T.C.
SÜLEYMAN DEMİREL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATRİS ÇARPIMLARININ İZ EŞİTSİZLİKLERİ ÜZERİNE

Nurcan ÖLMEZ

Danışman
Prof. Dr. Ramazan TÜRKMEN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
ISPARTA - 2025

Sayfa

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

MATRİS ÇARPIMLARININ İZ EŞİTSİZLİKLERİ ÜZERİNE
Nurcan ÖLMEZ

Süleyman Demirel Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Ramazan TÜRKMEN

Günümüzde matris teori hem teorik hem de pratik düzeyde olağanüstü bir zenginliğe sahiptir. Uygulamalı matematiği kapsayan çeşitli alanlarda , bilgisayar bilimlerinde , mühendislik alanlarında çok geniş bir kullanım alanına sahiptir. Bir çok araştırmacının üzerine yoğun çalışmalar yaptığı bir diğer alanda matris eşitsizlikleridir.

Biz bu çalışmanın temelinde ilk olarak matrisler üzerine son yıllarda yapılan çalışmaları irdeledik. Matrislerin özdeğerleri , özvektörleri , izi ,singüler değerleri, hermityen matrisler , pozitif tanımlı ve pozitif yarı tanımlı matrisler ve bunlar arasındaki ilişki üzerine mevcut sınırlarda dikkate alınarak yeni çalışmalar yaptık. Matrislerin izleri , bu izlerin kuvvetleri , birden fazla matrisin izi ve bunlar arasındaki ilişki üzerine elde edilen eşitsizlikleri vereceğiz.

Anahtar Kelimeler: Özdeğerler, Singüler Değerler, Pozitif Yarı Tanımlı Matrisler, Matris Eşitsizlikleri , İz Eşitsizlikleri, Hermityen Matris

2025, 37 sayfa

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

SOME MATRIX TRACE INEQUALITIES

Nurcan ÖLMEZ

Süleyman Demirel University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Ramazan Türkmen

Today , matrix theory has an extraordinary richness at both theoretical and practical levels. It has a wide range of uses in various fields including applied mathematics, computer science and engineering. Another area on which many researchers have worked intensively is matrix inequalities.

In this paper, we first review the recent work on matrices. We will carry out new studies on the eigenvalues , eigenvectors, trace of matrices, singular values, hermitian matrices , positive definite and positive semi-definite matrices and the relationship between them , taking into account the existing boundaries. We will give the inequalities obtained on the traces of matrices, the powers of these traces, the traces of more than one matrix and the relationship between them.
Keywords: Eigenvalues, Singular Values, Positive Semi-defined Matrices , Matrix Inequalities , Trace İnequalities , Hermitian Matrix.

2025,37 pages

TEŞEKKÜR

Bu çalışma Prof. Dr. Ramazan Türkmen danışmanlığında yapılarak Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsüne tez çalışması olarak sunulmuştur.

Tez süresince yardımlarını esirgemeyen değerli danışman hocam Prof. Dr. Ramazan Türkmen'e ve tezimin her aşamasında beni yalnız bırakmayan aileme sonsuz sevgi ve saygılarımı sunarım.

Nurcan ÖLMEZ
ISPARTA, 2025

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

M_n	nxn boyutundaki kare matris
M_{nxn}	mxn boyutundaki matris
M_{nxn}(C)	nxn boyutundaki kompleks matris
M_{mxn}(C)	mxn boyutundaki kompleks matris
A^T	Bir matrisin transpozu
A^*	Bir matrisin eşlenik transpozu
detA	Bir matrisin determinantı
iz A	Bir matrisin izi
λ(A)	Bir matrisin öz değerleri
s_i(A)	Bir matrisin singüler değerleri
A≥0	Pozitif yarı tanımlı
A> 0	Pozitif tanımlı matris
A^{-1}	Bir matrisin tersi
$\|A\|$	$(A^*A)^{1/2}$

1. GİRİŞ

Doğrusal denklem sistemlerinin çözülmesi için matrislerin kullanılmasının çok eski bir tarihi vardır. İlk olarak bu sistemlerin çözümünde matris kullanımı Jiu Zhang Suan She (Matematik Sanatında Dokuz Bölüm) adlı eserde karşımıza çıkmaktadır. Daha sonra matris ifadesi yaklaşık 1400 sene kadar sonra 1683'te Seki Kowa adlı Japon matematikçi ve Batı Avrupada ilk defa 1693'te Leibniz isimli Alman matematikçi tarafından ortaya atılmış ve determinant yardımıyla çözüm ise 1750'de Gabriel Cramer tarafından gösterilmiştir. Matris matematiğinin determinant kullanılmadan geliştirilmesi ise 1858'de Arthur Cayley tarafından Memoir on the teory of matrices (Matris teorisi hakkında bir not) adlı eseriyle başlamıştır.

Bu önemli çalışmaların ışığında günümüze kadar birçok matematikçi matris teorisinin gelişimine katkı sağlamıştır. Biz bu çalışmamızda matrislerin iz eşitsizlikleri üzerine yapılan çalışmaları inceleyip mevcut sınırlara yenilerini eklemeye çalışacağız.

2. KAYNAK ÖZETLERİ

Matris ifadesi, J. J. Syvester adlı İngiliz matematikçi tarafından ilk defa isim olarak kullanılmıştır. Matematiğin çok zengin bu dalında yıllar boyunca önemli çalışmalar yapılmıştır. Oyun teorisinde, ekonomide, bilgisayar bilimlerinde, fizikte sıkça kullanılan bir alandır. Kuantum mekaniğinde entropi kavramı Von Neumann entropisinde iz operatörü olarak karşımıza çıkmaktadır.

2000 yılında Xiaojing Yang ‘ A matrix trace inequalities ’ isimli makalesinde bugünkü çalışmalarımızda bize temel teşkil eden çok önemli iz eşitsizlikleri elde etmiştir.

2001 yılında Fuzen Zhang ‘Matrix Inequalities by Means Block Matrices ’ isimli makalesinde blok matrislerin iz eşitsizlikleri üzerine yeni sınırlar vermiştir.

2010 yılında Ramazan Türkmen ve Zübeyde Ulukök’ ün matris eşitsizlikleri üzerine yaptığı ‘Some matrix trace inequalities’ isimli çalışmada, Hadamard çarpımının Frebenius normu için eşitsizlik sunduklarını görüyoruz.

2011 yılında Ramazan Türkmen ve Zübeyde Ulukök’ ün singüler değer eşitsizlikleri üzerine yaptığı ‘ Inequalities for Singular Values of Positive Semidefinite Block Matrices’ isimli çalışmada 2x2 pozitif yarı tanımlı blok matrisler için singüler değer eşitsizlikleri üzerine çalışmalar yapmışlardır.

2012 yılında Khalid Shebrawi ve Hussein Albadawi ‘Trace inequalities for matrices’ isimli makalesinde matrislerin toplamları ve çarpımları için iz eşitsizlikleri üzerine çalışmışlardır.

2014 yılında Houqing Zhou Hermityen matrisler için iz eşitsizlikleri üzerine önceki çalışmaları genişletip yeni teoriler elde ettiği ‘On some trace inequalities for positive definite Hermitian matrices’ isimli makaleyi yayınlamıştır.

2017 yılında Fuad Kittaneh ve Minghau Lin ‘Trace inequalities for positive semidefinite block matrices’ isimli çalışmasında 2x2 blok matrislerin izi üzerine yeni eşitsizlikler sunmuşlardır.

2022 yılında Areerak Chaiworn ‘On some absolute matrix trace inequalities’ adlı makalesinde özdeğer ve singüler değer eşitsizliklerini uygulayarak çarpım matrislerinin mutlakları için bazı iz eşitsizleri sunmuştur.

3. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde matris teoride kullanılan ve ilerideki bölümler için katkı sağlayacak temel tanım , notasyon ve özellikler verilecektir.

3.1 Bir Matrisin Özdeğer Ve Özvektörleri

Tanım 3.1.1 $A \in M_{nxn}(C)$ ve $0 \neq x \in C^n$ olmak üzere ;

$(\lambda I - A)x = 0$ veya $Ax=\lambda x$

Homojen sistemini göz önüne alırsak sistemin sıfırdan farklı bir çözümünün olabilmesi için det(λI-A)=0 gerekir. Buradan n. Dereceden λ' ya bağlı bir polinom elde ederiz**.** Bu karakteristik polinomun köklerine A matrisinin özdeğerleri denir. X vektörüne de A matrisinin λ özdeğerine karşılık gelen özvektörü denir. Temel Özellikler

i.) Özdeğer λ sıfır değerini alabilirken, özvektör x asla sıfır vektörü olamaz.

ii.) Özdeğer sıfır olduğunda Ax=0x , A matrisinin tersi alınamaz.

