



T.C.

KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KANTOROVICH TİPLİ OPERATÖRLERİN

YAKINSAKLIK ÖZELLİKLERİ

GİZEM UĞUR YILMAZ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN

Doç. Dr. Didem AYDIN ARI

KIRIKKALE- 2024

Gizem UĞUR YILMAZ tarafından hazırlanan “KANTOROVICH TİPLİ OPERATÖRLERİN YAKINSAKLIK ÖZELLİKLERİ” adlı tez çalışması, aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. Didem AYDIN ARI

Matematik Anabilim Dalı, Kırıkkale Üniversitesi

İmza

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

Başkan: Prof. Dr. Ali ARAL

Matematik Anabilim Dalı, Kırıkkale Üniversitesi

İmza

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

Üye: Prof. Dr. Sevilay KIRCI SERENBAY

Matematik Anabilim Dalı, Harran Üniversitesi

İmza

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

Tez Savunma Tarihi: 28/08/2024

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

Prof. Dr. Recep ÇALIN

Fen Bilimleri Enstitü Müdürü

ETİK BEYANI

Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmanın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarından bilimsel etik ilke ve kurallarına uygun davrandığımı; bu çalışma kapsamında elde edilmeyen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi; kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı beyan ederim. Herhangi bir zamanda, çalışmayla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara razı olduğumu bildiririm.

Gizem UĞUR YILMAZ

28.08.2024

ÖZET

KANTOROVICH TIPLİ OPERATÖRLERİN YAKINSAKLIK ÖZELLİKLERİ

UĞUR YILMAZ, GİZEM

Kırıkkale Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Doç. Dr. DİDEM AYDIN ARI

AĞUSTOS 2024, 43 sayfa

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmı olup, yaklaşımlar teorisi ile ilgili bazı bilgiler verilmiştir. İkinci bölüm bazı temel tanımlar ve teoremler içerir. Üçüncü bölümde Kantorovich operatörünün yakınsaklık özellikleri, dördüncü bölümde ise afin fonksiyonları koruyan Kantorovich tipli operatörlerin yakınsaklık özelliklerini inceleyeceğiz.

ANAHTAR KELİMELELER: Kantorovich tipli operatör, yakınsaklık oranı, ağırlıklı süreklilik modülü, Voronovskaya tipli teorem.

ABSTRACT

APPROXIMATION PROPERTIES OF KANTOROVICH TYPE OPERATORS

UĞUR YILMAZ, Gizem

Kırıkkale University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics, Master of Science Thesis

Supervisor: Doç. Dr. Didem AYDIN ARI

AUGUST 2024, 43 pages

This thesis consists of four parts. The first part is the introduction part and some information about the theory of approximations is given. The second part contains some basic definitions and theorems. In the third part, we will examine the convergence properties of the Kantorovich operator and in the fourth part, we will examine the convergence properties of Kantorovich-type operators which preserve affine functions.

Key Words: Kantorovich type operator, rate of convergence, weighted modulus of continuity, Voronovskaya type theorem.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans çalışmalarımın her aşamasında bana yol gösteren ve katkılarıyla yanımda olan danışman hocam Sayın Doç. Dr. Didem AYDIN ARI' ya, eğitim hayatım boyunca maddi manevi desteklerini esirgemeyen sevgili anneme, babama ve kardeşime; değerli eşime ve oğluma teşekkür ederim.



İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	iv
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER DİZİNİ	viii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER.....	2
3. KANTOROVICH TIPLI OPERATÖRLERİN YAKINSAKLIK ÖZELLİKLERİ.....	24
3.1. Operatörün Tanımı ve Özellikleri	24
3.2. Operatörünün Momentlerinin Hesaplanması	26
3.3. Örnekler.....	28
3.3.1. Modifiye Szász - Mirakjan - Kantorovich Operatörleri.....	28
3.3.2. Modifiye Baskakov - Kantorovich Operatörleri	30
3.3.3. Modifiye Stancu - Kantorovich Operatörleri.....	31
4. AFİN FONKSİYONLARI KORUYAN KANTOROVICH TIPLI OPERATÖRLERİN YAKINSAKLIK ÖZELLİKLERİ.....	32
4.1. $\tilde{K}_n$ Operatörünün Tanımı Ve Momentlerinin Hesaplanması.....	33
4.2. Klasik Süreklilik Modülü Yardımıyla Yakınsaklık Hızının Hesaplanması....	35
5. TARTIŞMA VE SONUÇ.....	39
KAYNAKLAR	41
ÖZGEÇMİŞ.....	43

SİMGELER DİZİNİ

$C[a, b]$	$[a, b]$ ' de sürekli fonksiyonlar uzayı
$\omega(f; \delta)$	f fonksiyonunun süreklilik modülü
$\Omega(f; \delta)$	f fonksiyonunun ağırlıklı uzaylarda süreklilik modülü
(f_n)	f_n fonksiyon dizisi
L_n	Lineer pozitif operatörler dizisi
K_n	Bernstein-Kantorovich Operatörü
$L_1([0,1])$	$[0,1]$ aralığında Lebesgue integrallenebilir fonksiyonlar
$\omega(f''; \delta)$	f' nin ikinci türevinin süreklilik modülü
$\omega_{L_p}(f; \delta)$	f' nin L_p uzayında süreklilik modülü
$R^{[0,1]}$	$[0,1]$ aralığında tanımlı reel değerli fonksiyonların uzayı
(X, U, μ)	Ölçü uzayı

1.GİRİŞ

Analizin önemli alanlarından birisi de Yaklaşımlar Teorisidir. Bu teori, fonksiyonların daha basit fonksiyonlarla yani polinomlar, Fourier serileri, tam fonksiyonlar gibi fonksiyonlarla yaklaşma durumunu incelemektedir. Burada en iyi yaklaşımın nasıl elde edileceği en az hata ile bu hesaplamaların nasıl yapılabileceği, yakınsaklık derecesi ve yakınsaklık hızının hesaplanması gibi konular ele alınmaktadır. Yaklaşım teorisi fonksiyonlarla yakınsaklığının yanında diferansiyel denklemler integral denklemleri ısı denklemlerinin çözümleriyle birlikte de ortaya çıkmaktadır. Bu nedenle araştırmacılar tarafından farklı yönleri ile büyüüp geliştirmekte olan bir alandır. Araştırmacılar daha iyi sonuçlar elde edebilmek için klasik operatörleri genelleştirerek veya modifiye ederek yeni operatör dizileri tanımlayarak çalışmalara devam etmektedir. Bu teorinin sadece analiz de uygulaması yoktur. Mühendislikte, optimizasyon, ekonomi, istatistik gibi birçok alanda da kullanılmakta olduğundan popülerliğini uzun yıllardır korumaktadır. Örneğin yapay sinir ağlarının geometrik tasarımlarında, nüfus dağılımında, grafik tasarımlarında, görüntü işleme ve sinyalizasyon sistemlerinde, otomotiv endüstrisinde kullanımları bulunmaktadır. Bununla birlikte matematiğin kendi içindeki dallarla da bir köprü görevi görmekte olup pür ve uygulamalı matematiği birleştirmektedir.

Yaklaşımlar teorisinde en çok kullanılan operatörlerden birisi de lineer pozitif operatör dizileridir. Lineer pozitif operatör dizilerinin bazı fonksiyonlar tarafından tekrar üretildiği veya bazı fonksiyonları koruduğu bilinmektedir. Bu fonksiyonlara örnek olarak test fonksiyonları, üstel fonksiyonlar, afin fonksiyonları v.b. verilebilir (bkz [1,4,8,9]).

Agratini [5], afin fonksiyonları yeniden üreten operatörlerle ilgili bir çalışma yapmıştır. Bu çalışmada $L_n e_0 = e_0$ ve $L_n e_1 = e_1$, $n \in N$, şartlarını sağlayan operatörlerle ilgili bazı yeni yakınsaklık sonuçları elde etmiştir. Diskre operatörler süreksiz fonksiyonlara yaklaşmak için uygun olmadığından, bu operatörler integral tipli operatörlere genelleştirilmektedir. Bernstein, Baskakov, Szász gibi klasik operatörlerin, Durmeyer, Kantorovich gibi integral genelleştirmeleri de literatürde mevcuttur [16,17]. İntegral operatörleri, genellikle sabitleri korur. $L_n e_0 = e_0$ özelliği

sağlanır ki bu da, operatörün e_0 ’daki değerinin yine e_0 olduğunu gösterir. Ancak operatörün e_1 ’deki değeri korunmaz.

Bu çalışmada, bir operatörün yaklaşım özelliklerinin bilinmesi durumunda, Kantorovich tipli operatörün, klasik ve ağırlıklı süreklilik modülü yardımıyla, bazı yakınsaklık sonuçları elde edilecektir.

Özellikle operatörün momentleri bilindiğinde, aynı operatörün Kantorovich formu için de yakınsama sonuçlarının verilebileceği gösterilecektir.



2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Tanım 2.1. $V \neq \emptyset$ bir küme ve $(K, +, \cdot)$ reel veya kompleks sayılar cismi olsun.

V de bir iç işlem $\oplus: V \times V \rightarrow V$ ve bir dış işlem $\odot: K \times V \rightarrow V$ şeklinde tanımlansın. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa $\odot$ ve $\oplus$ işlemleriyle birlikte V ye K cismi üzerinde tanımlı bir lineer uzay veya vektör uzayı denir ve $(V, \oplus, (K, +, \cdot), \odot)$ ile gösterilir.

1) Her $x, y, z \in V$ için $(V, \oplus)$ iç işlemine göre değişmeli gruptur.

v_1) Kapalılık özelliği, $x \oplus y \in V$

v_2) Birleşme özelliği, $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$

v_3) Birim eleman, $x \oplus \theta = \theta \oplus x = x$ olacak şekilde $\theta \in V$ dir.

v_4) Ters eleman, $x \oplus x^{-1} = x^{-1} \oplus x = \theta$ olacak şekilde $x^{-1} = -x \in V$ dir.

v_5) Değişme özelliği, $x \oplus y = y \oplus x$

2) Her $\alpha, \beta \in K$ ve her $x, y \in V$ için skalerle çarpma yani V deki $\odot$ dış işlemine göre aşağıdaki şartlar sağlanır.

v_6) Kapalılık özelliği, $\alpha \odot x \in V$

v_7) Skalerlerin çarpım, $(\alpha \cdot \beta) \odot x = \alpha \odot (\beta \odot x)$

v_8) Soldan dağılma özelliği, $\alpha \odot (x \oplus y) = (\alpha \odot x) \oplus (\alpha \odot y)$

v_9) Sağdan dağılma özelliği, $(\alpha + \beta) \odot x = (\alpha \odot x) \oplus (\beta \odot x)$

v_{10}) Birim eleman, $1_K \odot x = x$ olacak şekilde $1_K \in K$ dır.

Tanım 2.2. $(X, +, \cdot)$ bir K cismi $(\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C})$ üzerinde tanımlı lineer uzay ve

$$\|\cdot\|: X \rightarrow K$$

$$x \rightarrow \|x\|$$

bir fonksiyon olsun. θ_x , X vektör uzayının etkisiz elemanı olmak üzere

i) Her $x \in X$ için $\|x\| \geq 0$ (Pozitif tanımlılık)

ii) Her $x \in X$ için $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta_x$ (Uzayın birim elemanı)

iii) Her $\alpha \in K$ ve $x \in X$ için $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ (Skalerle çarpma)

iv) Her $x, y \in X$ için $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Üçgen eşitsizliği)

şartları sağlanıyorsa $\|\cdot\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir norm ve $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine bir normlu uzay denir. Böylece $(X, \|\cdot\|, +, (K, +, \cdot), \cdot)$ uzayı lineer normlu uzaydır.

Tanım 2.3. (X, d) bir metrik uzay ve (x_n) bu uzayda bir dizi olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $m, n > n_0$ olduğunda $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ olacak şekilde n_0 sayısı varsa (x_n) dizisine Cauchy dizisi denir. Eğer X deki her Cauchy dizisi yakınsak ise yani $x_n \rightarrow x \in X$ ise X uzayına tam uzay denir.

Tanım 2.4. X ve Y iki fonksiyon uzayı olsun. Eğer X' den alınan herhangi bir f fonksiyonuna Y' de bir g fonksiyonu karşılık getiren bir L kuralı varsa, buna X uzayında bir *operatör* denir. Bu operatör $L(f; x) = g(x)$ biçiminde gösterilir.

