



**T.C.**

**AKSARAY ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**



**T.C.**

**SELÇUK ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI  
ORTAK YÜKSEK LİSANS PROGRAMI**

**DEĞİŞMELİ CEBİRLER ÜZERİNE ÇAPRAZLANMIŞ  
MODÜLLER VE ÇAPRAZLANMIŞ KARELER**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Fatih BAYRAKTAR**

**DANIŞMANLAR**

**Yrd. Doç. Dr. Tufan Sait KUZPINARI**

**Prof. Dr. Durmuş BOZKURT**

**AKSARAY, 2013**

T.C.  
AKSARAY ÜNİVERSİTESİ - SELÇUK ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜLERİ

TEZ KABUL ve ONAY BELGESİ

Fatih BAYRAKTAR' ın "Değişmeli Cebirler Üzerine Çaprazlanmış Modüller ve Çaprazlanmış Kareler" başlıklı lisansüstü tez çalışması, aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

**İmza**

**Danışman:** Yrd. Doç. Dr. Tufan Sait KUZPINARI (Aksaray Üniversitesi) .....

**Üye** : Doç. Dr. Murat KAYA (Aksaray Üniversitesi) .....

**Üye** : Yrd. Doç. Dr. Ali AYTEKİN (Aksaray Üniversitesi) .....

Tezin Savunulduğu Tarih : 15.08.2013

## ÖNSÖZ

Çaprazlanmış modüller için otomorfizma yapısının ışığında örgülü, düzenli çaprazlanmış modüllere giriş yaptık. Bunlar simplisel gruplar ile yakından alakalıdır. Simplisel cebirler tüm bağlantılı homotopi tipleri için bir modeldir. Bu çalışmalarla beraber homotopi teori ve cebirsel topoloji ile ilgili pek çok problemin çözümünde simplisel gruplar rol oynamıştır. Moore kompleksinin bazı özelliklerini ve Peiffer özdeşliklerini kullanarak, bağlantılı 3-tiplerin bir modeli olan 2-çaprazlanmışlanmış modüller tanımlanmıştır.

## **TEŐEKKÖR**

Yüksek Lisans tezimin hazırlanmasında büyük emeği geçen danışman hocam Yrd. Doç. Dr. Tufan Sait KUZPINARI' na, Aksaray Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim üyelerine, hayatın her aşamasında yanımda olan aileme teşekkürlerimi sunarım. Fatih BAYRAKTAR

# İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa No

ÖNSÖZ.....	i
TEŞEKKÜR.....	ii
İÇİNDEKİLER DİZİNİ.....	iii
ÖZET.....	v
ABSTRACT.....	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	vii
SİMGELER DİZİNİ.....	viii
1.BÖLÜM.....	1
1. TEMEL KAVRAMLAR.....	1
1.1.Kategori.....	1
1.2.Funktorlar.....	6
1.3.Homotopi.....	7
1.4.Homotopi Denkliği.....	8
2.BÖLÜM.....	9
2.1.Temel Kavramlar.....	9
2.2.Simplisel Cebirler.....	9
2.3.Bir Simplisel Cebirin Moore Koppleksi ve Homotopi Modülü.....	12
2.4.Kısıtlanmış Simplisel Cebirler.....	13
2.5.Yüksek Mertebeden Peiffer Elemanları.....	14

<b>2.6.Bir Simplisel Cebirin Yarıdirekt Ayrışması.....</b>	<b>16</b>
<b>2.7.Hiper Çaprazlanmış Kompleks Çiftleri.....</b>	<b>18</b>
<b>3.BÖLÜM.....</b>	<b>20</b>
<b>3.1.3-Tipten Cebirsel Modeller ve Çaprazlanmış Modeller İçin Otomorfizma.....</b>	<b>20</b>
<b>3.2.Çaprazlanmış Modüllerin Çaprazlanmış Bileşikleri.....</b>	<b>23</b>
<b>3.3.Çaprazlanmış Modüllerin İlk Olarak N-Gruplarının Bileşkeleri.....</b>	<b>40</b>
<b>3.4.Çaprazlanmış Modüller İçin Otomorfizma Yapıları.....</b>	<b>43</b>
<b>KAYNAKLAR.....</b>	<b>49</b>
<b>ÖZGEÇMİŞ</b>	

## ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

### DEĞİŞMELİ CEBİRLER ÜZERİNE ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER VE ÇAPRAZLANMIŞ KARELER

Fatih BAYRAKTAR

T.C.

Aksaray Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü  
Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Tufan Sait KUZPINARI

İkinci Danışman : Prof. Dr. Durmuş BOZKURT

Bu tez üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, temel kavramlar ile ilgili bilgiler verilmiştir. İkinci bölümde simplisel cebirler, yüksek mertebeden peiffer elemanlar ve hiper çaprazlanmış kompleks çiftleri incelenmiştir. Üçüncü bölümde değişmeli cebirler üzerine çaprazlanmış modüller ve çaprazlanmış kareler incelenmiştir.

**2013, 50 sayfa.**

**Anahtar Kelimeler :Çaprazlanmış Modüller, Hiper Çaprazlanmış Kompleks Çiftleri, Simplisel Cebirler.**

## ABSTRACT

Master of Science Thesis

CROSSED MODUL ON COMMUTATIVE ALGEBRAS AND CROSSED SQUARES

Fatih BAYRAKTAR

T.R.

Aksaray University Graduate School of Natural and Applied Sciences

Selçuk University Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor :Asst. Prof. Dr. Tufan Sait KUZPINARI

Co-Supervisor :Prof. Dr. Durmuş BOZKURT

This thesis consists of three parts. In the first part, basic rules and its informations are researched. In the second part, simplicial algebras, peiffer elements in high order, and hyper crossed modules are examined. The third section crossed modules and crossed squares are researched.

**2013, 50 pages.**

**Keywords :Crossed Modules, Hyper Crossed Pairs of Complex, Simplicial Algebra.**

## ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

Şekil 1.1. Katagorilerin Değişimli Diyagramı .....	2
Şekil 1.2. Katagorilerin Değişimli Diyagramı .....	2
Şekil 1.3. Katagorilerin Değişimli Diyagramı .....	2
Şekil 1.4. Katagorilerin Değişimli Diyagramı .....	3
Şekil 1.5. Katagorilerin Bileşke Diyagramı .....	3
Şekil 1.6. Katagorilerin Bileşke Diyagramı .....	3
Şekil 2.1. Simpleks Üçgeni .....	11
Şekil 2.2. Simpleks Dörtüzlü .....	11
Şekil 2.3. Homotopi Üçgeni .....	13
Şekil 2.4. K-Lineer Morfizmler Diyagramı .....	18
Şekil 3.1. Çaprazlanmış Kare .....	28
Şekil 3.2. Çaprazlanmış Bileşkelerin Diyagramı .....	28
Şekil 3.3. Simplisel Grup Üçgeni .....	35
Şekil 3.4. Çaprazlanmış Modül Üçgeni.....	42
Şekil 3.5. Çaprazlanmış Kare Diyagramı.....	47

## SİMGELER DİZİNİ

$\wedge$	:	Ve
$\vee$	:	Veya
$\prod$	:	Çoklu Kartezyen Çarpımı
$\varepsilon$	:	Epsilon
$\infty$	:	Sonsuz
$\cap$	:	Çoklu Kesişim
$\cup$	:	Çoklu Birleşim
$\forall$	:	Her
$\in$	:	Elemanıdır.
$\phi$	:	Phi
$\varphi$	:	Upsilon
$\alpha$	:	Alfa
$\beta$	:	Beta
$\Sigma$	:	Toplam
$\cup$	:	Birleşim
$\cap$	:	Kesişim
$\sigma$	:	Sigma

$\Psi$  : Psi

$\exists$  : Vardır, en az bir

# BÖLÜM I

## Giriş

### Temel Kavramlar

Bu bölümde sıkça kullanacağımız, cebirin de temelini teşkil eden tanımlar verilecektir. Bu bilgiler ışığında konumuzun ilerleyen aşamalarında karşımıza çıkacak olan tanımlar daha iyi anlaşılacaktır. (Blyth, 1986; Brown, 1988; Bayraktar, 2006)

### 1.1.Kategori

Kategori teorisinin matematiğin diğer birçok dallarında da kullanım alanı vardır. Kategori teorisi aynı tip nesnelere ve bunlar arasındaki dönüşümlerle ilgilidir. Daha genel olarak, kümeler arasındaki fonksiyonların bileşkesinin birleşme özelliğine sahip olduğunu ve her bir küme için bir birim fonksiyonu bulunduğunu biliyoruz. Burada daha genel olarak kümeler yerine **nesnelere** ve fonksiyonlar yerine **morfizmler** alındığında kategori kavramı elde edilmiş olur (Blyth, 1986; Mucuk, 2010). Genellikle bu kavramların açıklandığı temel kaynak Blyth 'in yapmış olduğu Categories kitabı olduğundan burada o kaynak referans gösterilerek alıntılar yapılmıştır.

**Tanım 1.1:** Bir  $C$  kategorisi nesnelere kümesi  $Ob(C)$ , morfizimlerinin kümesi  $Mor(C)$ , kaynak ve hedef dönüşümleri,

$$\alpha, \beta: Mor(C) \longrightarrow Ob(C)$$

nesne dönüşümü,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}: Ob(C) &\longrightarrow Mor(C) \\ x &\longmapsto \mathcal{E}(x) = I_x \end{aligned}$$

ve

$$Mor(C)_{\alpha} \times_{\beta} Mor(C) = \{(a, b) \in Mor(C) \times Mor(C) : \alpha(b) = \beta(a)\}$$

üzerinde tanımlı “.” biçimindeki çarpma işlemi kısmi çarpma işlemi olarak adlandırılacaktır. Bu dönüşümler aşağıdaki şartları sağlarlar;

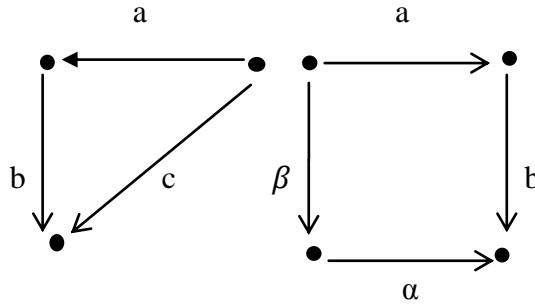
$$K_1) Her (a, b) \in Mor(C)_{\alpha} \times_{\beta} Mor(C) için \alpha(b.a) = \alpha(a) ve \beta(ba) = \beta(b)$$

$$K_2) Her a, b, c \in Mor(C) ile \alpha(c) = \beta(b) ve \alpha(b) = \beta(a) için c.(b.a) = (c.b).a$$

$$K_3) Her x \in Ob(C) için \alpha(I_x) = x = \beta(I_x)$$

$$K_4) Her a \in Mor(C) için a.I_{\alpha(a)} = I_{\beta(a)}.a = a \text{ dir (Higgins, 1971; Blyth, 1986).}$$

**Tanım1.2:** Herhangi bir kategorisinde nesnelere ve morfizmlere bir diyagramı için verilen bir kaynak nesnesinden bir hedef nesnesine tüm bileşke morfizmler eşit ise kategori değişimlidir denir. Bu geometrik olarak gösterilecek olursa



**Şekil 1.1.** Kategorilerin Değişimli Diyagramı

biçiminde ifade edilir. Bu diyagramının değişmeli olması için gerek ve yeter şart

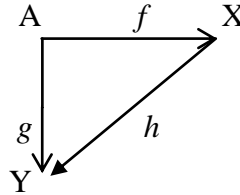
$$c = b \circ a \text{ ve } \beta \circ a = b \circ a$$

olmasıdır. Değişmeli kategoriye aşağıdaki örnekler verilebilir.

**Örnek 1.1:**  $\mathcal{C}$  bir kategori ve  $A, C$  kategorisinin sabit nesnesi olsun. Aşağıdaki gibi bir  $A^{\rightarrow}$  kategorisi oluşturulabilir.  $\mathcal{C}$  kategorisinin morfizmleri olarak  $A \xrightarrow{f} X$  nesnelere alınır. Yani,

$$Ob(A^{\rightarrow}) = \{f | f: A \longrightarrow X, X \in Ob(\mathcal{C})\}$$

dir.  $A \xrightarrow{f} X$  nesnesinde  $A \xrightarrow{g} Y$  nesnesine bir morfizm aşağıdaki diyagramdaki gibi verilirse

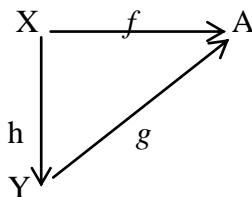


**Şekil 1.2.** Kategorilerin Değişimli Diyagramı

değişimli diyagramı elde edilir.

Benzer şekilde ;  ${}^{\rightarrow}A$  kategorisi de aşağıdaki gibi elde edilebilir:

Nesneler için  $\mathcal{C}$  kategorisinin  $X \xrightarrow{f} A$  şeklindeki morfizmleri ile ve  $X \xrightarrow{f} A$  nesnesinden  $Y \xrightarrow{g} A$  nesnesine bir morfizm de aşağıdaki diyagramla ifade edilir ve

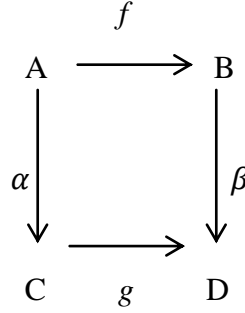


**Şekil 1.3.** Kategorilerin Değişimli Diyagramı

değişimli diyagramı elde edilir.

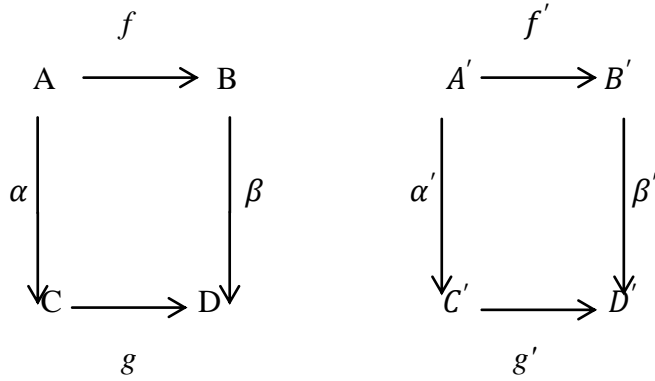
Bu kategorilere *comma kategorileri* de denir (Blyth, 1986).

**Örnek 1.2 :**  $C'$  bir kategori olsun. Bu durumda  $C'$  kategorisinden aşağıdaki gibi bir başka kategori de elde edilir. Nesneleri  $C'$  kategorisinin morfizmleri ve  $A \xrightarrow{f} B$  nesnesinden  $C \xrightarrow{g} D$  nesnesine bir morfizm olan kategori



**Şekil 1.4.** Kategorilerin Değişimli Diyagramı

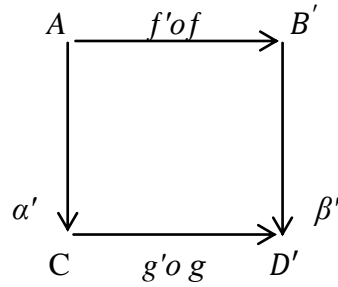
değişimli diyagramı ile tanımlıdır. Morfizmlerin bileşimi de aşağıda verilen şekilde tanımlanabilir:



**Şekil 1.5.** Kategorilerin Bileşke Diyagramı

Bu diyagramlarının birleşimli olması için gerek ve yeter şart

$A' = B$  ve  $C' = D$  olmasıdır. Bu durumda diyagramların bileşkeleri olan şekil



**Şekil 1.6.** Kategorilerin Bileşke Diyagramı

ile verilir. Bu kategoriye  $C'$  kategorisi üzerindeki *ok kategori* denir (Blyth, 1986).

**Tanım 1.3:** Eğer bir kategorinin nesneleri bir küme şeklinde ise bu kategoriye *küçük kategori* denir.

**Tanım 1.4:**  $C$  ve  $D$  iki kategori olsun.

i)  $Ob(C) \subset Ob(D)$

ii) Her  $x, y \in Ob(C)$  için  $C(x, y) \subset D(x, y)$

iii)  $C$ 'nin morfizmalarının bileşke işlemi  $D$ 'nin ki ile aynı ise bu durumda  $C, D$ , nin alt kategorisidir denir.

$C, D$ , nin alt kategorisi ve her  $x, y \in Ob C$  için  $C(x, y) = D(x, y)$  ise  $C$  ye  $D$  nin dolu alt kategorisi,  $Ob C = Ob D$  ise  $C$  ye  $D$  nin *Geniş alt kategorisi* denir .

Tanımını vermiş olduğumuz kategorilere aşağıdaki örnekler, tanımların anlaşılması için verilebilir.

**Örnek 1.3:** Her kategori kendisinin dolu bir alt kategorisidir.

Çözüm için her kategori kendisinin bir alt kategorisi ise bu kategorinin nesnelere kümesi ve morfizmalarının kümesi her zaman için mevcuttur. Aynı zamanda birebir olduklarından alt kategori şartları sağlanır. Bu durumda her kategori kendisinin dolu alt kategorisidir.

**Örnek 1.4:** Sonlu olan kümelerin kategorisi *Set* kategorisinin dolu bir alt kategorisidir.

**Örnek 1.5:** *Abel* grupların kategorisi, *grup* kategorisinin dolu bir alt kategorisidir.

Örneklerle tanıttığımız *Set* kategorisi için aşağıdaki önemli özellikler verilebilir.

**Önerme 1.1:** Kümelerin *Set* kategorisinde bir  $a: A \longrightarrow B$  morfizmi için aşağıdaki durumlar birbirine denktir.

$a$  bire-bir dir. (Yani  $a(x) = a(y)$  ise  $x=y$  dir.)

$a$  soldan sadeleşebilir dir. (Yani  $a \circ b = a \circ c \Rightarrow b=c$  dir.)

**İspat:** Gerçekten;

1 $\Rightarrow$ 2) Kabul edelim ki  $a$  birebir,  $b, c: C \longrightarrow A$  ve  $a \circ b = a \circ c$  olsun. Bu durumda Her  $x \in C$  için,

$$(a \circ b)(x) = (a \circ c)(x) \Rightarrow a(b(x)) = a(c(x))$$

olur ve  $a$  bire-bir olduğundan

$$b(x) = c(x)$$

dir. Her  $x \in C$  için ve  $b, c: C \longrightarrow A$  tanımlandığından  $b = c$  bulunur.

2  $\Rightarrow$  1) : Kabul edelim ki  $a$  soldan sadeleşebilir ve bire-birlik şartının hipotez kısmı olan

$$a(x) = a(y) \text{ ve } C = \{\alpha\} \text{ olsun.}$$

$$b(\alpha) = x \text{ ve } c(\alpha) = y$$

olacak şekilde  $b, c: C \longrightarrow A$  dönüşümleri tanımlansın. Bu takdirde

$$a(x) = a(y)$$

eşitliğinde  $x$  ve  $y$  yerine yazılırsa

$$a(b(\alpha)) = a(c(\alpha)) = a \circ b = a \circ c$$

$$\Rightarrow b=c$$

olduğundan

$$x = b(\alpha) = c(\alpha) = y$$

bulunur.

**Tanım 1.5 (Monik) :**  $C$  bir kategori olsun. Eğer  $C$  kategorisinde bir  $a: A \longrightarrow B$  morfizmi soldan kısaltılabilir ise  $a$ ' ya *monik* denir.

$Set$  kategorisinde bir morfizmin monik olması için gerek ve yeter şart morfizmin birebir olmasıdır (Blyth, 1986; Brown, 1988).

**Tanım 1.6 (Epik):**  $C$  bir kategori olmak üzere  $C$  kategorisinde bir  $a: A \longrightarrow B$  morfizmi sağdan kısaltılabilirse, yani;

$$b \circ a = c \circ a \Rightarrow b=c$$

ise  $a$ ' ya *epik morfizmler* denir (Blyth, 1986; Brown, 1988).

**Tanım 1.7(Monomorfizm):** Bir  $C$  kategorisinde  $f : A \longrightarrow B$  morfizmi verilsin. Eğer bu  $f$  morfizmi soldan kısaltma özelliğine sahipse yani  $fg = fh$  olacak şekildeki  $g$  ve  $h$  morfizmleri için  $g = h$  olacak şekilde bulunabilirse  $f$  morfizmine bir *monomorfizm* denir.

**Tanım 1.8(Epimorfiz):** Bir  $C$  kategorisinde  $f : A \longrightarrow B$  morfizmi verilsin. Eğer bu  $f$  morfizmi sağdan kısaltma özelliğine sahipse yani  $gf = hf$  olacak şekilde  $g$  ve  $h$  morfizmleri için  $g = h$  bulunabilirse  $f$  morfizmine bir *epimorfizm* denir.

**Tanım 1.9(Dual Kesit):**  $C$  bir kategori ve  $f : A \longrightarrow B$  de bu kategoride bir morfizm olsun. Eğer  $gf = I_A$  olacak şekilde bir  $g : B \longrightarrow A$  morfizmi varsa  $f$  ye bir *kesit* denir. Eğer  $fg = I_B$  olacak şekilde bir  $g : B \longrightarrow A$  morfizmi varsa  $f$  ye bir *dual kesit* denir.

**Tanım 1.10(İzomorf-İzomorfizm):** Monomorfizm ve epimorfizm olan bir morfizme *bimorfizm*, kesit ve dual kesit olan bir morfizme ise *izomorfizm* denir. Eğer  $f : A \longrightarrow B$  dönüşümü bir izomorfizm ise A ve B nesnelere *izomorf* denir.

**Tanım 1.11(Kaynak Dönüşümü- Hedef Dönüşümü):** Bir  $C$  kategorisinde  $A \in Ob(C)$  nesnesi verilsin. Eğer her bir  $x \in Ob(C)$  nesnesi için  $Mor_C(A, x)$  bir tek morfizme sahipse  $A \in Ob(C)$  nesnesine bir *kaynak dönüşümü* denir. Benzer olarak her bir  $x \in Ob(C)$  nesnesi için  $Mor_C(x, A)$  bir tek morfizme sahipse  $A \in Ob(C)$  nesnesine bir *hedef dönüşümü* denir.