Tanım 3.1.2 Belirli bir özdeğerle ilişkili tüm özvektörlerin ve sıfır vektörünün kümesine özuzay denir**.**

Örnek 3.1.3 K= $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ matrisinin özdeğer ve özvektörlerini bulalım.

İlk olarak K matrisin özdeğerlerini ve bu matrise karşılık gelen özvektörleri bulalım. Kx=λx ve $(K-\lambda I_3)x=0$ homojen sisteminin sıfırdan farklı çözümü olması için;

$$|K - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

şartını sağlayan değerleri bulmalıyız.

$$|\mathrm{K}-\lambda \mathrm{I}_3|=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}=-\lambda^3+4\lambda^2-3\lambda = 0$$

Bu karakteristik denlemin kökleri λ_1=0 , λ_2=1 , λ_3=3 elde edilir.

λ_1=0 için ;

$$(\mathrm{K}\text{-}0\mathrm{I}_3)x=0\ ,\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Homojen sistemin sıfırdan farklı çözümünü bulmalıyız.

Matrisin rankı 2 olduğundan bir parametreye bağlı sonsuz çözümü vardır. x_3=k alırsak x_2=k ve x_1=k olur. Bu durumda λ=0 a karşılık gelen özuzay;

$$E_1=\left\{\begin{bmatrix} k \\ k \\ k \end{bmatrix} : k \in R\right\}=\left\{k\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} : k \in R\right\}$$ elde edilir.

Benzer şekilde λ=1 için ;

$$(\mathrm{K}\text{-}1\mathrm{I}_3)x=0\ ,\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Homojen sistemin sıfırdan farklı çözümünü bulmalıyız. Gerekli işlemler yapıldığında buradan x_1= -u , x_2 = 0 , x_3 = u elde edilir. Bu durumda λ=1 e karşılık gelen özuzay;

$$E_2=\left\{\begin{bmatrix} -u \\ 0 \\ u \end{bmatrix} : u \in R\right\}=\left\{u\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} : u \in R\right\}$$ bulunur.

λ=3 için;

$$(\mathrm{K}\text{-}3\mathrm{I}_3)x=0\ ,\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Gerekli işlemler yapıldığında buradan x_1= z , x_2 = -2z , x_3 = z bulunur. Bu durumda λ=3 e karşılık gelen özuzay;

$$E_3=\left\{\begin{bmatrix} z \\ -2z \\ z \end{bmatrix} : z \in R\right\}=\left\{z\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} : z \in R\right\}$$

elde edilir.

Tanım 3.1.4 A matrisinin tüm özdeğerlerinin kümesine A'nın spectrumu denir.

Teorem 3.1.5 A ∊ M_n hermityen matrisinin özdeğerleri azalan sıradadır.

$\lambda_{min} = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n = \lambda_{max}$ **(Horn ve Jhonson 1985)**

Teorem 3.1.6 (Weyl Monotonluk Teoremi) A,B ∊M_n olmak üzere $\lambda_i(A)$,$\lambda_i(B)$ ve $\lambda_i(A+B)$ özdeğerleri azalan sırada olsun.

Bu durumda her k=1,2,…n sayısı için

$\lambda_k(A) + \lambda_1(B) \geq \lambda_k(A+B) \geq \lambda_k(A) + \lambda_n(B)$

eşitsizliği vardır.**(Bhatia,1997)**

3.2 Bir Matrisin İzi

Tanım 3.2.1 $A = [a_{ij}] \in M_n$ olmak üzere, A'nın köşegen elemanlarının toplamına A'nın izi denir ve

$$iz(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

ile gösterilir.

Uyarı 3.2.2 δ(A)={$\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$} , A'nın tüm özdeğerlerinin kümesi ise, iz fonksiyonu aynı zamanda A={a_{ij}} ∊ M_n matrisinin özdeğerlerinin toplamıdır. Bu durumda;

$$\text{iz}(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_n = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$$

dir. Ve determinant fonksiyonuda özdeğerlerle şu şekilde tanımlanabilir;

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

Özetle A'nın determinantı , A'nın özdeğerlerinin çarpımına eşittir.

Uyarı 3.2.3 K,L $\in M_n$, K ve L matrisleri benzer matrisler ise aynı özdeğerlere sahiptirler.

Teorem 3.2.4 K,L $\in M_n$, c $\in C$ olmak üzere aşağıdaki ifadeler vardır;

- iz(cK) = c.iz(K)
- iz(K+L) = iz(K)+iz(L)
- iz(KL)= iz(LK)
- S, M_n ' de tersinir matris olmak üzere iz($S^{-1}KS$) = iz(K) 'dır.
- İz(0)=0 , iz(I)=n
- İz(K)=$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$

Tanım 3.2.5 (Eşlenik Transpozu) A=$[a_{ij}]$ $\in M_n$ olmak üzere A' nın transpozu $A^T=[a_{ji}]$ ve A'nın eşlenik transpozu $A^*=[\overline{a_{ji}}]$ şeklinde gösterilir.

Teorem 3.2.6 A ,B $\in M_n$, a $\in$ C ise;

- $(A^*)^*=A$
- $(A+B)^*=A^*+B^*$
- $(aA)^*=\bar{a}A^*$
- $(AB)^*=B^*A^*$
- $\det(A^*)=\overline{\det(A)}$
- $\text{iz}A^*=\overline{\text{iz}A}$
- λ' nın A'nın bir özdeğeri olması için gerek ve yeter şart $\bar{\lambda}$' nın $A^{*\prime}$ ın bir özdeğeri olmasıdır. Yani, $\sigma(A^*)=\overline{\sigma(A)}=\{\lambda : \bar{\lambda} \in \sigma(A)\}$ dır.
- A' nın tersinir olması için gerek ve yeter şart A^*' ın tersinir olmasıdır. Yani, $(A^*)^{-1}=(A^{-1})^*$**(Murad.2003)**

3.3 Hermityen Matrisler

Tanım 3.3.1 K matrisi n-kare kompleks matris olsun. Eğer $K^* = K$ ise K matrisine Hermityen matris denir. $K^*=-K$ matris ise ters Hermityen matris olarak ifade edilir.

$K,L \in M_n$ için aşağıdaki teoremi verelim:

Teorem 3.3.2 $K,L \in M_n$ olsun. Bu durumda ;

- K, L Hermityen matrisler olsun. O halde KL' nin Hermityen olması için gerek ve yeter şart KL=LK olmasıdır.
- $K+K^*$, KK^* ve K^*K matrisleri de hermityendir.
- A Hermityen matris olmak üzere özdeğerlerine karşılık gelen özvektörler diktir. Özvektörlerinin bir ortonormal kümesi vardır. **(Horn ve Jhonson,1985)**

Teorem 3.3.3 A matrisi Hermityen bir matris ise tüm özdeğerleri reel sayılardan oluşur. A matrisi ters Hermityen bir matris ise özdeğerleri pür imajinerdir.

İspat: A Hermityen matris olmak üzere ; λx=Ax olduğunu biliyoruz. Ayrıca iç çarpım özelliklerinden;

$\lambda\langle x,x\rangle=\langle \lambda x,x\rangle=\langle Ax,x\rangle=\langle x,A^* x\rangle=\langle x,Ax\rangle=\langle x,\lambda x\rangle= \bar{\lambda}\langle x,x\rangle$

$\lambda\langle x,x\rangle=\bar{\lambda}\langle x,x\rangle$

$(\lambda-\bar{\lambda}).\ \langle x,x\rangle=0$

$\lambda-\bar{\lambda}=0$, $\lambda=\bar{\lambda}$ elde edilir. Bu durumda $\lambda\in \mathbb{R}$ olduğu açıktır.

Tanım 3.3.4 (Singüler değerler) Herhangi bir $K\in M_n(C)$ matrisi için K^*, K matrisinin eşlenik transpozu olmak üzere K^*K matrisinin özdeğerlerinin kareköküne K matrisinin singüler değerleri denir.

$s(K)=\sqrt{\lambda(K^*K)}=\lambda^{1/2}(K^*K)$ şeklinde ifade edilir.

K matrisi Hermityen ise yani $K^* = K$ ise $s_i(K) = |\lambda_i(K)|$ dır.

K matrisi pozitif yarı tanımlı ise yani $A \geq 0$ ise $s_i(K) = \lambda_i(K)$ dır.

Örnek 3.3.5 $A=\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$ matrisinin singüler değerlerini bulalım.

A^*A matrisinin özdeğerlerinin karekökünü bulmalıyız.

$$A^*A=\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 25 & 7 \\ 7 & 25 \end{bmatrix}$$

$$|A^*A - \lambda I_2| = 0$$

$\begin{vmatrix} 25-\lambda & 7 \\ 7 & 25-\lambda \end{vmatrix}=0$ eşiliğinin sağlayan λ değerlerini bulmalıyız.