Tanım 2.5. X ve Y lineer fonksiyon uzayları olmak üzere,

$$L: X \rightarrow Y$$

şeklindeki L operatörünü göz önüne alalım. Eğer $\forall f, g \in X$ ve $\forall \alpha, \beta \in R$ için

$$L(\alpha f + \beta g; x) = \alpha L(f; x) + \beta L(g; x)$$

koşulu sağlanıyor ise L operatörüne *lineer operatör* denir.

Tanım 2.6. Eğer bir L operatörü pozitif değerli fonksiyonu yine pozitif değerli bir fonksiyona dönüştürüyor ise yani, f bir fonksiyon ve L bir operatör olmak üzere,

$$f \geq 0 \text{ için } L(f) \geq 0$$

ise L operatörüne *pozitif operatör* denir. Hem lineerlik hem de pozitiflik şartlarını sağlayan operatörlere *lineer pozitif operatörler* denir.

$f \leq 0$ iken $L(f; x) \leq 0$ eşitsizliği de sağlanır. $f \leq 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $-f \geq 0$ olacaktır. L operatörü pozitif olduğundan,

$$L(-f; x) \geq 0$$

olur.

L operatörünün lineerlik özelliği de gözönünde bulundurulduğunda,

$$-L(f; x) \geq 0 \Rightarrow L(f; x) \leq 0$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$f \leq 0 \text{ ise } L(f; x) \leq 0 .$$

Tanım 2.7. $f \in C[a, b]$ olsun. $\delta > 0$ için

$$\omega(f; \delta) = \sup_{\substack{x, t \in [a, b] \\ |t-x| \leq \delta}} |f(t) - f(x)| \quad (2.1)$$

ile tanımlanan $\omega(f; \delta)$ ifadesine f fonksiyonunun *süreklilik modülü* denir.

Lemma 2.1. Süreklilik modülü $\delta > 0$ için aşağıdaki özellikleri sağlar.

- i. $\omega(f; \delta) \geq 0$
- ii. $\delta_1 \leq \delta_2$ ise $\omega(f; \delta_1) \leq \omega(f; \delta_2)$
- iii. $\forall m \in N$ için $\omega(f; m\delta) \leq m\omega(f; \delta)$
- iv. $\forall \lambda \in R^+$ için $\omega(f; \lambda\delta) \leq (\lambda + 1)\omega(f; \delta)$
- v. $\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(f; \delta) = 0$
- vi. $|f(t) - f(x)| \leq \omega(f; |t - x|)$
- vii. $|f(t) - f(x)| \leq \left(\frac{|t-x|}{\delta} + 1\right) \omega(f; \delta).$

Tanım 2.8.

K_f, f' ye bağlı bir sabit olmak üzere, f pozitif reel ekseninde sürekli, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{1+x^2} = K_f$ ve K_f sonlu olsun.

$C_{K_f[0, \infty)} = \left\{ f: f, [0, \infty) \text{ sürekli ve } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{1+x^2} = K_f \right\}$ sınıfı şeklinde tanımlansın. Bu uzayda norm,

$$\|f\|_{C_{K_f}} = \sup_{0 \leq x} \frac{|f(x)|}{1+x^2}$$

biçiminde tanımlıdır.

$f \in C_{K_f} [0, \infty)$ için,

$$\Omega(f; \delta) = \sup_{\substack{0 \leq x \\ |h| < \delta}} \frac{|f(x+h) - f(x)|}{(1+x^2)(1+h^2)}$$

şeklinde gösterilen $\Omega(f; \delta)$ ifadesine, *ağırlıklı uzayda bir süreklilik modülü* denir ([14]).

Lemma 2.2 $\Omega(f; \delta)$ aşağıdaki özellikleri sağlar.

i. $|f(t) - f(x)| \leq (1 + (t - x)^2)(1 + x^2)\Omega(f; |t - x|)$

ii. $m \in \mathbb{N}$ için

$$\Omega(f; m\delta) \leq 2m(1 + \delta^2)\Omega(f; \delta).$$

iii. $\lambda \in \mathbb{R}$ ve $f \in C_{Kf}[0, \infty)$ için

$$\Omega(f; \lambda\delta) \leq 2(1 + \lambda)(1 + \delta^2)\Omega(f; \delta)$$

iv. $\lim_{\delta \rightarrow 0} \Omega(f; \delta) = 0'$ dir.

İspat i. $\Omega(f; |t - x|) = \sup_{\substack{0 \leq x \\ |t-x| < |t-x|}} \frac{|f(t)-f(x)|}{(1+x^2)(1+(t-x)^2)}$ yazılarak

$$|f(t) - f(x)| \leq (1 + (t - x)^2)(1 + x^2)\Omega(f; |t - x|)$$

eşitsizliği elde edilir.

ii. m bir doğal sayı olmak üzere

$$\Omega(f; m\delta) = \sup_{\substack{0 \leq x \\ |h| < m\delta}} \frac{|f(x+h)-f(x)|}{(1+x^2)(1+h^2)} = \sup_{\substack{0 \leq x \\ |h| < \delta}} \frac{|f(x+mh)-f(x)|}{(1+x^2)+(1+(mh)^2)} \text{ dir.}$$

$$|f(x + mh) - f(x)| = |\sum_{k=1}^m f(x + kh) - f(x + (k - 1)h)|$$

$$\leq (1 + h^2) \sum_{k=1}^m \frac{|f(x+kh)-f(x+(k-1)h)|}{(1+h^2)(1+(x+(k-1)h)^2)} (1 + (x + (k - 1)h)^2)$$

$$= (1 + h^2)\Omega(f; \delta) \sum_{k=1}^m (1 + (x + (k - 1)h)^2)$$

$$\leq (1 + h^2)\Omega(f; \delta)[1 + (x + mh)^2] \sum_{k=1}^m 1$$

$$\leq m(1 + h^2)[2 + 2(x^2 + (mh)^2)]\Omega(f; \delta)$$

$$\leq 2m(1 + h^2)(1 + x^2) \left(1 + \frac{(mh)^2}{1+x^2}\right) \Omega(f; \delta)$$

$$\leq 2m(1 + h^2)(1 + x^2)(1 + (mh)^2)\Omega(f; \delta)$$

elde edilir. Böylece

$$\frac{|f(x+mh)-f(x)|}{(1+x^2)(1+(mh)^2)} \leq 2m(1 + h^2)\Omega(f; \delta)$$

bulunur. Supremum alınırsa, $m \in \mathbb{N}$ için

$$\sup_{\substack{0 \leq x \\ |h| \leq \delta}} \frac{|f(x+mh) - f(x)|}{(1+x^2)(1+(mh)^2)} \leq 2m(1+\delta^2)\Omega(f; \delta)$$

elde edilir. $\lambda \in \mathbb{R}$ için, $[|\lambda|] \leq \lambda \leq [|\lambda|] + 1$ olduğundan

$$\begin{aligned} \Omega(f; \lambda\delta) &\leq \Omega(f; ([|\lambda|] + 1)\delta) \\ &\leq 2([|\lambda|] + 1)(1 + \delta^2)\Omega(f; \delta) \\ &\leq 2(1 + \lambda)(1 + \delta^2)\Omega(f; \delta) \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır.

Tanım 2.9. $L: X \rightarrow Y$ bir operatör olsun. $D(L)$, L nin tanım kümesi olmak üzere, $\forall f \in D(L)$ için,

$$\|L(f; x)\|_Y \leq M \|f\|_X$$

eşitsizliğini sağlayan $M \in \mathbb{R}^+$ varsa L' ye $D(L)'$ de sınırlı operatör denir.

$$\|L\|_{X \rightarrow Y} = \inf\{M: \|L(f; x)\|_Y \leq M\|f\|_X\}$$

sayısına L operatörünün normu denir.

Tanım 2.10. X ve Y normlu uzaylar $L: X \rightarrow Y$ lineer operatör olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık öyle bir pozitif $\delta(\varepsilon, f_0)$ sayısı bulunabilir ki $\|f - f_0\|_X < \delta$ olduğunda

$\|L(f) - L(f_0)\|_Y < \varepsilon$ eşitsizliği sağlanırsa L operatörü $f_0 \in X$ için süreklidir denir.

Tanım 2.11. (s_n) reel terimli bir dizi olsun. (s_n) dizisinin sonlu adetteki terimleri hariç diğer tüm terimleri bir s sayısının keyfi $\varepsilon > 0$ komşuluğunda kalıyorsa (s_n) dizisinin limiti s dir denir ve $(s_n) \rightarrow s$ ile veya $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$ ile gösterilir.

Teorem 2.1. (Weierstrass Yaklaşım Teoremi)

f fonksiyonu, $[a, b]$ aralığı üzerinde, sürekli fonksiyonlar uzayında olmak üzere, $\forall \varepsilon > 0$ için, $|f(x) - P_n(x)| < \varepsilon$ olacak şekilde n .dereceden bir $P_n(x)$ polinom dizisi vardır. Yani her sürekli f fonksiyonuna karşılık gelen $P_n(x)$ polinomlar dizisi vardır. Bernstein, Weierstrass teoreminde adı geçen polinomlara bir örnek olan Bernstein polinomlarını $x \in [0, 1]$ için,

$$B_n(f; x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

şeklinde tanımlamıştır.

Yaklaşımlar teorisinde önemli teoremlerden birisi de Korovkin tarafından vermiştir. Bu teorem, lineer pozitif operatörler alanında yapılan çalışmalara büyük katkı sağlamıştır.

Teorem 2.2. (P.P. Korovkin Teoremi (1951))

$f \in C[a, b]$ olsun. Tüm reel ekseninde, $|f(x)| < M_f$ olmak üzere, (2.2)

Eğer $L_n(f; x)$ lineer pozitif operatör dizisi, her $x \in [a, b]$ için,

i. $L_n(1; x) \Rightarrow 1$

ii. $L_n(t; x) \Rightarrow x$

iii. $L_n(t^2; x) \Rightarrow x^2$

koşullarını sağlıyorsa, bu durumda her $f \in [a, b]$ için, $L_n(f; x) \Rightarrow f(x)$ dir.

İspat: $f \in C[a, b]$ olsun. Sürekli fonksiyon tanımından her pozitif ε sayısına karşılık öyle bir δ bulabiliriz ki $|t - x| \leq \delta$ olduğunda $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$ olur. $|t - x| > \delta$ olduğunda ise (2.2)' den ve üçgen eşitsizliğinden dolayı,

$$|f(t) - f(x)| \leq |f(t)| + |f(x)| \leq 2M_f \quad (2.3)$$

yazılabilir. Diğer taraftan eğer $|t - x| > \delta$ ise $\frac{|t-x|}{\delta} > 1$ olacağından,

$$\frac{(t-x)^2}{\delta^2} > 1 \quad (2.4)$$

sağlanır. (2.3) ve (2.4)' ten

$$|f(t) - f(x)| \leq 2M_f \leq 2M_f \frac{(t-x)^2}{\delta^2}$$

eşitsizlikleri sağlanır.

Özetle $|t - x| \leq \delta$ için, $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$ ve $|t - x| > \delta$ için,

$$|f(t) - f(x)| \leq 2M_f \frac{(t-x)^2}{\delta^2}$$

elde edilir. Böylece her $t \in \mathbb{R}$ ve $x \in [a, b]$ için;

$$|f(t) - f(x)| < \varepsilon + 2M_f \frac{(t-x)^2}{\delta^2} \quad (2.5)$$

dir. Eğer (i), (ii) ve (iii) koşullarını sağlayan (L_n) operatör dizisinin,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(f(t); x - f(x))\|_{C[a,b]} = 0$$

eşitliğini sağladığını gösterirsek ispat tamamlanmış olur.