## 1.2.Funktorlar

Her kategoride, nesnelere arasındaki dönüşümlere karşılık gelen morfizmlerin olduğu bilinmektedir. Örneğin kümeler arasında fonksiyonlar, topolojik uzaylar arasında sürekli fonksiyonlar, gruplar arasında grup homomorfizmleri vardır. Benzer olarak kategoriler arasında da dönüşümlerin olması kaçınılmazdır. Bu dönüşümlere literatürde funktor denir ve çeşitli özellikleri mevcuttur. Bu özellikler ve tanımlamalar aşağıdaki gibi verilebilir (Blyth, 1986; Brown, 1988).

**Tanım 1.12(Funktor):**  $C$  ve  $D$  iki kategori olmak üzere  $C$  nin her bir A nesnesini  $D$  nin bir  $F(A)$  nesnesine,  $C$  nin her bir  $f : A \longrightarrow B$  morfizmini ise  $D$  deki bir  $F(f) : F(A) \longrightarrow F(B)$  morfizmine dönüştüren ve aşağıdaki şartları sağlayan bir  $F$  dönüşümüne  $C$  den  $D$  ye bir *funktor* denir ve  $F : C \longrightarrow D$  biçiminde gösterilir.

$C$  kategorisinde  $g \circ f$  bileşkesi tanımlı olacak şekildeki  $f$  ve  $g$  morfizmleri için

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f) \text{ dir.}$$

$$\text{Her } A \in Ob(C) \text{ için } F(I_A) = I_{F(A)} \text{ dir.}$$

**Tanım 1.13( Kapsama Funktoru):**  $C$ ,  $D$  kategorisinin alt kategorisi, Her  $x \in C$  için  $ix = x$  ve  $C$  kategorisinin her morfizmi için de

$$ia = a$$

biçiminde ise  $i : C \longrightarrow D$  bir funktordur. Bu funktora *kapsama funktoru* denir.

**Tanım 1.14(Abel fonktoru):**  $F : Grp \longrightarrow Grp$  fonktoru *türemiş grup fonktoru* denir.  $F : Grp \longrightarrow Abel$  fonktoru ise *abel fonktoru* adı verilir.

**Tanım 1.15(Trifunctor- Multifunctor):**  $F : A_1 \times A_2 \longrightarrow A$  şeklinde tanımlı funktora *bifunctor*,  $F : A_1 \times A_2 \times A_3 \longrightarrow A$  şeklinde tanımlı funktora *trifunctor*, ve

$$F : A_1 \times A_2 \times A_3 \times \dots \times A_n \longrightarrow A \quad n \geq 4$$

şeklinde tanımlı funktora ise *multifunctor* denir.

**Tanım 1.16(İzomorfizm):**  $F : A \longrightarrow B$  fonktoru için  $G \circ F = I_A$  ve  $F \circ G = I_B$  olacak şekilde  $G : B \longrightarrow A$  fonktoru bulunabiliyor ise  $F$  fonktoru *izomorfizm* denir.

**Tanım 1.17(İzomorfik Kategoriler):** Eğer  $F : A \longrightarrow B$  izomorfizm ise  $A$  ve  $B$  kategorilerine *izomorfik kategoriler* denir.

### 1.3.Homotopi

**Tanım 1.18( Homotopi):**  $F(x,0) = f_0(x)$ ,  $F(x,1) = f_1(x)$ , Her  $x \in X$  şartları ile birlikte  $F : X \times I \longrightarrow Y$  sürekli dönüşümüne *homotopi* denir. Burada  $X, Y$  uzaylar olmak üzere  $f_0, f_1 : X \longrightarrow Y$  sürekli dönüşümlerdir ve  $f_0, f_1$ 'e *homotopiktir* denir (Whithead, 1949) İki matematiksel nesnenin homotopik olması, birinin diğeri üzerine sürekli olarak deforme edilebilmesi ile aynı anlamdadır. Örneğin gerçel sayı doğrusu, tek bir noktaya homotopiktir, ancak çember tek bir nokta uzayına homotopik değildir (Ellis, 1993).

**Tanım 1.19(Homotopi Kategorisi):** Nesnelere  $X$  topolojik uzayları,  $Hom$  kümeleri  $Hom(X, Y) = [X, Y]$  ve birleşimleri  $[g] \circ [f] = [g \circ f]$  biçimindeki bölüm kategorisi *homotopi kategorisi* olarak adlandırılır ve  $hTop$  ile ifade edilir.

**Tanım 1.20(Homotopiler Kategorisi):** Nesnelere topolojik uzaylar, morfizmleri homotopi sınıfları ve kısmi çarpım işlemide homotopi sınıfları arasında tanımlı  $*$  işleminden oluşan kategoriye *homotopiler kategorisi* denir.

**Tanım 1.21(Homotopik Fonksiyon):**  $f : X \longrightarrow Y$  fonksiyonu sabit bir fonksiyona homotopik ise  $f$ 'ye *null homotopik fonksiyon* denir.

**Tanım 1.22(Relatif Homotopi):**  $A \subset X$ ,  $f : X \longrightarrow Y$  ve  $g : X \longrightarrow Y$  sürekli fonksiyonlar olsunlar. Eğer  $a \in A$  için  $f$  ve  $g$  arasında  $t \in I$  ' dan bağımsız  $F(a, t)$  homotopisi mevcutsa  $f$  ve  $g$  fonksiyonlarına  $A$  ya göre homotopiktirler denir. Diğer bir deyişle her  $a \in A$  ve her  $t \in I$  için  $F(a, t) = f(a) = g(a)$  olacak şekildeki  $F$  homotopisine  $A$  ya göre homotopi denir. Bu homotopi  $f \simeq g$  veya  $F: f \simeq g(\text{rel}A)$  biçiminde gösterilir.  $F: f \simeq g(\text{rel}A)$  ise  $\forall x \in X$  için  $F(x, 0) = f(x)$  ve  $F(x, 1) = g(x)$  olup  $\forall x_0 \in A, \forall t \in I$  için  $F(x_0, t) = f(x_0) = g(x_0)$  elde edilir. Eğer  $A = \emptyset$  ise  $A$  ya göre homotopiye *null homotopi* denir.

#### 1.4.Homotopi Denkliği

İki sürekli fonksiyonun homotopik iken denk oluşunu düşünecek isek, homeomorfizm tanımını değiştirmemiz gerekir '=' işareti yerine homotopiyi koymalıyız. Bu bizi aşağıdaki 'homotopi denkliği' kavramına götürür (Whitehead, 1949; Ellis, 1993).

**Tanım 1.23:**  $X$  ve  $Y$  iki topolojik uzay olsun. Eğer  $g \circ f \simeq I_x : X \longrightarrow X$  ve  $f \circ g \simeq I_y : Y \longrightarrow Y$  olacak şekilde  $f : X \longrightarrow Y$  ve  $g : Y \longrightarrow X$  sürekli fonksiyonları mevcutsa,  $X$  ve  $Y$  uzaylarına aynı homotopi tipindedir ya da **homotopik olarak denktir** denir.  $f$  ile  $g$  fonksiyonlarına ise homotopi denklikleri denir. Yazarken 'homotopi denkliği' kavramından ziyade 'iki uzayın homotopik olması kavramı daha yaygındır.

## BÖLÜM 2

### 2.1 Giriş

Bu bölümde ilk olarak tüm bağlantılı homotopi tipleri için cebirsel model teşkil eden simplisel cebirler kategorisi,  $\text{SimpCbr}$  incelenecektir. Daha sonra simplisel objelerin yüksek mertebeden Peiffer elemanları ile hiper çaprazlanmış kompleks çiftlerinin bazı temel özellikleri verilecektir. (Carrasco, 1987; Kuzpınarı, 2007)

### 2.2 Simplisel Cebirler

$k$ , bir sabit birimli değişmeli halka olsun. Burada bütün  $k$ -cebirleri değişmeli ve birleşimli olarak kabul edilecek ancak idealler ve modüller cebir olarak düşünülecektir. Bütün  $k$ -modüllerinin kategorisi  $\text{Mod}$  ile gösterilecektir (Andre, 1970).

**Tanım 2.1**  $R$  bir değişmeli halka olsun.  $M$ ,  $R$  cebiri

$$\begin{aligned} M \times M &\longrightarrow M \\ (m_1, m_2) &\longmapsto m_1 m_2 \end{aligned}$$

işlemi için

$$i) m_1.m_2 = m_2.m_1 \quad ii) m_1.(m_2.m_3) = (m_1.m_2).m_3$$

özelliklerini sağlayan bir ***R-modül***dur.

**Tanım 2.2**  $R$  değişmeli bir halka olsun.  $M$  toplamsal bir grup olsun. Eğer

$$\begin{aligned} R \times M &\longrightarrow M \\ (\alpha.x) &\longmapsto \alpha.x \end{aligned}$$

İşlemi aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa  $M$  ye bir ***R-modül*** denir.

$$\begin{aligned} i) (\alpha + \beta).x &= \alpha x + \beta x & ii) \alpha(x + y) &= \alpha x + \alpha y \\ iii) \alpha(\beta x) &= (\alpha\beta)x & iv) I_R x &= x \end{aligned}$$

**Tanım 2.3**  $M$  bir  $k$ -modül olsun. Her  $m_1, m_2, m_3 \in M$  için

$$\begin{aligned} M \times M &\longrightarrow M \\ (m_1, m_2) &\longrightarrow m_1 m_2 \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan  $k$ -bilineer fonksiyonu

$$i) m_1.m_2 = m_2.m_1 \quad ii) (m_1.m_2).m_3 = m_1.(m_2.m_3)$$

koşullarını sağlıyorsa  $M$  ye bir **değişmeli  $k$ -cebiri** (ya da  $k$  üzerinde cebir) denir.

Değişmeli cebirler kategorisini **Cbr** ile göstereceğiz.

Bu bölüme simplisel cebirler teorisi ile ilgili bazı temel bilgiler vererek başlayacağız. Birinci kısımda simplisel objeler üzerinde bazı Genel sonuçları hatırlayacağız. Özellikle, değişmeli cebirler üzerinde tanımlı simplisel objeler üzerinde yoğunlaşacağız.

**Tanım 2.4**  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$  cebirlerin bir ailesi olsun.

$$\begin{aligned} d_i^n : E_n &\longrightarrow E_{n-1} & 0 \leq i \leq n \neq 0 \\ s_i^n : E_n &\longrightarrow E_{n+1} & 0 \leq i \leq n \end{aligned}$$

k—cebir homomorfizmleri olmak üzere

1.  $d_i^{n-1} d_j^n = d_{i-1}^{n-1} d_i^n \quad 0 \leq i < j \leq n \text{ ise}$
2.  $d_i^{n+1} s_j^n = s_{j+1}^{n+1} s_i^n \quad 0 \leq i \leq j \leq n \text{ ise}$
3.  $d_i^{n+1} s_j^n = s_{j-1}^{n-1} d_i^n \quad 0 \leq i \leq j \leq n \text{ ise}$
4.  $d_i^{n+1} s_j^n = id \quad i = j \text{ ya da } i = j+1 \text{ ise}$
5.  $d_i^{n+1} s_j^n = s_j^{n-1} d_{i-1}^n \quad 0 \leq j \leq i-1 \leq n \text{ ise}$

özdeşlikleri sağlanıyorsa  $((E_n)_{n \in \mathbb{N}}, d_i, s_i)$  üçlüsüne bir **simplisel cebir** denir ve kısaca **E** ile gösterilir.  $d_i, s_i$  homomorfizmlerine sırasıyla **yüzey** ve **dejenere operatörleri** denir. Uygulamadaki kolaylığı açısından yukarıdaki aksiyonların gerektirdiği aşağıdaki eşitlikler daha sık kullanılır.

1.  $d_i d_j = d_j d_{i+1} \quad 0 \leq j < i \leq n \text{ ise}$
2.  $s_i s_j = s_j s_{i+1} \quad 0 \leq j \leq i \leq n \text{ ise}$
3.  $s_i d_j = d_j s_{i+1} \quad j \leq i \text{ ise}$
4.  $s_i d_j = d_{j+1} s_i \quad i > j \text{ ise}$

Bu eşitlikler standarttır ve Carrasco, (1987)' de bulunabilir.

**Tanım 2.5**  $x \in E_n$  elemanlarına n- **boyutlu simpleks** denir. Bazı y ler için

$$x = s_i(y) \text{ oluyorsa bu } x \text{ simpleksine bir } \textit{dejenere simpleks} \text{ denir.}$$

**Tanım 2.6 Bütün**  $d_i^n$  yüzey operatörleri ve bütün  $s_i^n$  denejere operatörleri birleşmeli olan yani

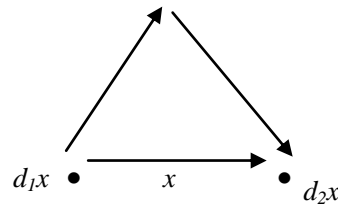
$$d_i f_n = f_{n-1} d_i, \quad f_n s_i = s_i f_{n-1}$$

Şartını sağlayan  $f_n : E_n \longrightarrow F_n$  k-cebir homomorfizmlerinin bir kümesine **E** ve **F** simpisel cebirleri arasında bir **homomorfizm** denir ve  $E \longrightarrow F$  şeklinde gösterilir. Böylece SimpCbr ile göstereceğimiz simplisel cebirlerin kategorisi tanımlanmış olur. Bu tanımın düşük boyutlar için bir geometrik yorumu şu şekilde yapabilir:

$n = 0$  için bir 0 – boyutlu simpleks açık bir  $x \in E_0$  noktasıdır.  $x \in E_1$  için 1 - boyutlu simpleks

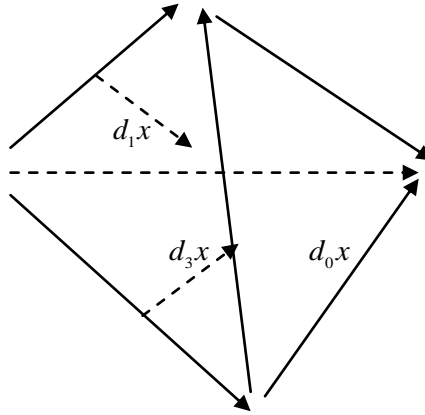
$$d_1x \bullet \xrightarrow{x} \bullet d_0x$$

$x \in E_2$  için 2 - boyutlu simpleks üçgendir:5



**Şekil 2.1.** Simpleks Üçgeni

ve  $x \in E_3$  için 3- boyutlu simpleks bir dörtyüzlüdür.



**Şekil 2.2.** Simpleks Dörtyüzlü

**Tanım 2.7** Bir simplisel k-modül,  $n \geq 0$ , tanım 1.2 de verilen denklemleri sağlayan k—modül homomorfizmleri ile k—modüllerin bir  $E_n$  ailesidir.

**Tanım 2.8** E herhangi bir simplisel K – modül olsun ve

$$\partial_n : E_n \longrightarrow E_{n-1}$$

Homomorfizmi

$$\partial_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i d_i^n$$

Şeklinde tanımlansın. Bu durumda  $k$  - modüllerinin bir kompleks zinciri vardır. Simplisel cebirlerin tanımında yer alan 1. aksiyom gereği  $\partial_{n+1}\partial_n = 0$  dır. Bu böylece  $E$  simplisel modülüyle ilişkili bir zincir kompleksi olur. Buradan  $n$ . homoloji modülü  $H_n(E)$

$$H_n(E) = \frac{\text{Çek}\partial_n}{\text{Im}\partial_{n+1}}$$

şeklinde tanımlanır.

**Tanım 2.9**  $E$  bir simplisel  $k$ -cebir olsun. Her  $n \in \mathbf{N}$  için  $E_n = E$  ve  $d_j = s_j = id$  olmak üzere  $((E_n)_{n \in \mathbf{N}}, d_i, s_i)$  üçlüsü bir simplisel cebirdir. Bu simplisel cebire **sabit simplisel cebir** denir ve  $\mathbf{K}(E, 0)$  ile gösterilir.

**Tanım 2.10** Bir  $E$  simplisel cebir,  $K(E, 0)$  sabit simplisel cebir olsun,

$$E \longrightarrow \mathbf{K}(E, 0)$$

dönüşümüne  $E$  simplisel cebirinin artırılmışı denir. Bu artırma

$$fd_0^1 = fd_1^1 : E_1 \longrightarrow E$$

örten  $k$ -cebir homomorfizmi yardımıyla olur. Eğer  $E$  artırılmış simplisel cebiri devirli ve  $n > 0$  için  $H_n(E) \cong 0$ ,  $H_0(E) \cong E$  ise bu simplisel cebire **devirli simplisel cebir** denir.

**Tanım 2.11**  $B$  bir değişmeli  $k$ -cebir olsun.  $B$  nin bir serbest simplisel çözümü,  $(E, f)$  devirli ve her bir  $E_n$  serbest olacak şekilde bir  $f : E_0 \longrightarrow B$  genişlemesi ile birlikte bir  $E$  simplisel cebirinden oluşur.

### 2.3 Bir Simplisel Cebirin Moore Kompleksi ve Homotopi Modülü

**Tanım 2.12**  $E$  simplisel cebir olsun.

$$(NE)_n = \bigcap_{i=0}^{n-1} \text{Çek}d_i^n$$

ve her

$$n \geq 0 \text{ için } \partial_n : NE_n \longrightarrow NE_{n-1} \text{ dönüşümü, } d_n^n : E_n \longrightarrow E_{n-1}$$

dönüşümünün  $(NE)_n$  kümesine kısıtlanışı olmak üzere  $(NE, \partial)$  zincir kompleksine

$E$  simplisel cebirin **Moore kompleksi** denir.

**Tanım 2.13**  $E$  simplisel cebir olsun.  $E$  nin moore kompleksinin  $n$ . Homolojisine

$E$  nin  **$n$ . homotopi modülü** denir ve  $\pi_n(E)$  ile gösterilir. Yani

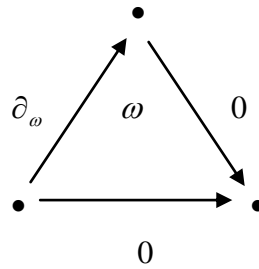
$$\begin{aligned}\pi_n(E) &\cong H_n(NE, \partial) \\ &= \bigcap_{i=1}^n \mathcal{C}ekd_i^n / d_{n+1}^{n+1}(\mathcal{C}ekd_i^{n+1})\end{aligned}$$

$NE$  ve  $\pi_n(E)$  nin yorumunu şu şekilde yapılabilir:

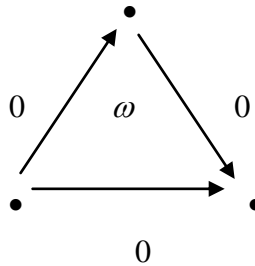
$$n = 1, \omega \in NE_1 \text{ için}$$

$$\partial \omega \bullet \xrightarrow{\omega} \bullet 0$$

$\forall \omega \in NE_2$



$\exists$ Eğer  $\omega \in NE_2$



**Şekil 2.3.** Homotopi Üçgeni

şeklinde ise  $\omega, \mathcal{C}ek\partial$  içindedir. Eğer  $\omega$  onun 3. yüzünde ve diğer bütün yüzleri de sıfır olacak şekilde bir  $x$ , 3-simpleksi varsa  $x, \pi_2(E)$  nin aşikar elemanını verir.

#### 2.4 Kısıtlanmış Simplisel Cebirler

$NE$  ve  $\pi_n(E)$  nin elemanları için bu basit yorum ilerde bazı başka durumlardaki elemanların yorumuna yardımcı olarak faydalı olacaktır (Carroasco, 1987).

**Tanım 2.14**  $E$  simplisel cebirinde mertebesinin boyutu  $> k$  olan  $E_n$  elemanlarını almayarak elde edilen komplekse  $E$  simplisel cebirin bir  **$k$ -kısıtlanmış simplisel cebiri** denir ve  $tr_k E$  ile Gösterilir.  $k$ -kısıtlanmış simplisel cebirlerin kategorisi  $Tr_k SimpCbr$  ile

gösterilir. Cebirlerin kategorisi  $Cbr$  de bir kısıtlama fonktoru vardır. Bu fonktor k- tersiskelet fonktor olarak adlandırılan

$$Cosk_k : Tr_kSimpCbr \longrightarrow SimpCbr$$

şeklinde sağ ek (adjoint) ve k-iskelet fonktor olarak adlandırılan bir

$$sk_k : Tr_kSimpCbr \longrightarrow SimpCbr,$$

sol ek fonktora sahip olan

$$tr_k : SimpCbr \longrightarrow Tr_kSimpCbr$$

şeklinde bir kısıtlama fonktoru vardır (Taşcı, 2007).

Aşağıda verilen teoremi Conduche tarafından gruplar için yapılmıştır. Burada bunun ispatını vermeyeceğiz fakat daha farklı bir yol izleyerek bazı değişiklikler yapılmış olan ve değişmeli cebirler için kullanılan sonucu vereceğiz.

**Teorem 2.1:**  $E$  bir simplisel cebir olsun.  $E$  nin tersiskeleti  $cosk(tr_k(E))$

nin Moore kompleksi  $k + 1$  uzunluğundadır. Yani

$$i > k + 1 \text{ için } N(cosk_k(tr_k(E)))_i = 0$$

dir ve  $k + 1$  den küçük boyutlarda  $E$  nin Moore kompleksi ile özdeştir. Buradan

$$N(cosk_k(tr_k(E)))_{k+1} = \text{Çek}(\partial_k : NE_k \longrightarrow NE_{k-1})$$

ve

$$\partial_{k+1} : N(cosk_k(tr_k(E)))_{k+1} = N(cosk_k(tr_k(E)))_k = NE_k$$

morfizmi birebirdir (Whitehead, 1949; Çallıalp, 2001).

