

**T.C.
ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

E^3 DE SABİT AÇILI YÜZEY AİLESİ

DOKTORA TEZİ

Sedat KAHYAOĞLU

Matematik Anabilim Dalı

**EYLÜL 2013
SAMSUN**



T.C.
ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



MATEMATİK ANABİLİM DALI

E^3 DE SABİT AÇILI YÜZEY AİLESİ

DOKTORA TEZİ

Sedat KAHYAOĞLU
(10210507)

Tezin Savuma Tarihi :20.09.2013

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Emin KASAP

Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalında
Sedat KAHYAOĞLU Tarafından Hazırlanan
 E^3 DE SABİT AÇILI YÜZEY AİLESİ

başlıklı bu çalışma jürimiz tarafından 20/09/2013 tarihinde yapılan sınav ile
DOKTORA tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : **Prof. Dr. Mustafa ÇALIŞKAN**
Gazi Üniversitesi

Jüri Üyeleri : **Prof. Dr. Ayhan SARIOĞLUGİL**
Ondokuz Mayıs Üniversitesi

Prof. Dr. İsmail AYDEMİR
Ondokuz Mayıs Üniversitesi

Prof. Dr. Bünyamin KARABULUT
Ondokuz Mayıs Üniversitesi

Prof. Dr. Emin KASAP
Ondokuz Mayıs Üniversitesi

.../.../2013

Prof. Dr. Recep TAPRAMAZ
Enstitü Müdürü

Aileme,

ÖNSÖZ

Bu tez çalışması boyunca gösterdiği yol ve yöntemlerle yardımlarını esirgemeyen Sayın Hocam Prof. Dr. Emin KASAP'a, doktora çalışmam süresince beni hep teşvik eden abim Doç. Dr. Talip KAHYAOĞLU ile kıymetli ailesine ve sabırlarıyla bana her zaman destek olan sevgili aileme teşekkür ederim.

Eylül 2013

Sedat KAHYAOĞLU
Öğretim Görevlisi

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖNSÖZ.....	vii
İÇİNDEKİLER	ix
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	xi
KISALTMALAR	xiii
ÖZET.....	xv
ABSTRACT	xvii
1. GİRİŞ	1
1.1 Tezin Amacı.....	1
1.2 Literatür Araştırması.....	1
2. GENEL BİLGİLER.....	5
2.1 3-Boyutlu Öklid uzayı	5
2.2 Yüzey Üzerinde Bağlıntılar	7
2.3 Eğrinin Frenet Formülleri	10
3. MATERYAL VE METOD.....	13
3.1 E^3 de Sabit Açılı Yüzeyleer	13
3.2 Ortak Bir Eğriden Geçen Yüzey Ailesi	17
4. BULGULAR VE TARTIŞMA.....	21
4.1 Sabit Doğrultunun Frenet Çatısı İle İfadesi	22
4.2 E^3 de Sabit Açılı Yüzey Ailesi.....	32
4.3 Özel Eğrilerden Geçen Sabit Açılı Yüzey Ailesi	48
4.4 Örnekler	50
5. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	65
KAYNAKLAR	67
ÖZGEÇMİŞ.....	69

ŞEKİLLER LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Şekil 3.1 k sabit vektörünün teğet düzlemi üzerindeki dik izdüşümü.	14
Şekil 4.1 k sabit vektörüne göre sabit açılı yüzey.	21
Şekil 4.2 l vektörü için eğrinin sabit açılı yüzeyle birlikte dönmesi.	22
Şekil 4.3 Sabit doğrultunun birim vektör ile ifadesi.	23
Şekil 4.4 Sabit açılı yüzeyin Gauss dönüşümü çember parçasıdır.	34
Şekil 4.5 r eğrisi ve $P_1(s, t; \frac{\pi}{2})$ sabit açılı yüzeyi.	52
Şekil 4.6 r eğrisi ve $P_1(s, t; \frac{\pi}{4})$ sabit açılı yüzeyi.	53
Şekil 4.7 A_1 doğrultusu ve $P_1(s, t; \theta)$ sabit açılı yüzey ailesinin iki üyesi.	53
Şekil 4.8 r eğrisi ve $P_2(s, t; \frac{\pi}{2})$ sabit açılı yüzeyi.	55
Şekil 4.9 r eğrisi ve $P_2(s, t; \frac{\pi}{6})$ sabit açılı yüzeyi.	56
Şekil 4.10 A_1 doğrultusu ve $P_2(s, t; \theta)$ sabit açılı yüzey ailesinin iki üyesi.	56
Şekil 4.11 α eğrisi ve $H_2(s, t; \frac{\pi}{2})$ sabit açılı yüzeyi.	58
Şekil 4.12 α eğrisi ve $H_2(s, t; \frac{\pi}{3})$ sabit açılı yüzeyi.	59
Şekil 4.13 A_2 doğrultusu ve $H_2(s, t; \theta)$ sabit açılı yüzey ailesinin iki üyesi.	60
Şekil 4.14 α eğrisi ve $H_3(s, t; \frac{\pi}{2})$ sabit açılı yüzeyi.	61
Şekil 4.15 α eğrisi ve $H_3(s, t; \frac{\pi}{4})$ sabit açılı yüzeyi.	63
Şekil 4.16 A_3 doğrultusu ve $H_3(s, t; \theta)$ sabit açılı yüzey ailesinin iki üyesi	63

KISALTMALAR

- E^3 : 3-Boyutlu Öklid Uzayı
<, > : Öklid İç Çarpımı
 D : Kovaryant Türev Operatörü
 $P_i(s,t;\theta)$: Sabit Açılı Yüzey Ailesi

E^3 DE SABİT AÇILI YÜZEY AİLESİ

ÖZET

Bu tezde, 3-boyutlu Öklid uzayında verilen bir eğriden geçen ve her bir üyesinin birim normali belirli bir doğrultu ile sabit açı yapan yüzey ailesi problemi çalışılmıştır.

Belirli doğrultu birim vektör olarak alınmıştır. Bu birim vektörün verilen eğrinin Frenet çatısındaki ifadesi bulunup, eğrinin bazı özel durumları için sonuçlar elde edilmiştir.

Yüzey ailesinin geçtiği eğri izoparametrik eğri olarak alınıp yüzeyin parametrik gösterimi bu eğrinin Frenet çatısı ile ifade edilerek sabit açılı yüzeyin birim normalinin özellikleri bulunmuştur. Bunların yardımı ile sabit açılı yüzey için gerek ve yeter koşullar elde edilmiştir. Böylece sabit açılı yüzey ailesinin parametrik ifadesine ulaşılmıştır.

Son olarak farklı eğriler ve doğrultular için yüzey ailesi örnekleri alınıp bu ailelerin bazı üyeleri şekiller ile gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Yüzey Ailesi; Sabit Açılı Yüzey; Frenet Çatısı.

CONSTANT ANGLE SURFACE FAMILY IN E^3

ABSTRACT

In this thesis, problem of constant angle surface family which passing through a given curve and every members unit normals makes constant angle with a fixed direction was studied on 3-dimension Euclidean space.

A unit vector is utilized fixed direction. The presentation of this unit vector is found on Frenet frame of given curve, than conclusions is derived for some specific situation of the curve.

By representing the surface parametrically depending on the Frenet frame of the curve, properties of the unit normal of the constant angle surface are obtained with considering the curve, which the surface family posses through, is an isoparametric curve. With the help of these necessary and sufficient conditions are obtained for constant angle surface. Thus, the parametric representing of the family of constant angle surface has been reached.

Finally, constant angle surface family samples is taken with some members of these families are shown by figures for different curves and directions.

Key Words: Surface Family; Constant Angle Surface; Frenet Frame.

1. GİRİŞ

Bu tezde, 3-boyutlu Öklid uzayında (E^3) bir eğri ve bir sabit doğrultu verildiğinde, her bir üyesinin yüzey normali ile bu sabit doğrultu arasındaki açı sabit olan yüzey ailesi elde etme problemi incelenmiştir. Bu bölümün ilk kısmında tezin amacına, ikinci kısmında sabit açılı yüzeyler ve yüzey aileleri ile ilgili literatür araştırmasına yer verilmiştir. İkinci bölümde, diferansiyel geometrinin tez boyunca kullanılan temel tanım ve teoremlerine, üçüncü bölümde sabit açılı yüzeyler ve yüzey aileleri ile ilgili daha önce yapılmış bazı çalışmalara değinilmiştir. Tezin orijinal kısmı olan dördüncü bölümde ise E^3 de bir sabit açılı yüzey ailesinin oluşturulması ile ilgili elde edilen sonuçlar ile farklı eğriler ve doğrultular için düzenlenen sabit açılı yüzey aileleri örnekleri verilmiştir.

1.1 Tezin Amacı

Bu doktora tezi çalışmasında;

- 1) Ortak bir eğriden geçen yüzey ailesinin her bir üyesinin her noktadaki birim normali ile belirli bir doğrultu arasındaki açının sabit olması başka bir ifadeyle yüzey ailesinin her bir üyesinin aynı sabit doğrultuya göre sabit açılı yüzey olması için gerek ve yeter koşulların bulunması,
- 2) Bir eğri ve bir sabit doğrultu verildiğinde sabit açılı yüzey ailesi elde etmek için bir yöntem geliştirilmesi,
- 3) Farklı eğriler ve doğrultular için çeşitli sabit açılı yüzey ailesi örnekleri oluşturulması amaçlanmıştır.

1.2 Literatür Araştırması

Son yıllarda sabit açılı yüzeyler ile ilgili çalışmalar Cermelli ve Di Scala (2007) tarafından yapılan “*Constant angle surfaces in liquid crystals*” isimli makale ile artmıştır. Cermelli ve Di Scala bu makalede sabit açılı yüzeyleri Hamilton–Jacobi

denklemleri ile incelemiştir. Ayrıca bu yüzeylerin sıvı kristaller ile katmanlı akışkanlardaki uygulamasını göstermiştir.

Sabit açılı yüzeylerle ilgili Dillen ve diğ. (2007) $S^2 \times R$ uzayında, Dillen ve Munteanu (2009) $H^2 \times R$ uzayında çalışmalar yapmışlardır. Munteanu ve Nistor (2009) E^3 de, parametre eğrilerinin hız vektörlerini birbirine dik alarak sabit açılı yüzeylerin parametrik denklemlerini elde etmiş ve bu yüzeylerin Gauss eğriliği, ortalama eğriliği gibi özelliklerini incelemiştir.

Nistor (2011) bir eğriden geçen tanjant, normal ve binormal regle yüzeylerini sabit açılı yüzey olma yönünden incelemiş ve bu yüzeylerin hangi türlerinin sabit açılı yüzey olduklarını belirlemiştir. Özkaldı ve Yaylı (2011) bu sabit açılı yüzeyler üzerindeki jeodezik eğri, asimtotik eğri ve eğrilik çizgisi gibi yüzey üzerindeki bazı özel eğriler hakkında bir çalışma yapmıştır.

Güler ve diğ. (2011) Minkowski uzayında timelike sabit açılı yüzeyleri ele almış, Atalay ve diğ. (2012) Minkowski uzayında spacelike sabit açılı yüzeyler ile ilgili çalışma yapmış, L'opez ve Munteanu (2011) ise Minkowski uzayında genel olarak sabit açılı yüzeyleri incelemiştir.

Ayrıca sabit açılı yüzeylerle ilgili Fastenakels ve diğ. (2011), Lopez ve Munteanu (2011), Dillen ve Kowalczyk (2012), Garnika ve diğ., Chen ve diğ. (2012) farklı uzaylarda çalışmalar yapmıştır.

Pottmann ve Wallner (2001) doğrultman doğruları belirli bir düzlem ile sabit açı yapan açılabilir yüzeyleri *sabit eğimli açılabilir yüzeyler (developable surfaces of constant slope)* adı altında kapsamlı bir şekilde incelemiş ve bu yüzeyler ile ilgili sınıflandırmalar yaparak uygulamaları hakkında bazı örnekler vermiştir. Bu çalışma yüzey normalinin belirli bir doğrultu ile sabit açı yapması problemi olarak ele alınmamış olmakla beraber açılabilir yüzeylerin özelliği gereği yüzey normalinin de düzlemin normali ile sabit açı yapacağı ifade edilmiştir. Ancak burada sabit açılı yüzey ismi kullanılmamıştır.

Wang ve diğ. (2004) ortak bir eğriden geçen yüzey ailelerini bu eğrinin her bir yüzey için jeodezik eğri olduğu “*ortak jeodezikli yüzey ailesi*” için gerek ve yeter koşulları belirtip bazı özel denklemler kullanarak incelemiştir. Kasap ve diğ. (2008) ise ortak jeodezikli yüzey ailesini daha genel bağıntılar ile inceleyerek gerek ve yeter koşulları ortaya koymuşlardır.

Li ve diğ. (2011) ortak eğrinin her bir yüzey üzerinde eğrilik çizgisi olduğu yüzey ailesi için, Bayram ve diğ. (2012) ortak eğrisi her bir yüzey üzerinde asimtotik eğri olan yüzey ailesi için gerek ve yeter koşulları bulup çeşitli örnekleri incelemişlerdir.

2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde, diferansiyel geometrinin tezde kullanılan temel tanım ve teoremlerine yer verilmiştir. Birinci kısımda 3- boyutlu Öklid uzayında tanjant vektör ve vektör alanları ile yöne göre türev kavramları hakkında bilgi verilmiştir. İkinci kısımda bir yüzey üzerinde tanjant vektör, vektör alanları ve yöne göre türev tanımlarına değinilmiştir. Üçüncü kısımda ise regüler bir eğrinin Frenet çatısı ve Frenet formüllerinden bahsedilmiştir.

2.1 3-Boyutlu Öklid uzayı

Bu kısımda 3-boyutlu Öklid uzayında tanjant vektörler, vektör alanları ve bunların türev bağıntıları ile ilgili temel tanımlara yer verilmiştir.

2.1.1 Tanım

\mathbb{R}^3 reel vektör uzayına,

$$\langle , \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^3 x_i y_i$$

biçiminde tanımlı Öklid iç çarpımı ile birlikte *3-boyutlu Öklid uzayı* denir ve E^3 ile gösterilir (Hacısalıhoğlu, 1998).

2.1.2 Tanım

E^3 de bir v vektörünün başlangıcı p noktasında olan elemanına p noktasında bir tanjant vektörü denir ve v_p ile gösterilir. Bir p noktasındaki bütün tanjant vektörlerinin kümesine E^3 ün p noktasındaki tanjant uzayı denir ve $T_p(E^3)$ ile gösterilir (O'Neill, 2006).

2.1.3 Tanım

E^3 ün her noktasına sadece bir tanjant vektörü karşılık getiren fonksiyona bir vektör alanı denir. E^3 deki bütün vektör alanlarının kümesi $\chi(E^3)$ ile gösterilir. Bir V vektör alanının bir p noktasındaki elemanı V_p ile gösterilir (O'Neill, 2006).

2.1.4 Tanım

$f : E^3 \rightarrow \mathbb{R}$ bir diferansiyellenebilir fonksiyon ve $v_p \in T_p(E^3)$ olsun,

$$v_p[f] = \frac{d}{dt}(f(p+tv))|_{t=0}$$

türevine f fonksiyonunun v_p tanjant vektörü yönündeki türevi denir (O'Neill, 2006).

2.1.5 Tanım

Bir f fonksiyonunun bir vektör alanı yönündeki türevi,

$$(V[f])(p) = V_p[f]$$

eşitliği ile tanımlanır (O'Neill, 2006).