Gerekli şlemler yapıldığında $\lambda_1 = 32$ ve $\lambda_2 = 18$ elde ederiz. Bu durumda

$S_1=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$ ve $S_2=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$ elde edilir.

3.4 Majorizasyon

Majorizasyon, matrislerin öz değerlerine, singüler değerlerine ve matris normlarına ait eşitsizlik oluşturmada kullanılan son derece güçlü ve kullanışlı bir araçtır.

Tanım 3.4.1 $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y=(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in R^n$ vektörleri için $k=1,2,\ldots,n$ ve $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n$, $y_1 \geq y_2 \geq \ldots \geq y_n$ olmak üzere;

$$\sum_{i=1}^{k} x_i \leq \sum_{i=1}^{k} y_i$$

ise x , y tarafından zayıf majorize edilir ve $x \prec_w y$ ile gösterilir. $x \prec_w y$ 'ye ek olarak

$$\sum_{i=1}^{k} x_i = \sum_{i=1}^{k} y_i$$

sağlanıyorsa x, y tarafından majorize edilir denir. $x \prec y$ ile gösterilir. **(Marshall ve Olkin,1979)**

Majorizasyonu daha iyi anlayabilmek için bir örnek verelim. Eğer her $a_i>0$,$\sum_{i=1}^{k} a_i=1$ ise,

$\left(\frac{1}{k},\frac{1}{k},\ldots,\frac{1}{k}\right) \prec \cdots \prec (a_1,a_2,\ldots,a_k) \prec (1,0,0,\ldots,0)$ olur. Yani;

$$\left(\frac{1}{k},\frac{1}{k},\ldots,\frac{1}{k}\right) \prec \left(\frac{1}{k-1},\frac{1}{k-1},\ldots,\frac{1}{k-1},0\right) \prec \cdots \prec \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\ldots,0\right) \prec (a_1,a_2,\ldots,a_k)$$

olur.

Teorem 3.4.2 H, köşegen elemanları h_1, h_2,…… h_n ve özdeğerleri λ_1, λ_2,…., λ_n olan nxn mertebeli Hermityen bir matris olmak üzere;

köş(H) $\prec$ λ(H) dir.

Yani, Hermityen bir matrisin köşegen elemanları , özdeğerleri tarafından majorize edilir. **(Schur,1923)**

Teorem 3.4.3 A,B ∊ M_n Hermityen matris olmak üzere;

i) λ(A+B) $\prec$ λ(A) + λ(B)
ii) λ(A) - λ(B) $\prec$ λ(A-B) dir. **(Zhang,2011)**

Teorem 3.4.4 A,B ∊ M_n olmak üzere;

i) s(A+B) $\prec_w$ s(A) + s(B)
iii) $|s(A) - s(B)| \prec_w$ s(A) - s(B) dir. **(Zhang,2011)**

4. BAZI ÖZEL TİPTEKİ MATRİSLER VE EŞİTSİZLİKLER

Bu bölümde pozitif tanımlı matrisler , pozitif yarı tanımlı matrisler, blok matrisler ve bu matrisler ile ilgili önemli tanım ve eşitsizliklerden bahsedeceğiz.

4.1 Pozitif Tanımlı ve Pozitif Yarı Tanımlı Matrisler

Bu bölümde pozitif yarı tanımlı matrislerin temel özellikleri, bu matrisleri içeren önemli teoremler ele alınacaktır.

Tanım 4.1.1. K, nxn hermityen matris olmak üzere; sıfırdan farklı her $x \in C^n$ için $x^*Kx > 0$ oluyorsa K matrisi pozitif tanımlı olarak adlandırılır. Ve K>0 ile gösterilir.

Tanım 4.1.2. $K \in M_n(C)$ hermityen matris olmak üzere; her $x \in C^n$ için $x^*Kx \geq 0$ oluyorsa K matrisine pozitif yarı tanımlı matris denir ve $K \geq 0$ ile gösterilir.

Teorem 4.1.3 $A \in M_n(C)$ hermityen matris olmak üzere A'nın pozitif yarı tanımlı olması için gerek ve yeter şart bütün özdeğerlerinin negatif olmayan reel sayılar olmasıdır. **(Zhang,1999)**

Teorem 4.1.4.

- Pozitif yarı tanımlı matrisin özdeğerleri ve köşegen elemanları negatif olmayan reel sayılardır.
- Pozitif yarı tanımlı matrisin her esas alt matrisi pozitif yarı tanımlıdır.
- Pozitif yarı tanımlı matrisin determinantı ve izi pozitiftir**.(Horn ve Jhonson,1985)**

Ayrıca pozitif yarı tanımlı matrislerin özdeğerleri ile singüler değerleri aynıdır.

Bütün pozitif yarı tanımlı matrislerin aynı zamanda pozitif yarı tanımlı bir kareköküde vardır.

Teorem 4.1.5. $A \in M_n$ matrisinin pozitif yarı tanımlı olması için gerek ve yeter şart herhangi bir B matrisi için $A=B^*B$ olarak yazılabilmesidir. **(Zhang,1999)**

İspat ⇨ $A \in M_n$ pozitif yarı tanımlı matris olsun. O halde ;

$A=A^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}=(A^{\frac{1}{2}})^*A^{\frac{1}{2}}$ şeklinde yazılabilir.

⇦ herhangi bir B matrisi için $A=B^*B$ olsun. Bu takdirde her $x \in C^n$ için iç çarpım fonksiyonunun özelliklerinden

$\langle Ax, x\rangle=\langle B^*Bx, x\rangle=\langle Bx, Bx\rangle \geq 0$ elde edilir.

Bu durumda A matrisi pozitif yarı tanımlı bir matristir.

Teorem 4.1.6. A, B ∊ M_n pozitif yarı tanımlı matrisler olsun. AB matrisinin pozitif yarı tanımlı olması için gerek ve yeter şart A ve B matrislerinin değişmeli olmasıdır. **(Zhang ,1999)**

İspat: A, B ∊ M_n pozitif yarı tanımlı matrisler olmak üzere ;

$$\lambda_j(AB) = \lambda_j\left(A^{\frac{1}{2}}\left(A^{\frac{1}{2}}B\right)\right) = \lambda_j\left(A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}}\right) \quad , j = 1,2, \dots n$$

dir ve $A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}} \geq 0$ olduğundan $\lambda_j(AB) \geq 0$ elde edilir.

A ve B değişmeli matris ve Hermityen matris olduğu için AB matriside Hermityendir. Ve $\lambda_j(AB) \geq 0$ olduğundan $AB \geq 0$ dır.

4.2 2x2 Tipindeki Blok Matrisler

Tanım4.2.1 Bir $A=(A_{ij})_{mxn}$ matrisinde k tane satır ve l tane sütun çıkarıldığında elde edilen (m-k)x(n-l) tipindeki yeni matrise bu matrisin bir alt matrisi denir.

Tanım4.2.2 Bir $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{22} & .. \\ : & : & : \\ a_{m1} & : & a_{mn} \end{pmatrix}$ matrisini

$r_1+r_2+\dots+r_p=m$, $s_1+s_2+\dots+s_q=n$ ve $A_{kl}=(A_{ij})_{rk\,x\,sl}$ (k=1,2,..p ; s=1,2,…q)

Olmak üzere;

$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{p1} & .. & A_{pq} \end{pmatrix}$ şeklinde yazılmasına A matrisinin bloklara ayrılması denir.

K=$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ şeklindeki matrislere ise 2x2 blok matris denir.

4.3 Matrislerin İzleri, Singüler Değerleri ve Blok Matrisler İçin Bazı Önemli Eşitsizlikler

Bu bölümde matrislerin iz eşitsizliklerinde sıklıkla kullanılan bazı önemli eşitsizliklerden bahsedeceğiz.

Teorem 4.3.1 A, B matrisleri aynı boyutta kare iki pozitif yarıtanımlı matris olmak üzere;

0≤ iz(AB) ≤ izA.izB

eşitsizliği vardır. **(Coope,1994)**

İspat: A matrisi pozitif yarıtanımlı olduğu için pozitif yarı tanımlı bir kareköke sahiptir. $A^{\frac{1}{2}}$ ile iz(AB) = iz($A^{\frac{1}{2}}$ B$A^{\frac{1}{2}}$) ve

$0 \leq$ iz(AB) = iz($A^{\frac{1}{2}}\ B^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}}\ \ A^{\frac{1}{2}}$)= $\left\| A^{\frac{1}{2}}\ B^{\frac{1}{2}} \right\|_F^2 \leq \left\| A^{\frac{1}{2}} \right\|_F^2 \left\| B^{\frac{1}{2}} \right\|_F^2$ =iz(A) iz(B)

Yukarıda tanımlı $\|\cdot\|_F$ Frobenius normu , herhangi bir C matrisi için

$\|C\|_F^2 = \text{iz}(C^*C)$ şeklinde gösterilir. Eğer A ve B veya her ikiside pozitif tanımlı ise bu eşitsizlik şu şekilde güçlendirilebilir 0 < iz(AB) ≤ izA.izB

Teoremde A=B kabul edersek iz(A^2) $=$ (izA)^2 elde ederiz.