## 2.5 Yüksek Mertebeden Peiffer Elemanları

Bu bölümde Arvasi ve Porter, (1997)' de verilen aşağıdaki sonuçları vereceğiz:

$NE_n$   $n > 1$  İçin  $E$  nin Moore kompleksi olsun. Aynı şekilde  $n > 1$  için,  $D_n$  boyutlu dejenere elemanları tarafından üretilen ideal olsun. Eğer  $E_n = D_n$

ise her

$$\partial_n(NE_n) = \partial_n(I_n)$$

dir. Burada,  $I_n, E_n$  içinde, açık olarak verilen elemanların kümesi tarafından üretilen bir idealdir. Eğer  $n = 2, 3$  ya da  $4$  ise bu durumda  $E$  simplisel cebirin Moore kompleksinin görüntüsü

$$\partial_n(NE_n) = \sum_{I,J} K_I K_J$$

formunda verilebilir. Burada

$$\emptyset \neq I, j \subset [n-1] = \{0, 1, \dots, n-1\} \text{ olmak üzere } I \cup J = [n-1] \text{ ve}$$

$$K_I = \bigcap_{i \in I} \mathcal{C}ekd_i \vee \text{ ve } K_J = \bigcap_{j \in J} \mathcal{C}ekd_j$$

dir. Genel olarak  $n > 4$  için

$$\sum_{I, J} K_I K_J \subseteq \partial_n(NE_n)$$

ifadesi tanımlanmıştır.

**Tanım ve Notasyon 2.15 :** İlk olarak Carrasco ve Cegarra, (1991)' den aşağıdaki notasyon ve terminolojiyi hatırlayalım.

$$[n] = \{0 < 1 < \dots < n\} \text{ sıralı kümesi için } \alpha_i^n : [n+1] \rightarrow [n]$$

$$\alpha_i^n = \begin{cases} j & , j \leq i \text{ ise} \\ j-1 & , j > i \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan artan, örten fonksiyon olsun.

$S(n, n-r)$ ,  $[n]$  den  $[n-r]$  ye monoton artan örten bütün fonksiyonların kümesi olsun. Bu küme  $\alpha_i^n$  lerin çeşitli birleşimleriyle üretilebilir. Bu üretilen fonksiyonların birleşimi aşağıdaki eşitliği sağlar.

$$\alpha_j \alpha_i = \alpha_{i-1} \alpha_j \quad j < i$$

$0 < i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n-1$  olmak üzere bu, her  $\alpha \in S(n, n-r)$  elemanının

$$\alpha = \alpha_{i_1} \circ \alpha_{i_2} \circ \dots \circ \alpha_{i_r}$$

şeklinde bir tek açılımının olmasını Gerektirir. Burada  $i_k$  indisleri

$$\{i_1, \dots, i_r\} = \{i : \alpha(i) = \alpha(i+1)\}$$

olacak şekilde  $[n]$  nin elemanlarıdır. Böylece  $S(n, n-r)$  kümesini

$$\{(i_r, \dots, i_1) : 0 \leq i_1 \leq i_2 < \dots < i_r \leq n-1\}$$

kümesi ile belirleyebiliriz. Özellikle  $[n]$  üzerinde birim fonksiyon ile tanımlanan  $S(n, n)$

nin tek elemanı,  $\phi_n$  ile Gösterilen boş  $0$  — tuple  $( )$  a karşılık gelir. Benzer olarak  $S(n,$

$0)$  in tek elemanı  $(n-1, n-2, \dots, 0)$  dir. Her  $n \geq 0$  için

$$S(n) = \bigcup_{0 \leq r \leq n} S(n, n-r)$$

olsun. Eğer  $i_1 = j_1, \dots, i_k = j_k$  fakat  $i_{k+1} > j_{k+1}$  ise ya da eğer

$i_1 = j_1, \dots, j_r$  ve  $r < s$  ise  $\alpha = (i_r, \dots, i_1) < \beta = (j_s, \dots, j_1)$ ,  $S(n)$  nin içindedir

denir. Bu  $S(n)$  yi bir sıralı küme yapar. Örneğin  $S(2)$  deki ve  $S(3)$  deki sıra

$$S(2) = \{\phi_2 < (1) < (0) < (1,0)\}$$

$$S(2) = \{\phi_2 < (2) < (2,1) < (0) < (2,0) < (1,0) < (2,1,0)\}$$

$$S(2) = \{\phi_2 < (3) < (2) < (3,2) < (1) < (3,1) < (2,1) < (3,2,1) < (0) \\ < (3,0) < (2,0) < (3,2,0) < (1,0) < (3,1,0) < (2,1,0) < (3,2,1,0)\}$$

şeklindedir.  $\alpha, \beta \in S(n)$  ise  $\alpha \cap \beta$ , her ikisine birden ait olan indislerin kümesini belirtir.

## 2.6. Bir Simplisel Cebirin Yarıdirekt Ayrışması

Buradaki temel fikir Conduche, (1984)' de bulunabilir. Bir simplisel grup durumu için ayrıntılı inceleme Carasco ve Cegarra, (1991) tarafında verilmiştir. Bu yapının cebir durumu ise Carrasco, (1987) tarafından yapılmıştır.

**Tanım 2.16**  $M$  bir  $k$  - cebir ve  $n \geq 2$  olmak üzere  $M_1, M_2, \dots, M_n$  ler  $M$  nin alt cebirleri olsun. Aşağıdaki koşulların sağlanması durumunda

$$M \text{ } k \text{ - cebirine } M_1, M_2, \dots, M_n$$

alt cebirlerinin bir  $n$  - yarıdirekt çarpımı denir ve

$$M = M_1 \tilde{\wedge} M_2 \tilde{\wedge} \dots \tilde{\wedge} M_n$$

şeklinde Gösterilir.

(i)  $M_1 + \dots + M_s$   $1 \leq s \leq n$  için  $M$  nin bir idealidir,

(ii)  $M_1 + \dots + M_n = M$ ,

(iii)  $(M_1 + \dots + M_s) \cap M_t = 0$   $1 \leq s < t \leq n$  için,

$m_i \in M_i$  olmak üzere herhangi bir eleman, tek bir türlü olarak  $m_1 + m_2 + \dots + m_n$  şeklinde ifade edilebilir.

**Teorem 2.2:**  $E$  bir simplisel cebir olsun. Bu durumda  $E_n$  yarıdirekt çarpım olarak

$$E_n \cong \text{Çek}_n^n \tilde{\wedge} S_{n-1}^{n-1}(E_{n-1})$$

Şeklinde ifade edilebilir. İzomorfizm aşağıdaki şekilde tanımlanabilir.

$$\begin{aligned}\theta : E_n &\longrightarrow \zeta \text{ekd}_n^n \tilde{a} S_{n-1}^{n-1}(E_{n-1}) \\ e &\longrightarrow (e - s_{n-1}d_n e, s_{n-1}d_n e)\end{aligned}$$

$E_n$  ile  $\zeta \text{ekd}_n \times S_{n-1} E_{n-1}$  arasında izomorfizm var olduğundan bu metodu her bir  $E_n$ , Moore kompleksteki terimlerin dejenerelerinin bir çok katlı yarıdirekt çarpımı şeklinde elde edilene kadar tekrarlayabiliriz. Gerçekten,  $K$ ,

$$K_n = \zeta \text{ekd}_{n+1}^{n+1}, \quad d_i^n d_i^{n+1} \Big|_{\zeta \text{ekd}_{n+1}^{n+1}} \text{ ve } s = s_i^{n+1} \Big|_{\zeta \text{ekd}_{n+1}^{n+1}}$$

şeklinde tanımlanan simplisel cebir olsun. Her  $i \leq n-1$  için  $d_{n-1}^{n-1} d_i^n = d_i^{n-1} d_n^n$  olduğundan  $\zeta \text{ekd}_n^n$  bütün  $d_i^n, i \leq n-1$  morfizmleri tarafından  $\zeta \text{ekd}_{n-1}^{n-1} e$  resmedilir. Dahası  $i \leq n-2$  için  $d_{n+1}^{n+1} s_i^n = s_i^{n-1} d_n^n$  olduğundan  $s_i^{n+1}$ ,  $\zeta \text{ekd}_n^n$  yi  $\zeta \text{ekd}_{n+1}^{n+1}$  resmeder.

*Teorem (1.3.)*  $E_{n-1}$  ve  $K_{n-1}$  e uygulanırsa

$$\begin{aligned}E_n &\cong \zeta \text{ekd}_n \tilde{a} s_{n-1} E_{n-1} \\ &= \zeta \text{ekd}_n \tilde{a} s_{n-1} (\zeta \text{ekd}_{n-1} \tilde{a} s_{n-2} E_{n-2}) \\ &= K_{n-1} \tilde{a} (s_{n-1} \zeta \text{ekd}_{n-1} \tilde{a} s_{n-2} E_{n-2})\end{aligned}$$

elde edilir.

$K$  bir simplisel cebir olduğundan aşağıdaki eşitlik sağlanır.

$$\begin{aligned}\zeta \text{ekd}_n &= K_{n-1} \cong \zeta \text{ekd}_{n-1}^K \tilde{a} s_{n-2} K_{n-2} \\ &= (\zeta \text{ekd}_{n-1} \cap \zeta \text{ekd}_n) \tilde{a} s_{n-2} \zeta \text{ekd}_{n-1}\end{aligned}$$

$$E_n = ((\zeta \text{ekd}_{n-1}^n \cap \zeta \text{ekd}_n^n) \tilde{a} s_{n-2} (\zeta \text{ekd}_{n-1}^{n-1})) \tilde{a} (s_{n-2} (\zeta \text{ekd}_{n-1}^{n-1}) \tilde{a} s_{n-1} s_{n-2} (E_{n-2}))$$

yazmamıza izin verir. Buradan  $E_n$  aşağıdaki ifade edilebilir.

**Teorem 2.3:** Eğer  $E$  bir simplisel cebir ise bu durumda herhangi  $n \geq 0$  için

$$\begin{aligned}E_n &\cong (\dots (NE_n \tilde{a} s_{n-2} NE_{n-1}) \tilde{a} \dots \tilde{a} s_{n-2} \dots s_0 NE_1) \tilde{a} \\ &(\dots (s_{n-2} NE_{n-1} \tilde{a} s_{n-1} s_{n-2} NE_{n-2}) \tilde{a} \dots \tilde{a} s_{n-1} s_{n-2} \dots s_0 NE_0)\end{aligned}$$

dir. Bu çok katlı yarı-direkt çarpımdaki terimlerin sırası ve parantezler

$$\begin{aligned}E_1 &\cong NE_1 \tilde{a} NE_0 \\ E_2 &\cong (NE_2 \tilde{a} s_1 NE_1) \tilde{a} (s_0 NE_1 \tilde{a} s_1 s_0 NE_0) \\ E_3 &\cong ((NE_3 \tilde{a} s_2 NE_2) \tilde{a} (s_1 NE_2 \tilde{a} s_2 s_1 NE_1)) \tilde{a} \\ &((s_0 NE_2 \tilde{a} s_2 s_0 NE_1) \tilde{a} (s_1 s_0 NE_1 \tilde{a} s_2 s_1 s_0 NE_0))\end{aligned}$$

$$E_4 \cong (((NE_4 \tilde{\alpha} s_3 NE_3) \tilde{\alpha} (s_2 NE_3 \tilde{\alpha} s_3 s_2 NE_2)) \tilde{\alpha} ((s_1 NE_3 \tilde{\alpha} s_3 s_1 NE_2) \tilde{\alpha} (s_2 s_1 NE_2 \tilde{\alpha} s_3 s_2 s_1 NE_1))) \tilde{\alpha} s_0 (E_3 \text{ \u00fcn ayr\u0131\u015f\u0131m\u0131}))$$

dizisi tarafından \u00fcretilir.

Dikkat edilirse  $\alpha = (i_r, \dots, i_1) \in S(n)$  e benzer terim

$$S_\alpha (NE_{n-\#\alpha}) = S_{i_r, \dots, i_1} (NE_{n-\#\alpha})$$

dir. Burada  $\#\alpha = r$  dir.

Buradan herhangi bir  $x \in E_n$  elemanı  $y \in E_n$  ve  $x_\alpha \in NE_{n-\#\alpha}$  olmak \u00fczere

$$x = y + \sum_{\alpha \in S(n)} x_\alpha$$

formunda yaz\u0131labilir (Asar, 2009)

## 2.7 Hiper \u00c7aprazlanmış Kompleks \u00c7iftleri

Arvasi, (1997) tarafından verilen a\u015fağ\u0131da bir  $I_n$  idealini tanımlayacağ\u0131z. Her\u015eyden \u00f6nce Carrasco, (1987) tarafından verilen k-lineer morfizmelerin bir ailesinin in\u015fasını hatırlayalım.

$\alpha \cap \beta = \emptyset$  olmak \u00fczere  $S(n)$  in  $(\alpha\beta)$  ikili elemanlarından oluşan  $P(n)$  k\u00fcmesini tanımlayalım  $\alpha = (i_r, \dots, i_1), \beta = (j_s, \dots, j_1) \in S(n)$  dir. ihtiya\u00e7ımız olan k-lineer morfizmler

$$\{ C_{\alpha\beta} : NE_{n-\#\alpha} \otimes NE_{n-\#\beta} \longrightarrow NE_n : (\alpha, \beta) \in P(n), n \geq 0 \}$$

kompozisyonu olarak

$$\begin{array}{ccc} NE_{n-\#\alpha} \otimes NE_{n-\#\beta} & \xrightarrow{C_{\alpha,\beta}} & NE_n \\ \downarrow s_{\alpha \otimes \beta} & & \uparrow p \\ E_n \otimes E_n & \xrightarrow{\mu} & E_n \end{array}$$

Şekil 2.4.K-Lineer Morfizimler Diyagramı

diyagramı ile verilir. Burada

$$s_\alpha = s_{i_r} \dots s_{i_1} : NE_{n-\#\alpha} \longrightarrow E_n, s_\beta = s_{j_s} \dots s_{j_1} : NE_{n-\#\beta} \longrightarrow E_n$$

$j = 0, 1, \dots, n-1$  için  $p_j = 1 - s_j d_j$  olmak \u00fczere  $p : E_n \rightarrow NE_n, p = p_{n-1} \dots p_0$

bileşke gösterimler ile tanımlanır ve çarpma

$$\mu : E_n \otimes E_n \longrightarrow E_n$$

ile gösterilir. Buradan

$$\begin{aligned} C_{\alpha\beta}(x_\alpha \otimes y_\beta) &= p\mu(s_\alpha \otimes s_\beta)(x_\alpha \otimes y_\beta) \\ &= p(s_\alpha(x_\alpha)s_\beta(y_\beta)) \\ &= (1-s_{n-1}d_{n-1}) \dots (1-s_0d_0)(s_\alpha(x_\alpha)s_\beta(y_\beta)). \end{aligned}$$

dir.

## BÖLÜM-3-

### 3 TIPTEN CEBİRSEL MODELLER VE ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER İÇİN OTOMORFİZMA YAPILARI

#### 3.1.Giriş

Bu bölümde, çaprazlanmış modüller için otomorfizma yapısının ışığında örgülü, düzenli çaprazlanmış modüllere giriş yaptık. Bunlar simplicial grupları ile yakından alakalı gösterilmiştir. Örgülü, düzenli çaprazlanmış modüllerin kategorisinin length 2 nin Moore complex 'i ile simplicial gruplarına eşdeğer olduğunu ispat ediyoruz. Bu eşdeğerlik örgülü, düzenli çaprazlanmış modüllerin homotopi 3-types 'ın cebirsel modelleri olarak rolünü ortaya koyar (Whitehead, 1949; Maclane, 1950; Loday, 1982; Kuzpınarı, 2005)

Şimdi otomorfizm teorisinden hareketimizi gözden geçiriyoruz. Otomorfizm grubu ile ilişkili olan grup  $G$  'nin  $Aut G$  'si ,  $g \longmapsto g^x = x^{-1}gx$  iç otomorfozuna  $x \in G$  yi gönderen  $x: G \rightarrow Aut G$  'nin homomorfozudur.  $Aut G$  grubu  $G$  'ye göre davranır ve  $x$  şu iki özelliği karşılar.

$$(i) x(g^f) = f^{-1}x(g)f,$$

$$(ii) g^{x(x)} = x^{-1}gx$$

hepsi için  $g, x \in G$  ve  $f \in Aut G$  dir. Görüyoruz ki  $Aut G$  çaprazlanmış modülün doğal olarak bir parçası olarak düşünülebilir. Şöyle ki bir grup homomorfoz  $\partial: M \longrightarrow P$  ,  $M$  deki  $P$  nin hareketiyle birlikte şunları karşılar

$$CM1: \partial(m^p) = p^{-1}\partial(m)p$$

$$CM2 : m_0^{\partial(m)} = m^{-1}m_0m,$$

hepsi için  $m_0, m \in M$  ve  $p \in P$  dir.

Çaprazlanmış modüller *J. H. C. Whitehead tarafından* ortaya konmuştur ve  $M$  ve  $P$  normal alt grubunun  $M \longrightarrow P$  içermesi,  $M$  bir  $P$ -modülü iken  $M \longrightarrow P$  sıfır homomorfizması ve merkez çekirdeği ile herhangi bir  $M \longrightarrow P$  örtevi (örnekleri arasındadır).Önemli topolojik bir örneği de vardır: Eğer  $F \longrightarrow E \longrightarrow B$  kesin alanı Faybreyşin dizisi olursa, temel grubun  $\pi_1 F \rightarrow \pi_1 E$  indüklenen homomorfizması doğal olarak çaprazlanmış bir modül olur. Şimdi gruplar 1-types'ın cebirsel modelleridir ki bir tane sınıflandıran alan izleci vardır.

$B : (\text{groups}) \longrightarrow (\text{CW -complexes})$

ki böylece herhangi bir grup  $G$  için alan  $BG$  şunu karşılar

$${}_jBG \cong G \text{ ve } \pi_j BG = 0 \text{ } j > 1 \text{ için.}$$

ve dahası  $j > 1$  için  $\pi_j X = 0$  ile herhangi bir kesin, bağlı CW -bileşik  $X$   $B\pi_1 X$  'in homotopi tipidir.

Çaprazlanmış modüller 2-types 'in cebirsel modelleridir. Bir tane sınıflandıran alan functor'u vardır.

B: ( çaprazlanmış modüller)  $\longrightarrow$  (CW -bileşikleri)

Şöyle ki eğer  $\partial: M \longrightarrow P$  çaprazlanmış modül olursa  $B(M \longrightarrow P) \cong \pi_1 B(M \longrightarrow P) \cong \text{coker } \partial, \pi_2 B(M \longrightarrow P) \cong \text{ker } \partial$  'lere sahiptir

ve  $j > 2$  için  $\pi_j B(M \longrightarrow P) = 0$  'dır.

Dahası,  $j > 2$  için  $\pi_j X = 0$  işlemlerli bağlı CW bileşik  $X$  bazı  $M \longrightarrow P$  çaprazlanmış modülleri için  $B(M \rightarrow P)$  nin homotopi tipidir. Aynı zamanda  $X: G \longrightarrow \text{Aut } G$  çaprazlanmış modülü için, sınıflandıran alanın birinci ve ikinci homotopi grupları  $\text{Out } G$  ve  $Z(G)$  'dirler (MacLane, 1950; Loday, 1982).

Bir 1-type'in cebirsel modelinin otomorfizmasının bir 2-type'in doğal olarak cebirsel bir modeli olduğunun düşünüldüğünü görüyoruz. Mevcut çalışmanın amacı, çaprazlanmış modüller için, bir 3-type'in cebirsel bir modeli olarak kabul edilebilen bir otomorfizma yapısının bulunup bulunamayacağını araştırmaktır.

Bu tip bir otomorfizma yapısını türetmemiz bağımsız ilgi prosedürünü kullanır.  $\mathbb{C}$  Tensör çarpımı  $\otimes$  ve iç Hom funktoru  $\text{HOM}$  ile bir monoidal kapalı kategorisi olsun. Böylece  $\mathbb{C}$  nin herhangi bir A, B ve C objesi için doğal bir  $\mathbb{C}(A \otimes B, C) \cong \mathbb{C}(A, \text{HOM}(B, C))$  izomorfizm vardır.

Öyleyse  $\mathbb{C}$  obje  $\text{END}(C) = \text{HOM}(C, C)$  'nin  $\text{END}(C) \otimes \text{END}(C) \longrightarrow \text{END}(C)$  kanonik haritası ile birlikte herhangi bir C objesi  $\mathbb{C}$  'de bir monoiddir ve pek çok durumda  $\text{END}(C)$  nin makul bir biçimde  $\text{AUT}(C)$  olarak belirtilebilen bir submonoidi vardır.  $\mathbb{C}$  deki monoid yapısı ile birlikte  $\mathbb{C}$  kategorisi için otomorfizma yapıları oluşturan işte bu objedir.

Çaprazlanmış modüller için otomorfizma yapılarını işlemek için çaprazlanmış modüller kategorisini monoidal closed olan daha geniş bir kategoriye almak zorundayız. Bir çaprazlanmış modülü 2- ucu açık çaprazlanmış bileşik olarak sayarız.  $\mathcal{G}^1$  groupoiddeki çaprazlanmış modüller ve çaprazlanmış bileşiklerdeki gerekli bilgileri tekrar edeceğiz ve verilen çaprazlanmış bileşiklerin  $\mathcal{L}_{rs}$  kategorisindeki monoidal closed yapıdaki başlıca sonuçları belirteceğiz. Aynı zamanda  $\mathcal{L}_{rs}$  de monoid olan over groupoid çaprazlanmış modülleri belirleyen ekstra yapısal özellikleri tanımlayacağız. Bunlar örgülenmiş ve yarı düzenli çaprazlanmış modüllerdir. Böylece eğer C çaprazlanmış

modül ise,  $END(C)$  de şeritlenmiş ve yarı düzenlidir.  $AUT(C)$  otomorfizma yapısı  $END(C)$  den bir örgü devralır ve daha güçlü içsimetrisi onu şeritlenmiş ve düzenli yapar. Teknik sonuçlarımızda  $AUT(C)$  nin rolünü 3-type'in cebirsel bir modeli olarak belirleriz (Brown, 1987).