2.1.6 Tanım

$p \in E^3$ ve $v_p \in T_p(E^3)$ verildiğinde $\alpha'(0) = v_p$ olacak biçimde en az bir $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$ eğrisi vardır. Bu eğriye $v_p \in T_p(E^3)$ vektörünün bir *integral eğrisi* adı verilir (O'Neill, 2006).

2.1.7 Teorem

W, E^3 uzayında bir vektör alanı ve $v_p \in T_p(E^3)$ olsun. v_p tanjant vektörünün her $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$ integral eğrisi için $(W \circ \alpha)'(0)$ vektörü aynı vektördür (O'Neill, 2006).

2.1.8 Tanım

W, E^3 uzayında bir vektör alanı ve $v_p \in T_p(E^3)$ olsun,

$$D_{v_p} W = (W \circ \alpha)'(0)$$

eşitliğiyle tanımlı $D_{v_p} W$ vektörüne W vektör alanının, v_p tanjant vektörü yönündeki *kovaryant türevi* denir (O'Neill, 2006).

2.1.9 Tanım

$V, W \in \chi(E^3)$ olsun. $p \in E^3$ için,

$$(D_V W)(p) = D_{V(p)} W$$

eşitliğiyle tanımlı $D_V W$ vektör alanına, W vektör alanının, V teğet vektör alanı yönündeki *kovaryant türevi* denir (O'Neill, 2006).

2.1.10 Tanım

D kovaryant türev operatörü olmak üzere,

$$\begin{aligned} D: \chi(E^3) \times \chi(E^3) &\rightarrow \chi(E^3) \\ (V, W) &\rightarrow D(V, W) = D_V W \end{aligned}$$

biçimindeki dönüşüme E^3 uzayındaki *doğal koneksiyon* denir (O'Neill, 2006).

2.2 Yüzey Üzerinde Bağıntılar

Bu kısımda yüzey için teğet düzlemi, teğet vektörü, teğet vektör alanı, kovaryant türev gibi bağıntılara yer verilmiştir.

2.2.1 Tanım

$U \subset \mathbb{R}^2$ açık küme olmak üzere bir $M \subset E^3$ kümesi için

$$\begin{aligned} P: U &\rightarrow M \\ (u, v) &\rightarrow P(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \end{aligned}$$

fonksiyonunun diferansiyellenebilir ve jakobiyen matrisinin rankı maksimum ise M ye E^3 de bir *yüzey* denir (Kühnel, 2005).

2.2.2 Tanım

E^3 de bir M yüzeyi için,

$$P_u = \frac{\partial P(u, v)}{\partial u} \quad \text{ve} \quad P_v = \frac{\partial P(u, v)}{\partial v}$$

kısmi türevlerine yüzeyin *parametre eğrilerinin hız vektörleri* denir (Kühnel, 2005).

2.2.3 Tanım

M yüzeyinin üzerindeki bir p noktasında P_u ile P_v vektörlerinin gerdiği düzleme yüzeyin p noktasındaki *teğet düzlemi* denir ve $T_p(M)$ veya $T_M(p)$ ile gösterilir (O'Neill, 2006).

2.2.4 Tanım

M yüzeyinin bir p noktasındaki teğet düzleminin her bir elemanına yüzeyin p noktasındaki bir *teğet vektörü* denir (O'Neill, 2006).

2.2.5 Tanım

M yüzeyin her noktasına yalnız bir teğet vektör karşılık getiren fonksiyona yüzey üzerinde bir *teğet vektör alanı* denir ve $\chi(M)$ ile gösterilir (O'Neill, 2006).

2.2.6 Tanım

W , M yüzeyi üzerinde bir vektör alanı ve V , M yüzeyi üzerinde teğet vektör alanı olsun. D , E^3 de doğal koneksiyonu göstermek üzere her $p \in M$ için,

$$(D_V W)(p) = D_{V(p)} W$$

eşitliğiyle tanımlı $D_V W$ vektör alanına, W vektör alanının, V teğet vektör alanı yönündeki *kovaryant türevi* denir (O'Neill, 2006).

2.2.7 Tanım

$V, W \in \chi(M)$ olmak üzere,

$$[V, W] = D_V W - D_W V$$

eşitliğiyle tanımlanan $[V, W]$ vektör alanına V ile W vektör alanlarının *parantez çarpımı* (*Lie çarpımı*) denir (Kühnel, 2005).

2.2.8 Sonuç

P_u, P_v vektörleri için $[P_u, P_v] = 0$ dır (Kühnel, 2005).

2.2.9 Tanım

V, M yüzeyi üzerinde bir teğet vektör alanı, n birim normal ve $p \in M$ olmak üzere

$$S_p(V) = -D_{V(p)}n$$

ile tanımlanan S_p fonksiyonuna M yüzeyinin p noktasındaki *şekil operatörü* (*Weingarten dönüşümü*) denir (O'Neil, 2006).

2.2.10 Sonuç

Eğer p noktası kaldırılırsa $S(V) = -D_V n$ olur (O'Neil, 2006).

2.2.11 Tanım

$V, W \in \chi(M)$ olsun, $D_V W$ vektör alanının M yüzeyi üzerindeki dik izdüşümü $\bar{D}_V W$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \bar{D}_V W : \chi(M) \times \chi(M) &\rightarrow \chi(M) \\ (V, W) &\rightarrow D(V, W) = \bar{D}_V W \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanan \bar{D} dönüşümüne M yüzeyi üzerine *indirgenmiş koneksiyon* denir (O'Neill, 2006).

2.2.12 Sonuç

Yüzey üzerinde D ve \bar{D} bağlantıları arasında

$$D_V W = \bar{D}_V W + \langle S(V), W \rangle n$$

eşitliği vardır. Bu eşitliğe *Gauss eşitliği* adı verilir (O'Neill, 2006).

2.2.13 Teorem

$V, W \in \chi(M)$ ve \bar{D} , M yüzeyi üzerinde indirgenmiş koneksiyon olmak üzere

$$[V, W] = \bar{D}_V W - \bar{D}_W V$$

dır (O'Neill, 2006).

2.3 Eğrinin Frenet Formülleri

Bu kısımda E^3 de bir eğrinin Frenet çatısı ve Frenet formüllerine yer verilmiştir.

2.3.1 Tanım

$r: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$, $r(s) = (r_1(s), r_2(s), r_3(s))$ eğrisi verilsin. Her $s \in I$ için $\|r'(s)\| \neq 0$ ise r eğrisine *regüler eğri* denir (O'Neill, 2006).

2.3.2 Tanım

$r: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$, $r(s) = (r_1(s), r_2(s), r_3(s))$ regüler eğri olsun. Eğer $\|r'(s)\| = 1$ ise r eğrisine *yay parametrelili eğri* denir (O'Neill, 2006).

2.3.3 Tanım

$r: I \rightarrow E^3$ yay parametrelili eğri olsun. $s \in I$ noktasında

$$T(s) = r'(s)$$

vektörüne eğrinin *teğet vektörü*,

$$N(s) = \frac{T'(s)}{\|T'(s)\|}$$

vektörüne eğrinin *normal vektörü*,

$$B(s) = T(s) \times N(s)$$

vektörüne de eğrinin *binormal vektörü* denir (O'Neill, 2006).

2.3.4 Önerme

Yay parametrelili bir eğri için her noktada T, N, B vektörleri ikişer ikişer birbirlerine diktir. Böylece $\{T, N, B\}$ vektörleri bir ortonormal baz oluşturur. Bu üçlüye eğrinin *Frenet çatısı* denir (O'Neill, 2006).

2.3.5 Teorem

Yay parametrelili bir eğrinin Frenet vektörleri arasında aşağıdaki ilişki vardır:

$$\begin{aligned}
T'(s) &= \kappa(s)N(s), \\
N'(s) &= -\kappa(s)T(s) + \tau(s)B(s), \\
B'(s) &= -\tau(s)N(s).
\end{aligned}$$

Bu formüllere *Frenet formülleri* denir. Burada κ ve τ fonksiyonlarına, sırasıyla, eğrinin *eğrilik* ve *burulma* fonksiyonları adı verilir (O'Neill, 2006).

2.3.6 Sonuç

r , E^3 de yay parametrelili bir eğri, κ eğrilik ve τ burulma fonksiyonu olmak üzere,

- i) r eğrisinin bir doğru olması için gerek ve yeter koşul $\kappa = 0$ olmasıdır,
- ii) r eğrisinin düzlemsel olması için gerek ve yeter koşul $\tau = 0$ olmasıdır,
- iii) r eğrisinin çember olması için gerek ve yeter koşul $\kappa = \text{sabit} > 0$ ve $\tau = 0$ olmasıdır (O'Neill, 2006).

2.3.7 Tanım

E^3 de bir r eğrisinin her noktadaki teğet vektörü sabit bir doğrultu ile sabit açı yapıyorsa r eğrisine bir *helis* eğrisi denir (O'Neill, 2006).

2.3.8 Teorem

E^3 de bir eğrinin helis eğrisi olması için gerek ve yeter koşul

$$\frac{\tau}{\kappa} = \text{sabit}$$

olmasıdır (O'Neill, 2006).

2.3.9 Tanım

Her noktadaki normali sabit bir doğrultu ile sabit açı yapan eğriye *slant helis* denir (Izumiya, 2004).

2.3.10 Önerme

$r: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$ eğrisi yay parametrelili olmayan regüler bir eğri olsun. Eğrinin Frenet çatısı için $v(t) = \|r'(t)\|$ ve $r'(t) = v(t)T(t)$ olmak üzere aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$$\begin{aligned}
T'(t) &= v(t)\kappa(t)N(t), \\
N'(t) &= -v(t)\kappa(t)T(t) + v(t)\tau(t)B(t), \\
B'(t) &= -v(t)\tau(t)N(t)
\end{aligned}$$

(O'Neill, 2006).

2.3.11 Tanım

E^3 de, bir M yüzeyi üzerindeki bir r eğrisinin her noktadaki normali M yüzeyine dik ise r eğrisine M yüzeyi üzerinde bir *jeodezik eğri* denir (O'Neill, 2006).

2.3.12 Tanım

E^3 de, bir M yüzeyi üzerindeki v_p tanjant vektörü için

$$\langle S(v_p), v_p \rangle = 0$$

ise v_p tanjant vektörüne M yüzeyi üzerinde *asimtotik doğrultu* denir. M yüzeyi üzerindeki bir r eğrisinin her noktadaki teğeti bir asimtotik doğrultu ise r eğrisine M yüzeyi üzerinde bir *asimtotik eğri* denir (O'Neill, 2006).

2.3.13 Tanım

E^3 de, bir M yüzeyi üzerindeki bir r eğrisinin teğet vektör alanı yüzeyin S şekil operatörünün karakteristik vektörlerine karşılık geliyorsa r eğrisine M yüzeyi üzerinde bir *eğrilik çizgisi* denir (Hacısalıhoğlu, 2000).

3. MATERYAL VE METOD

Bu bölümün birinci kısmında E^3 de sabit açılı yüzeyler ile ilgili daha önce yapılmış olan çalışmalardan, ikinci kısmında ise ortak bir eğriden geçen yüzey ailesinden bahsedilmiştir.

3.1 E^3 de Sabit Açılı Yüzeyler

Bir yüzeyin her noktadaki birim normali ile belirli bir doğrultu arasındaki açı sabit ise bu yüzeye *sabit açılı yüzey* denir.

E^3 de sabit açılı yüzeyler Munteanu ve Nistor (2009) tarafından yüzeyin parametre eğrileri birbirine dik alınarak incelenmiş ve bu yüzeylerin genel parametrik denklemleri ile bu bölümde verilen önerme ve teoremler elde edilmiştir. Munteanu ve Nistor (2009) bu çalışmada sabit birim vektörü

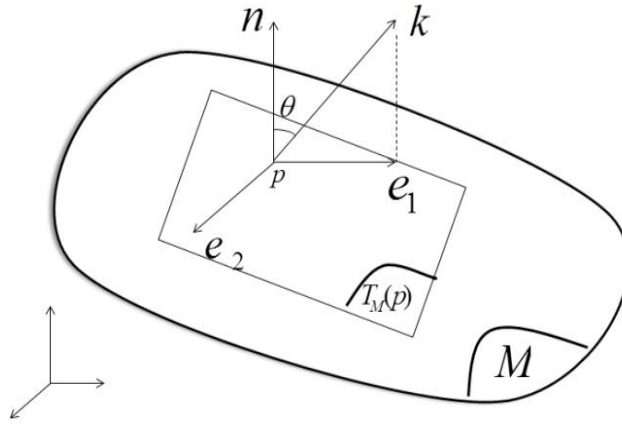
$$k = (0, 0, 1)$$

olarak almıştır.

Bir M yüzeyinin birim normali n ve bu n vektörünün sabit bir k vektörü ile yaptığı açı θ olsun. k nın M yüzeyinin tanjant düzlemi üzerindeki dik izdüşümü yönündeki birim vektör e_1 olmak üzere,

$$k = \sin \theta e_1 + \cos \theta n$$

eşitliği yazılabilir. Ayrıca $\{e_1, e_2, n\}$ ortonormal baz olacak şekilde $e_2 \in \chi(M)$ bulunabilir (Şekil 3.1).



Şekil 3.1 k sabit vektörünün teğet düzlemi üzerindeki dik izdüşümü.

3.1.1 Önerme

D , M yüzeyi üzerindeki kovaryant türev operatörü olmak üzere $\{e_1, e_2, n\}$ baz vektörleri arasında aşağıdaki eşitlikler vardır:

$$D_{e_1} n = 0,$$

$$D_{e_2} n = -\lambda e_2,$$

$$D_{e_1} e_1 = 0,$$

$$D_{e_1} e_2 = 0,$$

$$D_{e_2} e_1 = \lambda \cot \theta e_2,$$

$$D_{e_2} e_2 = -\lambda \cot \theta e_1 + \lambda n,$$

(Munteanu ve Nistor, 2009).

3.1.2 Önerme

$[e_1, e_2] \parallel e_2$ dir (Munteanu ve Nistor, 2009).

3.1.3 Sonuç

M yüzeyi,

$$P: U \rightarrow M$$

$$(u, v) \rightarrow P(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

şeklinde verilsin.

$$P_u = e_1, \quad P_v \parallel e_2$$

alınabilir. Buradan β diferansiyellenebilir fonksiyon olmak üzere

$$P_v = \beta(u, v)e_2$$

bulunur. Böylece sabit açılı yüzeyin kısmi türevleri arasında aşağıdaki eşitlikler elde edilir,

$$P_{uu} = 0,$$

$$P_{uv} = \frac{\beta_u}{\beta} P_v,$$

$$P_{vv} = \frac{\beta_v}{\beta} P_u - \beta^2 \lambda \cot \theta P_u + \beta^2 \lambda n,$$

$$n_u = 0,$$

$$n_v = -\lambda P_v,$$

$$\beta_u - \beta \lambda \cot \theta = 0,$$

$$\lambda_u + \lambda^2 \cot \theta = 0,$$

(Munteanu ve Nistor, 2009).

3.1.4 Yorum

Yüzeyin birim normali ile sabit doğrultu arasındaki açı sabit olduğundan Gauss dönüşümü birim küre üzerinde bir çember parçasıdır. Buradan sabit açılı yüzeyin Gauss eğriliği $K = 0$ dır (Munteanu ve Nistor, 2009).

3.1.5 Önerme

$\alpha(v)$ ve $\varphi(v)$ diferansiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere,

$$\lambda(u, v) = \frac{\tan \theta}{u + \alpha(v)},$$

$$\beta(u, v) = \varphi(v)(u + \alpha(v))$$

veya

$$\lambda(u, v) = 0,$$

$$\beta(u, v) = \beta(v)$$

dır (Munteanu ve Nistor, 2009).