Lineerlikten:

$$\begin{aligned} |L_n(f(t); x) - f(x)| &= |L_n(f(t); x) - f(x) + L_n(f(x); x) - L_n(f(x); x)| \\ &= |L_n(f(t); x) - L_n(f(x); x) + L_n(f(x); x) - f(x)| \\ &= \left| L_n((f(t) - f(x)); x) + f(x)(L_n(1; x) - 1) \right| \end{aligned}$$

yazılabilir. Burada üçgen eşitsizliği kullanılırsa,

$$|L_n(f(t); x) - f(x)| \leq \left| L_n((f(t) - f(x)); x) \right| + |f(x)| |L_n(1; x) - 1|$$

yazılabilir. Diğer taraftan lineer pozitif operatörler monoton artan olduğundan

$$\left| L_n((f(t) - f(x)); x) \right| \leq L_n(|f(t) - f(x)|; x)$$

yazılabilir. Böylece,

$$|L_n(f(t); x) - f(x)| \leq L_n(|f(t) - f(x)|; x) + |f(x)| |L_n(1; x) - 1|$$

olduğu gösterilmiş olur. (2.2)'den,

$$|L_n(f(t); x) - f(x)| \leq L_n(|f(t) - f(x)|; x) + M_f |L_n(1; x) - 1|$$

yazılabilir. (L_n) monoton artan olduğundan (2.5)'in kullanılmasıyla;

$$\begin{aligned} &|L_n(f(t); x) - f(x)| \\ &\leq L_n\left(\varepsilon + \frac{2M_f}{\delta^2}(t-x)^2; x\right) + M_f |L_n(1; x) - 1| \end{aligned} \quad (2.6)$$

bulunur. Diğer taraftan;

$$\begin{aligned} L_n\left(\varepsilon + \frac{2M_f}{\delta^2}(t-x)^2; x\right) &= L(\varepsilon; x) + L_n\left(\frac{2M_f}{\delta^2}(t-x)^2; x\right) \\ &= \varepsilon L_n(1; x) + \frac{2M_f}{\delta^2} L_n(t^2 - 2tx + x^2; x) \\ &= \varepsilon L_n(1; x) + \frac{2M_f}{\delta^2} [L_n(t^2; x) - x^2 - x^2 + 2x^2 - 2xL_n(t; x) + x^2 L_n(1; x)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \varepsilon L_n(1; x) + \frac{2M_f}{\delta^2} [L_n(t^2; x) - x^2 + 2x^2 - 2xL_n(t; x) + x^2L_n(1; x) - x^2] \\
&= \varepsilon L_n(1; x) + \frac{2M_f}{\delta^2} [(L_n(t^2; x) - x^2) + 2x(x - L_n(t; x) + x^2L_n(1; x) - 1)]
\end{aligned}$$

bulunur. Son eşitlik, (2.6)'da yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
&|L_n(f(t); x) - f(x)| \\
&\leq \varepsilon L_n(1; x) + \frac{2M_f}{\delta^2} [(L_n(t^2; x) - x^2) + 2x(x - L_n(t; x) + x^2L_n(1; x) - 1)] \\
&+ M_f |L_n(1; x) - 1| \tag{2.7}
\end{aligned}$$

elde edilir. (i), (ii) ve (iii) koşullarının (2.7)' de kullanılması ile

$$|L_n(f(t); x) - f(x)| < \varepsilon$$

elde edilir. Böylece $\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{a \leq x \leq b} |L_n(f(t); x) - f(x)| = 0$ ile ispat tamamlanır.

Tanım 2.12. Verilen f fonksiyonu ve $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n), y_n = f(x_n)$ şeklindeki n tane nokta için,

$$P_j = Y_j \prod_{\substack{k=1 \\ j \neq k}}^n \frac{x - x_k}{x_j - x_k}$$

olmak üzere,

$$P(x) = \sum_{j=1}^n P_j(x)$$

şeklinde tanımlanan polinoma Newton İnterpolasyon Polinomu denir.

Tanım 2.13. Her pozitif σ sayısı için,

$$\omega_{L_p}(f; \sigma) = \sup_{|t| \leq \sigma} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x+t) - f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

İfadesine, f' nin L_p uzayındaki süreklilik modülü denir.

Tanım 2.14. Her $\varepsilon > 0$ ve her bir $x \in A$ için en az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyleki her $n \geq n_0$ için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ oluyorsa (f_n) dizisi A üzerinde f fonksiyonuna noktasal yakınsaktır denir. Burada n_0 sayısı hem ε , hem de x noktasına bağlıdır.

Tanım 2.15. Her $\varepsilon > 0$ için en az bir n_0 öyleki her $n \geq n_0$ ve her $x \in A$ için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ oluyorsa (f_n) dizisi A üzerinde f fonksiyonuna düzgün yakınsaktır denir ve kısaca $f_n \rightrightarrows f$ şeklinde gösterilir. Burada n_0 sayısı sadece ε sayısına bağlı olup x noktalarından bağımsızdır.

Tanım 2.16. Kompakt bir $I = [a, b]$ aralığı üzerinde tanımlı, a noktasında sağdan b noktasında soldan sürekli olmak üzere tüm noktalarda sürekli olan fonksiyonların kümesine sürekli fonksiyonlar uzayı denir ve $C[a, b]$ veya $C(I)$ şeklinde gösterilir. $C[a, b]$ uzayı kısaca,

$$C[a, b] := \{f | f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ tanımlı ve } \forall x \in [a, b] \text{ için sürekli}\}$$

şeklinde ifade edilir.

Tanım 2.17. f fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde mutlak süreklidir gerek ve yeter şart $\forall \varepsilon > 0$ için bir

$\delta > 0$ vardır öyleki,

$$\sum_{k=1}^n (b_k - a_k) < \delta$$

şartını sağlayan her sonlu ve ikişerli ayrık

$$\{(a_k, b_k) \subset [a, b] : k = 1, 2, \dots, n\}$$

aralık ailesi için

$$\sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon$$

sağlanır. Bu tanıma göre mutlak sürekli her fonksiyon süreklidir fakat bunun karşıtı doğru değildir.

Tanım 2.18

(X, U, μ) bir ölçü uzayı olsun. $0 < p < \infty$ olmak üzere,

$$L_p = \{f \in M(X, U) : |f|^p \in L(X, U, \mu)\}$$

kümesine p . kuvvetten integrallenebilen fonksiyonlar sınıfı denir.

Tanım 2.19. f_n ve f fonksiyonları L_p uzayının elemanları olsun.

(f_n) dizisi f fonksiyonuna p -inci mertebeden ortalama yakınsaktır $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ için $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ öyleki $\forall n \geq n_0$ için

$$\|f_n - f\|_p < \varepsilon$$

Bu yakınsaklık çeşidine L_p' de yakınsaklık da denir. Burada $p \geq 1$ olup

$$\|f_n - f\|_p = \left(\int_X |f_n - f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

dir. Buna göre;

(f_n) dizisi f fonksiyonuna L_p de yakınsak $\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_p = 0$.

Tanım 2.20. $D \subset \mathbb{R}^2$ sınırlı ve kapalı bir bölge olmak üzere, D bölgesi üzerindeki iki değişkenli sürekli fonksiyonlar uzayı

$$C(D) := \{f|f: D \rightarrow \mathbb{R} \text{ tanımlı ve } \forall (x, y) \in D \text{ için sürekli}\}$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 2.21. Kompakt bir $[a, b]$ aralığında tanımlı bir f fonksiyonunun her bir $k = 1, 2, \dots$ için k -ıncı mertebeden türevleri var ve bu türevler sürekli ise $C^k[a, b]$ uzayına k -ıncı mertebeden türevlenebilir sürekli fonksiyonlar uzayı denir.

Tanım 2.22. $K: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ bir fonksiyon ve $L: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineer fonksiyon olsun. Her $x \in \mathbb{R}^m$ ve $\mathbb{R}^n$ ' deki bir b vektörü için,

$K(x) = L(x) + b$ şartını sağlayan bir L lineer fonksiyonu varsa, K 'ya afin fonksiyon denir.

Bir afin fonksiyonu, öteleme dönüşümüne sahip lineer bir fonksiyondur. Eğer

$K: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ afin fonksiyon ise, her $x \in \mathbb{R}^m$ için,

$K(x) = A(x) + b$ olacak şekilde bir $n \times m$ tipinde A matrisi ve $\mathbb{R}^n$ ' deki bir b vektörü vardır. Eğer $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ afin ise her $x \in \mathbb{R}$ için $f(x) = ax + b$ olacak şekilde a ve b reel sayıları vardır.

Tanım 2.23. Afin dönüşümü, $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ fonksiyonu $x, \lambda \in \mathbb{R}$ ve $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ için,

$$f((1 - \lambda)x + \lambda y) = (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

koşulunu sağlayan fonksiyona denir. Bununla birlikte

$$f\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k y_k\right) = \sum_{k=1}^n \lambda_k f(y_k)$$

eşitliği sağlanır.

Lemma 2.3.

$a_1, \dots, a_n$ ve $b_1, \dots, b_n$ herhangi reel sayılar ise,

$$(a_1 b_1 + \dots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + \dots + b_n^2)$$

dir.

İspat.

$$P(x) = (a_1 x - b_1)^2 + \dots + (a_n x - b_n)^2$$

olsun. Eğer,

$$A = a_1^2 + \dots + a_n^2$$

$$B = b_1^2 + \dots + b_n^2$$

$$C = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n$$

ise,

$$p(x) = Ax^2 - 2Cx + B$$

elde edilir. Her $x \in \mathbb{R}$ için, $p(x)$ karelerinin toplamı olduğundan $p(x) \geq 0$ çıkar. Yani her $x \in \mathbb{R}$ için,

$$Ax^2 - 2Cx + B = p(x) \geq 0$$

bulunur. Her reel sayı için geçerli olan böyle bir eşitsizlik, ancak, $C^2 - AB \leq 0$ ise mümkündür. Bu durumda

$$(a_1 b_1 + \dots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + \dots + b_n^2)$$

bulunur.

Tanım 2.24.

$f \in C[0, \infty)$ ve $n \in \mathbb{N}$ ve $P_{n,k} = \binom{n+k-1}{k} \frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\widetilde{B}_n(f; x) &= \frac{1}{(1+x)^n} \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n+k-1}{k} \frac{x^k}{(1+x)^k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k} f\left(\frac{k}{n}\right)\end{aligned}$$

ifadesine Baskakov operatörü denir.

Tanım 2.25.

$f \in C[0, \infty)$ ve $x \in [0, \infty)$ olmak üzere,

$$S_n(f; x) = e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{nx^k}{k!} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

ifadesine Szász operatörü denir.

Tanım 2.26.

$f \in L_p([0,1])$ için

$$K_n(f; x) = (n+1) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} f(t) dt$$

şeklinde tanımlanan operatöre Kantorovich operatörü denir. Kantorovich operatörünün $1, t$ ve t^2 'deki değerleri aşağıdaki verilmiştir.

$$\begin{aligned}K_n(1; x) &= \sum_{k=0}^n (n+1) \left(\frac{k+1}{n+1} - \frac{k}{n+1} \right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= B_n(1; x) \\ &= 1, \\ K_n(t; x) &= \sum_{k=0}^n \frac{n+1}{2} \left(\frac{(k+1)^2 - k^2}{(n+1)^2} \right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{n}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} + \frac{1}{2(n+1)} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \frac{n}{n+1} x + \frac{1}{2(n+1)} \text{ ve} \\
K_n(t^2; x) &= \sum_{k=0}^n \left[\frac{n+1}{3} \left(\frac{(k+1)^3 - k^3}{(n+1)^3} \right) \right] \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \frac{1}{3(n+1)^2} \sum_{k=0}^n ((k+1)^2 + k(k+1) + k^2) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \frac{n^2}{(n+1)^2} B_n(t^2; x) + \frac{n}{(n+1)^2} x + \frac{1}{3(n+1)^2} \\
&= \frac{n^2}{(n+1)^2} \left(x^2 + \frac{x(1-x)}{n} \right) + \frac{n}{(n+1)^2} x + \frac{1}{3(n+1)^2}
\end{aligned}$$

Teorem 2.3. $f \in C[0,1]$ ve $x \in [0,1]$ için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K_n(f; x) = f(x).$$

Teorem 2.4.

$f \in L_p[0,1], (1 \leq p < \infty)$ ise

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|K_n(f) - f\|_p = 0$$

dir.

İspat. K_n operatörü $L_p[0,1]'$ den $L_p[0,1]'$ e sınırlı bir operatördür. Ayrıca Weierstrass teoreminden $f \in L_p[0,1]$ olduğundan, verilen $\varepsilon > 0$ için öyle bir $g \in C[0,1]$ fonksiyonu vardır ki,

$$\|f - g\|_p < \varepsilon$$

ve bir $n_0 \in \mathbb{N}$ öyleki $n \geq n_0$ için

$$\|K_n(g) - g\|_p < \varepsilon$$

eşitsizlikleri sağlanır.

$$\|K_n(f) - f\|_p = \|K_n(f) - K_n(g) + K_n(g) - g + g - f\|_p$$

$$\begin{aligned} &\leq \|K_n(f) - K_n(g)\|_p + \|K_n(g) - g\|_p + \|g - f\|_p \\ &\leq \|f - g\|_p (\|K\| + 1) + \|K_n g - g\|_p \end{aligned}$$

olup $\forall n \geq n_0$ için $\|K_n(f) - f\|_p \leq \varepsilon (\|K\| + 2)$ yazılabilir. Böylece ispat tamamlanır.