Teorem 4.3.2 A ≥ 0 ve B ≥ 0 ise;

2iz(AB) ≤ izA^2 + izB^2

eşitsizliği vardır. **.(Bellman,1980)**

Teorem 4.3.3 A,B iki hermityen matris ve $A \geq 0$ ve $B \geq 0$ olsun. Bu şartlar sağlandığında ;

$$\mathrm{iz}(AB)^2 \leq \mathrm{iz}(A^2B^2)$$

eşitsizliği elde edilir. **(Bellman,1980)**

Lemma 4.3.4 $K \in M_n(C)$ alalım. O halde $|\mathrm{iz}(K)| \leq \mathrm{iz}(|K|)$ şeklinde yazılabilir.

İspat: Weyl'in özdeğerler ve singüler değerler arasındaki eşitsizliğini kullanarak;

$$|\mathrm{iz}(K)| = \left|\sum_{j=1}^{t} \lambda_j(K)\right| \leq \sum_{j=1}^{t} |\lambda_j(K)| \leq \sum_{j=1}^{t} s_j(K) = \sum_{j=1}^{t} \lambda_j(|K|) = \mathrm{iz}(|K|)$$

Lemma 4.3.5 $A_i \in M_n \ (i = 1,2, \ldots, m)$ ve $\sigma_i(A_1) \geq \sigma_i(A_2) \geq \cdots \geq \sigma_i(A_m)$ olmak üzere;

$$|\mathrm{iz}(A_1A_2 \ldots \ldots A_m)| \leq \sum_{i=0}^{n} \sigma_i\,(A_1A_2 \ldots \ldots A_m) \leq \sum_{i=0}^{n} \sigma_i\,(A_1)\sigma_i(A_2) \ldots \ldots \sigma_i(A_m)$$

şeklinde yazılabilir. **(Wang,1990)**

Lemma4.3.6 $a_i > 0$ (i=1,2,….n) ve $\sum_{i=1}^{n} a_i \geq 1$. $a_{ij} > 0 \ (j = 1,2, \ldots, m)$ ise

$$\sum_{j=1}^{m} a_{1j}^{a_1} a_{2j}^{a_2} \ldots \ldots \ldots a_{nj}^{a_n} \leq \left(\sum_{j=1}^{m} a_{1j}\right)^{a_1} \left(\sum_{j=1}^{m} a_{2j}\right)^{a_2} \ldots \left(\sum_{j=1}^{m} a_{nj}\right)^{a_n}$$

eşitsizliği yazılabilir. (Mitrinovic,1970)

Teorem 4.3.7 (Young Eşitsizliği) $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, p,q>1 tüm a >0 ve b >0 reel sayıları için; $ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}a^q$ eşitsizliği literatürde Young eşitsizliği olarak bilinir.

Teorem 4.3.8 (Hölder Eşitsizliği) k=1,2,…,n için $a_k \geq 0$, $b_k \geq 0$ ve p >1 olmak üzere $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olsun. O halde;

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{\frac{1}{q}} \geq \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$$

eşitsizliği yazılır.

Teorem 4.3.9. A, B ve C n-kare kompleks matris olmak üzere;

$\begin{pmatrix} A & B \\ B^* & C \end{pmatrix} \geq 0$, ise

$*$ işlemi + veya $\circ$ olmak üzere ,

$A*C \geq \pm(B^* * B)$

ve AB=BA ise,

$A^{\frac{1}{2}}CA^{\frac{1}{2}} \geq B^* * B$

eşitsizliği yazılabilir**. (Zhang,2001)**

Teorem 4.3.10 A_i , B_i (i=1,2,…,m) aynı boyutta pozitif tanımlı matrisler, p > 1 ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olmak üzere;

$$\mathrm{iz}\sum_{i=1}^{m}(A_i B_i) \leq \left(\sum_{i=1}^{m} \mathrm{iz}A_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{m} \mathrm{iz}B_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

. **(Zhou,2014)**

İspat: Pozitif tanımlı matrislerin özdeğerleri ve izleri pozitif reel sayılar olduğundan, özdeğerler singüler değerlere eşittir. O halde lemma 4.3.5 ve spektral teoreme göre;

$$\sum_{i=1}^{m} \mathrm{iz} A_i^{\frac{1}{p}} B_i^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} s_j(A_i^{\frac{1}{p}} B_i^{\frac{1}{q}})$$

$$\leq \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} s_j(A_i^{\frac{1}{p}}) s_j(B_i^{\frac{1}{q}})$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(A_i^{\frac{1}{p}}) \lambda_j(B_i^{\frac{1}{q}})$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^{\frac{1}{p}}(A_i) \lambda_j^{\frac{1}{q}}(B_i).$$

Daha sonra lemma 4.3.6 kullanılırsa;

$$\sum_{i=1}^{m} \mathrm{iz} A_i^{\frac{1}{p}} B_i^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j(A_i) \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j(B_i) \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \sum_{i=1}^{m} (\mathrm{iz} A_i)^{\frac{1}{p}} (\mathrm{iz} B_i)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \left(\sum_{i=1}^{m} \mathrm{iz} A_i \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{m} \mathrm{iz} B_i \right)^{\frac{1}{q}}$$

$A_i = A_i^p$, $B_i = B_i^q$ kabul edersek ;

$$\sum_{i=1}^{m} iz(A_iB_i) \leq \left(\sum_{i=1}^{m} izA_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{m} izB_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Elde ederiz. Ve iz(A+B) = izA + izB olduğundan;

$$iz\sum_{i=1}^{m}(A_iB_i) \leq \left(\sum_{i=1}^{m} izA_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{m} izB_i^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Teorem 4.3.11 $A_i \in M_n(C)$ ve p_i pozitif reel sayı (i=1,2,…,m)

$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{p_i} = 1$ olmak üzere;

$$iz\left|\prod_{i=1}^{m} A_i\right|^r \leq \prod_{i=1}^{m} \left(iz|A_i|^{rp_i}\right)^{1/p_i} \qquad r \geq 1.$$

eşitsizliği vardır.**(Shebrawi ve Albadawi,2012)**

İspat: Bir matrisin izinin özdeğerlerinin toplamına eşit olduğu iyi bilinir, bu nedenle;

$$iz\left|\prod_{i=1}^{m} A_i\right|^r = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j\left(\left|\prod_{i=1}^{m} A_i\right|^r\right) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^r\left(\left|\prod_{i=1}^{m} A_i\right|\right).$$

yazabiliriz. Herhangi bir matris için singüler değerler, mutlak değerinin özdeğerleri olduğundan;

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^r\left(\left|\prod_{i=1}^{m} A_i\right|\right) = \sum_{j=1}^{n} s_j^r\left(\prod_{i=1}^{m} A_i\right).$$

singüler değerlerin çarpımının zayıf majorizasyonunu kullanarak;

$$\sum_{j=1}^{n} s_j^r\left(\prod_{i=1}^{m} A_i\right) \leq \sum_{j=1}^{n}\left(\prod_{i=1}^{m} s_j^r(A_i)\right).$$

yazabiliriz. Daha sonra Hölder eşitsizliğini uygularsak;

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\prod_{i=1}^{m} s_j^r(A_i)\right) \leq \prod_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} s_j^{rp_i}(A_i)\right)^{1/p_i} = \prod_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^{rp_i}(|A_i|)\right)^{1/p_i} =$$

$$\prod_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j(|A_i|^{rp_i})\right)^{1/p_i} = \prod_{i=1}^{m}(iz|A_i|^{rp_i})^{1/p_i}$$

Bu da ispatı tamamlamış olur. Eğer A, B $\in M_n(C)$ ve p,q pozitif reel sayılar $1/_p + 1/_q = 1$ alırsak;

$$iz|AB|^r \leq (iz|A|^{rp})^{1/p}(iz|B|^{rq})^{1/q}$$

Şeklinde genelleştirilmiş olur.

Teorem 4.3.11 eşitsizliği bir Hölder eşitsizliği olarak düşünülebilirken, Young iz eşitsizliği aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.
Sonuç 4.3.12 $A_i \in M_n(C)$ $p_i \in \mathbb{R}^+$ (i=1,2,….,m) $\sum_{i=1}^{m} 1/_{p_i} = 1$ şartları sağlanırsa;

$$iz\left|\prod_{i=1}^{m} A_i\right|^r \leq iz\left(\sum_{i=1}^{m} \frac{|A_i|^{rp_i}}{p_i}\right) \quad r \geq 1$$

eşitsizliği bulunur.