3.1.6 Teorem

E^3 de bir M yüzeyinin sabit açılı yüzey olması için gerek ve yeter koşul aşağıdakilerden birisine eşdeğer olmasıdır:

i) $P: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M \subset E^3$ olmak üzere

$$P(u, v) = (u \cos \theta (\cos v, \sin v) + \gamma(v), u \sin \theta)$$

$$\gamma(v) = \cos \theta \left(-\int_0^v \alpha(t) \sin t dt, \int_0^v \alpha(t) \cos t dt \right)$$

ii) $x \sin \theta - z \cos \theta = 0$ düzlemi,

iii) $\sigma \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere $\sigma \times \mathbb{R}$ silindirik yüzeyi

(Munteanu ve Nistor, 2009).

Nistor (2011), bir eğriden geçen bazı özel regle yüzeylerini sabit açılı yüzey olma yönünden incelemiştir. Bu yüzeyler aşağıda belirtilen, teğetsel açılabilir yüzey, normal yüzey ve binormal yüzeydir.

i) Teğetsel açılabilir yüzey;

$$P(s, t) = r(s) + tT(s),$$

ii) Normal yüzey;

$$P(s, t) = r(s) + tN(s),$$

iii) Binormal yüzey;

$$P(s, t) = r(s) + tB(s)$$

eşitliği ile verilir. Burada $r(s)$ yay parametrelili bir eğri ve $T(s), N(s), B(s)$ eğrinin Frenet vektörleridir.

3.1.7 Teorem

Sabit açılı teğetsel açılabilir yüzey yalnızca silindirik helis tarafından üretilir (Nistor, 2011).

3.1.8 Teorem

- i) Sabit açılı normal yüzeyler düzlem parçasıdır,
 - ii) Sabit açılı binormal yüzeyler silindir yüzeyi parçasıdır
- (Nistor, 2011).

3.1.9 Önerme

Sabit açılı konik yüzeyler sadece dairesel konilerdir (Nistor, 2011).

Özkaldı ve Yaylı (2011) sabit açılı yüzeyler üzerindeki özel eğrilerle ilgili aşağıdaki teoremi vermiştir.

3.1.10 Teorem

$P(s, t)$, sabit bir k vektörüne göre sabit açılı yüzey ve $r(s)$ bu yüzey üzerinde bir eğri olsun,

- i) $r(s)$ bir jeodezik eğri ise k vektörüne göre bir slant helis eğrisidir,
 - ii) $r(s)$ bir asimptotik eğri ise k vektörüne göre bir helis eğrisidir,
 - iii) $r(s)$ bir eğrilik çizgisi ise k sabit vektörü eğrinin normal düzleminde
- (Özkaldı ve Yaylı, 2011).

3.2 Ortak Bir Eğriden Geçen Yüzey Ailesi

Bu kısımda ortak bir eğriden geçen yüzey ailesinde kullanılacak olan *izoparametrik yüzey ailesi* (*isoparametric surface family*) hakkında yapılan çalışmalara yer verilmiştir.

3.2.1 Tanım

$s \in I \subseteq \mathbb{R}$ ve $t \in J \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$r : I \rightarrow E^3$$

yay parametrelili bir eğri, $\{T, N, B\}$ eğrinin Frenet vektörleri olmak üzere,

$$P: I \times J \rightarrow E^3$$

$$P(s, t) = r(s) + u(s, t)T(s) + v(s, t)N(s) + w(s, t)B(s)$$

yüzeyi için

$$P(s, t_0) = r(s)$$

olacak biçimde

$$u(s, t_0) = v(s, t_0) = w(s, t_0) = 0$$

koşulunu sağlayan $u(s, t), v(s, t), w(s, t)$ reel değerli diferansiyellenebilir fonksiyonları varsa $r(s)$ eğrisi $P(s, t)$ yüzeyi üzerinde bir *izoparametrik eğridir* veya $P(s, t)$ yüzeyi $r(s)$ eğrisinden geçer denir. Burada $u(s, t), v(s, t), w(s, t)$ fonksiyonlarına *sapma fonksiyonları (marching-scaea functions)* denir.

Bu yüzey denkleminin kısmi türenleri alınır ise,

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(s, t)}{\partial s} &= \frac{\partial u(s, t)}{\partial s} T(s) + \frac{\partial v(s, t)}{\partial s} N(s) + \frac{\partial w(s, t)}{\partial s} B(s) \\ &+ u(s, t)T'(s) + v(s, t)N'(s) + w(s, t)B'(s) \end{aligned}$$

bulunur. Frenet formülleri uygulanarak,

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(s, t)}{\partial s} &= \frac{\partial u(s, t)}{\partial s} T(s) + \frac{\partial v(s, t)}{\partial s} N(s) + \frac{\partial w(s, t)}{\partial s} B(s) + u(s, t)\kappa(s)N(s) \\ &+ v(s, t)(-\kappa(s)T(s) + \tau(s)B(s)) + w(s, t)(\kappa(s)N(s)) \end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitlik düzenlenirse

$$\frac{\partial P(s, t)}{\partial s} = \begin{pmatrix} T(s) & N(s) & B(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + \frac{\partial u(s, t)}{\partial s} - \kappa(s)v(s, t) \\ \frac{\partial v(s, t)}{\partial s} + \kappa(s)u(s, t) - \tau(s)w(s, t) \\ \frac{\partial w(s, t)}{\partial s} + \tau(s)v(s, t) \end{pmatrix}$$

bulunur. Benzer biçimde

$$\frac{\partial P(s,t)}{\partial t} = (T(s) \quad N(s) \quad B(s)) \begin{pmatrix} \frac{\partial u(s,t)}{\partial t} \\ \frac{\partial v(s,t)}{\partial t} \\ \frac{\partial w(s,t)}{\partial t} \end{pmatrix}$$

şeklindedir.

Yüzeyin birim normali

$$n(s,t) = \frac{\frac{\partial P(s,t)}{\partial s} \times \frac{\partial P(s,t)}{\partial t}}{\left| \frac{\partial P(s,t)}{\partial s} \times \frac{\partial P(s,t)}{\partial t} \right|}$$

eşitliği ile hesaplandığında

$$\begin{aligned} \varphi_1(s,t) = & \left(\frac{\partial w(s,t)}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial v(s,t)}{\partial s} + \kappa(s)u(s,t) - \tau(s)w(s,t) \right) \\ & - \left(\frac{\partial v(s,t)}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial w(s,t)}{\partial s} + \tau(s)v(s,t) \right) \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \varphi_2(s,t) = & \left(\frac{\partial u(s,t)}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial w(s,t)}{\partial s} + \tau(s)v(s,t) \right) \\ & - \left(\frac{\partial w(s,t)}{\partial t} \right) \left(1 + \frac{\partial u(s,t)}{\partial s} - \kappa(s)v(s,t) \right) \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \varphi_3(s,t) = & \left(\frac{\partial v(s,t)}{\partial t} \right) \left(1 + \frac{\partial u(s,t)}{\partial s} - \kappa(s)v(s,t) \right) \\ & - \left(\frac{\partial u(s,t)}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial v(s,t)}{\partial s} + \kappa(s)u(s,t) - \tau(s)w(s,t) \right) \end{aligned} \quad (3.3)$$

olmak üzere

$$n(s,t) = \frac{(\varphi_1(s,t)T(s) + \varphi_2(s,t)N(s) + \varphi_3(s,t)B(s))}{\sqrt{\varphi_1(s,t)^2 + \varphi_2(s,t)^2 + \varphi_3(s,t)^2}} \quad (3.4)$$

olur.

Wang ve diğ. (2004) yüzey üzerindeki bir izoparametrik bir eğrinin jeodezik eğri olması ile ilgili aşağıdaki teoremi ifade etmiştir.

3.2.2 Teorem

$P(s,t)$ yüzeyi üzerindeki izoparametrik $r(s)$ eğrisinin jeodezik eğri olması için gerek ve yeter koşul

$$\varphi_1(s, t_0) = \varphi_2(s, t_0) = 0 \text{ ve } \varphi_3(s, t_0) \neq 0$$

ve

$$\varphi_3(s, t_0) \neq 0$$

olmasıdır (Wang ve diğ., 2004).

3.2.3 Teorem

$r(s)$ eğrisinin asimptotik eğri olması için gerek ve yeter koşul

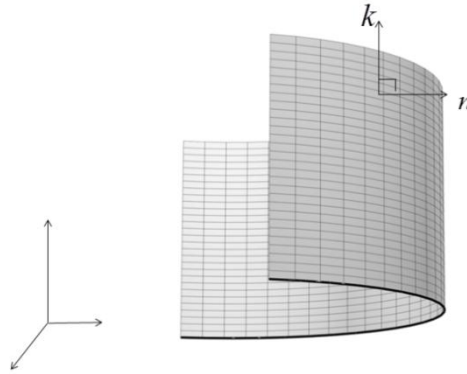
$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial s}(s, t_0) - \kappa(s)\varphi_2(s, t_0) = 0$$

olmasıdır (Bayram ve diğ., 2012).

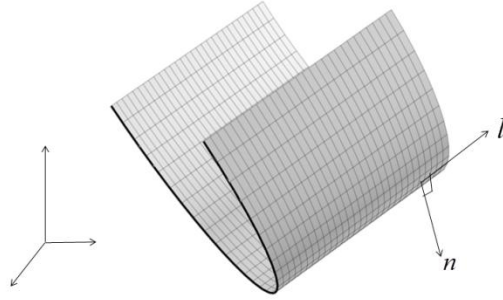
4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde, E^3 de bir eğri ve bir sabit doğrultu verildiğinde, bu eğriden geçen ve her bir üyesi verilen bu sabit doğrultuya göre sabit açılı yüzey olan yüzey ailesi elde etme problemi için yapılan çalışmalar sonunda elde edilen bulgulara yer verilmiştir.

Bir önceki bölümde bahsedildiği gibi sabit açılı yüzeylerle ilgili bugüne kadar yapılan çalışmalarda sabit birim vektör olarak $k = (0,0,1)$ vektörü alınmıştır. Yine bu çalışmalarda, başka doğrultular için sabit açılı yüzey elde etmek istenildiğinde, $k = (0,0,1)$ doğrultusuna göre bulunmuş olan sabit açılı yüzeyin veya yüzeyin ifade edildiği koordinat sisteminin döndürülebileceği belirtilmiştir. Fakat bu yapıldığı takdirde yüzeyin geçtiği eğri de döndürülmüş olacaktır. Örneğin, bir çember parçasından geçen ve k sabit vektörüne göre sabit açılı yüzey olan bir silindir yüzeyi döndürülerek l sabit vektörüne göre sabit açılı yüzey elde edilebilir ancak bu durumda şekilde görüldüğü gibi eğri de döndürülmüş olacaktır (**Şekil 4.1-4.2**).



Şekil 4.1 k sabit vektörüne göre sabit açılı yüzey.



Şekil 4.2 l vektörü için eğrinin sabit açılı yüzeyle birlikte dönmesi.

Buradan hareketle bu tezin orijinal kısmı olan bu bölümde, sabit açılı yüzeyi veya koordinat sistemini döndürmeden ve eğrinin koordinat sistemindeki konumunu değiştirmeden, verilen bir eğriden geçen ve verilen herhangi bir sabit doğrultuya göre sabit açılı yüzeyler elde edebilmek amacıyla yapılan çalışmalara yer verilmiştir.

Bu bölümün birinci kısmında, sabit doğrultu için belirlenen birim vektörün verilen eğrinin Frenet çatısındaki ifadesi ile ilgili durumlar incelenmiştir.

İkinci kısımda, E^3 de bir eğri ve bir sabit doğrultu verildiğinde sabit açılı yüzey ailesi oluşturabilmek için gerek ve yeter koşulların bulunması ile ilgili yapılan çalışmalar ve bu koşullar yardımı ile elde edilen sabit açılı yüzey ailesinin parametrik ifadesine yer verilmiştir.

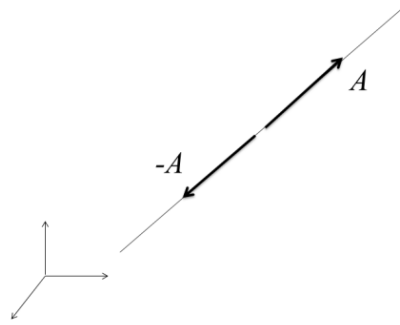
Üçüncü kısımda ise verilen eğrinin sabit açılı yüzey ailesinin üyeleri için ortak jeodezik eğri, asimptotik eğri ve eğrilik çizgisi olma koşulları incelenmiştir.

4.1 Sabit Doğrultunun Frenet Çatısı İle İfadesi

Bir önceki bölümde sabit açılı yüzey ailesinin üyelerini ifade etmek için izoparametrik yüzey eşitliğinde verilen eğrinin Frenet çatısı kullanılmıştı. Bunun sonucu olarak yüzeyin birim normali yine verilen eğrinin Frenet çatısına bağlı olarak bulunmuştu. İki vektör arasındaki açı için iç çarpım işlemi yapılacağından sabit doğrultuyu temsil eden birim vektörünü de eğrinin Frenet çatısı ile ifade etmek gerekir.

Bu kısımda öncelikle sabit birim vektörün Frenet çatısındaki katsayıları için gerek ve yeter koşullar incelenmiştir. Daha sonra bu koşullar kullanılarak katsayılar ve eğrinin bazı özel durumları için sonuçlar elde edilmiştir.

Yüzeyin birim normalinin sabit açı yaptığı sabit doğrultu A sabit birim vektörü ile gösterilsin. Burada A birim vektörünün belirttiği sabit doğrultu ile $-A$ birim vektörünün belirttiği sabit doğrultunun aynı olduğuna dikkat etmek gerekir (**Şekil 4.3**). Bu iki vektörün de birim normal ile iç çarpımları arasında sadece bir işaret farkı vardır. Bu işaret farkı birim normalin sabit doğrultuyla arasındaki açı için önemsizdir.



Şekil 4.3 Sabit doğrultunun birim vektör ile ifadesi.

$s \in I \subset \mathbb{R}$ yay parametresi olmak üzere, yüzeyin geçtiği yay parametrelili regüler eğri

$$r : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$$

ve bu eğrinin Frenet çatısı $\{T(s), N(s), B(s)\}$ olsun. Eğri regüler olduğu için $\{T(s), N(s), B(s)\}$ her noktada tanımlıdır. Ayrıca bu çatı ortonormal bir çatı olduğundan A vektörü,

$$A = a(s)T(s) + b(s)N(s) + c(s)B(s) \quad (4.1)$$

biçiminde ifade edilebilir. Burada $a(s)$, $b(s)$, $c(s)$ fonksiyonları reel değerli diferansiyellenebilir fonksiyonlar ve

$$a(s)^2 + b(s)^2 + c(s)^2 = 1$$

dir.

Bu ifadedeki $a(s)$, $b(s)$, $c(s)$ fonksiyonları aşağıdaki önerme yardımı ile $r(s)$ eğrisinin eğrilikleri olan $\kappa(s)$ ve $\tau(s)$ ye bağlı olarak bulunabilir.