Tanım 2.27. f fonksiyonunun q türevi $q \neq 1$ için $D_q f(x) = \frac{f(qx) - f(x)}{x(q-1)}$ şeklinde tanımlıdır. Bununla birlikte $\lim_{q \rightarrow 1} D_q f(x) = f'(x)$ ' dir.

q integral,

$$\int_0^a f(x) d_q(x) = a \sum_{n=0}^{\infty} f(aq^n)(q^n - q^{n+1}) = (1 - q) \sum_{n=0}^{\infty} aq^n f(aq^n)$$

eşitliği le tanımlanır.

Tanım 2.28. f , $[0,1]$ üzerinde q -integrallenebilir fonksiyon olmak üzere $q \in [0,1]$ için,

$$K_n^q(f; x) = \sum_{k=0}^n ([n+1] \int_{\frac{[k]}{[n+1]}}^{\frac{[k+1]}{[n+1]}} f(t) d_q t) \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} q^{-k} x^k \prod_{s=0}^{n-k-1} (1 - q^s x)$$

şeklinde tanımlanan operatöre q -Bernstein Kantorovich operatörü denir. Test fonksiyonlarındaki değerleri aşağıda verilmiştir. Öncelikle operatörün 1' deki değeri verilsin.

$$K_n^q(1; x) = \sum_{k=0}^n ([n+1] \int_{\frac{[k]}{[n+1]}}^{\frac{[k+1]}{[n+1]}} d_q t) P_{n,k}^q$$

olup q -integral yardımıyla

$$\int_{\frac{[k]}{[n+1]}}^{\frac{[k+1]}{[n+1]}} d_q t = \int_0^{\frac{[k+1]}{[n+1]}} d_q t - \int_0^{\frac{[k]}{[n+1]}} d_q t$$

$$\begin{aligned}
&= (1-q) \frac{[k+1]}{[n+1]} \sum_{j=0}^{\infty} q^j - (1-q) \sum_{j=0}^{\infty} q^j \\
&= \frac{[k+1] - [k]}{[n+1]} \\
&= \frac{k + q^k - k}{[n+1]} = \frac{q^k}{[n+1]}
\end{aligned}$$

yazılabilir. Böylece

$$K_n^q(1; x) = 1$$

dir. Benzer şekilde operatörün t ve t^2 , deki değerleri

$$\begin{aligned}
K_n^q(t; x) &= \frac{[n]}{[n+1]} x + \frac{1}{[2]} \frac{1}{[n+1]} \\
K_n^q(t^2; x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[n]}{[n+1]^2} x^2 + \frac{[2](1+[2])}{[3]} \frac{[n]}{[n+1]^2} x + \frac{1}{3} \frac{1}{[n+1]^2}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 2.5.

$0 < q_n < 1$ olmak üzere $q = (q_n)$ dizisi $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = 1$ koşulunu sağlasın. f , $[0,1]$ aralığında sürekli ve monoton artan bir fonksiyon ve $x \in [0,1]$ olmak üzere,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K_n^{q_n}(f; x) = f(x)$$

dir.

İspat. f monoton artan bir fonksiyon ise $K_n^q(f; x): C[0,1] \rightarrow C[0,1]$ 'e dönüşüm yapan lineer pozitif bir operatördür. Test fonksiyonlarındaki değerleri yukarıda verilmiştir. q yerine (q_n) dizisi seçilerek

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[n]_{q_n}}{[n+1]_{q_n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[n+1]_{q_n} - 1}{q_n [n+1]_{q_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{q_n - \frac{1}{q_n [n+1]_{q_n}}} = 1 \\
\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[n]_{q_n} [n-1]_{q_n}}{[n+1]_{q_n}^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{[n+1]_{q_n} - 1}{q_n} \right) \left(\frac{[n+1]_{q_n} - [1+q]}{q_n^2} \right)}{[n+1]_{q_n}^2} = 1
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece Korovkin teoreminin hipotezleri sağlanır.

Teorem 2.6. F, f fonksiyonunun q anti türevi olsun. Bu durumda

$$D_q B_{n+1}^q(F; x) = K_n^q(f; qx).$$

İspat. Aşağıdaki

$$D_q \left(\prod_{s=0}^{n-k-1} (1 - q^s x) \right) = -[n-k] \prod_{s=0}^{n-k-2} (1 - q^{s+1} x)$$

eşitliği yazılabilir. Buradan,

$$\begin{aligned} D_q B_{n+1}^q(F; x) &= \sum_{k=0}^{n+1} F \left(\frac{[k]}{[n+1]} \right) \begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} D_q \left(x^k \prod_{s=0}^{n-k} (1 - q^s x) \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} F \left(\frac{[k]}{[n+1]} \right) \begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} \left\{ [k] x^{k-1} \prod_{s=0}^{n-k} (1 - q^{s+1} x) \right. \\ &\quad \left. - x^k [n-k+1] \prod_{s=0}^{n-k-1} (1 - q^{s+1} x) \right\} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} F \left(\frac{[k]}{[n+1]} \right) \frac{[n+1][n]!}{[n+1-k]! [k-1]!} x^{k-1} \prod_{s=0}^{n-k-1} (1 - q^{s+1} x) \\ &\quad - \sum_{k=1}^{n+1} F \left(\frac{[k]}{[n+1]} \right) \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \frac{[n+1][n]!}{[n-k]! [k]!} x^k \prod_{s=0}^{n-k-1} (1 - q^{s+1} x) \\ &= \sum_{k=0}^n \left(F \left(\frac{[k+1]}{[n+1]} \right) - F \left(\frac{[k]}{[n+1]} \right) \right) \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} [n+1] \prod_{s=0}^{n-k-1} (1 - q^{s+1} x) x^k \\ &= \sum_{k=0}^n \left([n+1] \int_{\frac{[k]}{[n+1]} }^{\frac{[k+1]}{[n+1]}} f(t) d_q t \right) \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k \prod_{s=0}^{n-k-1} (1 - q^{s+1} x) \\ &= K_n^q(f; qx) \end{aligned}$$

elde edilir.

Tanım 2.29. Bir noktada aldığı değer ve türevleri f fonksiyonununkiler ile aynı olan p polinomun, a f ile uyumlu polinom adı verilir. Eğer,

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

polinomu $x = a$ noktasında n inci mertebeden türevlenebilen f fonksiyonu ile uyumlu ise,

$$p(a) = f(a) \Leftrightarrow a_0 = f(a)$$

$$p'(a) = f'(a) \Leftrightarrow a_1 = f'(a)$$

$$p''(a) = f''(a) \Leftrightarrow 2a_2 = f''(a)$$

$$p'''(a) = f'''(a) \Leftrightarrow 2.3. a_3 = f'''(a)$$

$$p^{(4)}(a) = f^{(4)}(a) \Leftrightarrow 2.3.4. a_4 = f^{(4)}(a)$$

olup bu şekilde devam edilirse,

$$p^{(k)}(a) = f^{(k)}(a) \Leftrightarrow 2.3 \dots k., a_k = f^{(k)}(a)$$

olur. Yani $k = 0, 1, 2, \dots, n$ için,

$$a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$$

dir. Böylece derecesi n' den büyük olmayan bir tek p polinomu vardır. Bu polinom $x = a$ noktasında f fonksiyonu tarafından üretilen Taylor polinomu

$$p(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k$$

şeklinde ifade edilebilir.

Teorem 2.7.

$n \geq 1$ olmak üzere f ile g , $x = 0$ noktasında n -inci mertebeden türevlenebilen birer fonksiyon ve p_n ' de n -inci dereceden bir polinom olsun. $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ olmak üzere $f(x) = p_n(x) + x^n g(x)$ yazılabiliyorsa, p_n polinomu f fonksiyonu tarafından $x = 0$ noktasında üretilen Taylor Polinomudur.

Tanım 2.30. Yukarıdaki teoremlerden $x = a$ noktasında $f(x)$ ve $p(x)$ değerleri göz önüne alınırsa $f(x) - p(x)$ farkının birbirine çok yakın olduğu görülür. Eğer, $f(x) - p(x) = K_n(x)$ denirse $K_n(x)$ ifadesine kalan terim, fark veya hata denir. Buradan,

$$\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k + K_n(x)$$

yazılabilir ki bu ifadeye kalan terimli Taylor Formülü denir.

Tanım 2.31 f fonksiyonu a noktasını içeren bir aralıkta her mertebeden türevlenebilir olsun.

$$\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k + K_n(x)$$

serisine $x = a$ noktasında f fonksiyonu tarafından üretilen Taylor Serisi adı verilir.

Tanım 2.32. Bir $z = f(x, y)$ fonksiyonunun $z_0 = (a, b)$ noktasında her mertebeden kısmî türevleri mevcut olsun.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} [f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)]^k$$

$$=f(a, b) + \frac{1}{1!} [f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)]$$

$$+ \frac{1}{2!} [f_{xx}(a, b)(x - a)^2 + 2f_{xy}(a, b)(x - a)(y - b) + f_{yy}(a, b)(y - b)^2] + \dots$$

serisine f fonksiyonunun, (a, b) noktasındaki Taylor serisi denir. Bu serinin yakınsak olması için gerek ve yeter şart $0 < \theta < 1$ için,

$$K_n(x, y)$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} \left\{ [f_x(a + \theta(x-a), b + \theta(y-b))]^{n+1} (x-a)^{n+1} \right.$$

$$\left. + [f_y(a + \theta(x-a), b + \theta(y-b))]^{n+1} (y-b)^{n+1} \right\}$$

kalan teriminin sıfır olmasıdır.

Tanım 2.33. $n \geq 1$ olmak üzere bir f fonksiyonunun tanım kümesinden seçilen $x_0, x_1, \dots, x_n$ şeklindeki $n+1$ tane nokta için

$$f[x_0] = f(x_0)$$

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$$

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f[x_1, \dots, x_n] - f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$

şeklinde tanımlanan eşitliğe f fonksiyonunun n -inci mertebeden bölünmüş farkları denir ([21]). Bir f fonksiyonunun bölünmüş farkı aynı fonksiyonun k -ıncı mertebeden türevinin lineer birleşimi olarak yazılabilir. Şimdi bunu ifade eden teorem verilsin.

Teorem 2.8.

$i = 0, 1, \dots, n$ ve $x_i \in [a, b]$ olsun. Eğer $f \in C^k[a, b]$ ise Rolle teoreminden

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \frac{f^{(k)}(\xi_x)}{k!}$$

olacak şekilde en az bir $\xi_x \in [a, b]$ vardır ([21]).

Teorem 2.9. $n \in N, h > 0$ olmak üzere keyfi bir f fonksiyonu için ardışık iki noktanın fonksiyon altındaki görüntüleri arasındaki farkı,

$$f(x_{i+1}) - f(x_i) = f(x_i + h) - f(x_i) = \Delta_h f(x_i)$$

ile gösterelim.

$$\Delta_h^0 f(x_0) = f(x_0)$$

$$\Delta_h^1 f(x_i) = f(x_i + h) - f(x_i)$$

şeklinde devam edilirse,

$$\Delta_h^{k+1} f(x_i) = \Delta \left(\Delta_h^k f(x_i) \right) = \Delta_h^k f(x_{i+1}) - \Delta_h^k f(x_i)$$

ile tanımlanan Δ operatörüne ileri fark operatörü denir. İleri fark operatörü kısaca

$$\Delta^n f(x_i) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f(x_{i+n-k})$$

şeklinde de yazılır. Yukarıdaki tanımlardan ileri fark operatörü ile bölünmüş farklar arasında aşağıdaki ilişki elde edilir.

Teorem 2.10. Her $i, k \geq 0$ için $x_i = i$ olmak üzere

$$f(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}) = \frac{1}{k!} \Delta^k f(x_i)$$

dir.

Tanım 2.34. $f: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $x_1, x_2 \in [a, b]$ ve her $\lambda \in [0, 1]$ için

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

oluyorsa f fonksiyonuna $[a, b]$ üzerinde konvektir denir. Bu durumda $-f$ fonksiyonu konkav olur. Konvekslik tanımı $k + 1$ tane farklı nokta için de yazılabilir.