**Teorem 3.1.:**Şeritlenmiş, düzenli çaprazlanmış modüllerin kategorisi length 2 nin Moore bileşikli simplicial gruplarının kategorisine eşdeğerdir.

Bu teorem§2 nin hacmini işgal eder. Simplicial grupların homotopi type'ların cebirsel modelleri olarak kullanımı eskilere dayanır. Conduche, (1984) length 2' nin Moore bileşikli simplicial gruplarının 2-çaprazlanmış modüllerinin kategorisine eşdeğer olduğunu göstermiştir. Şeritlenmiş, düzenli çaprazlanmış modüller ile 2-çaprazlanmış modülleri arasında elde edilen eşdeğerliğin esası, bir şeritlenmiş, düzenli çaprazlanmış modülün kendi eşdeğer simplicial grubunun kanonik altyapı Moore bileşiği olarak içermesidir. Moore bileşiği 2-çaprazlanmış modüldür ve şeritlenmiş, düzenli çaprazlanmış modülü izomorfizmaya kadar belirler.

Teoremde bahsedilen eşdeğerlik aynı zamanda A.Joyal ve M.Tierney 'in yayımlanmamış olan çalışmasında geliştirilen 3-types'ların cebirsel modellerine de ışık tutar. Joyal ve Tierney modeli 3-types'a şeritlenmiş ve koşulsuz gruplar ile basitçe bağlıdır. Bunlar grupların Şeritlenmiş çaprazlanmış modüllerine bu yazı anlamında eşdeğerdirler. Grupların herhangi bir çaprazlanmış modülü düzenlidir ve grubun Şeritlenmiş çaprazlanmış modüllerinin kategorisinin length 2' nun Moore bileşikli indirgenmiş simplicial gruplarının kategorisine eşdeğer olduğunu buluruz (Joyal, 1986).

§3 te grupların çaprazlanmış modülleri için otomorfizma yapıları araştırmamıza geri dönüyoruz. Bu durumda Whitehead, (1948)' in çalışmasına ve bu çalışmanın Norrie, (1987) tarafından geliştirilmiş halini baz alarak  $AUT(C)$  nin detaylı bir tanımını vereceğiz.  $AUT(C)$  'yi bir 2-çaprazlanmış modül olarak dikkate alarak, bazı özel durumlarda 3-type'a tekabül eden homotopi gruplarını hesaplarız. Dahası, Norrie, (1987) tarafından bağımsız bir şekilde incelendiği gibi, çaprazlanmış bir modülün otomorfizma yapısının çaprazlanmış dörtgen olarak da düşünebileceğimizi görürüz. Çaprazlanmış dörtgenler cebirsel K-teorisindeki eksizyon çalışmasından çıkmıştır. Aynı zamanda 3-types'ın cebirsel modellerini de oluştururlar ve temel çaprazlanmış dörtgen izleci genelleştirilmiş bir Van Kampenteoremini karşılar. Çalışmamızdaki ilginin bir kısmı 2-çaprazlanmış modüllerin ve çaprazlanmış dörtgenlerin cebirsel düşün celerden çıkmış olarak görülmesindedir (Guin-Walery, 1980; Brown, 1987).

### 3.2. Çaprazlanmış modüllerin çaprazlanmış bileşkeleri

Monoidal closed kategorilerde ihtiyacımız olan temel bilgileri tekrar ederek başlıyoruz.  $\mathbb{C}$ , tensor ürünü  $-\otimes-$ , özdeşlik nesnesi  $I$  ve iç hom functor'u  $HOM$  ile monoidal closed kategori olsun (MacLane, 1971). Böylece  $\mathbb{C}$ 'nin bütün  $A, B, C$  objeleri için doğal bir izomorfizma var olur.

$$\theta: \mathbb{C}(A \otimes B, C) \longrightarrow \mathbb{C}(A, HOM(B, C)) \quad (1.1)$$

ki bu tensor ürününün birleşebilirliği ile birlikte doğal bir izomorfizmanın  $\mathbb{C}$ 'sinde var olduğunu ima eder.

$$\theta: HOM(A \otimes B, C) \longrightarrow HOM(A, HOM(B, C)) \quad (1.2)$$

Dahası, şu izomorfizma

$$\theta: \mathbb{C}(HOM(A, B) \otimes A, B) \longrightarrow \mathbb{C}(HOM(A, B), HOM(A, B))$$

$\epsilon_A: HOM(A, B) \otimes A \longrightarrow B$  ki böyle  $\theta(\epsilon_A)$ 'nin  $HOM(A, B)$  de özdeşlik olduğu,  $\epsilon_A$ 'ya değerlendirme morfizması dendiği tek bir morfizmanın var olduğunu gösterir. Böylece  $\mathbb{C}$ 'nin tüm  $A, B, C$  objeleri için bir morfizma vardır (Brown, 1987).

$$\begin{array}{ccc} \alpha & & \\ (HOM(B, C) \otimes HOM(A, B)) & \longrightarrow & HOM(B, C) \otimes HOM(A, B) \otimes A \\ & \searrow I \otimes \epsilon_A & \searrow \epsilon_B \\ & & HOM(B, C) \otimes B \longrightarrow C. \end{array}$$

Bu kapsamda  $\theta$  bileşim denilen şu morfizmaya tekabül eder.

$$\gamma_{ABC}: HOM(B, C) \otimes HOM(A, B) \longrightarrow HOM(A, C)$$

$HOM(C, C)$  için  $END(C)$  yi yazarız.  $\lambda: I \otimes C \longrightarrow C$  morfizmasına karşılık gelen bir  $\eta_C: I \longrightarrow END(C)$  morfizması vardır. İhtiyacımız olan ana sonuç şudur.

**3.1. Önerme.**  $\eta_C$  morfizması ve  $\mu_C = \gamma_{CCC}: END(C) \otimes END(C) \longrightarrow END(C)$  bileşimi  $END(C)$  yi  $\mathbb{C}$  nin bir monoid'i yapar.

Groupoid'in her oku bir izomorfizma olan küçük bir kategori olduğunu unutmayın. Groupoid'i  $(C_1, C_0)$  şeklinde yazarız, burada  $C_0$  köşeler kümesi ve  $C_1$  ise oklar kümesidir.  $p$ 'den  $q$ 'ya kadar olan  $p \longmapsto q$  oklar kümesi  $C_1(p, q)$  şeklinde yazılır ve  $p$  ve  $q$  böyle bir okun kaynak ve hedefidir. Kaynak ve hedef haritaları  $s, t: C_1 \longrightarrow C_0$  şeklinde yazılır. Eğer  $a \in C_1(p, q)$  ve  $b \in C_1(q, r)$  ise bileşikleri  $a + b \in C_1(p, r)$  şeklinde yazılır.  $C_1(p, p)$  yi  $C_1(p)$  olarak yazarız. Groupoid'lerin uygulamalarının incelemesi ve literatürüne giriş için bakarız.

$$C: \longrightarrow \dots C_r \xrightarrow{\delta} C_{r-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow C_3 \xrightarrow{\delta} C_2 \xrightarrow{\delta} C_1 \rightrightarrows C_0$$

Bir çaprazlanmış bileşiğin  $C_0$  verteks setli bir groupoid ve  $n \geq 3$  için her  $C_n(p)$  değişmeli ile  $C_0$  üstünde  $C_n = \{ C_n(p) \mid p \in C_0 \}$  groupoid kümeleri içerdiğini hatırlayın.  $C_n$  ( $n \geq 1$ ) deki işlemleri de yazacağız.  $C_1$  groupoid 'i her  $C_n$  hareket eder böylece  $x \in C_n(p)$  ve  $a \in C_1(p, q)$  için  $xa \in C_n(q)$  vardır.  $n \geq 2$  için  $\delta: C_n \longrightarrow C_{n-1} \longrightarrow C_0$  üstünde groupoid'lerin bir morfizmasıdır ve  $C_1$  'in hareketini korur ki burada  $C_1$  her  $C_1(p)$  ye birleşme yoluyla etki eder ve  $n \geq 3$  için  $\delta\delta: C_n \longrightarrow C_{n-1}$  sıfır haritasıdır. Dahası,  $n \geq 3$  için  $\delta(C_2)$ ,  $C_n$  de değersiz olarak hareket eder,  $x, y \in C_2(p)$  ise  $y\delta^{(x)} = -x + y + x$  olur.  $f: C \longrightarrow D$  çaprazlanmış bileşiklerinin morfizması,  $f_0: C_0 \longrightarrow D_0$  bu aynı haritaya sebep olan ve  $\delta: C_n \longrightarrow C_{n-1}$ ,  $D_n \longrightarrow D_{n-1}$  haritaları ve  $C_1$  ve  $D_1$ 'in hareketlerine uygun  $f_n: C_n \longrightarrow D_n$  ( $n \geq 1$ ) groupoid'lerinin morfizmalarının kümesidir.

Yukarıdaki  $(C_1, C_0)$  groupoid'i ya da  $C_1$  çaprazlanmış modülü boyunca, bir çaprazlanmış modül olarak

$$\begin{array}{ccc} & \delta & \delta \\ C_2 & \longrightarrow & C_1 \rightrightarrows C_0 \end{array}$$

nin tanımını içerir. Her  $p \in C_0$  için  $C_2(p) \longrightarrow C_1(p)$  'nin gruplar için bir çaprazlanmış modül olduğuna özellikle dikkat ediniz.

$U$  bir monoid olsun.

$$\begin{array}{ccc} & \delta & \delta \\ C_2 & \longrightarrow & C_1 \rightrightarrows C_0 \end{array}$$

çaprazlanmış modülündeki  $U$  'nun biaction 'u  $C_1$  ve  $C_2$  groupoid'lerinde ve  $C_0$  setindeki, bütün yapılarla uyumlu  $U$  'nun değiştirilen sol ve sağ hareketlerinin çiftini içerir. Özellikle,  $i = 0, 1, 2$  için  $(u, c) \longmapsto u \cdot c$  ve  $(c, u) \longmapsto c \cdot u$  şeklinde ifade edilen  $U \times C_i \rightarrow C_i$  ve  $C_i \times U \rightarrow C_i$  fonksiyonları vardır. ki böyle

BA1: Her  $U \times C_i \longrightarrow C_i$  fonksiyonu  $U$  'nun sol hareketini belirler ve her  $C_i \times U \longrightarrow C_i$  fonksiyonu  $U$  'nun sağ hareketini belirler ve bu hareketler değişebilir.

BA2:  $U$  'nun her hareketi  $C_0$  üzerinde  $C_1$  'in groupoid yapısını korur ve özellikle  $s, t: C_1 \longrightarrow C_0$  kaynak ve hedef haritaları her harekete  $U$ -equivariant görecelidir.

BA3:  $U$  'nun her hareketi  $C_2$  deki grup işlemlerini korur ve eğer  $x \in C_2(p)$  ve  $u \in U$  ise  $u \cdot x \in C_2(u \cdot p)$  ve  $x \cdot u \in C_2(p \cdot u)$  olur.

BA4:  $U$  'nun her hareketi  $C_2$  üstünde  $C_1$  'in hareketi ile uyumludur onun için eğer  $x \in C_2(p)$ ,  $a \in C_1(p, q)$  ve  $u \in U$  olursa

$$u.(x^a) = (u.x)^{u.a} \in C_2(u.q)$$

$$(x^a).u=(x.u)^{a.u} \in C_2(q.u)$$

BA5:  $\delta: C_2 \longrightarrow C_1$  sınır homomorfizması her harekete U-equivariant görecelidir.

$$\begin{array}{c} \delta \\ C: C_2 \longrightarrow C_1 \Longrightarrow C_0 \end{array}$$

çaprazlanmış modülü eğer  $C_0$  verteks seti monoid olursa, yarı düzenlidir ve  $-C_0$  kendine kendi sol ve sağ düzenli temsillerinde davrandığı -  $C$  üstünde  $C_0$  'ın bir biaction'u vardır.  $C_0$  'nun bir grup olduğu yarı düzenli bir çaprazlanmış modülün düzenli olduğu söylenebilir.

$$\begin{array}{c} \delta \\ C: C_2 \longrightarrow C_1 \Longrightarrow C_0 \end{array}$$

yarı düzenli bir çaprazlanmış modül olsun.  $C_0$  monoid'ini  $e$  özdeşlik ögesi ile birlikte çarpımsal bir şekilde yazarız.  $(a, b) \longrightarrow \{a, b\}$  şeklinde yazılan  $C$ 'deki bir braiding, bir  $C_1 \times C_1 \longrightarrow C_2$  fonksiyonudur ki bu aşağıdaki aksiyomları karşılar. ( burada  $a, a', b, b' \in C_1, x, y \in C_2$  ve  $p, q \in C_0$  dir

$$B1: \{a, b\} \in C_2((ta)(tb)), \{0_e, b\} = 0_{tb}, \{a, 0_e\} = 0_{ta}$$

$$B2: \{a, b + b'\} = \{a, b\}^{ta.b'} + \{a, b'\};$$

$$B3: \{a + a', b\} = \{a', b\} + \{a, b\}^{a.tb}$$

$$B4: \delta\{a, b\} = -(ta.b) - a.sb + sa.b + a.tb;$$

$$B5: \{a, \delta y\} = -(ta.y) + (sa.y)^{a.q} \text{ ve } y \in C_2(q);$$

$$B6: \{\delta x, b\} = -(x.sb)^{p.b} + x.tb \text{ ve } x \in C_2(p)$$

$$B7: p.\{a, b\} = \{p.a, b\}$$

$$\{a, b\}.p = \{p.a, b\}$$

$$\{a.p, b\} = \{a, p.b\}$$

**Örnek.**

$$\begin{array}{c} \delta \\ C_2 \longrightarrow C_1 \end{array}$$

Gruplarının çaprazlanmış modülündeki bir braiding, aşağıdaki aksiyomları karşılayan  $\{, \}: C_1 \times C_1 \longrightarrow C_2$  fonksiyonudur.

$$(i) \{a, b + b'\} = \{a, b\}^{b'} = \{a, b'\},$$

$$(ii) \{a + a', b\} = \{a', b\} = \{a, b\}^{a'}$$

$$(iii) \delta\{a, b\} = [b, a],$$

$$(iv) \{a, \delta y\} = -y + y^a$$

$$(v) \{\delta x, b\} = -x^b + x,$$

ki burada  $a, a', b, b' \in C_1$  ve  $x, y \in C_2$  dir.

A. Joyal ve R. Street keyfi monoidal kategori için braiding kavramı tanımlamış ve özellikle şeritlenmiş kategorik grupları dikkate almışlardır. Bunlar  $(a, b) \longrightarrow \{a^{-1}, b\}^a$  şeklinde verilen bracket işlemi ile birlikte, şeritlenmiş çaprazlanmış modüller anlamına gelirler. Bu değişiklik işaretler kurallarından sadece bir tanesidir.

$B1, \dots, B7$  aksiyomları D. Conduche tarafından  $L \longrightarrow M \longrightarrow N$  2-çaprazlanmış modülündeki  $M \times M \longrightarrow L$  Peiffer lifting'i için verilen aksiyomlarla açıkça yakından ilişkilidir. Bu ilişkiyi §2 'de inceleyeceğiz.

[8] de çaprazlanmış bileşiklerin  $\mathcal{Brs}$  kategorisi tensor ürünü  $-\otimes-$  ve  $\mathcal{Brs}$  'ye simetrik, yakın monoidal yapı veren  $CRS(-, -)$  iç hom functor 'u ile birlikte bahsedilmiştir. C ve D çaprazlanmış bileşiklerinin  $C \otimes D$  tensor ürünü, bütün  $c \in C_m$  ve  $d \in D_n$  için  $m+n$  boyutunda  $c \otimes d$  elementleri tarafından çaprazlanmış bileşik olarak oluşturulmuştur.  $C \otimes D$  için [2, önerme 3.10] da bir sunum verilmiştir. Şuan ki çalışma için [8] nin önemli kavramı çaprazlanmış bileşiklerin  $\theta: (A, B) \longrightarrow C$  bimorfizmasıdır. Burada A, B, ve C çaprazlanmış bileşikler ve  $\theta$  ise  $A_m \times B_n \longrightarrow C_{m+n}$  haritalarının kümesidir.  $\theta$  tarafından karşılanan koşullar. Brown, 1987(3.4) ü olarak verilmiştir. Tensor ürünü bimorfizmaları çaprazlanmış bileşiklerin morfizmalarına dönüştürür, onun için  $A \otimes B \longrightarrow C$  çaprazlanmış bileşiklerinin morfizmalar dizisi ile  $(A, B) \longrightarrow C$  bimorfizmalar dizisi arasında doğal bir tanımlı vardır (Brown, 1987)

$CRS(C, D)$  çaprazlanmış bileşiği,  $C \longrightarrow D$  çaprazlanmış bileşiklerinin bütün morfizmalarının  $\mathcal{Brs}(C, D)$  dizisine kendi  $CRS(C, D)_0$  verteks dizisi olarak sahiptir.  $m \geq 1$  için  $CRS(C, D)_m f: C \longrightarrow D$  morfizmaları üzerinde  $h: C \longrightarrow D$  m-fold sol homotopilerini içerir, ki  $h, m$  derecesinin bir haritasıdır böylece  $h_1: C_1 \longrightarrow D_{m+1}$  bir derivasyondur ve  $h_r: C_r \longrightarrow D_{m+r}$  ( $r \geq 2$ )  $C_1$  ve  $D_1$  'in hareketleri ile uyumlu groupoid'lerin morfizmasıdır. Homotopi kavramının ve  $CRS(C, D)$  çaprazlanmış bileşik yapısının tüm detayları Brown, (1987)' de verilmiştir.

Tensor ürününün ve iç homfunctor'un temel özellikleri aşağıdaki sonuçta özetlenmiştir.

**3.2. Teorem**  $-\otimes B$  functor'u  $\mathcal{Brs}$  'den  $\mathcal{Brs}$  'ye  $CRS(B, -)$  functoru'na sol eşleniktir.

(ii) A, B, C çaprazlanmış bileşikleri için çaprazlanmış bileşiklerin doğal izomorfizmaları vardır.

$$(A \otimes B) \otimes C \cong A \otimes (B \otimes C),$$

$$CRS(A \otimes B, C) \cong CRS(A, CRS(B, C))$$

Bu yüzden eğer  $C$  bir çaprazlanmış bileşikse,  $END(C) = CRS( C, C )$  'yi düzenleriz ve  $3, I$  önermesi yoluyla, bu bileşim haritası ile birlikte  $\mathcal{B}rs$  'de bir monoid olur.

$$y: END(C) \otimes END(C) \longrightarrow END(C)$$

Her hangi bir  $A$  ve  $B$  çaprazlanmış bileşiği için  $(A \otimes B)_0 = A_0 \times B_0$  olduğunu ve

$$y_0: \mathcal{B}rs(C, C) \otimes \mathcal{B}rs(C, C) \longrightarrow (C, C)$$

fonksiyonunun  $\mathcal{B}rs$  'deki morfizmaların sadece bileşimi olduğunu görmenin çok kolay olduğuna dikkat ediniz. Şimdi  $C$ 'nin  $AUT(C)$  otomorfizma yapısını,  $\mathcal{B}rs$ 'deki  $C$ 'nin otomorfizmalarının  $AUT(C)$  verteks setindeki  $END(C)$ 'nin tam subcrossed bileşiği olarak tanımlayabiliriz. Kısıtlama yoluyla  $y: AUT(C) \otimes AUT(C) \longrightarrow AUT(C)$  bileşim haritasını elde ederiz.

Eğer  $C$   $n$ -truncated çaprazlanmış bileşik ise, ki  $r > n$  için,  $C, C_0$  da değersiz bir groupoid'dir öyleyse  $END(C)$  deki  $n$ 'den daha büyük olan değer haritaları ister istemez değersizdir, bundan dolayı  $END(C)$  ve aynı zamanda  $AUT(C)$  de  $n$ -truncated'dir.

Özellikle,  $C$  çaprazlanmış modül ise (2- truncated çaprazlanmış bileşik demektir.) o zaman  $AUT(C)$  de tekrar çaprazlanmış modüldür. Ancak,  $C$  grupların çaprazlanmış modülü olsa bile, böylece  $C_0$  tek bir noktadır, o zaman  $AUT(C)$ , çaprazlanmış modüller kategorisindeki  $C$  nin otomorfizmalarının seti,  $AUT(C)$  verteks setli bir groupoid üzerinde çaprazlanmış bir modüldür. Böylece groupoid'ler üzerindeki teori kaçınılmazdır.