İspat: Teorem 4.3.11 i ve Young eşitsizliğini kullanarak $iz|A_1|^{rp_1}, iz|A_2|^{rp_2}, \dots\dots\dots, iz|A_m|^{rp_m}$ pozitif reel sayılar için;

$$\mathrm{iz}\left|\prod_{i=1}^{m} A_i\right|^r \leq \prod_{i=1}^{m}\left(\mathrm{iz}|A_i|^{rp_i}\right)^{1/p_i} \leq \sum_{i=1}^{m}\frac{1}{p_i}\mathrm{iz}|A_i|^{rp_i} = \mathrm{iz}\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{|A_i|^{rp_i}}{p_i}\right).$$

sonucu elde edilir.

Sonuç 4.3.13 $A_i \in M_n(C)$ pozitif yarı tanımlı ve $a_i \in R^+$ (i=1,2,….,m) $\sum_{i=1}^{m} a_i = 1$ şartları sağlanırsa;$r \geq 1$ için

$$\mathrm{iz}\left|\prod_{i=1}^{m} {A_i}^{a_i}\right|^r \leq \prod_{i=1}^{m}(\mathrm{iz}A_i^r)^{a_i}$$

ve

$$\mathrm{iz}\left|\prod_{i=1}^{m} {A_i}^{a_i}\right|^r \leq \sum_{i=1}^{m} a_i \mathrm{iz}A_i^r.$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat: Teorem 4.3.11 de A_i yerine ${A_i}^{a_i}$ yazılıp ve $a_i = {}^{1}/_{p_i}$ şartı sağlanırsa; yukarıdaki sonuçlardan ilki elde edilir. İkinci eşitsizlik ise ilk eşitsizliğe Young eşitsizliği uygularsak elde edilir.

İlk eşitsizlikte r=1 için

$$\mathrm{iz}\left|\prod_{i=1}^{m} {A_i}^{a_i}\right| \leq \prod_{i=1}^{m}(\mathrm{iz}A_i)^{a_i}$$

eşitsizliği bulunur.

Teorem 4.3.14 A,B $\in M_n(C)$ r, p, q $\in \mathbb{R}^+$ r≥1 ve $1/_p+1/_q$=1. Buradan;

$$iz|AB^*|^r \leq iz\left(\frac{|A|^p}{p}+\frac{|B|^p}{q}\right)^r.$$

(Shebrawi ve Albadawi,2012)

İspat: Bir matrisin izi özdeğerlerinin toplamına eşit olduğundan,

$$\mathrm{iz}|AB^*|^r = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(|AB^*|^r) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^r(|AB^*|) = \sum_{j=1}^{n} s_j^r(AB^*).$$

Young eşitsizliğinin matris formu kullanılırsa;

$$s_j(AB^*) \leq s_j\left(\frac{|A|^p}{p}+\frac{|B|^q}{q}\right).$$

Bundan dolayı;

$$\mathrm{iz}|AB^*|^r \leq \sum_{j=1}^{n} s_j^r\left(\frac{|A|^p}{p}+\frac{|B|^q}{q}\right) = \sum_{j=1}^{n} s_j\left(\left(\frac{|A|^p}{p}+\frac{|B|^q}{q}\right)^r\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j\left(\left(\frac{|A|^p}{p}+\frac{|B|^q}{q}\right)^r\right) = \mathrm{iz}\left(\frac{|A|^p}{p}+\frac{|B|^q}{q}\right)^r$$

Bu ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.3.14' de p=q=2 ve r=1 alınırsa;

$$\mathrm{iz}|AB^*| \leq \frac{1}{2}\mathrm{iz}(A^*A + B^*B).$$

Aşağıdaki teorem, matrislerin toplamı için bir iz eşitsizliği elde etmek için Hölder eşitsizliğine ve singüler değer majorizasyonuna bağlıdır.

Teorem 4.3.15 A_i , B_i $\in$ $M_n(C)$ (i=1,2,….,m) pozitif yarı tanımlı matris ve $p,q \in R^+$ ve ${}^1/_p+{}^1/_q=1$. Buradan;

$$\mathrm{iz}\left(\sum_{i=1}^{m} A_i B_i\right) \leq \left(\mathrm{iz}\left(\sum_{i=1}^{m} A_i^p\right)\right)^{1/p} \left(\mathrm{iz}\left(\sum_{i=1}^{m} B_i^q\right)\right)^{q}$$

Özellikle,

$$\left(\mathrm{iz}\left(\sum_{i=1}^{m} A_i B_i\right)\right)^2 \leq \left(\mathrm{iz}\left(\sum_{i=1}^{m} A_i^2\right)\right)\left(\mathrm{iz}\left(\sum_{i=1}^{m} B_i^2\right)\right)$$

eşitsizliği elde edilir.

(Shebrawi ve Albadawi,2012)

İspat: İz fonksiyonu doğrusal olduğundan;

$$\mathrm{iz}\left(\sum_{i=1}^{m} A_i B_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{iz}(A_i B_i) = \sum_{i=}^{m}\sum_{j=1}^{n} \lambda_j(A_i B_i) = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} |\lambda_j(A_i B_i)|\right)$$

Son eşitlik, pozitif yarı tanımlı matrislerin çarpımının öz değerlerinin pozitif olmasından kaynaklanmaktadır. Çünkü herhangi bir matrisin özdeğerlerinin modülü, singüler değerleri tarafından zayıf bir şekilde majorize edilir,

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} |\lambda_j(A_i B_i)|\right) \leq \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} s_j(A_i B_i)\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} s_j(A_i B_i)\right)$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} s_j(A_i)s_j(B_i)\right) = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} s_j(A_i)s_j(B_i)\right).$$

Negatif olmayan reel sayılar için Hölder eşitsizliğini kullanarak $s_1(A_i), s_2(A_i),\ldots. s_n(A_i)$ ve $s_1(B_i), s_2(B_i),\ldots. s_n(B_i)$ için,

$$\sum_{j=1}^{n} s_j(A_i)s_j(B_i) \leq \left(\sum_{j=1}^{n} s_j^p (A_i)\right)^{1/p} \left(\sum_{j=1}^{n} s_j^q (A_i)\right)^{1/q}$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{n} s_j\left(A_i^p\right)\right)^{1/p} \left(\sum_{j=1}^{n} s_j\left(B_i^q\right)\right)^{1/q} = \left(\mathrm{iz}\left(A_i^p\right)\right)^{1/p} \left(\mathrm{iz}\left(B_i^q\right)\right)^{1/q}$$

Dolayısıyla;

$$\mathrm{iz}\left(\sum_{i=1}^{m} A_iB_i\right) \leq \sum_{i=1}^{m} \left(\mathrm{iz}\left(A_i^p\right)\right)^{1/p} \left(\mathrm{iz}\left(B_i^q\right)\right)^{1/q}.$$

Yine reel sayılar için Hölder eşitsizliğini kullanarak,

$$\mathrm{iz}\left(\sum_{i=1}^{m} A_iB_i\right) \leq \left(\sum_{i=1}^{m} \mathrm{iz}\left(A_i^p\right)\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{m} \mathrm{iz}\left(B_i^q\right)\right)^{1/q},$$

ve ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.3.16 A_i , B_i $\in$ $M_n(C)$ ve p, q pozitif reel sayılar $1/_p + 1/_q = 1$. Buradan;

$$\mathrm{iz}\left(\sum_{i=1}^{m} |A_iB_i|\right) \leq \sum_{i=1}^{m} \left(\mathrm{iz}(|A_i|^p)\right)^{1/p} \sum_{i=1}^{m} \left(\mathrm{iz}(|B_i|^q)\right)^{1/q}.$$

eşitsizliği vardır. **(A.Chaiworn,2021)**

İspat: i=1,2,….,m için $iz(|A_iB_i|)=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j(|A_iB_i|)$ olduğu bilinmektedir.

Herhangi bir matris için singüler değerleri , mutlak değerinin özdeğerleri olduğundan,

$$iz(|A_iB_i|)=\sum_{j=1}^{n}s_j(A_iB_i).$$

Singüler değerlerin çarpımının zayıf majorizasyonu ile,

$$\sum_{j=1}^{n}s_j(A_iB_i)\leq\sum_{j=1}^{n}s_j(A_i)\,s_j(B_i)=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j(|A_i|)\lambda_j(|B_i|).$$

Pozitif reel sayılar için Hölder eşitsizliğini kullanarak

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j(|A_i|)\lambda_j(|B_i|)\leq\left(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^p(|A_i|)\right)^{1/p}\left(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^q(|B_i|)\right)^{1/q}$$

$$=\left(iz(|A_i|^p)\right)^{1/p}\left(iz(|B_i|^q)\right)^{1/q}.$$

Teorem ispatlanmış olur.

