ve farklı algoritmalarla istenilen sonuçların daha kolay elde edilebilmesidir.

Kısmi türevli diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri hakkında literatürde birçok çalışma yapılmıştır. Bu çalışmaların bazılar şu şekilde özetlenebilir.

İndirgenmiş diferansiyel dönüşüm yöntemi ilk olarak Keskin ve Oturanç (2011) tarafından diferansiyel dönüşüm yönteminin bir adım ilerisi olarak tanıtılmıştır (Keskin ve Oturanç, 2011). İndirgenmiş diferansiyel dönüşüm yönteminin klasik dönüşüm yöntemlerinden farkı, kısmi diferansiyel denklemi yarı cebirsel bir denkleme dönüştürmektedir. Klasik dönüşüm yöntemlerine göre avantajı ise daha az işlemle daha net bir sonuca ulaşmasıdır (Keskin, Çağlar 2011).

Analitik çözüme hızla yakınsayan başarılı yaklaşımlar veren Varyasyonel İterasyon Yöntemi Ji Huan He (1997) tarafından tanıtılmıştır. Bu yöntem ile elde edilen nümerik çözümlerin hata miktarının az olmasının yanında işlemler sırasında kullanılacak bilgisayarda yüksek kapasiteye de ihtiyaç duyulmaması yöntemin uygulamalarını artırmıştır. Ji Huan He, geliştirdiği yöntemi otonom diferansiyel denklemlere (2000), lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlere (2004), integro diferansiyel denklemlere uyguladı (Wang ve He 2007). He’nin yöntemi, Abdou ve Soliman (2005), Burger ve coupledBurger, Schrodinger-KdV,genelleştirilmiş KdV ve sığ su denklemlerinin çözümlerini araştırmada kullandılar. Momani ve Abuasad, lineer Helmholtz kısmi diferansiyel denklemin çözümü için bu yöntemi uyguladılar. Ganji ve arkadaşları (2006) lineer olmayan Joulent-Miodek, coupledKdV ve coupledMKdV denklemlerinin çözümlerini varyasyonel iterasyon yöntemi ile araştırdılar.

G.Adomian’ın 1980 yılında tanıttığı kendi ismi ile anılan yöntem picard yönteminden türetilmistir. Adomian, picard yöntemi uygulanırken lineer olmayan fonksiyonların yerine kendi ismi ile anılan Adomian polinomlarını kullanmış ve ardışık integraller alarak yaklaşık çözüm elde etmiştir. Burada hemen söylememiz gerekir ki Adomian polinomları lineer olmayan fonksiyonlara karşılık gelen Taylor seri açılımdaki katsayılardır (Keskin ve Oturanç, 2010)

Yukarıda belirtilen çalışmalar ışığında bu tez çalışmamızda, seçilen bazı kısmi türevli diferansiyel denklemlerin var olan yeni yöntemler ve bilgisayar yardımıyla nasıl çözüleceği araştırılıp bu problemlere uygun bilgisayar programları yazılacaktır.

2. LİTERATÜR ÖZETİ

AYAZ, F. “On the two dimensional differential transform method”, **Applied Mathematics and Computation**; 143, 361-374, 2003. Bu çalışmada, iki boyutlu diferansiyel dönüşüm için bazı teoremler verilmiş ve bununla birlikte lineer ve lineer olmayan kısmi türevli başlangıç değer problemleri çözülmüştür.

AYAZ, F., “Applications of differential transform methods to differential algebric equations”, **Appl. Maths Comput**; 152, 649-657, 2004. Bu çalışmada lineer cebirsel-diferansiyel denklemlerin çözümü diferansiyel dönüşüm yöntemi ile incelenerek konuyla ilgili örneklerden elde edilen sonuçlar analitik çözümlerle karşılaştırılmıştır.

CHEN, C.K., HO, S.H.; Solving partial differential equations by two dimensional differential transform method. **Applied Mathematics and Computation**; 106, 171-179, 1999. Bu çalışmaya kadar yalnızca adi türevli diferansiyel denklemler için uygulanabilen diferansiyel dönüşüm metodu, bu çalışmayla birlikte ilk olarak kısmi türevli diferansiyel denklemlere genişletilmiş olup bunun için iki boyutlu diferansiyel dönüşüm tanımlanmıştır.

HE, J. H. "Variational iteration method-a kind of non-linear analytical technique: Some examples." **International Journal of Non-Linear Mechanics** 34(4): 699-708 (1999). He, bu çalışmasında lineer olmayan problemlerin çözümleri için variational iteration method ismi verilen yeni bir analitik çözüm tanıtmıştır. Bu yöntem başlangıç değer problemini varyasyon teorideki lagrange çarpanı yardımıyla çözmüştür. Adomian Ayrışım Yöntemi ile kıyasladığında daha iyi sonuç vermiştir.

HE, J. H. "Variational iteration method-a kind of non-linear analytical technique: Some examples." **International Journal of Non-Linear Mechanics** 34(4): 699-708 (1999). He, bu çalışmasında lineer olmayan problemlerin çözümleri için variational iteration method ismi verilen yeni bir analitik çözüm tanıtmıştır. Bu yöntem başlangıç değer problemini varyasyon teorideki lagrange çarpanı yardımıyla çözmüştür. Adomian Ayrışım Yöntemi ile kıyasladığında daha iyi sonuç vermiştir.

