T.C.
AKSARAY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ORTAK YÜKSEK LİSANS PROGRAMI

DEĞİŞMELİ CEBİRLERDE ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Yasemin IŞIK

DANIŞMAN

Yrd. Doç. Dr. Tufan Sait KUZPINARI

Prof. Dr. Durmuş BOZKURT

AKSARAY, 2012

Yasemin IŞIK	YÜKSEK LİSANS	15/11/2012

T.C.
AKSARAY ÜNİVERSİTESİ - SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
KABUL ve ONAY BELGESİ

Yasemin IŞIK'ın DEĞİŞMELİ CEBİRLERDE ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER ÜZERİNE başlıklı lisansüstü tez çalışması, Aksaray Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 9.11.2012 tarih ve 2012/37-11 sayılı kararı ile oluşturulan aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalında **YÜKSEK LİSANS** tezi olarak **Oy Birliği** ile kabul edilmiştir.

İmza

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Tufan Sait KUZPINARI (Aksaray Üniversitesi)............

Üye : Doç. Dr. Yıldıray KESKİN (Selçuk Üniversitesi) ....

Üye : Yrd. Doç. Dr. Erdal ÖZÜSAĞLAM (Aksaray Üniversitesi)............

Tezin Savunulduğu Tarih : 24.11.2012

i

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa No

ÖNSÖZ

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, temel kavramlar ile ilgili bilgiler verilmiştir.İkinci bölümde simplisel cebirler, yüksek mertebeden peiffer elemanlar ve hiper çaprazlanmış kompleks çiftleri incelenmiştir. Üçüncü bölümde çaprazlanmış modüller incelenmiştir. Dördüncü bölümde ise çaprazlanmış modüllerin elde edilişi incelenmiştir.

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans tezimin hazırlanmasında büyük emeği geçen danışman hocam Aksaray Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölüm Başkanı Yrd. Doç. Dr. Tufan Sait KUZPINARI 'na , Aksaray Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyelerine, hayatın her aşamasında yanımda olan aileme teşekkürlerimi sunarım.

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

DEĞİŞMELİ CEBİRLERDE ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER ÜZERİNE

Yasemin IŞIK

T.C.
Aksaray Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman :Yrd.Doç.Dr.Tufan Sait KUZPINARI
İkinci Danışman : Prof. Dr. Durmuş BOZKURT

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, temel kavramlar ile ilgili bilgiler verilmiştir. İkinci bölümde simplisel cebirler, yüksek mertebeden peiffer elemanlar ve hiper çaprazlanmış kompleks çiftleri incelenmiştir. Üçüncü bölümde çaprazlanmış modüller incelenmiştir. Dördüncü bölümde ise çaprazlanmış modüllerin elde edilişi incelenmiştir.

2012, 51 sayfa

Anahtar Kelimeler :Çaprazlanmış Modüller, Hiper Çaprazlanmış Kompleks Çiftleri, Simplisel Cebirler.

ABSTRACT

Master of Science Thesis

CROSSED MODULES ON COMMUTATIVE ALGEBRAS

Yasemin IŞIK

T.R.
Aksaray University Graduate School of Natural and Applied Sciences
Selçuk University Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor : Asist. Prof.Dr.Tufan Sait KUZPINARI
Co-Supervisor : Prof. Dr. Durmuş BOZKURT

This thesis consists of four chapters. In the first chapter some informations about basic properties are given. In the second chapter, simplicial algebras, higher order peiffer elements and hypercrossed complex pairings are given . In the thirdchapter, crossed modules have been given. In the last chapter, crossed modules construction iare given.

2012, 51 Pages

Keywords : Crossed Modules, Hypercrossed Complex Pairings, Simplicial Algebras

ŞEKİLLER DİZİNİ **Sayfa No**

SİMGELER DİZİNİ

$\bigcap$	:	Çoklu Kesişim
$\bigcup$	:	Çoklu Birleşim
$\forall$	:	Her
$\in$	:	Elemanıdır.
$\emptyset$	:	Phi
φ	:	Upsilon
α	:	Alfa
β	:	Beta
$\sum$	:	Toplam
$\cup$	:	Birleşim
$\cap$	:	Kesişim
σ	:	Sigma
ψ	:	Psi

BÖLÜM 1

1.Temel Kavramlar

Bu bölümde ileride işimize yarayacak olan ve cebirin de temelini teşkil eden tanımlar verilecektir. Bu bilgiler ışığında konumuzun ilerleyen safhalarında karşımıza çıkacak olan tanımlar daha iyi anlaşılacaktır.

Tanım 1.1 (Fonksiyon) : *X* ve *Y* herhangi iki küme olsun. *X* in her bir elemanına *Y* nin bir ve yalnız bir elemanını karşılık getiren *f* kuralına *X* den *Y* ye bir **fonksiyon** denir.

$$f : X \to Y \text{ veya } X \xrightarrow{f} Y$$

şeklinde gösterilir. *X* kümesine **tanım kümesi**, *Y* kümesine de **değer kümesi** adı verilir. Eğer $f(X) \to Y$ ise *f* fonksiyonu **örtendir** denir.

$x_1+x_2 \in$ X olsun. $x_1 \neq x_2$ için $f (x_1) \neq f(x_2)$ (ise *f* fonksiyonuna **birebir fonksiyon** adı verilir. Hem birebir hem de örten olan fonksiyona birebir örten fonksiyon denir (Alp ve Wensley, 2010)..

Tanım 1.2 (Topolojik uzay) : *X* boştan farklı bir küme ve *r* da *X* in alt kümelerinin bir sınıfı olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa *r* sınıfına *X* üzerinde bir **topoloji** ve *(X,r)* ikilisine de bir **topolojik uzay** denir.

$[T_1]\emptyset, X \in r$ dır. $G_{k1}, G_{k2,\ldots} G_{kn} \in r$

$[T_2] G_{k1}, G_{k2,\ldots} G_{kn} \in r$ ise $\bigcap_{i=1}^{n} G_{k_i} \in \tau$,yani *r* sınıfı sonlu arakesite göre kapalıdır.

$[T_a]$ $\forall i \in I$ için $G_{ki} \in r$ ise $\bigcup_{i \in I} G_{k_i} \in \tau$,yani *r* sınıfı keyfi birleşime göre kapalıdır (Alp, 1997)..

Tanım 1.3 (Homeomorfizm) : *(X,r)* ve *(Y,σ)* topolojik uzaylar olmak üzere bir $f:(X,r) \to (Y,\sigma)$fonksiyonu verilsin. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa *f* fonksiyonuna bir **homeomorfizm** denir.

a) *f* fonksiyonu birebir ve örten;
b) *f* fonksiyonu sürekli;
c) *f* nin ters fonksiyonu $f^{1}: (Y,\sigma) \to (X,r)$ sürekli.

Eğer *(X,r)* ve *(Y,σ)* uzayları arasında bir homeomorfizm varsa bu uzaylara homeomorf ya da topolojik olarak eş yapılıdır denir (Alp, 1997)..

Tanım 1.4 (Grup) : Grup tanımını yapabilmek için öncelikle ikili işlem tanımını vermeliyiz. $G \neq \emptyset$ bir küme olmak üzere $*: G \times G \to G$ şeklinde tanımlanan * dönüşümüne G de bir ikili işlem ve üzerinde ikili işlemin tarif edildiği bu G kümesine de cebirsel yapı denir ve $(G,*)$ ile gösterilir. $G \neq \emptyset$ bir küme olmak üzere $*: G \times G \to G$ dönüşümü G de bir ikili işlem olsun. $(G,*)$ ikilisi aşağıdaki şartları sağlıyorsa buna **grup** denir.

G1) $\forall a,b \in G$ için $a * b$ dir. (Kapalılık Özelliği)

G2) $\forall a,b,c \in G$ için $(a*b)*c = a*(b*c)$dir. (Birleşme Özelliği)

G3) $\forall a \in G$ için $e*a = a*e$ olacak şekilde $\exists$ $e \in G$ vardır. (Birim Eleman)

G4) $\forall a,e \in G$ için $a * a^{-1} = a^{-1} * a$ olacak şekilde $\exists$ $a^{-1} \in G$ vardır. (Ters Eleman)

* ikili işlemi $\forall$ $a,b \in G$ için $a*b=b*a$ şartını sağlıyorsa bu gruba **değişmeli (abelyen, komütatif) grup** denir (Andre, 1970).

$(G,*)$ bir grup ve H,G 'nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. G deki grup işlemine göre H kümesi bir grup teşkil ediyorsa H'ye G 'nin **alt grubu** denir ve $H \leq G$ ile gösterilir (Arvasi ve Porter, 1997).

Tanım 1.5 (Cosetler (Yan kümeler)) : G bir grup ve H,G 'nin bir alt grubu olsun. $g \in G$ olmak üzere,

$$H.g = \{hg : h \in H\} \text{ ve } g.H = \{gh : h \in H\}$$

kümelerine H 'nin sırasıyla sağ ve sol yan kümeleri denir. (toplam notasyonunda

$H + g = \{h + g : h \in H\}$ ve $g + H = \{g+h : h \in H\}$ olur.) (Arvasi ve Porter, 1997).

Tanım 1.6 (Normal Alt grup) : G bir grup ve $H \leq G$olsun. Eğer H'ın G 'deki bütün sağ ve sol yan kümeleri eşitse, yani $\forall a \in G$ için $aH = Ha$ oluyorsa o takdirde H alt grubuna G 'nin normal alt grubu denir ve $H \Delta G$ ile gösterilir (Andre, 1970).

Tanım 1.7 (Bir grubun merkezi) : G bir grup olmak üzere G 'nin merkezi $M(G)$ile gösterilir ve

$$M(G) = \{a \in G : ax = xa, \ \forall x \in G \text{ için}\}$$

olarak tanımlanır. Diğer bir deyimle bir G grubunun merkezi, G 'nin her elemanı ile değişmeli olan G deki elemanlardan oluşan bir kümedir (Andre, 1970).

Tanım 1.8 (Bir grubun bir küme üzerine etkisi) : G bir grup ve A boştan farklı bir küme olsun. Bir

$$*: G \times A \rightarrow A, \qquad (g,a) \rightarrow ((g,a)) = g*a$$

fonksiyonu verilsin. Eğer

i. $\forall a \in A$ için $e*a=a$ ise;

ii. $\forall a \in A$ ve $g,h \in G$ için $(gh)*a=g*(ha)$ ise;

o zaman $*$ fonksiyonuna G nin A üzerine bir etkisi ve A ya bir *G-kümesi* denir (Blyth, 1986).

Tanım 1.9 (Grup izomorfizmi ve homomorfizmi) :

$(G,o),(G',o)$ iki grup ve $\emptyset:G \rightarrow G'$ birebir ve örten bir dönüşüm olsun. $\forall\ a,b \in G$ için,

$$\emptyset(a \circ b) = \emptyset(a) \circ' \emptyset(b)$$

oluyorsa bu $\emptyset$ dönüşümüne **izomorfizm** (eş yapı dönüşümü) denir. $G = G'$ olması halinde $\emptyset:G \rightarrow G'$ izomorfizmine ise G 'nin **otomorfizmi** adı verilir.

Şayet, $\emptyset:G \rightarrow G'$ bir izomorfizm ise G ve G' ye izomorf denir ve bu $G \approx G'$ ile ifade edilir.

Homomorfizm kavramı izomorfizm kavramından daha zayıf olmakla beraber cebirde çok büyük bir öneme sahiptir.

$(G,o),(G',o)$ iki grup ve $\emptyset:G \rightarrow G'$ bir dönüşüm olsun. $\forall\ a,b \in G$ için,

$$\emptyset(a \circ b) = \emptyset(a) \circ' \emptyset(b)$$

oluyorsa bu $\emptyset$ dönüşümüne **grup homomorfizmi (veya kısaca homomorfizm)** denir. ϕ homomorfizmi birebir ise ϕ ye **monomorfizm**, $\emptyset$ dönüşümü örten ise $\emptyset$ ye **epimorfizm** adı verilir. $G=G'$ olması halinde $\emptyset:G \rightarrow G'$ homomorfizmine ise G nin **endomorfizmi** denir (Arvasi ve Porter, 1997).

Tanım 1.10 (İç otomorfizm) : G bir grup ve $a \in G$ olsun. $\forall\ x \in G$ için,

$$\varphi_a(X) = axa^{-1}$$

ile tanımlı $\varphi_a : G \rightarrow G$ nin bir otomorfizmasıdır.ya φ_a'nin G bir **iç otomorfizması** denir (Asar ve Arıkan, 2009)

G nin bütün otomorfizmlerinin kümesi $Aut(G)$ ile gösterilir (Andre, 1970).

Tanım 1.11 (Halka) : $H \neq \emptyset$ bir küme olmak üzere H üzerinde aşağıdaki şartları sağlayan toplama **(+)** ve çarpma **(.)** işlemleri tanımlı ise, H kümesine toplama ve çarpma işlemlerine göre bir halka denir ve $(\boldsymbol{H}, +, .)$ ile gösterilir.

$\boldsymbol{H_1}$) H kümesi (+) işlemine göre değişmeli grup olmalıdır.

$\boldsymbol{H_2}$) $\forall a,b,c \in H$ için $a.(b.c) = (a.b).c$ olmalıdır. (Çarpma işleminin birleşme özelliği)

H_3) $\forall a,b,c \in H$ için $a.(b+c) = (a.b)+(a.c)$ olmalıdır. (Çarpma işleminin toplama işlemi üzerine soldan ve sağdan dağılma özelliği)

Eğer $\forall a \in H$ için $a.e=e.a=a$ olacak şekilde $e \in H$ varsa yani H halkasının çarpma işlemine göre birim elemanı varsa H halkasına **birimli bir halka** denir (Andre, 1970).

Tanım 1.12 (Cisim) : H değişmeli ve birimli bir halka olsun.

$$\forall a \in H \ \ a \neq 0 \text{ için } \exists\, b \in H \,;\, a.b = b.a = 1$$

ise ,yani değişmeli H halkasının sıfırdan farklı her elemanının çarpma işlemine göre bir tersi varsa H ye bir **cisim** denir (Andre, 1970).

1.1.Kategori

Kategori teorisinin matematiğin diğer birçok dallarında da kullanım alanı vardır. Kategori teorisi aynı tip nesneler ve bunlar arasındaki dönüşümlerle ilgilidir. Daha genel olarak, kümeler arasındaki fonksiyonların bileşkesinin birleşme özelliğine sahip olduğunu ve her bir küme için bir birim fonksiyonu bulunduğunu biliyoruz. Burada daha genel olarak kümeler yerine **nesneler** ve fonksiyonlar yerine **morfizmler** alındığında kategori kavramı elde edilmiş olur (Alp, 1997;Higgins, 1971).

Genellikle bu kavramların açıklandığı temel kaynak Blyth ‘in yapmış olduğu Categories (Higgins, 1971) kitabı olduğundan burada o kaynak referans gösterilerek alıntılar yapılmıştır.

Tanım 1.13 : Bir $\mathcal{C}$ kategorisi nesnelerinin kümesi Ob($\mathcal{C}$), morfizimlerinin kümesi Mor($\mathcal{C}$), kaynak ve hedef dönüşümleri,

$$\alpha,\beta : Mor(\mathcal{C}) \rightarrow Ob(\mathcal{C})$$

nesne dönüşümü,

$$\varepsilon : Ob(\mathcal{C}) \rightarrow Mor(\mathcal{C})$$

$$x \rightarrow \varepsilon(x) = I_x$$

ve

$Mor(\mathcal{C})_{\alpha} \times_{\beta} Mor(\mathcal{C}) = \{(a,b) \in Mor(\mathcal{C}) \times Mor(\mathcal{C}) : \alpha(b) = \beta(a)\}$

üzerinde tanımlı **“.”** biçimindeki çarpma işlemi kısmi çarpma işlemi olarak adlandırılacaktır. Bu dönüşümler aşağıdaki şartları sağlarlar;

K$_1$) $\forall (a,b) \in Mor(\mathcal{C})_{\alpha} \times_{\beta} Mor(\mathcal{C})$ için $\alpha(b.a) = \alpha(a)$

K$_2$) $\forall a,b,c \in Mor(\mathcal{C})$ ile $\alpha(c) = \beta(b)$ ve $\alpha(b) = \beta(a)$ için

$c.(b.a) = (c.b).a$

K_3) $\forall x \in Ob(C)$ *için* $\alpha(I_x)=x=\beta(I_x)$

K_4) $\forall a \in Mor(C)$ *için* $a.I_{\alpha(a)} = I_{\beta(a)}.a=a$ dır (Alp, 1997; Higgins, 1971).