Teorem 4.3.17 K, L ∈ $\mathrm{M_n(C)}$. Bu durumda;

$$\mathrm{iz}(|\mathrm{KL}|^{\mathrm{m}})\leq\left(\mathrm{iz}(|\mathrm{K}|^{2\mathrm{m}})\right)^{1/2}\left(\mathrm{iz}(|\mathrm{L}|^{2\mathrm{m}})\right)^{1/2}.$$

eşitsizliği vardır. **(A.Chaiworn,2021)**

Lemma 4.3.18 $K \in M_n(C)$. O halde ;

$$\left(iz(|K|^2)\right)^{1/2} \leq iz(|K|)$$

eşitsizliği vardır.

Teorem 4.3.19 A_i , $B_i \in M_n(C)$ ve p, q pozitif reel sayılar olmak üzere $1/p + 1/q = 1$ ise

$$\left|iz\left(\sum_{i=1}^{m} A_i B_i\right)\right| \leq \frac{1}{p} iz\left(\sum_{i=1}^{m} |A_i|^p\right) + \frac{1}{q} iz\left(\sum_{i=1}^{m} |B_i^*|^q\right).$$

eşitsizliği vardır.**(A.Chaiworn,2021)**

Önerme 4.3.20 $A,B \in M_n(C)$. O halde ;

$$iz(|AB|) \leq iz(|A|)iz(|B|)$$

eşitsizliği vardır. **(A.Chaiworn,2021)**

İspat: Bir mutlak matrisin izinin singüler değerlerinin toplamına eşit olduğu ve herhangi bir matris için singüler değerlerin mutlak değerinin özdeğerleri olduğu bilinmektedir,

$$iz(|AB|) = \sum_{i=1}^{n} s(AB) \leq \sum_{i=1}^{n} s(A)s(B) = \sum_{i=1}^{n} \lambda(|A|)\lambda(|B|).$$

Şimdi pozitif sayılar için Hölder eşitsizliği şu anlama gelir

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda(|A|)\lambda(|A|) \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda(|A|^2)\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda(|B|^2)\right)^{1/2}$$

$= \left(iz(|A|^2)\right)^{1/2}\left(iz(|B|^2)\right)^{1/2}$

Lemma 4.3.16'yı kullanırsak;

$$\left(iz(|A|^2)\right)^{1/2}\left(iz(|B|^2)\right)^{1/2} \leq iz(|A|)iz(|B|)$$

İspat tamamlanmış olur.

Teorem 4.3.21 Herhangi bir pozitif yarı tanımlı blok matris verildiğinde $\begin{pmatrix} A & B \\ B^* & C \end{pmatrix}$, burada A,B ve C n-kare kompleks matrislerdir.

$$\sum_{j=1}^{k} s_j(B + B^*) \leq \sum_{j=1}^{k} s_j\begin{pmatrix} A & B \\ B^* & C \end{pmatrix}, \ \ k = 1,2, \dots . n.$$

eşitsizliği vardır. **(R.Türkmen,Z.Ulukök,2010)**

Teorem 4.3.22 A,B,C $\in M_n$ ve $\begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix} \geq 0$ ise;

$(iz(|B|^p))^2 \leq$ iz(A^p). iz(C^p) , p≥1 için.

Eğer iz(B) $\geq 0 \in \mathbb{R}$ ise

$(iz(B^p))^2 \leq (iz(|B|^p))^2 \leq$iz$(A^p)$. iz$(C^p)$

şeklinde yazılabilir. **(R.Türkmen,Z.Ulukök,2011)**

Teorem 4.3.23 $A \in M_n$ pozitif yarı tanımlı matris olsun. Buradan;

$\mathrm{iz}(A)^p \leq (\mathrm{iz}A)^p$,p≥1

eşitsizliği vardır.. **(Zhang,2011**)

Lemma 4.3.24 A_1, A_2, A_3, aynı boyutu pozitif tanımlı matrisler ve $a_1, a_2, a_3, \dots . a_n$ pozitif reel sayılar olsun. $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$ o halde;

$$iz\prod_{i=1}^{n} A_i^{a_i} \leq \sum_{i=1}^{n} a_i \, izA_i$$

eşitsizliği vardır.

Lemma 4.3.25 A,B, ∊ M_n olmak üzere

$$\sum_{J=1}^{n} s_j(AB) \leq \sum_{j=1}^{n} s_j\left(\frac{A+B}{2}\right)^2$$

eşitsizliği vardır.

5. POZİTİF YARI TANIMLI MATRİSLERİN İZ EŞİTSİZLİKLERİ ÜZERİNE TEMEL SONUÇLAR

Bu bölümde, literatür taramamız doğrultusunda çalışmamızın esas kısmını oluşturan pozitif yarı tanımlı matrislerin izleri üzerine elde ettiğimiz yeni sınırları vereceğiz.

Teorem 5.1 A, B ∊ M_n(C) iki Hermityen matris ve A≥0 , B≥0 olsun. O halde;

$$2\mathrm{iz}(AB)^{2m+1} \leq [\mathrm{iz}(A^{2m})^2 + \mathrm{iz}(B^{2m})^2].\ \mathrm{iz}A\ .\ \mathrm{iz}B$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat: A, B ∊ M_n(C) iki Hermityen matris ve A≥0 , B≥0 olmak üzere;

$$\begin{aligned} 2\mathrm{iz}(AB)^{2m+1} &\leq 2\mathrm{iz}(AB)^{2m}\,\mathrm{iz}(AB) \quad \text{, Teorem 4.3.1' i takip edersek} \\ &\leq 2\mathrm{iz}A^{2m}B^{2m}\,\mathrm{iz}(AB) \quad \text{ve Teorem 4.3.2' den} \\ &\leq [\mathrm{iz}(A^{2m})^2 + \mathrm{iz}(B^{2m})^2].\ \mathrm{iz}(AB) \\ &\leq [\mathrm{iz}(A^{2m})^2 + \mathrm{iz}(B^{2m})^2].\ \mathrm{iz}A\ .\ \mathrm{iz}B \end{aligned}$$

Bu şekilde ispat tamamlanmış olur.

Örnek 5.2 A= $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ve B=$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, m= 1 olmak üzere ;

A^2=$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ B^2=$\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$ AB=$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ elde edilir. Buradan;

izA=2 , izB=2 ,izAB=-2 olduğu görülür. Teoremimizde m=1 kabul edersek;

$(A^2)^2=\begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \end{bmatrix}$, $(B^2)^2=\begin{bmatrix} 41 & -40 \\ -40 & 41 \end{bmatrix}$, $(AB)^3=\begin{bmatrix} -4 & -4 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}$ matrislerini elde ederiz.

$iz(A^2)^2$=16 , $iz(B^2)^2$=82 , $iz(AB)^3$=-8 olduğu görülür. Teorem 5.1 'de yerine yazalım.

$2.iz(AB)^3 \leq [iz(A^2)^2+iz(B^2)^2]\,.\,izA\,.\,izB$

$2\,.(-8) \leq [16 + 82]\ .2\ .2$

$-16 \leq 392$ sonucu elde edilir. Teorem 5.1 örneklendirilmiş olur.

Teorem 5.3 M matrisi nxn karmaşık bir matris olmak üzere;

$$iz(M^*) + iz(M) + iz(MM^*) \leq n$$

eşitsizliği vardır.

İspat: M matrisi nxn karmaşık bir matris olmak üzere ;

$K=\begin{pmatrix} I & I \\ M & I \end{pmatrix}$ alalım. $KK^*\geq 0$ olduğu bilinmektedir. O halde;

$$\begin{pmatrix} I & I \\ M & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & M^* \\ I & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2I & M^*+I \\ M+I & MM^*+I \end{pmatrix} \geq 0$$

Teorem 4.3.9'dan

$$M^* + M + 2I \leq MM^* + 3I$$

yazabiliriz. Weyl'in monotonluk prensibi ve majorizasyon eşitsizliğinden;

$$M^* + M - MM^* \leq I$$

$$\sum_{1}^{k} \lambda_j(M^*) + \sum_{1}^{k} \lambda_j(M) - \sum_{1}^{k} \lambda_j(MM^*) \leq \sum_{1}^{k} \lambda_j(I)$$

$iz(M^*)$ + iz(M) - $iz(MM^*) \leq$ n

Bu şekilde ispat tamamlanmış olur. İspatımızı örneklendirelim.

Örnek 5.4 A= $\begin{bmatrix} 1-i & 3 \\ \frac{1}{4} & i \end{bmatrix}$, A matrisini 2x2 karmaşık matris olarak alalım. Bu durumda A matrisinin eşlenik transpozu A^*= $\begin{bmatrix} 1+i & \frac{1}{4} \\ 3 & -i \end{bmatrix}$ olur. Bu matrislerin izleri iz(A)= 1 , iz(A^*)=1 dir.

Bu iki matrisin çarpılması sonucu AA^* = $\begin{bmatrix} 11 & \frac{1-13i}{4} \\ \frac{1+13i}{4} & \frac{17}{16} \end{bmatrix}$ matrisi elde edilir. Ve iz(AA^*) $= 12\frac{1}{16}$ dir.