KESKİN Y., OTURANÇ G.,“Reduced Differential Transform Method for Partial Differential Equations”, **International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation,** 10(6),(2009). Bu çalışmada indirgenmiş diferansiyel dönüşüm yöntemi ilk defa tanıtılmıştır.

KESKİN Y., OTURANÇ G., “Reduced differential transform method for generalized KdVEquations”, **Mathematical and Computational Applications,** 15 (3), 382-393,(2010). Bu çalışmada indirgenmiş diferansiyel dönüşüm yöntemi genelleştirilmiş KdV denklemlerine başarılı bir şekilde uyarlanmıştır

KESKİN Y., OTURANÇ G., “The Reduced Differential Transform Method: A New Approach to Fractional Partial Differential Equations”, **Nonlinear Science Letters A**, 1 (2), 207-218, 2010. Bu çalışma kısmi türevli diferansiyel denklemlere indirgenmiş diferansiyel dönüşüm yöntemini uygulanmıştır .

KESKİN Y., KURNAZ A., KİRİŞ M.E., OTURANÇ G., “Approximate solution of Generalized Pantograph Equations by the differential transform method”, **International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation,** 8(2) 2007, 159-164. Bu çalışmada,genelleştirilmiş pantograf denklemlerin çözümü için diferansiyel dönüşüm yöntemi uygulanmış, konuyla ilgili örnekler ortaya konulmuştur.

KESKİN Y.,OTURANÇ G., “The Differential Transform Methods For Nonlinear Functions And Its Applications”, **Selçuk Journal of Applied Mathematics,** 9(1),69-76, 2008. Bu çalışmada lineer olmayan fonksiyonlar için diferansiyel dönüşüm tanımı verilmiş ve Emden Fowler diferansiyel denklemi çözülmüştür.

KURNAZ A., OTURANÇ G., KIRIŞ M.E. “n dimensional differential transformation method for solving PDE’s”, **International Journal of Computer Mathematic**, 2005. Bu çalışmada, kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümü için genelleştirme yapılmış ve n boyutlu diferansiyel dönüşüm yöntemi tanımlanmıştır. Sonuçlar bazı lineer ve lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemler çözülerek test edilmiştir.

MOMANI S., ODIBAT Z. “Numerical comparison of methods for solving leardifferential equations of fractional order” **Chaos, Solitons & Fractals**, 31, 5, 2007, 1248-1255. Bu çalışmada lineer kesirli diferansiyel denklemlerin çözümleri için kesirli fark yöntemi, Adomian decomposition yöntemi ve varyasyonel iterasyon teknikleri kullanılarak farklı tip problemler için çözümler elde edilerek elde edilen sonuçlar ile analitik sonuçlar karşılaştırılmıştır.

MOMANI S., ODIBAT Z. **“**Numerical methods for nonlinear partial differential equations of fractional order” **Applied Mathematics and Computation**, 32(1) 2008,28-39. Bu çalışmada lineer olmayan kesirli kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümleri için Adomian decomposition yöntemi ve varyasyonel iterasyon teknikleri kullanılarak farklı tip problemler için çözümler elde edilmiş, elde edilen sonuçlar ile analitik sonuçlar karşılaştırılmıştır.

WAZWAZ A.M.,“**Handbook of Differential Equations: Evolutionary Equations,** 4”,485-568, 2008.Bu çalışmada Adomian Ayrışım yöntemi kullanılarak KdV denkleminin soliton çözümleri araştırılmıştır.

WAZWAZ A.M.,“Partial Differential Equations and Solitary Waves Theory”,Springer, 2009.Bu çalışmada kısmi türevli diferansiyel denklemler incelenip bu denklemlerin çözümleri varyasyonel iterasyon yöntemi ve adomian ayrışım yöntemiyle çözülmüştür.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Kısmi türevli diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri hesaplanırken kullanacağımız belli başlı yöntemler aşağıda belirtilen şekildedir.

3.1. İndirgenmiş Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi

İndirgenmiş diferansiyel dönüşüm yöntemini tanımını vermeden önce bu yönteme temel teşkil eden bir boyutlu diferansiyel dönüşüm yöntemini ve iki boyutlu diferansiyel dönüşüm yöntemini açıklayacağız. Daha sonra bu yöntemler ışığında indirgenmiş diferansiyel dönüşüm yönteminin tanımını vereceğiz.

3.1.1. Bir Boyutlu Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi

Tek değişkenli $u(x)$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşüm fonksiyonu $\mathrm{U}(k)$ olmak üzere, $u(x)$ in tek boyutlu diferansiyel dönüşümü

$$\mathrm{U}(k) = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}\mathrm{u}(x)\right]_{x=0}$$

olarak tanımlanır.

$\mathrm{U}(k)$ dönüşüm fonksiyonunun tersi; diferansiyel ters dönüşüm fonksiyonu,

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{U}(k)x^k$$

biçimde tanımlanır.