4.1.1 Önerme

Bir A birim vektörünün sabit vektör olması için gerek ve yeter koşul, bu vektörün (4.1) eşitliğindeki katsayılarının aşağıdaki eşitlikleri sağlamasıdır:

$$\begin{aligned} a'(s) &= \kappa(s)b(s), \\ b'(s) &= -\kappa(s)a(s) + \tau(s)c(s), \\ c'(s) &= -\tau(s)b(s). \end{aligned} \tag{4.2}$$

İspat: (4.1) eşitliğinin türevi alınır ise

$$A' = a'(s)T(s) + b'(s)N(s) + c'(s)B(s) + a(s)T'(s) + b(s)N'(s) + c(s)B'(s)$$

bulunur. Frenet formüllerinden ve A sabit olduğundan

$$0 = (a'(s) - \kappa(s)b(s))T(s) + (b'(s) + \kappa(s)a(s) - \tau(s)c(s))N(s) + (c'(s) + \tau(s)b(s))B(s)$$

olur ve $\{T(s), N(s), B(s)\}$ çatisının ortogonalliğinden,

$$a'(s) - \kappa(s)b(s) = 0,$$

$$b'(s) + \kappa(s)a(s) - \tau(s)c(s) = 0,$$

$$c'(s) + \tau(s)b(s) = 0$$

elde edilir. Böylece (4.2) eşitlikleri bulunur.

Tersine, eşitlikler sağlandığında A vektörünün sabit olacağı aşikardır. \square

4.1.2 Sonuç

$r(s)$ eğrisi düzlemsel ise,

$$\begin{aligned} a(s) &= \mu \sin \omega(s), \\ b(s) &= \mu \cos \omega(s), \\ c(s) &= \lambda, \end{aligned} \tag{4.3}$$

biçiminde yazılabilir. Burada μ ve λ sabit,

$$\mu^2 + \lambda^2 = 1$$

ve

$$\omega(s) = \int \kappa(s) ds$$

dir.

İspat: $r(s)$ eğrisi düzlemsel olduğundan

$$\tau(s) = 0$$

olur. Bu ifade (4.2) eşitliğinde yerine yazıldığında

$$a'(s) = \kappa(s)b(s),$$

$$b'(s) = -\kappa(s)a(s),$$

$$c'(s) = 0.$$

elde edilir. Buradan,

$$c(s) = \text{sabit}$$

olur. Bununla beraber eğri regüler olduğundan

$$\kappa(s) \neq 0$$

için sistem çözüldüğünde

$$a(s)a'(s) + b(s)b'(s) = 0$$

bulunur. Böylece,

$$a(s)^2 + b(s)^2 = \mu^2 = \text{sabit}$$

elde edilir. O halde,

$$a(s) = \mu \sin \omega(s),$$

$$b(s) = \mu \cos \omega(s)$$

eşitlikleri yazılabilir. Ayrıca bu iki eşitliğin türevlerinin (4.3) eşitliklerini sağlaması için

$$\omega(s) = \int \kappa(s) ds$$

elde edilir. □

4.1.3 Sonuç

$$a(s) = \text{sabit} \neq 0$$

ise

$$b(s) = 0,$$

$$c(s) = \text{sabit}$$

ve $r(s)$ eğrisi A sabit vektörüne göre bir helis eğrisidir.

İspat:

$$a(s) = \text{sabit}$$

ise (4.2) eşitliklerinden

$$\kappa(s)b(s) = 0$$

olur. Buradan

$$\kappa(s) = 0$$

veya

$$b(s) = 0$$

dir. $\kappa(s) \neq 0$ olduğundan, $b(s) = 0$ olmalıdır. Yine (4.2) eşitliklerinden

$$c'(s) = 0 \Rightarrow c(s) = \text{sabit}$$

olur. Ayrıca

$$\langle T(s), A \rangle = a(s) = \text{sabit}$$

dir. Bu ise $r(s)$ eğrisinin bir helis eğrisi olması demektir. \square

4.1.4 Sonuç

$b(s) = \text{sabit}$ ise $r(s)$ eğrisi bir slant helis olur.

İspat: $b(s) = \text{sabit}$ ise

$$\langle N(s), A \rangle = b(s) = \text{sabit}$$

olur. Bu ise eğrinin bir slant helis olması demektir. \square

4.1.5 Sonuç

$$a(s) = 0$$

ise

$$b(s) = 0,$$

$$c(s) = \pm 1$$

ve $r(s)$ eğrisi düzlemseldir.

İspat:

$$a(s) = 0$$

ise (4.2) eşitliklerinden

$$0 = \kappa(s)b(s)$$

$$b'(s) = \tau(s)c(s)$$

$$c'(s) = -\tau(s)b(s)$$

olur. Bu üç eşitliğin birden sağlanabilmesi için

$$b(s) = c(s) = 0$$

veya

$$\kappa(s) = \tau(s) = 0$$

veya

$$b(s) = 0$$

$$c(s) = \text{sabit}$$

$$\tau(s) = 0$$

olmalıdır. A sabit vektörü sıfır olamayacağı için

$$a(s) = b(s) = c(s) = 0$$

olamaz. O halde

$$\kappa(s) \neq 0$$

olduğundan

$$b(s) = 0$$

$$c(s) = \text{sabit}$$

ve

$$\tau(s) = 0$$

dır. Yani eğri düzlemsel olmalıdır. Ayrıca

$$a(s)^2 + b(s)^2 + c(s)^2 = 1$$

olduğundan

$$c(s) = \pm 1$$

olur. □

4.1.6 Sonuç

$$b(s) = 0$$

$$a(s) \neq 0,$$

$$c(s) \neq 0$$

ise $r(s)$ eğrisi bir helis eğrisidir.

İspat:

$$b(s) = 0$$

ise (4.2) eşitliklerinden

$$a'(s) = 0$$

$$0 = -\kappa(s)a(s) + \tau(s)c(s)$$

$$c'(s) = 0$$

olur. Buradan

$$a(s) = \text{sabit}$$

$$c(s) = \text{sabit}$$

ve

$$\frac{\kappa(s)}{\tau(s)} = \text{sabit}$$

olur. Bu ise $r(s)$ eğrisinin bir helis eğrisi olması demektir. □

4.1.7 Sonuç

$$c(s) = 0$$

$$a(s) \neq 0,$$

$$b(s) \neq 0$$

ise $r(s)$ eğrisi düzlemseldir.

İspat:

$$c(s) = 0$$

ise (4.2) eşitliklerinden

$$a'(s) = \kappa(s)b(s)$$

$$b'(s) = -\kappa(s)a(s)$$

$$0 = \tau(s)b(s)$$

olur. Buradan

$$\tau(s) = 0$$

yani eğri düzlemsel olur. □

4.1.8 Sonuç

$r(s)$ eğrisi için

$$a(s) = c(s) = 0$$

olamaz.

İspat:

$$a(s) = c(s) = 0$$

ise (4.2) eşitliklerinden

$$0 = \kappa(s)b(s),$$

$$b'(s) = 0,$$

$$0 = \tau(s)b(s),$$

olur. Bu üç eşitliğin aynı anda sağlanabilmesi için

$$b(s) = 0$$

veya

$$b(s) = \text{sabit}$$

$$\kappa(s) = \tau(s) = 0$$

olmalıdır. A sabit vektörü sıfır olamayacağı için

$$b(s) = 0$$

olamaz. Bu durumda

$$\kappa(s) = \tau(s) = 0$$

olmalıdır. Bu ise $r(s)$ eğrisinin regüler olması ile çelişir. \square

4.1.9 Sonuç

$r(s)$ eğrisi için $b(s) = c(s) = 0$ olamaz.

İspat: Kabul edelim ki $b(s) = c(s) = 0$ olsun. (4.2) eşitliklerinden,

$$a'(s) = 0$$

$$0 = \kappa(s)a(s)$$

olur. Buradan

$$a(s) = 0$$

veya

$$a(s) = \text{sabit}$$

$$\kappa(s) = 0$$

olmalıdır. A sabit vektörü sıfır olamayacağı için

$$a(s) = b(s) = c(s) = 0$$

olamaz. O halde

$$a(s) = \text{sabit}$$

ve

$$\kappa(s) = 0$$

olmalıdır. Bu ise $r(s)$ eğrisinin regüler olması ile çelişir. \square

Eğer verilen eğri yay parametrelili değilse, sabit doğrultunun Frenet çatısındaki ifadesi ile ilgili **4.1.1 Önerme** deki işlemler yapılarak aşağıdaki önerme elde edilir.

4.1.10 Önerme

$r : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$ yay parametrelili olmayan regüler bir eğri,

$$v(u) = \|r'(u)\|,$$

$$r'(u) = v(u)T(u)$$

ve

$$a^2(u) + b^2(u) + c^2(u) = 1$$

olmak üzere, birim uzunluklu bir

$$A = a(u)T(u) + b(u)N(u) + c(u)B(u)$$

vektörünün sabit olması için gerek ve yeter koşul

$$a'(u) = v(u)\kappa(u)b(u),$$

$$b'(u) = -v(u)\kappa(u)a(u) + v(u)\tau(u)c(u),$$

$$c'(u) = -v(u)\tau(u)b(u)$$

eşitliklerinin sağlanmasıdır.

Bu önerme yardımı ile yay parametrelili eğri için bulunan sonuçların yay parametrelili olmayan bir eğri için de sadece bir katsayı farkı ile geçerli olduğu görülür.

Sonuç olarak bir eğri ve bir sabit birim vektör verildiğinde bu vektörün Frenet çatısındaki katsayılarını bulmak için,

- i) **4.1.1 Önerme** veya **4.1.10 Önerme** deki diferansiyel denklem sisteminin genel çözümü bulunur,
- ii) Genel çözümden elde edilenler (4.1) eşitliğinde yerine yazılarak verilen A sabit birim vektörü için özel çözümler elde edilir.

4.2 E^3 de Sabit Açılı Yüzey Ailesi

Bu kısımda ilk olarak sabit açılı yüzey ailesinin tanımı yapılmıştır. Daha sonra sabit açılı bir yüzeyin birim normalinin sağlaması gereken koşullar bulunmuştur. Ardından, birinci kısımda ifade edilen sabit birim vektörle yüzey normali arasındaki açının sabit olması için gereken koşullar verilmiştir. Son olarak bu koşullar kullanılarak, ortak bir eğriden geçen ve her bir üyesi verilen bir sabit doğrultuya göre sabit açılı yüzey olan yüzey ailesinin parametrik ifadesi oluşturulmuştur.

4.2.1 Tanım

Ortak bir eğriden geçen ve aynı sabit doğrultuya göre sabit açılı yüzey olan yüzeylerin oluşturduğu aileye *sabit açılı yüzey ailesi* denir.

Bu tanıma göre bir sabit açılı yüzey ailesindeki her üye aynı eğriden geçer ve aynı doğrultuya göre sabit açılı yüzeydir. Bununla beraber her üyenin birim normali ile sabit doğrultu arasındaki sabit açı farklı olabilir.

4.2.2 Önerme

$s \in I \subseteq \mathbb{R}$ ve $t \in J \subseteq \mathbb{R}$,

$$r : I \rightarrow E^3$$

yay parametrelili izoparametrik bir eğri ve $\{T, N, B\}$ eğrinin Frenet çatısı olmak üzere $P(s, t)$ yüzeyi bir sabit açılı yüzey ise birim normalinin Frenet çatısındaki katsayıları aşağıdaki biçimdedir,

$$\varphi_1(s, t) = 0 \tag{4.4}$$

$$\frac{\varphi_2(s, t)}{\sqrt{(\varphi_2(s, t))^2 + (\varphi_3(s, t))^2}} = \frac{-\frac{\partial w}{\partial t}(s, t_0)}{\sqrt{\left(\frac{\partial w}{\partial t}(s, t_0)\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t}(s, t_0)\right)^2}} \tag{4.5}$$

$$\frac{\varphi_3(s,t)}{\sqrt{(\varphi_2(s,t))^2 + (\varphi_3(s,t))^2}} = \frac{\frac{\partial v}{\partial t}(s,t_0)}{\sqrt{\left(\frac{\partial w}{\partial t}(s,t_0)\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t}(s,t_0)\right)^2}}. \quad (4.6)$$

İspat: $P(s,t)$ bir sabit açılı yüzey ise yüzeyin birim normali ile sabit bir doğrultu arasındaki açı sabittir. Bu yüzden **3.1.4 Yorum** da belirtildiği gibi yüzeyin Gauss dönüşümü, birim küre üzerinde, sabit doğrultu etrafında θ sabit açısı yaparak bir çember parçası çizer (**Şekil 4.4**). Bu nedenle yüzeyin birim normali sadece bir parametreye bağlı olmalıdır. Yüzeyin geçtiği eğrinin Frenet çatısı $\{T(s), N(s), B(s)\}$ s parametresine bağlı olduğundan

$$\frac{\partial n(s,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varphi_1(s,t)T(s) + \varphi_2(s,t)N(s) + \varphi_3(s,t)B(s)}{\sqrt{\varphi_1(s,t)^2 + \varphi_2(s,t)^2 + \varphi_3(s,t)^2}} \right) = 0$$

dır. Frenet vektörleri lineer bağımsız olduğundan

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varphi_1(s,t)}{\sqrt{(\varphi_1(s,t))^2 + (\varphi_2(s,t))^2 + (\varphi_3(s,t))^2}} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varphi_2(s,t)}{\sqrt{(\varphi_1(s,t))^2 + (\varphi_2(s,t))^2 + (\varphi_3(s,t))^2}} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varphi_3(s,t)}{\sqrt{(\varphi_1(s,t))^2 + (\varphi_2(s,t))^2 + (\varphi_3(s,t))^2}} \right) = 0$$

olur. Buradan

$$\frac{\varphi_1(s,t)}{\sqrt{(\varphi_1(s,t))^2 + (\varphi_2(s,t))^2 + (\varphi_3(s,t))^2}} = \phi_1(s),$$

$$\frac{\varphi_2(s,t)}{\sqrt{(\varphi_1(s,t))^2 + (\varphi_2(s,t))^2 + (\varphi_3(s,t))^2}} = \phi_2(s),$$

$$\frac{\varphi_3(s,t)}{\sqrt{(\varphi_1(s,t))^2 + (\varphi_2(s,t))^2 + (\varphi_3(s,t))^2}} = \phi_3(s)$$

bulunur. Bu eşitliler her $t \in J \subseteq \mathbb{R}$ için sağlanacağından $t = t_0$ içinde sağlanmalıdır.