Teoremimizde yerine yazarsak;

iz(A^*) + iz(A) - iz(AA^*)≤ n

$1 + 1 - 12\frac{1}{16} \ \leq\ 2$

$- 12\frac{1}{16}$ ≤0 elde edilir. Teorem 5.3 örneklendirilmiş oldu.

Teorem 5.5 A ≥ 0 ve B ≥ 0 aynı boyutlu matrisler ise;

iz($A^{1/2}B^{1/2}$) $\leq \frac{iz(A+B)}{2}$ eşitsizliği vardır.

İspat: Zhang , 1999 yılında aynı mertebeden pozitif yarı tanımlı matrisler için ;

$$\begin{pmatrix} A & A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}} \\ B^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}} & B \end{pmatrix} \geq 0$$

eşitsizliğini vermiştir. Bu eşitsizliğe dayanarak teorem 4.3.9'dan ;

$B^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}} + A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}} \ \leq\ A + B$

iz($B^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}$) $+ iz\left(A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}}\right) \leq izA + izB$

biliyoruz ki iz ($B^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}$) $=\ iz\left(A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}}\right)$ eşitliği vardır. Bu durumda;

2iz$\left(A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}}\right) \leq\ izA + izB$

$iz\left(A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}}\right) \leq \frac{iz(A)+iz(B)}{2}$ sonucu elde edilir.

Buradan $iz(A^{1/2}B^{1/2}) \leq \frac{iz(A+B)}{2}$ bulunur.

Örnek 5.6 $A=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ ve $B=\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ pozitif yarı tanımlı matrislerini alalım. $A^{1/2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ve $B^{1/2} = \begin{bmatrix} \frac{4\sqrt{5}}{5} & \frac{-2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{-2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix}$ matrisleri elde edilir. Teorem gereği bu iki matrisi çarparsak ;

$A^{1/2}.B^{1/2} = \begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{-\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{-\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix}$ sonucunu buluruz. Bu matrislerin izlerinin iz(A)=4 , iz(B)=5 ve

$iz(A^{1/2}.B^{1/2}) = \frac{\sqrt{5}}{5}$ olduğu görülür. Teoremimizde yerine yerleştirirsek;

$iz\left(A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}}\right) \leq \frac{iz(A)+iz(B)}{2} \;\Rightarrow\; \frac{\sqrt{5}}{5} \leq \frac{4+5}{2} \;\Rightarrow\; \frac{\sqrt{5}}{5} \leq \frac{9}{2}$ sonucu elde edilir. Ve Teorem 5.5 örneklendirilmiş oldu.

Teorem 5.7 $\begin{bmatrix} I & A \\ A^* & I \end{bmatrix} \in M_n$ ve $\begin{bmatrix} I & A \\ A^* & I \end{bmatrix} \geq 0$ *ise,*

$|n - izA^*A| \leq n^2 - |izA|^2$ eşitsizliği vardır.

İspat: Fuad Kittaneh ve Minghua Lin 2017 ‘deki çalışmasında $\begin{bmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{B}^* & \mathrm{C} \end{bmatrix} \in M_n$ için

$|izAC - izB^*B| \leq izAizC - |izB|^2$

eşitsizliğini vermişlerdir.

Eğer verilen matrisi $\begin{bmatrix} I & A \\ A^* & I \end{bmatrix} \in M_n$ kabul edersek ve verilen eşitsizlikte yerine yazarsak;

$|iz(I.I) - izA^*A| \leq izI.izI - |izA|^2$

$|n - izA^*A| \leq n^2 - |izA|^2$

eşitsizliğini elde ederiz.

Sonuç 5.8 Matrisleri 2x2 kare matris olarak kabul edersek;

$|2 - izA^*A| \leq 4 - |izA|^2$

elde edilir.

Teorem 5.9 A,B $\in \mathrm{M_n}$ ve a,b,c pozitif reel sayılar olmak üzere;

$$\left|\mathrm{iz}\sum_{j=1}^{k} A_j^{\frac{1}{a}} B_j^{\frac{1}{b}}\right|^{c} \leq \sum_{j=1}^{m} (\mathrm{iz}A_j)^{\frac{c}{a}} . (\mathrm{iz}B_j)^{\frac{c}{b}}$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat: Bir matrisin izinin özdeğerlerinin toplamına eşit olduğu bilinmektedir, dolayısıyla;

$$\left|\mathrm{iz}\sum_{j=1}^{k} A_j^{\frac{1}{a}} B_j^{\frac{1}{b}}\right|^{c} \leq \mathrm{iz}\left|\sum_{j=1}^{k} A_j^{\frac{1}{a}} B_j^{\frac{1}{b}}\right|^{c} = \sum_{j=1}^{m} \lambda\left|\sum_{j=1}^{k} A_j^{\frac{1}{a}} B_j^{\frac{1}{b}}\right|^{c} = \sum_{j=1}^{m} \lambda^{c}\left|\sum_{j=1}^{k} A_j^{\frac{1}{a}} B_j^{\frac{1}{b}}\right|$$

Herhangi bir matrisin singüler değerleri onun mutlak değerinin özdeğerleri olduğundan,

$$\sum_{j=1}^{m} \lambda^{c}\left|\sum_{j=1}^{k} A_j^{\frac{1}{a}} B_j^{\frac{1}{b}}\right| = \sum_{j=1}^{m} \sigma^{c}\left(\sum_{j=1}^{k} A_j^{\frac{1}{a}} B_j^{\frac{1}{b}}\right) \leq \sum_{j=1}^{m}\sum_{j=1}^{k} \sigma^{c}(A_j^{\frac{1}{a}} B_j^{\frac{1}{b}})$$

$$\leq \sum_{j=1}^{m}\sum_{j=1}^{k} \sigma^{c}(A_j^{\frac{1}{a}})\, \sigma^{r}(B_j^{\frac{1}{b}})$$

$$= \sum_{j=1}^{m}\sum_{j=1}^{k} \lambda^{c}(A_j^{\frac{1}{a}})\, \lambda^{c}(B_j^{\frac{1}{b}}) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{j=1}^{k} \lambda^{\frac{c}{a}} (A_j)\, \lambda^{\frac{c}{b}}(B_j)$$

$$\leq \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{k} \lambda(A_j)\right)^{\frac{c}{a}}\left(\sum_{j=1}^{k} \lambda(B_j)\right)^{\frac{c}{b}} \leq \sum_{j=1}^{m} (\mathrm{iz}A_j)^{\frac{c}{a}} . (\mathrm{iz}B_j)^{\frac{c}{b}}$$

$$\left| \mathrm{iz} \sum_{j=1}^{k} A_j^{\frac{1}{a}} B_j^{\frac{1}{b}} \right|^{c} \leq \sum_{j=1}^{m} (\mathrm{iz}A_j)^{\frac{c}{a}} . (\mathrm{iz}B_j)^{\frac{c}{b}} \quad \text{eşitsizliğine ulaşılır.}$$

Teorem 5.10 M,N,K n-kare kompleks matris ve $\begin{pmatrix} M & K \\ K^* & N \end{pmatrix}$ pozitif yarı tanımlı blok matris olmak üzere;

$$|\mathrm{iz}(K + K^*)| \leq \sum_{j=1}^{k} \sigma_j \begin{pmatrix} M & K \\ K^* & N \end{pmatrix} \qquad k = 1,2, \ldots n.$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat: Türkmen ve Ulukök, herhangi bir pozitif yarı tanımlı blok matris için,

$$\sum_{j=i}^{k} \sigma_j (B + B^*) \leq \sum_{j=1}^{k} \sigma_j \begin{pmatrix} A & B \\ B^* & C \end{pmatrix}$$

eşitsizliğini vermiştir. Bu eşitsizlik için $\begin{pmatrix} M & K \\ K^* & N \end{pmatrix}$ matrisini alırsak; iyi bilinmektedir ki $|\mathrm{iz}(K + K^*)| \leq \mathrm{iz}|(K + K^*)|$ dir. Bir matrisin izi özdeğerlerinin toplamına eşittir. $\mathrm{iz}|(K + K^*)| = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j |(K + K^*)|$

Herhangi bir matrisin singüler değerleri onun mutlak değerinin özdeğerleri olduğundan,

$$|iz(K + K^*)| \leq iz|(K + K^*)| = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j(|(K + K^*)| = \sum_{j=i}^{k} \sigma_j (K + K^*)$$
$$\leq \sum_{j=1}^{k} \sigma_j \begin{pmatrix} M & K \\ K^* & N \end{pmatrix}$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 5.11 $K \geq 0$ ve $t \geq 1$ olsun. O halde;

$$iz(K + I)^t \leq \frac{1}{2}[(2n)^t + iz(K^2 + I)^t], \;\; t \geq 1$$

eşitsizliği vardır.