Yukarıdaki eşitlikler dikkate alınarak aşağıdaki

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}\mathrm{u}(x)\right]_{x=0} x^k$$

eşitliği elde edilir. (Zhou, 1986)

3.1.2. İki Boyutlu Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi

Benzer şekilde, iki değişkenli $u(x,\mathrm{y})$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşüm fonksiyonu $\mathrm{U}(k,h)$ olmak üzere, $u(x,\mathrm{y})$ nin iki boyutlu diferansiyel dönüşümü

$$\mathrm{U}(k,h)=\frac{1}{k!h!}\left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h}\mathrm{u}(x,y)\right]_{x=0,y=0}$$

olarak tanımlanır.

$\mathrm{U}(k,h)$ dönüşüm fonksiyonunun tersi; diferansiyel ters dönüşüm fonksiyonu,

$$u(x,\mathrm{y})=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\mathrm{U}(k,h)x^k y^h$$

biçimde tanımlanır. Yukarıdaki eşitlikler dikkate alınarak aşağıdaki

$$u(x,\mathrm{y})=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\frac{1}{k!h!}\left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h}\mathrm{u}(x,y)\right]_{x=0,y=0}.x^k y^h$$

eşitliği elde edilir. (Chen, 1999)

3.1.3. İndirgenmiş Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi

Kabul edelim ki iki boyutlu kısmi türevli diferansiyel denklemin çözümü

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\mathrm{U}(k,h)x^k t^h$$

şeklinde olsun. O zaman fonksiyonun diferansiyel dönüşüm karşılığı

$$\mathrm{U}(k,h)=\frac{1}{k!h!}\left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial t^h}\mathrm{u}(x,t)\right]_{x=0,t=0}$$

olarak tanımlanmıştı.

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\mathrm{U}_{k,h}x^k t^h$$

olduğundan fonksiyonu açık halde yazarsak

$$\mathrm{U}_{0,0},\mathrm{U}_{0,1}\,x,\mathrm{U}_{0,2}\,x^2,...,\mathrm{U}_{1,0}\,t,\mathrm{U}_{1,1}\,tx,\mathrm{U}_{1,2}\,tx^2,...,\mathrm{U}_{2,0}\,t^2,\mathrm{U}_{2,1}\,t^2x,...$$

elde edilir. Buradaki terimleri t nin kuvvetlerine göre düzenleme yapılırsa yani ilk grup

$t^0\sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{U}_{k,0}x^k$, ikinci grup $t^1\sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{U}_{k,1}x^k$, üçüncü grup $t^2\sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{U}_{k,2}x^k$ … v.b.

Böylece

$$\mathrm{u}_{x,t} = \sum_{h=0}^{\infty} \mathrm{U}_h(x)t^h$$

fonksiyonu elde edilir. Buradan hareketle aşağıdaki tanımlar verilmiştir (Keskin, 2010).

Tanım 3.1.1

İki bileşenli $u(x,t)$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşüm fonksiyonu $\mathrm{U}(k,h)$ olmak üzere, $u(x,t)$ nin t boyunca hesaplanacak çözümü

$$u(x,t) = \sum_{h=0}^{\infty} \mathrm{U}_h(x)t^h$$

şeklindedir (Keskin, 2010).

Tanım 3.1.2

İki bileşenli $u(x,t)$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşüm fonksiyonu $\mathrm{U}(k,h)$ olmak üzere, $u(x,t)$ nin t boyunca hesaplanacak çözümün indirgenmiş diferansiyel dönüşümü

$$\mathrm{U}_h(x) = \frac{1}{h!}\left[\frac{\partial^h}{\partial t^h}\mathrm{u}(x,t)\right]_{t=0}$$

şeklindedir. (Keskin, 2010).

Tanım 3.1.3

$\mathrm{U}_h(x)$ 'nin t boyunca indirgenmiş diferansiyel dönüşüm fonksiyonunun tersi;

$$u(x,t) = \sum_{h=0}^{\infty} \mathrm{U}_h(x)t^h$$

şeklinde tanımlanır. Yukarıdaki iki eşitlik dikkate alınarak aşağıdaki eşitliği elde edebiliriz. (Keskin, 2010).

$$u\left(x,t\right)=\sum_{h=0}^{\infty}\frac{1}{h!}\left[\frac{\partial^{h}}{\partial t^{h}}\mathrm{u}(x,t)\right]_{t=0}t^{h}$$

Tanım 3.1.4

İki bileşenli $u\left(x,t\right)$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşüm fonksiyonu $\mathrm{U}(k,h)$ olmak üzere, $u\left(x,t\right)$ nin x boyunca hesaplanacak çözümü

$$u\left(x,t\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{U}_{k}(t)x^{k}$$

şeklindedir. (Keskin, 2010).

Tanım 3.1.5

İki bileşenli $u\left(x,t\right)$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşüm fonksiyonu $\mathrm{U}(k,h)$ olmak üzere, $u\left(x,t\right)$ nin x boyunca hesaplanacak çözümün indirgenmiş diferansiyel dönüşümü,

$$\mathrm{U}_{k}(t)=\frac{1}{k!}\left[\frac{\partial^{h}}{\partial x^{k}}\mathrm{u}(x,t)\right]_{x=0}$$

şeklindedir. (Keskin, 2010).