Böylece

$$\frac{\varphi_1(s, t_0)}{\sqrt{(\varphi_1(s, t_0))^2 + (\varphi_2(s, t_0))^2 + (\varphi_3(s, t_0))^2}} = \phi_1(s),$$

$$\frac{\varphi_2(s, t_0)}{\sqrt{(\varphi_1(s, t_0))^2 + (\varphi_2(s, t_0))^2 + (\varphi_3(s, t_0))^2}} = \phi_2(s),$$

$$\frac{\varphi_3(s, t_0)}{\sqrt{(\varphi_1(s, t_0))^2 + (\varphi_2(s, t_0))^2 + (\varphi_3(s, t_0))^2}} = \phi_3(s)$$

elde edilir. Bununla beraber r eğrisi izoparametrik eğri olduğundan

$$u(s, t_0) = v(s, t_0) = w(s, t_0) = 0$$

dır. Böylece

$$\frac{\partial u}{\partial s}(s, t_0) = \frac{\partial v}{\partial s}(s, t_0) = \frac{\partial w}{\partial s}(s, t_0) = 0$$

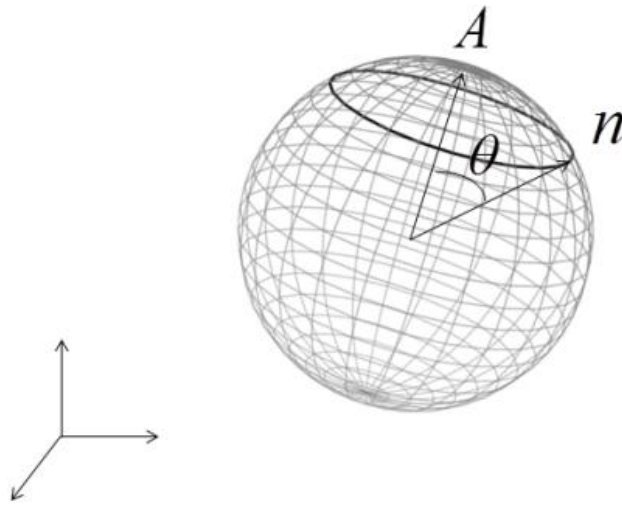
olur. (3.1)-(3.3) eşitliklerinden

$$\varphi_1(s, t_0) = 0,$$

$$\varphi_2(s, t_0) = -\frac{\partial w}{\partial t}(s, t_0),$$

$$\varphi_3(s, t_0) = \frac{\partial v}{\partial t}(s, t_0)$$

bulunur. Bunlar yerine yazıldığında (4.4)-(4.6) eşitlikleri elde edilir. □



Şekil 4.4 Sabit açılı yüzeyin Gauss dönüşümü çember parçasıdır.

Not: Burada

$$\frac{\partial w}{\partial t}(s, t_0) = \frac{\partial v}{\partial t}(s, t_0) = 0$$

olursa yüzey normali eğri üzerinde tanımsız olur. Bu durum daha sonra incelenecektir.

4.2.3 Sonuç

$P(s, t)$ sabit açılı yüzeyinin birim normali

$$n(s, t) = \frac{\left(-\frac{\partial w}{\partial t}(s, t_0)N(s) + \frac{\partial v}{\partial t}(s, t_0)B(s)\right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial w}{\partial t}(s, t_0)\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t}(s, t_0)\right)^2}} \quad (4.7)$$

biçimindedir. Burada $\frac{\partial w}{\partial t}(s, t_0) \neq 0$ ve $\frac{\partial v}{\partial t}(s, t_0) \neq 0$ dır.

4.2.4 Sonuç

$P(s, t)$ sabit açılı yüzeyinin birim normali ile

$$A = a(s)T(s) + b(s)N(s) + c(s)B(s)$$

sabit birim vektörü arasındaki sabit açı θ olmak üzere,

$$\frac{c(s)\frac{\partial v}{\partial t}(s, t_0) - b(s)\frac{\partial w}{\partial t}(s, t_0)}{\sqrt{\left(\frac{\partial v}{\partial t}(s, t_0)\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t}(s, t_0)\right)^2}} = \cos \theta \quad (4.8)$$

dır.

İspat:

$$\langle n(s, t), A \rangle = \cos \theta$$

eşitliğinden kolayca görülebilir. □

Bu sonuçlarla birlikte aşağıdaki teorem elde edilir.

4.2.5 Teorem

$s \in I \subseteq \mathbb{R}$ ve $t \in J \subseteq \mathbb{R}$, $r: I \rightarrow E^3$ yay parametrelili izoparametrik eğri, $\{T, N, B\}$ eğrinin Frenet çatısı olmak üzere, $P(s, t)$ yüzeyinin

$$A = a(s)T(s) + b(s)N(s) + c(s)B(s)$$

sabit birim vektörüne göre bir sabit açılı yüzey olması için gerek ve yeter koşul

$$\varphi_1(s, t) = 0,$$

$$\frac{\varphi_2(s, t)}{\sqrt{(\varphi_2(s, t))^2 + (\varphi_3(s, t))^2}} = \frac{-\frac{\partial w}{\partial t}(s, t_0)}{\sqrt{\left(\frac{\partial w}{\partial t}(s, t_0)\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t}(s, t_0)\right)^2}},$$

$$\frac{\varphi_3(s, t)}{\sqrt{(\varphi_2(s, t))^2 + (\varphi_3(s, t))^2}} = \frac{\frac{\partial v}{\partial t}(s, t_0)}{\sqrt{\left(\frac{\partial w}{\partial t}(s, t_0)\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t}(s, t_0)\right)^2}},$$

$$\frac{c(s)\frac{\partial v}{\partial t}(s, t_0) - b(s)\frac{\partial w}{\partial t}(s, t_0)}{\sqrt{\left(\frac{\partial v}{\partial t}(s, t_0)\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t}(s, t_0)\right)^2}} = \cos \theta$$

eşitliklerinin sağlanmasıdır. Burada $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ yüzeyin birim normalinin Frenet çatısındaki katsayılarıdır.

İspat: $P(s, t)$ sabit açılı yüzey ise **4.2.2 Önerme**, **4.2.3 Sonuç** ve **4.2.4 Sonuç** dan bu eşitlikler sağlanır. Tersine, yüzey denklemi bu eşitlikleri sağlayacak biçimde düzenlendiğinde

$$\langle n(s, t), A \rangle = \cos \theta = \text{sabit}$$

olur. Bu ise yüzeyin sabit açılı yüzey olması demektir. Böylece ispat tamamlanır. \square

Burada **(3.1)-(3.3)** eşitlikleri incelendiğinde aşağıdaki önerme elde edilir.

4.2.6 Önerme

$f(s, t)$ diferansiyellenebilir fonksiyon olmak üzere

$$\varphi_1(s, t) = 0$$

ise

$$\varphi_2(s, t) = -\frac{\partial w(s, t)}{\partial t} f(s, t) \quad (4.9)$$

ve

$$\varphi_3(s, t) = \frac{\partial v(s, t)}{\partial t} f(s, t) \quad (4.10)$$

dir.

İspat: $\varphi_1(s, t) = 0$ olsun. (3.1) eşitliğinden

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial w(s, t)}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial v(s, t)}{\partial s} + \kappa(s)u(s, t) - \tau(s)w(s, t) \right) \\ & - \left(\frac{\partial v(s, t)}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial w(s, t)}{\partial s} + \tau(s)v(s, t) \right) = 0 \end{aligned}$$

dır. Bu ifade düzenlenirse

$$\left(\frac{\partial w(s, t)}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial v(s, t)}{\partial s} + \kappa(s)u(s, t) - \tau(s)w(s, t) \right) = \left(\frac{\partial v(s, t)}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial w(s, t)}{\partial s} + \tau(s)v(s, t) \right),$$

$$\frac{1}{\left(\frac{\partial v(s, t)}{\partial t} \right)} \left(\frac{\partial v(s, t)}{\partial s} + \kappa(s)u(s, t) - \tau(s)w(s, t) \right) = \frac{1}{\left(\frac{\partial w(s, t)}{\partial t} \right)} \left(\frac{\partial w(s, t)}{\partial s} + \tau(s)v(s, t) \right),$$

$$-\left(\frac{\frac{\partial u(s, t)}{\partial t}}{\frac{\partial w(s, t)}{\partial t}} \right) \left(\frac{\partial w(s, t)}{\partial s} + \tau(s)v(s, t) \right) + \left(1 + \frac{\partial u(s, t)}{\partial s} - \kappa(s)v(s, t) \right) =$$

$$-\left(\frac{\frac{\partial u(s, t)}{\partial t}}{\frac{\partial v(s, t)}{\partial t}} \right) \left(\frac{\partial v(s, t)}{\partial s} + \kappa(s)u(s, t) - \tau(s)w(s, t) \right) + \left(1 + \frac{\partial u(s, t)}{\partial s} - \kappa(s)v(s, t) \right)$$

bulunur. Bu eşitliğin her iki tarafındaki ifadeler $f(s, t)$ ile gösterilsin. Ayrıca (3.2)

ve (3.3) eşitliklerinden

$$\varphi_2(s,t) = \frac{-\partial w(s,t)}{\partial t} \left(- \left(\frac{\frac{\partial u(s,t)}{\partial t}}{\frac{\partial w(s,t)}{\partial t}} \right) \left(\frac{\partial w(s,t)}{\partial s} + \tau(s)v(s,t) \right) + \left(1 + \frac{\partial u(s,t)}{\partial s} - \kappa(s)v(s,t) \right) \right)$$

$$\varphi_3(s,t) = \frac{\partial v(s,t)}{\partial t} \left(- \left(\frac{\frac{\partial u(s,t)}{\partial t}}{\frac{\partial v(s,t)}{\partial t}} \right) \left(\frac{\partial v(s,t)}{\partial s} + \kappa(s)u(s,t) - \tau(s)w(s,t) \right) + \left(1 + \frac{\partial u(s,t)}{\partial s} - \kappa(s)v(s,t) \right) \right)$$

elde edilir. Buradan,

$$\varphi_2(s,t) = -\frac{\partial w(s,t)}{\partial t} f(s,t)$$

ve

$$\varphi_3(s,t) = \frac{\partial v(s,t)}{\partial t} f(s,t)$$

bulunur.

4.2.7 Sonuç

$$\varphi_1(s,t) = 0$$

ise

$$\frac{\varphi_2(s,t)}{\sqrt{(\varphi_2(s,t))^2 + (\varphi_3(s,t))^2}} = \pm \frac{-\frac{\partial w(s,t)}{\partial t}}{\sqrt{\left(\frac{\partial w(s,t)}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial v(s,t)}{\partial t}\right)^2}} \quad (4.11)$$

ve

$$\frac{\varphi_3(s,t)}{\sqrt{(\varphi_2(s,t))^2 + (\varphi_3(s,t))^2}} = \pm \frac{\frac{\partial v(s,t)}{\partial t}}{\sqrt{\left(\frac{\partial w(s,t)}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial v(s,t)}{\partial t}\right)^2}} \quad (4.12)$$

dır.

İspat: (4.9) ve (4.10) eşitlikleri kullanıldığında

$$\frac{\varphi_2(s,t)}{\sqrt{(\varphi_2(s,t))^2 + (\varphi_3(s,t))^2}} = \frac{-\frac{\partial w(s,t)}{\partial t} f(s,t)}{\sqrt{\left(\frac{\partial w(s,t)}{\partial t} f(s,t)\right)^2 + \left(\frac{\partial v(s,t)}{\partial t} f(s,t)\right)^2}}$$

ve

$$\frac{\varphi_3(s,t)}{\sqrt{(\varphi_2(s,t))^2 + (\varphi_3(s,t))^2}} = \frac{\frac{\partial v(s,t)}{\partial t} f(s,t)}{\sqrt{\left(\frac{\partial w(s,t)}{\partial t} f(s,t)\right)^2 + \left(\frac{\partial v(s,t)}{\partial t} f(s,t)\right)^2}}$$

olur. Bunlar düzenlendiğinde (4.11) ve (4.12) eşitlikleri elde edilir. \square

Bu sonuçlarla birlikte aşağıdaki önerme elde edilir.

4.2.8 Önerme

$s \in I \subseteq \mathbb{R}$ ve $t \in J \subseteq \mathbb{R}$,

$$r: I \rightarrow E^3$$

yay parametrelili izoparametrik eğri ve $\{T, N, B\}$ eğrinin Frenet çatısı olmak üzere, $P(s, t)$ bir sabit açılı yüzey ise $u(s, t), v(s, t), w(s, t)$ sapma fonksiyonlarının aşağıdakilerden birisi gibi olması gerekir;

i) $U(s), V(s), W(s)$ diferansiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere,

$$v(s, t) = (t - t_0)V(s),$$

$$w(s, t) = (t - t_0)W(s),$$

$$u(s, t) = (t - t_0) \frac{W'(s)V(s) - V'(s)W(s) + \tau(s)(W^2(s) + V^2(s))}{\kappa(s)W(s)} \quad (4.13)$$

ii) $h(s) \neq 0$ diferansiyellenebilir fonksiyon olmak üzere,

$$v(s, t) = h(s)w(s, t),$$

$$u(s, t) = \left(\frac{\tau(s)(h(s)^2 + 1) - h'(s)}{\kappa(s)} \right) w(s, t). \quad (4.14)$$

iii) $l(s) \neq 0$ diferansiyellenebilir fonksiyon olmak üzere,

$$u(s,t) = \left(\frac{l'(s) - \tau(s)(l(s)^2 + 1)}{\kappa(s)l(s)} \right) v(s,t). \quad (4.15)$$

İspat: $P(s,t)$ sabit açılı yüzey olduğu için

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varphi_2(s,t)}{\sqrt{(\varphi_2(s,t))^2 + (\varphi_3(s,t))^2}} \right) = 0,$$

ve

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varphi_3(s,t)}{\sqrt{(\varphi_2(s,t))^2 + (\varphi_3(s,t))^2}} \right) = 0$$

olmalıdır. (4.11) ve (4.12) eşitliklerinden

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{-\frac{\partial w(s,t)}{\partial t}}{\sqrt{\left(\frac{\partial w(s,t)}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial v(s,t)}{\partial t}\right)^2}} \right) = 0$$

ve

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\frac{\partial v(s,t)}{\partial t}}{\sqrt{\left(\frac{\partial w(s,t)}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial v(s,t)}{\partial t}\right)^2}} \right) = 0$$

bulunur. O halde,

$$\frac{\partial v(s,t)}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 w(s,t)}{\partial t^2} \frac{\partial v(s,t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 v(s,t)}{\partial t^2} \frac{\partial w(s,t)}{\partial t} \right) = 0$$

ve

$$\frac{\partial w(s,t)}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 v(s,t)}{\partial t^2} \frac{\partial w(s,t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 w(s,t)}{\partial t^2} \frac{\partial v(s,t)}{\partial t} \right) = 0$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{\partial^2 v(s,t)}{\partial t^2} \frac{\partial w(s,t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 w(s,t)}{\partial t^2} \frac{\partial v(s,t)}{\partial t} = 0$$

dır. Bu eşitliklerin sağlanması üç durumda mümkündür;

$$\text{i)} \quad \frac{\partial^2 w(s,t)}{\partial t^2} = 0 \text{ ve } \frac{\partial^2 v(s,t)}{\partial t^2} = 0$$

$$\text{ii)} \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\frac{\partial v(s,t)}{\partial t}}{\frac{\partial w(s,t)}{\partial t}} \right) = 0$$

$$\text{iii)} \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\frac{\partial v(s,t)}{\partial t}}{\frac{\partial w(s,t)}{\partial t}} \right) = 0$$

Bu durumlar incelendiğinde:

$$\frac{\partial^2 w(s,t)}{\partial t^2} = 0 \text{ ve } \frac{\partial^2 v(s,t)}{\partial t^2} = 0$$

ise

$$\frac{\partial w(s,t)}{\partial t} = W(s) \text{ ve } \frac{\partial v(s,t)}{\partial t} = V(s)$$

olur. Burada başlangıç koşullarında gözönüne alındığında

$$v(s,t) = (t-t_0)V(s) \text{ ve } w(s,t) = (t-t_0)W(s),$$

elde edilir, bu eşitlikler (4.4) eşitliğinde kullanıldığında

$$\begin{aligned} W(s) \left((t-t_0)V'(s) + \kappa(s)u(s,t) - \tau(s)(t-t_0)W(s) \right) \\ - V(s) \left((t-t_0)W'(s) + \tau(s)(t-t_0)V(s) \right) = 0 \end{aligned}$$

olur Bu eşitlik düzenlendiğinde (4.13) eşitliği elde edilir.

$$\text{i)} \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\frac{\partial v(s,t)}{\partial t}}{\frac{\partial w(s,t)}{\partial t}} \right) = 0 \text{ ise}$$

$$\frac{\frac{\partial v(s,t)}{\partial t}}{\frac{\partial w(s,t)}{\partial t}} = h(s)$$

olur. Buradan

$$\frac{\partial v(s,t)}{\partial t} = h(s) \frac{\partial w(s,t)}{\partial t}$$

elde edilir. Başlangıç koşulları dikkate alındığında

$$v(s,t) = h(s)w(s,t)$$

bulunur.