İspat: $\begin{bmatrix} 2I & K^*+I \\ K+I & KK^*+I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & K^* \\ I & I \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} I & K^* \\ I & I \end{bmatrix} \geq 0$ olduğunu biliyoruz. Şimdi teorem 4.3.22'den ve K≥0 olmak üzere;

$$[iz(K^*+I)^t]^2 \leq iz(2I)^t . iz(KK^*+I)^t \quad , \quad t \geq 1$$

$$[iz(K+I)^t]^2 \leq iz(2I)^t . iz(K^2+I)^t$$

$$iz(K+I)^t \leq [iz(2I)^t . iz(K^2+I)^t]^{1/2}$$

Aritmetik-geometrik ortalama eşitsizliğinden;

$$iz(K+I)^t \leq \frac{1}{2}[iz(2I)^t + iz(K^2+I)^t]$$

$$iz(K+I)^t \leq \frac{1}{2}[iz(2n)^t + iz(K^2+I)^t]$$

sonucu elde edilir.

Sonuç 5.12 t=1 kabul edersek;

$$iz(K+I) \leq \frac{1}{2}[2n + izK^2 + n]$$

$$izK + n \leq \frac{3n}{2} + \frac{izK^2}{2}$$

$$izK \leq \frac{n}{2} + \frac{izK^2}{2}$$

Örnek 5.13 K= $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ matrisini ele alalım.

$$iz(K+I)^t = \text{iz}\begin{bmatrix} 3^t & 0 \\ 0 & 3^t \end{bmatrix} = 2.3^t$$

$$iz(2K)^t = 4^t$$

$iz(K^2+I)^t = \text{iz}\begin{bmatrix} 5^t & 0 \\ 0 & 5^t \end{bmatrix} = 2.5^t$ eşitsizlikte yerine yazarsak;

$2.3^t \leq \frac{1}{2}[4^t + 2.5^t]$, $4.3^t \leq 4^t + 2.5^t$ matematiksel olarak ispatlanmış olur.

t=1 için; $4.3^1 \leq 4^1 + 2.5^1$

12≤14 sonucu elde edilir.

Teorem 5.14 A,B hermityen matris olsun.

$$iz|AB| \leq iz\left(\frac{A+B}{2}\right)^2$$

İspat: Bir matrisin izi özdeğerlerinin toplamına eşit olduğundan;

$$iz|AB| = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(|AB|)$$

şeklinde yazabiliriz. Ayrıca hermityen bir matrisin özdeğerleri singüler değerlerine eşit olduğundan;

$$iz|AB| = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(|AB|) = \sum_{J=1}^{n} s_j(AB)$$

yazılabilir. Burada lemma 4.3.25'i kullanırsak;

$$\sum_{j=1}^{n} s_j\left(\frac{A+B}{2}\right)^2 = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j\left(\frac{A+B}{2}\right)^2 = iz\left(\frac{A+B}{2}\right)^2$$

elde ederiz. Sonuç olarak;

$$iz|AB| \leq iz\left(\frac{A+B}{2}\right)^2$$

eşitsizliğine ulaşırız.

Teorem 5.15 K,H $\in M_n$ ve $K \geq 0$ $H \geq 0$ ve $t \geq 1$ ise;

$$(\mathrm{iz}(K+H)^t)^2 \leq (\mathrm{iz}|K+H|^t)^2 \leq \frac{1}{2}[[\mathrm{iz}(K^2+H^2)]^t + [\mathrm{iz}(2I)]^t]$$

eşitsizliği yazılabilir.

İspat: M=$\begin{bmatrix} K & H \\ I & I \end{bmatrix}$ olmak üzere ;

$$\begin{bmatrix} KH^* + HH^* & K+H \\ K^* + H^* & 2I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K & H \\ I & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} K & H \\ I & I \end{bmatrix}^* \geq 0$$

olduğu bilinmektedir.Teorem 4.3.22 'den ve K,H ≥0 olduğundan,

$$(\mathrm{iz}(K+H)^t)^2 \leq (\mathrm{iz}|K+H|^t)^2 \leq \mathrm{iz}(K^2+H^2)^t.\,\mathrm{iz}(2I)^t \text{ , } t \geq 1.$$

Ayrıca,

$$\mathrm{iz}(\mathrm{K}+\mathrm{H})^{\mathrm{t}} \leq \left[\mathrm{iz}(\mathrm{K}^2+\mathrm{H}^2)^{\mathrm{t}}.\,\mathrm{iz}(2\mathrm{I})^{\mathrm{t}}\right]^{1/2}$$

Aritmetik-geometrik ortalama eşitsizliğinden;

$$\mathrm{iz}(\mathrm{K}+\mathrm{H})^{\mathrm{t}} \leq \left[\mathrm{iz}(\mathrm{K}^2+\mathrm{H}^2)^{\mathrm{t}}.\,\mathrm{iz}(2\mathrm{I})^{\mathrm{t}}\right]^{1/2} \leq \frac{1}{2}\left[\mathrm{iz}(\mathrm{K}^2+\mathrm{H}^2)^{\mathrm{t}}+\mathrm{iz}(2\mathrm{I})^{\mathrm{t}}\right]$$

Teorem 4.3.23'den

$$\begin{aligned}\mathrm{iz}(\mathrm{K}+\mathrm{H})^{\mathrm{t}} &\leq \left[\mathrm{iz}(\mathrm{K}^2+\mathrm{H}^2)^{\mathrm{t}}.\,\mathrm{iz}(2\mathrm{I})^{\mathrm{t}}\right]^{1/2} \leq \frac{1}{2}\left[\mathrm{iz}(\mathrm{K}^2+\mathrm{H}^2)^{\mathrm{t}}+\mathrm{iz}(2\mathrm{I})^{\mathrm{t}}\right] \\ &\leq \frac{1}{2}\left[[\mathrm{iz}(\mathrm{K}^2+\mathrm{H}^2)]^{\mathrm{t}}+[\mathrm{iz}(2\mathrm{I})]^{\mathrm{t}}\right]\end{aligned}$$

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde pozitif yarı tanımlı ve hermityen matrisler için bulunan iz eşitsizlikleri üzerine bir araştırma yapılmıştır. Elde edilen yeni eşitsizlikler paylaşılmış ve anlaşılır hale getirmek için örneklendirilmiştir.

Elde edilen eşitsizlikler ışığında matematiğin sınırsız dünyasına yeni iz ve singüler değer eşitsizlikleri eklenebilir ve sınırlar daraltılabilir.

KAYNAKLAR

Bellman, Richard,1980, "Some Inequalities for Positive Definite Matrices", Proceedings of the International Conference on General Inequalities, Birkhauser, Basel, (ss. 89-90).

Chaiworn, A.,2022, "On Some Absolute Matrix Trace Inequalities",International Journal of Mathematics and Computer Science, no.2, (ss.561-567)

Coope, I. D.,1994, "On matrix trace inequalities and related topics for products of Hermitian matrix", J.Mat. Anal. Apple.188.

Kittaneh ,F.,Lin,Minghua,2017, "Trace inequalities for positive semidefinite block matrices",Linear Algebra and its Applications,524,(ss.153-158)

Marshall,A.W , Okin I.,1979, Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications.

Mitrinovic,DS,Vasic,1970,Analytic Inequalities,Springer,Berlin.

Murad,M.A,2003, The Löwner Ordering of Hermitian Matrices, Yüksek Lisans Tezi,The University of Jordan, *Faculty of GraduadeStudies*.

Türkmen, R., ve Ulukök, Z., 2010, Some Trace Inequalities for Matrices, Journal of Inequalities and Applications, Volume 2010, Article ID 201486, 8 pages doi:10.1155/2010/201486

Türkmen, R., ve Ulukök, Z., 2010, Trace Inequalities for Operations of Matrix Powers by Aid of Block Matrices, Int. J. Contemp. Math. Sciences, 6.26, (ss.1261-1270)

Türkmen, R., ve Ulukök, Z., 2011, Inequalities for Singular Values of Positive Semidefinite Block Matrices,International Mat.Forum,vol.6,no.31, (ss.1535-1545)

Shebrawi,K.,Albadawi,H.,2012, , "Trace Inequalities for Matrices" , Bull.Aust.Math.Soc.87, (ss.139-148)

Wang,1990, "Majorization",Beijing Normal Univercity Publishing Group,Beijing.

Yang,X.,2000, "A Matrix Trace Inequality",Journal of Mathematical Analysis and Applications,250, (ss.372-374).

Zhang,F.,2001, "Matrix Inequalities by Means Block Matrices",Mathematical Inequalities and Applications,Vol.4,(ss.481-490).

Zhang, F., 2011, Matrix Theory:Basic and Techniques, *Springer–Verlang*, NewYork.

Zhou,H.,2014, "On some trace inequalities for positive definite Hermitian matrices",Journal of Inequalities and Applications,64.