$x_0, x_1, \dots, x_k \in [a, b]$ ve $\mu_i \in R$ için $\sum_{i=0}^k \mu_i = 1$ olmak üzere

$$f\left(\sum_{i=0}^k \mu_i x_i\right) \leq \sum_{i=0}^k \mu_i f(x_i)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir ([19]).

Teorem 2.11. $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun (a, b) üzerinde ikinci mertebeden türevi var olsun. Eğer $\forall x \in (a, b)$ için $f''(x) \geq 0$ oluyorsa, f fonksiyonu $[a, b]'$ de konvektir.

Teorem 2.12. f fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde konvektir ancak ve ancak f nin ikinci mertebeden bölünmüş farkları negatif olmayandır.

İki değişkenli fonksiyonlar için ileri fark operatörü üçgensel bölge üzerinde aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 2.35. $i, j \in N, 0 < i + j \leq 2$ olmak üzere eğer $h \in R^+$ için $\Delta_h^{(i,j)} f \geq 0$ ise, bu durumda $f(x, y)$ fonksiyonuna (i, j) -inci mertebeden konvektir denir ([22]). Böylece iki değişkenli fonksiyonlar için konvekslik tanımının iki değişkenli ileri fark operatörü ile verilebilmesi, kısmî türevler yardımıyla da ifade edilebileceği anlamına gelir.

Tanım.2.36. Operatörler için noktasal yakınsaklık durumu, verilen bir f fonksiyonunun Taylor açılımının bir sonucu olarak,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_n) |T_n(f) - f| = \varphi(f, x)$$

şeklinde yazılabilir. Böylece $n \rightarrow \infty$ için $\frac{1}{\lambda_n} \rightarrow 0$ dizisine operatörün kendisini oluşturan fonksiyona asimptotik (noktasal yakınsaklık) hızı, $\varphi(f, x)$ ifadesine ise operatörün asimptotik değeri denir. Literatürde bu duruma en iyi örnek 1932 yılında Bernstein operatörleri için ispatlanmış olan Voronovskaya teoremidir.

Tanım 2.37. $D = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ sınırlı bir bölge ve

$$C(D) := \{f | f: D \rightarrow \mathbb{R}, \forall (x, y) \in D \text{ için } f \text{ sürekli}\}$$

olmak üzere $f \in C(D)$ ve $\delta > 0$ için,

$$\omega(f; \delta) = \sup_{\sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \leq \delta} \{|f(t, s) - f(x, y)|; t, x \in [a, b], s, y \in [c, d]\}$$

veya

$$\omega(f; \delta_1, \delta_2) = \sup_{\substack{|t-x| \leq \delta_1 \\ |s-y| \leq \delta_2}} \{|f(t, s) - f(x, y)|; t, x \in [a, b], s, y \in [c, d]\}$$

fonksiyonuna, f fonksiyonunun D bölgesi üzerindeki tam süreklilik modülü denir.

Burada $\delta \in (0, \sqrt{(b-a)^2 + (d-c)^2})$ dir ([19]).

Tanım 2.38. Binom formülü

$$(x + y)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i (y)^{n-i}$$

şeklindedir. Binom formülünde $y = 1 - x$ alınırsa

$$(x + 1 - x)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i (1 - x)^{n-i}$$

elde edilir. Böylece binom formülü yardımıyla Bernstein bazı olarak bilinen

$$P_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1 - x)^{n-k}$$

elde edilir. Benzer şekilde binom formülü iki değişkenli olarak elde edilebilir. Binom formülünden yola çıkarak,

$$(x + 1 - x)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i (1 - x)^{n-i}$$

eşitliğinin sağ tarafındaki parantez içine y eklenip çıkarılırsa,

$$(1)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i (y + 1 - x - y)^{n-i}$$

olur. Sağ taraftaki parantezin $(n - i)$. dereceden binom açılımı yapılırsa,

$$1 = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i \sum_{j=0}^{n-i} \binom{n-i}{j} y^j (1 - x - y)^{n-i-j}$$

elde edilir. Buradan iki değişkenli binom formülü,

$$b_{i,j}^n(x, y) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} \binom{n}{i} \binom{n-i}{j} x^i y^j (1 - x - y)^{n-i-j}$$

olarak elde edilir.

3. KANTOROVICH TİPLİ OPERATÖRLERİN YAKINSAKLIK ÖZELLİKLERİ

Yaklaşım Teorisi alanında lineer pozitif operatörler ve bu operatörlerin çeşitli genelleştirilmeleri ile ilgili çalışmalar günümüzde de önemini korumaktadır. Lineer pozitif operatör dizileri genel olarak $(L_n)_{n \geq 1}$ ile gösterilir. Bu operatör dizilerinin, bazı fonksiyonları koruduğu veya bazı fonksiyonlar tarafından tekrar üretildiği ile ilgili birçok çalışma bulunmaktadır. Örneğin test fonksiyonları, üstel fonksiyonlar, afin fonksiyonlar v.b. [8, 11, 12, 16]. Agratini [12], afin fonksiyonlarını koruyan operatörlerle ilgili bir çalışma yapmıştır. Bu çalışmada $L_n e_0 = e_0$ ve $L_n e_1 = e_1$ ($n \in \mathbb{N}$) eşitliklerinin sağlandığı operatörleri kullanarak bazı yakınsaklık sonuçları elde etmiştir. Bu çalışmada diskre operatörler, süreksiz fonksiyonlara yaklaşmak için uygun olmadığından, integral tipli operatörlere genelleştirilmişlerdir. Bu yöntemlerden birisi de Kantorovich yöntemidir. Genellikle integral operatörleri $\tilde{L}_n e_0 = e_0$ özelliğini sağlar. Ancak diğer afin fonksiyonlarını korumayabilir. Örneğin, $\tilde{L}_n e_1 \neq e_1$ dir. Buna örnek olarak Bernstein ve Bernstein - Kantorovich operatörünü verebiliriz.

Klasik Bernstein operatörleri,

$$B_n(f; x) = \sum_{k=0}^n p_{n,k}(x) f\left(\frac{k}{n}\right), f \in R^{[0,1]}, x \in [0,1] \quad (3.1)$$

$$p_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, k = \overline{0, n}$$

şeklinde tanımlanmıştır ve $B_n e_0 = e_0$, $B_n e_1 = e_1$ dir.

Bernstein operatörünün Kantorovich genelleştirmesi ise, $f \in L_1([0,1])$ olmak üzere,

$$K_n(f; x) = (n+1) \sum_{k=0}^n p_{n,k}(x) \int_{k/(n+1)}^{(k+1)/(n+1)} f(t) dt, x \in [0,1] \quad (3.2)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Bu operatör için $K_n e_0 = e_0$, $K_n e_1 \neq e_1$ dir.

Bu bölümde, bir operatörün momentleri bilindiğinde, aynı operatörün Kantorovich tipli genelleştirilmesi için, momentleri ile yaklaşım sonuçları verilecektir. Son olarak bu özellikleri sağlayan bazı operatör örnekleri verilecektir.

3.1. Operatörün Tanımı ve Özellikleri

Bu bölümde $H, H^* \subseteq R$ aralıkları, $H = [0,1]$ veya $H^* = R^+$ olarak kabul edilsin. Burada aralığın sınırlı ve sınırsız olması durumunda inceleme yapılacaktır.

$I_n \subseteq N$ bir indis kümesi olmak üzere $(x_{n,k})_{k \in I_n}$, H aralığı üzerinde bir dizi olsun. $(x_{n,k})_{k \in I_n}$ dizisinin eşit uzaklıklı köşelere sahip olduğunu, yani; $\lim_n u_n = 0$ olacak şekilde, her $n \in N$ için,

$$x_{n,k+1} - x_{n,k} = u_n, k \in I_n \quad (3.3)$$

olduğu göz önüne alalım. Aslında diskre lineer pozitif operatörlerin büyük çoğunluğu, bu özelliğe sahiptir. $x_{n,k} = \frac{k}{n}$ seçersek, $u_n = \frac{1}{n}$ olacağı açıktır. Aşağıdaki gibi tanımlanan ayırık tipli lineer pozitif operatörlerin bir dizisini ele alalım.

$$L_n(f; x) = \sum_{k \in I_n} \lambda_{n,k}(x) f(x_{n,k}), x \in H, k \in I_n \quad (3.4)$$

Burada her $(n, k) \in N \times I_n$ için $\lambda_{n,k} \in C(H)$, $\lambda_{n,k} \geq 0$ dir. Burada, eğer $Card(I_n)$ sonlu ise, $f \in C(H)$ olur. Eğer $Card(I_n)$ sonlu değil ise, $f \in F(H)$ elde edilir.

Burada, $F(H) := \{g \in C(H) : (3.4)'deki \text{seri mutlak yakınsaktır}\}$ şeklinde tanımlıdır.

$C_B(H)$ ile H üzerinde tanımlı tüm reel değerli sürekli ve sınırlı fonksiyonların uzayı gösterilsin. Buna göre $C_B(H) \subset F(H)$ ' dir. Burada, yine, $r = 1$ ve $r = 2$ için $e_r \in F(H)$ olsun. L_n operatörleri afin fonksiyonlarını yeniden üretirler. Böylece,

$$\sum_{k \in I_n} \lambda_{n,k}(x) = 1 \quad (3.5)$$

ve

$$\sum_{k \in I_n} \lambda_{n,k}(x) x_{n,k} = x, x \in H \quad (3.6)$$

eşitlikleri sağlanır. u_n , (3.3)' de verildiği şekilde olmak üzere $u^* = \sup_{n \in N} u_n$ olsun. Eğer

$H^* = \mathbb{R}^+$ ise, $A^* = \left[\frac{u^*}{2}, \infty\right)$ aralığı dikkate alınırken, $H = [0, 1]$ iken,

$A = \left[\frac{u^*}{2}, 1\right]$ aralığını gösterebilirsin. L_n ($n \in N$) operatörlerinin Kantorovich tipli genelleştirmesi Agratini [12] tarafından aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$\tilde{L}_n f(x) = \frac{1}{u_n} \sum_{k \in I_n} \lambda_{n,k}(x - \frac{u_n}{2}) \int_{x_{n,k}}^{x_{n,k+1}} f(t) dt \quad x \in A^* \quad (3.7)$$

Eğer I_n sonlu ise, f fonksiyonu H üzerinde integrallenebilir olacak şekilde seçilmelidir. Aksi takdirde, f fonksiyonu, anti türevi $F(H)$ uzayına ait olacak şekilde H aralığı üzerinde lokal integrallenebilir olmalıdır. Ayrıca $x_{n,k} \in H$ ve $x_{n,k+1} \notin H$

olacak şekilde, bir $k \in I_n$ için, $x_{n,k+1}$ 'in yerine $x_{n,k}$ ifadesi kullanılırsa ve H sınırlıysa, integral sıfır olacaktır. $\tilde{L}_n$ ($n \in \mathbb{N}$) lineer pozitif operatördür.

(3.2)' de, $\tilde{L}_n$ operatörlerinin afin fonksiyonları koruduğu gösterilecektir. Ayrıca bazı durumlarda bu tip operatörlerin klasik Kantorovich operatörlerinden daha küçük bir yaklaşım hatası verdiği gösterilecektir.

3.2. Operatörünün Momentlerinin Hesaplanması

Bu bölümde $\tilde{L}_n$ operatörünün momentlerini inceleyelim.

Teorem 3.2.1. $e_r(t) = t^r$, $r = 0, 1, 2$ ve $\tilde{L}_n$, (3.7) ile tanımlanan operatör olsun.

Her $x \in A^*$ için,

$$(i) (\tilde{L}_n e_0)(x) = 1$$

$$(ii) (\tilde{L}_n e_1)(x) = x$$

$$(iii) (\tilde{L}_n e_2)(x) = (L_n e_2) \left(x - \frac{u_n}{2} \right) + u_n x - \frac{u_n^2}{6}$$

eşitlikleri sağlanır.. Burada u_n ve L_n sırasıyla (3.3) ve (3.4) ile tanımlanır.