Tanım1.14 : Her hangi bir kategorisinde nesnelerin ve morfizmlerin bir diyagramı için verilen bir kaynak nesnesinden bir hedef nesnesine tüm bileşke morfizmler eşit ise kategori değişimlidir denir. Bu geometrik olarak gösterilecek olursa

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "b"'] & \bullet \arrow[dl, "c"] \\
\bullet &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\alpha"'] & \bullet \arrow[d, "b"] \\
\bullet \arrow[r, "\beta"'] & \bullet
\end{tikzcd}$$

Şekil 1.1. Morfizmlerin Diyagram

biçiminde ifade edilir. Bu diyagramının değişmeli olması için gerek ve yeter şart

$$c = b \; o \; a \; ve \; \beta \; o \; \alpha = b \; o \; a$$

olmasıdır. Değişmeli kategoriye aşağıdaki örnekler verilebilir (Higgins, 1971;Whitehead, 1949).

Örnek 1.1: ***C*** bir kategori ve A, C kategorisinin sabit nesnesi olsun. Aşağıdaki gibi bir $A^{\rightarrow}$ kategorisi oluşturulabilir: C kategorisinin morfizmleri olarak $A \xrightarrow{f} X$ nesneleri alınır. Yani,

$$Ob(A^{\rightarrow}) = \{f | f: A \rightarrow X \ , X \in Ob(C)\}$$

dir. $A \xrightarrow{f} X$ nesnesinden $A \xrightarrow{g} Y$ nesnesine bir morfizm aşağıdaki diyagramdaki gibi verilirse

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[dl] \\
Y &
\end{tikzcd}$$

Şekil 1.2. Morfizmlerin Değişimli Diyagramı

değişimli diyagramı elde edilir.

Benzer şekilde ; ${}^{\rightarrow}A$ kategorisi de aşağıdaki gibi elde edilebilir:

Nesneler için C kategorisinin $X \xrightarrow{f} A$ şeklindeki morfizmleri ile ve $X \xrightarrow{f} A$ nesnesinden $Y \xrightarrow{g} A$ nesnesine bir morfizm de aşağıdaki diyagramla ifade edilir ve

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & A \\
Y \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}
$$

Şekil 1.3. Morfizmlerin Katogori Değişimli Diyagramı

değişimli diyagramı elde edilir (Higgins, 1971) .

Bu kategorilere *comma kategorileri* de denir.

Örnek 1.2 : $\mathcal{C}$ bir kategori olsun. Bu durumda $\mathcal{C}$ kategorisinden aşağıdaki gibi bir başka kategori de elde edilir.

Nesneleri $\mathcal{C}$ kategorisinin morfizmleri ve $A \xrightarrow{f} B$ nesnesinden $C \xrightarrow{g} D$ nesnesine bir morfizm olan kategori

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[d, "\beta"] \\
C \arrow[r, "g"'] & D
\end{tikzcd}
$$

değişimli diyagramı ile tanımlıdır.

Morfizmlerin bileşimi de aşağıda verilen şekilde tanımlanabilir:

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[d, "\beta"] \\
C \arrow[r, "g"'] & D
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "\alpha'"'] & B' \arrow[d, "\beta'"] \\
C' \arrow[r, "g'"'] & D'
\end{tikzcd}
$$

Şekil 1.4. Morfizmlerin Bileşkeleri Diyagramı

Bu diyagramlarının birleşimli olması için gerek ve yeter şart

$$A' = B \text{ ve } C' = D$$

olmasıdır. Bu durumda diyagramların bileşkeleri olan şekil

$$A \xrightarrow{f' o f} B'$$

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[d, "\alpha'"'] & {} \arrow[d, "\beta'"] \\ C \arrow[r, "g' o\, g"'] & D' \end{tikzcd}$$

ile verilir. Bu kategoriye $\mathcal{C}$ kategorisi üzerindeki *ok kategori* denir (Higgins, 1971).

Tanım 1.15: Eğer bir kategorinin nesneleri bir küme şeklinde ise bu kategoriye *küçük kategori* denir (Higgins, 1971).

Kategori tanımından hemen sonra alt kategorinin ne olması gerektiği konusunda alt kategori tanımı aşağıdaki biçimde verilebilir.

Tanım 1.16: $\mathcal{C}'$ *ve* $\mathcal{D}$ iki kategori olsun.

i) $Ob\mathcal{C}' \subset Ob\mathcal{D}$

ii) $\forall x,y \in Ob(\mathcal{C}')$ için $\mathcal{C}'(x,y) \subset \mathcal{D}(x,y)$

iii) $\mathcal{C}'$nin morfizmalarının bileşke işlemi $\mathcal{D}$ nin ki ile aynı ise bu durumda

$\mathcal{C}', \mathcal{D}$ nin *alt kategorisidir* denir (Arvasi ve Porter, 1997) .

$\mathcal{C}', \mathcal{D}$ nin alt kategorisi ve $\forall x,y \in Ob\ \mathcal{C}'$ için $\mathcal{C}'(x,y) = \mathcal{D}(x,y)$ ise $\mathcal{C}'$ *ye* $\mathcal{D}$ nin dolu alt kategorisi, $Ob\mathcal{C}' = Ob\mathcal{D}$ ise $\mathcal{C}'$ *ye* $\mathcal{D}$ nin *geniş alt kategorisi* denir (Alp, 1997;Whitehead, 1949).

Tanımını vermiş olduğumuz kategorilere aşağıdaki örnekler tanımların anlaşılması için verilebilir.

Örnek 1.3 : Her kategori kendisinin dolu bir alt kategorisidir (Alp, 1997).

Çözüm için her kategori kendisinin bir alt kategorisi ise bu kategorinin nesnelerinin kümesi ve morfizmlerinin kümesi her zaman için mevcuttur. Aynı zamanda birebir olduklarından alt kategori şartları sağlanır. Bu durumda her kategori kendisinin dolu alt kategorisidir.

Örnek 1.4 : Sonlu olan kümelerin kategorisi *Set* kategorisinin dolu bir alt kategorisidir (Alp, 1997).

Örnek 1.4 : *Abel* grupların kategorisi, *Grup* kategorisinin dolu bir alt kategorisidir(Alp, 1997).

Örneklerle tanıttığımız *Set* kategorisi için aşağıdaki önemli özellikler verilebilir.

Önerme 1.1 : Kümelerin *Set* kategorisinde bir $a{:}A\rightarrow B$ morfizmi için aşağıdaki durumlar birbirine denktir.

1. a bire-bir dir.(*Yani* $a(X) = a(Y)$ *ise* $X=Y$ *dir.)*
2. a soldan sadeleşebilirdir. .(*Yani* $a \circ b = a \circ c \Rightarrow b=c$ *dir.)* (Higgins, 1971).

İspat : Gerçekten ;

1⇒2)Kabul edelim ki a birebir, $b,c{:}C\rightarrow A$ ve $a \circ b = a \circ c$ olsun. Bu durumda $\forall x \in C$ için,

$$(a \circ b)(X) = (a \circ c)(X) \Rightarrow a(b(X)) = a(c(X))$$

olur ve a bire-bir olduğundan

$$b(X) = c(X)$$

dir. $\forall x \in C$ için ve $b,c{:}C\rightarrow A$ tanımlandığından $b = c$ bulunur.

2 ⇒ 1) : Kabul edelim ki a soldan sadeleşebilir ve bire-birlik şartının hipotez kısmı olan $a(X) = a(Y)$ *ve* $C = \{\alpha\}$ olsun.

$$b(\alpha) = X \text{ ve } c(\alpha) = Y$$

olacak şekilde $b,c{:}C\rightarrow A$ dönüşümleri tanımlansın. Bu takdirde

$$a(X) = a(Y)$$

eşitliğinde X ve Y yerine yazılırsa

$$a(b(\alpha)) = a(c(\alpha)) = a \circ b = a \circ c$$
$$\Rightarrow b=c$$

olduğundan

$$X = b(\alpha) = c(\alpha) = Y$$

bulunur (Higgins, 1971) .

Tanım 1.17 (Monik) : C bir kategori olsun. Eğer C kategorisinde bir $a{:}A\rightarrow B$ morfizmi soldan kısaltılabilir ise a' ya *monik* denir.

Set kategorisinde bir morfizmin monik olması için gerek ve yeter şart morfizmin bire-bir olmasıdır (Higgins, 1971;Brown, 1999).

Tanım 1.18 (Epik) : $\mathcal{C}$ bir kategori olmak üzere $\mathcal{C}$ kategorisinde bir $a{:}A\rightarrow B$ morfizmi sağdan kısaltılabilirse, yani;

$$b \circ a = c \circ a \Rightarrow b=c$$

ise a' ya *epik morfizmler* denir.Epik morfizmlerin özelliklerini yansıtan önerme ve örnekler aşağıdaki gibi verilebilir (Higgins, 1971;Brown, 1999).

Tanım 1.19: Bir $\mathcal{C}$ kategorisinde $f : A \rightarrow B$ morfizmi verilsin. Eğer bu f morfizmi soldan kısaltma özelliğine sahipse yani $fg = fh$ olacak şekildeki g *ve* h morfizmleri için $g = h$ olacak şekilde bulunabilirse f morfizmine bir *monomorfizm* denir (Alp, 1997) .

Tanım 1.20: Bir $\mathcal{C}$ kategorisinde $f : A \rightarrow B$ morfizmi verilsin. Eğer bu f morfizmi sağdan kısaltma özelliğine sahipse yani olacak şekildeki g *ve* h morfizmleri için $g = h$ bulunabilirse f morfizmine bir *epimorfizm* denir (Alp, 1997) .

Tanım 1.21: $\mathcal{C}$ bir kategori ve $f : A \rightarrow B$ de bu kategoride bir morfizm olsun. Eğer $gf = 1_A$ olacak şekilde bir $g : B \rightarrow A$ morfizmi varsa f ye bir *kesit* denir. Eğer $fg = 1_B$ olacak şekilde bir $g : B \rightarrow A$ morfizmi varsa f ye bir *dual kesit* denir (Alp, 1997).

Tanım 1.22: Monomorfizm ve epimorfizm olan bir morfizme *bimorfizm*, kesit ve dual kesit olan bir morfizme ise *izomorfizm* denir. Eğer $f : A \rightarrow B$ dönüşümü bir izomorfizm ise A ve B nesnelerine *izomorf* denir (Alp, 1997).

Tanım 1.23: Bir $\mathcal{C}$ kategorisinde A $\in Ob(\mathcal{C})$ nesnesi verilsin. Eğer her bir $X \in Ob(\mathcal{C})$ nesnesi için $Mor_C(A,X)$ bir tek morfizme sahipse A $\in Ob(\mathcal{C})$ nesnesine bir *kaynak dönüşümü* denir.Benzer olarak her bir $X \in Ob(\mathcal{C})$ nesnesi için $Mor_C(A,X)$ bir tek morfizme sahipse A $\in Ob(\mathcal{C})$ nesnesine bir *hedef dönüşümü* denir (Alp, 1997).

1.2.Funktorlar

Her kategoride, nesneler arasındaki dönüşümlere karşılık gelen morfizmlerin olduğu bilinmektedir. Örneğin kümeler arasında fonksiyonlar, topolojik uzaylar arasında sürekli fonksiyonlar, gruplar arasında grup homomorfizmleri vardır. Benzer olarak kategoriler arasında da dönüşümlerin olması kaçınılmazdır. Bu dönüşümlere literatürde funktor denir ve çeşitli özellikleri mevcuttur. Bu özellikler ve tanımlamalar aşağıdaki gibi verilebilir.

Tanım 1.24: $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{D}$ iki kategori olmak üzere $\mathcal{C}$ nin her bir A nesnesini $\mathcal{D}$ nin bir $F(A)$ nesnesine, $\mathcal{C}$ nin her bir $f : A \rightarrow B$ morfizmini ise $\mathcal{D}$ deki bir $F(f) : F(A) \rightarrow F(B)$ morfizmine dönüştüren ve aşağıdaki şartları sağlayan bir F dönüşümüne $\mathcal{C}$ den $\mathcal{D}$ ye bir *funktor* denir ve $F : C \rightarrow D$ biçiminde gösterilir.

i) $\mathcal{C}$ kategorisinde $g \circ f$ bileşkesi tanımlı olacak şekildeki f ve g morfizmleri için $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ dir.

ii) $\forall A \in Ob(\mathcal{C})$ için $F(1_A)=1_{F(A)}$ dır (Alp, 1997)-(Alp ve Wensley, 2010)..

Tanım 1.25 : $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ kategorisinin alt kategorisi, $\forall X \in \mathcal{C}$ için $iX = X$ ve $\mathcal{C}$ kategorisinin her morfizmi için de

$$ia = a$$

biçiminde ise $i : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ bir funktordur. Bu funktora *dahil etme funktoru* denir (Higgins, 1971).

Tanım 1.26 : $F : Grp \rightarrow Grp$ funktoruna *türemiş grup funktoru* denir. $F : Grp \rightarrow Abel$ funktoruna ise *abel funktoru* adı verilir (Higgins, 1971).

Tanım 1.27 : $F : A_1 \times A_2 \rightarrow A$ şeklinde tanımlı funktora *bifunktor* , $F : A_1 \times A_2 \times A_3 \rightarrow A$ şeklinde tanımlı funktora *trifunktor* ,ve

$$F : A_1 \times A_2 \times A_3 \times \ldots \times A_n \rightarrow A \qquad n \geq 4$$

şeklinde tanımlı funktora ise *multifunktor* denir (Higgins, 1971).

Tanım 1.28 : $F{:}A \rightarrow B$ funktoru için $G \circ F = 1_A$ ve $F \circ G = 1_B$ olacak şekilde $G : B \rightarrow A$ funktoru bulunabiliyor ise F funktoruna *izomorfizm* denir (Higgins, 1971).

Tanım 1.29: Eğer $F{:}A \rightarrow B$ izomorfizm ise A ve B kategorilerine *izomorfik kategoriler* denir (Higgins, 1971) .

1.3.Homotopi

Tanım 1.30 : $F(x,0) = f_0(x)$, $F(x,1) = f_1(x)$ $\forall x \in X$ şartları ile birlikte $F{:}X \times I \rightarrow Y$ sürekli dönüşümüne *homotopi* denir. Burada X, Y uzaylar olmak üzere $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ sürekli dönüşümlerdir ve f_0, f_1'e *homotopiktir* denir (Mucuk, 1949; Atiyah ve Macdonold, 1969).

İki matematiksel nesnenin homotopik olması, birinin diğeri üzerine sürekli olarak deforme edilebilmesi ile aynı anlamdadır. Örneğin gerçel sayı doğrusu, tek bir noktaya homotopiktir. Ancak çember, tek bir nokta uzayına homotopik değildir (Mucuk, 1949; Atiyah ve Macdonold, 1969).

Tanım 1.31 : Nesneleri X topolojik uzayları, *Hom* kümeleri $Hom(X ,Y) = [X ,Y]$ ve birleşimleri $[g] \circ [f] = [g \circ f]$ biçimindeki bölüm kategorisi *homotopi kategorisi* olarak adlandırılır ve *hTop* ile ifade edilir (Mucuk, 1949; Atiyah ve Macdonold, 1969).

Tanım 1.32: Nesneleri topolojik uzaylar, morfizmleri homotopi sınıfları ve kısmi çarpım işlemide homotopi sınıfları arasında tanımlı * işleminden oluşan kategoriye *homotopiler kategorisi* denir (Mucuk, 1949; Atiyah ve Macdonold, 1969).

Tanım 1.33 : $f : X \to Y$ fonksiyonu sabit bir fonksiyona homotopik ise f 'ye *null homotopik fonksiyon* denir (Mucuk, 1949; Atiyah ve Macdonold, 1969).

Tanım 1.34: (Relatif homotopi)-$A \subset X, f : X \to Y$ *ve* $g : X \to Y$ sürekli fonksiyonlar olsunlar. Eğer a $\in$ A için f ve g arasında $t \in I$ dan bağımsız $F(a,t)$ homotopisi mevcutsa f ve g fonksiyonlarına A ya göre homotopiktirler denir. Diğer bir deyişle $\forall a \in A$ ve $\forall t \in I$ için $F(a,t) = f(a) = g(a)$ olacak şekildeki F homotopisine A ya göre homotopi denir. Bu homotopi $f \simeq g$ veya $F: f \simeq g(relA)$ biçiminde gösterilir.

$F: f \simeq g(relA)$ *ise* $\forall x \in X$ *için* $F(x,0) = f(x)$ *ve* $F(x,1) = g(x)$ olup $\forall x_0 \in A$, $\forall t \in I$ için $F(x_0 , t) = f(x_0) = g(x_0)$ elde edilir. Eğer $A = \emptyset$ ise A ya göre homotopiye *null homotopi* denir (Mucuk, 1949; Atiyah ve Macdonold, 1969).

1.4.Homotopi denkliği

İki sürekli fonksiyonun homotopik iken denk oluğunu düşünecek isek, homeomorfizm tanımını değiştirmemiz gerekir '=' işareti yerine homotopiyi koymalıyız. Bu bizi aşağıdaki 'homotopi denkliği' kavramına götürür:

Tanım 1.35:X *ve* Y iki topolojik uzay olsun. Eğer $g \circ f \simeq I_x : X \to X$ ve $f \circ g \simeq I_y : Y \to Y$ olacak şekilde $f : X \to Y$ ve $g : Y \to X$ sürekli fonksiyonları mevcutsa, X *ve* Y uzaylarına aynı homotopi tipindendir ya da homotopik olarak denktir denir. f *ile* g fonksiyonlarına ise homotopi denklikleri denir.

Yazarken ‘homotopi denkliği’ kavramından ziyade ‘iki uzayın homotopik olması kavramı daha yaygındır (Mucuk, 1949; Atiyah ve Macdonold, 1969).

Teorem 1.1 : Homotopi bağıntısı " $\simeq$ " bir denklik bağıntısıdır.

İspat : " $\simeq$ " bağıntısının bir denklik bağıntısı olması için yansıma, simetri ve geçişme özelliğine sahip olduğunu göstermeliyiz.

i)" $\simeq$ "bağıntısınınyansıyan olduğunu göstermek için $F(x,0)=f(x)\ ve\ F(x,1)=f(x)$ olacak şekilde bir $F\colon X\ \times I\to Y$ sürekli fonksiyonunun tanımlanması gerekir. Burada $F(x,t)=f(x)$ olacak şekilde tanımlanırsa f $\simeq$ f olduğu görülür.

ii) $\simeq$ bağıntısının simetrik olduğunu göstermek için $f\simeq g$ iken $g\simeq f$ olduğunu göstermeliyiz. $f\simeq g$ olsun. Bu durumda

$$F\colon X\ \times I\to Y\ ,\qquad (x,t)\mapsto F(x,t)$$

sürekli fonksiyonu $F(x,0)=f(x)\ ve\ F(x,1)=g(x)$ olacak şekilde mevcuttur.

Buradan

$$G\ :\ X\times I\ \longrightarrow\ Y$$

fonksiyonu da sürekli olup $G(x,1)=F(x,0)=f(x)$ ve $G(x,0)=F(x,1)=g(x)$ elde edilir. O halde $g\simeq f$ dir.

iii) $f\simeq g$ ve $g\simeq h$ olsun. O halde;

$$F\colon X\ \times I\to Y$$
$$(x,t)\mapsto F(x,t)$$

sürekli fonksiyonu $F(x,0)=f(x)$ ve $F(x,1)=g(x)$ olacak şekilde ve

$$G\colon X\ \times I\to Y$$
$$(x,t)\ \mapsto G(x,t)$$

sürekli fonksiyonu $G(x,0)=g(x)$ ve $G(x,1)=h(x)$ olacak şekilde mevcuttur.

F ve G yardımı ile

$$H\colon X\ \times I\to Y$$

$$(x,t)\ \ \mapsto H(x,t)=\begin{cases}F(x,2t), 0\le t\le 1/2\\ G(x,2t-1), \frac{1}{2}\le t\le 1\end{cases}$$

sürekli fonksiyonunu tanımlayabiliriz. Buradan

$$H(x,0)=F(x,0)=f(x)$$

ve

$$H(x,1)=G(x,1)=h(x)$$

elde edilir. O halde $f\simeq h$ dır (Mucuk, 1949; Atiyah ve Macdonold, 1969).

Bölüm 2

2.1 Temel Kavramlar

Bu böümde ilk olarak tüm bağlantılı homotopi tipleri icin cebirsel model teşkil eden simplisel cebirler kategorisi, ©impCbr, incelenecektir. Daha sonra simplisel objelerin ve Carrasco tarafından (M. Gerstenhaber, 1966) de tanımlanan yüksek mertebeden Peiffer elemanları ile hiper çaprazlanmış kompleks çiftlerinin bazı temel özellikleri verilecektir. (Özellikle bolüm sonunda verilen tablo yardımıyla ikinci bölümde 3—çaprazlanmış modül kavaramı tanımlanacaktır.

2.2 Simplisel Cebirler

Bu kısımda simplisel cebirler ve homoloji modülleri ile ilgili bilinen bazı tanımlar ve özellikler yer almaktadır. Bu kısma ilişkin daha fazla detay için Andre (Orter, 1993) nin "Homologie des algebres commutatives" kitabına başvurulabilir.

k, bir sabit, birimli, değişmeli halka olsun. Burada bütün k-cebirleri değişmeli ve birleşimli olarak kabul edilecek ancak idealler ve modülüler cebir olarak düşünülecektir. Bütün k-modüllerinin kategorisi M o d ile gösterilecektir.

Tanım 2.1 M bir k-modul olsun. Her m_1,m_2,m_3 e M için

$$\begin{aligned} Mx\,M &\to M \\ (m_1, m_2) &\to m_1 m_2 \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan k-bilineer fonksiyonu

$$\text{i)}\, m_1 m_2 = m_2 m_1 \qquad ii)\,(m_1 m_2)\, m_3 = m1\,(m_2 m_3)$$

koşullarını sağlıyorsa M ye bir **değişmeli** k-**cebiri** (ya da k üzerinde cebir) denir. Değişmeli cebirler kategorisini $\mathfrak{Cbr}$ ile göstereceğiz.

Bu bölüme simplisel cebirler teorisi ile ilgili bazı temel bilgiler vererek başlayacağız. Birinci kısımda simplisel objeler üzerinde bazı genel sonuçları hatırlayacağız. Özellikle, değişmeli cebirler üzerinde tanımlı simplisel objeler üzerinde yoğunlaşacağız.

Tanım 2.2 $(\mathrm{E}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cebirlerin bir ailesi olsun.

$$\begin{aligned} \mathrm{d}_i^n &: E_n \to E_{n-1} \qquad 0 \le \mathrm{i} \le n \ne 0, \\ \mathrm{s}_i^n &: E_n \to E_{n+1} \qquad 0 \le \mathrm{i} \le n, \end{aligned}$$

k—cebir homomorfizmleri olmak üzere

1. $d_i^{n-1} d_j^n \quad = \quad d_{i-1}^{n-1} d_i^n \qquad 0 \le i < j \le n \;\; ise$

2. $d_i^{n+1} s_j^n \quad = \quad s_{j+1}^{n+1} s_i^n \qquad 0 \le i \le j \le n \;\; ise$

3. $d_i^{n+1} s_j^n \quad = \quad s_{j-1}^{n-1} d_i^n \qquad 0 \le i \le j \le n \;\; ise$

4. $d_i^{n+1} s_j^n \quad = \quad id \qquad i = j \;\; ya \;\; da \;\; i = j+1 \;\; ise$

5. $d_i^{n+1} s_j^n \quad = \quad s_j^{n-1} d_{i-1}^n \qquad 0 \le j \le i-1 \le n \;\; ise$

özdeşlikleri sağlanıyorsa $\left((\mathrm{E}_n)_{n\in\mathbb{N}}, d_i, s_i \right)$ üçlüsüne bir **simplisel cebir** denir ve kısaca **E** ile gösterilir. d_i, s_i homomorfizmlerine sırasıyla **yüzey** ve **dejenere operatörleri** denir. Uygulamadaki kolaylığı acısından yukarıdaki aksiyonların gerektirdiği aşağıdaki eşitlikler daha sık kullanılır.

1. $d_i d_j \quad = \quad d_j d_{i+1} \qquad 0 \le j < i \le n \;\; ise$

2. $s_i s_j \quad = \quad s_j s_{i+1} \qquad 0 \le j \le i \le n \;\; ise$

3. $s_i d_j \quad = \quad d_j s_{i+1} \qquad j \le i \;\; ise$

4. $s_i d_j \quad = \quad d_{j+1} s_i \qquad i > j \;\; ise$

Bu eşitlikler standarttır ve (Gerstenhaber, 1966) de bulunabilir.

Tanım 2.3 $\mathrm{x} \in \mathrm{E}_n$ elemanlarına n- **boyutlu simpleks** denir. Bazı y ler için $x = s_i(y)$ oluyorsa bu x simpleksine bir **dejenere simpleks** denir.

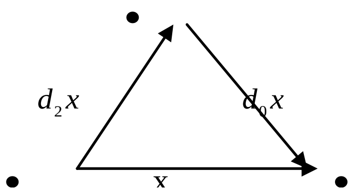
Tanım 2.4 Bütün d_i^n yüzey operatörleri ve bütün s_i^n denejere operatörleri birleşmeli olan yani

$$d_i f_n = f_{n-1} d_i, \qquad f_n s_i = s_i f_{n-1}$$

Şartını sağlayan $f_n : E_n \to F_n$ k-cebir homomorfizmlerinin bir kümesine **E** ve **F** simpisel cebirleri arasında bir **homomorfizm** denir ve $\mathbf{E} \to \mathbf{F}$ şeklinde gösterilir. Böylece $\mathfrak{SimpCbr}$ ile göstereceğimiz simplisel cebirlerin kategorisi tanımlanmış olur. Bu tanımın düşük boyutlar için bir geometrik yorumu şu şekilde yapabilir:

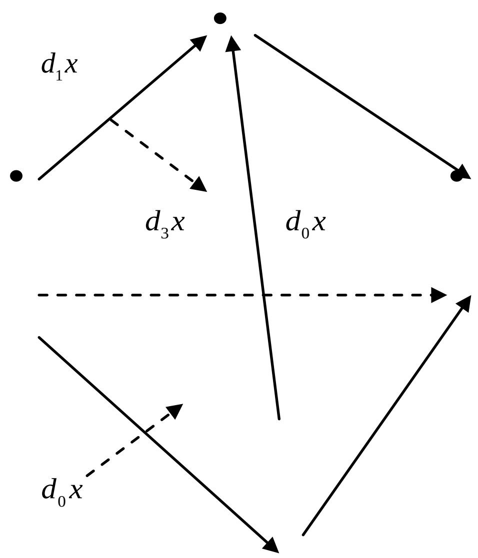
$n = 0$ için bir 0 – boyutlu simpleks açık bir $x \in E_0$ noktasıdır. $x \in E_1$ için 1 - boyutlu simpleks $\qquad d_1 x \bullet \xrightarrow{x} \bullet \; d_0 x$

$x \in E_2$ için 2 - boyutlu simpleks üçgendir:



Şekil 2.1. Simpleks Üçgeni

ve $x \in E_3$ için 3- boyutlu simpleks bir dörtyüzlüdür.***6***



Şekil 2.2. Simpleks Dörtyüzlü

Tanım 2.5 Bir simplisel k-modül, $n \geq 0$, Tanım 1.2.2 de verilen denklemleri sağlayan k—modül homomorfizmleri ile k—modüllerin bir E_n ailesidir.

Tanım 2.6 **E** herhangi bir simplisel K – modül olsun ve

$$\partial_n : E_n \to E_{n-1}$$

Homomorfizmi

$$\partial_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i d_i^n$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda k - modüllerinin bir kompleks zinciri vardır. Simplisel cebirlerin tanımında yer alan 1. aksiyom gereği $\partial_{n+1} \partial_n = 0$ dır. Bu böylece **E** simplisel modülüyle ilişkili bir zincir kompleksi olur. Buradan

n. homoloji modülü H_n (**E**)

$$H_n(E) = \frac{Çek\partial_n}{\operatorname{Im}\partial_{n+1}}$$

Şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.7 **E** bir simplisel k-cebir olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $E_n = E$ ve $d_J = s_j = id$ olmak üzere $((E_n)_{n\in\mathbb{N}}, d_i, s_i)$ üçlüsü bir simplisel cebirdir. Bu simplisel cebire **sabit simplisel cebir** denir ve **K**(E, 0) ile gösterilir.

Tanım 2.8 Bir **E** simplisel cebir, K (E, 0) sabit simplisel cebir olsun,

$$\mathrm{E} \rightarrow \mathrm{K(E,\ 0)}$$

dönüşümüne **E** simplisel cebirinin artırılmışı denir. Bu artırma

$$fd_0^1 \ = \ fd_1^1 : E_1 \ \rightarrow \ E$$

örten k-cebir homomorfizmi yardımıyla olur. Eğer **E** artırılmış simplisel cebiri devirli ve $n > 0$ icin H_n (E) $\cong$ 0 , H_0 (**E**) $\cong$ E ise bu simplisel cebire **devirli simplisel cebir** denir.

2.3 Bir Cebirinin Simplisel Çözümü

Tanım 2.9 B bir değişmeli k-cebir olsun. B nin bir serbest simplisel çözümü, (**E**, f) devirli ve herbir E_n serbest olacak şekilde bir $f : E_0 \rightarrow B$ genişlemesi ile birlikte bir **E** simplisel cebirinden oluşur.

2.4 Bir Simplisel Cebirin Moore kompleksi ve Homotopi Modülü

Tanım 2.10 **E** simplisel cebir olsun.

$$\left(NE\right)_n \ = \bigcap_{i=0}^{n-1} Çekd_i^n$$

ve her

$$\mathrm{n} \ \geq \ 0 \text{ icin } \partial_{\mathrm{n}} \ : \mathrm{NE_n} \ \rightarrow \ \mathrm{NE_{n-1}} \text{ donüşümü, } \mathrm{d_n^n} : \mathrm{E_n} \ \rightarrow \ \mathrm{E_{n\text{-}1}}$$

dönüşümünün $(NE)_n$ kümesine kısıtlanışı olmak üzere (**NE**, ∂) zincir kompleksine **E** simplisel cebirin **Moore kompleksi** denir.

Tanım 2.11 **E** simplisel cebir olsun. **E** nin Moore kompleksinin n. Homolojisine **E** nin **n. homotopi modülü** denir ve π_n **(E)** ile gösterilir. Yani

$$\begin{aligned} \pi_n\left(E\right) \ &\cong \ H_n(NE,\partial) \\ &= \bigcap_{i=1}^{n} Çekd_i^n \,/\, d_{n+1}^{n+1}(Çekd_i^{n+1}) \end{aligned}$$

$NE \ \ ve \ \ \pi_n(E)$ nin yorumunu şu şekilde yapılabilir:

$$n = 1,\ \omega \in NE_1 \ \ \text{için}$$

$$\partial\omega \bullet \xrightarrow{\ \omega\ } \bullet\ 0$$

Ve $\omega \in NE_2$

$$
\begin{tikzcd}
 & \bullet \arrow[dr, "0"] & \\
\bullet \arrow[ur, "\partial_\omega"] \arrow[rr, "0"'] \arrow[rr, phantom, bend left=40, "\omega"] & & \bullet
\end{tikzcd}
$$

Eğer $\omega \in NE_2$

$$
\begin{tikzcd}
 & \bullet \arrow[dr, "0"] & \\
\bullet \arrow[ur, "0"] \arrow[rr, "0"'] \arrow[rr, phantom, bend left=40, "\omega"] & & \bullet
\end{tikzcd}
$$

şeklinde ise $\omega, Çek\partial$ içindedir. Eğer ω onun 3. yüzünde ve diğer bütün yüzleri de sıfır olacak şekilde bir x 3-şimpleksi varsa x, π_2 (E) nin aşikar elemanını verir.

2.5 Kısıtlanmış Simplisel Cebirler

NE ve π_n (**E**) nin elemanları için bu basit yorum, ilerde, bazı başka durumlardaki elemanların yorumuna yardımcı olarak faydalı olacaktır.

Tanım 2.12 E simplisel cebirinde mertebesinin boyutu > k olan E_n elemanlarını almayarak elde edilen komplekse **E** simplisel cebirin bir **k-kısıtlanmış simplisel cebiri** denir ve $\mathbf{tr_k E}$ ile gösterilir. k-kısıtlanmış simplisel cebirlerin kategorisi $Tr_k\mathfrak{SimpCbr}$ ile gösterilir.İskelet funktor hakkındaki bazı bilgiler (Gerstenhaber, 1966) dan hatırlanacaktır. Cebirlerin kategorisi $\mathfrak{Cbr}$ de bir kısıtlama funktoru vardır. Bu funktor k-tersiskelet funktor olarak adlandırılan

$$\cos k_k : Tr_k\mathfrak{SimpCbr} \to \mathfrak{SimpCbr}$$

şeklinde sağ ek (adjoint) ve k-iskelet funktor olarak adlandırılan bir

$$\mathrm{sk}_k : \mathrm{Tr}_k\mathfrak{SimpCbr} \to \mathfrak{SimpCbr},$$

sol ek funktora şahip olan

$$\mathrm{tr}_k : \mathfrak{SimpCbr} \to Tr_k\mathfrak{SimpCbr}$$

şeklinde bir kısıtlama funktoru vardır. İskelet funktor hakkındaki detaylı bilgi için (Gerstenhaber, 1966) ve (Andre, 1970) den elde edilebilir.

Aşağıda verilen teorem (Mucuk, 2010) tarafından gruplar için yapılmıştır. Burada bunun ispatını vermeyeceğiz fakat daha farklı bir yol izleyerek bazı değişiklikler yapılmış olan ve değişmeli cebirler için kullanılan (Asar ve Arıkan, 2009) de bulunan sonucu vereceğiz.

Teorem 2.1 (Mucuk, 2010) **E** bir simplisel cebir olsun. **E** nin tersiskeleti $\operatorname{cosk}\left(\operatorname{tr}_k(\mathbf{E})\right)$ nin Moore kompleksi k + 1 uzunluğundadır. Yani

$$\mathrm{i} > \mathrm{k} + 1 \text{ için } \mathrm{N}\left(\operatorname{cosk}_k\left(\operatorname{tr}_k(\mathrm{E})\right)\right)_i = 0$$

dir ve k + 1 den küçük boyutlarda **E** nin Moore kompleksi ile özdeştir. Buradan

$$\mathrm{N}\left(\operatorname{cosk}_k\left(\operatorname{tr}_k(\mathrm{E})\right)\right)_{k+\imath} = \text{Çek}\left(\partial \mathrm{k} : \mathrm{NE}_k \to \mathrm{NE}_{k-1}\right)$$

ve

$$\partial_{k+1} : N\left(\operatorname{cosk}_k\left(\operatorname{tr}_k(\mathrm{E})\right)\right)_{k+\imath} = N\left(\cos k_k\left(\operatorname{tr}_k(\mathrm{E})\right)\right)_k = NE_k$$

morfizmi birebirdir.

2.6 Yüksek Mertebeden Peiffer Elemanları

Bu bölümde (Hungerford, 1974) de verilen aşağıdaki sonuçları vereceğiz:

NE n > 1 İçin E nin Moore kompleksi olsun. Aynı şekilde n > 1 için ,D_n boyutlu dejenere elemanları tarafından Üretilen ideal olsun. Eğer $E_n = D_n$

ise her

$$\partial_n\left(NE_n\right) = \partial_n\left(I_n\right)$$

dir. Burada, I_n, E_n içinde, açık olarak verilen elemanların kümesi tarafından üretilen bir idealdir.Eğer n = 2, 3 ya da 4 ise bu durumda **E** simplisel cebirin Moore kompleksinin görüntüsü

$$\partial_n(NE_n) = \sum_{I,J} K_I K_J$$

Formunda verilebilir. Burada $\varnothing \neq I, j \subset [n-1] = \{0,1....,n-1\}$ olmak üzere

$I \cup J = [n-1]$ ve

$$K_1 = \bigcap_{i \in 1}^{n} \text{Çekd}_i\, v \quad ve \quad K_j \bigcap_{j \in J} \text{Çekd}_j$$

dir. Genel olarak n > 4 için

$$\sum_{I,J} K_I K_J \subseteq \partial_n(NE_n)$$

ifadesi tanımlanmıştır.

2.13 Tanım ve Notasyon:İlk olarak P. Carrasco ve A.M. Cegarra (Lichtenbaum ve Schlessinger, 1967) den aşağıdaki notasyon ve terminolojiyi hatırlayalım.

$[n]=\{0<1<...<n\}$ *sıralı kümesi için* $\alpha_i^n:[n+1]\to[n]$

$$\alpha_i^n=\begin{cases} j & , \ j\le i \quad ise \\ j-1 & , \ j>i \quad ise \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan artan, örten fonksiyon olsun.

$S(n,n-r)$, $[n]$ *den* $[n-r]$ ye monoton artan orten bütün fonksiyonların kümesi olsun. Bu küme α_i^n lerin çeşitli birleşimleriyle üretilebilir. Bu üretilen fonksiyonların birleşimi aşağıdaki asitliği sağlar.

$$\alpha_j\alpha_i = \alpha_{i-1}\alpha_j \qquad j<i$$

$0<i_1<i_2< ... <i_r\le n-1$ *olmak üzere bu, her* $\alpha\in S(n,n-r)$ *elemanının*

$$\alpha=\alpha_{i1}\, o\, \alpha_{i2} o ....o\ \alpha_{ir}$$

şeklinde bir tek açılımının olmasını gerektirir. Burada i_k indisleri

$$\{i_1,......,i_r\} = \{i:\alpha(i)=\alpha(i+1)\}$$

olacak şekilde $[n]$ nin elemanlarıdır. Böylece $S(n,\ n-r)$ kümesini

$$\{(i_r,......,i_1):\ 0\le i_1\le i_2< ... <i_r\le n-1\}$$

kümesi ile belirleyebiliriz. Özellikle [n] üzerinde birim fonksiyon ile tanımlanan S(n, n) nin tek elemanı, ϕ_n ile gösterilen bos 0 — tuple ( ) a karşılık gelir. Benzer olarak S(n, 0) ın tek elemanı (n — 1, n — 2 , . . . , 0) dır. Her $n\ge 0$ için

$$\mathrm{S}(n)=\bigcup_{0\le r\le n} S(\mathrm{n},\ \mathrm{n\text{-}r})$$

olsun. Eğer $i_1=j_1,.....,i_k=j_k$ *fakat* $i_{k+1}>j_{k+1}$ *ise ya da eğer*

$i_1=j_1,....,j_r$ *ve* $r<s$ *ise* $\alpha=(i_r,.....,i_1)<\beta=(j_s,....,j_1)$, $S(n)$ nin içindedir denir.

Bu $\mathrm{S}(\mathrm{n})$ yi bir sıralı küme yapar. Örneğin S (2) deki ve S (3) deki sıra

$$\begin{aligned} S(2) &= \{\phi_2<(1)<(0)<(1,0)\} \\ S(2) &= \{\phi_2<(2)<(2,1)<(0)<(2,0)<(1,0)<(2,1,0)\} \\ S(2) &= \{\phi_2<(3)<(2)<(3,2)<(1)<(3,1)<(2,1)<(3,2,1)<(0) \\ &\quad <(3,0)<(2,0)<(3,2,0)<(1,0)<(3,1,0)<(2,1,0)<(3,2,1,0)\} \end{aligned}$$

Şeklindedir. $\alpha, \beta \in S(n)$ *ise* $\alpha \cap \beta$, her ikisine birden ait olan indislerin kümesini belirtir.

2.7. Bir Simplisel Cebirin Yarıdirekt Ayrışması

Buradaki temel fikir Conduche (Taşcı, 2007) de bulunabilir. Bir simplisel grup durumu için ayrıntılı inceleme Carasco ve Cegarra tarafından (Lichtenbaum ve Schlessinger, 1967) de verilmiştir. Bu yapının cebir durumu ise Carrasco tarafından (Gerstenhaber, 1966) de yapılmıştır.

Tanım 2.14 M bir k - cebir ve n $\geq$ 2 olmak üzere $\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2, \ldots, \mathrm{M}_n$ ler M nin alt cebirleri olsun. Aşağıdaki koşulların sağlanması durumunda M k - cebirine $\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2, \ldots, \mathrm{M}_n$ alt cebirlerinin bir n - yarıdirekt çarpımı denir ve

$$\mathrm{M}=\mathrm{M}_1 \rtimes \mathrm{M}_2 \rtimes \ldots \rtimes \mathrm{M}_n$$

şeklinde gösterilir.

(i) $\mathrm{M}_1 + \ldots + \mathrm{M}_s$ $1 \leq s$ _ n icin M nin bir idealidir,

(ii) $\mathrm{M}_1 + \ldots + \mathrm{M}_n = \mathrm{M}$,

(iii) $(\mathrm{M}_1 + \ldots + \mathrm{M}_s) \cap \mathrm{M}_t = 0$ $\quad 1 \leq s < t \leq n$ için,

$m_i \in M_i$ olmak üzere herhangi bir eleman, tek bir türlü olarak $m_1 + m_2 + \ldots + m_n$ şeklinde ifade edilebilir.

Teorem 2.2 (Hungerford, 1974). **E** bir simplisel cebir olsun. Bu durumda E_n yarıdirekt çarpım olarak

$$E_n \cong Çekd_n^n \rtimes S_{n-1}^{n-1}(E_{n-1})$$

Şeklinde ifade edilebilir. İzomorfizm aşağıdaki şekilde tanımlanabilir.

$$\theta : E_n \rightarrow Çek\, d_n^n \rtimes S_{n-1}^{n-1}(E_{n-1})$$
$$e \rightarrow (e - s_{n-1}d_n e, s_{n-1}d_n e)$$

E_n ile $Ç\mathrm{ekd}_n \mathrm{x}\, \mathrm{S}_{n-1}\mathrm{E}_{n-1}$ arasında izomorfizm var olduğundan bu metodu her bir E_n, Moore kompleksteki terimlerin dejenerelerinin bir çok katlı yarıdirekt çarpımı seklinde elde edilene kadar tekrarlayabiliriz. Gerçekten, **K**,

$$K_n = Çekd_{n+1}^{n+1}, \qquad d_i^n d_i^{n+1}\Big|_{Çekd_{n+1}^{n+1}} \; ve \; s = s_i^{n+1}\Big|_{Çekd_{n+1}^{n+1}}$$

Şeklinde tanımlanan simplisel cebir olsun. Her $i \leq n-1$ *için* $d_{n-1}^{n-1} d_i^n = d_i^{n-1} d_n^n$ olduğundan $Çekd_n^n$ bütün $d_i^n, i \leq n-1$ morfizmleri tarafından $Çekd_{n-1}^{n-1}$ *e* resmedilir. Dahası $i \leq n-2$ *için* $d_{n+1}^{n+1} s_i^n = s_i^{n-1} d_n^n$ olduğundan s_i^{n+1}, $Çekd_n^n$ *yi* $Çekd_{n+1}^{n+1}$ Resmeder. Teorem (1.3.2) E_{n-1} *ve* K_{n-1} e uygulanırsa

$$\begin{aligned} E_n &\cong Çekd_n \rtimes s_{n-1} E_{n-1} \\ &= Çekd_n \rtimes s_{n-1} \left(Çekd_{n-1} \rtimes s_{n-2} E_{n-2} \right) \\ &= K_{n-1} \rtimes \left(s_{n-1} Çekd_{n-1} \rtimes s_{n-2} E_{n-2} \right) \end{aligned}$$

Elde edilir.

K bir simplisel cebir olduğundan aşağıdaki eşitlik sağlanır.

$$\begin{aligned} Çekd_n = K_{n-1} &\cong Çekd_{n-1}^K \rtimes s_{n-2} K_{n-2} \\ &= \left(Çekd_{n-1} \cap Çekd_n \right) \rtimes s_{n-2} Çekd_{n-1} \end{aligned}$$

ve bu

$$E_n = \left(\left(Çekd_{n-1}^n \cap Çekd_n^n \right) \rtimes s_{n-2} \left(Çekd_{n-1}^{n-1} \right) \right) \rtimes \left(s_{n-2} \left(Çekd_{n-1}^{n-1} \right) \rtimes s_{n-1} s_{n-2} \left(E_{n-2} \right) \right)$$

yazmamıza izin verir. Buradan E_n aşağıdaki ifade edilebilir.

Teorem 2.3 (Asar ve Arıkan, 2009)Eğer **E** bir simplisel cebir ise bu durumda herhangi $n \geq 0$ için

$$\begin{aligned} E_n \cong\ & \left(\ldots \left(NE_n \rtimes s_{n-2} NE_{n-1} \right) \rtimes \ldots \rtimes s_{n-2} \ldots s_0 NE_1 \right) \rtimes \\ & \left(\ldots \left(s_{n-2} NE_{n-1} \rtimes s_{n-1} s_{n-2} NE_{n-2} \right) \rtimes \ldots \rtimes s_{n-1} s_{n-2} \ldots s_0 NE_0 \right) \end{aligned}$$

dir.Bu çok katlı yarı-direkt çarpımdaki terimlerin sırası ve parantezler

$$\begin{aligned} E_1 &\cong NE_1 \rtimes NE_0 \\ E_2 &\cong \left(NE_2 \rtimes s_1 NE_1 \right) \rtimes \left(s_0 NE_1 \rtimes s_1 s_0 NE_0 \right) \\ E_3 &\cong \left(\left(NE_3 \rtimes s_2 NE_2 \right) \rtimes \left(s_1 NE_2 \rtimes s_2 s_1 NE_1 \right) \right) \rtimes \\ &\quad \left(\left(s_0 NE_2 \rtimes s_2 s_0 NE_1 \right) \rtimes \left(s_1 s_0 NE_1 \rtimes s_2 s_1 s_0 NE_0 \right) \right) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} E_4 \cong\ & (((NE_4 \rtimes s_3 NE_3) \rtimes (s_2 NE_3 \rtimes s_3 s_2 NE_2)) \rtimes \\ & ((s_1 NE_3 \rtimes s_3 s_1 NE_2) \rtimes (s_2 s_1 NE_2 \rtimes s_3 s_2 s_1 NE_1))) \rtimes \\ & s_0 \, (E_3 \textit{ ün ayrışımı}) \end{aligned}$$

dizisi tarafından üretilir.

Dikkat edilirse $\alpha = (i_r, \ldots\ldots, i_1) \in S(n)$ e benzer terim

$$S_\alpha (NE_{n-\#\alpha}) = S_{i_r, \ldots, i_1} (NE_{n-\#\alpha})$$

dir. Burada $\#\alpha = r$ dir.

Buradan herhangi bir $x \in E_n$ elemanı $y \in E_n$ ve $x_\alpha \in NE_{n-\#\alpha}$ olmak üzere

$$x = y + \sum_{\alpha \in S(n)}$$

Formunda yazılabilir.

2.8 Hiper Çaprazlanmış Kompleks Çiftleri

Arvasi (Hungerford, 1974) tarafından verilen aşağıda bir I_n idealini tanımlayacağız. Herşeyden önce Carrasco (Gerstenhaber, 1966) k-lineer morfizmlerin bir ailesinin inşasını hatırlayalım.

$\alpha \cap \beta = \phi$ olmak üzere S(n) in $(\alpha\beta)$ ikili elemanlarından olusan P(n) kümesini tanımlayalım. $\alpha = (i_r, ..., i_1), \beta = (j_s, ..., j_l) \in S(n)$ dır.İhtiyacımızolan k-lineer morfizmler,

$$\left\{ C_{\alpha\beta} : NE_{n-\cong\alpha} \otimes NE_{n-\cong\alpha} \to NE_n : (\alpha, \beta) \in P(n),\ n \geq 0 \right\}$$

kompozisyonu olarak

$$\begin{tikzcd}
NE_{n-\#\alpha} \otimes NE_{n-\#\beta} \arrow[r, "C_{\alpha,\beta}"] \arrow[d, "s_\alpha \otimes s_{,\beta}"'] & \mathrm{NE}_n \\
E_n \otimes E_n \arrow[r, "\mu"'] & \mathrm{E}_n \arrow[u, "p"']
\end{tikzcd}$$

Şekil 2.3. K-Lineer Morfizmler Diyagramı

Diyagramı ile verilir. Burada

$$s_\alpha = s_{i_r} ... s_{i_1} : NE_{n-\#\alpha} \to E_n,\ s_\beta = s_{j_s} ... s_{j_1} : NE_{n-\#\beta} \to E_n$$

$j = 0,1...,n-1$ *için* $p_j = 1 - s_j d_j$ *olmak üzere* $p : E_n \to NE_n,\ p = p_{n-1} ... p_0$

bileşke gösterimler ile tanımlanır ve çarpma

$$\mu : E_n \otimes E_n \to E_n$$

İle gösterilir. Buradan

$$\begin{aligned}
C_{\alpha\beta}\left(x_\alpha \otimes y_\beta\right) &= p\mu\left(s_\alpha \otimes s_\beta\right)\left(x_\alpha \otimes y_\beta\right) \\
&= p\left(s_\alpha\left(x_\alpha\right) s_\beta\left(y_\beta\right)\right) \\
&= \left(1 - s_{n-1} d_{n-1}\right) ... \left(1 - s_0 d_0\right)\left(s_\alpha\left(x_\alpha\right) s_\beta\left(y_\beta\right)\right).
\end{aligned}$$

dir.

Şimdi, $x_\alpha \in NE_{n-\#\alpha}$ *ve* $y_\beta \in NE_{n-\#\beta}$ olmak üzere

$$C_{\alpha,\beta}\left(x_\alpha \otimes y_\beta\right)$$

Formundaki elemanlar tarafından üretilen I_n idealini tanımlayalım. Bu idealin neye benzediğini görmek için n = 2 ve $n=3$ için ideali araştıralım.

Teorem 2.4 (Hungerford, 1974) **E** bir simplisel cebir, $n>0$ *ve* D_n, E_n de dejenere elemanlar tarafından üretilen ideal olsun. $E_n = D_n$ kabül edelim. $I_n, (\alpha,\beta) \in P(n)$ olmak üzere

$$C_{\alpha,\beta}\left(x_\alpha \otimes y_\beta\right)$$

Formundaki elemanlar tarafından üretilen ideal olsun. Burada $x_\alpha \in NE_{n-\#\alpha}$, $y_\beta \in NE_{n-\#\beta}$ dır. Bu durumda

$$\partial_n\left(NE_n\right) = \partial_n\left(I_n\right) \qquad \text{olur.}$$

Teorem 2.5 n = 2 **ve** $n=3$ Durumları n = 2 ***Durumu***

Teorem 2.6 $\partial_2\left(I_2\right) \subseteq Çekd_0\ Çekd_1 = K_{\{0\}}K_{\{1\}} = K_I K_j$ dir. $n=3$ ***Durumu***

Teorem 2.7

$$\partial_3(NE_3) = \sum_{I,J} K_I K_J + K_{\{0,1\}}K_{\{0,2\}} + K_{\{0,2\}}K_{\{1,2\}} + K_{\{0,1\}}K_{\{1,2\}}$$

dir. Buradan $I \cup J = [2], \quad I \cap J = \varnothing$ *ve*

$$\begin{aligned}
K_{\{0,1\}}K_{\{0,2\}} &= \left(Çekd_0 \cap Çekd_1\right)\left(Çekd_0 \cap Çekd_2\right)\\
K_{\{0,2\}}K_{\{1,2\}} &= \left(Çekd_0 \cap Çekd_2\right)\left(Çekd_1 \cap Çekd_2\right)\\
K_{\{0,1\}}K_{\{1,2\}} &= \left(Çekd_0 \cap Çekd_1\right)\left(Çekd_1 \cap Çekd_2\right)
\end{aligned}$$

dir. **n = 4** durumu

Teorem 2.8 (Hungerford, 1974).

(Asar ve Ar1kan, 2009) $I \cup J = [3],\ I = [3] - \{\alpha\},$

$J = [3] - \{\beta\}\ ve\ (\alpha,\beta) \in P(4)$

olmak üzere

$$\partial_3(NE_4) = \sum_{I,J} K_I K_J$$

dir.

İspat: Burada kullanılan aşağıdaki bilgiler 2.,3., ve 4. bölümde sıkça kullanılacaktır.

$x_1, y_1 \in NE_1,\ x_2, y_2 \in NE_2\ \ ve\ \ x_3, y_3 \in NE_3\ \ için\, I_4$

1) $C_{(3,2,1)(0)}(x_1 \otimes y_3) = s_3s_2s_1x_1(s_0y_3 - s_1y_3 + s_2y_3 - s_3y_3)$

2) $C_{(3,2,0)(1)}(x_1 \otimes y_3) = (s_3s_2s_0x_1 - s_1s_2s_1x_1)(s_1y_3 - s_2y_3 + s_3y_3)$

3) $C_{(3,2,0)(2)}(x_1 \otimes y_3) = (s_3s_1s_0x_1 - s_2s_2s_0x_1)(s_2y_3 - s_3y_3)$

4) $C_{(2,1)(3)}(x_1 \otimes y_3) = (s_2s_1s_0x_1 - s_3s_1s_0x_1)s_3y_3)$

5) $C_{(3,2)(1,0)}(x_2 \otimes y_2) = (s_1s_0x_2 - s_2s_0x_2 + s_3s_0x_2)s_3s_2y_2)$

6) $C_{(3,1)(2,0)}(x_2 \otimes y_3) = (s_3s_1x_2 - s_3s_0x_2 + s_2s_0x_2 - s_1s_1x_2)$
$(s_3s_1y_2 - s_3s_2y_2)$

7) $C_{(3,0)(2,1)}(x_2 \otimes y_2) = (s_2s_1x_2 - s_3s_1x_2)(s_3s_0y_2 - s_1s_2y_2 + s_2s_2y_2)$

8) $C_{(3,2)(1)}(x_2 \otimes y_3) = s_3s_2x_2(s_1y_3 - s_2y_3 + s_3y_3)$

9) $C_{(3,2)(0)}(x_2 \otimes y_3) = s_3s_2x_2s_0y_3$

10) $C_{(3,1)(2)}(x_2 \otimes y_3) = (s_2y_3 - s_3y_3)(s_3s_1x_2 - s_2s_2x_2)$

11) $C_{(3,1)(0)}(x_2 \otimes y_3) = s_3s_1x_2(s_0y_3 - s_1y_3) + s_3s_2x_2(s_2y_3 - s_3y_3)$

12) $C_{(3,0)(2)}(x_2 \otimes y_3) = s_3s_0x_2(s_2y_3 - s_3y_3)$

13) $C_{(3,0)(1)}(x_2 \otimes y_3) = s_1y_3(s_3s_0x_2 - s_1s_2x_2) + s_2s_2x_2(s_2y_3 - s_3y_3)$

14) $C_{(2,1)(3)}(x_2 \otimes y_3) = (s_2s_1x_2 - s_3s_1x_2)s_3y_3$

15) $C_{(2,1)(0)}(x_2 \otimes y_3) = s_2s_1x_2(s_0y_3 - s_1y_3 + s_2y_3) + s_3s_1x_2s_3y_3$

16) $C_{(2,0)(3)}(x_2 \otimes y_3) = (s_2s_0x_2 - s_3s_0x_2)s_3y_3$

17) $C_{(2,0)(1)}(x_2 \otimes y_3) = (s_2s_0x_2 - s_1s_1x_2)(s_1y_3 - s_2y_3) +$
$(s_3s_1x_2 - s_3s_0x_2)s_3y_3$

18) $C_{(1,0)(3)}(x_2 \otimes y_3) = s_1s_0x_2s_3y_3$

19) $C_{(1,0)(2)}(x_2 \otimes y_3) = (s_1s_0x_2 - s_2s_0x_2)s_2y_3 + s_3s_0x_2s_3y_3$

20) $C_{(3)(2)}(x_3 \otimes y_3) = s_3x_3(s_2y_3 - s_3y_3)$

21) $C_{(3)(1)}(x_3 \otimes y_3) = s_3x_3s_1y_3$

22) $C_{(3)(0)}(x_3 \otimes y_3) = s_3x_3s_0y_3$

23) $C_{(2)(1)}(x_3 \otimes y_3) = s_2x_3(s_1y_3 - s_2y_3) + s_3(x_3y_3)$

24) $C_{(2)(0)}(x_3 \otimes y_3) = s_2x_3s_0y_3$

25) $C_{(1)(0)}(x_3 \otimes y_3) = s_1x_3(s_0y_3 - s_1y_3) + s_2(x_3y_3) - s_3(x_3y_3)$

dır. Teorem (1.3.5) $\partial_4(NE_4) = \partial_4(I_4)$ dür. Burada $\alpha, \beta \in P(4)$ olmak üzere üreteç elemanlarının tamamının ∂_4 altındaki görüntüsü aşağıdaki tablodadır.

BÖLÜM 3

3.1 Temel Kavramlar

Bu bölümde sıkça söz edeceğimiz, genel grup, halka ve modül teoride de iyi bilinen aşağıdaki kavramları örneklerle hatırlatalım.Bu bölümde vereceği-miz temel kavramlarla ilgili ayrıntılı bilgi için okuyucuya (Atiyah, 1969; Brown, 1975; Hungerford, 1974) referanslarını tavsiye ederiz.

Tanım 3.1. R- modül: *R* bir halka olsun. Her $m, m_1, m_2, \in M$ ve $r, r_1, r_2, \in R$ için

$$R \times M \rightarrow M$$

$$(r,m) \rightarrow rm$$

çarpımı ile

$$r(m_1 + m_2) = r\, m_1 + r\, m_2$$

$$(r_1 + r_2)m = r_1 m + r_2 m$$

$$(r_1 r_2)m = r_1 (r_2 m)$$

Şartını sağlayan,bir *M* toplamsal abelyan gruba sol *R-modül* denir.Çarpım

$$M \times R \rightarrow M$$

$$(m,r) \rightarrow mr$$

Şeklinde sağdan tanımlı ise *M* bir sağ *R-modül* yapısı oluşturur.

Örnek 3.1R bir halka olmak üzere, herhangi bir A abelyan grubu $r \in R, a \in A$ için

$$R \times A \rightarrow A$$

$$(r, a) \rightarrow ra = 0$$

tanımlaması ile *R-modül* yapısı oluşturur.

Tanım 3.2.(R-S)-bimodül: *R* ve *S* iki halka olsun.Bir *M* abelyan grubu hem sol *R-modül* hem de sağ *S*-modül ve her $r \in R, m \in M$ *ve* $s \in S$ *için*

$$r(ms) = (rm)s$$

özelliğini sağlıyor ise *M ye (R-S)-bimodül* denir ve $_RM_S$ olarak gösterilir.

Örnekler 3.2

1) *R* halkasının kendisi bir *(R-R)-bimodüldür*. *R* halkası asosyatiflik şartını sağladığından istenen elde edilir.
2) *R* komitatif halka ise her *B sol R-modülden br=rb* tanımlaması ile bir sağ *R-modül* elde edilir ve *B* bir *(R-R)-bimodül* olur.

Tanım 3.3. Birimli R-modül: *R* birimli bir halka, *M bir R-modül* olmak üzere, her $m \in M$ için

$$1_R m = m$$

ise M ye birimli R-modül denir.

Örnek 3.3. Her *G* toplamsal abelyan grup bir birimli *Z-modüldür*.

Tanım 3.4. Serbest R-Modül: *M* birimli sol (sağ) *R-modül* bir *R*-bazına sahipse *M* ye serbest sol (sağ) *R-modül* denir.

Örnekler 3.4

R, bir cisim ise *R-modül* bir vektör uzayı oluşturur.Bir komütatif *R* halkasının *N* ideali, bir *R-modüldür*.Çünki; *N* ideal olduğundan bir abelyan grup yapısı oluşturur ve her $r \in R$ için $rN \subset N$ dir.

Dolayısıyla,

$$R \times N \to N$$
$$(r,n) \to rn$$

Çarpımı kapalıdır ve modül şartları sağlanır.

Tanım 3.5. Modül Homomorfizmi: *M ve N* , iki *R-modül* olsun.

$$f : M \to N$$

fonksiyonu, her $x , y \in M$ *ve* $r \in R$ *için,*

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$
$$f(rx) = rf(x)$$

şartını sağlıyor ise $f : M \to N$ *ye* bir *R-modül homomorfizmi* denir.

Tanım 3.6. Alt Modül: *M* bir *R-modül* olsun.*M′*, *M* nin alt grubu olmak üzere

$$m \in M' \text{ ve her } r \in R \text{ için } rm \in M'$$

ise *M′ye M nin* bir *alt modülü* denir.

Örnek 3.5. $f : M \rightarrow N$ bir *R-modül homomorfizmi* olsun.Bu durumda

$$\text{Çek}f = \{ m \in M : f(m) = 0\}$$

M nin alt modülüdür.Çünkü; Çek$f$,M nin alt grubu ve $m \in M$, $r \in R$ için

$$f(rm) = rf(m) = r0 = 0$$

olduğundan $rm \in$ Çek$f$ dir.Ayrıca

$$f(M) = \{n \in N : n = f(m) , m \in M\}$$

de *N nin alt modülüdür*.Çünkü ; $f(M)$,N nin alt grubu ve $n \in f(M)$, $r \in R$ *için*

$$nr = f(m)r = f(mr)$$

ve *M bir R-modül* olduğundan $mr \in M$ dir.Dolayısıyla,

$$nr \in f(M)$$

elde edilir.

Tanım 3. 7. Bilineerlik: R komütatif halka , A,B ve G , R-modül olmak üzere

$$f:A \times B \rightarrow G$$

fonksiyonu,

$$f(a+a',b) = f(a,b) + f(a',b)$$

$$f(a,b+b') = f(a,b) + f(a, b')$$

$$r\, f(a,b) = f(ra,b) = f(a, rb)$$

şartlarını sağlıyor ise f ye *R-bilineer* denir.

3. 1. Bir grubun herhangi bir küme üzerine etkisi:

G bir grup ve S herhangi bir küme olmak üzere , $x \in S$, g_1 ,$g_2 \in G$ *için*

$$G \times S \rightarrow S$$

$$(g , x) \rightarrow g_x$$

fonksiyonu

$$e_x = x \;\; ve \;\; (g_1g_2)_x = g_{1(g_{2x})}$$

eşitliklerini sağlıyor ise bu fonksiyona G grubunun S kümesi üzerine sol etkisi denir. Sağ etkisi ise x_g olarak tanımlanır.

Tanım 3.8. Kısa tam dizi (short exact sequence):

A bir halka, M_i ler A-modül ve f_i ler A-modül homomorfizmi olmak üzere

$$\ldots \rightarrow M_{i-1} \xrightarrow{fi} M_i \xrightarrow{fi+1} M_{i+1} \rightarrow \ldots \qquad (*)$$

Dizisi her $i \in Z$ için $\text{Im}(f_i) = \text{Çek}(f_{i+1})$ şartını sağlıyor ise tamdır denir.Özel olarak

$$0 \rightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M^n \rightarrow 0$$

Dizisinin tam olması için gerek ve yeter şart *f* nin birebir , *g* nin örten olması ve *g* nin $M/f(M') \to M''$ izomorfizmine indirgenmesidir.Bu özellikteki bir diziye kısa tam dizi denir.Eğer herhangi bir (*) uzun tam dizi , herbir i ϵZ
için

$$N_i = Im(f_i) = Çek(f_{i+1})$$

ise kısa tam diziye ayrılabilir.

$$0 \to N_i \to M_i \to N_{i+1} \to 0$$

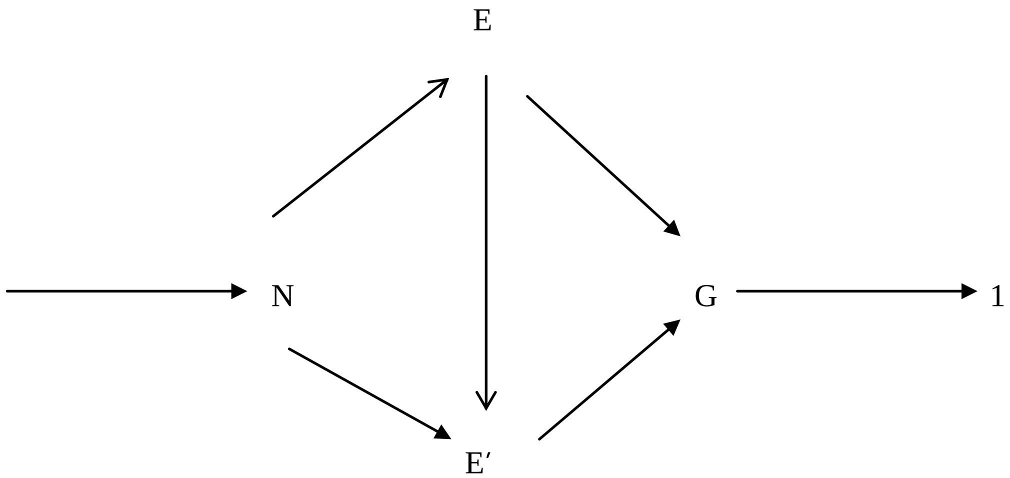
şeklinde kısa tam dizi elde edilir.

Tanım 3. 9. Merkezsel genişleme:

N grubuyla , G grubunun bir genişlemesi

$$1 \to N \to E \to G \to 1 \quad (**)$$

Grupların bir kısa tam dizisi(short exact sequence) dir.



Şekil 3.1. Merkezsel Genişleme Diyagramı

Diyagramı komütatif olacak şekilde $E \to E'$ izomorfizmi varsa , *N grubuyla G* nin ikinci bir genişlemesi

$$1 \to N \to E' \to G \to 1$$

(**) a denktir. N= Çek *i* nin bir abelyan A grup olduğu durumu düşünelim.

Bu durumun önemi,

$$0 \to A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\text{л}} G \to 1$$

Genişlemesinin *A* yı bir *G-modül* yapan *A* üzerinde *G* nin bir etkisine neden olmasıdır.*A, E* nin bir normal altgrubu olarak gömüldüğünden (resmedildiğinden) *E, A* üzerine eşlenik yardımıyla etki eder ve *A* nın kendi üzerine eşlenik etkisi *sıfır (trivial)* dir.Dolayısıyla , $G = E/A$ *nin* A üzerinde indirgenmiş etkisi vardır.Açık olarak,$g\epsilon G$ verilsin ve $л(g) = g$ olacak şekilde $g \epsilon G$ seçelim.A üzerinde g nin etkisi $a \epsilon A$ için,

$$\dot{I}(ga) = g\, i(a)\, g^{-1}$$

İle karakterize edilir.Bu eşitlik

$$g\, i(a) = i(ga)g$$

şeklinde bir komütatör kural olarak da yazılabilir.Bu özel olarak $i(A)$ nın E de merkez olması için gerek ve yeter şartın G-etkinin sıfır olması gerektiğini gösterir.Bu durumda genişlemeye bir merkezsel genişleme denir (Blyth, 1986).

Tanım 3.10. Cebir:k bir komütatif halka olsun.Bir M *k-cebir*(k üzerinde bir M *cebir*)

$$M \times M \to M$$

$$(m_1,m_2) \to m_1m_2$$

ve

$$(m_1m_2).m_3 \to m_1(m_2.m_3)$$

asosyatif çarpımını sağlayan bir k-modülüdür.

A, R-cebir : R, bir *k-cebir* ise R üzernde A cebiri

$$A \times A \to A$$

$$(a\, ,\, a_1) \to aa_1$$

ve

$$(a_1a_2)a_3 = a_1(a_2a_3)$$

asosyatif çarpımını sağlayan bir *R-bimodüldür.*

3.2. Gruplar Üzerinde Çaprazlanmış Modüller

Gruplar üzerinde çaprazlanmış modül kavramı, Whitehead (1993) tarafından tanımlanmıştır. Whitehead, bu yapıyı homotopi grupları ile ilgili çalışmasında incelemiştir.Bu bölümde, gruplar üzerinde çaprazlanmış modül kavramını tanımlayarak, bazı örnekleri inceleyeceğiz.Daha sonra, bazı temel özelliklere yer vereceğiz. Son olarakda, alt çaprazlanmış modül, normal alt çaprazlanmış modül ve çaprazlanmış bölümmodülü tanımlarını ifade edeceğiz.

3.3. 1-Çaprazlanmış Modül Kavramı

Gruplar üzerinde çaprazlanmış modül tanımını ifade ederek, grup teorisinden bildiğimiz normal alt grup, iç otomorfizmler grubu, grup genişlemesi,tensör çarpım gibi kavramlar üzerinde çaprazlanmış modül örneklerini inceleyelim.

Tanım 3.11.

$$\partial : \mathrm{C} \rightarrow \mathrm{R}$$

grup homomorfizmi ve

$$G \times C \rightarrow C$$

$$(g,c) \rightarrow g_c$$

G nin C üzerine etkisi ile birlikte, her c, c′ ϵ C ve g ϵ G için

$$ÇM1) \ \partial(g_c) = g\, \partial(c) g^{-1}$$

$$ÇM2) \ \partial c_{c'} = c\, c' c^{-1}$$

şartlarını sağlıyor ise C ye bir çaprazlanmış modül denir ve *(C,G,∂)* ile gösterilir. Şimdi, herhangi iki çaprazlanmış modül arasındaki morfizm kavramını verelim.

Tanım 3.12 *(C,G,∂) ve (C′, G′∂′)* iki çaprazlanmış modül olsun.*Her c ϵ C ve g ϵ G* için **9**

$$\varphi(g_c) = \psi(g)_{\varphi(c)}$$

ve

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\partial"'] & C' \arrow[d, "\partial'"] \\ G \arrow[r, "\psi"'] & G' \end{tikzcd}$$

Şekil 3.2. İki Çaprazlanmış Modül Diyagramı

diyagramı komütatif, yani

$$\psi(\partial(c)) = \partial'(\varphi(c))$$

olacak şekilde $\varphi : C \rightarrow C'$, $\psi : G \rightarrow G'$homomorfizmleri varsa

$$(\varphi, \psi) : (C,G,\partial) \rightarrow (C', G', \partial')$$

morfizmine çaprazlanmış modüller arasındaki morfizm denir.

Örnek 3.7.N,G grubunun altgrubunun normal altgrubu olmak olmak üzere

$$iç : N \rightarrow G$$

$$i \rightarrow i$$

içine(inclusion) homomorfizmi ve

$$G \times N \rightarrow N$$

$$(g,n) \rightarrow {}^{g}n = gng^{-1}$$

şeklindeki G nin N üzerine etkisi ile birlikte bir çaprazlanmış modül yapısı oluşturur.Gerçekten;

$$\text{ÇM1)} \qquad \partial({}^{g}n) = \partial(gng^{-1})$$
$$= \partial(g)\,\partial(n)\,\partial(g^{-1})$$
$$= g\partial(n)\,g^{-1}$$

$$\text{ÇM2)} \qquad {}^{\partial n}n' = {}^{n}n'$$
$$= nn'n^{-1}$$

şeklinde çaprazlanmış modül aksiyomları sağlanır.

Örnek: M,bir ZG-modül olmak üzere

$$\partial = 1 : M \rightarrow G$$
$$: m \rightarrow 1_G$$

aşikar (trivial) homomorfizmi ve

$$G \times M \rightarrow M$$
$$(g,m) \rightarrow {}^{g}m = gm$$

etki fonksiyonu ile birlikte bir çaprazlanmış modül yapısı oluşturur.Çünkü;

$$\text{ÇM1)} \qquad \partial({}^{g}n) = \partial(gm)$$
$$= 1$$
$$= g1g^{-1}$$
$$= g\partial(m)g^{-1}$$

$$\text{ÇM2)} \qquad {}^{\partial m}m' = {}^{1}m'$$
$$= 1m'$$
$$= mm'm^{-1}$$
$$= mm'm^{-1} \quad (M \text{ abelyan grup})$$

şeklinde çaprazlanmış modül aksiyomları sağlanır.

3.4. Çaprazlanmış Modüllerin Bazı Temel Özellikleri

$\partial : C \rightarrow G$ herhangi bir çaprazlanmış modül olmak üzere, çaprazlanmış modül kavramının temel bir sonucu olarak aşağıdaki önermeleri verebiliriz.

Önerme 3.1

$$\partial : C \rightarrow G$$

$$c \rightarrow \partial c = g$$

grupların bir çaprazlanmış modülü olsun.

i) ∂ nin çekirdeği, C nin merkezinin bir alt grubudur.

ii) ∂C, G nin normal alt grubudur.

İspat: *i)G nin C* üzerine etki fonksiyonu

$$G \times C \rightarrow C$$
$$(g,c) \rightarrow g_c = gc$$

ve

$$Çek\partial = \{ a \in C \mid \partial(a) = 1_G \}$$
$$Z(C) = \{x \in C \mid her\ y \in C\ için\ ,\ xy = yx\}$$

olmak üzere , $a \in Çek\partial$, $y \in C$

$$\begin{aligned} ay &= aya^{-1}a \\ &= (\partial(a)_y)a \quad (C,G,\partial)\text{ , çaprazlanmış modül)} \\ &= 1_y a \qquad (a \in Çek\partial) \\ &= 1ya \\ &= ya \end{aligned}$$

olduğundan $Çek\partial \subset Z(C)$ sağlanır.Ayrıca $a_1,a_2 \in Çek\partial$ *için,*

$$\partial(a_1,a_2^{-1}) = \partial(a_1)\, \partial(a_2^{-1}) = \partial(a_1)\, \partial(a_2)^{-1} = 1$$

olduğundan $a_1,a_2^{-1} \in Çek\partial$ *dir*.Dolayısıyla, $Çek\partial < Z(C)$ elde edilir.

ii) (C,G,∂)çaprazlanmış modül olduğundan

$$g\partial(c)g^{-1} = \partial(g_c)$$

eşitliği geçerlidir ve G nin C üzerine etkisinden dolayı $g_c \in C$ *dir. Dolayısıyla*

$$g\partial(c)g^{-1} = \partial(g_c) \in \partial(C)$$

elde edilir.

Önerme 3.2 $\partial : C \rightarrow G$ çaprazlanmış modül ve $\Pi_1(\partial) = G / \partial(C)$ olmak üzere, $Çek\partial$ bir $\Pi_1(\partial)$*-modül* yapısı oluşturur.

İspat : İspat için, $\partial(C)$ *nin* $Çek\partial$ üzerine birim (trivially) etki ettiğini göstermek yeterlidir.Şimdi $\partial(C)$ nin $Çek\partial$ üzerine birim etki ettiğini göstermek için, $n \in \partial(C)$, $a \in Çek\partial$ alalım.Bu durumda $n = \partial c$ olacak şekilde en az bir $c \in C$ vardır.Böylece bir önceki önermenin *(i)* şıkkı gereğince $a \in Çek\partial \subset Z(C)$ olduğundan $n_a = \partial c_a = cac^{-1} = a$

elde ederiz.Dolayısıyla ∂C, $Çek\partial$ üzerinde sıfır etki yapar.

Önerme 3.3 $\partial : C \rightarrow G$ bir çaprazlanmış modül olsun.C nin abelyanasyonu bir $G/\partial C$-*modül* yapısına sahiptir.

İspat: İlk olarak abelyanasyonun tanımını hatırlatalım.

$$[C,C] = \{cc'c^{-1}(c')^{-1} : c,c' \epsilon C\}$$

kümesi C nin bir normal alt grubudur.Dolayısıyla

$C^{Ab} = C/[C,C]$ bölüm grubu oluşturur.Aynı zamanda, abelyan olan bu bölüm grubuna C nin *abelyanasyonu* denir.İspat için, bir önceki önermedeki gibi, ∂C nin C^{Ab} üzerine birim etki yaptığını göstermek yeterlidir. $n \epsilon \partial(C)$ ve $\partial c = n$ olmak üzere , herhangi $c' \epsilon C$ için, ∂ çaprazlanmış modül olduğundan

$$n_{c'} = \partial c_{c'} = cc'c^{-1}$$

eşitliği geçerlidir.Dolayısıyla

$$n_{c(c)}{}^{-1} \epsilon [C,C]$$

veya bu ifadeye denk olarak

$$^{n}(c[C,C]) = c[C,C]$$

dir.Böylece ∂C , C^{Ab} üzerine birim etki eder.

Sonuç: $\partial C^{Ab} = \partial C/[\partial C, \partial C]$ abelyan grubu $G/\partial C$-*modül* yapısına sahiptir.

Önerme 3.4. (C,G,∂) bir çaprazlanmış modül olsun.Bu durumda

$$Çek\partial \rightarrow C^{Ab} \xrightarrow{g} \partial C^{Ab} \rightarrow 1$$

dizisi , *$G/\partial C$ – modüllerin bir tam dizisidir.*

İspat:

$$1 \rightarrow Çek\partial \xrightarrow{f} C \xrightarrow{g} \partial C \rightarrow 1 \quad (*)$$

dizisinin, tam dizi olduğu kolayca görülür.Buradan, $I = \partial C$olmak üzere

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "g"] \arrow[d] & I \arrow[d] \\ C/[C,C] \arrow[r, "\bar{g}"'] & I/[I,I] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} c \arrow[r] \arrow[d] & \partial c \arrow[d] \\ c[C,C] \arrow[r] & \partial c[I,I] \end{tikzcd}$$

Şekil 3.3. Komutatif Diyagramı

komütatif diyagramı elde edilir.Yani $\bar{g}$ fonksiyonu örtendir.

(*) dizisi tam olduğundan

$$0 = gf : Çek\partial \to \partial C$$

fonksiyonu sıfır fonksiyonudur.Dolayısıyla

$$Çek\partial \to C \to C^{Ab}$$

bileşke fonksiyonu yardımıyla

$$Çek\partial \to Çek(C^{Ab} \to \partial\, C^{Ab})$$

fonksiyonu örten olduğu kolayca görülür.Dolayısıyla iddia edilen dizi tamdır.

Not: Yukarıda verilen önermelerin ispatının detayı cebirler üzerinde çaprazlanmış modülde verilen ispat ile benzer olduğundan verilmemiştir.

Önerme 3.5.

$$\partial : A \to G \text{ ve } \delta : B \to G$$

iki çaprazlanmış modül ve

$$(\phi, id) : (A,G,\partial) \to (B,G,\delta)$$

modül morfizmi olsun.Bu durumda A üzerinde bir B-etkisi

$$B \times A \to A$$

$$(b,a) \to b_a = \delta(b)_a$$

şeklinde tanımlanarak (A,B,ϕ) çaprazlanmış modülü elde edilir.

İspat:

$$(\phi, id) : (A,G,\partial) \to (B,G,\delta)$$

çaprazlanmış modül morfizmi olduğundan

$$\phi : A \to B \qquad id : G \to G$$

$$ve$$

$$a \to \phi(a) \qquad g \to g$$

için

$$\phi(g_a) = id(g)_{\phi(a)} = g_{\phi(a)}$$

eşitliği geçerlidir.Ayrıca, a ϵ A ve b ϵ B için, B nin A üzerine etki fonksiyonu

$$B \times A \to A$$

$$(b,a) \to b_a = \delta(b)_a$$

şeklindedir.Buradan

$$\delta(b_a) = \phi(\delta(b)_a) \quad \text{(etki tanımından)}$$

$$= \delta(b)_{\phi(a)} \quad \text{((*) dan dolayı)}$$

$$=b\phi(a)b^{-1} \quad ((B,G,\delta), \text{ çaprazlanmış modül})$$

elde edilir.Ayrıca

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\partial"'] \arrow[dr] & B \arrow[d, "\delta"] \\ G \arrow[r, "id"] & G \end{tikzcd}$$

Şekil 3.4. Komutatif Diyagramı

komütatif diyagramı gereğince

$$\delta\phi(a) = id(\partial(a)) = \partial a$$

eşitliği geçerlidir ve

$$\begin{aligned} {}^{\phi a}a' &= {}^{\delta(b)}a' \\ &= {}^{\delta(\phi(a))}a' \\ &= {}^{\partial a}a' \\ &= aa'a^{-1} \end{aligned}$$

sağlanır.Böylece, çaprazlanmış modül aksiyomları elde edilir.

3.5. Alt Çaprazlanmış Modüller

(C,G,∂) bir çaprazlanmış modül olsun.

i) S, C nin, H ise G nin bir altgrubu

ii) $\partial' = \partial \mid s$, ∂ nin S ye kısıtlanmışı ve

iii) H ın S üzerine etkisi, G nin C üzerine etkisi tarafından indirgenir.

ise (S,H, ∂') ye (C,G,∂) nin bir alt çaprazlanmış modülü denir ve

$$(S,H, \partial') \leq (C,G,\partial)$$

şeklinde gösterilir.

Önerme 3.6 *N,G* grubunun herhangi bir normal alt grubu ve iç, içine fonksiyonu id_G *birim* fonksiyonu tarafından

$$iç: \ id_G|_N : N \subset G \to G$$

şeklinde indirgenmek üzere $(N,G,iç),(G,G, id_G)$ çaprazlanmış modülünün alt çaprazlanmış modülünü oluşturur.

3.6. Normal Alt Çaprazlanmış Modüller Ve Çaprazlanmış Bölüm Modülleri

(C,G,∂) nin bir (S,H, ∂') alt çaprazlanmış modülü,

i) H, G nin bir normal alt grubu

ii) Her $g \in G$ *,* $s \in S$ *için* $g_s \in S$

iii)Her $h \in H$*,* $c \in C$ *için,* $h_{cc^{-1}} \in S$

şartını sağlıyor ise *(S,H, ∂') ye (C,G,∂) nın normal alt çaprazlanmış modülü* denir ve *(S,H, ∂')≤ (C,G,∂)* ile gösterilir.

*(S,H, ∂'),(C,G,∂)*nın bir normal alt çaprazlanmış modülü olsun.

$$\partial : C/S \to G/H$$

∂ tarafından indirgenmek üzere

$$G/H \times C/S \to C/S$$
$$(gH , cS) \to ({}^{g}c)S$$

etki fonksiyonu ile birlikte *(C/S , G/S, ∂)* üçlüsünü ele alalım.Burada *(C,G,∂)* bir çaprazlanmış modüldür ve G nın C üzerine etkisinden dolayı $g_c \in C$ *dir.* Dolayısıyla $(g_c)S \in C/S$ olduğundan yukarıda tanımlanan G/H ın C/S üzerine etki fonksiyonu iyi tanımlıdır. Ayrıca, ∂ bu etki ile birlikte çaprazlanmış modül şartını sağlar.Şöyleki ; ∂ , ∂ tarafından indirgendiğinden

$$\bar{\partial} : C/S \to G/H$$
$$cS \to gH = (\partial c)H$$

yazabiliriz.Buradan

$$\partial(gH_c s) = \partial((g_c)S)$$
$$=\partial((g_c)H$$
$$=(g\partial c g^{-1})H$$
$$=gH(\partial c)Hg^{-1}H$$
$$=gH\partial(cS)(gH)^{-1}$$
$$\partial(cS)_{c'S} = (\partial c)H_{c'S}$$
$$=(\partial c_{c'})S$$
$$=ccc^{-1}S$$
$$=cSc'Sc^{-1}S$$
$$=cSc'S(cS)^{-1}$$

elde edilir.Bu çaprazlanmış modüle çaprazlanmış bölüm modülü denir ve

$$(C,G,\partial)/(S,H,\partial')$$

ile gösterilir.

Bu bölümle ilgili ayrıntılı bilgi için Carrasco’e (1987) bakınız.

3.7. Cebir Üzerinde Çaprazlanmış Modüller

Whitehead' in gruplar üzerinde tanımladığı çaprazlanmış modül kavramı, diğer cebirsel yapılarda da önemlidir.Özel olarak asosyatif ve komütatif cebirler için (Lichtenbaum-Schlessinger, 1987) ve (Gerstenhaber, 1988) in çalışmaları vardır.

Bununla birlikte (T.Porter, 2001) komütatif cebirler için literatüre uygun bir biçimde çaprazlanmış modül kavramını tanımlamıştır.Bu bölümde, öncelikle cebirler üzerinde çaprazlanmış modüllerin tanımı verilerek çeşitli örnekler incelenmiştir. Burada cebirlerin komütatif olması gerekmediğini de belirtelim. Daha sonra bu tanım yardımıyla bazı temel özellikler incelenmiştir. Ayrıca, çaprazlanmış modüller, çaprazlanmış idealler ve çaprazlanmış bölüm modülü kavramları ayrıntılı olarak analiz edilmiştir.

3.8. 2-Çaprazlanmış Modül Kavramı

Çaprazlanmış modüller, modüller ve ideallerin genelleştirilmesidir.Ayrıca herhangi bir *halka (cebir)* bir çaprazlanmış modüldür.Böylece, çaprazlanmış modüller, *halka (cebir)* kavramının genelleştirlmesi olarak görülebilir.Şimdi, k daha önce söz ettiğimiz, sıfırdan farklı birimi olan komütatif halka olmak üzere *k-cebirler* üzerinde çaprazlanmış modül kavramının tanımını verelim. Daha sonra ise çeşitli cebirsel yapılar üzerindeki örnekleri inceleyelim.

Tanım 3.13 *R*,birimli bir *k-cebir* olsun

$$\partial : C \to R$$

bir *R-cebir* morfizmi ve

$$R \times C \to C \qquad C \times R \to R$$

$$ve$$

$$(r,c) \to r.c \qquad (c,r) \to c.r$$

R nin C üzerine etkisi ile birlikte, her $c,c' \in C$ *ve* $r \in R$ için

ÇM1) $\partial(r.c) = r\partial(c)$

$$\partial(c.r) = \partial(c)r$$

ÇM2) $\partial c c' = cc'$

$$c\partial c' = cc'$$

şartları sağlanıyor ise R üzerinde C cebirine bir Çaprazlanmış modül denir ve (C,R,∂) ile gösterilir.

Şimdi, çaprazlanmış modül kavramını ifade ettikten sonra, iki çaprazlanmış modül arasındaki morfizm kavramını tanımlşayalım.

Tanım 3.14 (C,R,∂) ve (C',R',∂') iki çaprazlanmış modül olsun.

$$\Theta(r.c) = \psi(r).\Theta(c)$$

$$\Theta(c.r) = \Theta(c).\ \psi(r) \qquad\qquad \textit{ve}$$

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Theta"] \arrow[d, "\partial"'] \arrow[dr] & C' \arrow[d, "\partial'"] \\ R \arrow[r, "\psi"] & R' \end{tikzcd}$$

Şekil 3.5. Komutatif Diyagramı

diyagramı komütatif, yani

$$\partial'\Theta(c) = \psi\partial(c)$$

olacak şekilde $\Theta : C \to C'$, $\psi : R \to R'$ *k-cebir* morfizmleri varsa

$$(\Theta,\psi) : (C,R,\partial) \to (C',R',\partial')$$

morfizmine çaprazlanmış modüller arasındaki morfizm denir.

O halde, *$R=R'$ ve ψ birim dönüşüm ise, Θ bir r-cebir morfizmi olduğundan*

$$\Theta(r.c) = r\Theta(c)$$

dir ve

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Theta"] \arrow[d, "\partial"'] & C' \arrow[dl, "\partial'"] \\ R & \end{tikzcd}$$

Şekil 3.6. Komutatif Diyagramı

diyagramı komütatif olduğundan, yani

$$\partial'\Theta(c)= \partial(c)$$

sağlandığından, Θ bir çaprazlanmış *R-modül* morfizmidir.

3.9. Çaprazlanmış Modüllerin Bazı Temel Cebir Özellikleri

Herhangi bir $\partial : C \to : R$ çaprazlanmış *R-modülün* tanımını verdikten sonra ∂ nın çekirdeği ve görüntüsü ile ilgili bazı temel özellikleri inceleyelim.Bunlardan yararlanarak oluşturulan modül yapılarını ve bazı cebirsel sonuçları inceleyelim.

Önerme 3.7.(C,R,∂) bir çaprazlanmış *R-modül* olmak üzere,

i) Çek∂, C nin bir merkez idealidir ve *R* üzerinde bir modüldür.

ii)∂(C), R de biridealdir.Ayrıca , *R* nin bu ideali, *Çek∂* üzerine sıfır olarak(trivially) etki ederve *Çek∂ bir R/∂C-modül* yapısı oluşturur.

iii) C/C^2 *ve* $\partial C/\partial C^2$*, birer R/∂C* modül yapısı oluşturur.

İspat: i) *Çek∂ nin C* nin ideali olduğu kolayca görülür.Şöyleki; $a \in Çek\partial$ *ve* $c \in C$ için

$$\partial(ca) = \partial(c)\partial(a) = \partial(c)0 = 0$$

ve

$$\partial(ac) = \partial(a)\partial(c) = 0\partial(c) = 0$$

olduğundan ca, ac ϵ Çek∂ elde edilir. Ayrıca,

$$ac = \partial a.c = 0c = 0 = 0c = c.\partial a = ca$$

olduğundan *Çek∂, C* nin merkezindedir.

Şimdi, *Çek∂* nin bir *R-modül* yapısı oluşturduğunu gösterelim.

$$R \times Çek\partial \to Çek\partial$$

$$(r,a) \to ra$$

dönüşümü,*R nin C* üzerine etki fonksiyonu olan

$$R \times C \to C$$

$$(r,c) \to r.c$$

ile uyumlu olmak üzere, birinci bölümde verdiğimiz etki şartları, her $a \in Çek\partial \subset C$ *için de* geçerli olacağından , *Çek∂ bir R-modül* yapısı oluşturur.

ii) *∂(C) nin, R* de bir ideal olduğunu göstermek için, *∂(C) nın, R* ile çarpım altında kapalı olduğunu göstermemiz yeterlidir.

(C,R,∂) çaprazlanmış modül olduğundan

$$R \times C \to C$$

$$(r,c) \to r.c$$

etki fonksiyonu gereğince, $r.c \in C$ *ve* $\partial(r.c) \in \partial(C)$ *dir.Ayrıca,* $\partial c \in \partial(C)$ *ve* $r \in R$ *için,*

$$r\partial c = \partial(r.c) \in \partial(C)$$

eşitliği geçerlidir.Benzer olarak

$$\partial(c)r = \partial(c.r) \in \partial(C)$$

bulunur.Dolayısıyla, *∂(C), R* de bir idealdir.

∂(C) nin Çek∂ üzerine sıfır etkisi, $a \in Çek\partial$ *,* $\partial c \in \partial C$ *için*

$$\partial ca = ca = c\partial(a) = c0 = 0$$

ve benzer olarak

$$a\partial c = ac = \partial(a)c = 0c = 0$$

şeklinde görülür.Böylece

$$R/\partial C \times Çek\partial \to Çek\partial$$

$$(r + \partial c, a) \rightarrow (r + \partial c).a = ra$$

fonksiyonu yardımıyla *Çek∂ nın bir R / ∂C-modül* yapısı oluşturduğu görülür. Şöyleki; etki fonksiyonunun tanımı ve *Çek∂* nın bir *R-modül* olması kullanılarak

i) $(r + \partial c)(a_1 + a_2) = r(a_1 + a_2)$

$= r\,a_1 + r\,a_2$

ii) $((r_1 + \partial c) + (r_2 + \partial c))a = ((r_1 + r_2) + \partial c)a$

$= (r_1 + r_2)a$

$= r_1 a + r_2 a$

iii) $((r_1 + \partial c)(r_2 + \partial c))a = (r_1 r_2 + \partial c)a$

$= (r_1 r_2)a$

$= (r_1 + \partial c) r_2 a$

$= (r_1 + \partial c)((r_2 + \partial c)a)$

eşitlikleri elde edilir.

iii)∂C *nin* C / C^2 üzerine etkisini inceleyelim. $b, c \in C$ *ve* $c + C^2 \in C / C^2$*,için* $x = \partial b \in \partial C$ olmak üzere

$$x(c + C^2) = xc + C^2$$

$$= \partial bc + C^2$$

$$= bc + C^2$$

elde edilir. bc $\in C^2$ *ve* C / C^2 *ve* $C^2 / C^2 \approx \{0\}$ olduğundan bu ifade sıfır verir. Dolayısıyla, ∂C *nin* C / C^2 üzerine etkisi sıfırdır.Böylece

$$R / \partial C \times C / C^2 \rightarrow C / C^2$$

$$(r + \partial c, c + C^2) \rightarrow (r + \partial c).(c + C^2) = rc + C^2$$

fonksiyonu ile

i) $(r + \partial c)(c_1 + C^2 + c_2 + C^2) = (r + \partial c)((c_1 + c_2) + C^2)$

$= r(c_1 + c_2) + C^2$

$= (rc_1 + r\,c_2) + C^2$

$= (rc_1 + C^2 + r\,c_2 + C^2)$

$= (r + \partial c)(c_1 + C^2) + (r + \partial c)(c_2 + C^2)$

ii) $((r1 + \partial c) + (r2 + \partial c))(c + C^2) = (r_1 + r_2) + \partial c)(c + C^2)$

$= (r_1 + r_2)c$

$= (rc_1 + r\,c_2) + C^2$

$= rc_1 + C^2 + r\,c_2 + C^2$

$$=(r_1 + \partial c)(c + C^2) + (r_2 + \partial c)(c + C^2)$$

$$iii)\ ((r1 + \partial c) + (r2+\partial c))\ (c + C^2) = ((r_1 r_2)+\partial c)(c + C^2)$$

$$=(r_1 r_2)c + C^2$$

$$=r_1 (r_2 c) + C^2$$

$$= (r_1 + \partial c)(r_2 c + C^2)$$

$$=(r_1 + \partial c)((r^2 + \partial c)(c + C^2)$$

eşitlikleri sağlandığından,∂C *bir* $R/\partial C$*-modüldür.*

Benzer düşünce ile $\partial C/\partial C^2$ *nin* $R/\partial C$*-modülüdür.*

Önerme 3.8.∂C=I olmak üzere

$$0 \to Çek\partial \to C \xrightarrow{\partial} \partial C \to 0$$

tam dizisi

$$Çek\partial \xrightarrow{g} C/C^2 \xrightarrow{\bar{\partial}} I/I^2 \xrightarrow{f} 0$$

tam dizisine indirgenir.

Önerme 3.9 *(ψ,Θ): $(C,R,\partial) \to (B,R,\beta)$ çaprazlanmış R-modül morfizmi olsun.Bu durumda B,C üzerine β yoluyla etki etmek üzere,(C,B,ψ) biz çaprazlanmış B-modüldür.*

Önerme 3.10. *(C,B,∂)* bir çaprazlanmış *B-modül* ve *(B,R,β)* çaprazlanmış *R-modül* olsun.*R* nin *C* üzerine etkisi, *B nin C* üzerine etkisi ile uyuölu olmak üzere *$(C,R,\beta\partial)$* bir çaprazlanmış *R-modüldür*

3.10. Alt çaprazlanmış modüller,çaprazlanmış idealler ve çaprazlanmış bölüm modülleri

Bu bölümde, verilen bir çaprazlanmış modülün alt objeleri ve normal alt objeleri gibi düşünebileceğimiz, alt çaprazlanmış modüllerin ve çaprazlanmış ideallerin tanımını vereceğiz.Daha sonra ise, çaprazlanmış bölüm modülü kavramını oluşturmak için, bir alt çaprazlanmış modüle önemli şart getirerek bir normal alt çaprazlanmış modül elde edeceğiz.

3.11.Alt Çaprazlanmış Modüller

(C,R,∂) bir çaprazlanmış R-modül olsun.C' , C nin bir alt cebir ve

$$\partial' : \partial/_{C'} : C' \to R$$

∂ nin C' ye kısıtlanmış olmak üzere (C',R,∂') çaprazlanmış modülü,(C,R,∂) çaprazlanmış R-modülün alt çaprazlanmış modülüdür.

Hatırlatma:

(C',R,∂'), (C,R,∂) nin bir alt çaprazlanmış modülü olsun.Bu durumda

$c \in C$ ve $x \in C'$ için

$cx = \partial c.x \in C'$

ve

$xc = x.\partial c \in C'$

olduğundan C' , C de bir idealdir.Böylece, (C',∂') alt çaprazlanmış modülü

$$\partial' : \partial/_{C'} : C' \rightarrow R$$

kısıtlanmış fonksiyonu ile C nin bir C' idealidir.

BÖLÜM 4

3-Çaprazlanmış Modüller

Çaprazlanmış modül kavramı (J.H.C.Whitehead, 1949) tarafından "Combinatorial Homotopy Theory" adlı ¸çalışmasında ve bağlantılı homotopi grupların cebirsel yapılarını inceleyen ¸çalışmasında tanımlanmıştır. Daha sonra, ¸çaprazlanmış modüller matematiğin değişik branşlarında (Homotopi teori, Grupların homoloji ve kohomolojisi, Cebirsel K- teori, Devirli homoloji, Kombinatoriyal grup teori ve diferensiyel geometri v.b.) önemli bir rol oynamıştır.

Bugün de ¸çaprazlanmış modüller temel cebirsel yapılardan biri olarak kabul edilmektedir. Whitehead ¸çaprazlanmış modülleri kullanarak 3−tiplerin bir tanımlamasını vermiş ve bu tanımlama homotopi 2−tipler i¸cin bir model olmuştur. Bu b¨ol¨umde ilk olarak kısaca ¸çaprazlanmış modüllere değinilecek ve daha sonra homotopi sınıfı 3 olan cebirsel modeller için 3−¸çaprazlanmış modül kavramı tanımlanacaktır. Bu yapı oluşturulurken Conduch´e'nin (Taşcı, 2007), 2−¸çaprazlanmış modülü tanımlarken izlediği yol izlenmiş, Carrasco'nun tanımladığı hiperçaprazlanmış kompleksler baz alınmış ve özellikle Peiffer üreteç elemanları kullanılmıştır.

4.1.3-Çaprazlanmış Modüller

Bu bolümde ¸çaprazlanmış modül tanımı ve Porter tarafından verilen değişmeli cebirlerin ¸çaprazlanmış modüllerinin temel teorisi tanıtılacaktır.

Tanım 4.1 k değişmeli halka ve M ve R değişmeli cebirler olmak üzere

$$\begin{aligned} \therefore\ R \times M &\to M \\ (r, m) &\mapsto r.m \end{aligned}$$

fonksiyonu her $k \in k,\ m, m' \in M,\ r, r' \in R$ için;

1. $k(r \cdot m) = (kr) \cdot m = r \cdot (km)$,
2. $r \cdot (m + m') = r \cdot m + r \cdot m'$,
3. $(r + r') \cdot m = r \cdot m + r' \cdot m$,
4. $r \cdot (mm') = (r \cdot m)m' = m(r \cdot m')$,
5. $(rr') \cdot m = r \cdot (r' \cdot m)$,

özelliklerini sağlıyorsa bu fonksiyona değişmeli etki denir.