**Tanım 3.1.(Çaprazlanmış Kare)**  $k$  değişmeli halka,  $R, k$  cebiri ve  $D, C, B$  'nin her biri  $R$ -cebir olsun.

$$\begin{array}{ccc} RxC \longrightarrow C & RxB \longrightarrow B & RxD \longrightarrow D \\ (r,c) \longmapsto (r.c) & (r,b) \longmapsto (r.b) & (r,d) \longmapsto (r.d) \end{array}$$

Etkileri ve,

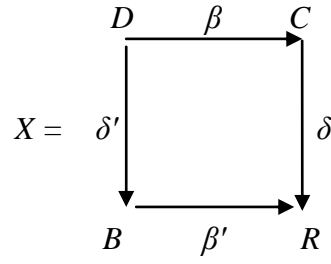
$$\delta: C \longrightarrow R, \delta': D \longrightarrow R, \beta': D \longrightarrow C \text{ ve } \beta: B \longrightarrow R \text{ } R\text{-cebir morfizimleri ve}$$

$$h: C \times B \longrightarrow D$$

olmak üzere

- (i)  $\delta, \beta, \delta', \beta'$  birer çaprazlanmış  $R$ -modül.
- (ii)  $\delta$  ve  $\beta$ ,  $R$  nin etkileri koruması
- (iii)  $r.h(c, b) = h(r.c, b)$
- (iv)  $h(c+c', b) = h(c, b) + h(c', b)$  ve  $h(c, b+b') = h(c, b) + h(c, b')$
- (v)  $h(\beta'(d), b) = d.\beta(b)$  ve  $h(c, \delta'(d)) = \delta.c.d$

Şartları her  $c, c' \in C, b, b' \in B$  ve  $d \in D$  için geçerli ise

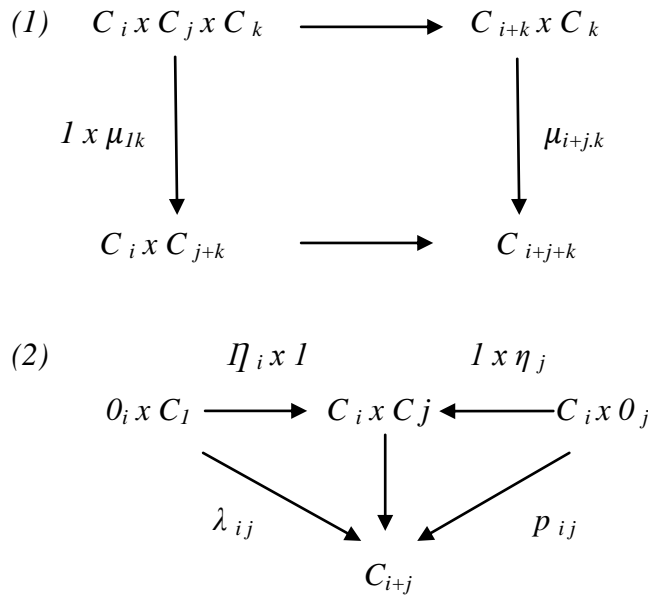


**Şekil 3.1.** Çaprazlanmış Kare

Karesine, bir **çaprazlanmış kare** denir. Çaprazlanmış kareler çaprazlanmış modüller olarak düşünülebilir.

**3.3 Teorem.**  $(C_1, C_0)$  groupoid'i üzerindeki  $C: C_2 \longrightarrow C_1 \rightrightarrows C_0$  çaprazlanmış modülü, sadece ve sadece yönlendirilmiş ve yarı düzenli olursa çaprazlanmış bileşiklerin kategorisinde ki bir monoid olur.

**İspat.**  $C$ 'nin  $\mathcal{Brs}$ ' de bir monoid olduğunu, 0 tarafından gösterilenin bir verteksli  $*$  çaprazlanmış bileşik ve her boyuttaki değersiz grubun 1'den daha büyük ya da 1'e eşit olduğunu varsayalım. O zaman  $\eta: 0 \longrightarrow C$  ve  $\mu$ 'nun  $\mu_{ij}: C_i \times C_j \longrightarrow C_{i+j}$  haritalar kümesini içeren bir bimorfizmaya karşılık geldiği  $\mu: C \otimes C \longrightarrow C$  çaprazlanmış bileşiklerin morfizmalarına sahip oluruz.  $\mu_{ij}$  açısından  $C$ 'deki monoid yapı için tanımlayan diyagramları yeniden yazarsak, eşdeğer değiştirilebilen diyagramları elde ederiz.



**Şekil 3.2.** Çaprazlanmış Bileşmelerin Diyagramı

$l > 2$  ise  $C_l, C_0$  verteks dizisinde değersiz bir groupoid olduğunu ve böylece  $C_l$  için tüm haritalar (ister çaprazlanmış bileşikler isterse de bimorfizmaların haritaları olsun) değersiz ama  $C_0$ 'da basepoint olduğuna dikkat ediniz.

Açıkça  $i=j=k=0$  ile yukarıdaki diyagram  $C_0$  dizisinde, juxtaposition ve kimlik  $\eta_0(*)$  olarak yazdığımız  $\mu_{00}: C_0 \times C_0 \longrightarrow C_0$  çağrışımsal çarpma ile birlikte  $e$  olarak yazdığımız monoid bir yapı ortaya koyar.

$p \in C_0, a \in C_1$  ve  $x \in C_2$  için şunu oluştururuz.

$$p \cdot a = \mu_{01}(p, a), \quad a \cdot p = \mu_{10}(a, p), \quad p \cdot x = \mu_{02}(p, x), \quad x \cdot p = \mu_{20}(x, p)$$

$C_1$  ve  $C_2$  dizilerindeki  $C_0$  'ın sol ve sağ monoid hareketlerine sahip olduğumuz ve bu hareketlerin çevirdiği, (1) ve (2) deki  $i, j$  ve  $k$  'nın uygun seçimlerini sürdürür. Örnek (1)deki  $(i, j, k) = (2, 0, 0)$  seti bütün  $x \in C_2$  ve  $p, q \in C_0$  için,  $x \cdot (pq) = (x \cdot p) \cdot q$  iken, (1) deki  $(i, j) = (0, 1)$  dizisinin bütün  $a \in C_1$  için,  $e \cdot a = a$  verdiğini gösterir. Dahası  $C_1$  ve  $C_2$  deki kimliklerin  $C_0$ 'nun hareketiyle kendi aralarında dönüştürüldüklerini (2)' den buluruz.

[8] 'de verilen bimorfizma için tanımlanan formüllerden sürdürür ki burada  $\mu, C$  çaprazlanmış modülünde ki  $C_0$  nun biaction' ını indükler ve  $C$  yarı düzenlidir. Dahası,  $\mu_{11}: C_1 \times C_1 \longrightarrow C_2$  'de bir braiding tanımlar. B7 aksiyomu diyagram (1) den  $i, j, k$  'dan birisini 0 olarak ve kalan ikisini 1 olarak seçerek elde edilir. B1 aksiyomunun ikinci parçası diyagram (2) den  $i = 1 = j$  seçerek elde edilir. Bir braiding için kalan aksiyomlar  $\mu_{11}$  için bimorfizma formüllerinden sürdürülür.

Diğer taraftan, verilmiş olan bir braiding ' li yarı düzenli çaprazlanmış modülü gözden geçirmek basittir  $\{ \mu_{ij}: C_i \times C_j \longrightarrow C_{i+j} \}$  bimorfizmasını ve (1) de yapılan ve (2) de değiştirilen  $\eta: 0 \longrightarrow C$  çaprazlanmış bileşiklerin haritasını elde etmek için verilen prosedürü ters çevirebiliriz.

2. Şeritlenmiş, düzenli çaprazlanmış modüller ve simplicial gruplar  $G.d_i$  yüz haritaları ve  $s_j$  yozlaşma haritaları ile birlikte bir simplicial grup olsun.  $G$  'nin  $N(G)$  Moore bileşiğinin  $d_m$  kısıtlaması ile verilen  $N(G)_m \longrightarrow N(G)_{m-1}$  sınırı ile birlikte şu şekilde tanımlandığını hatırlayınız.

$$N(G)_0 = G_0 \text{ ve } N(G)_m = \{ \text{şekil 1} \} \ker(d_i: G_m \longrightarrow G_{m-1})$$

Simplicial gruplar  $\overline{W}$  functor 'ları ve geometrik kayrayış yoluyla homotopi type'ların cebirsel modellerini oluşturur ve  $G$  'den elde edilen CW-bileşiğinin homotopi grupları  $N(G)$  Moore bileşiğinin homoloji gruplarıdır. Daha kapsamlı detay için Curtis,(1971)'e

değınırız.  $G$  'nin Moore bileşıği  $n$  'den daha büyük boyutlarda değersiz ise, o zaman  $G$   $(n+1)$  type'ın modeli olur.

Conduche, (1984)' de truncated simplicial grup tarafından belirlenen bir simplicial grup için gerekli ve yeterli durumlar vermiştir.

**3.4 Teorem:**  $G$  bir  $n$ -truncated simplicial grup olsun.  $0 \leq j \leq n$  için  $G_j = G'_j$  ve  $m > n$  için  $N(G) = 0$  ile birlikte  $G$  simplicial grubu var olur ancak sadece ve sadece  $G'_n$  aşağıdaki koşulları karşılırsa:

(\*)  $I$  ve  $J$  boş olmayan alt kümelerine her  $\{0, \dots, n\}$  bölmesi için  $\cap_i \in I \ker d_i$  ve  $\cap_j \in J \ker d_j$  alt grupları elementwise değiştirir. Dahası, bunun gibi bir  $G$  izomorfizmaya kadar tektir.

Bundan sonra devam edeceğimiz şey, 2-truncated simplicial gruplarda doğal olarak tanımlanmış ya da değer almış olan functor'lar kurmaktır. Conduche 'nin teoremi bu functor'ların uygun olan yerde sağlanan Condition (\*) tutan simplicial grupların kategorisine kadar genişlediğini ya da onlar tarafından kısıtlandığını söyler.

şimdi bu bölümün ana teoremine geçiyoruz.

**3.5. Teorem:** şeritlenmiş, düzenli çaprazlanmış modüllerin  $\mathcal{B}\mathcal{R}\mathcal{b}\mathcal{M}$  kategorisi, length 2 'nın Moore bileşıği ile birlikte simplicial grupların  $\mathcal{P}\mathcal{Q}^{(2)}$  kategorisine eşdeğerdir.

Bu teoremi kanıtlamak biraz zamanımızı alacak ve bu çözüme ikincil sonuçların bir dizisi sayesinde ulaşacağız.  $G$  simplicial grubu ve şeritlenmiş, düzenli çaprazlanmış modülün yapısal bileşenlerini tanımlayarak başlarız;  $G$  'nin 2-truncation'u Conduche'nin (\*) condition'u karşılırsa, bu bileşenlerin  $B1, \dots, B7$  aksiyomlarını karşıladıkları görölür.

$G$  yukarıda ki gibi bir simplicial grup olsun. O zaman  $G_1$ ,  $\ker d_0 \rtimes_{s_0} G_0$  'nin semidirect ürünü olur.  $g \in G_1$  öğesi,  $g(s_0 d_0 g^{-1}) \in \ker d_0$  ve  $s_0 d_0 g \in s_0 G_0$  olan yerde  $g = g(s_0 d_0 g^{-1})(s_0 d_0 g)$  şeklinde yazılabilir.  $g(s_0 d_0 g^{-1})$  öğesi için  $\bar{g}$  ( eğer  $g$  ayrıntılı bir ifade ise  $(g)^{-}$  şeklinde ) yazalım: sonra aşağıdaki iki sonucu gözlemleyelim.

**3.1. Lemma** (başta kabul edilmiş teorem)  $G_1$  dizisi,  $G_0$  verteks dizisi, sırasıyla  $d_1$  ve  $d_0$  kaynak ve hedef haritaları ve  $d_0 g = d_1 h$  ise  $g+h = \bar{g}h$  diye tanımlanan bileşim ile birlikte bir grupoid yapısı oluşturur.

**3.2. Lemma.**  $G_0$  grubu,  $s_0$  yozlaşması yoluyla  $G_1$  dizisinde hareket eder,  $p \in G_0$  ve  $g \in G_1$  için şunu oluştururuz.

$$p \cdot g = (s_0p)g, \quad g \cdot p = g(s_0p)$$

daha sonra  $(p \cdot g)^{-1} = (s_0p)\check{g}(s_0p)^{-1}$ ,  $(g \cdot p)^{-1} = \check{g}$  ve bu hareketler  $G_0$  kendindeki sol ve sağ düzenli hareketleri ile birlikte  $(G_1, G_0)$  groupoid'inde  $G_0$  'ın hareketini düzenler.

$x \in G_2$  ise,  $x(s_0d_0x)^{-1}$  için  $\bar{x}$  yazarız. Şunu kurarız

$$C_2 = (\ker d_0 \cap \ker d_1) \rtimes s_0s_0G_0 \subseteq G_2$$

ondan sonra  $C_2$ ,  $p \in G_0$  olan yerde  $C_2(p)$  parçalarına bölünür ve

$$C_2(p) = \{x \in G_2 / d_0x = s_0p = d_1x\}$$

**3.3. Lemma.**  $C_2(p)$  dizisi,  $s_0s_0p$  kimlik ögesi ve  $-x = \bar{x}^{-1}(s_0d_0x)$  ile birlikte  $x + y = \bar{x}y$  şeklinde tanımlarsak bir grup haline gelir. Dahası,  $G_0$ ,  $q \cdot x = (s_0s_0q)x$  ve  $x \cdot q = x(s_0s_0q)$  olduğu yer olan  $(C_2, G_0)$  groupoid'inin solunda ve sağında hareket eder, onun için  $x \in C_2(p)$  ise o zaman,  $q \cdot x \in C_2(qp)$  ve  $x \cdot q = C_2(pq)$  olur.

**3.2. Önerme.**  $g \in G_1(p, q)$  ve  $x \in C_2(p)$  olsun.

$$x^g = d_0g \cdot ((s_1g)^{-1} \bar{x}(s_1g)) \text{ olur.}$$

Sonra  $(x, g) \rightarrow x^g$   $C_2$ 'de  $G_1$ 'in hareketi olur ve  $C_2$ ,  $d_2/C_2$  limit homomorfizması ve Lemma 2.5 'te verilen  $G_0$  biaction'u ile düzenli, precrossed  $G_1$  modülüdür.

**İspat.**  $G_1(p)$ 'ye  $C_2(p)$   $d_2$  haritalarını ve groupoid'lerin homomorfizmaları olduğunu ve dahası,  $d_0(x^g) = s_0q = d_1(x^g)$  onun için  $x^g \in C_2(q)$  olduğunu kontrol etmek kolaydır. Şimdi ise  $C_2$ 'de  $G_1$ 'in hareketine sahip olduğumuzu doğrulayacağız. Eğer  $x, y \in C_2(p)$ ,  $g \in G_1(p, q)$  ve  $h \in G_1(q, r)$  ise, şuna sahibiz;

$$\begin{aligned} x^g + y^g &= d_0g \cdot ((s_1g)^{-1} \bar{x}(s_1g)) + d_0g \cdot ((s_1g)^{-1} y(s_1g)) \\ &= d_0g \cdot ((s_1g)^{-1} \bar{x}(s_1g))^{-1} y(s_1g) \\ &= d_0g \cdot (((s_1g)^{-1} \bar{x}(s_1g)) \cdot ((s_1g)^{-1} y(s_1g))) \\ &= d_0g \cdot ((s_1g)^{-1} \bar{x}(s_1g))^{-1} (s_1g) \cdot ((s_1g)^{-1} ((s_1g)^{-1} y(s_1g))) \\ &= d_0g \cdot ((s_1g)^{-1} \bar{x}(s_1g)) \bar{x}^{-1} \bar{x}(s_1g) \cdot ((s_1g)^{-1} (s_1g) \cdot (s_1g)^{-1} y(s_1g)) \\ &= d_0g \cdot ((s_1g)^{-1} (x + y)) \cdot (s_1g) \\ &= (x + y)^g. \end{aligned}$$

Benzer şekilde,  $x^{s+h} = (x^s)^h$  olduğunu da kontrol ederiz. Sonra önermenin geri kalan iddialarını doğrulamak basittir.

**3.3. Önerme.**  $d_2: C_2 \rightarrow G_1$  precrossed  $G_1$  modülü,  $G_2$  de sadece ve sadece

$$[\ker d_0 \cap \ker d_1, (\ker d_0 \cap \ker d_1)s_1 G_1 \cap \ker d_2] = 1$$

olursa çaprazlanmış bir modül olur.

**İspat.**  $x, y \in C_2(p)$  olsun. Hesaplama  $-x + y + x = p \cdot (x^{-1}\bar{y}x)$  olduğunu gösterir oysa  $y^{d_2x} = p \cdot (s_1 d_2 x^{-1} \bar{y} s_1 d_2 x)$  dir. Öyleyse sadece ve sadece her  $p \in G_0$  için ve bütün  $x, y \in C_2(p)$  için  $[x s_1 d_2 x^{-1}, \bar{y}] = 1$  olursa, bir çaprazlanmış modülümüz olur.  $x s_1 d_2 x^{-1} = \bar{x} s_1 d_2 \bar{x}^{-1}$  için, eşdeğer bir şekilde, sadece ve sadece  $[\bar{x} s_1 d_2 \bar{x}^{-1}, \bar{y}] = 1$  olursa çaprazlanmış modülümüz olur.  $\ker d_2 \rtimes s_1 G_1$  olarak  $G_2$  nin semidirect product decomposition' na bağlı olan  $\ker d_0 \cap \ker d_1$  nin öğelerinin ifadelerinde meydana gelen  $\ker d_2$  nin öğelerini içeren  $\{\bar{x} s_1 d_2 \bar{x}^{-1} | x \in C_2(p)\}$  dizisini ve

$$\{\bar{y} | y \in C_2(p)\} = \ker d_0 \cap \ker d_1$$

yi inceleyiniz. Bu şudur

$$\{\bar{x} s_1 d_2 \bar{x}^{-1} | x \in C_2(p)\} = (\ker d_0 \cap \ker d_1) s_1 G_1 \cap \ker d_2$$

**3.4. Önerme.**  $G_2$  nin  $\{g, h\}$  olarak gösterilen öğeleri  $g, h \in G_1$  için  $d_0 g \cdot [s_1 \bar{h}, s_0 g^{-1} s_1 g] \cdot d_0 h$  Böylece  $(g, h) \mapsto \{g, h\}$  fonksiyonu  $B1, B2, B4$  ve  $B7$  Aksiyomlarını yerine getirir.

**İspat.**  $B1$  için,  $d_0 \{g, h\}$  deki komütatörün ilk terimini kaldırdığı ve  $d_1$  ikinci terimi kaldırdığı için,  $d_0 \{g, h\} = s_0 (d_0 g d_0 h) = d_1 \{g, h\}$  olduğunu inceleyiniz. Böylece  $\{g, h\} \in C_2(d_0 g d_0 h)$  ve açıkça  $\{1, h\} = s_0 s_0 d_0 h$  ve  $\{g, 1\} = s_0 s_0 d_0 g$  'dir.

Şimdi,  $B4$  ve  $B7$  yi okuyucuya bırakarak,  $B2$  yi doğrulayacağız.  $d_0 h = d_1 k$  ile birlikte  $g, h, k \in G_1$  olsun.

$$\begin{aligned} \{g, h + k\} &= \{g, hk\} \\ &= d_0 g \cdot [s_1 h s_1 k, s_0 g^{-1} s_1 g] \cdot d_0 (h + k) \\ &= d_0 g \cdot [s_1 k^{-1} [s_1 h, s_0 g^{-1} s_1 g] s_1 k [s_1 k, s_0 g^{-1} s_1 g]] \cdot d_0 k \\ &= d_0 g \cdot [s_1 k^{-1} [s_1 h, s_0 g^{-1} s_1 g] s_1 k + [s_1 k, s_0 g^{-1} s_1 g]] \cdot d_0 k \\ &= d_0 g \cdot [s_1 k^{-1} [s_1 h, s_0 g^{-1} s_1 g] s_1 k] \cdot d_0 k + \{g, k\} \\ &= d_0 g \cdot [s_1 k^{-1} d_0 g^{-1} \cdot \{g, h\} \cdot d_0 h^{-1} s_1 k] \cdot d_0 k + \{g, k\} \\ &= d_0 g \cdot (s_1 k^{-1} s_0 s_0 d_0 g^{-1} (\{g, h\} \cdot d_0 h^{-1} \cdot d_0 g^{-1}) s_0 s_0 d_0 g s_1 k) \cdot d_0 k + \{g, k\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= d_0g(s_1(d_0g.k)^{-1}\{g, h\} \bar{s}_1(d_0g.k)). d_0k + \{g, k\} \\
&= d_0g(s_1(d_0g.k)^{-1}(\{g, h\}. d_0k^{-1}) \bar{s}_1(d_0g.k)). d_0k + \{g, k\} \\
&= ((\{g, h\}. d_0k^{-1}) \bar{d}_0^{g.k} \bar{d}_0^k + \{g, k\} \\
&= \{g, h\} \bar{d}_0^{g.k} + \{g, k\}
\end{aligned}$$

Şimdi ise  $G$  'deki  $(g, h) \longmapsto \{g, h\}$  fonksiyonunun bir braiding olduğunu sağlayacak olan ek varsayımları belirleyeceğiz.  $K_1 \subseteq G_2$ ,  $g \in G_1$  olan  $s_0g^{-1}s_1g$  'nin bütün öğeleri tarafından oluşturulan  $\ker d_1$  'in alt grubu olsun ve  $K_2 \subseteq G_2$ ,  $g \in G_1$  olan  $s_0g^{-1}s_1s_0d_1g$  'nin bütün öğeleri tarafından oluşturulan  $\ker d_2$  'nin alt grubu olsun.

**3.5. Önerme.** Eğer  $G_2$  'de  $[K_1, \ker d_0 \cap \ker d_2] = 1$  ve  $[\ker d_0 \cap \ker d_1, K_2] = 1$  olursa, o zaman  $(g, h) \longmapsto \{g, h\}$  fonksiyonu B5 Aksiyomunu yerine getirir. Eğer  $G_2$  'de  $[s_1(\ker d_0), \ker d_1 \cap \ker d_2] = 1$  olursa, o zaman  $(g, h) \longmapsto \{g, h\}$  fonksiyonu B6 Aksiyomunu yerine getirir.

**İspat.**  $\ker d_0 \cap \ker d_2$  'nin,  $z \in \ker d_0 \cap \ker d_1$  olan  $zs_1d_2z^{-1}$  'nin öğelerini içerdiğine dikkat ediniz. O zaman eğer  $g \in G_1$  ve  $y \in C_2(q)$  ise

$$\begin{aligned}
\{g, d_2, y\} &= d_0g.[s_1d_2y, s_0g^{-1}s_1g].d_0d_2y \\
&= d_0g.[s_1d_2y, s_0g^{-1}s_1g].q \\
&= d_0g.[y, s_0g^{-1}s_1g].q \\
&= s_0s_0d_0gy^{-1}s_1g^{-1}s_0gys_0g^{-1}s_1gs_0s_0q \\
&= s_0s_0d_0gy^{-1}s_1g^{-1}s_1s_0d_1gys_1s_0d_1g^{-1}s_1gs_0s_0q \\
&= s_0s_0d_0g(-y) \bar{s}_0s_0d_0g^{-1}s_0s_0d_0gs_0s_0qs_1s_0q \bar{s}_1g^{-1}(d_1g.y) \bar{s}_1gs_0s_0q \\
&= (d_0g(-y))(d_0g.q.(s_1(g.q)^{-1}(d_1g.y) \bar{s}_1(g.q))) \\
&= - (d_0g.y) + (d_1g.y)^{g.q}
\end{aligned}$$

ve bu B5. B6 Aksiyomunun doğrulaması  $[s_1(\ker d_0), \ker d_1 \cap \ker d_2] = 1$  koşulu altında aynı şekilde devam eder, dolayısıyla detayları atlıyoruz.