Bu eşitlik (4.4) eşitliğinde kullanıldığında

$$u(s,t) = \left(\frac{\tau(s)(h(s)^2 + 1) - h'(s)}{\kappa(s)} \right) w(s,t)$$

elde edilir.

$$\text{ii)} \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\frac{\partial w(s,t)}{\partial t}}{\frac{\partial v(s,t)}{\partial t}} \right) = 0 \text{ ise}$$

$$\frac{\frac{\partial w(s,t)}{\partial t}}{\frac{\partial v(s,t)}{\partial t}} = l(s)$$

olur ve ii) için yapılan işlemler tekrarlandığında (4.15) eşitliği bulunur. \square

Burada verilenler (4.11) ve (4.12) eşitliklerinde kullanıldığında aşağıdaki sonuç elde edilir.

4.2.9 Sonuç

$P(s,t)$ sabit açılı yüzeyinin birim normali için aşağıdaki durumlar söz konusudur,

$$\text{i)} \quad n(s,t) = \pm \frac{-W(s)N(s) + V(s)B(s)}{\sqrt{W(s)^2 + V(s)^2}} \quad (4.16)$$

$$\text{ii)} \quad n(s,t) = \pm \frac{-N(s) + h(s)B(s)}{\sqrt{1 + h(s)^2}} \quad (4.17)$$

$$\text{iii)} \quad n(s,t) = \pm \frac{-l(s)N(s) + B(s)}{\sqrt{1 + l(s)^2}} \quad (4.18)$$

Bu ifadeler (4.8) eşitliğinde kullanıldığında aşağıdaki sonuç elde edilir.

4.2.10 Sonuç

i) $c(s)^2 - \cos^2 \theta \neq 0$ için,

$$h(s) = \frac{b(s)c(s) \pm \cos \theta \sqrt{b(s)^2 + c(s)^2 - \cos^2 \theta}}{c(s)^2 - \cos^2 \theta} \quad (4.19)$$

ve

$$V(s) = W(s)h(s) \quad (4.20)$$

dir.

ii) $b(s)^2 - \cos^2 \theta \neq 0$ için,

$$l(s) = \frac{b(s)c(s) \mp \cos \theta \sqrt{b(s)^2 + c(s)^2 - \cos^2 \theta}}{b(s)^2 - \cos^2 \theta} \quad (4.21)$$

ve

$$W(s) = V(s)h(s) \quad (4.22)$$

dir.

İspat:

i) $c(s)^2 - \cos^2 \theta \neq 0$ olmak üzere yüzey normalinin (4.17) deki ifadesiyle A sabit birim vektörünün iç çarpımı yapılırsa,

$$\frac{c(s)h(s) - b(s)}{\sqrt{1 + h(s)^2}} = \pm \cos \theta$$

bulunur. Son eşitlikten

$$(c(s)^2 - \cos^2 \theta)h(s)^2 - 2b(s)c(s)h(s) + b(s)^2 - \cos^2 \theta = 0$$

elde edilir. Bu denklem $h(s)$ nin 2. derece denklemi olarak ele alındığında diskriminantı,

$$\Delta = 4 \cos^2 \theta (b(s)^2 + c(s)^2 - \cos^2 \theta)$$

olur ve bu 2. derece denklemin çözümünden (4.19) eşitliği elde edilir.

Benzer biçimde yüzey normalinin (4.16) eşitliğindeki ifadesiyle A sabit vektörünün iç çarpımı yapılırsa,

$$\frac{c(s)V(s) - b(s)W(s)}{\sqrt{V(s)^2 + W(s)^2}} = \pm \cos \theta,$$

bulunur. Son eşitlikten

$$(c(s)^2 - \cos^2 \theta)V(s)^2 - 2b(s)c(s)V(s)W(s) + (b(s)^2 - \cos^2 \theta)W(s)^2 = 0$$

elde edilir. Bu denklem $V(s)$ nin 2. derece denklemi olarak ele alındığında diskriminantı,

$$\Delta = 4 \cos^2 \theta (b(s)^2 + c(s)^2 - \cos^2 \theta)$$

olur ve bu 2. derece denklemin çözümünden

$$V(s) = W(s) \frac{b(s)c(s) \pm \cos \theta \sqrt{b(s)^2 + c(s)^2 - \cos^2 \theta}}{c(s)^2 - \cos^2 \theta}$$

olur. Buradan (4.20) eşitliği elde edilir.

ii) $b(s)^2 - \cos^2 \theta \neq 0$ olmak üzere için i) deki işlemler tekrarlandığında (4.21) ve (4.22) eşitlikleri elde edilir. \square

Bu sonuca göre 4.2.8 Önerme deki i) durumu aslında ii) ve iii) durumlarının özel bir halidir. O halde tüm bu sonuçlarla beraber aşağıdaki teorem düzenlenebilir.

4.2.11 Teorem

$s \in I \subseteq \mathbb{R}$ ve $t \in J \subseteq \mathbb{R}$, $r: I \rightarrow E^3$ yay parametrelili bir izoparametrik eğri, $\{T, N, B\}$ eğrinin Frenet çatısı ve $\theta = \text{sabit}$ olmak üzere,

$$P(s, t) = r(s) + u(s, t)T(s) + v(s, t)N(s) + w(s, t)B(s)$$

yüzeyinin

$$A = a(s)T(s) + b(s)N(s) + c(s)B(s)$$

sabit birim vektörüne göre bir sabit açılı yüzey olması için gerek ve yeter koşul $u(s, t), v(s, t), w(s, t)$ sapma fonksiyonlarının aşağıdaki biçimde olmasıdır;

i) $c(s)^2 - \cos^2 \theta \neq 0$ için,

$$h(s) = \frac{b(s)c(s) \pm \cos \theta \sqrt{b(s)^2 + c(s)^2 - \cos^2 \theta}}{c(s)^2 - \cos^2 \theta}$$

$$v(s,t) = h(s)w(s,t)$$

$$u(s,t) = \left(\frac{\tau(s)(h(s)^2 + 1) - h'(s)}{\kappa(s)} \right) w(s,t)$$

ii) $b(s)^2 - \cos^2 \theta \neq 0$ için,

$$l(s) = \frac{b(s)c(s) \mp \cos \theta \sqrt{b(s)^2 + c(s)^2 - \cos^2 \theta}}{b(s)^2 - \cos^2 \theta}$$

$$w(s,t) = l(s)v(s,t)$$

$$u(s,t) = \left(\frac{l'(s) + \tau(s)(l(s)^2 + 1)}{\kappa(s)l(s)} \right) v(s,t)$$

İspat: $P(s,t)$ sabit açılı yüzey ise **4.2.6 Önerme** den itibaren yapılanlarla bu eşitliklerin gerekli koşullar olduğu gösterildi.

Tersten, eğer sapma fonksiyonları bu şekilde seçilirse **4.2.5 Teorem** deki eşitlikler sağlanır. Böylece yüzey bir sabit açılı yüzey olur. \square

4.2.12 Sonuç

θ nın her farklı değeri için sabit açılı yüzey ailesinin farklı bir üyesi elde edilir. Bir θ değeri için $w(s,t)$ veya $v(s,t)$ nin her farklı seçiminde ailenin aynı üyesinin farklı kesitleri elde edilir.

Sapma fonksiyonlarının özel durumları olan

$$\frac{\partial w}{\partial t}(s, t_0) = 0 \text{ veya } \frac{\partial v}{\partial t}(s, t_0) = 0$$

olması iki durumda mümkündür:

i) $w(s,t) = W(s)$ veya $v(s,t) = V(s)$,

ii) $w(s,t) = 0$ veya $v(s,t) = 0$.

Burada i) izoparametrik şarta uygun değildir. ii) durumu için aşağıdaki iki teorem elde edilir.

4.2.13 Teorem

$w(s,t) = 0$ olsun.

$$P(s, t) = r(s) + u(s, t)T(s) + v(s, t)N(s)$$

yüzeyinin bir sabit açılı yüzey olması için aşağıdakilerden birisinin olması gerek ve yeter koşuldur,

i) $P(s, t)$ yüzeyi bir düzlem parçasıdır.

ii) r eğrisi bir helis eğrisi ve

$$v(s, t) = 0$$

dır.

İspat: $P(s, t)$ sabit açılı yüzey olsun. Yüzeyin birim normali hesaplandığında φ_1 katsayısı

$$\varphi_1(s, t) = -\tau(s)v(s, t) \frac{\partial v(s, t)}{\partial t} = 0$$

olur. Buradan,

i)

$$\tau(s) = 0$$

ve

$$n(s, t) = \pm B(s)$$

olur bu ise yüzeyin bir düzlem parçası olması demektir.

ii)

$$v(s, t) = 0$$

olsun. O halde

$$P(s, t) = r(s) + u(s, t)T(s)$$

olur. Bu ise **3.1.7 Teorem** den eğrinin bir helis olması demektir.

Tersine,

i) Yüzey bir düzlem parçası ise normalisi sabittir dolayısıyla sabit açılı yüzey olur.

ii) r eğrisi helis eğrisi ise **3.1.7 Teorem** den bir yüzey sabit açılı yüzey olur. \square

4.2.14 Teorem

$v(s, t) = 0$ olsun.

$$P(s, t) = r(s) + u(s, t)T(s) + w(s, t)B(s)$$

yüzeyinin bir sabit açılı yüzey olması için gerek ve yeter koşul eğrinin bir slant helis ve

$$u(s,t) = \frac{\tau(s)}{\kappa(s)} w(s,t) \quad (4.23)$$

olmasıdır.

İspat: Kabul edelimki $P(s,t)$ sabit açılı yüzey olsun. Yüzeyin birim normali hesaplandığında

$$\varphi_1(s,t) = \frac{\partial w(s,t)}{\partial t} (\kappa(s)u(s,t) - \tau(s)w(s,t)) = 0$$

olur. Buradan,

$$(\kappa(s)u(s,t) - \tau(s)w(s,t)) = 0$$

ve

$$n(s,t) = \pm N(s)$$

bulunur bu ise eğrinin slant helis olması demektir.

Tersine, yüzey normali hesaplanıp (4.23) eşitliği yerine yazıldığında

$$n(s,t) = \pm N(s)$$

bulunur. Eğri slant helis olduğundan yüzey sabit açılı yüzey olur. \square

Yay parametrelili olmayan bir eğri için aşağıdaki sonuç elde edilir.

4.2.15 Sonuç

Yay parametrelili bir eğriden geçen sabit açılı yüzey ailesi için elde edilen eşitlikler yay parametrelili olmayan regüler bir eğri için de geçerlidir.

İspat: 2.3.10 Önerme ye göre yay parametrelili bir eğrinin Frenet formülleri sadece bir katsayı farkı ile yay parametrelili olmayan bir eğri içinde geçerlidir. Ayrıca aynı durum 4.1.10 Önerme ye göre sabit birim vektörün Frenet çatısındaki katsayıları için de geçerlidir. Bu kısımda yapılan işlemler yay parametrelili olmayan bir eğri içinde yapıldığında bu katsayının sadeleştiği rahatlıkla görülebilir. \square

4.2.16 Sonuç

4.2.11 Teorem, 4.2.13 Teorem ve 4.2.14 Teorem ile E^3 de bir eğri ve sabit doğrultu verildiğinde oluşturulabilecek sabit açılı yüzey ailesinin bütün üyeleri elde edilebilir.

4.2.17 Sonuç

Bir eğri ve bir sabit doğrultu verildiğinde sabit açılı yüzey ailesi oluşturmak için;

- i) Eğrinin Frenet vektörleri ve eğrilikleri hesaplanır,
- ii) Sabit doğrultunun Frenet çatısındaki katsayıları hesaplanır,
- iii) Bu katsayılar **4.2.11 Teoremde** kullanılarak sapma fonksiyonları bulunur.

4.3 Özel Eğrilerden Geçen Sabit Açılı Yüzey Ailesi

Bu kısımda verilen eğrinin yüzey üzerinde jeodezik, asimptotik veya eğrilik çizgisi olması halinde elde edilen sonuçlara yer verilmiştir.

$s \in I \subseteq \mathbb{R}$ ve $t \in J \subseteq \mathbb{R}$, $r: I \rightarrow E^3$ yay parametrelili izoparametrik bir eğri, $\{T, N, B\}$ eğrinin Frenet çatısı olmak üzere,

$$P: I \times J \rightarrow E^3$$

$$P(s, t) = r(s) + u(s, t)T(s) + v(s, t)N(s) + w(s, t)B(s)$$

yüzeyi bir A sabit doğrultusuna göre sabit açılı yüzey olsun.

4.3.1 Sonuç

r eğrisinin yüzey üzerinde bir jeodezik eğri olması için gerek ve yeter koşul koşul, r eğrisinin A doğrultusuna göre bir slant helis ve

$$P(s, t) = r(s) + w(s, t)\left(\frac{\tau(s)}{\kappa(s)}T(s) + B(s)\right) \quad (4.24)$$

olmasıdır.

İspat: $r(s)$ eğrisi yüzey üzerinde jeodezik eğri olsun.

3.1.10 Teorem e göre eğri jeodezik eğri ise bir slant helistir. Ayrıca eğri jeodezik eğri ise

$$n(s, t) \parallel N(s)$$

olacağından, (4.7) eşitliğine göre

$$\frac{\partial v}{\partial t}(s, t_0) = 0$$

olur. Buradan **4.2.14 Teorem** den (4.24) eşitliği sağlanır.

Tersine r eğrisi A sabit doğrultusuna göre bir slant helis olsun. (4.7) eşitliğine göre

$$\frac{\partial v}{\partial t}(s, t_0) = 0 \Rightarrow n(s, t) \parallel N(s)$$

olur. Bu ise eğrinin bir jeodezik eğri olması demektir. \square

4.3.2 Sonuç

$r(s)$ eğrisinin yüzey üzerinde bir asimptotik eğri olması için gerek ve yeter koşul A vektörüne göre bir helis eğrisi ve

$$v(s, t) = w(s, t) = 0$$

olmasıdır.

İspat: $r(s)$ eğrisi yüzey üzerinde bir asimptotik eğri olsun.

3.2.3 Teorem de (4.4)-(4.6) eşitlikleri kullanıldığında asimptotik eğri için gerek ve yeter koşul,

$$\frac{\partial w}{\partial t}(s, t_0) = 0$$

olur. Buradan **4.2.13 Teorem** e göre

$$v(s, t) = w(s, t) = 0$$

olur. Ayrıca **3.1.7 Teorem** den eğri bir helis eğrisidir.

4.3.3 Sonuç

r eğrisinin $P(s, t)$ sabit açılı yüzeyi üzerinde bir eğrilik çizgisi olması için düzlemsel bir eğri olması gerekir.

İspat: **3.1.10 Teorem** den sabit vektörün eğrinin normal düzleminde olması gerekir. Buradan $a(s) = 0$ olmalıdır. Bu ise **4.1.5 Sonuç** a göre eğrinin düzlemsel olmasını gerektirir

4.4 Örnekler

Bu bölümde sabit açılı yüzey ailesi örnekleri verilmiştir. Birinci kısımda bir çember için, ikinci kısımda ise bir helis eğrisi için sabit açılı yüzey ailesi örnekleri incelenmiştir. Bu örneklerde

$$t_0 = 0$$

kabul edilmiştir.

4.4.1 Bir Çemderden Geçen Sabit Açılı Yüzey Ailesi Örnekleri

İlk örnekte sabit doğrultu olarak

$$A_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

sabit birim vektörü alınarak bu vektöre göre sabit açı yapan yüzey ailesinin iki üyesi, ikinci örnekte ise sabit doğrultu olarak

$$A_2 = (0, 0, 1)$$

sabit birim vektörü alınarak oluşturulan sabit açılı yüzey ailesinin iki üyesi gösterilmiştir.

$r: [0, 2\pi] \rightarrow E^3$ olmak üzere

$$r(s) = (\cos s, \sin s, 0)$$

çemberinin Frenet vektörleri ve eğrilikleri hesaplandığında

$$T(s) = (-\sin s, \cos s, 0),$$

$$N(s) = (-\cos s, -\sin s, 0),$$

$$B(s) = (0, 0, 1)$$

ve

$$\kappa(s) = 1,$$

$$\tau(s) = 0$$

bulunur.

4.4.1.1 Örnek

r eğrisinden geçen ve A_1 vektörü ile sabit açı yapan $P_1(s, t; \theta)$ sabit açılı yüzey ailesini elde etmek için ilk olarak A_1 vektörünün Frenet çatısındaki katsayıları bulunur.

r eğrisi düzlemsel olduğundan **4.1.2 Sonuç** kullanılabilir. κ ve τ nun değerleri (4.3) eşitliklerinde yerine yazılırsa

$$a(s) = \mu \sin s,$$

$$b(s) = \mu \cos s,$$

$$c(s) = \lambda$$

olur. Bu eşitlikler ve r eğrisinin Frenet vektörleri kullanılarak (4.1) eşitliği çözüldüğünde

$$\mu = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ve } \lambda = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

bulunur. Böylece

$$a(s) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \sin s,$$

$$b(s) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cos s,$$

$$c(s) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

elde edilir. Bu eşitlikler **4.2.11 Teorem** de kullanıldığında

$$h(s) = \frac{-\cos s \pm \sqrt{2} \cos \theta \sqrt{\cos^2 s + 1 - 2 \cos^2 \theta}}{1 - 2 \cos^2 \theta}$$

$$l(s) = \frac{-\cos s \mp \sqrt{2} \cos \theta \sqrt{\cos^2 s + 1 - 2 \cos^2 \theta}}{\cos^2 s - 2 \cos^2 \theta}$$

olur.

i) $\theta = \frac{\pi}{2}$ için

$$h(s) = -\cos s$$

olur.

$$w(s,t) = t$$

seçilirse **4.2.11 Teorem** den

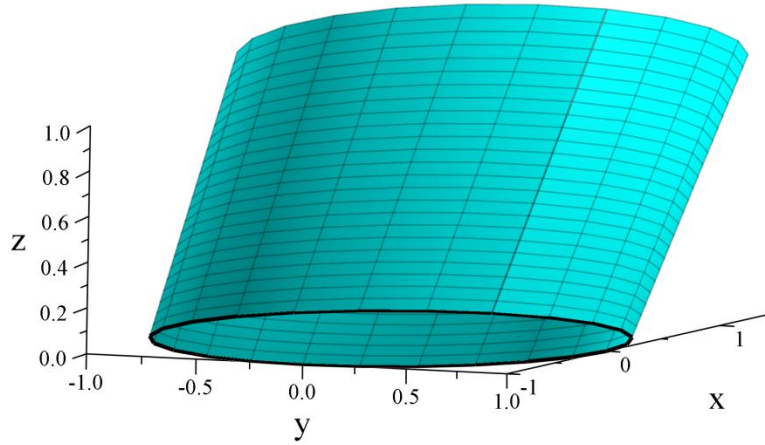
$$u(s,t) = -t \sin s,$$

$$v(s,t) = -t \cos s$$

elde edilir. Böylece $P_1(s,t;\theta)$ sabit açılı yüzey ailesinin bir üyesi

$$P_1(s,t;\frac{\pi}{2}) = (t + \cos s, \sin s, t)$$

olur (**Şekil 4.5**).



Şekil 4.5 r eğrisi ve $P_1(s,t;\frac{\pi}{2})$ sabit açılı yüzeyi.

ii) $\theta = \frac{\pi}{4}$ için

$$l(s) = \frac{2 \cos s}{\sin^2 s}$$

olur ve

$$v(s,t) = \frac{1}{2}(t^2 + t) \sin^2 s \cos s$$

seçilirse **4.2.11 Teorem** den

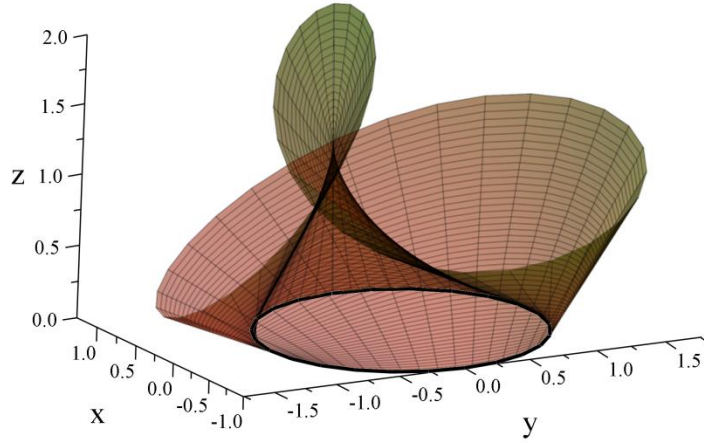
$$u(s,t) = -\frac{1}{2}(t^2 + t)(\sin s)(1 + \cos^2 s),$$

$$w(s,t) = 2(t^2 + t)\cos^2 s$$

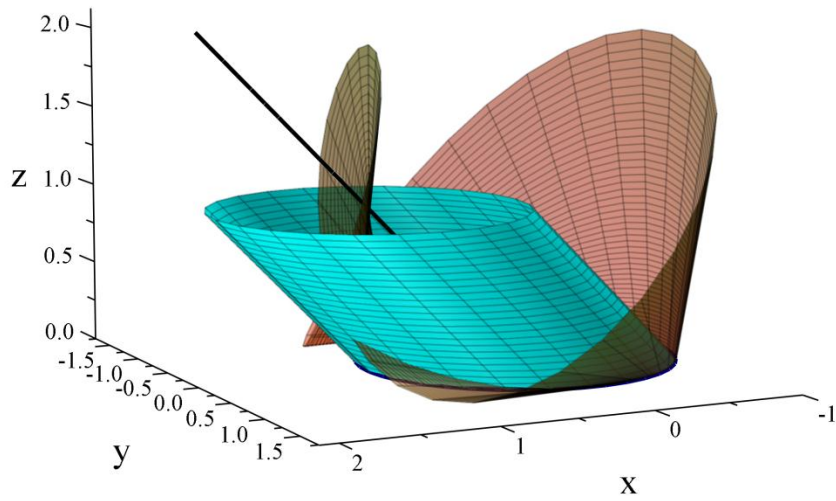
elde edilir. Böylece $P_1(s,t;\theta)$ sabit açılı yüzey ailesinin diğer bir üyesi

$$P_1(s,t;\frac{\pi}{4}) = (\frac{1}{2}(t^2 + t)(\sin s)^2 + \cos s, (t^2 + t)(\sin s)(\cos s) - \sin s, (t^2 + t)(\cos s)^2)$$

olur (Şekil 4.6).



Şekil 4.6 r eğrisi ve $P_1(s,t;\frac{\pi}{4})$ sabit açılı yüzeyi.



Şekil 4.7 A_1 doğrultusu ve $P_1(s,t;\theta)$ sabit açılı yüzey ailesinin iki üyesi.

4.4.1.2 Örnek

Önceki örnekteki gibi r eğrisinden geçen ve A_2 vektörü ile sabit açı yapan $P_2(s, t; \theta)$ sabit açılı yüzey ailesini elde etmek için ilk olarak A_2 vektörünün Frenet çatısındaki katsayıları **4.1.2 Sonuç** ve (4.1) eşitliği hesaplandığında,

$$a(s) = 0,$$

$$b(s) = 0,$$

$$c(s) = 1$$

elde edilir. Bu eşitlikler **4.2.11 Teorem** de kullanıldığında

$$h(s) = \pm \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

$$l(s) = \pm \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

olur.

i) $\theta = \frac{\pi}{2}$ için

$$h(s) = 0$$

ve buradan

$$u(s, t) = v(s, t) = 0$$

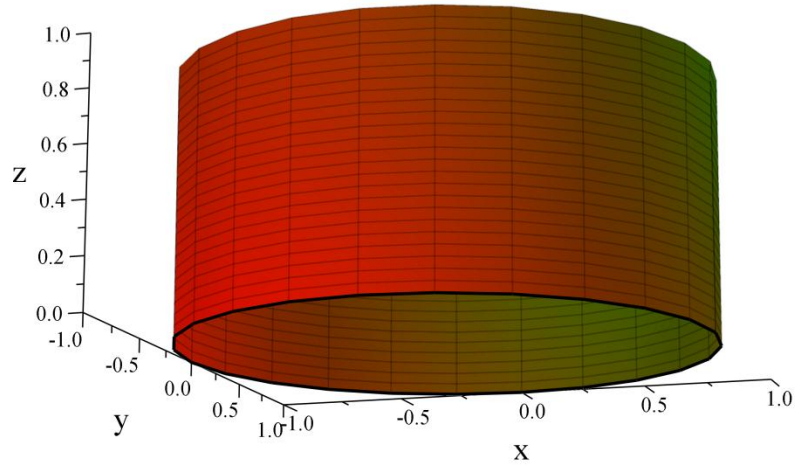
olur. Eğer

$$w(s, t) = t$$

seçilirse $P_2(s, t; \theta)$ sabit açılı yüzey ailesinin bir üyesi

$$P_2(s, t; \frac{\pi}{2}) = (\cos s, \sin s, t)$$

olarak bulunur (**Şekil 4.8**).



Şekil 4.8 r eğrisi ve $P_2(s, t; \frac{\pi}{2})$ sabit açılı yüzeyi.

ii) $\theta = \frac{\pi}{6}$ için

$$l(s) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

ve

$$v(s, t) = t$$

seçilir ise

$$u(s, t) = 0$$

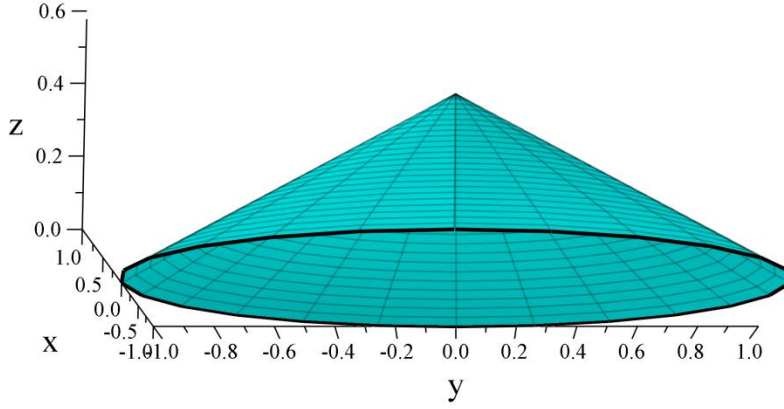
ve

$$w(s, t) = \frac{\sqrt{3}}{3} t$$

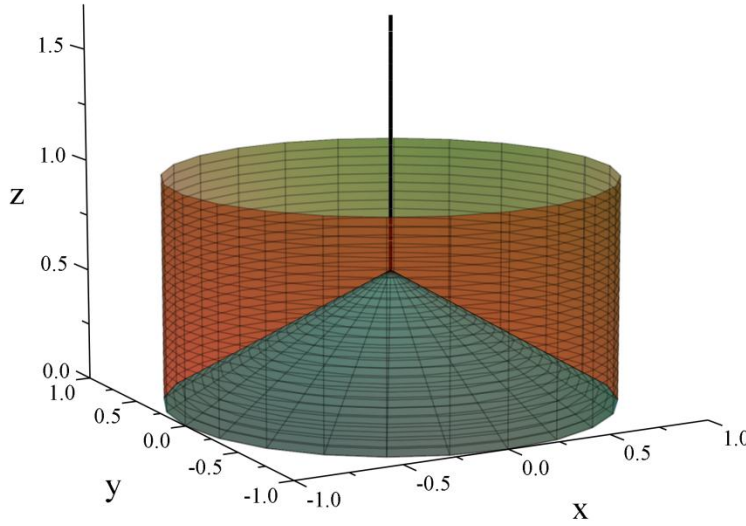
bulunur. Böylece $P_2(s, t; \theta)$ sabit açılı yüzey ailesinin diğer bir üyesi

$$P_2(s, t; \frac{\pi}{6}) = (\cos s - t \cos s, \sin s - t \sin s, \frac{1}{3} \sqrt{3} t)$$

olarak elde edilir (Şekil 4.9).



Şekil 4.9 r eğrisi ve $P_2(s, t; \frac{\pi}{6})$ sabit açılı yüzeyi.



Şekil 4.10 A_1 doğrultusu ve $P_2(s, t; \theta)$ sabit açılı yüzey ailesinin iki üyesi.

4.4.2 Helis Eğrisi İçin Sabit Açılı Yüzey Ailesi Örnekleri

İlk olarak

$$A_2 = (0, 0, 1)$$

doğrultusuna göre, ikinci olarak

$$A_3 = (0, 1, 0)$$

doğrultusuna göre sabit açılı yüzey ailesinin bazı üyeleri gösterilmiştir.

$\alpha(s) : [0, 2\pi] \rightarrow E^3$ olmak üzere

$$\alpha(s) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos s, \frac{\sqrt{2}}{2} \sin s, \frac{\sqrt{2}}{2} s \right)$$

helis eğrisinin Frenet vektörleri ve eğrilikleri hesaplandığında

$$T(s) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \sin s, \frac{\sqrt{2}}{2} \cos s, \frac{\sqrt{2}}{2} \right),$$

$$N(s) = (-\cos s, -\sin s, 0),$$

$$B(s) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin s, -\frac{\sqrt{2}}{2} \cos s, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

ve

$$\kappa(s) = \tau(s) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

olur.

4.4.2.1 Örnek

α eğrisinden geçen ve A_2 vektörü ile sabit açı yapan $H_2(s, t; \theta)$ sabit açılı yüzey ailesini elde etmek için yine ilk olarak A_2 vektörünün Frenet çatısındaki katsayıları bulunur.