3.2. Varyasyonel İterasyon Yöntemi

Bu yöntem ile elde edilen nümerik çözümlerin hata miktarının az olmasının yanında işlemler sırasında kullanılacak bilgisayarda yüksek kapasiteye de ihtiyaç duyulmaması yöntemin uygulamalarını artırmıştır.

Varyasyonel iterasyon yönteminin uygulanması,

$$Du=g(x)$$

Kısmi türevli diferansiyel denkleminde D türev operatörünü L lineer türev operatör ve N lineer olmayan operatör olmak üzere diferansiyel denklem

$$Lu+Nu=g(x)$$

şeklinde yazılabilir.

L lineer türev operatörünün tersi $L^{-1} = \int_0^x dx$ operatörü denkleme uygulanırsa çözümü aranan diferansiyel denkleme uygulanırsa

$$u = L^{-1}(g(x) - Nu)$$
$$u = \int_0^x (g(x) - Nu)dx + u(0)$$
$$u = \int_0^x g(x)dx + u(0) + \int_0^x Nudx$$

elde edilir.

Buradan varyasyonel iterasyon yöntemi için kullanılan iterasyon denklemi picard yöntemindeki gibi ardışık olarak

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) + \int_0^x \lambda\{Lu_n(s) + N\tilde{u}_n(s) - g(s)\}ds$$

formunda varyasyon fonksiyonu kurulur. Burada λ, Lagrange çarpanı (Inokuti 1978) olup varyasyon teorisinden hareketle Maple, Mathematica gibi paket programları yardımıyla hesaplanır. $\tilde{u}_n$ sınırlanmış varyasyon (He 1999) olup $\delta\tilde{u}_n = 0$'dır.Bulunan λ sayı değerine göre varyasyon fonksiyonu yeniden düzenlenerek aranan çözüm fonksiyonu için rekürans bağıntısı oluşturulmuş olur.Başlangıç koşulu olarak verilen fonksiyon u_0 olarak seçilmek suretiyle $n > 0$ için u_n terimleri için yaklaşımlar elde edilmiş olur.Son olarak çözüm fonksiyonu,

$$u = \lim_{n\to\infty} u_n$$

eşitliğinden elde edilir.

3.3. Adomian Ayrışım Yöntemi

G.Adomian'ın yaptığı gibi önce metodu yapısal olarak tanıtalım. Bunun içinde

$$F\left[u(t)\right] = g(t)$$

denklemini göz önüne alalım. Burada $u(t)$ bilinmeyen fonksiyon ve $g(t)$ sürekli bir fonksiyon olup F ise lineer ve lineer olmayan terimleri içeren lineer olmayan bir diferansiyel operatörü göstersin. Lineer terim *L+R* şeklinde ayrıştırılır, *R* lineer operatörün geri kalan kısmıdır. *L* yüksek mertebeden ve tersi alınabilen bir diferansiyel operatör olsun.

O zaman yukarıdaki denklemi

$$Lu + Ru + Nu = g$$

şeklinde verebiliriz. Burada *N* lineer olmayan operatör ve *L'*de tersi alınabilen bir operatör olduğundan, denklemin her iki tarafına L^{-1} ters operatörü uygulanırsa

$$L^{-1}Lu = L^{-1}g - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu$$

bulunur.

Ayrışım metodu, $u(t)$'nin çözümünü

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n$$

şeklinde seri formunda hesaplar ve lineer olmayan *Nu* terimlerini de

$$Nu = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$$

biçiminde ayrıştırır. Burada A_n'ler $u_0, u_1, \ldots, u_n$'lere bağlı olan ve Adomian polinomları olarak adlandırılan polinomlarıdır.

u ve Nu'lar, sırası ile,

$$u = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i u_i ,$$

$$N(u) = N\left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i u_i \right) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i A_i$$

olarak elde edilir. Burada λ uygunluk için alınan bir parametredir. A_n'ler

$$n!A_n = \frac{d^n}{d\lambda^n}\left[N\left(\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n u_n\right)\right]_{\lambda=0}$$

ifadesiyle bulunur.

Buradan

$$\sum_{n=0}^{\infty}u_n = \theta + L^{-1}g - L^{-1}R\left(\sum_{n=0}^{\infty}u_n\right) - L^{-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty}A_n\right)$$

elde ederiz. Burada $\theta = u(0)$ dır. $\sum_{n=0}^{\infty}u_n$ serisinin terimleri indirgeme formülü ile

$$\begin{aligned} u_0 &= \theta + L^{-1}g \ , \\ u_1 &= -L^{-1}R\,u_0 - L^{-1}A_0 \ , \\ &\vdots \\ u_{n+1} &= -L^{-1}R\,u_n - L^{-1}A_n \ , n \geq 0 \, . \end{aligned}$$

şeklinde yazılır.