**3.6.Önerme.** Eğer  $G_2$  'de  $[s_0(\ker d_1), [s_1(\ker d_0), K_1]] = 1 = [s_1(\ker d_0), [s_0(\ker d_1), K_1]]$  olursa, o zaman  $(g, h) \longmapsto \{g, h\}$  fonksiyonu B3 aksiyomunu yerine getirir.

**İspat.**  $d_0g = d_1h$  ile birlikte  $g, h, k \in G_1$  olsun.

$$\begin{aligned}
\{g + h, k\} &= \{gh, k\} \\
&= d_0(gh).[s_1k, s_0(gh)^{-1}s_1(gh)].d_0k \\
&= d_0h.[s_1k, s_0h^{-1}s_0g^{-1}s_1gs_0hs_0h^{-1}s_1h].d_0k \\
&= d_0h.[s_1k, s_0h^{-1}s_1h]s_1h^{-1}s_0h[s_1k, s_0h^{-1}s_0g^{-1}s_1gs_0h]s_0h^{-1}s_1h).d_0k \\
&= d_0h.[s_1k, s_0h^{-1}s_1h] + s_1h^{-1}s_0h[s_1k, s_0h^{-1}s_0g^{-1}s_1gs_0h]s_0h^{-1}s_1h).d_0k \\
&= \{h, k\} + d_0h.(s_1h^{-1}s_0h[s_1k, s_0h^{-1}s_0g^{-1}s_1gs_0h]s_0h^{-1}s_1h)d_0k
\end{aligned}$$

Şimdi komütatörü ikinci terimde dikkate alalım:

$$\begin{aligned}
[s_1k, s_0h^{-1}s_0g^{-1}s_1gs_0h] \\
&= [s_1k, s_0h^{-1}s_0s_0d_0gs_0g^{-1}s_1gs_1s_0d_0g^{-1}s_0h] \\
&= [s_1k, s_0h^{-1}s_0s_0d_1hs_0g^{-1}s_1gs_0s_0d_1h^{-1}s_0h] \\
&= [s_1k, [s_0s_0d_1h^{-1}s_0h, s_1g^{-1}s_0g]s_0g^{-1}s_1g] \\
&= [s_1k, s_0g^{-1}s_1g]s_1g^{-1}s_0g[s_1k, [s_0s_0d_1h^{-1}s_0h, s_1g^{-1}s_0g]]s_1g^{-1}s_0g \\
&= [s_1k, s_0g^{-1}s_1g],
\end{aligned}$$

Şöyle olduğu için

$$[s_1k, [s_0s_0d_1h^{-1}s_0h, s_1g^{-1}s_0g]] \in [s_1(\ker d_0), [s_0(\ker d_1), K_1]]$$

Bu nedenle,

$$\begin{aligned}
\{g + h, k\} &= \{h, k\} + d_0h.(s_1h^{-1}s_0h[s_1k, s_0g^{-1}s_1g]s_0h^{-1}s_1h)d_0k \\
&= \{h, k\} + d_0h.(s_1h^{-1}s_0s_0d_1h[s_1k, s_0g^{-1}s_1g]s_0s_0d_1h^{-1}s_1h)d_0k
\end{aligned}$$

$[s_0(\ker d_1), [s_1(\ker d_0), K_1]] = 1$  olduğu için. Ama  $d_0g = d_1h$  olduğu için, şuna sahibiz

$$\begin{aligned}
\{g + h, k\} &= \{h, k\} + d_0h.(s_1h^{-1}s_0s_0d_0g[s_1k, s_0g^{-1}s_1g]s_0s_0d_0g^{-1}s_1h)d_0k \\
&= \{h, k\} + d_0h.(s_0s_0d_0k s_0s_0d_0k^{-1}s_1h^{-1}(d_0g. [s_1k, s_0g^{-1}s_1g]. d_0k. d_0k^{-1}d_0g^{-1})s_1hs_0s_0d_0k \\
&\quad = \{h, k\} + (d_0hd_0k).(s_1(h.d_0k)^{-1}(\{g, k\}.d_0k^{-1}.d_0g^{-1})s_1(h, d_0k)) \\
&\quad = \{h, k\} + (d_0hd_0k).(s_1(h.d_0k)^{-1}\{g, k\}s_1(h, d_0k)) \\
&\quad = \{h, k\} + \{g, k\}^{h.d_0k}
\end{aligned}$$

ki bu B3 Aksiyomudur. Şimdi  $\Theta: \mathcal{G}^{(2)} \longrightarrow \mathcal{BRM}$  functor 'unu tanımlayalım( Teorem

2.1'e dayanarak)  $\Delta: \mathcal{BRM} \longrightarrow \mathcal{S}^{(2)}$  functor'unun oluşturulmasını açıklamaya devam edeceğiz ve  $\Theta$  ve  $\Delta$  'nin kate gorilerin denkliğini verdiğini kanıtlayacağız.

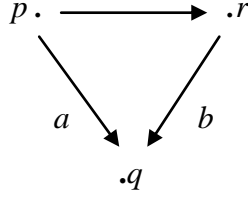
$C: (C_2 \longrightarrow C_1 \longrightarrow C_0)$  bir şeritlenmiş, düzenli çaprazlanmış modül olsun. O zaman  $C_1 \rightrightarrows C_0$ ,  $p \longrightarrow 0_p$  alan  $s_0: C_0 \longrightarrow C_1$  yozlaşma ve  $ab = a \cdot sb + ta \cdot b$  şeklinde verilen  $C_1$ 'deki grup yapısı ile birlikte 1-truncated simplicial grup olur.

Şunu kurarız

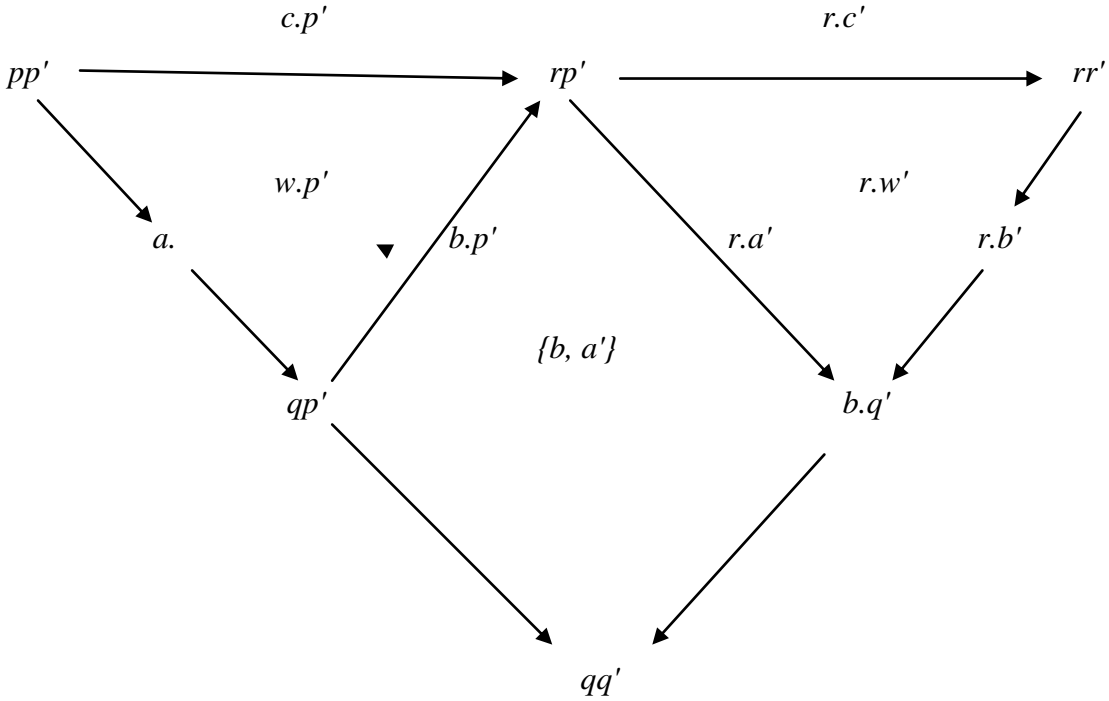
$$G_2 = \{ (w; a, b, c) \mid w \in C_2, a, b, c \in C_1, \delta w = a + b - c, sa = sc \}$$

$G_2 \longrightarrow C_1$  yüz haritaları,  $s_0g = (0_{sg}; 0_{sg}, g, g)$  ve  $s_1g = (0_{1g}; g, 0_g, g)$  yozlaşmaları ile birlikte  $d_0(w; a, b, c) = b$ ,  $d_1(w; a, b, c) = c$  ve  $d_2(w; a, b, c) = a$  şeklinde tanımlanırlar.

$G_2$  'nin bir ögesini şu şekilde betimleriz.



ki burada  $sa = p = sc$ ,  $ta = q = sb$  ve  $tb = r = tc$ .  $G_2$  'deki bir çarpım şu şekilde verilmiştir  $(w; a, b, c)(w'; a', b', c') = (w''; aa', bb', cc')$  ki burada  $w''$  aslında diyagram tarafından tanımlanmıştır.



Şekil 3.3. Simplesel Grup Üçgeni

Daha doğrusu,  $\delta w''$  'nin diagramın sınırı olmasını isteriz ve şunu yaptığımız zaman bu durum yerine gelir.

$$w'' = w \cdot p' + \{b, a^{-1}\}^{-(c \cdot p' + r \cdot a')} + (r \cdot w')^{-c \cdot p'}$$

$(0_e; 0_e, 0_e, 0_e)$  'in bir kimlik olduğu ve  $\bar{w}$  'nin aşağıdaki tarafından belirlendiği yer olan  $(w; a, b, c)^{-1} = (\bar{w}; a^{-1}, b^{-1}, c^{-1})$  olduğu açıktır.

$$0_e = w \cdot p^{-1} + \{b, a^{-1}\}^{-(c \cdot p^{-1} + r \cdot a^{-1})} + (r \cdot \bar{w})^{-c \cdot p^{-1}}$$

Sadece tanımlanmış çarpımın ilişkisel olduğu hemen belli değildir.  $x_i = (w_i; a_i, b_i, c_i) \in G_2$  olsun, ki burada  $i = 0, 1, 2$  'dir. O zaman

$$x_0(x_1x_2) = ( u ; a_0a_1a_2 , b_0b_1b_2 , c_0c_1c_2)$$

$$(x_0x_1)x_2 = ( v ; a_0a_1a_2 , b_0b_1b_2 , c_0c_1c_2)$$

ki burada

$$\begin{aligned} u &= w_0 \cdot p_1 p_2 + \{b_0, a_1 p_2 + q_1 \cdot a_2\}^{-(c_0 \cdot p_1 p_2 + r_0 \cdot a_1 \cdot p_2 + r_0 q_1 a_2)} \\ &+ (r_0 \cdot w_1 \cdot p_2)^{-c_0 p_1 p_2} + \{r_0 \cdot b_1, a_2\}^{-(c_0 p_1 p_2 + r_1 a_1 p_2 + r_0 q_1 a_2)} \\ &+ (r_0 r_1 \cdot w_2)^{-(c_0 p_1 p_2 + r_0 c_1 p_2)} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} v &= w_0 \cdot p_1 p_2 + \{b_0, a_1 \cdot p_2\}^{-(c_0 \cdot p_1 p_2 + r_0 \cdot a_1 \cdot p_2)} + (r_0 \cdot w_1 \cdot p_2)^{-c_0 p_1 p_2} \\ &+ \{b_0 \cdot q_1 + r_0 \cdot b_1, a_2\}^{-(c_0 p_1 p_2 + r_0 c_1 p_2 + r_0 r_1 a_2)} \\ &+ (r_0 r_1 \cdot w_2)^{-(c_0 p_1 p_2 + r_0 c_1 p_2)} \end{aligned}$$

B2 ve B3 'ü kullanarak  $\{ , \}$  terimlerini genişleterek sadece ve sadece aşağıdaki durum olursa  $u = v$  olduğunu buluruz.

$$\begin{aligned} (r_0 \cdot w_1 \cdot p_2)^{-c_0 p_1 p_2} + \{r_0 \cdot b_1, a_2\}^{-(c_0 p_1 p_2 + r_0 c_1 p_2 + r_0 r_1 a_2)} \\ + \{b_0 \cdot q_1, a_2\}^{r_0 b_1 q_2 - (c_0 p_1 p_2 + r_0 c_1 p_2 + r_0 r_1 a_2)} \\ + \{b_0 \cdot q_1, a_2\}^{-(c_0 p_1 p_2 + r_0 c_1 p_2 + r_0 r_1 a_2)} \\ + \{r_0 \cdot w_1 \cdot p_2\}^{-c_0 p_1 p_2} + \{r_0 \cdot b_1, a_2\}^{-(c_0 p_1 p_2 + r_0 c_1 p_2 + r_0 r_1 a_2)} \end{aligned}$$

Sol taraftaki ilk iki terimin özeti için  $y$  yazın ve  $g = -(c_0 \cdot p_1 p_2 + r_0 \cdot c_1 \cdot p_2 + r_0 r_1 \cdot a_2)$ .

O zaman  $u = v$  'dir ancak sadece ve sadece

$$y + \{b_0 \cdot q_1, a_2\}^{r_0 \cdot b_1 \cdot q_2 + g} = \{b_0 \cdot q_1, a_2\}^g + y$$

ki burada sadece ve sadece

$$\{b_0 \cdot q_1, a_2\}^{r_0 \cdot b_1 \cdot q_2 + g} = -y + \{b_0 \cdot q_1, a_2\}^g + y = \{b_0 \cdot q_1, a_2\}^{g + \delta y}$$

$CM1$  ve  $B4$  'ü kullanarak  $r_0 \cdot b_1 \cdot q_2 + g = g + \delta y$  olduğunu gözden geçirmek basit bir konudur.

Bu şeritlenmiş, düzenli çaprazlanmış modülden bir 2-truncated simplicial grubun tanımını tamamlar. Teorem 2.1 'in komütatör durumlarının gözden geçirilmesi geriye kalmıştır.  $x, y \in G_2$  olsun: dikkate alınacak 3 durum vardır:

$$\text{Durum 1. } d_0 x = 0_e, d_1 y = 0_e = d_2 y$$

$$\text{Durum 2. } d_1 x = 0_e, d_0 y = 0_e = d_2 y$$

$$\text{Durum 3. } d_2 x = 0_e, d_0 y = 0_e = d_1 y$$

Durum 1 için detaylar veririz. Böylece  $x = (w ; a, 0_e, c)$ ,  $y = (w' ; 0_e, b, 0_e)$  ve  $xy = yx$  'dir ancak ve ancak

$$w + w'^{-c} = w' \cdot p + \{b, a\}^{-a} + w \text{ olursa.}$$

Şimdi  $\delta w = a - c$  ve  $\delta w' = b$  ve B6 ve CM2 kullanarak şunu görürüz

$$\begin{aligned} w^{r-c} &= -w + w^{r-a} + w \\ &= -w + w' \cdot p + (- (w' \cdot p)^a + w')^{-a} + w \\ &= -w + w' \cdot p + \{ b, a \}^{-a} + w, \end{aligned}$$

ve istenen sonuç aşağıdadır.

**Teorem 3.6** 'nin ispatı.  $\Theta: \mathcal{A}^{(2)} \longrightarrow \mathcal{BRkM}$  ve  $\Delta: \mathcal{BRkM} \longrightarrow \mathcal{A}^{(2)}$  functor' larının kategorilere denklik verdiğini göstereceğiz.

$$C: (C_2 \longrightarrow C_1 \rightrightarrows C_0)$$

şeritlenmiş, düzenli çaprazlanmış bir modül olsun. O zaman  $\Delta(C)$  length 2 Moore bileşiği ile birlikte bir simplicial gruptur. Madem ki  $B: (B_2 \longrightarrow B_1 \rightrightarrows B_0)$  o zaman  $\Delta(C) = G$ . ve  $\Theta(G)$  şeklinde yazarız.  $\Theta$  ve  $\Delta$  tanımlarından  $C_0 = B_0$ ,  $C_1 = B_1$  olduğunu ve B 'deki kaynak ve hedef haritaların C 'dekilerle aynı olduğunu anlıyoruz.

$ab = a \cdot sb + ta \cdot b$  grup işlemi ile birlikte  $G_1 = C_1$  'dir ve B 'deki groupoid işlemi şudur

$$\begin{aligned} a + b &= as_0 d_0(a)^{-1} b \\ &= a 0_{ta-1} b \\ &= (a \cdot ta^{-1}) b \\ &= a \cdot ta^{-1} \cdot sb + t(a \cdot ta^{-1}) \cdot b \\ &= a + b \end{aligned}$$

ki burada sağ taraftaki  $+C$  'deki groupoid işlemi ifade eder. Bundan dolayı  $(C_1, C_0)$  ve  $(B_1, B_0)$  groupoid'leri özdeştir.

$$G_2 = \{ (w; a, b, c) \mid w \in C_2, a, b, c \in C_1, \delta w = a + b - c, sa = sc \}$$

ve böylece

$$\begin{aligned} B_2(p) &= \{ (w; a, 0_p, 0_p) \mid w \in C_2, a \in C_1, \delta w = a, sa = p = ta \} \\ &\cong \{ w \in C_2 \mid s\delta(w) = p = t\delta(w) \} \\ &= \{ w \in C_2 \mid \delta s(w) = p = \delta t(w) \} \\ &= \{ w \in C_2 \mid s(w) = p = t(w) \} \\ &= C_2(p) \end{aligned}$$

Buradaki izomorfizma dizilerin öncül bijection'ıdır ama kolayca grupların izomorfizması olarak görülebilir.  $(C_1, C_0)$  üzerinde çaprazlanmış modüllerin bir izomorfizması olduğunu göstereceğiz.  $w$  'den  $(w; \delta w, 0_p, 0_p)$  'ye  $\theta \mid C_2(p)$  haritalarının olduğu  $\longrightarrow \theta: C_2 \longmapsto B_2$  'yi inceleriz. B 'nin sınırı  $\beta: (w; a, b, c)$   $a$  'dır onun için  $\beta\theta = \delta$  'dir.  $G_2$  'deki şunu hatırlayın

$$(w; a, b, c)(w'; a', b', c') = (w''; aa', bb', cc')$$

burada  $w'' = w \cdot p' + \{b, a'\}^{-(c \cdot p' + r \cdot a')} + (r \cdot w')^{-c \cdot p'}$  'dir.  $x \in C_2(p)$  ve  $a \in C_1(p, q)$  olsun. O zaman

$$\theta(x)^a = ta \cdot (s_1(a)^{-1} (\theta(x) \cdot t\theta(x)^{-1}) s_1(a)).$$

Şimdi  $t\theta(x) = p$  ve  $s_0 s_0 p = (0_p; 0_p, 0_p, 0_p)$  onun için

$$\theta(x) \cdot t\theta(x)^{-1} = (x \cdot p^{-1}; \delta x \cdot p^{-1}, 0_e, 0_e)$$

dahası,  $s_1(a) = (0_p; a, 0_q, a)$  ve  $s_1(a)^{-1} = (0_{p-1}; a^{-1}, 0_{q-1}, a^{-1})$ . Şöyle sürer

$$s_1(a)^{-1} (\theta(x) \cdot t\theta(x)^{-1}) s_1(a) = (q^{-1} \cdot x^a; q^{-1} \cdot (-a + \delta x + a), 0_e, 0_e)$$

ve böylece  $\theta(x)^a = (x^a; -a + \delta x + a, 0_q, 0_q) = \theta(x^a)$  'dir, bu nedenle  $\theta$  çaprazlanmış modüllerin bir izomorfizması olur.  $\theta$ ' nin  $C_0 = B_0$  'nın hareketlerini muhafaza ettiğini ve böylece düzenli çaprazlanmış modüllerin izomorfizması olduğunu doğrulamak kolay bir konudur. Son olarak,  $\theta$  'nın braiding 'i muhafaza ettiğini kontrol ederiz, bu şu demektir:  $\theta\{a, b\}_C = \{\theta(a), \theta(b)\}_B$  (burada  $\{, \}_C$  ve  $\{, \}_B$   $C$  ve  $B$  'de braiding' dirler. Şimdi  $\{a, b\}_B = ta \cdot [s_1(b \cdot tb^{-1}), s_0 a^{-1} s_1 a] \cdot tb$  'dır, burada komütatör  $G_2$  grubunda değerlendirilmiştir. Şunu keşfederiz

$$s_1(b \cdot tb^{-1}) = (0_{sb}; b \cdot tb^{-1}, 0_c, b \cdot tb^{-1}),$$

$$s_1(b \cdot tb^{-1})^{-1} = (0_{sb-1}; -b \cdot sb^{-1}, 0_c, -b \cdot sb^{-1}),$$

$$s_0 a s_1 a^{-1} = (\{a^{-1}, a\}; sa^{-1} \cdot a, a^{-1} \cdot ta, 0_c)$$

$$s_1 a s_0 a^{-1} = (0_c; a^{-1} \cdot sa, ta^{-1} \cdot a, 0_c)$$

ve bunu

$$[s_1(b \cdot tb^{-1}), s_0 a^{-1} s_1 a] = (\{ta^{-1} \cdot a, b \cdot tb^{-1}\}; -b \cdot tb^{-1} - ta^{-1} \cdot a \cdot sb \cdot tb^{-1} + ta^{-1} \cdot sa \cdot b \cdot tb^{-1} + ta^{-1} \cdot a, 0_e, 0_e)$$

bu nedenle

$$\{a, b\}_B = (\{a, b\}_C; -ta \cdot b - a \cdot sb + sa \cdot b + a \cdot tb, 0_{tab}, 0_{tab}) = \theta(\{a, b\}_C)$$

Şimdi sadece  $C_2$  'deki identity' den ayrılan ve sadece  $C$  'nin sınırı kullanarak tanımlanan, dolayısıyla doğallığı doğrudan olan,  $\mathcal{BRM}$  'de  $\theta: C \longrightarrow \mathbf{\Theta} \Delta(C)$  izomorfizmamız oldu.