α eğrisi için **4.1.1 Önerme** ve **(4.1)** eşitliği kullanıldığında

$$a(s) = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$b(s) = 0,$$

$$c(s) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

elde edilir. Bu eşitlikler **4.2.11 Teorem** de, kullanıldığında

$$h(s) = \frac{\pm \sqrt{2} \cos \theta \sqrt{1 - 2 \cos^2 \theta}}{1 - 2 \cos^2 \theta},$$

$$l(s) = \frac{\pm \sqrt{2} \cos \theta \sqrt{1 - 2 \cos^2 \theta}}{2 \cos^2 \theta}$$

olur.

i) $\theta = \frac{\pi}{2}$ için

$$h(s) = 0$$

olur ve

$$w(s, t) = -t$$

seçildiğinde

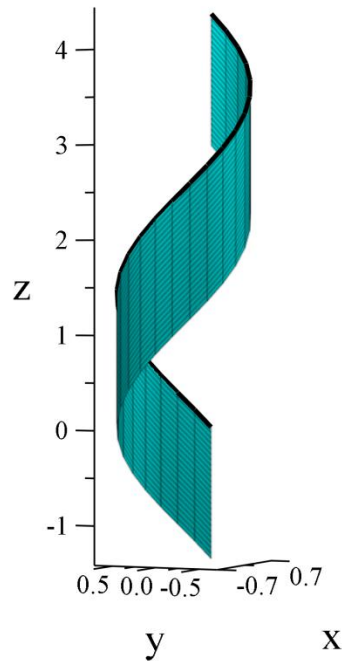
$$u(s, t) = -t,$$

$$v(s, t) = 0$$

bulunur. Böylece $H_2(s, t; \theta)$ sabit açılı yüzey ailesinin bir üyesi

$$H_2(s, t; \frac{\pi}{2}) = (\frac{\sqrt{2}}{2} \cos s, \frac{\sqrt{2}}{2} \sin s, \frac{\sqrt{2}}{2} s - \sqrt{2}t)$$

olarak bulunur (Şekil 4.11).



Şekil 4.11 α eğrisi ve $H_2(s, t; \frac{\pi}{2})$ sabit açılı yüzeyi.

ii) $\theta = \frac{\pi}{3}$ için

$$l(s) = \pm 1$$

olur ve

$$v(s, t) = -t$$

seçilirse

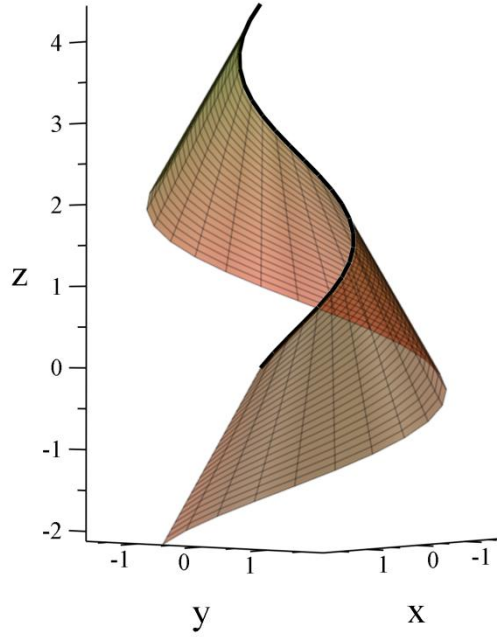
$$w(s, t) = -t,$$

$$u(s, t) = -2t$$

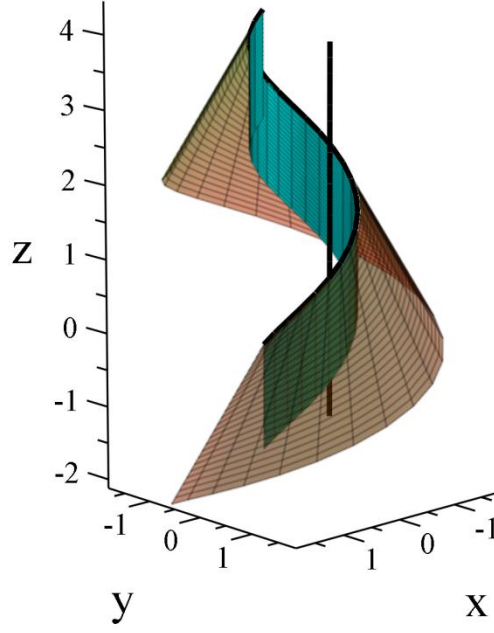
elde edilir. Böylece $H_2(s, t; \theta)$ sabit açılı yüzey ailesinin bir diğer üyesi

$$H_2(s, t; \frac{\pi}{3}) = (\frac{\sqrt{2}}{2} \cos s + t(\cos s + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin s), \frac{\sqrt{2}}{2} \sin s + t(\sin s - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos s), \frac{\sqrt{2}}{2} s - \frac{3\sqrt{2}}{2} t)$$

olarak bulunur (Şekil 4.12).



Şekil 4.12 α eğrisi ve $H_2(s, t; \frac{\pi}{3})$ sabit açılı yüzeyi.



Şekil 4.13 A_2 doğrultusu ve $H_2(s, t; \theta)$ sabit açılı yüzey ailesinin iki üyesi.

4.4.2.2 Örnek

α eğrisinden geçen ve A_3 doğrultusu ile sabit açı yapan $H_3(s, t; \theta)$ sabit açılı yüzey ailesini elde etmek için yine ilk olarak A_2 vektörünün Frenet çatısındaki katsayıları bulunur.

α eğrisi için **4.1.1 Önerme** ve **(4.1)** eşitliği kullanıldığında,

$$a(s) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos s,$$

$$b(s) = -\sin s,$$

$$c(s) = \frac{-\sqrt{2}}{2} \cos s$$

olur. Bu eşitlikler **4.2.11 Teorem** de, kullanıldığında

$$h(s) = \frac{\sqrt{2}(\sin s \cos s \pm \cos \theta \sqrt{1 + \cos s^2 - \cos^2 \theta})}{\cos s^2 - 2 \cos^2 \theta},$$

$$l(s) = \frac{\sqrt{2} \sin s \cos s \pm \cos \theta \sqrt{1 + \cos s^2 - \cos^2 \theta}}{2 \sin s^2 - \cos^2 \theta}$$

elde edilir.

i) $\theta = \frac{\pi}{2}$ için

$$l(s) = \frac{\sqrt{2} \cos s}{2 \sin s}$$

olur ve

$$v(s, t) = \sqrt{2}t \sin s$$

seçilirse

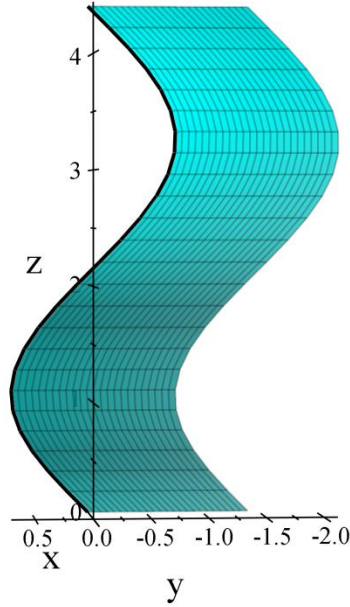
$$w(s, t) = t \cos s,$$

$$u(s, t) = -t \cos s$$

elde edilir. Böylece $H_3(s, t; \theta)$ sabit açılı yüzey ailesinin bir üyesi

$$H_3(s, t; \frac{\pi}{2}) = (\frac{\sqrt{2}}{2} \cos s, \frac{\sqrt{2}}{2} \sin s - \sqrt{2}t, \frac{\sqrt{2}}{2} s)$$

olarak bulunur (Şekil 4.14).



Şekil 4.14 α eğrisi ve $H_3(s, t; \frac{\pi}{2})$ sabit açılı yüzeyi.

ii) $\theta = \frac{\pi}{4}$ için

$$h(s) = \frac{2\sqrt{2} \sin s \cos s \pm \sqrt{2}\sqrt{1+2\cos s^2}}{-2\sin s^2}$$

olur ve

$$w(s, t) = -\sin^4 s$$

seçilirse

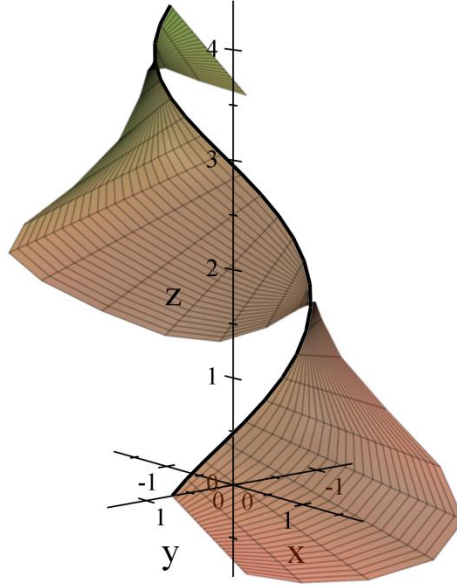
$$u(s, t) = -t \frac{2\sqrt{2} \sin s \cos s - 2\sin s^2 + \sqrt{1+2\cos s^2}}{2},$$

$$v(s, t) = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin^2 s)(2\sin s \cos s + \sqrt{1+2\cos s^2})$$

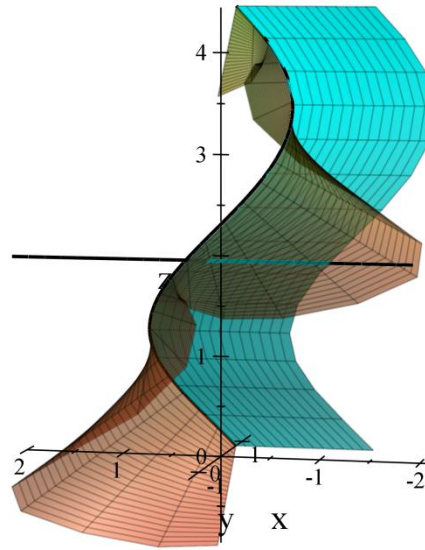
elde edilir. Böylece $H_3(s, t; \theta)$ sabit açılı yüzey ailesinin diğer bir üyesi

$$H_3(s, t; \frac{\pi}{4}) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin s, \frac{\sqrt{2}}{2} \cos s, \frac{\sqrt{2}}{2} s \right) + t \left(\begin{array}{l} -(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin^5 s + \frac{1}{2}(\sqrt{2} \sin^2 s + \cos s)(2\sin s \cos s + \sqrt{2\cos^2 s + 1}) - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos s \sin^2 s, \\ \frac{1}{2} \sin s((1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin s \cos s)(2\cos s \sin s + \sqrt{2\cos^2 s + 1}) + \sqrt{2} \sin s(-\sin s + \cos s)), \\ -(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin^4 s + \frac{1}{2}(2\cos s \sin s - \sqrt{2} \sin^2 s + \sqrt{2\cos^2 s + 1})) \end{array} \right)$$

elde edilir (**Şekil 4.15**).



Şekil 4.15 α eğrisi ve $H_3(s, t; \frac{\pi}{4})$ sabit açılı yüzeyi.



Şekil 4.16 A_3 doğrultusu ve $H_3(s, t; \theta)$ sabit açılı yüzey ailesinin iki üyesi

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışması sonucunda, E^3 de bir eğri ve bir sabit doğrultu verildiğinde herhangi bir kısıtlama olmadan sabit açılı yüzey ailesi elde edilebilmektedir.

Sabit açılı yüzey ailesinin üyelerinin sınıflandırması ve bu yüzeylerin singüler noktaları araştırılabilir.

E^3 de yapılan bu çalışmalar farklı uzaylara taşınarak sabit açılı yüzey ailelerin parametrik ifadeleri elde edilebilir.

KAYNAKLAR

- Atalay G.S., Güler F., Kasap E., Spacelike constant angle surfaces in Minkowski 3-space, *J. Math. Comput. Sci.*, 2012, 2- 3, 451-461.
- Bayram E., Güler F., Kasap E., Parametric representation of a surface pencil with a common asymptotic curve., *Computer-Aided Design*, 2012,44, 637–43.
- Cermelli P. and Di Scala A. J., Constant-angle surfaces in liquid crystals, *Philosophical Magazine*, 2007, 87, 1871–1888.
- Chen D., Chen G., Chen H. and Dillen F., Constant Angle Surfaces in $S^3(1) \times \mathbb{R}$, *B. Belg. Math. Soc-Sim.*, 2012, 19-2, 289-304
- Dillen F., Fastenakels J., Van der Veken J., Vrancken L., Constant angle surfaces in $S^2 \times \mathbb{R}$, *Monatsh.Math.*, 2007, 152, 89–96
- Dillen F., Munteanu M., Constant Angle Surfaces in $H^2 \times \mathbb{R}$, *Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.)*, 2009, 40, 85–97.
- Dillen F., Kowalczyk D., Constant angle surfaces in product spaces, *J. Geom. Phys.*, 2012, 62-6, 1414–1432.
- Do Carmo M.P., *Differential geometry of curves and surfaces.*, Prentice Hall: Englewood Cliffs; 1976
- Farin G., *Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design*, 2nd ed., Academic Press, New York, 1990.
- Fastenakels J., Munteanu M. I. and Van der Veken J., Constant angle surfaces in the Heisenberg group, *Acta Mathematica Sinica (English Series)*, 2011, 27-4, 747-756.
- Garnica E., Palmas O., Ruiz-Hernandez G., Classification of constant angle hyper surfaces in warped products via eikonal functions, *Bol. Soc. Mat. Mexicana (3)*, 2012, 18, 29-45.
- Güler F., Şaffak G. and Kasap E., Timelike constant angle surfaces in Minkowski space \mathbb{R}_1^3 , *Int.J.Contemp.Math. Sci.*, 2011, 44, 2189-2200.
- Hacısalıhoğlu H. H., *Diferensiyel Geometri I. Cilt*, Hacısalıhoğlu Yayınları, Ankara, 1998.
- Hacısalıhoğlu H. H., *Diferensiyel Geometri II. Cilt*, Hacısalıhoğlu Yayınları, Ankara, 2000.
- Izumiya, S. and Tkeuchi, N.: New special curves and developable surfaces, *Turk J. Math.*, 2004, 28, 153-163.

- Kasap E., Akyıldız F.T., Orbay K., A generalization of surfaces family with common spatial geodesic, *Appl. Math. Comput.*, (2008), 201, 781–789
- Kühnel, W., *Differential Geometry Curves-Surfaces-Manifolds*, 2-nd Edition, AMS Student Mathematical Library, 2005.
- Li C.Y., Wang R.H., Zhu C.G., Parametric representation of a surface pencil with a common line of curvature, *Computer-Aided Design*, 2011, 43, 1110–7
- Lopez R. and Munteanu M. I., Constant angle surfaces in Minkowski space, *Bull.Belg. Math. Soc. –Sim*, 2011, 18, 271-286
- Lopez R., Munteanu M.I., On the geometry of constant angle surfaces in Sol_3 , *Kyushu J. Math.*, 2011, 2, 271 - 286.
- Munteanu M. I. and Nistor A. I., A new approach on constant angle surfaces in E^3 , *Turkish J.Math.*, 2009, 33-2, 169–178.
- Nistor A. I., Certain constant angle surfaces constructed on curves, *Int. Electron. J. Geom.*, 2011, 4, 79–87
- O’Neill B., *Elementary differential geometry*, Academic Press Inc., New York, 1966
- Özkaldi S., Yayli Y., Constant Angle Surfaces and curves in E^3 , *International Electr. J. of Geometry*, 2011, 4-1, 70 -78.
- Pottmann H., Wallner J., *Computational line geometry*, Springer-Verlag, Berlin, 2001.
- Spivak M., *Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, 2nd., Publish or Perish, Houston, 1979.
- Struik D.J., *Lectures on classical differential geometry* Dover Publications Inc., New York, 1961.
- Wang G., Tang K., Tai CH., Parametric representation of a surface pencil with common spatial geodesic, *Computer-Aided Design*, 2004, 36(5), 447–59

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad : Sedat KAHYAOĞLU

DoğumYeri : Gaziantep-1978

E-Posta : sedatkahyaoglu@hotmail.com

Lisans : Marmara Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik (2001)

Yüksek Lisans : Gaziantep Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik (2008)

Mesleki Deneyim: Milli Eğitim Bakanlığı, Matematik Öğretmeni (2001-2011)

Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Öğretim Görevlisi (2011-)