

EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

(YÜKSEK LİSANS TEZİ)

(A, k) TOPLANABİLME METODLARI İÇİN

TAUBER TİPİ TEOREMLER

Ferhat HASEKİLER

Tez Danışmanı : Doç. Dr. İbrahim ÇANAK

Matematik Anabilim Dalı

Bilim Dalı Kodu : 403.03.01

Sunuş Tarihi : 27.08.2013

Bornova-İZMİR

2013

Ferhat HASEKİLER tarafından YÜKSEK LİSANS tezi olarak sunulan “ (A, k) TOPLANABİLME METODLARI İÇİN TAUBER TİPİ TEOREMLER” başlıklı bu çalışma E.Ü. Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği ile E.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Eğitim ve Öğretim Yönergesi'nin ilgili hükümleri uyarınca tarafımızdan değerlendirilerek savunmaya değer bulunmuş ve 27.08.2013 tarihinde yapılan tez savunma sınavında aday oybirliği ile başarılı bulunmuştur.

Jüri Üyeleri:

İmza

Jüri Başkanı : Doç. Dr. İbrahim ÇANAK
Raportör Üye : Yrd. Doç. Dr. Tahsin ÖNER
Üye : Yrd. Doç. Dr. Yılmaz ERDEM

ÖZET **(A, k) TOPLANABİLME METODLARI İÇİN****TAUBER TİPİ TEOREMLER**

HASEKİLER, Ferhat

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. İbrahim ÇANAK

Ağustos 2013, 40 sayfa

Bu tezde, Karamata'nın temel teoremi ve sonucunun yardımıyla klasik Tauber teorisinde elde edilmiş sonuçların yeniden ispatlanması ve (A, k) toplanabilmeye genelleştirilmelerinin verilmesi amaçlanmıştır. Giriş bölümü ile birlikte beş bölümden oluşmaktadır.

İkinci bölümde, Tauber teorisi ile ilgili temel tanımlar ve bazı teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, kontrol modülü ılımlı salınımlı olan diziler için klasik Tauber teoremleri genelleştirilmiş ve sonuçları verilmiştir.

Dördüncü bölümde, kontrol modülü sınırlı olan diziler için klasik Tauber teoremleri genelleştirilmiş ve sonuçları verilmiştir.

Beşinci bölümde, alt dizisel Tauber teorisi tanıtılıp, bununla ilgili Tauber teoremleri verilmiştir.

Anahtar sözcükler: Tauber teoremleri, kontrol modülü, yavaş salınımlı diziler, ılımlı salınımlı diziler, alt dizisel yakınsak diziler.

ABSTRACT

TAUBERIAN THEOREMS

FOR (A, k) SUMMABILITY METHODS

HASEKİLER, Ferhat

MSc in Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. İbrahim ÇANAK

August 2013, 40 pages

In this thesis, it is aimed to prove once again the results obtained in the classical Tauberian theory by means of Karamata's Hauptsatz and its corollary and to generalize them to (A, k) summability. With the introduction, the thesis consists of five chapters.

In Chapter 2, basic definitions related to Tauberian theory and some theorems are given.

In Chapter 3, classical Tauberian Theorems are generalized for sequences whose control modulo is slowly oscillating and their corollaries are given.

In Chapter 4, classical Tauberian Theorems are generalized for sequences whose control modulo is bounded and their corollaries are given.

In Chapter 5, subsequential Tauberian Theory is introduced then Tauber Theorems related to it are given.

Keywords: Tauberian theorems, control modulo, slowly oscillating sequences, moderately oscillating sequences, subsequential convergent sequences.

TEŞEKKÜR

Bu tezi hazırlama sürecinde çalışmalarımda bilgi, görüş ve tecrübelerinden yararlandığım tez danışmanım Doç. Dr. İbrahim Çanak'a çok teşekkür ederim. Aynı zamanda yardımlarını ve yakın ilgisini esirgemeyen Yrd. Doç. Dr. Yılmaz Erdem'e ve bu süreçte yanımda olan arkadaşım Duygu Kebapcı'ya teşekkür ederim.

Beni daima destekleyen her zaman arkamda olduklarını hissettiren aileme ve tüm sevdiklerime yürekten teşekkür ederim.

Bu tez çalışması, "BİDEB-2210 Yurt İçi Yüksek Lisans Burs Programı" adı altında finansal olarak TÜBİTAK tarafından desteklenmiştir. Desteklerinden dolayı TÜBİTAK'a teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	v
ABSTRACT.....	vii
TEŞEKKÜR	ix
1. GİRİŞ	1
2. GENEL BİLGİLER	3
2.1 Tanım ve Gösterimler	3
2.2 Klasik Tauber Teorisinin Kısa Bir Özeti	10
3. Kontrol Modülü İlimli Salınlı Olan Diziler İçin Tauber Teorisi.....	14
3.1 Kontrol Modülü İlimli Salınlı Olan Diziler İçin Tauber Teoremleri	15
3.2 Kontrol Modülü İlimli Salınlı Olan Diziler İçin Tauber Teoremlerinin Sonuçları	18
4. Kontrol Modülü Sınırlı Olan Diziler İçin Tauber Teorisi	23
4.1 Kontrol Modülü Sınırlı Olan Diziler İçin Tauber Teoremleri.....	25
4.2 Kontrol Modülü Sınırlı Olan Diziler İçin Tauber Teoremlerinin Sonuçları.....	26

İÇİNDEKİLER(devam)

	<u>Sayfa</u>
5. Kontrol Modülü İlimli Salımlı Olan Diziler İçin Alt Dizisel Tauber Teorisi	30
5.1 Kontrol Modülü İlimli Salımlı Olan Diziler İçin Alt Dizisel Tauber Teoremleri	31
5.2 Kontrol Modülü İlimli Salımlı Olan Diziler İçin Tauber Teoremlerinin Sonuçları	33
KAYNAKLAR DİZİNİ.....	38
ÖZGEÇMİŞ	40

1. GİRİŞ

Klasik Tauber teorisi yakınsak dizi sınıfından daha geniş olan, Abel'in gerek koşulu olarak bilinen, (u_n) reel sayı dizisi olmak üzere

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$$

limitini sağlayan dizi sınıfından yakınsaklığın yeniden elde edilebilmesi için gerekli olan koşulları bulmak üzerine kurulmuştur. İlk olarak Tauber, A. (1897), kontrol modülünün üzerine konan koşul ile Abel'in gerek koşulunu sağlayan dizinin yakınsaklığını elde etmiştir. Daha sonra çalışmalar bu koşulun zayıflatılması üzerine yoğunlaşmıştır. Littlewood, J. E. (1910) ve Hardy, G. H. and Littlewood, J. E., (1914) kontrol modülo üzerine koydukları daha genel koşullar ile de yakınsaklığın elde edilebildiğini göstermiştir. Sonraları bu koşulların genelleştirilmesi sürecinde Schmidt, R. (1925) yavaş salınımlılık kavramını tanıtmış ve yakınsaklığın yeniden elde edilebilmesi için daha zayıf bir koşul inşa etmiştir. Fakat daha genel koşullar ile yakınsaklığa geçiş yaparken ispatlar gittikçe daha uzun ve karmaşık hale gelmiştir. Bunun üzerine Karamata, J. (1930) tarafından verilen teorem hem daha önce yapılan ispatları basitleştirmiş hem de genel koşullar bulmak için bir araç olmuştur. Karamata'nın teoremi yardımıyla Dik M. (2002), Stanojeviç, C. V. (1998) tarafından tanıtılan m . mertebeden kontrol modülo üzerine koşullar koymuş ve Tauber teoremleri elde etmiştir. Son zamanlarda Çanak, İ. and Totur, Ü., (2007), Çanak, İ. and Albayrak, M., (2007), Çanak, İ., Totur, Ü. and Dik, M., (2010a), Çanak, İ., (2011), Çanak, İ., Hasekiler, F. and Kebapçı, D., (2011) ve Çanak, İ., Totur, Ü. and Dik, M., (2011) bu koşulları (A, k) toplanabilmeye genişletmiş ve Tauber teoremlerinin bazı sonuçlarını elde etmiştir. Bölüm 3 ve Bölüm 4'te bu tip teoremlerden bahsedilecektir.

Tauber ile başlayan bu tip teoremlerde bazı koşullar ile Abel'in gerek koşulunun varlığından yakınsaklık elde edilememiştir. Dik, F. (2002) bu tip koşullar ile ilgilenmiş ve yakınsaklıktan daha genel olan alt dizisel yakınsaklık kavramını tanıtarak Karamata'nın teoremi yardımıyla teoremler ispatlamıştır. Bu tip teoremler Tauber teorisinin yeni bir çeşidi olan alt dizisel Tauber teorisini

oluşturmaktadır. Çanak, İ., Totur, Ü. and Dik, M. (2010b) ve anak, İ. (2011) Abel yakınsaklık için olan alt dizisel Tauber teorisini (A, k) toplanabilmeye genişletilmesi ile ilgili çalışmalar yapmışlardır. Son bۆlüm olan Bۆlüm 5'te bu çalışmalar hakkında bilgi verilmiştir.

2. GENEL BİLGİLER

2.1 Tanım ve Gösterimler

Klasik Tauber teorisinde yakınsaklığın yeniden elde edilmesi problemi Abel'in gerek koşulu olarak bilinen (u_n) reel sayı dizisi olmak üzere

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$$

limitinin mevcut olması ve (u_n) dizisi üzerine konulan bazı koşullarla

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$$

eşitliğinin ispatlanmasına indirgenir. Her yakınsak dizi aynı zamanda Abel'in gerek koşulunu gerçekler. Fakat tersi doğru değildir.

Örneğin

$$(u_n) = \left(\sum_{k=0}^n (-1)^k \right)$$

dizisi Abel'in gerek koşulunu gerçekler ama yakınsak değildir. O halde Abel'in gerek koşulunu gerçekleyen dizilerin sınıfı yakınsak olan dizilerin sınıfından daha geniştir.

Daha geniş dizi sınıfından yakınsaklığa geçiş için $u = (u_n)$ dizisi üzerine konulan koşullara Tauber koşulları, bu koşulları içeren teoremlere de Tauber teoremleri denir. Tez boyunca kullanılacak tanım ve gösterimler aşağıdaki gibi verilebilir.

Tanım 2.1.1 m pozitif tamsayı ve n doğal sayı olmak üzere

$$\sigma_n^{(m)}(u) = \begin{cases} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \sigma_k^{(m-1)}(u) & , m \geq 1 \\ u_n & , m = 0 \end{cases}$$

dizisine (u_n) dizisinin m . mertebeden aritmetik ortalama dizisi denir.

Tanım 2.1.2 m pozitif tamsayı, n doğal sayı ve

$$\Delta u_n = \begin{cases} u_n - u_{n-1} & , n \geq 1 \\ u_0 & , n = 0 \end{cases}$$

olmak üzere

$$V_n^{(m)}(\Delta u) = \begin{cases} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n V_k^{(m-1)}(\Delta u) & , m \geq 1 \\ \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n k \Delta u_k & , m = 0 \end{cases}$$

dizisine (u_n) dizisinin m . mertebeden üreteç dizisi denir. Burada özel olarak, $(V_n^{(0)}(\Delta u))$ dizisine (u_n) dizisinin üreteç dizisi denir.

Eşitlik 2.1.3 (u_n) reel sayıların bir dizisi olmak üzere

$$u_n - \sigma_n^{(1)}(u) = V_n^{(0)}(\Delta u)$$

eşitliği vardır ve bu eşitliğe (u_n) dizisi için Kronecker eşitliği denir.

İspat u_n yerine eşiti olan $\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \Delta(k+1) u_k$ ifadesi yazılırsa

$$\begin{aligned} u_n - \sigma_n^{(1)}(u) &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \Delta(k+1) u_k - \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (k+1) u_k - k u_{k-1} - \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n k u_k - k u_{k-1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n k \Delta u_k \\ &= V_n^{(0)}(\Delta u) \end{aligned}$$

Eşitlik 2.1.4 (u_n) reel sayıların bir dizisi olmak üzere

$$n \Delta \sigma_n^{(1)}(u) = \sigma_n^{(1)}(n \Delta u)$$

dir.

İspat

$$\begin{aligned}
n\Delta\sigma_n^{(1)}(u) &= n\left(\sigma_n^{(1)}(u) - \sigma_{n-1}^{(1)}(u)\right) \\
&= \left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^n u_k - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k\right) \\
&= \frac{n}{n+1}\sum_{k=0}^n u_k - \sum_{k=0}^{n-1} u_k \\
&= \frac{n}{n+1}\sum_{k=0}^n u_k - \sum_{k=0}^n u_k + u_n \\
&= -\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^n u_k + u_n \\
&= -\sigma_n^{(1)}(u) + u_n \\
&= V_n^{(0)}(\Delta u) \\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^n k\Delta u_k \\
&= \sigma_n^{(1)}(n\Delta u)
\end{aligned}$$

dir.

Burada $n\Delta\sigma_n^{(1)}(u) = \sigma_n^{(1)}(n\Delta u) = V_n^{(0)}(\Delta u)$ eşitliği de görülür. Ayrıca m ile k doğal sayı ve

$$(n\Delta)_k u_n = \begin{cases} (n\Delta)_{k-1} n\Delta u & , k \geq 1 \\ u_n & , k = 0 \end{cases}$$

olmak üzere

$$(n\Delta)_k \sigma_n^{(m)}(u) = \sigma_n^{(m)}((n\Delta)_k u)$$

eşitliği elde edilir.

Eşitlik 2.1.5 (u_n) reel sayıların bir dizisi olmak üzere;

$$\sigma_n^{(1)}\left(V^{(0)}(\Delta u)\right) = V_n^{(0)}(\Delta\sigma^{(1)}(u))$$

dir.

İspat Eşitlik 2.1.4 kullanılırsa

$$\sigma_n^{(1)} \left(V^{(0)}(\Delta u) \right) = \sigma_n^{(1)} \left(n\Delta\sigma_n^{(1)}(u) \right) = V_n^{(0)}(\Delta\sigma^{(1)}(u))$$

elde edilir.

Eşitlik 2.1.6 (u_n) reel sayıların bir dizisi olmak üzere

$$n\Delta V_n^{(0)}(\Delta u) = V_n^{(0)}(\Delta(n\Delta u))$$

dir.

İspat Kronecker eşitliği ve Eşitlik 2.1.4 kullanılırsa

$$\begin{aligned} n\Delta V_n^{(0)}(\Delta u) &= n\Delta \left(u - \sigma^{(1)}(u) \right) = n\Delta u_n - n\Delta\sigma_n^{(1)}(u) \\ &= n\Delta u_n - \sigma_n^{(1)}(n\Delta u) = V_n^{(0)}(\Delta(n\Delta u)) \end{aligned}$$

dir.

Tanım 2.1.7 (u_n) reel sayıların bir dizisi olmak üzere

$$\left(\omega_n^{(0)}(u) \right) = (n\Delta u_n)$$

dizisine (u_n) dizisinin klasik kontrol modülü denir.

$m \geq 1$ tamsayısı için

$$\omega_n^{(m)}(u) = \omega_n^{(m-1)}(u) - \sigma_n^{(1)} \left(\omega^{(m-1)}(u) \right)$$

şeklinde tanımlanan $\left(\omega_n^{(m)}(u) \right)$ dizisine de (u_n) dizisinin m . mertebeden kontrol modülü denir. Ayrıca Kronecker eşitliğinden

$$\omega_n^{(m)}(u) = V_n^{(0)} \left(\omega^{(m-1)}(u) \right)$$

elde edilir.

Eşitlik 2.1.8 (u_n) reel sayıların bir dizisi olmak üzere

$$\sigma_n^{(1)} \left(\omega^{(0)}(u) \right) = \omega_n^{(0)} \left(\sigma^{(1)}(u) \right)$$

dir.

İspat Eşitlik $\omega_n^{(0)}(u) = n\Delta u_n$ olduğundan Eşitlik 2.1.4'e eşit olur. Ayrıca Eşitlik 2.1.5 kullanılırsa m ile k doğal sayı olmak üzere

$$\sigma_n^{(k)}(\omega_n^{(m)}(u)) = \omega_n^{(m)}(\sigma_n^{(k)}(u))$$

eşitliği elde edilir.

Eşitlik 2.1.9 (u_n) reel sayıların bir dizisi ve $m \geq 1$ tamsayı olmak üzere

$$\omega_n^{(m)}(u) = (n\Delta)_m V_n^{(m-1)}(\Delta u)$$

dir.

İspat $m = 1$ için $\omega_n^{(1)}(u) = V_n^{(0)}(\Delta(n\Delta u)) = n\Delta V_n^{(0)}(\Delta u)$

m için doğru iken $m + 1$ için doğru mudur?

$\omega_n^{(m)}(u) = (n\Delta)_m V_n^{(m-1)}(\Delta u)$ olsun.

$$\begin{aligned} \omega_n^{(m+1)}(u) &= V_n^{(0)}(\Delta \omega_n^{(m)}(u)) \\ &= V_n^{(0)}(\Delta (n\Delta)_m V_n^{(m-1)}(\Delta u)) \\ &= (n\Delta) \sigma_n^{(1)}((n\Delta)_m V_n^{(m-1)}(\Delta u)) \\ &= (n\Delta)_{m+1} \sigma_n^{(1)}(V_n^{(m-1)}(\Delta u)) \\ &= (n\Delta)_m V_n^{(m)}(\Delta u) \end{aligned}$$

Tanım 2.1.10 (u_n) reel sayıların bir dizisi olmak üzere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n^{(1)}(u)$$

limiti mevcut ve s ye eşit ise (u_n) dizisine s ye Cesàro toplanabilir denir ve kısaca

$$u_n \rightarrow s (C, 1)$$

ile gösterilir.

Tanım 2.1.11 (u_n) reel sayıların bir dizisi olmak üzere; k doğal sayısı için

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n^{(k)}(u) x^n$$

limiti mevcut ve s ye eşit ise (u_n) dizisine s ye (A, k) toplanabilir denir ve kısaca

$$u_n \rightarrow s(A, k)$$

ile gösterilir. Burada $k = 0$ olması durumunda limit Abel'in gerek koşuluna dönüşür. Ayrıca $u_n \rightarrow s(A, 0)$ olması k doğal sayısı için $u_n \rightarrow s(A, k)$ olmasını gerektirir.

Bu tezde bundan sonraki kısımlarda, $u_n = o(1)$ ile (u_n) dizisinin sıfıra yakınsak olması, $u_n = O(1)$ ile de (u_n) dizisinin sınırlı olması ifade edilecektir.

Tanım 2.1.12 (u_n) reel sayıların bir dizisi olmak üzere;

$$u_n - u_m = o(1), \quad \frac{n}{m} \rightarrow 1$$

ise (u_n) dizisine yavaş salınımlı bir dizi denir. Schmidt R. (1925) tarafından verilen bu tanım bazı ispatlara uygun olmadığından Stanojevic C. V. nin (1998) vermiş olduğu aşağıdaki tanım kullanılacaktır.

Tanım 2.1.13 (u_n) reel sayıların bir dizisi olmak üzere;

$$\lim_{\lambda \rightarrow 1^+} \overline{\lim}_n \max_{n+1 \leq k \leq \llbracket \lambda n \rrbracket} \left| \sum_{j=n+1}^k \Delta u_j \right| = 0$$

ise (u_n) dizisine yavaş salınımlı bir dizi denir.

Yavaş salınımlı dizilerin sınıfı yakınsak olan dizilerin sınıfını kapsar.

$(u_n) = (\log n)$ dizisi yavaş salınımlı olup yakınsak olmayan dizilere bir örnektir.

Gerçekten,

$$\sum_{j=n+1}^k \Delta \log j = \sum_{j=n+1}^k \log \frac{j}{j-1} = \log \prod_{j=n+1}^k \frac{j}{j-1} = \log \frac{k}{n}$$

dir. Buradan tanımı uygularsak, $\lambda_n = \llbracket \lambda n \rrbracket$ olmak üzere $\max_{n+1 \leq k \leq \lambda_n} \log \frac{k}{n} = \log \frac{\lambda_n}{n}$

bulunur. Önce $n \rightarrow \infty$ için üst limit ve $\lambda \rightarrow 1^+$ için limit alındığında tanımı sağladığı görülür. Bu örneğin Schmidt R. nin (1925) yavaş salınımlılık tanımını sağladığı da kolayca gösterilebilir.

(u_n) dizisinin yavaş salınımlı olması için gerek ve yeter koşulun (u_n) dizisinin üreticinin yavaş salınımlı ve sınırlı olması olduğu Dik, M., (2002) tarafından ispatlandı. Dolayısıyla, Kronecker eşitliğinden (u_n) dizisinin aritmetik ortalama dizisi de yavaş salınımlıdır.

Yavaş salınımlıktan daha genel olan ılımlı salınımlılık aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

Tanım 2.1.14 $\lambda > 1$ için,

$$\overline{\lim}_n \max_{n+1 \leq k \leq \llbracket \lambda n \rrbracket} \left| \sum_{j=n+1}^k \Delta u_j \right| < \infty$$

ise (u_n) dizisine ılımlı salınımlı bir dizi denir.

İlimli salınımlı olup yavaş salınımlı olmayan bir dizi olarak

$$u_n = \begin{cases} 1 & , k = 2^n, n = 1, 2, \dots \\ -1 & , k = 2^n + 1, n = 1, 2, \dots \\ 0 & , \text{diğer} \end{cases}$$

dizisi verilebilir.

(u_n) dizisi ılımlı salınımlı bir dizi ise (u_n) dizisinin üretici ılımlı salınımlıdır ve aritmetik ortalama dizisi yavaş salınımlıdır.

2.2 Klasik Tauber Teorisinin Kısa Bir Özeti

Klasik Tauber teoremlerinde dizilerin salınım davranışlarını ya da sınırlılık modlarını kısıtlayan bazı araçlardan yararlanarak Abel'in gerek koşulu sağlayan dizilerin sınıfından tekrar yakınsak diziler elde edilir. İlk olarak Tauber, A. (1897), (u_n) dizisi Abel'in gerek koşulunu sağladığında ve $\omega_n^{(0)}(u) = n\Delta u_n = o(1)$ olduğunda yakınsaklığın sağlandığını göstermiştir. Gerçekten,

$$N(x) \rightarrow \infty \text{ için } \sum_{n=0}^{\infty} \Delta u_n x^n - \sum_{n=0}^{N(x)} \Delta u_n = o(1), x \rightarrow 1^-$$

eşitliğini sağlayan bir $N(x)$ pozitif tamsayısı seçilsin. $n\Delta u_n = o(1)$ olduğundan $\varepsilon > 0$ verildiğinde $n \geq n_0(\varepsilon)$ için $n|\Delta u_n| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0(\varepsilon)$ tamsayısı vardır.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Delta u_n x^n - \sum_{n=0}^{N(x)} \Delta u_n = o(1), \quad x \rightarrow 1^-$$

eşitliğinde sol tarafı tekrar düzenlersek

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \Delta u_n x^n - \sum_{n=0}^{N(x)} \Delta u_n &= \sum_{n=0}^{N(x)} \Delta u_n x^n + \sum_{n=N(x)+1}^{\infty} \Delta u_n x^n - \sum_{n=0}^{N(x)} \Delta u_n \\ &= \sum_{n=N(x)+1}^{\infty} \Delta u_n x^n - \sum_{n=0}^{N(x)} \Delta u_n (1 - x^n) \\ &= S_1 - S_2 \end{aligned}$$

olur.

$$|S_1| \leq \sum_{n=N(x)+1}^{\infty} |\Delta u_n| x^n < \varepsilon \sum_{n=N(x)+1}^{\infty} \frac{x^n}{n} < \varepsilon \frac{1}{N(x)+1} \left(\frac{1}{1-x} \right) < \varepsilon$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
|S_2| &\leq \sum_{n=0}^{N(x)} |\Delta u_n| (1 - x^n) \\
&\leq (1 - x) \sum_{n=0}^{N(x)} n |\Delta u_n| \\
&= \frac{1}{\left[\frac{1}{1-x} \right]} \sum_{n=0}^{N(x)} n |\Delta u_n| \\
&= \frac{1}{N(x)} \sum_{n=0}^{N(x)} n |\Delta u_n| \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

bulunur. Böylelikle $\omega_n^{(0)}(u) = n\Delta u_n = o(1)$ koşulunun Tauber koşulu olduğu ispatlanmış olur. Farklı ispatlar için Szász, O. (1944), Hardy, G. H. (1949), Postnikov, A. G. (1980) ve Korevaar, J. (2004) e bakılabilir.

Tauber daha sonra $\omega_n^{(0)}(u) = n\Delta u_n = o(1)$ koşulunu daha zayıf olan $V_n^{(0)}(\Delta u) = o(1)$ koşulu ile değiştirerek aşağıdaki teoremi elde etmiştir.

Teorem 2.2.1 (u_n) reel sayıların bir dizisi olsun. Eğer $u_n \rightarrow s(A, 0)$ ve $V_n^{(0)}(\Delta u) = o(1)$ ise $u_n \rightarrow s$ elde edilir.

Bundan sonra Abel'in gerek koşulunun varlığından yakınsaklığı elde edebilmek için daha zayıf koşullar bulmaya doğru giden bir dönem açılmıştır ve $\omega_n^{(0)}(u) = n\Delta u_n = o(1)$ koşulunun önemli bir genelleştirilmesi Littlewood, J. E. (1910) tarafından verilmiştir.

Teorem 2.2.2 (u_n) reel sayıların bir dizisi olsun. Eğer $u_n \rightarrow s(A, 0)$ ve

$\omega_n^{(0)}(u) = n\Delta u_n = O(1)$ ise $u_n \rightarrow s$ elde edilir.

Daha sonraları böyle araçlar bulmak, hatta bunların çalıştığını göstermek oldukça zorlaşmıştır.

İlk kısımda verilen Schmidt, R. nin (1925) yavaş salınımlılık tanımını sağlayan diziler $u_n \rightarrow s(A, 0)$ dan yakınsaklığı yeniden elde etmeyi sağlamaktadır.

Teorem 2.2.3 (u_n) reel sayıların bir dizisi olsun. Eğer $u_n \rightarrow s(A, 0)$ ve (u_n) yavaş salınımlı bir dizi ise $u_n \rightarrow s$ elde edilir.

Tek taraflı sınırlılığın tanımı Landau, E., (1910) tarafından verilmiştir.

Tanım 2.2.4 (u_n) reel sayıların bir dizisi olsun. Negatif olmayan her n tamsayısı ve bir $C \geq 0$ için $u_n \geq -C$ ise (u_n) dizisine soldan tek taraflı sınırlı bir dizi denir.

Landau, E., (1910), Littlewood J. E., (1910) un vermiş olduğu $n\Delta u_n = O(1)$ koşulunun genelleştirilmiş hali olan tek taraflı sınırlı olma koşulunun da bir Tauber koşulu olduğunu ispatlamıştır.

Teorem 2.2.5 (u_n) reel sayıların bir dizisi olsun. Eğer $\sigma_n^{(1)}(u) \rightarrow s$ ve negatif olmayan her n tamsayısı ve bir $C \geq 0$ için $n\Delta u_n \geq -C$ ise $u_n \rightarrow s$ elde edilir.

Hardy, G. H. and Littlewood J. E., (1914) daha sonra yukarıdaki teoremin genelleştirilmiş halini vermiştir.

Teorem 2.2.6 (u_n) reel sayıların bir dizisi olsun. Eğer $u_n \rightarrow s (A, 0)$ ve negatif olmayan her n tamsayısı ve bir $C \geq 0$ için $n\Delta u_n \geq -C$ ise $u_n \rightarrow s$ elde edilir.

Yukarıda verilen Teorem 2.2.3, Teorem 2.2.5 ve Teorem 2.2.6'nin ispatı Karamata'nın usta tekniğine kadar çok karmaşıktı. Karamata'nın temel teoreminin sonucu sadece daha önceki sonuçların ispatlarının basite indirgenmesi için değil, daha önemlisi (u_n) dizisinin salınım davranışlarının genel kontrol modülösunu gerektiren Tauber teoremlerini elde etmek için yeni bir alan açmıştır.

Teorem 2.2.7 (Karamata, J., 1930) (u_n) reel sayıların bir dizisi olsun. Eğer

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n = A$$

ve negatif olmayan her n tamsayısı ve bir $C \geq 0$ için $u_n \geq -C$ ise $(0,1)$ açık aralığındaki Riemann integrallenebilir her g fonksiyonu için,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} u_n g(x^n) x^n = A \int_0^1 g$$

dir.

İspat. $\alpha \geq 0$ olsun. $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$ limitinde x yerine $x^{1+\alpha}$ yazılırsa,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^{an} x^n = \frac{A}{1+a}$$

elde edilir. Sonuç olarak (0,1) açık aralığında her P polinomu için

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} u_n P(x^n) x^n = A \int_0^1 P$$

olur. (0,1) açık aralığındaki Riemann integrallenebilir her g fonksiyonu ve her $\varepsilon > 0$ için (0,1) açık aralığında $p \leq g \leq P$ ve $\int_0^1 (P-p) \leq \varepsilon$ olacak şekilde p ve P polinomları vardır. Buradan istenen sonuç elde edilir. (0,1) açık aralığındaki Riemann integrallenebilir fonksiyonların sınıfı olan $R(0,1)$ uzayına göre $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$ limitinin parametrik formu olan

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} u_n g(x^n) x^n = A \int_0^1 g$$

ifadesinde g fonksiyonunun uygun seçilmesiyle birçok olanak sağlanır. Örneğin,

$$x = e^{-\frac{1}{n}} \text{ ve } g(t) = \begin{cases} 0 & , 0 \leq t \leq e^{-1} \\ \frac{1}{t} & e^{-1} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

seçilirse Karamata'nın temel teoreminin aşağıdaki özel ve önemli bir sonucu elde edilir.

Teorem 2.2.8 (Karamata'nın Temel Teoreminin Sonucu) (u_n) reel sayıların bir dizisi olsun. Eğer $u_n \rightarrow s (A, 0)$ ve negatif olmayan her n tamsayısı ve bir $C \geq 0$ için $u_n \geq -C$ ise $\sigma_n^{(1)}(u) \rightarrow s$ elde edilir.

Klasik Tauber teorisinin önemli sonuçları Karamata'nın temel teoreminin örnekleri olarak verilebilir.

3. KONTROL MODÜLOLARI İLİMLİ SALINIMLI OLAN DİZİLER İÇİN TAUBER TEORİSİ

Teorem 3.1 $u_n \rightarrow s (A, 0)$ olsun. Eğer $m \geq 0$ tamsayısı için $(\sigma_n^{(1)}(\omega^{(m)}(u)))$ dizisi yavaş salınımlı ise $u_n \rightarrow s$ dir.

Yavaş salınımlı bir dizinin aritmetik ortalaması da yavaş salınımlı olduğundan aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 3.2 $u_n \rightarrow s (A, 0)$ olsun. Eğer $m \geq 0$ tamsayısı için $(\omega_n^{(m)}(u))$ dizisi yavaş salınımlı ise $u_n \rightarrow s$ dir.

3.1 Bölümünde kontrol modülleri ılımlı salınımlı olan reel sayı dizilerinin Abel yakınsaklık için Tauber koşulu olması $k \geq 0$ için (A, k) toplanabilmeye genişletilecektir. 3.2 Bölümünde de bu genişlemenin sonuçları verilecektir.

Bu ve daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan lemma aşağıda verilmiştir. Lemmanın ispatı için Çanak, İ. and Totur, Ü. (2007) incelenebilir.

Lemma 3.3 $m \geq 0$ tamsayısı ve negatif olmayan her n tamsayısı için

$$\omega_n^{(m+1)}(u) = \sum_{j=0}^m (-1)^j \binom{m}{j} n \Delta V_n^{(j)}(\Delta u)$$

dir. Burada $\binom{m}{j} = \frac{(m)!}{(m-j)!j!}$ dir.

3.1 KONTROL MODÜLÖLARI İLİMLİ SALINIMLI OLAN DİZİLER İÇİN TAUBER TEOREMLERİ

Teorem 3.1.1 $k \geq 0$ tamsayısı için $u_n \rightarrow s(A, k)$ olsun. Eğer $m \geq 0$ tamsayısı için $(\omega_n^{(m)}(u))$ dizisi $(C, 1)$ yavaş salınımlı ise $u_n \rightarrow s$ dir.

İspat Eğer $(\omega_n^{(m)}(u))$ dizisi $(C, 1)$ yavaş salınımlı ise $(\sigma_n^{(1)}(\omega_n^{(m)}(u)))$ dizisi yavaş salınımlıdır.

$$\sigma_n^{(1)}(\omega_n^{(m)}(u)) = \omega_n^{(m)}(\sigma^{(1)}(u))$$

olduğundan $(\omega_n^{(m)}(\sigma^{(1)}(u)))$ dizisi yavaş salınımlıdır. Yavaş salınımlı bir dizinin aritmetik ortalaması da yavaş salınımlı olduğu ve Eşitlik 2.1.8 kullanılırsa

$$j = 1, 2, \dots, k \text{ için } \left(\sigma_n^{(1)}(\omega_n^{(m)}(\sigma^{(j)}(u))) \right)$$

dizisinin yavaş salınımlı olduğu elde edilir.

Ayrıca $u_n \rightarrow s(A, k)$ olması $\sigma_n^{(k)}(u) \rightarrow s(A, 0)$ olmasına denk olduğundan, $j = k$ için $(\sigma_n^{(1)}(\omega_n^{(m)}(\sigma^{(j)}(u))))$ dizisinin yavaş salınımlı olduğu kullanılırsa Teorem 3.1 den

$$(\sigma_n^{(k)}(u)) \rightarrow s$$

elde edilir. Bu $(\sigma_n^{(k-1)}(u))$ dizisinin s ye Cesàro toplanabilir olması demektir.

Her Cesàro yakınsak dizi Abel yakınsak olduğundan $(\sigma_n^{(k-1)}(u))$ dizisi s ye Abel yakınsaktır. Yani

$$(\sigma_n^{(k-1)}(u)) \rightarrow s(A, 0)$$

dir. Benzer şekilde $j = k - 1, \dots, 2, 1$ için $(\sigma_n^{(1)}(\omega_n^{(m)}(\sigma^{(j)}(u))))$ dizisinin yavaş salınımlı olduğu kullanılırsa Teorem 3.1 den

$$u_n \rightarrow s(A, 0)$$

elde edilir. $(\omega_n^{(m)}(u))$ dizisi $(C, 1)$ yavaş salınımlı olduğundan Teorem 3.1 den

$$u_n \rightarrow s$$

elde edilir.

İlimli salınımlı bir dizinin aritmetik ortalaması yavaş salınımlı olduğundan aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 3.1.2 $k \geq 0$ tamsayısı için $u_n \rightarrow s(A, k)$ olsun. Eğer $m \geq 0$ tamsayısı için $(\omega_n^{(m)}(u))$ dizisi ilimli salınımlı ise $u_n \rightarrow s$ dir.

Yavaş salınımlı bir dizi aynı zamanda ilimli salınımlı olduğundan aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 3.1.3 $k \geq 0$ tamsayısı için $u_n \rightarrow s(A, k)$ olsun. Eğer $m \geq 0$ tamsayısı için $(\omega_n^{(m)}(u))$ dizisi yavaş salınımlı ise $u_n \rightarrow s$ dir.

Teorem 3.1.4 $k \geq 0$ tamsayısı için $u_n \rightarrow s(A, k)$ olsun. Eğer $m \geq 0$ tamsayısı için $(\omega_n^{(m)}(u))$ dizisi $(C, 1)$ ilimli salınımlı ise (u_n) dizisi sınırlıdır.

İspat Eğer $(\omega_n^{(m)}(u))$ dizisi $(C, 1)$ ilimli salınımlı ise $(\sigma_n^{(1)}(\omega^{(m)}(u)))$ dizisi ilimli salınımlıdır. İlimli salınımlı bir dizinin aritmetik ortalaması yavaş salınımlı olduğundan $(\sigma_n^{(2)}(\omega^{(m)}(u)))$ dizisi yavaş salınımlıdır. Yani $(\sigma_n^{(1)}(\omega^{(m)}(u)))$ dizisi $(C, 1)$ yavaş salınımlıdır. Eşitlik 2.1.8 8'den

$$\sigma_n^{(1)}(\omega^{(m)}(u)) = \omega_n^{(m)}(\sigma^{(1)}(u))$$

olduğundan da $(\omega_n^{(m)}(\sigma^{(1)}(u)))$ dizisi $(C, 1)$ yavaş salınımlıdır. Ayrıca $u_n \rightarrow s(A, k)$ olması $\sigma_n^{(1)}(u) \rightarrow s(A, k-1)$ olmasına denk olduğu kullanılırsa Teorem 3.1.1 den

$$\sigma_n^{(1)}(u) \rightarrow s$$

elde edilir.

İlimli salınımlı bir dizinin üretici sınırlı olduğundan ilimli salınımlı olan $(\sigma_n^{(1)}(\omega^{(m)}(u)))$ dizisinin üretici de sınırlıdır. Yani

$$\left(V_n^{(0)} \left(\Delta \sigma^{(1)} \left(\omega^{(m)}(u) \right) \right) \right)$$

dizisi sınırlıdır. Eşitlik 2.1.8 kullanılırsa

$$\left(V_n^{(0)} \left(\Delta \sigma^{(1)} \left(\omega^{(m)}(u) \right) \right) \right) = \left(V_n^{(0)} \left(\Delta \omega^{(m)} \left(\sigma^{(1)}(u) \right) \right) \right) = \left(\omega_n^{(m+1)} \left(\sigma^{(1)}(u) \right) \right)$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\left(\omega_n^{(m+1)} \left(\sigma^{(1)}(u) \right) \right)$$

dizisinin sınırlı olduğu elde edilir. Lemma 3.3 den

$$\omega_n^{(m+1)} \left(\sigma^{(1)}(u) \right) = \sum_{j=0}^m (-1)^j \binom{m}{j} n \Delta V_n^{(j+1)}(\Delta u) = O(1) \quad (3.1)$$

elde edilir.

$\sigma_n^{(1)}(u) \rightarrow s$ ve yakınsak bir dizinin üreteç dizisi sıfıra yakınsak olduğu kullanılırsa

$$V_n^{(0)} \left(\Delta \sigma^{(1)}(u) \right) = V_n^{(1)}(\Delta u) \rightarrow 0$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$V_n^{(0)} \left(\Delta V^{(1)}(\Delta u) \right) = n \Delta V_n^{(2)}(\Delta u) \rightarrow 0$$

elde edilir. Sıfıra yakınsak bir dizinin aritmetik ortalamaları da sıfıra yakınsak olduğu ve Eşitlik 2.1.4 kullanılırsa

$$j = 1, 2, \dots, m \quad \text{için} \quad n \Delta V_n^{(j+1)}(\Delta u) \rightarrow 0$$

elde edilir. Böylece (3.1) den

$$\left(n \Delta V_n^{(1)}(\Delta u) \right)$$

dizisinin sınırlı olduğu elde edilir. Ayrıca $V_n^{(1)}(\Delta u) \rightarrow 0$ olduğundan ve $\left(V_n^{(0)}(\Delta u) \right)$ dizisi için Kronecker Eşitliği olan

$$n \Delta V_n^{(1)}(\Delta u) = V_n^{(0)}(\Delta u) - V_n^{(1)}(\Delta u)$$

eşitliğinden

$$\left(V_n^{(0)}(\Delta u) \right)$$

dizisinin sınırlı olduğu elde edilir. $\sigma_n^{(1)}(u) \rightarrow s$ olduğundan ve (u_n) dizisi için Kronecker Eşitliği olan

$$u_n - \sigma_n^{(1)}(u) = V_n^{(0)}(\Delta u)$$

eşitliğinden (u_n) dizisinin sınırlı olduğu elde edilir.

3.2. KONTROL MODÜLOLARI İLİMLİ SALINIMLI OLAN DİZİLER İÇİN TAUBER TEOREMLERİNİN SONUÇLARI

$\alpha = (\alpha_n)$ herhangi bir reel sayı dizisi olmak üzere $\mu = (\mu_n)$ dizisini

$$\mu_n = (n + 1)\alpha_n$$

şeklinde tanımlayalım.

Şimdi bir sonraki bölümde kullanacağımız bazı önemli sonuçlar ispatlanacaktır.

Lemma 3.2.1 $\Delta\mu = (\Delta\mu_n)$ dizisinin üretici $\omega^{(0)}(\alpha) = (\omega_n^{(0)}(\alpha))$ dizisidir.

İspat $\mu_n = (n + 1)\alpha_n$ olduğundan

$$\Delta\mu_n = (n + 1)\alpha_n - n\alpha_{n-1} = n\alpha_n - n\alpha_{n-1} + \alpha_n = n\Delta\alpha_n + \alpha_n$$

dir. Ayrıca $(\Delta\mu_n)$ dizisinin aritmetik ortalaması da Eşitlik 2.1.4 den

$$\sigma_n^{(1)}(\Delta\mu) = \sigma_n^{(1)}(n\Delta\alpha + \alpha) = \sigma_n^{(1)}(n\Delta\alpha) + \sigma_n^{(1)}(\alpha) = V_n^{(0)}(\Delta\alpha) + \sigma_n^{(1)}(\alpha) = \alpha_n$$

dir. $(\Delta\mu_n)$ dizisi için Kronecker Eşitliği olan

$$V_n^{(0)}(\Delta^2\mu) = \Delta\mu_n - \sigma_n^{(1)}(\Delta\mu)$$

eşitliği kullanılırsa

$$V_n^{(0)}(\Delta^2\mu) = n\Delta\alpha_n + \alpha_n - \alpha_n = n\Delta\alpha_n = \omega_n^{(0)}(\alpha)$$

elde edilir.

Lemma 3.2.2 $x = (x_n)$ dizisinin üretici $(\Delta\mu_n)$ ise $\sigma^{(1)}(x) = (\sigma_n^{(1)}(x))$ dizisinin üretici $\alpha = (\alpha_n)$ dizisidir.

İspat Eşitlik 2.1.5 kullanılırsa

$$V_n^{(0)}(\Delta\sigma^{(1)}(x)) = \sigma_n^{(1)}(V^{(0)}(\Delta x))$$

dir. $V_n^{(0)}(\Delta x) = \Delta\mu_n$ ve $\sigma_n^{(1)}(\Delta\mu) = \alpha_n$ olduğundan

$$V_n^{(0)}(\Delta\sigma^{(1)}(x)) = \sigma_n^{(1)}(V^{(0)}(\Delta x)) = \sigma_n^{(1)}(\Delta\mu) = \alpha_n$$

elde edilir.

Bu bölümde (α_n) dizisini, (u_n) dizisinin kontrol modülosu olan $m \geq 0$ tamsayısı için $(\omega_n^{(m)}(u))$ dizisi olarak alınacaktır.

Teorem 3.2.3 $k \geq 0$ tamsayısı için $u_n \rightarrow s(A, k)$ olsun. Eğer $(\Delta\mu_n)$ dizisinin üretici ılımlı salınımlı ise $u_n \rightarrow s$ dir.

İspat $(\Delta\mu_n)$ dizisinin üretici Lemma 3.2.1 den

$$V_n^{(0)}(\Delta^2\mu) = n\Delta\omega_n^{(m)}(u) = \omega_n^{(0)}(\omega^{(m)}(u))$$

olduğundan $(\omega_n^{(0)}(\omega^{(m)}(u)))$ dizisi ılımlı salınımlıdır. ılımlı salınımlı bir dizinin aritmetik ortalaması yavaş salınımlı olduğundan

$$\left(\sigma_n^{(1)}(\omega^{(0)}(\omega^{(m)}(u)))\right) = \left(V_n^{(0)}(\Delta\omega^{(m)}(u))\right) = \left(\omega_n^{(m+1)}(u)\right)$$

dizisi yavaş salınımlıdır. Yavaş salınımlı bir dizinin aritmetik ortalaması da yavaş salınımlı olduğundan $(\omega_n^{(m+1)}(u))$ dizisi $(C, 1)$ yavaş salınımlıdır. $u_n \rightarrow s(A, k)$ olduğu kullanılırsa Teorem 3.1.1 den

$$u_n \rightarrow s$$

elde edilir.

Sonuç 3.2.4 $k \geq 0$ tamsayısı için $u_n \rightarrow s(A, k)$ olsun. Eğer üretici $(\Delta\mu)$ olan dizi ılımlı salınımlı ise $u_n \rightarrow s$ dir.

İspat Üretici $(\Delta\mu)$ olan dizi ılımlı salınımlı ve ılımlı salınımlı bir dizinin üretici ılımlı salınımlı olduğundan $(\Delta\mu)$ dizisi ve benzer şekilde $(\Delta\mu)$ dizisinin üretici ılımlı salınımlıdır. Teorem 3.2.3 den

$$u_n \rightarrow s$$

elde edilir.

Sonuç 3.2.5 $k \geq 0$ tamsayısı için $u_n \rightarrow s(A, k)$ olsun. Eğer üretici $(V_n^{(0)}(\Delta^2\mu))$ olan dizi ılımlı salınımlı ise $u_n \rightarrow s$ dir.

İspat Üretici $(V_n^{(0)}(\Delta^2\mu))$ olan dizi yani $(\Delta\mu_n)$ dizisi ılımlı salınımlı ve ılımlı salınımlı bir dizinin üretici ılımlı salınımlı olduğundan $(\Delta\mu_n)$ dizisinin üretici ılımlı salınımlıdır. Teorem 3.2.3 den

$$u_n \rightarrow s$$

elde edilir.

Teorem 3.2.6 $k \geq 0$ tamsayısı için $u_n \rightarrow s(A, k)$ olsun. Eğer $(\sigma_n^{(1)}(\Delta\mu))$ dizisinin üretici ılımlı salınımlı ise $u_n \rightarrow s$ dir.

İspat $(\sigma_n^{(1)}(\Delta\mu))$ dizisinin üretici ılımlı salınımlı ve $\sigma_n^{(1)}(\Delta\mu) = \omega_n^{(m)}(u)$ olduğundan

$$\left(V_n^{(0)}(\Delta\sigma^{(1)}(\Delta\mu)) \right) = \left(V_n^{(0)}(\Delta\omega^{(m)}(u)) \right) = \left(\omega_n^{(m+1)}(u) \right)$$

dizisi ılımlı salınımlıdır. İlimli salınımlı bir dizinin aritmetik ortalaması yavaş salınımlı olduğundan $(\omega_n^{(m+1)}(u))$ dizisi $(C, 1)$ yavaş salınımlıdır. Teorem 3.1.1 kullanılırsa

$$u_n \rightarrow s$$

elde edilir.

Sonuç 3.2.7 $k \geq 0$ tamsayısı için $u_n \rightarrow s(A, k)$ olsun. Eğer üretici $(\sigma_n^{(1)}(\Delta\mu))$ olan dizi ılımlı salınımlı ise $u_n \rightarrow s$ dir.

İspat Üretici $(\sigma_n^{(1)}(\Delta\mu))$ olan dizi ılımlı salınımlı ve ılımlı salınımlı bir dizinin üretici ılımlı salınımlı olduğundan $(\sigma_n^{(1)}(\Delta\mu))$ dizisi ve benzer şekilde $(\sigma_n^{(1)}(\Delta\mu))$ dizisinin üretici ılımlı salınımlıdır. Teorem 3.2.6 kullanılırsa

$$u_n \rightarrow s$$

elde edilir.

Sonuç 3.2.8 $k \geq 0$ tamsayısı için $u_n \rightarrow s(A, k)$ olsun. Eğer üretici $(V_n^{(1)}(\Delta^2\mu))$ olan dizi ılımlı salınımlı ise $u_n \rightarrow s$ dir.

İspat Üretici $(V_n^{(1)}(\Delta^2\mu))$ olan dizi ılımlı salınımlı olduğundan ve

$$V_n^{(1)}(\Delta^2\mu) = V_n^{(0)}(\Delta\sigma^{(1)}(\Delta\mu))$$

eşitliğinden $(\sigma_n^{(1)}(\Delta\mu))$ dizisi ılımlı salınımlıdır. İlimli salınımlı bir dizinin üretici ılımlı salınımlı olduğundan $(\sigma_n^{(1)}(\Delta\mu))$ dizisinin üretici ılımlı salınımlıdır. Teorem 3.2.6 kullanılırsa

$$u_n \rightarrow s$$

elde edilir.

Teorem 3.2.9 $k \geq 0$ tamsayısı için $u_n \rightarrow s(A, k)$ olsun. Eğer $(\sigma_n^{(2)}(\Delta\mu))$ dizisinin üretici ılımlı salınımlı ise $u_n = O(1)$ dir.

İspat $\sigma_n^{(1)}(\Delta\mu) = \omega_n^{(m)}(u)$ ve Eşitlik 2.1.5 kullanılırsa

$$\left(V_n^{(0)}(\Delta\sigma^{(2)}(\Delta\mu)) \right) = \left(\sigma_n^{(1)} \left(V^{(0)}(\Delta\omega^{(m)}(u)) \right) \right) = \left(\sigma_n^{(1)}(\omega^{(m+1)}(u)) \right)$$

dir. Ayrıca Eşitlik 2.1.8 ve $(\sigma_n^{(2)}(\Delta\mu))$ dizisinin üretici ılımlı salınımlı olduğundan

$$\left(V_n^{(0)}(\Delta\sigma^{(2)}(\Delta\mu)) \right) = \left(\sigma_n^{(1)}(\omega^{(m+1)}(u)) \right) = \left(\omega_n^{(m+1)}(\sigma^{(1)}(u)) \right)$$

dizisi ılımlı salınımlıdır. İlimli salınımlı bir dizinin aritmetik ortalaması yavaş salınımlı olduğundan $(\omega_n^{(m+1)}(\sigma^{(1)}(u)))$ dizisi $(C, 1)$ yavaş salınımlıdır.

$u_n \rightarrow s(A, k)$ olması $\sigma_n^{(1)}(u) \rightarrow s(A, k-1)$ olmasına denktir. Ayrıca $(\omega_n^{(m+1)}(\sigma^{(1)}(u)))$ dizisi $(C, 1)$ yavaş salınımlı olduğu kullanılırsa Teorem 3.1.1 den

$$\sigma_n^{(1)}(u) \rightarrow s$$

elde edilir.

İlimli salınımlı bir dizinin üretici sınırlı olduğundan

$$\left(V_n^{(0)}(\Delta\omega^{(m+1)}(\sigma^{(1)}(u))) \right) = \left(\omega_n^{(m+2)}(\sigma^{(1)}(u)) \right)$$

dizisi sınırlıdır. Lemma 3.3 den

$$\omega_n^{(m+2)}(\sigma^{(1)}(u)) = \sum_{j=0}^{m+1} (-1)^j \binom{m+1}{j} n \Delta V_n^{(j+1)}(\Delta u) = O(1) \quad (3.2)$$

dir.

$\sigma_n^{(1)}(u) \rightarrow s$ ve yakınsak bir dizinin üretici dizisi sifıra yakınsak olduğundan

$$V_n^{(0)}(\Delta\sigma^{(1)}(u)) = V_n^{(1)}(\Delta u) \rightarrow 0$$

dir. Benzer şekilde

$$V_n^{(0)}(\Delta V^{(1)}(\Delta u)) = n \Delta V_n^{(2)}(\Delta u) \rightarrow 0$$

dir. Sıfıra yakınsak bir dizinin aritmetik ortalamaları da sıfıra yakınsak olduğundan Eşitlik 2.1.4 kullanılırsa

$$j = 1, 2, \dots, m + 1 \text{ için } n\Delta V_n^{(j+1)}(\Delta u) \rightarrow 0$$

elde edilir. (3.2) den

$$\left(n \Delta V_n^{(1)}(\Delta u) \right)$$

dizisinin sınırlı olduğu elde edilir. Ayrıca $V_n^{(1)}(\Delta u) \rightarrow 0$ olduğundan ve $\left(V_n^{(0)}(\Delta u) \right)$ dizisi için Kronecker Eşitliği olan

$$n \Delta V_n^{(1)}(\Delta u) = V_n^{(0)}(\Delta u) - V_n^{(1)}(\Delta u)$$

eşitliği kullanılırsa

$$\left(V_n^{(0)}(\Delta u) \right)$$

dizisinin sınırlı olduğu elde edilir. $\sigma_n^{(1)}(u) \rightarrow s$ olduğundan ve (u_n) dizisi için Kronecker Eşitliği olan

$$u_n - \sigma_n^{(1)}(u) = V_n^{(0)}(\Delta u)$$

eşitliği kullanılırsa (u_n) dizisinin sınırlı olduğu elde edilir.

Sonuç 3.2.10 $k \geq 0$ tamsayısı için $u_n \rightarrow s(A, k)$ olsun. Eğer üretici $\left(\sigma_n^{(2)}(\Delta \mu) \right)$ olan dizi ılımlı salınımlı ise $u_n = O(1)$ dir.

İspat Üretici $\left(\sigma_n^{(2)}(\Delta \mu) \right)$ olan dizi ılımlı salınımlı ve ılımlı salınımlı bir dizinin üretici ılımlı salınımlı olduğundan $\left(\sigma_n^{(2)}(\Delta \mu) \right)$ dizisi ve benzer şekilde $\left(\sigma_n^{(2)}(\Delta \mu) \right)$ dizisinin üretici ılımlı salınımlıdır. Teorem 3.2.9 kullanılırsa (u_n) dizisinin sınırlı olduğu elde edilir.

Sonuç 3.2.11 $k \geq 0$ tamsayısı için $u_n \rightarrow s(A, k)$ olsun. Eğer üretici $\left(V_n^{(2)}(\Delta^2 \mu) \right)$ olan dizi ılımlı salınımlı ise $u_n = O(1)$ dir.

İspat Üretici $\left(V_n^{(2)}(\Delta^2 \mu) \right)$ olan dizi ılımlı salınımlı olduğundan ve

$$V_n^{(2)}(\Delta^2 \mu) = V_n^{(0)}(\Delta \sigma^{(2)}(\Delta \mu))$$

eşitliğinden $\left(\sigma_n^{(2)}(\Delta \mu) \right)$ dizisi ılımlı salınımlıdır. İlimli salınımlı bir dizinin üretici ılımlı salınımlı olduğundan $\left(\sigma_n^{(2)}(\Delta \mu) \right)$ dizisinin üretici ılımlı salınımlıdır.

Teorem 3.2.9 kullanılırsa (u_n) dizisinin sınırlı olduğu elde edilir.

4. KONTROL MODÜLOLARI SINIRLI OLAN DİZİLER İÇİN TAUBER TEORİSİ

Teorem 4.1 $u_n \rightarrow s(A, 0)$ olsun. Eğer $C \geq 0$ için $\omega_n^{(0)}(u) = n\Delta u_n \geq -C$ ise $u_n \rightarrow s$ dir.

Teorem 4.2 $u_n \rightarrow s(A, 0)$ olsun. $m > 0$ tamsayısı ve bazı $C \geq 0$ için $\omega_n^{(m)}(u) \geq -C$ ise $u_n \rightarrow s$ dir.

İspat $m > 0$ tamsayısı ve $C \geq 0$ için $\omega_n^{(m)}(u) \geq -C$ olsun. Genel kontrol modülünün tanımdan

$$\omega_n^{(m)}(u) = V_n^{(0)}(\Delta\omega^{(m-1)}(u)) \geq -C$$

dir. Eşitlik 2.1.4 kullanılırsa

$$V_n^{(0)}(\Delta\omega^{(m-1)}(u)) = (n\Delta)\sigma_n^{(1)}(\omega^{(m-1)}(u)) = \omega_n^{(0)}(\sigma^{(1)}(\omega^{(m-1)}(u)))$$

eşitliği elde edilir. Dolayısıyla

$$\omega_n^{(m)}(u) = \omega_n^{(0)}(\sigma^{(1)}(\omega^{(m-1)}(u))) \geq -C$$

olduğunu elde ederiz.

$u_n \rightarrow s(A, 0)$ olduğundan $\sigma_n^{(1)}(u) \rightarrow s(A, 0)$ dir. Böylece (u_n) dizisi için Kronecker Eşitliği olan

$$u_n - \sigma_n^{(1)}(u) = V_n^{(0)}(\Delta u)$$

eşitliği kullanılırsa

$$V_n^{(0)}(\Delta u) = n\Delta\sigma_n^{(1)}(u) = \omega_n^{(0)}(\sigma^{(1)}(u)) \rightarrow 0(A, 0)$$

elde edilir. Yani Abel yakınsak bir dizinin üreteç dizisi 0'a Abel yakınsaktır.

$\omega_n^{(0)}(\sigma^{(1)}(u)) \rightarrow 0(A, 0)$ olduğu için $(\omega_n^{(0)}(\sigma^{(1)}(u)))$ dizisinin üreteci de 0 a

Abel yakınsaktır. Yani

$$V_n^{(0)}(\Delta\omega^{(0)}(\sigma^{(1)}(u))) = \omega_n^{(1)}(\sigma^{(1)}(u)) \rightarrow 0(A, 0)$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\omega_n^{(m-1)}(\sigma^{(1)}(u)) = \sigma_n^{(1)}(\omega^{(m-1)}(u)) \rightarrow 0(A, 0)$$

elde edilir. $\omega_n^{(0)}(\sigma^{(1)}(\omega^{(m-1)}(u))) \geq -C$ olduğu kullanılırsa Teorem 4.1 den

$$\sigma_n^{(1)}(\omega^{(m-1)}(u)) \rightarrow 0$$

elde edilir. $(\omega_n^{(m-1)}(u))$ dizisi için Kronecker Eşitliği olan

$$\omega_n^{(m-1)}(u) - \sigma_n^{(1)}(\omega^{(m-1)}(u)) = \omega_n^{(m)}(u)$$

eşitliğini ve $C \geq 0$ için $\omega_n^{(m)}(u) \geq -C$ olduğu kullanılırsa

$$C_1 \geq 0 \text{ için } \omega_n^{(m-1)}(u) \geq -C_1$$

elde edilir. Bu şekilde devam edilirse

$$C_m \geq 0 \text{ için } \omega_n^{(0)}(u) \geq -C_m$$

elde edilir.

$u_n \rightarrow s(A, 0)$ olduğu kullanılırsa Teorem 4.1 den

$$u_n \rightarrow s$$

elde edilir.

4.1 Bölümünde kontrol modüloları tek taraflı sınırlı olan reel sayı dizilerinin Abel yakınsaklık için Tauber koşulu olması $k \geq 0$ için (A, k) toplanabilmeye genişletilecektir. 4.2 Bölümünde de bu genişlemenin sonuçları verilecektir.

Bu bölümde kullanılacak olan lemma aşağıda verilmiştir. Lemmanın ispatı için Çanak, İ. and Totur, Ü. (2007) incelenebilir.

Lemma 4.3

i) $\lambda > 1$ için,

$$u_n - \sigma_n^{(1)}(u) = \frac{\lambda_n + 1}{\lambda_n - n} (\sigma_{\lambda_n}^{(1)}(u) - \sigma_n^{(1)}(u)) - \frac{1}{\lambda_n - n} \sum_{k=n+1}^{\lambda_n} \sum_{j=n+1}^k \Delta u_j$$

ii) $0 < \lambda < 1$ için,

$$u_n - \sigma_n^{(1)}(u) = \frac{\lambda_n + 1}{n - \lambda_n} (\sigma_n^{(1)}(u) - \sigma_{\lambda_n}^{(1)}(u)) + \frac{1}{n - \lambda_n} \sum_{k=\lambda_n+1}^n \sum_{j=k+1}^n \Delta u_j$$

4.1. KONTROL MODÜLOLARI SINIRLI OLAN DİZİLER İÇİN TAUBER TEOREMLERİ

Teorem 4.1.1 $k \geq 0$ tamsayısı için $u_n \rightarrow s(A, k)$ olsun. $m > 0$ tamsayısı ve bazı $C \geq 0$ için $\omega_n^{(m)}(u) \geq -C$ ise $u_n \rightarrow s$ dir.

İspat Sınırlı bir dizinin aritmetik ortalaması da sınırlı olduğundan

$$\omega_n^{(m)}(u) \geq -C$$

olması

$$j = 1, 2, \dots, k \text{ için } \sigma_n^{(j)}(\omega^{(m)}(u)) \geq -C$$

olmasını gerektirir. Eşitlik 2.1.5 ve Eşitlik 2.1.8 8 kullanılırsa

$$j = 1, 2, \dots, k \text{ için } \sigma_n^{(j)}(\omega^{(m)}(u)) = \omega_n^{(m)}(\sigma^{(j)}(u)) \geq -C$$

elde edilir. Ayrıca $u_n \rightarrow s(A, k)$ olması $\sigma_n^{(k)}(u) \rightarrow s(A, 0)$ olmasına denktir.

$j = k$ için $\sigma_n^{(j)}(\omega^{(m)}(u)) \geq -C$ kullanılırsa Teorem 4.2 den

$$\sigma_n^{(k)}(u) \rightarrow s$$

elde edilir.

$(\sigma_n^{(k)}(u))$ dizisinin s ye yakınsak olması $(\sigma_n^{(k-1)}(u))$ dizisinin s ye Cesàro toplanabilir olmasına denktir. Her Cesàro yakınsak dizi Abel yakınsak olduğundan $(\sigma_n^{(k-1)}(u))$ dizisi s ye Abel yakınsaktır. Yani

$$\sigma_n^{(k-1)}(u) \rightarrow s(A, 0)$$

dir. Bu da $u_n \rightarrow s(A, k-1)$ olması demektir.

Benzer şekilde devam edilirse

$$u_n \rightarrow s(A, 0)$$

elde edilir. $\omega_n^{(m)}(u) \geq -C$ olduğu kullanılırsa Teorem 4.1 den

$$u_n \rightarrow s$$

elde edilir.

4.2. KONTROL MODÜLOLARI SINIRLI OLAN DİZİLER İÇİN TAUBER TEOREMLERİNİN SONUÇLARI

Teorem 4.2.1 $k \geq 0$ tamsayısı için $u_n \rightarrow s(A, k)$ olsun. $(\Delta\mu_n)$ dizisinin üretici, $(\sum_{k=1}^n \frac{M_k}{k})$ dizisi ılımlı salınımlı olacak şekilde negatif olmayan bir $M = (M_n)$ dizisi ile soldan sınırlı ise $u_n \rightarrow s$ dir.

İspat $(\sum_{k=1}^n \frac{M_k}{k})$ dizisi ılımlı salınımlı ve ılımlı salınımlı bir dizinin üretici sınırlı olduğundan

$$V_n^{(0)} \left(\Delta \sum_{k=1}^n \frac{M_k}{k} \right) = \sigma_n^{(1)}(M) = O(1)$$

dir. Lemma 3.2.1 den

$$V_n^{(0)}(\Delta^2\mu) = n\Delta\omega_n^{(m)}(u)$$

olduğundan ve $(\Delta\mu_n)$ dizisinin üretici (M_n) dizisi ile soldan sınırlı olduğundan

$$n\Delta\omega_n^{(m)}(u) \geq -M_n$$

dir. İki tarafın aritmetik ortalaması alınır, $\sigma_n^{(1)}(M) = O(1)$ olduğundan

$$C \geq 0 \text{ için } \sigma_n^{(1)} \left(n\Delta\omega_n^{(m)}(u) \right) = \omega_n^{(m+1)}(u) \geq -\sigma_n^{(1)}(M) \geq -C$$

dir. Yani

$$\omega_n^{(m+1)}(u) \geq -C$$

elde edilir. $u_n \rightarrow s(A, k)$ olduğu kullanılırsa Teorem 4.1.1 den

$$u_n \rightarrow s$$

elde edilir.

Teorem 4.2.2 $k \geq 0$ tamsayısı için $u_n \rightarrow s(A, k)$ olsun. $(\sigma_n^{(1)}(\Delta\mu))$ dizisinin üretici $(\sum_{k=1}^n \frac{M_k}{k})$ dizisi ılımlı salınımlı olacak şekilde negatif olmayan bir $M = (M_n)$ dizisi ile soldan sınırlı ise $u_n \rightarrow s$ dir.

İspat $(\sum_{k=1}^n \frac{M_k}{k})$ dizisi ılımlı salınımlı ve ılımlı salınımlı bir dizinin üretici sınırlı olduğundan

$$V_n^{(0)} \left(\Delta \sum_{k=1}^n \frac{M_k}{k} \right) = \sigma_n^{(1)}(M) = O(1)$$

dir. Lemma 3.2.1 den

$$V_n^{(0)}(\Delta^2 \mu) = n \Delta \omega_n^{(m)}(u)$$

dir. Dolayısıyla

$$V_n^{(1)}(\Delta^2 \mu) = \sigma_n^{(1)} \left(n \Delta \omega_n^{(m)}(u) \right) = \omega_n^{(m+1)}(u)$$

olduğundan ve $(\sigma_n^{(1)}(\Delta \mu))$ dizisinin üretici (M_n) dizisi ile soldan sınırlı olduğundan

$$V_n^{(0)} \left(\Delta \sigma_n^{(1)}(\Delta \mu) \right) = V_n^{(1)}(\Delta^2 \mu) = \omega_n^{(m+1)}(u) \geq -M_n$$

dir. İki tarafın aritmetik ortalaması alınır, $\sigma_n^{(1)}(M) = O(1)$ olduğundan

$$C \geq 0 \text{ için } \sigma_n^{(1)} \left(\omega_n^{(m+1)}(u) \right) \geq -\sigma_n^{(1)}(M) \geq -C$$

elde edilir. (u_n) dizisinin s ye (A, k) toplanabilir olması $(\sigma_n^{(1)}(u))$ dizisinin s ye $(A, k-1)$ toplanabilir olmasına denktir. $\omega_n^{(m+1)} \left(\sigma_n^{(1)}(u) \right) \geq -C$ olması kullanılırsa Teorem 4.1.1 den

$$\sigma_n^{(1)}(u) \rightarrow s$$

elde edilir. Yakınsak bir dizinin üretici dizisi sıfıra yakınsak olduğundan

$$V_n^{(0)} \left(\Delta \sigma_n^{(1)}(u) \right) = V_n^{(1)}(\Delta u) \rightarrow 0$$

dir. Benzer şekilde

$$V_n^{(0)} \left(\Delta V_n^{(1)}(\Delta u) \right) = n \Delta V_n^{(2)}(\Delta u) \rightarrow 0$$

dir.

$$j = 1, 2, \dots, k-1 \text{ için } n \Delta V_n^{(j+1)}(\Delta u) \rightarrow 0$$

dir. $\omega_n^{(m+1)} \left(\sigma_n^{(1)}(u) \right) \geq -C$ olduğu kullanılırsa Lemma 3.3 den

$$\omega_n^{(m+1)} \left(\sigma_n^{(1)}(u) \right) = \sum_{j=0}^m (-1)^j \binom{m}{j} n \Delta V_n^{(j+1)}(\Delta u) \geq -C$$

elde edilir. $j = 1, 2, \dots, k-1$ için $n \Delta V_n^{(j+1)}(\Delta u) \rightarrow 0$ olduğu kullanılırsa

$$C_1 \geq 0 \text{ için } n \Delta V_n^{(1)}(\Delta u) \geq -C_1$$

elde edilir. Lemma 4.3 (i) deki dizi $(V_n^{(0)}(\Delta u))$ alınır ve $\Delta V_n^{(1)}(\Delta u) \geq -\frac{C_1}{n}$ eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} V_n^{(0)}(\Delta u) - V_n^{(1)}(\Delta u) &\leq \frac{\lambda_n + 1}{\lambda_n - n} (V_{\lambda_n}^{(1)}(\Delta u) - V_n^{(1)}(\Delta u)) + \frac{1}{\lambda_n - n} \sum_{k=n+1}^{\lambda_n} \sum_{j=n+1}^k \frac{C_1}{j} \\ &\leq \frac{\lambda_n + 1}{\lambda_n - n} (V_{\lambda_n}^{(1)}(\Delta u) - V_n^{(1)}(\Delta u)) + D \log \lambda, \quad D > 0 \end{aligned}$$

elde edilir. İki tarafın da *limsup* unu alınır

$$\begin{aligned} \limsup_n (V_n^{(0)}(\Delta u) - V_n^{(1)}(\Delta u)) &\leq \frac{\lambda}{\lambda - 1} \limsup_n (V_{\lambda_n}^{(1)}(\Delta u) - V_n^{(1)}(\Delta u)) \\ &\quad + D \log \lambda \end{aligned}$$

bulunur. İki tarafın da $\lambda \rightarrow 1^+$ iken limiti alınır

$$\limsup_n (V_n^{(0)}(\Delta u) - V_n^{(1)}(\Delta u)) \leq 0 \quad (4.2.1)$$

elde edilir. Benzer işlemler yapılarak Lemma 4.3 (ii) den

$$\liminf_n (V_n^{(0)}(\Delta u) - V_n^{(1)}(\Delta u)) \geq 0 \quad (4.2.2)$$

elde edilir. (4.2.1) ve (4.2.2) eşitsizliklerinden

$$\lim_n V_n^{(0)}(\Delta u) = \lim_n V_n^{(1)}(\Delta u) = 0$$

olduğu görülür. Ayrıca $\sigma_n^{(1)}(u) \rightarrow s$ olduğu kullanılırsa Kronecker Eşitliğinden

$$u_n \rightarrow s$$

elde edilir.

Teorem 4.2.3 $k \geq 0$ tamsayısı için $u_n \rightarrow s(A, k)$ olsun. Üretici $(V_n^{(0)}(\Delta^2 \mu))$ olan dizi, $(\sum_{k=1}^n \frac{M_k}{k})$ dizisi ılımlı salınımlı olacak şekilde negatif olmayan bir $M = (M_n)$ dizisi ile soldan sınırlı ise $u_n \rightarrow s$ dir.

İspat $(\sum_{k=1}^n \frac{M_k}{k})$ dizisi ılımlı salınımlı ve ılımlı salınımlı bir dizinin üretici sınırlı olduğundan

$$V_n^{(0)} \left(\Delta \sum_{k=1}^n \frac{M_k}{k} \right) = \sigma_n^{(1)}(M) = O(1)$$

dir. Üretici $(V_n^{(0)}(\Delta^2 \mu))$ olan dizi $(\Delta \mu_n)$ dizisidir ve üretici $(V_n^{(0)}(\Delta^2 \mu))$ olan dizi (M_n) dizisi ile soldan sınırlı olduğundan

$$\Delta\mu_n = \omega_n^{(m)}(u) + n\Delta\omega_n^{(m)}(u) \geq -M_n$$

dir. İki tarafının aritmetik ortalaması alınırsa $\sigma_n^{(1)}(M) = O(1)$ olduğundan

$$C \geq 0 \text{ için } \sigma_n^{(1)}(\Delta\mu) = \omega_n^{(m)}(u) \geq -\sigma_n^{(1)}(M) \geq -C$$

elde edilir. $u_n \rightarrow s$ (A, k) kullanılırsa Teorem 4.1.1 den

$$u_n \rightarrow s$$

dir.

Teorem 4.2.4 $k \geq 0$ tamsayısı için $u_n \rightarrow s$ (A, k) olsun. Eğer üretici $(V_n^{(1)}(\Delta^2\mu))$ olan dizi, $(\sum_{k=1}^n \frac{M_k}{k})$ dizisi ılımlı salınımlı olacak şekilde negatif olmayan bir $M = (M_n)$ dizisi ile soldan sınırlı ise $u_n \rightarrow s$ dir.

İspat $(\sum_{k=1}^n \frac{M_k}{k})$ dizisi ılımlı salınımlı ve ılımlı salınımlı bir dizinin üretici sınırlı olduğundan

$$V_n^{(0)}\left(\Delta \sum_{k=1}^n \frac{M_k}{k}\right) = \sigma_n^{(1)}(M) = O(1)$$

dir. $(V_n^{(1)}(\Delta^2\mu)) = (V_n^{(0)}(\Delta\sigma^{(1)}(\Delta\mu)))$ olduğundan ve üretici $(V_n^{(1)}(\Delta^2\mu))$ olan dizi (M_n) dizisi ile soldan sınırlı olduğundan

$$\sigma_n^{(1)}(\Delta\mu) = \omega_n^{(m)}(u) \geq -M_n$$

dir İki tarafının aritmetik ortalaması alınırsa $\sigma_n^{(1)}(M) = O(1)$ olduğundan

$$C \geq 0 \text{ için } \sigma_n^{(2)}(\Delta\mu) = \sigma_n^{(1)}(\omega^{(m)}(u)) \geq -\sigma_n^{(1)}(M) \geq -C$$

elde edilir.

$$C \geq 0 \text{ için } \sigma_n^{(1)}(\omega^{(m)}(u)) \geq -C$$

elde edilir. Ayrıca $u_n \rightarrow s$ (A, k) olduğu kullanılırsa Teorem 3.1.1 den

$$u_n \rightarrow s$$

elde edilir.

5. KONTROL MODÜLOSU İLİMLİ SALINIMLI OLAN DİZİLER İÇİN ALT DİZİSEL YAKINSAK TAUBER TEORİSİ

Tanım 5.1 (u_n) bir reel sayı dizisi olsun. (u_n) dizisinin tüm yığılma noktaları $I(u)$ da olmak üzere sonlu bir $I(u)$ aralığı mevcut ve $I(u)$ aralığının her noktası (u_n) dizisinin bir yığılma noktası ise (u_n) dizisine alt dizisel yakınsak dizi denir.

Tanımdan alt dizisel yakınsak her dizinin sınırlı olduğu açıktır. Fakat tersi doğru değildir. Örneğin $((-1)^n)$ dizisi sınırlıdır ancak alt dizisel yakınsak değildir.

Teorem 5.2 (u_n) bir reel sayı dizisi olsun. $u_n - u_{n-1} = o(1)$ ve (u_n) dizisi sınırlı ise (u_n) dizisi alt dizisel yakınsaktır.

Teorem 5.3 $u_n \rightarrow s(A, 0)$ olsun. Eğer $(\omega_n^{(m)}(u))$ dizisi $(C, 1)$ ılımlı salınımlı ve $(\Delta V_n^{(0)}(\Delta u))$ dizisi yavaş salınımlı ise (u_n) dizisi alt dizisel yakınsaktır.

Teoremin ispatı alt dizisel yakınsaklık kavramını tanıtan Dik, F., (2002) incelenebilir.

5.1 Bölümünde kontrol modüloları ılımlı salınımlı olan diziler için alt dizisel yakınsak Tauber teoremleri $k \geq 0$ için (A, k) toplanabilmeye genişletilecektir. 5.2 Bölümünde de bu genişlemenin sonuçları verilecektir.

5.1. KONTROL MODÜLOSU İLİMLİ SALINIMLI OLAN DİZİLER İÇİN ALT DİZİSEL YAKINSAK TAUBER TEOREMLERİ

Teorem 5.1.1 $k \geq 1$ tamsayısı için $u_n \rightarrow s(A, k)$ olsun. Eğer $(\omega_n^{(m)}(u))$ dizisi $(C, 1)$ ılımlı salınımlı ve $(\Delta V_n^{(0)}(\Delta u))$ dizisi yavaş salınımlı ise (u_n) dizisi alt dizisel yakınsaktır.

İspat $u_n \rightarrow s(A, k)$ ve $(\omega_n^{(m)}(u))$ dizisinin $(C, 1)$ ılımlı salınımlı olduğu kullanılırsa Teorem 3.1.4 den dolayı (u_n) dizisi sınırlıdır. $(n\Delta u_n)$ dizisi için Kronecker eşitliği yazılırsa

$$n\Delta u_n - \sigma_n^{(1)}(n\Delta u) = V_n^{(0)}(\Delta(n\Delta u))$$

eşitliği elde edilir. Eşitlik 2.1.4 ve Eşitlik 2.1.6 kullanılırsa

$$\Delta u_n = \frac{V_n^{(0)}(\Delta u)}{n} + \Delta V_n^{(0)}(\Delta u)$$

elde edilir. (u_n) dizisi sınırlı ve sınırlı bir dizinin aritmetik ortalaması da sınırlı olduğundan $(\sigma_n^{(1)}(u))$ dizisi sınırlıdır. Böylece

$$u_n - \sigma_n^{(1)}(u) = V_n^{(0)}(\Delta u)$$

eşitliğinden $(V_n^{(0)}(\Delta u))$ dizisi de sınırlıdır. O zaman

$$\sigma_n^{(1)}(\Delta V_n^{(0)}(\Delta u)) = \frac{V_n^{(0)}(\Delta u)}{n} \rightarrow 0$$

dir. Ayrıca $(\Delta V_n^{(0)}(\Delta u))$ dizisinin yavaş salınımlı olduğu kullanılırsa Lemma 3.3 den

$$\Delta V_n^{(0)}(\Delta u) \rightarrow 0$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\Delta u_n = \frac{V_n^{(0)}(\Delta u)}{n} + \Delta V_n^{(0)}(\Delta u)$$

eşitliğinden

$$\Delta u_n \rightarrow 0$$

elde edilir. (u_n) dizisinin sınırlı ve $\Delta u_n \rightarrow 0$ olduğu kullanılırsa Teorem 5.2 den (u_n) dizisinin alt dizisel yakınsak olduğu elde edilir.

Teorem 5.1.2 $k \geq 1$ tamsayısı için $u_n \rightarrow s(A, k)$ olsun. Eğer $(\omega_n^{(m)}(u))$ dizisi $(C, 1)$ ılımlı salınımlı ve (Δu_n) dizisi yavaş salınımlı ise o zaman (u_n) dizisi alt dizisel yakınsaktır.

İspat $u_n \rightarrow s(A, k)$ ve $(\omega_n^{(m)}(u))$ dizisinin $(C, 1)$ ılımlı salınımlı olduğu kullanılırsa Teorem 3.1.4 den dolayı (u_n) dizisi sınırlıdır. $(n\Delta u_n)$ dizisi için Kroncker Eşitliği yazılırsa

$$n\Delta u_n - \sigma_n^{(1)}(n\Delta u) = V_n^{(0)}(\Delta(n\Delta u))$$

eşitliği elde edilir. Eşitlik 2.1.4 ve Eşitlik 2.1.6 kullanılırsa

$$\Delta u_n = \frac{V_n^{(0)}(\Delta u)}{n} + \Delta V_n^{(0)}(\Delta u)$$

elde edilir. (u_n) dizisi sınırlı ve sınırlı bir dizinin aritmetik ortalaması da sınırlı olduğundan $(\sigma_n^{(1)}(u))$ dizisi sınırlıdır. Böylece

$$u_n - \sigma_n^{(1)}(u) = V_n^{(0)}(\Delta u)$$

eşitliğinden $(V_n^{(0)}(\Delta u))$ dizisi de sınırlıdır. Bundan dolayı

$$\frac{V_n^{(0)}(\Delta u)}{n} \rightarrow 0$$

dir. O zaman

$$\Delta u_n = \frac{V_n^{(0)}(\Delta u)}{n} + \Delta V_n^{(0)}(\Delta u)$$

eşitliği kullanılırsa (Δu_n) dizisi yavaş salınımlı olduğundan $(\Delta V_n^{(0)}(\Delta u))$ dizisi yavaş salınımlıdır. Teorem 5.1.1 kullanılırsa (u_n) dizisinin alt dizisel yakınsak olduğu elde edilir.

Teorem 5.1.3 $k \geq 1$ tamsayısı için $u_n \rightarrow s(A, k)$ olsun. Eğer $(\omega_n^{(m)}(u))$ dizisi $(C, 1)$ ılımlı salınımlı ve (u_n) dizisi yavaş salınımlı ise o zaman (u_n) alt dizisel yakınsaktır.

İspat $u_n \rightarrow s(A, k)$ ve $(\omega_n^{(m)}(u))$ dizisinin $(C, 1)$ ılımlı salınımlı olması Teorem 3.1.4 den dolayı (u_n) dizisinin sınırlı olmasını gerektirir. Ayrıca (u_n) dizisi yavaş salınımlı olduğundan $\Delta u_n \rightarrow 0$ dir. (u_n) dizisinin sınırlı ve $\Delta u_n \rightarrow 0$ olduğu kullanılırsa Teorem 5.2 den (u_n) dizisinin alt dizisel yakınsak olduğu elde edilir.

5.2. KONTROL MODÜLOSU İLİMLİ SALINIMLI OLAN DİZİLER İÇİN ALT DİZİSEL YAKINSAK TAUBER TEOREMLERİ SONUÇLARI

Bu bölümde $\mu = (\mu_n)$ dizisi $\mu_n = (n+1)\omega_n^{(m)}(u)$ şeklinde kullanılacaktır.

Teorem 5.2.1 $k \geq 2$ tamsayısı için $u_n \rightarrow s(A, k)$ olsun. Eğer $(\sigma_n^{(k)}(\Delta\mu))$ dizisinin üretici ılımlı salınımlı ve $\Delta\sigma_n^{(k-2)}(u) = o(1)$ ise o zaman $(\sigma_n^{(k-2)}(u))$ dizisi alt dizisel dizisel yakınsaktır.

İspat $\mu_n = (n+1)\omega_n^{(m)}(u)$ olduğundan Lemma 3.2.1 den

$$V_n^{(0)}(\Delta^2\mu) = n\Delta\omega_n^{(m)}(u)$$

dır. Böylece Eşitlik 2.1.5 kullanılırsa

$$\left(V_n^{(0)}(\Delta\sigma^{(k)}(\Delta\mu)) \right) = \left(\sigma_n^{(k)}(V^{(0)}(\Delta^2\mu)) \right) = \left(\sigma_n^{(k)}(n\Delta\omega^{(m)}(u)) \right)$$

elde edilir. Ayrıca Eşitlik 2.1.4 kullanılırsa

$$\left(V_n^{(0)}(\Delta\sigma^{(k)}(\Delta\mu)) \right) = \left(\sigma_n^{(k-1)}(\omega^{(m+1)}(u)) \right)$$

elde edilir. $(\sigma_n^{(k)}(\Delta\mu))$ dizisinin üretici ılımlı salınımlı olduğu ve Eşitlik 2.1.8 kullanılırsa

$$\left(\sigma_n^{(k-1)}(\omega^{(m+1)}(u)) \right) = \left(\omega_n^{(m+1)}(\sigma^{(k-1)}(u)) \right)$$

dizisinin ılımlı salınımlı olduğu elde edilir. İlimli salınımlı bir dizinin aritmetik ortalaması yavaş salınımlı olduğu ve Eşitlik 2.1.8 kullanılırsa

$$\left(\sigma_n^{(k)}(\omega^{(m+1)}(u)) \right) = \left(\omega_n^{(m+1)}(\sigma^{(k)}(u)) \right)$$

dizisinin yavaş salımlı olduğu elde edilir.

(u_n) dizisinin s ye (A, k) toplanabilir olması $(\sigma_n^{(k)}(u))$ dizisinin s ye Abel toplanabilir olmasına denktir. $(\omega_n^{(m+1)}(\sigma^{(k)}(u)))$ dizisi yavaş salımlı olduğu kullanılırsa Sonuç 3.2 den

$$\sigma_n^{(k)}(u) \rightarrow s$$

elde edilir. $(\sigma_n^{(k)}(u))$ dizisinin s ye yakınsak olması $(\sigma_n^{(k-1)}(u))$ dizisinin s ye Cesàro toplanabilir olmasına denktir. Her Cesàro toplanabilir dizi Abel toplanabilir olduğundan $(\sigma_n^{(k-1)}(u))$ dizisi s ye Abel toplanabilirdir.

$(\omega_n^{(m+1)}(\sigma^{(k-1)}(u)))$ dizisi ılımlı salımlı olduğu kullanılırsa Teorem 3.1.1 den

$$\sigma_n^{(k-1)}(u) \rightarrow s$$

elde edilir. $(\sigma_n^{(k-1)}(\omega^{(m+1)}(u)))$ dizisi ılımlı salımlı ve ılımlı salımlı bir dizinin üretici sınırlı olduğundan, Eşitlik 2.1.5 ve Eşitlik 2.1.8 kullanılırsa

$$V_n^{(0)}(\Delta\sigma^{(k-1)}(\omega^{(m+1)}(u))) = \sigma_n^{(k-1)}(\omega^{(m+2)}(u)) = \omega_n^{(m+2)}(\sigma^{(k-1)}(u))$$

dizisi sınırlıdır. O zaman Lemma 3.3 den

$$\omega_n^{(m+2)}(\sigma^{(k-1)}(u)) = \sum_{j=0}^{m+1} (-1)^j \binom{m+1}{j} n \Delta V_n^{(j+k-1)}(\Delta u) = O(1) \quad (5.1)$$

elde edilir. $\sigma_n^{(k-1)}(u) \rightarrow s$ ve yakınsak bir dizinin üretçi dizisinin sıfıra yakınsamasından

$$V_n^{(0)}(\Delta\sigma^{(k-1)}(u)) = V_n^{(k-1)}(\Delta u) \rightarrow 0$$

dir. Benzer şekilde

$$n\Delta V_n^{(k)}(\Delta u) = V_n^{(0)}(\Delta V^{(k-1)}(\Delta u)) \rightarrow 0$$

dir. Yakınsak bir dizinin aritmetik ortalamaları da yakınsak olduğundan

$$j \geq 0 \text{ için } n\Delta V_n^{(j+k)}(\Delta u) \rightarrow 0$$

elde edilir. Ayrıca (5.1) eşitliğinden

$$\left(n\Delta V_n^{(k-1)}(\Delta u) \right)$$

dizisinin sınırlı olduğu elde edilir. $\left(V_n^{(k-2)}(\Delta u) \right)$ dizisi için Kronecker Eşitliği olan

$$n \Delta V_n^{(k-1)}(\Delta u) = V_n^{(k-2)}(\Delta u) - V_n^{(k-1)}(\Delta u)$$

eşitliği ve $V_n^{(k-1)}(\Delta u) \rightarrow 0$ kullanılırsa

$$\left(V_n^{(k-2)}(\Delta u) \right)$$

dizisinin sınırlı olduğu elde edilir. $\left(\sigma_n^{(k-2)}(u) \right)$ dizisi için Kronecker Eşitliği olan

$$\sigma_n^{(k-2)}(u) - \sigma_n^{(k-1)}(u) = V_n^{(k-2)}(\Delta u)$$

eşitliği ve $\sigma_n^{(k-1)}(u) \rightarrow s$ kullanılırsa

$$\left(\sigma_n^{(k-2)}(u) \right)$$

dizisinin sınırlı olduğu elde edilir. $\left(\sigma_n^{(k-2)}(u) \right)$ dizisi sınırlı ve $\Delta \sigma_n^{(k-2)}(u) \rightarrow 0$ olduğu kullanılırsa Teorem 5.2 den $\left(\sigma_n^{(k-2)}(u) \right)$ dizisinin alt dizisel yakınsak olduğu elde edilir.

Teorem 5.2.2 $k \geq 2$ tamsayısı için $u_n \rightarrow s(A, k)$ olsun. Eğer üretici $\left(\sigma_n^{(k)}(\Delta \mu) \right)$ olan dizi ılımlı salınımlı ve $\Delta \sigma_n^{(k-2)}(u) = o(1)$ ise o zaman $\left(\sigma_n^{(k-2)}(u) \right)$ dizisi alt dizisel yakınsaktır.

İspat Üretici $\left(\sigma_n^{(k)}(\Delta \mu) \right)$ olan dizi ılımlı salınımlı ve ılımlı salınımlı bir dizinin üretici sınırlı olduğundan $\left(\sigma_n^{(k)}(\Delta \mu) \right)$ dizisi sınırlıdır.

$$\sigma_n^{(1)}(\Delta \mu) = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n \Delta \mu_j = \frac{1}{n+1} \mu_n = \omega_n^{(m)}(u)$$

olduğu ve Eşitlik 2.1.8 kullanılırsa

$$\sigma_n^{(k)}(\Delta \mu) = \sigma_n^{(k-1)}\left(\omega_n^{(m)}(u)\right) = \omega_n^{(m)}\left(\sigma^{(k-1)}(u)\right)$$

dizisinin sınırlı olduğu elde edilir. Lemma 3.3 den de

$$\omega_n^{(m)}(\sigma^{(k-1)}(u)) = \sum_{j=0}^{m-1} (-1)^j \binom{m-1}{j} n \Delta V_n^{(j+k-1)}(\Delta u)$$

dizisinin sınırlı olduğu elde edilir. Sınırlı bir dizinin aritmetik ortalaması da sınırlı olduğu ve Eşitlik 2.1.8 kullanılırsa

$$\sigma_n^{(k)}(\omega^{(m)}(u)) = \omega_n^{(m)}(\sigma^{(k)}(u))$$

dizisinin sınırlı olduğu elde edilir.

(u_n) dizisinin s ye (A, k) toplanabilir olması $(\sigma_n^{(k)}(u))$ dizisinin s ye Abel toplanabilir olmasına denktir. Ayrıca $(\omega_n^{(m)}(\sigma^{(k)}(u)))$ dizisi sınırlı olduğundan Sonuç 3.1.5 den

$$\sigma_n^{(k)}(u) \rightarrow s$$

elde edilir.

$(\sigma_n^{(k)}(u))$ dizisinin s ye yakınsak olması $(\sigma_n^{(k-1)}(u))$ dizisinin s ye Cesàro toplanabilir olmasına denktir. Her Cesàro toplanabilir dizi Abel toplanabilir olduğundan $(\sigma_n^{(k-1)}(u))$ dizisi s ye Abel toplanabilirdir. Yani $u_n \rightarrow s (A, k-1)$ dir. Ayrıca $(\omega_n^{(m)}(\sigma^{(k-1)}(u)))$ dizisi sınırlı olduğundan Sonuç 3.1.5 den

$$\sigma_n^{(k-1)}(u) \rightarrow s$$

elde edilir.

Yakınsak bir dizinin üretici sıfıra yakınsak olduğundan

$$V_n^{(0)}(\Delta \sigma^{(k-1)}(u)) = V_n^{(k-1)}(\Delta u) \rightarrow 0$$

dir. Benzer şekilde

$$n \Delta V_n^{(k)}(\Delta u) = V_n^{(0)}(\Delta V^{(k-1)}(\Delta u)) \rightarrow 0$$

dir. Yakınsak bir dizinin aritmetik ortalamaları da yakınsak olduğundan

$$j \geq 0 \text{ için } n \Delta V_n^{(j+k)}(\Delta u) \rightarrow 0$$

dir.

$$\omega_n^{(m)}(\sigma^{(k-1)}(u)) = \sum_{j=0}^{m-1} (-1)^j \binom{m-1}{j} n \Delta V_n^{(j+k-1)}(\Delta u)$$

dizisi sınırlı olduğundan

$$(n \Delta V_n^{(k-1)}(\Delta u))$$

dizisinin sınırlı olduğu elde edilir. $(V_n^{(k-2)}(\Delta u))$ dizisi için Kronecker Eşitliği olan

$$n \Delta V_n^{(k-1)}(\Delta u) = V_n^{(k-2)}(\Delta u) - V_n^{(k-1)}(\Delta u)$$

eşitliği ve $V_n^{(k-1)}(\Delta u) \rightarrow 0$ kullanılırsa $(V_n^{(k-2)}(\Delta u))$ dizisinin sınırlı olduğu elde edilir. $(\sigma_n^{(k-2)}(u))$ dizisi için Kronecker Eşitliği olan

$$\sigma_n^{(k-2)}(u) - \sigma_n^{(k-1)}(u) = V_n^{(k-2)}(\Delta u)$$

eşitliği ve $\sigma_n^{(k-1)}(u) \rightarrow s$ kullanılırsa

$$(\sigma_n^{(k-2)}(u))$$

dizisinin sınırlı olduğu elde edilir. $(\sigma_n^{(k-2)}(u))$ dizisi sınırlı ve $\Delta \sigma_n^{(k-2)}(u) \rightarrow 0$ olduğu kullanılırsa Teorem 5.2 den $(\sigma_n^{(k-2)}(u))$ dizisinin alt dizisel yakınsak olduğu elde edilir.

Teorem 5.2.3 $k \geq 2$ tamsayısı için $u_n \rightarrow s(A, k)$ olsun. Eğer üretici $(V_n^{(k)}(\Delta^2 \mu))$ olan dizi ılımlı salınımlı ve $\Delta \sigma_n^{(k-2)}(u) = o(1)$ ise $(\sigma_n^{(k-2)}(u))$ dizisi alt dizisel yakınsaktır.

İspat Üretici $(V_n^{(k)}(\Delta^2 \mu))$ olan dizi ılımlı salınımlı ve

$$V_n^{(k)}(\Delta^2 \mu) = V_n^{(0)}(\Delta \sigma^{(k)}(\Delta \mu))$$

eşitliğinden dolayı

$$(\sigma_n^{(k)}(\Delta \mu))$$

dizisi ılımlı salınımlıdır. İlimli salınımlı bir dizinin üretici de ılımlı salınımlı olduğundan $(\sigma_n^{(k)}(\Delta \mu))$ dizisinin üretici de ılımlı salınımlıdır. $u_n \rightarrow s(A, k)$ ve $\Delta \sigma_n^{(k-2)}(u) = o(1)$ olduğu kullanılırsa Teorem 5.2.1 den $(\sigma_n^{(k-2)}(u))$ dizisinin alt dizisel yakınsak olduğu elde edilir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

- Çanak, İ.**, 2011, A note on a Tauberian theorem for (A, i) limitable method II, Journal of Computational Analysis and Applications, 13 (5) 892-898.
- Çanak, İ. and Albayrak, M.**, 2007, A note on a Tauberian theorem for (A, i) limitable method, International Journal of Pure and Applied Mathematics, 35 (3), 421-424.
- Çanak, İ. and Totur, Ü.**, 2007, A Tauberian theorem with a generalized one-sided condition, Abstr. Appl. Anal. Article ID 60360.
- Çanak, İ. and Totur, Ü.**, 2008, Tauberian theorems for Abel limitability method, Cent. Eur. J. Math. 6, 301-306.
- Çanak, İ., Hasekiler, F. and Kebapçı, D.**, 2011, Some Tauberian theorems for regularly generated sequences, Computers & Mathematics with Applications 62, 12, 4486-4491 pp.
- Çanak, İ., Totur, Ü. and Dik, M.**, 2010a, One-sided Tauberian conditions for (A, k) summability method, Mathematical and Computer Modelling, 51 (5-6), 425-430.
- Çanak, İ., Totur, Ü. and Dik, M.**, 2010b, Some conditions under which subsequential convergence follows from (A, m) summability, Filomat, 24:1 133-139.
- Çanak, İ., Totur, Ü. and Dik, M.**, 2011, On Tauberian Theorems for (A, k) summability method, Mathematica Slovaca, 61(6), 993-1001.
- Dik, F.**, 2002, Tauberian Theorems for Convergence and Subsequential Convergence of Sequences with Controlled Oscillatory Behavior, Doctoral dissertation, University of Missouri-Rolla.
- Dik, M.**, 2002, Tauberian Theorems for Sequences with Moderately Oscillatory Control Modulo, Doctoral dissertation, University of Missouri-Rolla.
- Hardy, G. H.**, 1949, Divergent Series, Oxford University Press.
- Hardy, G. H. and Littlewood, J. E.**, 1914, Tauberian theorems concerning Power Series and Dirichlet's series whose coefficients are positive. Proc. London, Math 13, 174–191

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Karamata, J.**, 1930, Über die Hardy-Littlewoodschen Umkehrungen des Abelschen Stetigkeitssatzes. *Math. Z.*, 32, 319–320.
- Korevaar, J.**, 2004, *Tauberian Theory*. Springer-Verlag.
- Landau, E.**, 1910, Über die Bedeutung einiger neuerer Grenzwertsätze der Herren Hardy und Axer. *Prace Mat. Fiz.*, 21, 97–177.
- Littlewood, J. E.**, 1910, The converse of Abel's theorem on power series. *Proc. London Math. Soc.* 9, 2, 434–448.
- Postnikov, A. G.**, 1980, *Tauberian theory and its applications*. A translation of *Trudy Mat. Inst. Steklov*, 144(1979). *Proc. Steklov Inst. Math.* no.2.
- Schmidt, R.**, 1925, Über divergente Folgen und lineare Mittelbildungen. *Math. Z.*, 22(89-152).
- Szasz O.**, 1944, *Introduction to the theory of divergent series*. University of Cincinnati.
- Stanojevic, C. V.**, 1998, *Analysis of divergence: Control and management of divergent process*. Graduate Research Seminar Lecture Notes, edited by İ. Çanak, University of Missouri-Rolla. Fall 1998.
- Tauber, A.**, 1897, Ein Satz aus der Theorie der unendlichen Reihen, *Monatsh. Math. Phys.*, 8, 273–277.

ÖZGEÇMİŞ

Ferhat HASEKİLER, 29.08.1988 tarihinde İzmir’de dünyaya geldi. İlk ve orta öğrenimini İzmir’de tamamladı. 2010 yılında Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü Teorik Matematik Ağırlıklı lisans programından mezun oldu. Halen, Ege Üniversitesi Matematik Ana Bilim Dalı, Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı’nda Yüksek Lisans öğrenimini sürdürmektedir.

Yayın: Çanak, İ., Hasekiler, F. and Kebapcı, D., 2011, Some Tauberian theorems for regularly generated sequences, Computers & Mathematics with Applications 62, 12, 4486-4491 pp.