Şimdi  $G.\text{length}2$  'nun Moore bileşiği ile bir simplicial grup olsun.  $\mathbf{\Theta}(G.) = (C_2 \longrightarrow C_1 C_0)$  ve  $\Delta \mathbf{\Theta}(G.) = H.$  şeklinde yazarız.  $G_0 = H_0$  ve  $G_1 = H_1$  ve  $G.$  ve  $H.$  'nin 1-truncations simplicial grup yapılarının özdeş olduğu kontrol etmek kolaydır. Şimdi  $G_2 \longrightarrow H_2$  fonksiyonunu tanımlarız. Bu fonksiyon  $x \in G_2$  ögesini  $C_2(d_1 d_1 x)$  grubunun içine katlayacaktır:  $x$  'in katlanması,  $x$  'in yüzleri ile birlikte, daha sonra  $H_2$  'nin ögesini verir.

$x \in G_2$  olsun. Şunu tanımlarız

$$\phi(x) = xs_0d_0x^{-1}s_1d_0xs_1d_1x^{-1}s_0s_0d_1d_1x$$

O zaman  $d_0\phi(x) = s_0d_1d_1x = d_1\phi(x)$  ve

$$d_2\phi(x) = d_2xs_0d_0d_2x^{-1}d_0xd_1x^{-1}s_0d_1d_1x = d_2x + d_0x - d_1x \in G_1$$

Şimdi  $\Phi(x) = (\phi(x); d_2x, d_0x, d_1x)$  yoluyla  $\Phi: G_2 \longrightarrow H_2$  'i tanımlarız ve  $\Phi$  'in grupların homomorfizması olduğunu iddia ederiz. Yukarıdaki gibi  $x \in G_2$  alın:  $g = d_2x$ ,  $h = d_0x$ ,  $k = d_1x$ ,  $p = d_1g = d_1k$ ,  $q = d_1h = d_0g$ , ve  $r = d_0k = d_0h$  şeklinde yazarız.

Benzer şekilde,  $x \in G_2$  için  $g', h', k', p', q', r'$  'ye sahibiz. O zaman

$$\begin{aligned} \Phi(x)\Phi(x') &= (\phi(x); d_2x, d_0x, d_1x)(\phi(x'); d_2x', d_0x', d_1x') \\ &= (x''; d_2(xx'), d_0(xx'), d_1(xx')) \end{aligned}$$

ki burada

$$\begin{aligned} x'' &= \phi(x) \cdot p' + \{h, g'\}^{-(k \cdot p + r \cdot g')} + (r \cdot \phi(x'))^{-k \cdot p'} \\ &= \phi(x) \cdot p' + \{h, g'\}^{r \cdot g' \cdot (kg')} \cdot p \cdot p' + (r \cdot \phi(x'))^{r \cdot k \cdot p \cdot p'} \\ &= \phi(x) \cdot p' + pp' \cdot (s_1(s_0(pp')^{-1}k g' s_0(rq')^{-1}))(\{h, g'\} \cdot (rq')^{-1}) \\ &\quad \cdot s_1(s_0(rq') g'^{-1}k^{-1} s_0(pp')) + s_0s_0rs_0s_0r^{-1} s_0s_0(pp') \\ &\quad \cdot s_1(s_0(pp')^{-1}k)x s_0h^{-1} s_1h' s_1k^{-1} s_1(k^{-1}s_0(pp')) \\ &= \phi(x) \cdot p' + s_1ks_1g' s_1s_0q'^{-1} s_1s_0r'^{-1}(s_0s_0rs_1(g' s_0 q'^{-1})^{-1}) \\ &\quad \cdot s_1h'^{-1} s_0hs_1(g' s_0q'^{-1}) s_0h'^{-1} s_1h) s_0s_0q' s_1g'^{-1} s_1k^{-1} s_1s_0(pp') \\ &\quad + s_1kx' s_0h'^{-1} s_1h' s_1k^{-1} s_1k^{-1} s_1s_0(pp') \\ &= \phi(x) \cdot p' + s_1k s_1h'^{-1} s_0hs_1(g' s_0q'^{-1}) s_0h'^{-1} s_1hs_1(g'^{-1} s_0q'^{-1}) s_1k^{-1}) \cdot pp' \\ &\quad + (s_1kx' s_0h'^{-1} s_1h' s_1k^{-1} s_1h' s_1k^{-1}) \cdot pp' \\ &= ((xs_0h'^{-1} s_1hs_1k^{-1}) (s_1ks_1h'^{-1} s_0hs_1(g' s_0q'^{-1}) s_0h'^{-1} s_1h \\ &\quad \cdot s_1(g' s_0q'^{-1})^{-1} s_1k^{-1}) s_1kx' s_0h'^{-1} s_1h' s_1k^{-1} s_1k^{-1})) \cdot pp' \\ &= xs_1(g' s_0q'^{-1}) s_0h'^{-1} s_1hs_1(g' s_0q'^{-1})^{-1} x' s_0h'^{-1} s_1h' s_1k^{-1} s_1k^{-1}) \cdot pp' \end{aligned}$$

Şimdi  $s_1(g' s_0q'^{-1})x' s_0h'^{-1} \in \ker d_0 \cap \ker d_2$  iken  $s_0h'^{-1} s_1h \in \ker d_1$  ' dir, dolayısıyla sağ taraf şu hale gelir.

$$(xx' s_0h'^{-1} s_0h'^{-1} s_1hs_1h' s_1k^{-1} s_1k) \cdot pp' = \phi(xx')$$

Bu yüzden  $\Phi$  bir homomorfizmadır ve  $x \phi(x)$ ,  $d_0x$  ve  $d_1x$  tarafından belirlendiği için, o zaman  $\Phi$  injektiftir. Şimdi açıkça  $H_2$  şu dizidir.

$$H_2 = \{ (w; a, b, c) \mid w \in G_2, a, b, c \in G_1, d_0w = s_0d_1a = d_1w, d_1a = d_1c, \\ d_0a = d_1b, d_0b = d_0c, d_2w = as_0d_0a^{-1}bc^{-1}s_0d_1c \}$$

ve  $(w; a, b, c) = \Phi (ws_0s_0d_1c^{-1}s_1cs_1b^{-1}s_0b)$  olduğunu kontrol etmek kolaydır onun için  $\Phi$  örtendir ve bundan dolayı bir izomorfizmadır.

Şu elde mevcuttur ki  $\Phi$   $G$  ve  $H$  'nin 2-truncation'larının yüzleri yozlaşmaları ile uyumludur ve bundan dolayı simplicial grupların  $G \longrightarrow H$  izomorfizmasını tespit ettik Dahası,  $\Phi$ , sadece  $G$  'nin yüz ve yozlaşma haritaları kullanarak tanımlandığı için, doğallık kesindir.

Şimdi ise,  $\Theta \Delta \cong \text{id}$  ve  $\Delta \Theta \cong \text{id}$  functor 'larının doğal izomorfizmalarının varlığını kanıtladık, onun için  $\Delta$  ve  $\Theta$  kategorilerin denkliğini verir.

### 3.3.-Çaprazlanmış modüllerin ilk olarak N-grupların bileşkeleri

$$L \xrightarrow{\partial} M \xrightarrow{\partial} N$$

ve N-equivariant homomorfizmalarını içerdiğini Conduche (1984) 'den hatırlayalım, burada N grubu birleşme yoluyla kendi başına hareket eder, öyle ki

$$L \xrightarrow{\partial} M$$

bir çaprazlanmış modüldür. Bundan dolayı  $M, L$  'de hareket eder ve bütün  $l \in L, m \in M, n \in N$  için  $(l^m)^n = (l^n)^{mm}$  'ye ihtiyaç duyarız. Dahası, aşağıdaki aksiyomları yerine getiren, Peiffer lifting denilen,  $\langle , \rangle: M \times M \longrightarrow L$  fonksiyonu vardır.

$$\text{PL1: } \langle m_0, m_1 \rangle = m_0^{-1} m_1^{-1} m_0 m_1 \partial^{n_0}$$

$$\text{PL2: } \langle \partial l, m \rangle = l^{-1} l^m$$

$$\text{PL3: } \langle m, \partial l \rangle = l^m l \partial^n$$

$$\text{PL4: } \langle m_0, m_1, m_2 \rangle = \langle m_0, m_2 \rangle \langle m_0, m_1 \rangle^{m_2 \partial^{n_0}}$$

$$\text{PL5: } \langle m_0 m_1, m_2 \rangle = \langle m_0, m_2 \rangle m_1 \langle m_1, m_2 \rangle \partial^{m_0}$$

$$\text{PL6: } \langle m_0, m_1 \rangle^n = \langle m_0^n, m_1^n \rangle$$

2- $\mathcal{L}M$ , 2-çaprazlanmış modüllerin kategorisini belirtsin. O zaman Teorem 2.2 'nin denkliği, 2- $\mathcal{L}M$  ve  $\mathcal{A}^{(2)}$  kategoriler arasındaki Conduche, (1984) denkliği ile birlikte 2- $\mathcal{L}M$  ve  $\mathcal{BRLM}$  arasında bileşik bir denklik sağlar. Detayları bulmayı ilgili okuyucuya bırakarak 2- $\mathcal{L}M$  ve  $\mathcal{BRLM}$  arasında nasıl ileri geri geçileceğini göstereceğiz.

$C: (C_2 \longrightarrow C_1 \rightrightarrows C_0)$  düzenli bir çaprazlanmış modül olsun.  $C$  ile alakalı 2-çaprazlanmış modül  $\Delta(C)$  simplicial grubun Moore bileşiğidir.  $K$  olarak belirtilen,  $e \in C_0$  verteksinde,  $C_1$  'deki costar, şudur  $K = \{ a \in C_1 \mid ta = e \}$ . O zaman  $K$ , her hangi bir  $a, b \in K$  için  $ab = (a \cdot sb) + b$  şeklinde verilen grup işlemi ile birlikte  $\Delta(C)_1$  'in *kerdo* altgrubudur.

$s: K \longrightarrow C_0$  kaynak haritası grupların homomorfizmasıdır ve  $C_1$  üstünde  $C_0$  biactionına  $C_0$ -eşdeğer alakalıdır. Yeni bileşimin  $C_1(e)$  verteks grubundaki grup yapılarına kadar uzandığını böylece  $C_1(e)$  'nin  $K$  'nin altgrubu olduğuna dikkat edin: bu açıkça  $s$  'nin çekirdeğidir. Dahası,  $C_0, K$  üstünde çaprazlanmışlama hareket eder: bütün  $a \in K$  ve  $p \in C_0$  lar için  $a^p = p^{-1} \cdot a \cdot p$  'i kurarız. ( Benzer şekilde belirttiğimiz  $C_2$  üstünde  $C_0$  hareketiyle herhangi bir karışıklık olmamalıdır.) O zaman  $s: K \longrightarrow C_0$  homomorfizması,  $K$  'daki çaprazlanmış hareket ve kendindeki  $C_0$  grubunun birleşme hareketine  $C_0$ -eşdeğer alakalıdır. Şimdi,  $C_0$  aynı zamanda  $C_2(e)$  verteks grubunda çaprazlanmışlama hareket eder ve dolayısıyla  $\delta$  ve  $s$  'nin  $C_0$ -eşdeğer olduğu grupların bileşiğine sahip oluruz.

$$C_2(e) \xrightarrow{\delta} K \xrightarrow{s} C_0$$

$\delta: C_2(e) \longrightarrow C_1(e)$  'nin bir çaprazlanmış modül olduğu biliyoruz:  $K$  'nin,  $C_1(e) \subseteq K$  'ya kadar uzanan,  $C_2(e)$  üzerinde hareket ettiğini, onun için  $\delta: C_2(e) \longrightarrow K$  'nin bir çaprazlanmış modül olduğunu iddia ediyoruz.

$x \in C_2(e)$  ve  $a \in K$  olan  $(x, a) \longmapsto x \wr a$  hareketini  $x \wr a = (x \cdot sa)^a$  şeklinde tanımlarız. Bu aslında bir grup hareketidir ve  $\delta$   $K$ -eşdeğerdir. Dahası,  $K$  üzerinden ve birleşme denk gelmesi yoluyla  $C_2(e)$  'nin kendindeki hareketi,  $\delta: C_2(e) \longrightarrow C_1(e)$  için, çaprazlanmış bir modüldür ve bütün  $x, y \in C_2(e)$  için

$$x \wr \delta y = (x \cdot s(\delta y))^{\delta y} = (x \cdot e)^{\delta y} = x^{\delta y} = -y + x + y.$$

Bundan dolayı,  $\delta: C_2(e) \longrightarrow K$  haritası çaprazlanmış bir modüldür. Ayrıca,  $C_2(e)$  üzerinde  $C_0$  hareketi  $K$  'daki ile uyumludur. 2-çaprazlanmış modülün ihtiyaç duyduğumuz son yapısal bileşeni, braiding tarafından karşılanan, Peiffer lifting 'dir.  $C$  'nin  $\{ , \}: C_1 \times C_1 \longrightarrow C_2$  braiding'ine sahip olduğunu varsayalım. O zaman  $(a, b) \longmapsto \{ a^{-1}, b \} \wr a = \langle a, b \rangle$  şeklinde verilen  $K \times K \longrightarrow C_2(e)$  haritası bir Peiffer lifting 'dir. Bundan dolayı, aslında  $\Delta(C)$  'in Moore bileşiği olan, şu 2-çaprazlanmış modülümüz vardır.

$$C_2(e) \longrightarrow K \longrightarrow C_0$$

Şimdi sadece tanıtılan doğal izomorfizmaya kadar tersine çevrilebilen 2-çaprazlanmış modülün yapılışının nasıl olduğunu göstereyim. Bu yüzden,

$$L \xrightarrow{\partial} G \xrightarrow{\partial} P$$

2-çaprazlanmış modülü ve funktoriyal biçimde bu çaprazlanmış modülden yapılmış ,

$$P_2 \longrightarrow P_1 \rightrightarrows P_0$$

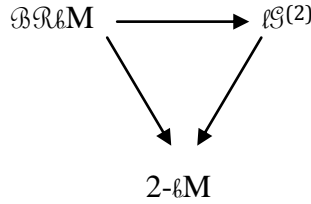
düzenli, şeritlenmiş çaprazlanmış modül ile başlarız.

$P_0$ ' in köşelerinin grubu  $P$ 'nin sadece grubudur.  $P_1$  'in öğelerinin temel dizisi,  $s(g, p) = \partial(g)p$  ve  $t(g, p) = p$  kaynak ve hedef haritaları ile birlikte  $G \times P$  'dir.  $P_1$  'deki groupoid bileşimi, eğer  $p_1 = \partial(g_2)p_2$  olursa,  $(g_1, p_1) + (g_2, p_2) = (g_1g_2, p_2)$  şeklinde verilir.  $P_2$  'nin öğelerinin temel dizisi  $(l_1, p) + (l_2, p) = (l_1l_2, p)$  bileşimi ile birlikte  $L \times P$  'dir.  $\delta: P_2 \longrightarrow P_1$  sınır haritası  $\delta(l, p) = (\partial l, p)$  şeklinde verilir ve  $P_2$  üstünde  $P_1$  hareketi, eğer  $p = \partial(g)q$  ise  $(l, p)^{(g, p)} = (l^g, q)$  şeklinde verilir. Bu  $(P_1, P_0)$  üzerinde bir çaprazlanmış modül tanımlar ve  $P_2 \longrightarrow P_1 \rightrightarrows P_0$  'deki  $P_0$  'in biaction 'ı elde edilir eğer şunu tanımlarsak

$$\begin{aligned} p \cdot (g, q) &= (g^{p^{-1}}, pq), & (g, q) \cdot p &= (g, qp), \\ p \cdot (l, q) &= (l^{p^{-1}}, pq), & (l, q) \cdot p &= (l, qp), \end{aligned}$$

ki burada  $(g, q) \in P_1, (l, q) \in P_2$  ve  $p \in P_0 = P$  ve bundan dolayı  $P_2 \longrightarrow P_1 \rightrightarrows P_0$  düzenlidir.  $P$  'deki braiding  $\{(g_1, p_1), (g_2, p_2)\} = (\langle \rangle^{g_1}, p_1p_2)$  şeklinde verilir, burada  $\langle \rangle: G \times G \longrightarrow L$  Peiffer lifting 'tir.

Bu  $2\text{-}\mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{R}\mathbb{M}$  functor'unun tanımlanmasını tamamlar ve Teorem 2.2 'de kastedilen  $2\text{-}\mathbb{M}$  ve  $\mathbb{R}\mathbb{M}$  kategorileri arasındaki denkliğin doğrulanmasının tamamlanması basittir.



**Şekil 3.4.** Çaprazlanmış Modül Üçgeni

$\mathcal{G}^{(2)} \longrightarrow 2\text{-}\mathbb{M}$  denkliği Conduche tarafından kurulmuştu, dolayısıyla  $\mathbb{R}\mathbb{M} \longrightarrow \mathcal{G}^{(2)}$  denkliği Conduche 'nin sonuçları kullanılarak ve  $\mathbb{R}\mathbb{M} \longrightarrow 2\text{-}\mathbb{M}$  denkliği kanıtlanarak kurulabilirdi.  $\mathbb{R}\mathbb{M} \longrightarrow \mathcal{G}^{(2)}$  denkliğini vurgulamayı iki sebepten tercih ettik. İlk olarak, şeritlenmiş, düzenli çaprazlanmış modüller ile kullanımı iyi kurulmuş olan kategoriyi doğrudan doğruya ilişkilendirmek istedik; bu rol simplicial gruplar tarafından yerine getirilir, oysa 2-çaprazlanmış modüller daha az bilinendir. İkinci olarak,  $\mathbb{R}\mathbb{M} \longrightarrow \mathcal{G}^{(2)}$  functor 'u anlaşılır bir geometrik içeriğe sahiptir oysa Conduche 'nin  $2\text{-}\mathbb{M} \longrightarrow \mathcal{G}^{(2)}$  functor 'u geometrik olarak daha anlaşılmalıdır (Conduche, 1984).

### 3.4. Çaprazlanmış modüller için otomorfizma yapıları

Şimdi sıra §2 'de geliştirilen fikirler için motive edici örneklere geldi.  $\partial: M \longrightarrow P$  bir verteks  $*$ 'li 2-truncated çaprazlanmış bileşik olarak kabul edilen, grupların bir çaprazlanmış modülü olsun.  $CRS((M, P, \partial), (M, P, \partial))$  çaprazlanmış bileşimini kurun: bu yine 2-truncated 'dır ve  $E: E_2 \longrightarrow E_1 \longrightarrow E_0$  şeklinde ifade ederiz.

$E$  'nin açık bir tanımı Brown, (1987)' den çıkarılabilir.  $E_0$  verteks dizisi  $\mathcal{L}_{\text{iso}}((M, P, \partial), (M, P, \partial)) = \text{End}(M, P, \partial)$   $(M, P, \partial)$  çaprazlanmış modülünün endomorfizmalarının dizisidir.  $E_0$  'ın öğelerini çoğunlukla tek bir harf olarak ifade edeceğiz ve aynı harfi onun her iki bileşeni yani  $M$  ve  $P$  'nin endomorfizması için de kullanacağız.

$E_1$  bütün  $(M, P, \partial) \longrightarrow (M, P, \partial)$  1-fold homotopilerini içerir.  $(M, P, \partial)$ , 2'den daha büyük boyutlarda değersiz olduğu için, 1-fold homotopi  $u \in P, f \in E_0$  ve  $h: P \longrightarrow M$  'nin bir  $f$ -türetme olduğu  $(u, h, f)$  üçlüsü ile bütünüyle tanımlanır, onun için bütün  $v, v' \in P$  için  $h(v'v) = h(v')f^{(v)}h(v)$  'dir. Kaynak ve hedef haritaları  $s(u, h, f) = f^0$  ve  $t(u, h, f) = f$  şeklinde verilirler ki burada  $f^0$  bütün  $v \in P$  ve  $m \in M$  için şu şekilde tanımlanır.

$$f^0(v) = uf(v) \partial h(v) u^{-1}, f^0(m) = (f(m)h \partial(m))^{u-1}$$

Gerektiği gibi  $f^0 \in E_0$  olduğunu kontrol etmek basittir.  $E_1$  'deki groupoid yapısı şu şekilde verilir,

$$(u_1, h_1, f^0) + (u_2, h_2, f) = (u_1 u_2, h_1 + h_2, f)$$

ki burada,  $v \in P$  için,  $(h_1 + h_2)(u) = h_2(v)h_1(v)^{u^2}$  'dir.

$E_2$  'nin bir öğesi  $(M, P, \partial) \longrightarrow (M, P, \partial)$  2-fold homotopidir. Her biri,  $m \in M$  ve  $f \in E_0$  olan bir çift  $(m, f)$  içerir.  $E_2$  'deki groupoid yapısı  $(m_1, f) + (m_2, f) = (m_1 m_2, f)$  'dir.  $\delta: E_2 \longrightarrow E_1$  sınır haritası,  $hm(v) = m^{f(v)}$  olan  $(m, f) \longrightarrow (\partial(m), h_m, f)$  'dir.  $h_m$  'in bir  $f$ -türetme olduğu kontrol etmek kolaydır. Son olarak,  $E_2$  'deki  $E_1$  'in hareketi bu  $\delta: E_2 \longrightarrow E_1$  'i bir çaprazlanmış  $E_1$ -modülü yapar.

$$(m, f^0)^{(u, h, f)} = (m^u, f)$$

**3.7. Önerme.**  $\lambda: 0 \otimes (M, P, \partial) \longrightarrow (M, P, \partial)$  'ya eşlenik  $\eta: 0 \longrightarrow E$  haritası ile birlikte  $\gamma: E \otimes E \longrightarrow E$  bileşim haritası  $E$  'yi çaprazlanmış bileşiklerin kategorisinde bir monoid yapar.

**İspat.** Bu durum sadece Önerme 1.1 ‘in özel bir durumudur.

Yani Teorem 3.2 ‘ye göre,  $E$  yarı düzenli ve şeritlenmiş’dir.  $E_0$  ve braiding’ in biaction’ını belirlemek için  $y$  bileşim haritasını açıkça anlamak zorundayız. Bir doğrudan hesaplama  $y$ ‘ yi belirleyen bimorfizma için aşağıdaki değersiz olmayan bileşenlere yol açar.

$$\begin{aligned}
E_0 \times E_0 &\longrightarrow E_0: (f_1, f_2) \longrightarrow f_1 f_2, \\
E_0 \times E_1 &\longrightarrow E_1: (f_1, (u, h, f)) \longrightarrow (f_1(u), f_1 h, f_1 f) \\
E_1 \times E_0 &\longrightarrow E_1: ((u, h, f), f_2) \longrightarrow (u, h f_2, f f_2), \\
E_1 \times E_1 &\longrightarrow E_2: ((u, h, f), (u_1, h_1, f_1)) \longrightarrow (h(u_1), f f_1) \\
E_0 \times E_2 &\longrightarrow E_2: (f_1, (m, f)) \longrightarrow (f_1(m), f_1 f) \\
E_2 \times E_0 &\longrightarrow E_2: ((m, f), f_2) \longrightarrow (m, f f_2)
\end{aligned}$$

Bu haritalar  $E$  ‘deki  $E_0$  ‘in biaction ‘ ını ve  $E_1 \times E_1 \longrightarrow E_2$  braiding‘ ini verir.  $E_0$  ‘daki monoid yapısı haritaların olağan bileşimidir.

$A = \text{AUT}(M, P, \partial), (M, P, \partial)$  çaprazlanmış modülünün otomorfizmalarının  $A = \text{Aut}(M, P, \partial)$  verteks dizisindeki  $E$  ‘ nintam alt çaprazlanmış bileşiği olsun. Böylece  $A_0, E_0$  ‘ ın birimlerinin grubudur ve  $A$  , düzenli, şeritlenmiş bir çaprazlanmış modülün yapısını  $E$  ‘den miras alır.

Şimdi,  $A_2$  ‘nin bir ögesi  $(M, P, \partial)$  otomorfizmasının üzerinde bir 2-fold homotopidir ve  $m \in M$  ve  $f \in A_0$  olan  $(m, f)$  çiftini içerir.  $A_1$  ‘in bir ögesi  $(M, P, \partial)$  otomorfizmasının üzerinde bir 1-fold homotopidir ve  $u \in P$  ve  $f \in A_0$  ve  $(u, h, f)$  ‘nin kaynak verteksini veren  $(M, P, \partial)$  ‘nin  $f^0$  endomorfizması gibi  $h$  ‘ nin bir  $P \longrightarrow M$   $f$ -türetmesi olan,  $(u, h, f)$  üçlüsünü içerir. Açıkça  $f^0(M, P, \partial)$  ‘ın bir otomorfizmasıdır ve sadece ve sadece bütün  $v \in P$  ve  $m \in M$  için aşağıdaki olursa  $(M, P, \partial)$  ‘nin bir otomorfizmasını tanımlar.

$$g(v) = f(v) \partial h(v) \quad , \quad g(m) = f(m) h \partial(m)$$

Burada Whitehead, (1949) ‘ın sonuçlarını genişleten Norrie, (1987)‘ den dolayı sonuçlardan faydalandık.  $f \in E_0$  için,  $P \longrightarrow M$   $f$ -türetmeleri dizisi  $\text{Der}_f(P, M)$  tarafından ifade edilir.

**3.8. Önerme.** Eğer  $f \in P$  ‘nin bir otomorfizması ise, o zaman  $\text{Der}_f(P, M)$  şu bileşim ile birlikte bir monoid olur ve bütün  $v \in P$  için kimlik ögesi  $0: v \longmapsto I$  olur.

$$(h_1 \circ h_2)(v) = h_1(v) h_2(v f^1 \partial h_1(v)) = h_2(v) h_1(v) h_2(f^1 \partial h_1(v))$$

**İspat.** Whitehead  $P \longrightarrow M$  türetmelerinden  $Der(P, M)$  dizisinde monoid bir yapı tanımlamıştır. Şimdi, eğer,  $f, P$  'nin bir otomorfizması ve  $h$  bir  $f$ -türetme ise, o zaman  $hf^{-1}$  de bir türetmedir: bundan dolayı,  $Der(P, M)$  'deki Whitehead' ın bileşimini  $Der_f(P, M)$ 'e nakletmek için  $f$ 'i kullanabiliriz ve sonuçlar belirtildiği gibidir. Whitehead 'ın bileşimi  $f = id_p$  çıkarılarak geri döndürülebilir (Whitehead, 1949).

**3.9. Önerme.**  $f, (M, P, \partial)$  çaprazlanmış modülünün bir otomorfizması ve  $h: P \longrightarrow M$  bir  $f$ -türetme olsun. O zaman şu aşağıdakiler eşdeğerdir.

- (i)  $h, Der_f(P, M)$  monoidinde bir birimdir.
- (ii)  $g: v \longmapsto f(v) \partial h(v)$   $P$  'nin bir otomorfizmasıdır.
- (iii)  $g: m \longmapsto f(m) h \partial(m)$   $M$ 'in bir otomorfizmasıdır.

**İspat.**  $(M, P, \partial)$  'nin kimlik otomorfizmasına eşit  $f$  için , bu sonuç Whitehead 'den dolaydır. Şimdi,  $h \in Der_f(P, M)$  'de bir birimdir sadece ve sadece  $hf^{-1} \in Der(P, M)$  'de bir birim ise ve Whitehead'ın sonuçlarına göre , bu  $P$  yada  $M$  'in bir otomorfizması olan  $gf^{-1}$  'e eşdeğerdir:  $f(M, P, \partial)$  'nin otomorfizması olduğu için ,  $P$  yada  $M$  'in otomorfizması olan  $g$  'ye sırayla eşdeğerdir.(Whitehead, 1949; Lue, 1976)

$Der_f(P, M)$  'nin birimlerinin grubu için  $Der_f^*(P, M)$  ve  $h \in Der_f^*(P, M)$  'nin tersi için  $h^*$  yazarız.  $n$  Eğer  $f$  kimlik ise,  $Der_f^*$  için  $Der^*$  yazarız.  $A_1$  'in ögesi, şimdi  $u \in P$  ,  $f \in Aut(M, P, \partial)$  ve  $h \in Der_f^*(P, M)$  olan  $(u, h, f)$  üçlüsünden oluştuğu görülmektedir.

**3.7. Teorem.**  $A = AUT(M, P, \partial)$  düzenli çaprazlanmış modülü, Teorem 2.2 'nin denkliği yoluyla aşağıdaki 2-çaprazlanmış modüle benzer[karşılık gelir].

$$M \xrightarrow{\delta} P \rtimes Der^*(P, M) \xrightarrow{s} AUT(M, P, \partial)$$

bu modülde  $h_m(v) = m^{-v} m$  olan  $\delta(m) = (\partial(m), h_m)$  ve  $m \in M$  için  $f(m) = (mh \partial(m))^{u^{-1}}$  olan  $s(u, h) = f$  ve  $v \in P$  için  $f(v) = uv \partial h(v) u^{-1}$  'dir ve burada  $P$  semidirect çarpımında  $Der^*(P, M)$  'de çaprazlanmıslama hareket eder.

**İspat.**  $(M, P, \partial)$  'nin 1 kimlik otomorfizmasında  $A_1$  groupoid 'indeki costar  $P \times Der^*(P, M)$  ile birlikte bir dizi olarak tanımlanabilir ve  $s: P \times Der^*(P, M) \rightarrow Aut(M, P, \partial)$  kaynak haritası tamda teoremde iddia edildiği gibi olur. Costar'daki grup yapısı  $(u_1, h_1)(u_2, h_2) = (u_1 u_2, h_3)$  şeklinde verilir , ki burada

$$\begin{aligned}
h_3(v) &= (h_1 s(u_2, h_2) + h_2)(v) \\
&= h_2(v) h_1 s(u_2, h_2)(v)^{u_2} \\
&= h_2(v) h_1(u_2 v \partial h_2(v) u_2^{-1})^{u_2} \\
&= h_2(v) h_1(u_2 v \overset{\circ}{h_2}(v) h_1(u_2)^{-1}) \\
&= h_2(v) h_1(u_2 v)^{\partial h_2(v)} h_1 \partial h_2(v) h_1(u_2)^{-1} \\
&= h_1(u_2 v) h_2(v) h_1 \partial h_2(v) h_1(u_2)^{-1}
\end{aligned}$$

Şimdi  $P, Der^*(P, M)$  'de  $h^u(v) = h(uv)h(u)^{-1} = h(uvu^{-1})^u$  yoluyla hareket eder, ki bu çaprazlanmışlamadır ve biz  $h_3 = h_2 \circ h_1^u$  'yi görürüz ki burada  $\circ$  önerme 3.2 'deki gibi Whitehead'ın türetmelerin bileşimini ifade eder. Bundan dolayı costar'daki grup yapısı şu şekildedir

$$(u_1, h_1)(u_2, h_2) = (u_1 u_2, h_2 \circ h_1^{u_2})$$

ve  $P \times Der^*(P, M)$  semidirect çarpıma sahip oluruz.

$A_2(I)$  verteks grubu, gerektiği gibi  $\delta(m) = (\partial(m), hm)$  ile  $M$  grubu ile birlikte belirlenir.  $Aut(M, P, \partial)$  'nin  $P \times Der^*(P, M)$  'de  $(u, h)^f = (f^{-1}(u), f^{-1}hf)$  yoluyla (by) ve  $M$  'de  $m^f = f^{-1}(m)$  yoluyla hareket ettiğine dikkat ediniz.  $P \times Der^*(P, M)$  'nin  $M$  'deki hareketi basitçe  $m^{(u, h)} = m^u$  'dur ve Peiffer lifting şu şekilde verilir.

$$\begin{aligned}
\langle (u_1, h_1), (u_2, h_2) \rangle &= \{ (u_1, h_1)^{-1}, (u_2, h_2) \} \wr (u_1, h_1) \\
&= \{ (u_1^{-1}, h_1^{*u_1^{-1}}), (u_2, h_2) \} .s(u_1, h_1)^{(u_1, h_1)} \\
&= h_1^{*u_1^{-1}}(u_2)^{u_1} \\
&= h_1^*(u_1^{-1} u_2 u_1)
\end{aligned}$$

Loday, (1982) çaprazlanmış kare tarafından modellenen CW-bileşiğinin homotopi grubunun, değişmeli olmayan grupların belirlibir bileşiğinin homoloji grupları olarak hesaplanabileceğın göstermiştir: Conduche, (1984) bu bileşiğın 2-çaprazlanmış modül olduğunu gözlemlemiştir. Teorem 3.4 'te tanımlanmış olan 2-çaprazlanmış modülün formu, onun çaprazlanmış kare ile ilişkili değişmeli olmayan bileşik olarak elde edilebileceğini akla getirir. Böylece bizim sonuçlarımız Norrie, (1987) 'nin sonuçları ile uyuşmaktadır. Bütün  $h \in Der^*(P, M)$ ,  $m \in M$  ve  $v \in P$  için  $gh(m) = mh\partial(m)$ , ve  $g^h(v) = v\partial h(v)$  olan  $\mathcal{E}(h) = g_h^{-1}$  'deki  $\mathcal{E}: Der^*(P, M) \longrightarrow Aut(M, P, \partial)$  çaprazlanmış modülüne Lue, (1976) tarafından tanımlandığı gibi, bir grubun otomorfizma grupları için bir analog olarak davranır ve değerlendirme yoluyla verilen h-fonksiyon :

$Der^*(P, M) \times P \longrightarrow M$  ile birlikte bütün  $m \in M, u, v \in P$  için  $\phi(m) = h_m, \psi(u)(m) = m^{u^{-1}}, \psi(u)(v) = uvu^{-1}$  'de bir çaprazlanmış kare var olduğunu göstermiştir.

$$\begin{array}{ccc}
 & \phi & \\
 M & \longrightarrow & Der^*(P, M) \\
 \downarrow \partial & & \downarrow [1] \\
 P & \longrightarrow & Aut(M, P, \partial) \\
 & \psi & 
 \end{array}$$

Şekil 3.5. Çaprazlanmış Kare Diyagramı

**3.8. Teorem.** Yukarıdaki çaprazlanmış kare, 2-çaprazlanmış modül ile ilişkili olarak, Teorem 3.4. 'deki  $AUT(M, P, \partial)$  'den elde edilmiştir.

**İspat.** Şüphesiz ki, ilişkili 2-çaprazlanmış modül gösterilen bileşikten meydana gelir: bizim ihtiyacımız olan sadece,  $\xi$  değerlendirme haritasının Teorem 3.4 'ün ispatındaki Peiffer lifting' e artış verdiğini doğrulamaktır.  $\xi$  tarafından belirlenen Peiffer lifting, bize gerektiği gibi şu şekildedir.

$$\langle (u_1, h_1), (u_2, h_2) \rangle = \xi(h^*_1, u_1^{-1} u_2 u_1) = h^*_1(u_1^{-1} u_2 u_1)$$

Teorem 3.4'ün 2-çaprazlanmış modüllerini birkaç örnek hesaplama ile sonuçlandırırız. 2-çaprazlanmış modülün homoloji grupları 3-type'a karşılık gelen  $\pi_1, \pi_2$  ve  $\pi_3$  'ün aynı zamanda homotopi grupları da olduğu için, özel öneme sahiptir.

**Örnek**  $M$ , değersiz sınır haritalı çaprazlanmış  $P$ -modül olarak kabul edilen bir  $P$ -modül olsun. Bu durumda  $Der^*(P, M)$  sadece  $P \longrightarrow M$  türetmelerinin olağan değişmeli  $Der(P, M)$  grubu olur. O zaman eğer  $(u, h) \in P \times Der(P, M)$  ise,  $s(u, h)(m) = m^{u^{-1}}$  ve  $s(u, h)(v) = uvu^{-1}$  'e sahip oluruz:  $s$ ' nin cokernel 'i  $Out(M, P)$  şeklinde yazılır ve bu  $\pi_1$  'dir.  $s$  'nin çekirdeği  $(u, h)$  'nin öğelerinden oluşur şöyle ki  $u \in Z(P)$ ,  $P$  'nin merkezi ve  $M$  'de değersiz bir şekilde hareket eder oysa  $h$  her hangi bir türetmedir.  $\delta$  homomorfizması  $\delta(m) = (1, h_m)$  şeklinde verilir ve böylece ikinci homotopi grubu  $\pi_2$  şudur:

$$(Z(P) \cap stab_p(M)) \times H^1(P, M)$$

Son olarak,  $\pi_3, M$  'in  $M^P$  sabit nokta alt grubudur. (Brown, 1988)

**Örnek**  $M, P$  'nin normal altgrubu ve  $\partial: M \hookrightarrow P$  kapsama olsun. Şimdi

$$Aut(M, P) = \{\alpha \in AutP \mid \alpha(M) \subseteq M\}$$

ve  $s$  'nin cokernel 'i  $\pi_1$  ile birlikte  $s(u, h)(v) = uvh(v)u^{-1}$  dir. Şimdi, sadece ve sadece bütün  $v \in P$  için  $h(v) = v^{-1}u^{-1}vu$  ve  $h(v) \in M$  olursa  $s(u, h) = I$  olur. Bu yüzden  $ker s \cong \{u \in P \mid [x, u] \in M \text{ bütün } x \in P \text{ için}\}$  ve  $Im \delta \cong M$ , bu nedenle  $\pi_2 \cong Z(P/M)$  'dir. Ayrıca,  $\pi_3$  değersizdir.  $\pi_1$  ve  $\pi_2$  gruplarının hesaplaması,  $P \longrightarrow M$  türetmeleri ve kimlik otomorfizmaları indükleyen türetmeler tarafından indüklenen  $\partial: M \longrightarrow P$  çaprazlanmış modülünün o otomorfizmalarının tanımlamasına bağlıdır: uygun tanımlamalar genel durum için bulunabilir durumdadır. Ancak  $\pi_3 ker \partial \cap M^P$  olarak kolayca tanımlanabilir.

**Örnek** En son örneğimizde,  $AUT(M, P, \partial)$  'in altyapısına dikkat çekeceğiz.  $P$  'de kimlik olan  $\partial: M \longrightarrow P$  'nin bütün otomorfizmalarından oluşan  $Aut(M, P, \partial)$  'nın  $Aut_P(M, P, \partial)$  altgrubu tarafından belirlenen alt-2-çaprazlanmış modülü dikkate alın. Bütün  $v \in P$  için, eğer  $(u, h) \in P \times Der^*(P, M)$  ve  $s(u, h)(v) = v$  ise, o zaman  $\partial h(v) = [v, u]$  'dir. Böylece, alt-2-çaprazlanmış modülü şöyledir

$$M \longrightarrow D \longrightarrow Aut_P(M, P, \partial)$$

ki burada,  $D = \{(u, h) \in P \times Der^*(P, M) \mid \partial h(v) = [v, u]\}$  'dir, bütün  $v \in P$  için. Bunu, Lue, (1976) tarafından dikkate alınan ve orada  $DER(P, M)$  olarak belirtilen grup gibi kabul ederiz.  $D$  'deki grup işlemi,

$$h_3(v) = h_2(v)h_1(v)^{u_2} \text{ olan } (u_1, h_1)(u_2, h_2) = (u_1u_2, h_3)$$

basit formunu alır.

## KAYNAKLAR

- Andre M., 1970. Homologie des Algebres Commutatives, Springer-Verlag 206.
- Arvasi Z. ve Porter T., 1997. Higher dimensional peiffer elements in simplicial commutative algebras, theory and applications of categories, 3, 1-23.
- Arvasi Z., Kuzpınarı T. S. ve Uslu E.Ö., 2007. On higher dimensional Lie algebras, Journal of Science, Three crossed modules, Homology Homotopy and Applications, Afyon, 11, 2, 161–187.
- Asar A.O. ve Arıkan A., 2009. Cebir, Eflatun Yayınevi, 1. Basım, Ankara.
- Bayraktar M., 2006. Soyut Cebir ve Sayılar Teorisi, Gazi Kitabevi, Ankara.
- Blyth T.S., 1986. Categories, University of st. Andrews, Scotland ,
- Brown R. ve Loday J.L., 1987. ‘Van Kampen theorems for diagrams of spaces’, Topology, 263, 11-335.
- Brown R., 1988. Topology, Ellis Horwood, Chichester.
- Brown R. ve Higgins P.J., 1987. ‘Tensor products and homotopies for w-groupoids and crossed complexes’, J.Pure Appl, Algebra, 47, 1-33.
- Carrasco P. ve Cegarra A.M., 1991. Group-theoretic Algebraic Models for Homotopy Types, J.P.A.A., 75, 195-235
- Carrasco P., 1987. Complejos Hiper cruzados, Chomologiay Extensiones, Ph.D. Thesis Universidad de Granada.
- Conduche D., 1984. Modeles Croises Generalises de Longueur 2.J.P.A.A, 34, 155- 178
- Curtis E.B., 1971. ‘Simplicial homotopy theory’, Adv. in Math., 8, 107-209
- Çallıalp F., 2001. Örneklerle Soyut Cebir, Birsen Yayınevi, İstanbul.
- Ellis G.J., 1993. Crossed Squares and Combinatorial Homotopy, Math., 214.
- Guin-Walery D. ve Loday J.L., 1980-1981. ‘Obstructions a l’excision en K-theorie algebrique’, Algebraic K-theory, 854, Evanston, Lecture Notes in Mathematics, pp. Berlin, 179-216.
- Higgins P. J., 1971. Categories and Groupoids, Van Nostrand, New Yorg.
- Joyal A. ve Street R., 1986. ‘Şeritlenmiş monoidal categories’, Macquarie Mathematics Report860081, Macquarie University.
- Kuzpınarı T.S., 2005. Değişmeli Cebirler için 3 tipten cebirsel modeller, Doktora Tezi, Osmangazi Üniversitesi, Eskişehir.

- Loday J. L., 1982. 'Spaces with finitely many non-trivial homotopy groups', J.Pure Appl, Algebra 24179, 202.
- Lue A.S.T., 1976. 'Semi-complete crossed modules and holomorphs of groups', Bull. London Math., Soc., 11, 8-16.
- Maclane S., ve Whitehead J.H.C., 1950. 'On the 3-type of a complex', Proc. Nat. Acad. Sci., U.S.A., 37, 41-48.
- Maclane S., 1971. Categories for the working mathematician (Springer), Berlin.
- Mucuk O., 2010. Topoloji ve Kategori, Nobel Yayın Dağıtım, 2. Basım, Ankara.
- Norrie K.J., 1987. 'Actor crossed modules and crossed squares', 87.8, U.C.N.W. Pure Mathematics Preprint, University Collega of North Wales.
- Taşçı D., , 2007. Soyut Cebir, Alp Yayınevi, 1. Basım, Ankara.
- Whitehead J.H.C., 1948. 'On operators in relative homotopy groups', Ann. of Math, 49, 610-640.
- Whitehead J.H.C., 1949. Combinatorial Homotopy II, Bull Society. American Math., 55.

## ÖZGEÇMİŞ

**Adı Soyadı** :Fatih BAYRAKTAR

**Doğum Yılı** :1981

### **Eğitim Bilgileri (Kurum ve Yıl)**

**Lisans** :Atatürk Üniversitesi(1999-2003)

**Yüksek Lisans** :Aksaray Üniversitesi(2011-2013)

### **İletişim Bilgileri**

**Adres** :Şifahane Mahallesi 3143 sk.Asım Tarım Apt.Kat:2 no:6-  
AKSARAY

**Telefon** :0505 456 07 04

**E-posta** :fatih\_aksaray68@hotmail.com