Bu tez boyunca $r \in R$ nin $m \in M$ üzerine etkisi $r \cdot m$ ile gösterilecektir.

Tanım 4.2 R birimli bir k-cebir ve C bir R−cebir olsun her $c \in C,\ r \in R$ için

$$\partial : C \to R,$$

R-cebir morfizmi

$$\text{CM1)}\ \partial(r \cdot c) = r\partial c$$

şartını sağlıyorsa (C, R, ∂) üçlüsüne **ön-çaprazlanmış modül** denir.

Buna ek olarak her $c, c' \in C$,

$$CM\,2)\quad \partial c . c' = cc'$$

ise (C, R, ∂) üçlüsüne bir ¸**çaprazlanmış** R-**modül** denir. Son ¸şart **Peiffer özdeşliği** olarak adlandırılır. Bu ¸şekildeki bir ¸çaprazlanmış modülü (C, R, ∂) ile göstereceğiz. Acık olarak, herhangi ¸çaprazlanmış modül bir ön-çaprazlanmış modüldür.

Tanım 4.3 (C, R, ∂) den (C', R', ∂') ye ¸çaprazlanmış modüller olsun,

$$\theta : C \to C',\quad \psi : R \to R',$$

k-cebir morfizmlerinin ikilisi

$$\theta(r \cdot c) = \psi(r) \cdot \theta(c) \text{ ve } \partial'\theta(c) = \psi\partial(c)$$

Şartlarını sağlıyorsa (θ, ψ) morfizmlerine (C, R, ∂) ve (C', R', ∂') **çaprazlanmış modülleri arasındaki morfizmler** denir. Burada, eğer $R = R'$ ise θ bir ¸çaprazlanmış R-modül morfizmi ve ψ birim morfizm denilecektir. Buradan $\mathfrak{XMod}$ ile gösterilen çaprazlanmış modüllerin kategorisini tanımlayabiliriz.

Örnek 4.1. I bir R, **k**-cebirinin herhangi bir ideali olsun. Bir

$$inc. : I \to R.$$

İçine fonksiyonunu gözönune alalım. Bu durumda (I,R, inc.) bir ¸çaprazlanmış modüldür. Tersine herhangi bir ¸çaprazlanmış R-modül $\partial : C \to R$ verilsin $\partial C = I$ nın R de bir ideal olduğu kolayca gösterilebilir.

Örnek 4.2. M herhangi bir R-modül olsun. M, sıfır ¸çarpımlı bir R-cebir olarak düşünülebilir. Bu durumda her $c, c' \in C$ için $0(c) \cdot c' = 0c' = 0 = cc'$

ile $0:\ \mathrm{M}\rightarrow\mathrm{R}$ bir ¸çaprazlanmış R-modül olur.

Tersine herhangi $\partial\ :\ \mathrm{C}\ \rightarrow\mathrm{R}$ ¸çaprazlanmış modülü verilsin bu durumda

Çek∂ bir $\mathrm{R}/\partial\mathrm{C}-$modüldür.

Teorem 4.1. (Hungerford, 1974) **E** bir simplisel cebir ve **I, E** nin bir simplisel ideali olsun.

$$inc:\ I\rightarrow E$$

içine fonksiyonu yardımıyla

$$\partial\ :\pi_0\left(\mathrm{I}\right)\ \rightarrow\pi_0\left(\mathrm{E}\right)$$

fonksiyonu elde edilir ve **E , I** üzerine etkisi yardımıyla, $\pi_0\left(\mathrm{E}\right)$ nin $\pi_0\left(I\right)$ üzerine etkisi elde edilir. Bu tanımlamalarla $\left(\pi_0\left(\mathrm{I}\right),\ \pi_0\left(\mathrm{E}\right),\ \partial\right)$ bir ¸çaprazlanmış modül olur.

Teorem 4.2. Eğer $\left(\mathrm{C},\mathrm{R},\ \partial\right)$ bir ¸çaprazlanmış R-modül ise bu durumda

i) Çek∂ , C nin bir merkez idealidir,

ii) Her C/C^2 hem de Çek∂ nin doğal $\mathrm{R}/\partial\mathrm{C}$ modül yapısı vardır.

4.2. Çaprazlanmış Modüllerin Elde Edilişi

E bir simplisel cebir ve **NE** bu cebirin Moore kompleksi olsun. Burada P(4)un elemanlarının tamamının $\partial 4\,\partial 4$ altındaki görüntüsü alınarak elde edilen üreteçler kullanılır ve verilen elemanların her birinin $\partial 4$ altındaki görüntüsü 0_{E3} tur.

(Conduché, 1984) 'nin de izlediği yol takip edilirse bir 3-çaprazlanmış modülün tanımı aşağıdaki biçimde olur.

Tanım 4.4 $C_3\xrightarrow{\partial_3}C_2\xrightarrow{\partial_2}C_1\xrightarrow{\partial_1}C_0$ bir k-cebir kompleksi olsun.

$$\partial_3:C_3\rightarrow C_2$$

bir çaprazlanmış modül olmak üzere herbiri C_0-cebir ve C_1 -cebir olan

$$\left\{\otimes\right\}^3_{(0)(1),(2)(0),(2)(1)}:C_2\otimes C_2\rightarrow C_3\quad,\left\{\otimes\right\}^3_{(1,0)(2),(2,0)(1),(2,1)(0)}:C_1\otimes C_2\rightarrow C_3$$
$$\left\{\otimes\right\}^2_{(1)(0)}:C_1\otimes C_1\rightarrow C_2$$

dönüşümleri

3CM1) $\partial_2\left\{x_1\otimes y_1\right\}^2_{(1)(0)}\quad=x_1^{\partial_1 y_1}-x_1y_1$

3CM2) $\left\{x_1\otimes\partial_2 y_2\right\}^3_{(0)(2,1)}\quad=\left\{x_1\otimes y_2\right\}^3_{(0)(1)}+\left\{x_1\otimes y_2\right\}^3_{(2)(1)}$

3CM3) $\partial_3\{x_1\otimes y_2\}^3_{(1)(0)} \quad =\{\partial_2 x_2\otimes\partial_2 y_2\}^2_{(1)(0)}+x_2y_2$

3CM4) $\{x_1\otimes\partial_3 y_3\}^3_{(2,0)(1)} \quad =\{x_1\otimes\partial_3 y_3\}^3_{(2,1)(0)}+\{x_1\otimes\partial_3 y_3\}^3_{(1,0)(2)}-{}^{\partial_1 x_1}y_3$

3CM5) $\{\partial_2 x_2\otimes y_2\}^3_{(2,0)(1)} \quad =-\{x_2\otimes y_2\}^3_{(0)(2)}$

3CM6) $\{\partial_3 x_3\otimes\partial_3 y_3\}^3_{(0)(1)} \quad =x_3y_3$

3CM7) $\{\partial_2 x_2\otimes\partial_3 y_3\}^3_{(2,1)(0)} \quad =\partial_2 x_2.y_3$

3CM8) $\{\partial_2 x_2\otimes\partial_3 y_3\}^3_{(1,0)(2)} \quad =-\{x_2\otimes\partial_3 y_3\}^3_{(0)(2)}$

3CM9) $\{\partial_2 x_2\otimes\partial_3 y_3\}^3_{(2,0)(1)} \quad ={}^{\partial_2 x_2}y_3-\{x_2\otimes\partial_3 y_3\}^3_{(0)(2)}$

3CM10) $\{x_2\otimes y_2y_2'\}^3_{(0)(1)} \quad =\{x_2\otimes\partial_2(y_2y_2')\}^3_{(0)(2,1)}-\{x_2\otimes(y_2y_2')\}^3_{(2)(1)}$

3CM11) $\{x_2\otimes y_2y_2'\}^3_{(2)(1)} \quad =\{x_2\otimes\partial_2(y_2y_2')\}^3_{(1)(2,0)}+\{x_2\otimes y_2y_2'\}^3_{(2)(0)}-\{x_2\otimes y_2y_2'\}^3_{(1)(0)}$

3CM12) $\{x_2\otimes y_2y_2'\}^3_{(2)(0)} \quad =-\{x_2\otimes\partial_2(y_2y_2')\}^3_{(2,1)(0)}$

3CM13) $\{x_2\otimes\partial_3 y_3\}^3_{(2)(1)} \quad =x_2y_3$

3CM14) $\{\partial_3 x_3\otimes y_2\}^3_{(2)(1)} \quad =x_3^{\partial_2 y_2}-x_3.y_2$

3CM15) $\{\partial_3 x_3\otimes y_2\}^3_{(0)(1)} \quad =y_2.x_3$

3CM16) $\{\partial_3 x_3\otimes y_2\}^3_{(2)(0)} \quad =0$

3CM17) $\partial_3\{x_2\otimes y_2\}^3_{(2)(0)} \quad =-\partial_3\{\partial_2 x_2\otimes y_2\}^3_{(1,0)(2)}$

3CM18) $\partial_3\{x_2\otimes y_2\}^3_{(2)(1)} \quad =x_2^{\partial_2 y_2}-x_2y_2$

3CM19) $\partial_3\{x_1\otimes y_2\}^3_{(2,0)(1)} \quad =-\partial_3\{x_1\otimes y_2\}^3_{(1,0)(2)}+\{x_1\otimes y_2\}^2_{(0)(1)}-{}^{\partial_1 x_1}y_2+{}^{x_1}y_2$

3CM20) $\partial_3\{x_1\otimes y_2\}^3_{(2,1)(0)} \quad =\{x_1\otimes\partial_2 y_2\}^2_{(1)(2)}+{}^{x_1}y_2$

şartlarını sağlıyorsa $(C_3,C_2,C_2,\partial_3,\partial_2,\partial_1)$ yapısına bir 3-çaprazlanmış modül denir.

Not: $\partial_3:C_3\to C_2$ bir çaprazlanmış modül ve $\{\otimes\}^3_{(2)(1)}$ dönüşümü C_1−cebir olduğundan **3CM(11, 13, 14, 18)** gereğince $(C_3,C_2,C_2,\partial_3,\partial_2)$ yapısı **2−çaprazlanmış modüldür.**

Tanım 4.5. $\left(C_3,C_2,C_2,C_1C_0,\partial_3,\partial_2,\partial_1\right)$ ve $\left(C_3^{'},C_2^{'},C_1^{'},C_0^{'},\partial_3^{'},\partial_3^{'}\partial_2^{'},\partial_1\right)$ birer 3−çaprazlanmış modül olmak üzere bu iki yapı arasındaki dönüşüm aşağıdaki biçimde resmedilebilir.

$$
\begin{tikzcd}
C_3 \arrow[r, "\partial_3"] \arrow[d, "f_3"'] & C_2 \arrow[r, "\partial_2"] \arrow[d, "f_2"'] & C_1 \arrow[r, "\partial_1"] \arrow[d, "f_1"'] & C_0 \arrow[d, "f_0"'] \\
C'_3 \arrow[r, "\partial_3"'] & C'_2 \arrow[r, "\partial_2"'] & C'_1 \arrow[r, "\partial_1"'] & C'_0
\end{tikzcd}
$$

Şekil 4.1. İki Yapı Arasındaki Dönüşüm Diyagramı

ve cebir homomorfizmlerı aşağıdaki şartları sağlamalıdır;

Her $c_3 \in C_3$, $c_2 \in C_2, c_1 \in C_1,, c_0 \in C_0$ için,

$$f_1\left({}^{co}c_1\right) = {}^{(fo(co))}f_1\left(c_1\right),\ f_2\left({}^{co}c_2\right) = {}^{(fo(co))}f_2\left(c_2\right),\ f_3\left({}^{co}c_3\right) = {}^{(fo(co))}f_3\left(c_3\right)$$

$$\{\otimes\}^3_{(0)(2)}\ ,\{\otimes\}^3_{(2)(1)}\ ,\ \{\otimes\}^3_{(1)(0)}\ \textit{için}$$

$$\{\otimes\}\ f_2 \otimes f_2 = f_2\ \{\otimes\}$$

$$\{\otimes\}^3_{(1,0)(2)}\ ,\{\otimes\}^3_{(2,0)(1)}\ ,\ \{\otimes\}^3_{(0)(2,1)}\ \textit{için}$$

$$\{\otimes\}\ f_1 \otimes f_2 = f_3\ \{\otimes\}$$

$$\textit{ve}\ \{\otimes\}^2_{(1)(2)}\ \textit{için}$$

$$\{\otimes\}\ f_1 \otimes f_1 = f_2\ \{\otimes\}$$

olur. Böylece 3-çaprazlanmış modüller kategorisini tanımlamış oluruz. Bu kategoriyi $\mathfrak{XMod}$ ile göstereceğiz.

KAYNAKLAR

Alp, M., 1997. Crossed Modules, Cat-Groups, Ph.D. Thesis, University of Wales

Alp M., Wensley, Christopher D.,2010. Automorphisms and Homotopies of Groupoids and Crossed Modules, Appl Categor Struct 18:473–504 DOI 10.1007/s10485-008-y

Andre, M., 1970. Homologie des Algebres Commutatives, Springer-Verlag 206

Arvasi Z. and Porter T., 1997. Higher dimensional peiffer elements in simplicial commutative algebras.Theory and applications of categories, 3,1-23

Asar, A.O., Arıkan, A., 2009. Cebir, Eflatun Yayınevi, 1. Basım, Ankara

Balcı, M., 2009. Reel Analiz, Balcı yayınları, 3. Basım, Ankara

Bayraktar, M., 2006. Soyut Cebir ve Sayılar Teorisi, Gazi Kitabevi, Ankara

Blyth, T.S., 1986. Categories, University of st. Andrews, Scotland.

Brown, R.,1988. Topology, Ellis Horwood, Chichester.

Carrasco P. and Cegarra,A.M.,1991. Group-theoretic Algebraic Models for Homotopy Types. J.P.A.A. 75, 195-235

Carrasco, P. 1987. Complejos Hipercruzados, Chomologia Extensiones, Ph.D. Thesis Universidad de Granada.

Conduche, D., 1984. Modeles Croises Generalises de Longueur 2.J.P.A.A34,155-178

Çallıalp, F., 2001. Örneklerle Soyut Cebir, Birsen Yayınevi, İstanbul

Ellis, G.J., 1993. Crossed Squares and Combinatoral Homotopy, Math. Z.214

Higgins, P. J., 1971. Categories and Groupoids, Van Nostrand, New York.

J.H.C.Whıtehead. ,1949. Combinatorial Homotopy II, Bull. American Math. Society 55,453-456

K.J.Norrıe. 1987. Crossed Modules and Analogues of Group Theorems, Ph.D.Thesis, Bangor.

K.S.Brown, 1999. Cohomology of Groups, Springer-Verlag

Mucuk ,O.,2010. Topoloji ve Kategori, Nobel Yayın Dağıtım, 2. Basım, Ankara.

M.F.Atıyah and I.G.Macdonold, 1969. Introduction to Commutatve Algebra, Addison-Wesley Publishing Company.

M.Gerstenhaber., 1966. On the Deformation of Rings and Algebras,Ann.Math.84

Orter, T., 1993. n-Types of Simplicial Groups and Crossed n-Cubes. Topology 32, 5-24

S.Lıchtenbaum and M.Schlessınger The Cotangent Complex of a Morphism, Trans. American Society,128(1967)41-70

Taşcı, D. ,2007. Soyut Cebir, Alp Yayınevi, 1. Basım Ankara

T.W.Hungerford., 1974. Algebra,Holt, Rinehart and Winston, Inc.

T.Porter., 1986. Homology of Commutative Algebras and an Invariant of Simis and Vasconceles, J.Algebra 99, 458-465

Whitehead, J.H.C.,1949. Combinatoral Homotopy II, Bull. American Math. Society. 55

Whitehead, J.H.C., 1950. A. Certain Exaet Sequence, Annals of Math. 52,51-110

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Yasemin IŞIK

Doğum Yılı : 1979

Eğitim Bilgileri (Kurum ve Yıl)

Lisans : Gazi Üniversitesi-Matematik Öğretmenliği-2001

Yüksek Lisans : Aksaray Üviversitesi- Selçuk Üniversitesi (OLÜP)

Doktora : -----

İletişim Bilgileri

Adres : Hürriyet Mah , Ay ışığı Apartmanı , No:12 Kahramanmaraş

Telefon : 05308864826

E-posta : bulentnarin@hotmail.com