İspat. (i) (3.5)' ten açıktır. (3.3) ve (3.6)' yı kullanılarak,

$$\begin{aligned} (\tilde{L}_n e_1)(x) &= \frac{1}{2u_n} \sum_{k \in I_n} \lambda_{n,k} \left(x - \frac{u_n}{2} \right) (2u_n x_{n,k} + u_n^2) \\ &= (L_n e_1) \left(x - \frac{u_n}{2} \right) + \frac{u_n}{2} (L_n e_0) \left(x - \frac{u_n}{2} \right) \\ &= x \end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde (3.3) ve (3.7) kullanılarak,

$$(\tilde{L}_n e_2)(x) = \frac{1}{3u_n} \sum_{k \in I_n} \lambda_{n,k} \left(x - \frac{u_n}{2} \right) (3x_{n,k}^2 u_n + 3x_{n,k} u_n^2 + u_n^3)$$

eşitliği elde edilir.

(i) ve (ii)' den, $\tilde{L}_n$ ($n \in \mathbb{N}$) operatörlerinin, afin fonksiyonu koruduğu gösterilmiştir.

Bununla birlikte 2. mertebeden merkezli momenti,

$$\mu_{n,2}(x) := (\tilde{L}_n \alpha_x^2)(x) \text{ olur. } (\alpha_x(t) = t - x, (t, x) \in H \times A^*)$$

şeklinde verilsin. Teorem 1' deki ifadeler kullanılarak, herhangi bir $x \in A$ için

$$\mu_{n,2}(x) = (L_n e_2) \left(x - \frac{u_n}{2} \right) + x(u_n - x) - \frac{u_n^2}{6} \quad (3.8)$$

şeklinde elde edilir.

L_n ($n \in \mathbb{N}$) diskre operatörü göz önüne alınarak, genelleştirilmiş Kantorovich operatörü aşağıda verilmiştir.

$$(G_n f)(x) = \frac{1}{u_n} \sum_{k \in l_n} \lambda_{n,k}(x) \int_{x_{n,k}}^{x_{n,k+1}} f(t) dt \quad x \in H. \quad (3.9)$$

$\tilde{L}_n$ ($n \in \mathbb{N}$) için, benzer yolu takip ederek, her $x \in H$ için, aşağıdaki formüller elde edilir.

$$(G_n e_0)(x) = 1$$

$$(G_n e_1)(x) = x + \frac{u_n}{2}$$

$$(G_n e_2)(x) = (L_n e_2)(x) + u_n x + \frac{u_n^2}{3}.$$

İkinci dereceden merkezil moment

$$\mu_{n,2}^*(x) := (G_n \alpha^2_x)(x) = (L_n e_2)(x) - x^2 + \frac{u_n^2}{3} \quad (3.10)$$

olarak elde edilir.

Teorem 3.2.2.

a. $H = [0,1]$ ve $A = \left[\frac{u^*}{2}, 1 \right]$ olsun. Herhangi bir $f \in C(H)$ fonksiyonu için, $\tilde{L}_n$ ve G_n operatörleri

$$|(G_n f)(x) - f(x)| \leq 2\omega_H \left(f; \sqrt{\mu_{n,2}^*(x)} \right)$$

ve

$$|\tilde{L}_n f(x) - f(x)| \leq 2w_{A^*} \left(f; \sqrt{\mu_{n,2}^*(x)} \right)$$

eşitsizliklerini sağlar.

b. $H^* = [0, \infty)$ ve $A^* = \left[\frac{u^*}{2}, \infty \right)$ olsun. τ sabit olmak üzere, $\tau > \frac{u^*}{2}$ olur.

Herhangi bir $f \in C_B(H)$ fonksiyonu için, $\tilde{L}_n$ ve G_n ($n \in \mathbb{N}$) operatörleri için aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır.

$$|(G_n f)(x) - f(x)| \leq 2\omega_{[0,\tau]} \left(f; \sqrt{\mu_{n,2}^*(x)} \right)$$

ve

$$|\tilde{L}_n f(x) - f(x)| \leq 2\omega_{[u^*/2,\tau]} \left(f; \sqrt{\mu_{n,2}(x)} \right).$$

İspat.

Süreklilik modülü yardımıyla verilen bu sonuçlar, doğrudan Shisha ve Mond [6] tarafından kanıtlanan aşağıdaki ifadenin sonucudur.

Eğer $\Lambda, C([a, b])$ ' de tanımlı lineer pozitif operatör ise, her $x \in [a, b]$ ve $\lambda > 0$ için,

$$|(\Lambda f)(x) - f(x)| \leq |f(x)| |(\Lambda e_0)(x) - 1| \\ + \left((\Lambda e_0)(x) + \frac{1}{\lambda} \sqrt{(\Lambda e_0)(x)(\Lambda \rho_x^2)(x)} \right) \omega(f; \lambda)$$

olur. Eğer, $\lambda = \sqrt{(\Lambda \rho_x^2)(x)}$ seçilirse, ispat tamamlanır.

Yaklaşım hatasının üst sınırı incelenerek, $\mu_{n,2} < \mu_{n,2}^*$ sağlandığında, $\tilde{L}_n$ ($n \in N$) operatörlerinin daha kullanışlı olduğu görülür.

Teorem 3.2.3.

L_n (3.4) ile tanımlanan operatör olmak üzere,

$$(L_n e_2) \left(x - \frac{u_n}{2} \right) - (L_n e_2)(x) + u_n x < \frac{u_n^2}{2}, \quad x \geq \frac{u^*}{2} \quad (3.11)$$

eşitsizliği sağlanırsa, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere (3.7)'de tanımlanan $\tilde{L}_n$ ile (3.9) ile verilen G_n operatörleri karşılaştırıldığında, sürekli ve sınırlı fonksiyonlar için daha iyi bir yaklaşım sonucu elde edilir.

İspat: $\mu_{n,2} < \mu_{n,2}^*$ ve (3.8) ve (3.10) bağıntıları kullanılarak ispat tamamlanır.

3.4. Örnekler

İlk iki örnek $H^* = R^+$ ve son örnek $H = [0,1]$ durumu göz önüne alınarak verilmiştir.

3.3.1. Modifiye Szász – Mirakjan - Kantorovich operatörleri

Klasik Szász-Mirakjan operatörleri,

$$s_{n,k}(x) = e^{-nx} \binom{n}{k} \frac{(nx)^k}{k!}$$

olmak üzere,

$$(L_n f)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} s_{n,k}(x) f\left(\frac{k}{n}\right)$$

dir.

Szász-Kantorovich operatörleri, (bkz. Butzer [1])

$$(G_n f)(x) = n \sum_{k=0}^{\infty} s_{n,k}(x) \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t) dt, x \geq 0.$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Bu durumda, $u_n = \frac{1}{n}$ için, $\tilde{L}_n, n \in N$, operatörleri,

$$(\tilde{L}_n f)(x) = n e^{\frac{1-2nx}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2nx-1)^k}{2^k k!} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t) dt, x \geq \frac{1}{2}.$$

şeklinde verilmiştir. Bu operatörler Duman, Özarslan ve Della Vecchia [3]. tarafından tanımlanmış ve yaklaşım özellikleri incelenmiştir. Klasik Szász-Mirakjan operatörleri için,

$$(L_n e_2)(x) = x^2 + \frac{x}{n}$$

eşitliği sağlanır ve (3.11)'te yerine koyulursa,

$$(L_n e_2)\left(x - \frac{u_n}{2}\right) - (L_n e_2)(x) + u_n x < \frac{u_n^2}{2}$$

olmak üzere,

$$(L_n e_2)\left(x - \frac{u_n}{2}\right) = \left(x - \frac{u_n}{2}\right)^2 + \left(\frac{x - u_n}{2n}\right)$$

elde edilir. Buradan,

$$\left(x - \frac{u_n}{2}\right)^2 + \frac{x - \frac{u_n}{2}}{n} - x^2 - \frac{x}{n} + u_n x < \frac{u_n^2}{2}$$

$$x^2 - x u_n + \frac{u_n^2}{4} + \frac{x}{n} - \frac{u_n}{2n} - x^2 - \frac{x}{n} + u_n x < \frac{u_n^2}{2}$$

$$\frac{u_n^2}{4} - \frac{u_n}{2n} < \frac{u_n^2}{2}$$

yazılır. $u_n = \frac{1}{n}$ olduğundan,

$$\begin{aligned}\frac{1}{4n^2} - \frac{1}{2n^2} &< \frac{1}{2n^2} \\ -\frac{1}{4n^2} &< \frac{1}{2n^2} \\ -\frac{3}{4n^2} &< 0\end{aligned}$$

elde edilir. Bu durum, $\tilde{L}_n$ operatörlerinin daha küçük bir yaklaşım hatası ürettiğini gösterir.

3.3.2. Modifiye Baskakov-Kantorovich operatörleri

Baskakov operatörleri

$$v_{n,k}(x) = \binom{n+k-1}{k} x^k (1+x)^{-n-k}, \quad x \geq 0$$

olmak üzere

$$(L_n f)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} v_{n,k}(x) f\left(\frac{k}{n}\right).$$

şekilde tanımlanır. [2, p. 115]' de belirtildiği gibi, Kantorovich genelleştirmesi aşağıdaki şekildedir

$$(G_n f)(x) = n \sum_{k=0}^{\infty} v_{n,k}(x) \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t) dt.$$

Buradan, $u_n = \frac{1}{n}$ için $\tilde{L}_n$, $n \in \mathbb{N}$ operatörleri,

$$(\tilde{L}_n f)(x) = 2^n n^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} (2nx - 1)^k (2nx + 2n - 1)^{-n-k} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t) dt, \quad x \geq \frac{1}{2}.$$

şeklinde tanımlanmıştır.

$$(L_n e_2)(x) = x^2 + \frac{x(1+x)}{n}$$

olduğundan, (3.11)' den,

$$1 - 3n < 4nx, x \geq \frac{1}{2}$$

olduğu görülür.

Böylece $\tilde{L}_n$, $n \in \mathbb{N}$, operatörlerinin daha iyi bir yaklaşım sonucu verdiği gösterilmiştir.

3.3.3. Modifiye Stancu-Kantorovich Operatörleri

Stancu polinomları [7], $\alpha \geq 0$ için,

$$w_{n,k}^{(\alpha)}(x) = \binom{n}{k} \frac{x^{(k,-\alpha)}(1-x)^{(n-k,-\alpha)}}{1^{(n,-\alpha)}},$$

$$x^{(k,-\alpha)} := x(x+\alpha) \dots (x+(k-1)\alpha)$$

olmak üzere,

$$(L_n f)(x) = \sum_{k=0}^n w_{n,k}^{(\alpha)}(x) f\left(\frac{k}{n}\right), x \in [0,1]$$

dir. Aşağıdaki eşitlikler sağlanır

$$L_n e_0 = e_0, \quad L_n e_1 = e_1, \quad L_n e_2 = e_2 + \frac{1+n\alpha}{n(1+\alpha)}(e_1 - e_2).$$

Stancu operatörlerinin Kantorovich genelleştirmesi [5],

$$(G_n f)(x) = (n+1) \sum_{k=0}^n w_{n,k}^{(\alpha)}(x) \int_{k/(n+1)}^{(k+1)/(n+1)} f(t) dt$$

şeklinde verilmiştir. (3.7) ile oluşturulan operatörler için,

$$u_n = \frac{1}{n+1}, \quad u^* = \frac{1}{2} \text{ ve } A = \left[\frac{1}{4}, 1\right] \text{ olarak alındığında, (3.11) bağıntısı,}$$

$$\beta_n = \frac{1+n\alpha}{n(1+\alpha)} \text{ için,}$$

$$-1 - \beta_n + 2(n+1)\beta_n(2x-1) < 0 \quad (3.12)$$

şeklinde yazılabilir. Özel olarak, $\alpha = 0$ için, Stancu operatörleri Bernstein operatörlerine dönüşür ve G_n operatörleri (3.9) ve (3.10)' dan, klasik Kantorovich operatörleri [4] haline gelir.