Böylece doğru çözüm seri formunda belirtilmiş olur. Fakat uygulamada $\sum_{n=0}^{\infty}u_n$ serisinin bütün terimlerini hesaplamak zordur. Bu nedenle kesme serisinden başlayarak yaklaşık çözümü;

$$\varphi_n = \sum_{i=0}^{n-1}u_n$$

veya

$$\begin{aligned} \phi_1 &= u_0 \ , \\ \phi_2 &= u_0 + u_1 \ , \\ \phi_3 &= u_0 + u_1 + u_2 \ , \\ &\vdots \\ \phi_{n+1} &= u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n \ , n \geq 0 \end{aligned}$$

şeklinde buluruz.

4. UYGULAMALAR:

Bu bölümde bazı kısmı türevli diferansiyel denklemlerin indirgenmiş dönüşüm yöntemi, varyasyonel iterasyon yöntemi ve adomian ayrışım yöntemi ile çözümleri elde edilip, sayısal değerleri tablo halinde verilmiştir.

4.1. Problem 1

$$u_{xx} + u^2 - u_{yy}^2 = 0 \tag{4.1}$$

şeklinde verilen lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemin

$$u(0, y) = 0\,, u_x(0, y) = \cos y \tag{4.2}$$

başlangıç şartına uyan çözümünü üç farklı yöntemle bulalım. (Wazwaz A. M.,2009 "Partial Differential Equations and Solitary Waves Theory")

4.1.1. Adomian Ayrışım Yöntemi ile Çözüm

Denklemimizi operatör formda yazıp bunun her iki yanına L_x^{-1} ters operatörü uygularsak

$$u(x, y) = x.\cos y + L_x^{-1}(u^2{}_{yy} - u^2)$$

olur. Buradan Adomian ayrışım metodunu kullanarak

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, y) = x\cos y + L_x^{-1}(x+t) - L_x^{-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n - \sum_{n=0}^{\infty} B_n\right)$$

olur.

Öyleki; A_n ve B_n ler lineer olmayan terimler olan $u^2{}_{yy}$ ve u^2 yi temsil eden Adomian polinomlardır.

Böylece

$$u_0(x, y) = x.\cos y$$

$$u_{k+1}(x, y) = L_x^{-1}(A_k - B_k), k \geq 0$$

şeklinde elde edilmiş olur.

Sistemi açık şekilde yazarsak

$$\begin{aligned}
u_0(x,y) &= x.\cos y \\
u_1(x,y) &= L_x^{-1}(A_0 - B_0) = 0 \\
u_2(x,y) &= L_x^{-1}(A_0 - B_0) = 0 \\
u_3(x,y) &= L_x^{-1}(A_0 - B_0) = 0 \\
&\vdots \\
u(x,y) &= x.\cos y
\end{aligned}$$

yaklaşık çözümünü elde ederiz.

4.1.2. Varyasyonel İterasyon Yöntemi ile Çözüm

Denklemimizin Lagrange çarpanı $\lambda = \xi - x$ olmak üzere bu değer varyasyon fonksiyonunda yerine yazılırsa aranan çözüm fonksiyonu için rekürans bağıntısı

$$u_{n+1}(x,y) = u_n(x,y) + \int_o^x (\xi - x)\left(\frac{\partial^2 u_n(\xi,y)}{\partial \xi^2} - \left(\frac{\partial^2 u_n(\xi,y)}{\partial y^2}\right)^2 + u_n^{\,2}(\xi,y)\right)\partial \xi$$

şeklinde olur.

$$u_0(x,y) = x\cos y$$

den başlayarak

$$\begin{aligned}
u_1(x,y) &= x\cos y \\
u_2(x,y) &= x\cos y \\
u_3(x,y) &= x\cos y \\
&\vdots \\
u_n(x,y) &= x\cos y
\end{aligned}$$

yaklaşımlarını elde ederiz.

Buradan ;

$$u(x,y) = \lim_{n\to\infty} u_n(x,y) = x\cos y$$

olduğu görülür.

4.1.3. İndirgenmiş Diferansiyel Dönüşüm Yöntemiyle Çözüm

(4.1) denklemine indirgenmiş diferansiyel dönüşüm yöntemini uygularsak

$$(k+1)(k+2)U_{k+2}(y) = -\sum_{r=0}^{k} U_r(y)U_{k-r}(y) + \sum_{r=0}^{k} \frac{d^2U_r(y)}{dy^2}\frac{d^2U_{k-r}(y)}{dy^2} \tag{4.3}$$

rekürans bağıntısını elde ederiz. Burada $U_k(y)$, $u(x,y)$ fonksiyonunun dönüşmüş halini göstermektedir. (4.2) başlangıç koşulunu kullanarak

$$U_0(y) = 0, U_1(y) = \cos(y), \ . \tag{4.4}$$

denklemini yazabiliriz. (4.4) başlangıç koşulunu (4.3) denkleminde yerine yazarak ve (4.3) rekürans bağıntısını kullanarak aşağıdaki $U_k(y)\,(k=1,2,\ldots)$ değerlerini elde ederiz. $U_2(y) = 0,\ U_3(y) = 0,\ U_k(y) = 0\ (k = 4,5,\ldots)$

Daha sonra ters dönüşümü kullanarak

$$u(x,y) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} U_k(y)x^k = x\cos y \tag{4.5}$$

çözümünü elde ederiz.

4.2. Problem 2

$$u_t + uu_x = 0 \tag{4.6}$$

birinci mertebeden quasi lineer homojen kısmi türevli diferansiyel denkleminin

$$u(x,0) = \sin x \tag{4.7}$$

başlangıç şartı altındaki çözümünü üç farklı metodla bulalım. (Wazwaz A. M.,2009 “Partial Differential Equations and Solitary Waves Theory”)

4.2.1. Adomian Ayrışım Yöntemi ile Çözüm

Denklemimizi

$$L_t u = -uu_x$$

formunda yazıp denklemin her iki tarafına L_t^{-1} ters operatörünü uygularsak

$$u(x,t) = \sin x - L_t^{-1}(uu_x)$$

olur.

Buradan $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) = \sin x - L_t^{-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n\right)$ elde edilir. Öyleki A_n ler lineer olmayan uu_x terimlerini gösteren Adomian polinomlarıdır.

Sistemi açık şekilde yazarsak;

$$u_0(x,t) = \sin x$$

$$u_{k+1}(x,t) = -L_t^{-1}(A_k),\ k \geq 0$$

olur.

Buradan;

$$u_0(x,t) = \sin x$$

$$u_1(x,t) = -L_t^{-1}(A_0) = -t \sin x \cos x$$

$$u_2(x,t) = -L_t^{-1}(A_1) = -t \sin x \cos x = \sin x \cos^2 x - \left(\frac{1}{2}\sin^3 x\right)t^2$$

.

.

.

$$u_n(x,t) = \sin x - t \sin x \cos x + \left(\sin x \cos^2 x - \frac{1}{2}\sin^3 x\right)t^2 - \ldots$$

elde edilir.

4.2.2. Varyasyonel İterasyon Yöntemi ile Çözüm

Denklemimizin varyasyon fonksiyonunu yazalım:

$$u_{n+1}(x,t) = u_n(x,t) + \int_0^t \lambda(\xi)\left(\frac{\partial u_n(x,\xi)}{\partial \xi} + u_n(x,\xi)\frac{\partial u_n(x,\xi)}{\partial x}\right)\partial \xi,\ n \geq 0$$

Bu durumu uygun $\lambda(\xi) = -1$dir.

Buradan;

$$u_{n+1}(x,t) = u_n(x,t) - \int_0^t \left(\frac{\partial u_n(x,\xi)}{\partial \xi} + u_n(x,\xi) \frac{\partial u_n(x,\xi)}{\partial x} \right) \partial \xi \quad \text{olur.}$$

$$u_0(x,t) = \sin x$$

den başlayarak

$$u_1(x,t) = \sin x - t \sin x \cos x$$

$$u_2(x,t) = \sin x - t \sin x \cos x + \sin x \left(\cos^2 x - \frac{1}{2} \sin^2 x \right) t^2 - \frac{1}{2} t^3 \sin 2x \cos 2x$$

.

.

.

$$u_n(x,t) = \sin x - t \sin x \cos x + \sin x \left(\cos^2 - \frac{1}{2} \sin^2 x \right) t^2 - \frac{1}{2} t^3 \sin 2x \cos 2x + ...$$

yaklaşımları elde edilir.

4.2.3. İndirgenmiş Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi ile Çözüm

$u(x,t)$ nin t boyunca hesaplanacak çözümün indirgenmiş diferansiyel dönüşümü

$$U_h(x) = \frac{1}{h!} \left[\frac{\partial^h u(x,t)}{\partial t^h} \right]_{t=0}$$

olmak üzere;

denklemimizin indirgenmiş diferansiyel dönüşüm fonksiyonu

$$(k+1) U_{(k+1)}(x) = -\sum_{r=0}^{k} U_r(x) \frac{\partial U_{k-r}(x)}{\partial x}$$

şeklinde olur.

Buradan;

$U_0(x) = \sin x$ (başlangıç değerinin dönüşüm karşılığı)

$U_1(x) = -\sin x$

$U_h(x)$ 'in t boyunca indirgenmiş diferansiyel dönüşüm fonksiyonunun tersi;

$u(x,t) = \sum_{h=0}^{\infty} U_h(x) t^h$ ve $u(x,t) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!} \left[\frac{\partial^h u(x,t)}{\partial t^h} \right]_{t=0} t^h$ olmak üzere;

$$u_0(x,t) = \sin x$$
$$u_1(x,t) = \sin x - t \sin x \cos x$$
$$u_2(x,t) = \sin x - t \sin x . \cos x + \sin x . (\cos^2 x - \frac{1}{2} \sin^2 x) t^2 - \frac{1}{6} t^3 \sin 2x . \cos 2x$$
$$\vdots$$
$$u_n(x,t) = \sin x - t \sin x \cos x + \sin x \left(\cos^2 - \frac{1}{2} \sin^2 x \right) t^2 - \frac{1}{2} t^3 \sin 2x \cos 2x + ...$$

elde edilir.

4.3. Problem 3

$$u_{tt} = u_{xx} + 2x + 6t, \ -\infty \langle x \langle \infty, \ t \rangle 0$$

şeklinde verilen homojen olmayan kısmi türevli dalga denkleminin

$$u(x,0) = 0, \ u_t(x,0) = \sin x$$

başlangıç şartı altındaki çözümünü farklı yöntemlerle bulalım.

4.3.1. Adomian Ayrışım Yöntemi ile Çözüm

Başlangıç değer problemimizin homojen olmadığına dikkat ettikten sonra eşitliğin her iki tarafına L_t^{-1} operatörünü uygular ve başlangıç değerlerini kullanırsak;

$$u(x,t) = xt^2 + t^3 + t \sin x + L_t^{-1}\left(L_x u(x,t) \right)$$

denklemini elde ederiz.

Buradan adomian serilerini $u(x,t)$ için kullanırsak;

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) = xt^2 + t^3 + t\sin x + L_t^{-1}\left(L_x\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t)\right)\right)$$

olur.

Sistemi açık şekilde yazarsak:

$$u_0(x,t) = xt^2 + t^3 + t\sin x$$

$$u_1(x,t) = L_t^{-1}\left(L_x(u_0)\right) = -\frac{1}{3!}t^3 \sin x$$

$$u_2(x,t) = L_t^{-1}\left(L_x(u_1)\right) = -\frac{1}{5!}t^5 \sin x$$

$u_0(x,t)$ nin seri formundaki çözümü

$$u(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t) + u_2(x,t) + \ldots = xt^2 + t^3 + \sin x\left(t - \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{5!}t^5 - \ldots\right)$$

olur.

Çözümün kapalı formdaki ifadesi ise

$$u(x,t) = xt^2 + t^3 + \sin x \sin t$$

şeklinde olur.

4.3.2. Varyasyonel İterasyon Yöntemi ile Çözüm

Denklemimizi varyasyon formunda yazalım.

$$u_{n+1}(x,t) = u_n(x,t) + \int_0^t \lambda(\xi)\left(\frac{\partial^2 u_n(x,\xi)}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \tilde{u}_n(x,\xi)}{\partial x^2} - 2x - 6\xi\right)d\xi \, .$$

$\lambda = \xi - t$ yazarsak iterasyon denklemi;

$$u_{n+1}(x,t)=u_n(x,t)+\int_0^t(\xi-t)\left(\frac{\partial^2 u_n(x,\xi)}{\partial\xi^2}-\frac{\partial^2\tilde{u}_n(x,\xi)}{\partial x^2}-2x-6\xi\right)d\xi\ \ n\geq 0$$

olur.

$$u_0(x,t)=t\sin x$$

den başlayarak

$$u_1(x,t)=xt^2+t^3+t\sin x-\frac{t^3}{3!}\sin x$$
$$u_2(x,t)=xt^2+t^3+t\sin x-\frac{t^3}{3!}\sin x+\frac{t^5}{5!}\sin x$$
$$\vdots$$
$$u_n(x,t)=xt^2+t^3+\sin x\left(t-\frac{t^3}{3!}+\frac{t^5}{5!}-\dots\right)$$

olur. Buradan;

$$u(x,t)=xt^2+t^3+\sin x\sin t$$

çözümü elde edilir.

4.3.3. İndirgenmiş Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi ile Çözüm

Denklemimize indirgenmiş diferansiyel dönüşüm yöntemini uygularsak

$$(k+1)(k+2)U_{k+2}(x)=\frac{d^2U_r(x)}{dx^2}+2x\delta(k)+6\delta(k-1)$$

rekürans bağıntısını elde ederiz. Burada $U_k(x)$, $u(x,t)$ fonksiyonunun dönüşmüş halini göstermektedir. başlangıç koşulunu kullanarak

$$U_0(x)=0, U_1(x)=\sin(x),$$

denklemini yazabiliriz. Başlangıç koşulunu rekürans denkleminde yerine yazarak ve rekürans bağıntısını kullanarak aşağıdaki $U_k(x)(k=2,3,\dots)$ değerlerini elde ederiz.

$$U_2, x$$

$$U_3, -\frac{1}{6}\sin(x)+1$$

$$U_4, 0$$

$$U_5, \frac{1}{120}\sin(x)$$

$$U_6, 0$$

$$U_7, -\frac{1}{5040}\sin(x)$$

$$U_8, 0$$

$$U_9, \frac{1}{362880}\sin(x)$$

$$U_{10}, 0$$

Daha sonra ters dönüşümü kullanarak

$$u(x,t) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} U_k(x)t^k = xt^2 + t^3 + \sin x \sin t$$

çözümünü elde ederiz.

Maple Kod:

```
u[0]:=0:u[1]:=sin(x):
for l from 0 to 10 do
f[l]:=coeftayl(2*x+6*t, t=0, l):
od:
for k from 0 to 10 do
u[k+2]:=(diff(u[k],x,x)+f[k])/(k+1)/(k+2):
od:
y:=0:
for k from 0 to 10 do
y:=y+u[k]*t^k:
od:
print(y):
```

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Çalışmamızda mühendislik ve fizik problemlerinin matematiksel modellemeleri olan özel kısmi türevli diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri literatürde var olan birkaç yeni yöntemler ile elde edilip bu denklemlerin analitik çözümleriyle karşılaştırması yapılmıştır. Bu tür denklemlerin kesin çözümleri zor veya imkansız olabilmektedir. Bu nedenle tez çalışmamızda denklemlerin nümerik çözümlerini bilgisayar yardımıyla daha kolay hesaplayan indirgenmiş diferansiyel dönüşüm yöntemiyle çözümünün daha uygun olduğu anlaşılmıştır. İndirgenmiş diferansiyel dönüşüm yöntemi ile daha az iterasyon ile daha yaklaşık çözümler vererek iyi sonuçlar alınmıştır. Fakat lineer olmayan ifadelerin derecelerinin fazla olması durumunda bilgisayar kullanmaksızın yöntemin uygulanması karmaşık işlemler meydana getirmektedir.

KAYNAKLAR

Ayaz, F., 2002 *"Solution of partial differential equations by using two dimensional differential transform method"*, Third Intern. Symp. Math&Comput. Appl., September 4-6, Konya, TURKEY.

Ayaz, F., 2003 *"On the two dimensional differential transform method"*, Applied Mathematics and Computation; 143, 361-374.

Ayaz, F., Oturanç, G., 2004 *"An approximate solution of burgers equation by differential transform method"*, Selcuk Journal of Applied Mathematics; 5-2, 15-24.

Evans, L.C., 1998 *"Partial differential equations"*, American Mathematical Society Providence, Rhod Island, 19, 1-2.

He J. H., 1997 *"Variational iteration method for delay differential equations"*, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2, 4, 235-236.

He J. H., 1997 *"Variational iteration method for delay differential equations"*, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2, 4, 235-236.

Chen, C.K., Ho, S.H., 1999 *"Solving partial differential equations by two dimensional differential transform method"*, Applied Mathematics and Computation; 106, 171-179.

Keskin Y., Oturanç G. 2009 "Reduced Differential Transform Method for Partial Differential Equations", *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 10(6).

Keskin Y., Oturanç G., 2010 "Reduced differential transform method for generalized KdV Equations", *Mathematical andComputational Applications*, 15 (3), 382-393.

Keskin Y., Oturanç G., 2010 "The Reduced Differential Transform Method: a New Approach to Fractional Partial Differential Equations", *Nonlinear ScienceLetters A*, 1 (2), 207-218.

Keskin Y., Kurnaz A., Kiriş M.E. ve Oturanç G., 2007 "Approximate solutions of generalized pantograph equations by differential transform method", *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 8(2).

Keskin Y., Kurnaz A., Kiriş M.E. ve Oturanç G., 2007 "Approximate solution of Generalized Pantograph Equations by the differential transform method", International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation, 8(2) , 159-164.

Kurnaz A., Oturanç, G., Kiriş, M.E., 2005 *"n dimensional differential transformation method for solving PDE's"*, International Journal of Computer Mathematics.

Momani S., Abuasad S., 2006 *"Application of He's variational-iteration method to Helmholtz equation"*, Chaos, Solitons &Fractals, 27, 5, 1119–1123.

Momani S. and Odibat Z., March 2007 *"Numerical comparison of methods for solving lineardifferential equations of fractional order"* Chaos, Solitons & Fractals, Volume 31, Issue 5, Pages 1248-1255.

Momani S. and Odibat Z. "*Numerical methods for nonlinear partial differential equations of fractional order*" Applied Mathematics and Computation, In Pres.

Özkan O., Keskin, Y., 2005 *"Yüksek mertebeden sınır değer problemlerinin diferansiyel dönüşüm yöntemi ile yaklaşık çözümleri"*, XVIII. Ulusal Matematik Sempozyumu, İstanbul.

Strauss, W.A., 1992 *"Partial Differential equations an introduction"*, John Willey&Sons, Singapore.

Wazwaz A.M., 2008 "Handbook of Differential Equations: Evolutionary Equations, 4", 485-568.

Wazwaz A.M., 2009"Partial Differential Equations and Solitary Waves Theory" Springer.

Wazwaz, A.M., 2001 *"Exact solutions to nonlinear diffusion equations obtained by the decomposition method"*, Applied Mathematics and Computation; 123, 109-122.

Zauderer E., 1983 *"Partial Differential equations of applied mathematics"*, John Willey&Sons, USA.

Zhou, J.K.,1986 *"Differential Transformation and its applications for electrical circuits"*, Huazhong University Press, Wuhan, China..

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Talip BOZDEMİR

Doğum Yılı : 01.01.1974

Eğitim Bilgileri (Kurum ve Yıl)

Lisans : ODTÜ , 1997

Yüksek Lisans :

Doktora :

İletişim Bilgileri

Adres : Yazır mah.Ordu sokak. Manolya sit. No:3/6 Selçuklu/KONYA

Telefon : 0555 602 98 80

E-posta : talipbozdemir@hotmail.com