Bu durumda $\beta_n = 1/n$ ve her $x < 3/4$ için (3.12) bağıntısı sağlanır. Buna göre,

$$-1 - \frac{1}{n} + 2(n+1)\frac{1}{n}(2x-1) < 0$$

$$\frac{-n-1+(2n+2)(2x-1)}{n} < 0$$

$$\frac{-(n+1) + 2(n+1)(2x-1)}{n} < 0$$

$$\frac{(n+1)(2(2x-1)-1)}{n} < 0$$

$$\frac{(n+1)}{n} \cdot (4x-2-1) < 0$$

$$\frac{(n+1)}{n} \cdot (4x-3) < 0$$

$$\frac{(n+1)}{n} > 0$$

$$4x-3 < 0$$

$$4x < 3$$

$$x < \frac{3}{4}$$

elde edilir. Sonuç olarak, $[1/4, 3/4]$ aralığı üzerinde dahi $\tilde{L}_n$ ($n \in \mathbb{N}$) operatörleri daha iyi bir yaklaşım sonucu verir. $\alpha > 0$ için,

$$\tau = \inf_{n \geq 1} \frac{2n\beta_n + 3\beta_n + 1}{4(n+1)\beta_n}$$

alınırsa, $1/2 < \tau < 1$ olduğu görülür. Buna göre $\tilde{L}_n$ ($n \in \mathbb{N}$) operatörleri, G_n ($n \in \mathbb{N}$) operatörlerine göre $I = \left[\frac{1}{4}, \tau\right]$ aralığında daha iyi bir yaklaşım sonucu verir.

4.AFİN FONKSİYONLARI KORUYAN KANTOROVİCH TİPLİ OPERATÖRLERİN YAKINSAKLIK ÖZELLİKLERİ

4.1. $\widetilde{K}_n$ Operatörünün Tanımı Ve Momentlerinin Hesaplanması

Bu bölümde, 3. bölümde verilen ve afin fonksiyonlarını koruyan operatörlerden esinlenerek $\widetilde{K}_n$ operatörlerinin bazı yakınsaklık özellikleri incelenecektir ([24]).

$$\widetilde{K}_n(f)(x) = \frac{1}{u_n} \sum_{k \in I_n} \lambda_{n,k}(x) \int_{x_{n,k}}^{x_{n,k+1}} f(t) dt, \quad x \in H^*$$

şeklinde verilen operatör için teoremlerin hesaplamalarında faydalanacağımız momentleri ve merkezli momentleri hesaplayalım.

Lemma 4.1. L_n , (3.4)' teki operatör olsun. $n \in \mathbb{N}$ ve $x \in A^*$ olsun. $e_r(t) = t^r$,

$r = 0, 1, 2, 3, 4$ için,

i) $\widetilde{K}_n(e_0)(x) = 1$

ii) $\widetilde{K}_n(e_1)(x) = x + \frac{u_n}{2}$

iii) $\widetilde{K}_n(e_2)(x) = L_n(e_2)(x) + u_n x - \frac{u_n^2}{3}$

iv) $\widetilde{K}_n(e_3)(x) = L_n(e_3)(x) + \frac{3}{2} u_n L_n(e_2)(x) + u_n^2 x - \frac{u_n^3}{4}$

v) $\widetilde{K}_n(e_4)(x) = L_n(e_4)(x) + 2u_n L_n(e_3)(x) + 2u_n^2 L_n(e_2)(x) + u_n^3 x - \frac{u_n^4}{5}$

elde edilir.

İspat.

i) $\widetilde{K}_n(e_0)(x) = 1$ olduğu operatörünün tanımından görülmektedir.

$$\begin{aligned} \text{ii) } \widetilde{K}_n(e_1)(x) &= \frac{1}{u_n} \sum_{k \in I_n} \lambda_{n,k}(x) \int_{x_{n,k}}^{x_{n,k+1}} t dt \\ &= \frac{1}{u_n} \sum_{k \in I_n} \lambda_{n,k}(x) \frac{1}{2} (x_{n,k+1}^2 - x_{n,k}^2) \\ &= \frac{1}{u_n} \sum_{k \in I_n} \lambda_{n,k}(x) \frac{1}{2} (x_{n,k+1} - x_{n,k})(x_{n,k+1} + x_{n,k}) \\ &= \frac{1}{u_n} \sum_{k \in I_n} \lambda_{n,k}(x) \frac{1}{2} (u_n(u_n + 2x_{n,k})) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{u_n} \sum_{k \in I_n} \lambda_{n,k}(x) \frac{1}{2} (u_n^2 + 2u_n x_{n,k}) \\
&= \frac{u_n}{2} + x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{iii) } \widetilde{K}_n(e_2)(x) &= \frac{1}{u_n} \sum_{k \in I_n} \lambda_{n,k}(x) \frac{1}{3} (x_{n,k+1}^3 - x_{n,k}^3) \\
&= \frac{1}{u_n} \sum_{k \in I_n} \lambda_{n,k}(x) \frac{1}{3} (x_{n,k+1} - x_{n,k}) (x_{n,k+1}^2 + x_{n,k+1}x_{n,k} + x_{n,k}^2) \\
&= \frac{1}{3u_n} \sum_{k \in I_n} \lambda_{n,k}(x) u_n \left[(x_{n,k} + u_n)^2 + x_{n,k}(x_{n,k} + u_n) + x_{n,k}^2 \right] \\
&= \sum_{k \in I_n} \lambda_{n,k}(x) x_{n,k}^2 + u_n x + \frac{u_n^2}{3} = L_n(e_2)(x) + u_n x + \frac{u_n^2}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{iv) } \widetilde{K}_n(e_3)(x) &= \frac{1}{u_n} \sum_{k \in I_n} \lambda_{n,k}(x) \frac{1}{4} (x_{n,k+1}^4 - x_{n,k}^4) \\
&= \frac{1}{u_n} \sum_{k \in I_n} \lambda_{n,k}(x) \frac{1}{4} ((x_{n,k+1}^2 - x_{n,k}^2)(x_{n,k+1}^2 + x_{n,k}^2)) \\
&= \frac{1}{4u_n} \sum_{k \in I_n} \lambda_{n,k}(x) (x_{n,k+1} - x_{n,k})(x_{n,k+1} + x_{n,k})(x_{n,k+1}^2 + x_{n,k}^2) \\
&= \frac{1}{4u_n} \sum_{k \in I_n} \lambda_{n,k}(x) [u_n(2x_{n,k} + u_n)((u_n + x_{n,k})^2 + x_{n,k}^2)] \\
&= \sum_{k \in I_n} \lambda_{n,k}(x) x_{n,k}^3 + \frac{1}{4u_n} \sum_{k \in I_n} \lambda_{n,k}(x) 6u_n^2 x_{n,k}^2 \\
&\quad + \frac{1}{4u_n} \sum_{k \in I_n} \lambda_{n,k}(x) 4u_n^3 x_{n,k} + \frac{1}{4u_n} \sum_{k \in I_n} \lambda_{n,k}(x) u_n^4 \\
&= L_n(e_3)(x) + \frac{3}{2} u_n L_n(e_2)(x) + u_n^2 x - \frac{u_n^3}{4}
\end{aligned}$$

Buradan, (v) benzer şekilde hesaplanabilir.

Lemma 4.2. $\varphi_x^n(t) = (t - x)^n$, $n = 0, 1, 2, \dots$ olsun. (3.4) ile verilen operatör, $\widetilde{K}_n$ için, $\zeta_{n,2}(x) = \widetilde{K}_n(\varphi_x^2(t); x)$ ve $\zeta_{n,4}(x) = \widetilde{K}_n(\varphi_x^4(t); x)$ dir. Buradan;

$$\zeta_{n,2}(x) = L_n(e_2; x) + \frac{u_n^2}{3} - x^2$$

ve

$$\begin{aligned}
& \zeta_{n,4}(x) \\
&= L_n(e_4)(x) + (2u_n - 4x)L_n(e_3)(x) + (2u_n^2 - 6xu_n + 6x^2)L_n(e_2)(x) \\
&\quad + 4x^3u_nL_n(e_1)(x) - 3x^4L_n(e_0)(x) + u_n^4 - 2x^2u_n^2
\end{aligned}$$

dir.

İspat.

Lemma 4.1' i kullanarak aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$$\begin{aligned}
\zeta_{n,2}(x) &= \tilde{K}_n(\varphi_x^2(t); x) = L_n(e_2; x) + \frac{u_n^2}{3} + u_nx - 2x(x + \frac{u_n}{2} + x^2) \\
&= L_n(e_2; x) + \frac{u_n^2}{3} - x^2.
\end{aligned}$$

Şimdi $\tilde{K}_n(\varphi_x^4(t); x)$ ' i hesaplayalım.

$$\begin{aligned}
\zeta_{n,4}(x) &= \tilde{K}_n(\varphi_x^4(t); x) \\
&= \tilde{K}_n(e_4, x) - 4\tilde{K}_n(e_3, x) + 6\tilde{K}_n(e_2, x)x^2 - 4\tilde{K}_n(e_1, x)x^3 \\
&\quad + x^4\tilde{K}_n(e_0, x) \\
&= L_n(e_4; x) + 2u_nL_n(e_3; x) + 2u_n^2L_n(e_2; x) + u_n^3x + u_n^4 \\
&\quad - 4x \left(L_n(e_3; x) + \frac{3}{2}u_nL_n(e_2; x) + u_n^2x + \frac{u_n^3}{4} \right) \\
&\quad + 6x^2 \left(L_n(e_2; x) + u_nx + \frac{u_n^2}{3} \right) - 4x^3 \left(\frac{u_n}{2} + L_n(e_1; x) \right) \\
&\quad + x^4L_n(e_0; x) \\
&= L_n(e_4; x) + (2u_n - 4x)L_n(e_3)(x) + (2u_n^2 \pm 6xu_n + 6x^2) \\
&\quad L_n(e_2)(x) + 4x^3u_nL_n(e_1)(x) - 3x^4u_nL_n(e_1)(x) \\
&\quad - 3x^4L_n(e_0)(x) + u_n^4 - 2x^2u_n^2.
\end{aligned}$$

Böylece istenen sonuç elde edilir.

4.2. Süreklilik Modülü Yardımıyla Yakınsaklık Hızının Hesaplanması

Bu bölümde, $f \in \mathbb{R}^+$ alınarak, $\tilde{K}_n$ operatörü için yaklaşım sonucu verilecektir.

Daha önce tanımlandığı üzere, $\mu(x) = 1 + x^2$ ağırlık fonksiyonu ve K_f, f' ye bağlı pozitif bir sabit olsun.

$$B_\mu(\mathbb{R}^+) = \{f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} : |f(x)| \leq K_f \mu(x)\}$$

ve

$$C_\mu^k(\mathbb{R}^+) = C(\mathbb{R}^+) \cap B_\mu(\mathbb{R}^+).$$

$C_\mu^k(\mathbb{R}^+) = \left\{f \in C_\mu(\mathbb{R}^+) : \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\mu(x)} = K_f < \infty\right\}$ şeklinde verilen fonksiyon uzayı göz önüne alınsın. Buna göre, $C_\mu^k(\mathbb{R}^+) \subset C_\mu(\mathbb{R}^+) \subset B_\mu(\mathbb{R}^+)$ yazılabilir. Bu uzayda norm,

$$\|f\|_\mu = \sup_{x \in \mathbb{R}^+} \frac{|f(x)|}{\mu(x)}$$

şeklinde tanımlıdır. Eğer $f \in C_\mu^k(\mathbb{R}^+)$ ise $\|L_n(f)\|_\mu \leq \|f\|_\mu$ ' dir. Bu sonuçlar ve Korovkin tipli teoremler [2, 3, 6, 9, 10] 'da görülebilir.

$C^k(\mathbb{R}^+)$ kümesi, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|f(x)|}{1+x^2} = k > 0$ şartını sağlayan tüm $f \in C(\mathbb{R}^+)$ fonksiyonlarının alt uzayı olsun. Burada k pozitif bir sabittir. $f \in C^k(\mathbb{R}^+)$ için ağırlıklı süreklilik modülü Tanım 2.5' te verilmiştir. Ağırlıklı süreklilik modülü kullanılarak aşağıdaki teorem ispatlanacaktır.

Teorem 4.1 $f \in C_\mu^k(\mathbb{R}^+)$ ise,

$$|\tilde{K}_n(f; x) - f(x)| \leq 32(1+x^2)\Omega(f; \sqrt[4]{\zeta_{n,4}(x)}).$$

dir.

İspat. (3.8) özelliğinden,

$$\Omega(f; \lambda\delta) \leq 2(1+\lambda)(1+\delta^2)\Omega(f; \delta)$$

yazılabilir.

Pozitif λ için, $f \in C_\mu^k(\mathbb{R}^+)$ için $\Omega(f; \delta)$ tanımına göre ve $x, t \in \mathbb{R}^+$ ve

$\delta > 0$ için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$|f(t) - f(x)| \leq 16(1+x^2)\Omega(f; \delta) \left(1 + \frac{|t-x|^4}{\delta^4}\right).$$

Lemma 4.1 ve (3.9) u kullanarak,

$$|\tilde{K}_n(f; x) - f(x)| \leq |f(x)| |1 - \tilde{K}_n(1; x)| + \tilde{K}_n(|f(t) - f(x)|; x)$$

elde edilir. (3.8) e $\tilde{K}_n$ i uygularsak;

$$\begin{aligned}
|\tilde{K}_n(f; x) - f(x)| &\leq \frac{1}{u_n} \sum_{k \in I_n} \lambda_{n,k}(x) \int_{x_{n,k}}^{x_{n,k+1}} |f(t) - f(x)| dt \\
&\leq 16(1+x^2)\Omega(f; \delta) \left(1 + \frac{\zeta_{n,4}(x)}{\delta^4}\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan, $\delta = \sqrt[4]{\zeta_{n,4}(x)}$ seçilirse,

$$|\tilde{K}_n(f; x) - f(x)| \leq 32(1+x^2) \Omega \left(f; \sqrt[4]{\zeta_{n,4}(x)} \right)$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 4.2 $f'' \in C(\mathbb{R})$ ve $\omega(f''; \delta)$, f'' 'nin süreklilik modülü olsun.

Sonlu $\delta > 0$ için,

$$\left| \frac{1}{\zeta_{n,2}(x)} [(\tilde{K}_n f)(x) - f(x)] - \frac{1}{2} f''(x) \right| \leq \omega \left(f''; \frac{\sqrt{\zeta_{n,4}(x)}}{\sqrt{\zeta_{n,2}(x)}} \right)$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat. $\zeta \in [x, t]$ için (2.1) eşitliğini ve x sabit noktasındaki Taylor açılımı kullanılarak,

$$\begin{aligned}
\lambda(f; t, x) &= \left| f(t) - f(x) - \frac{f'(x)}{1!} (t-x) - \frac{f''(x)}{2!} (t-x)^2 \right| \\
&= \frac{(t-x)^2}{2!} 2 \left[\frac{f(t) - f(x) - f'(x)(t-x)}{2(t-x)^2} - \frac{f''(x)}{2} \right] \\
&= \frac{(t-x)^2}{2!} \left[2 \frac{f'(t) - f'(x) - f''(x)}{2(t-x)} \right] \\
&= \frac{(t-x)^2}{2!} \left[2 \frac{f''(\zeta)}{2} - \frac{f''(x)}{2} \right] \\
&= \frac{(t-x)^2}{2!} [f''(\zeta) - f''(x)], \quad \zeta \in [x; t]
\end{aligned}$$

Modül alınarak devam edilirse.

$$\begin{aligned}
|\lambda(f; t, x)| &\leq \frac{(t-x)^2}{2!} |f''(\zeta) - f''(x)| \\
&\leq \frac{(t-x)^2}{2!} \omega(f''; |\zeta - x|)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{(t-x)^2}{2!} \omega(f''; |t-x|) \\
&\leq \frac{(t-x)^2}{2!} \omega(f''; |t-x| \frac{\delta}{\delta}) \\
&\leq \frac{(t-x)^2}{2!} \left(1 + \frac{|t-x|}{\delta}\right) \omega(f''; \delta) \\
&= \frac{1}{2} \left((t-x)^2 + \frac{(t-x)^2 |t-x|}{\delta} \right) \omega(f''; \delta) \\
&= \frac{(t-x)^2}{2!} |f''(\zeta) - f''(x)| \leq \frac{(t-x)^2}{2!} \omega(f''; |\zeta - x|) \\
&\leq \frac{(t-x)^2}{2!} \omega(f''; |t-x|) \\
&\leq \frac{(t-x)^2}{2!} \left(1 + \frac{|t-x|}{\delta}\right) \omega(f''; \delta) \\
&\leq \frac{1}{2} \left((t-x)^2 + \frac{|t-x|^3}{\delta} \right) \omega(f''; \delta)
\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi $\tilde{K}_n$ 'ye uygulanırsa;

$$\begin{aligned}
\left| \left(\tilde{K}_n \lambda(\cdot, x) \right) (x) \right| &= \left| \left(\tilde{K}_n f \right) (x) - f(x) - f'(x) \zeta_{n,1}(x) - \frac{f''(x)}{2} \zeta_{n,2}(x) \right| \\
&= \left| \left(\tilde{K}_n f \right) (x) - f(x) - \frac{f''(x)}{2} \zeta_{n,2}(x) \right| \leq \left(\tilde{K}_n |\lambda(f; \cdot, x)| \right) (x) \\
&\leq \frac{1}{2} \cdot \omega(f''; \delta) \left(\zeta_{n,2}(x) + \frac{(\tilde{K}_n |e_1 - x|^3)(x)}{\delta} \right) \\
&= \frac{\zeta_{n,2}(x)}{2} \cdot \omega(f''; \delta) \left(1 + \frac{1}{\delta} \cdot \frac{(\tilde{K}_n |e_1 - x|^3)(x)}{\zeta_{n,2}(x)} \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan,

$$\delta = (\tilde{K}_n |e_1 - x|^3)(x) / \zeta_{n,2}(x)$$

seçilerek ve

$$(\tilde{K}_n |e_1 - x|^3)(x) \leq \sqrt{\zeta_{n,4}(x)} \cdot \sqrt{\zeta_{n,2}(x)}$$

eşitsizliği kullanılarak,

$$\left| \left(\tilde{K}_n f \right) (x) - f(x) - \frac{f''(x)}{2} \sqrt{\zeta_{n,2}(x)} \right|$$

$$\leq \sqrt{\zeta_{n,2}(x)} \omega \left(f''; \frac{\sqrt{\zeta_{n,4}(x)}}{\sqrt{\zeta_{n,2}(x)}} \right)$$

bulunur. Sonuç olarak,

$$\left| \frac{1}{\sqrt{\zeta_{n,2}(x)}} (\tilde{K}_n f)(x) - f(x) - \frac{1}{2} f''(x) \right| \leq \omega \left(f''; \frac{\sqrt{\zeta_{n,4}(x)}}{\sqrt{\zeta_{n,2}(x)}} \right)$$

eşitsizliği elde edilerek ispat tamamlanır.



5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Matematiksel Analiz’ in önemli bir dalı da Yaklaşımlar Teorisidir. Bu teori de kendi içinde birçok dala ayrılmaktadır. Bu dallardan birisi de lineer pozitif operatörlerin yakınsaklık durumlarının incelenmesidir. Bu konu geçmişten günümüze kadar popülerliğini halâ sürdürmektedir. En iyi bilinen lineer pozitif operatörler Bernstein, Baskakov, Szász-Mirakyan operatörleridir. Bu operatörlerin çeşitli genelleştirmeleri tanımlanarak, belli koşullar altında yakınsaklık özellikleri incelenmektedir.

Bu tezde afin fonksiyonu koruyan Kantorovich tipli operatörler ile ilgili makaleler incelenmiştir. Bu makalelerden birisi Agratini’ nin “A Note On Kantorovich Type Operators Which Preserve Affine Functions “. Bu çalışmasından esinlenerek bazı yaklaşım teoremleri verilmiştir. Yakınsaklık için kuantitatif hesaplamalar yapılmıştır. Ağırlıklı uzaylarda modifiye bir operatörün yakınsaklık özellikleri incelenmiştir. Böylece modifiye operatörlerin, klasik operatörlerden daha iyi yaklaşım sonuçları verdiği gösterilmiştir.

Bu tezi hazırlamaktaki amacımız, geçmişten günümüze önemini koruyan bazı lineer pozitif operatörlerin, genelleştirilmiş halleri ile ilgili yapılan çalışmaları takip eden bir kaynak oluşturmaktır.

KAYNAKLAR

- [1] Butzer, P.L. (1954). On the extensions of Bernstein polynomials to the infinite interval, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 5, 547-553.
- [2] Ditzian, Z., Totik, V. (1987). Moduli of Smoothness, *Springer-Verlag*, New York Inc..
- [3] Duman, O., Özarslan, M.A., Della Vecchia, B.(2009). Modified Szász-Mirakjan-Kantorovich operators preserving linear functions, *Turk. J. Math.*, 33, 151-158.
- [4] Kantorovich, L.V. (1930). Sur certains développement suivant les polynômes de la forme de S. Bernstein, I, II, *C.R. Acad. URSS*, 563-568, 595-600.
- [5] Razi, Q. (1989). Approximation of a function by Kantorovich-type operators *Matematicki Vesnik*, 41, 183-192.
- [6] Shisa, O., Mond, B. (1968). The degree of convergence of linear positive operators, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 60, 1196-1200.
- [7] Stancu, D.D. (1968). Approximation of functions by a new class of linear polynomial operators, *Rev. Roumanie Math. Pures Appl.*, 8, 1173-1194.
- [8] A. Aral, D. Cardenas-Morales, P. Garrancho, I. Rasa (2011). Bernstein-type operators which preserve polynomials, *Computers and Mathematics with Applications*, 6, 158-163.
- [9] A. D., Gadjiev (1976). On P. P. Korovkin Type Theorems, *Math.Zametki*, 20(5), 995-998.
- [10] Hacıyev, A. ve Hacısalıhoğlu. H.H. (1995). Lineer Pozitif Operatör Dizilerinin Yakınsaklığı, *A.Ü.F.F.Döner Sermaye İşletmesi Yayınları*, (31).
- [11] A. D., Gadjiev (1974). The Convergence Problem for a Sequence of Positive Linear Operators on Unbounded Sets and Theorems Analogous To That of P. P. Korovkin , *Engl. Translated. Sov.Math. Dokl.*, 15, 1433-1436.
- [12] Acar T, Aral A, Cárdenas-Morales D, Garrancho P. (2017). Szász-Mirakyan type operators which fix exponentials, *Result Math.*, 72(3), 1393-1404.
- [13] O. Agratini (2016). Kantorovich Type Operators Preserving Affine Functions, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 45 (6) 1657-1663.
- [14] N. Ispir (2001). On Modified Baskakov Operators on Weighted Spaces, *Turk. J. Math.*, 25, 355-365.

- [15] F. Altomare and M. Campiti (1994). Korovkin-type Approximation Theory and Its Applications, *Walter de Gruyter*, New York.
- [16] L.V. Kantorovich (1930). Sur certains d eveloppementssuivant les polynmes de la forme de S.Bernstein, *I,II.C.R. Acad.URSS*, 563-568 and 595-600.
- [17] A. Aral, D. Aydin Ari and B. Yilmaz (2021). A Note On Kantorovich Type Bernstein Chlodovsky Operator Which Preserve Exponential Functions, *Journal of Mathematical Inequalities*, 15(3), 1173-1183.
- [18] A. Aral, D. Otrocol and I. Rasa (2019) On a New Type of Bernstein-Kantorovich Operators, *Period. Math. Hung.*, 79 (2), 236-253.
- [19] Jensen, J.L.W.V. (1906). Sur les fonctions convexes etles inegalites entre les valeurs mayennes. *Acta Mathematica*. 30 (1), 175-193.
- [20] Anastassiou, G.A., & Gal, S.G.(2000). Approximation theory: moduli of continuity and global smoothness preservation, *Springer Science & Business Media*.
- [21] DeVore, R. A., Lorentz G.G. (1993). Constructive Approximation, *Springer Science &Business Media*.
- [22] Cárdenas-Morales, D.and Muñoz-Delgado, F.J. (2008). Improving Certain Bernstein Type Approximation Process, *Mathematics and Computers in Simulation* , 77 (2-3), 170-178.
- [23] Aydın Ari, D., & Uğur Yılmaz, G. (2024). A Note On Kantorovich Type Operators Which Preserve Affine Functions. *Fundamental Journal of Mathematics and Applications*, 7(1), 53-58.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Gizem UĞUR YILMAZ

Doğum Tarihi/Yeri : 01.01.1992 / MERSİN

Yabancı Dil : İngilizce

Eğitim Durumu

Lise : Hasan Ali Yücel Anadolu Öğretmen Lisesi, 2009

Lisans : Hacettepe Üniversitesi, Matematik Öğretmenliği, 2015

Çalıştığı Kurum : Milli Savunma Üniversitesi Hava Harp Okulu, 2020-

Yayınları:

Aydın Arı, D., and Uğur Yılmaz, G. (2024). A Note On Kantorovich Type Operators Which Preserve Affine Functions. *Fundamental Journal of Mathematics and Applications*, 7(1), 53-58.

Araştırma Alanları: Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi