

ANKARA ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

WEIBULL GENELLEŞTİRİLMİŞ YENİLEME SÜRECİNDE PARAMETRE  
TAHMİNİ

Gamze TUNÇ KARADEMİR

İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

ANKARA  
2025

Her hakkı saklıdır

## ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

### WEIBULL GENELLEŞTİRİLMİŞ YENİLEME SÜRECİNDE PARAMETRE TAHMİNİ

Gamze TUNÇ KARADEMİR

Ankara Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
İstatistik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Halil AYDOĞDU

Tamir edilebilir sistemler onarım sonrasında beş durumdan birine getirilebilir. Bu durumlar şu şekilde adlandırılır: ‘yenisı kadar iyi’, ‘eskisi kadar kötü’, ‘eskisinden iyi ama yenisinden kötü’, ‘yenisinden daha iyi’, and ‘eskisinden daha kötü’. Onarılabılır sistemler için kullanılan yenileme süreci (RP) ve homojen olmayan Poisson süreci (NHPP), birinci ve ikinci durumları açıklar. Eğer tamir yenisı kadar iyi ise bu sistem için uygun bir sayma süreci modeli yenileme süreci RP dir. Ancak onarım sonrası tüm durumlar için yaklaşım mevcut değildir. Weibull genelleştirilmiş yenileme süreci (WGRP) Kijima and Sumita (1986) tarafından geliştirilmiş ve literatüre dahil edilmiştir. Parametre tahmin problemi hem RP hem de WGRP için çok önemlidir. Bu çalışmada WGRP ve istatistiksel özellikleri ele alınmıştır ve parametre tahmini problemi tartışılmıştır. Öncelikle model parametreleri en çok olabılırlik (ML) yöntemi kullanılarak tahmin edilmiş, ardından elde edilen tahmin ediciler için asimptotik yansızlık, tutarlılık özellikleri incelenmiştir. ML tahmin edicilerinin performansları bir simülasyon çalışması ile değerlendirilmiştir. Son olarak, yöntemin uygulanabılırliğini göstermek için iki gerçek yaşam verisi örneği sunulmuştur.

**Şubat 2025, 51 sayfa**

**Anahtar Kelimeler:** En çok olabılırlik tahmini, genelleştirilmiş yenileme süreci, Weibull dağılımı, yenileme süreci

## ABSTRACT

Master Thesis

### PARAMETER ESTIMATION IN WEIBULL GENERALIZED RENEWAL PROCESS

Gamze TUNÇ KARADEMİR

Ankara University  
Graduate School of Natural And Applied Science  
Department of Statistics

Supervisor : Prof. Dr. Halil AYDOĞDU

Repairable systems is brought to one of five states after a repair. The states are called: ‘as good as new’, ‘as bad as old’, ‘better than old but worse than new’, ‘better than new’, and ‘worse than old’. The renewal process (RP) and the non homogeneous Poisson process (NHPP) used for the repairable systems account for the first and the second states. If the repair is “ as good as new”, a suitable counting process model for this system is the RP. However, there is no approach for all after repair states. The Weibull generalized renewal process ( WGRP ) was developed by Kijima and Sumita (1986 ) and included the literature. The parameter estimation problem is very important both for RP and WGRP. In this study, the WGRP and its statistical properties are considered and the parameter estimation problem is discussed. Firstly, the model parameters are estimated by using the maximum likelihood (ML) method, and then for obtained estimators, asymptotic unbiasedness, consistency are considered. The performances of the ML estimators are evaluated. Finally, two real-life data examples are presented to illustrate the applicability of the method.

**February 2025, 51 pages**

**Key Words:**, Maximum likelihood estimation, Weibull distribution, generalized renewal process, renewal process.

## TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tez çalışmam sırasında desteklerini benden esirgemeyen sayın Hocam Prof. Dr. Halil AYDOĞDU'ya teşekkür ederim.

Aldığım her kararda yanımda olan babam İbrahim TUNÇ, annem Keriman TUNÇ, yeğenim İnci Talya TUNÇ ve değerli eşim Sinan Berkay KARADEMİR' e sonsuz teşekkür ederim.

Gamze TUNÇ KARADEMİR  
Ankara, Şubat 2025



## İÇİNDEKİLER

### TEZ ONAY SAYFASI

ETİK.....	i
ÖZET.....	ii
ABSTRACT.....	iii
TEŞEKKÜR .....	iv
SİMGELER DİZİNİ .....	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ .....	vii
ÇİZELGELER DİZİNİ .....	viii
1. GİRİŞ .....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR .....	4
2.1 Stokastik Süreç.....	4
2.2 $o(h)$ fonksiyonu.....	5
2.3 Durağan Artışlı Süreç.....	5
2.4 Bağımsız Artışlı Süreç .....	5
3. SAYMA SÜREÇLERİ TANIMLARI ve ÖZEL DURUMLAR .....	6
3.1 Sayma Süreci .....	6
3.2 Homojen Poisson Süreci .....	7
3.3 Homojen Olmayan Poisson Süreci .....	8
3.3.1 Varyasyonlar arası ve bekleme zamanı dağılımları.....	10
3.3.2 Şiddet fonksiyonu için parametre tahmini .....	13
3.4 Minimal Tamir ve Bazı Değiştirme Stratejileri.....	16
3.5 Weibull Dağılımı ve İstatistiksel Özellikleri .....	19
3.6 Güç Yasası .....	21
3.7 Yenileme Süreci.....	23
3.8 Genelleştirilmiş Yenileme Süreci .....	24
4. WEIBULL GENELLEŞTİRİLMİŞ YENİLEME SÜRECİNDE PARAMETRE TAHMİNİ.....	31
4.1 Weibull Genelleştirilmiş Yenileme Süreci .....	31
4.2 Weibull Genelleştirilmiş Yenileme Süreci için İstatistiksel Çıkarım .....	32
5. SİMÜLASYON ÇALIŞMASI .....	37
6. GERÇEK VERİ UYGULAMASI.....	42
6.1 Ascher Dizel Motor Arıza Verisi .....	44
6.2 Langseth Kompresör Sistemi Arıza Verisi .....	45
7. SONUÇ ve TARTIŞMA .....	47
KAYNAKLAR .....	48
ÖZGEÇMİŞ.....	51

## SİMGELER DİZİNİ

$X_n$ :  $n$ . olay (yenileme) ile  $(n - 1)$ . olay arasında geçen zaman

$S_n$ :  $n$ . olayın (yenileme) gerçekleşme zamanı

$N(t)$ :  $(0, t]$  aralığında gerçekleşen yenilemelerin sayısı

$\lambda(t)$ : Şiddet Fonksiyonu

$E$ : Durum uzayı

$T$ : Parametre kümesi

$F$ : Dağılım fonksiyonu

$f$ : Olasılık yoğunluk fonksiyonu

$\alpha$ : Weibull dağılımı için şekil parametresi

$\beta$ : Weibull dağılımı için ölçek parametresi

### Kısaltmalar

ML	En Çok Olabilirlik
HPP	Homojen Poisson Süreci
HKO	Hata kareler ortalaması
NHPP	Homojen Olmayan Poisson Süreci
RP	Yenileme Süreci
WGRP	Weibull Genelleştirilmiş Yenileme Süreci

## ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 5.1 $\alpha = 1.5$ için $q$ onarım parametresi karşısında MSE değerleri üzerindeki değişim.....	40
Şekil 5.2 $\beta = 1.5$ için $q$ onarım parametresi karşısında MSE değerleri üzerindeki değişim .....	40
Şekil 6.1 Ascher dizel motor arıza verisi için gözlenen bozulma zamanı ve kestirilen bozulma zamanına ait $S_k$ .....	45
Şekil 6.2 Langseth kompresör sistemi arıza verisi için gözlenen bozulma zamanı ve kestirilen bozulma zamanına ait $S_k$ .....	46



## ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 5.1 $\alpha = 1, \beta = 1$ için simülasyon sonrası elde edilen değerler.....	38
Çizelge 5.2 $\alpha = 1.5, \beta = 1.5$ için simülasyon sonrası elde edilen değerler.....	39
Çizelge 6.1 Ascher dizel motor arıza verileri.....	44
Çizelge 6.2 Langseth kompresör sistemi arıza verileri.....	45



## 1. GİRİŞ

Sayma süreci, olaylar arası geçen zaman sürelerinin analizinde yaygın olarak kullanılmaktadır.  $N(t)$ ,  $(0, t]$  aralığında gerçekleşen olayların sayısını göstermek üzere  $\{N(t), t \geq 0\}$  stokastik süreci bir sayma süreci olarak ifade edilir.  $n = 1, 2, \dots$  için  $X_n, (n - 1)$ . olay gerçekleştikten sonra  $n$ . olayın gerçekleşme zamanına kadar geçen süreyi göstermek üzere  $\{N(t), t \geq 0\}$  sürecinin olaylar arası geçen zamanlar dizisi  $\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$  dizisi ile tanımlanır. Sayma süreci ilgili dizi ile tek olarak belirlenmektedir. Eğer  $\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$  dizisi için rasgele değişkenler aynı dağılıma sahip ve bağımsız iseler (Trend Yok) yenileme süreci, ilgili sürece karşılık gelmektedir.

Tamir edilebilen bir sistemi ele alalım. Sistemin bozulur bozulmaz hemen tamir edildiği kabul edilsin. Sistemin tamirler arası geçen zaman sürelerinin dağılımının tamirin durumuna göre değişeceği açıktır. Genellikle tamir için aşağıdaki durumlar söz konusudur.

- Yenisi kadar iyi
- Eskisi kadar kötü (Minimal tamir)
- Eskisinden daha iyi ama yenisinden daha kötü (kusurlu tamir)
- Eskisinden daha kötü (minimal tamirden daha kötü)

Eğer tamir yenisi kadar iyi ise bu durumda tamirler arası geçen sistemin çalışma süreleri bağımsız ve aynı dağılımlı kabul edilebileceğinden bu sistem için uygun bir sayma süreci modeli alınmış anlamdaki yenileme süreci olur. Fakat diğer tamir durumlarında yenileme süreci uygun bir model olamaz. Böyle durumlar için Kijima and Sumita (1986) tarafından, sanal yaş yaklaşımına bağlı olarak tanımlanan,  $q$  onarım parametresi ile genelleştirilmiş yenileme süreci olarak adlandırılan bir sayma süreci modeli önerilmiştir. Yukarıda bahsedilen nedenlerden dolayı bu model uygulamada tamir edilebilen bir sistemin stokastik modellenmesi için uygun bir araç olacaktır. Ayrıca herhangi bir sistemin başlangıçtaki ömrünün dağılımı için literatürde en çok kullanılan bir dağılımın Weibull dağılımı olduğu bilinmektedir. Böylelikle uygulamada Weibull genelleştirilmiş yenileme süreci çoğu kez karşımıza çıkacaktır. Bu stokastik model Weibull dağılımının

bilinmeyen iki parametresi dışında bir de  $q$  onarım parametresi ile birlikte üç bilinmeyen parametreye sahiptir. Bu çalışmada amaç bu bilinmeyen üç parametrenin en çok olabilirlik (Maximum Likelihood-ML) tahminlerini elde etmek ve bu tahminlere dayalı olarak geliştirilmiş yenileme sürecinin ortalama değer fonksiyonunun tahminine ulaşmaktır.

Bu çalışmada Weibull geliştirilmiş yenileme süreci ele alınacaktır. Çalışmanın literatüre katkısı, diğer tamir durumları için yenileme sürecine alternatif olarak geliştirilen, Weibull geliştirilmiş yenileme sürecini tanıtarak, Weibull dağılımı parametreleri ve onarım parametresi için parametre tahmininde bulunmasıdır. Bildiğimiz kadarıyla literatürde Weibull geliştirilmiş yenileme sürecinde parametre tahmin problemlerine ilişkin başka herhangi bir çalışma bulunmamaktadır. Çalışma ifade edilen sırada ele alınacaktır

İkinci bölümde, öncelikle rasgele değişken, stokastik süreç ve  $o(h)$  fonksiyonu kavramları verilecektir. Sonrasında bağımsız artışı süreç ve durağan artışı süreç tanımları ele alınacaktır.

Üçüncü bölümde, sayma süreci tanımı verilecek sonrasında homojen Poisson süreci, Homojen olmayan Poisson süreci, varışlar arası ve bekleme zamanı dağılımları, şiddet fonksiyonunun parametrik tahmini, minimal tamir ve bazı değiştirme stratejileri, güç yasası süreci, yenileme süreci, geliştirilmiş yenileme süreci ele alınacaktır.

Dördüncü bölümde, öncelikle Weibull geliştirilmiş yenileme süreci ve olasılıksal özellikleri ele alınacaktır. Sonrasında, Weibull geliştirilmiş yenileme süreci için dağılım parametrelerinin ve onarım parametresinin parametrik tahminleri ve istatistiksel çıkarımları ele alınacaktır.

Beşinci bölümde, her bir tahmin edicinin küçük örneklem özellikleri ve performansları için simülasyon çalışması yapılacaktır. Çalışmada, farklı sayıda parametre değeri ve örneklem hacmi ele alınacaktır. Tahmin edicilerin asimptotik yansızlık ve tutarlılık özellikleri incelenecektir.

Altıncı bölümde, Ascher ve Feingold (1984), ve Langseth ve Lindqvist (2006) yer alan iki veri seti için, Weibull genelleştirilmiş yenileme sürecinde parametre tahmini yapılacaktır.

Yedinci bölümde, çalışmada elde edilen sonuçlar değerlendirilerek sunulacaktır.



## 2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu kısımda, stokastik süreçlere ilişkin temel tanımlar ve stokastik süreç özellikleri verilecektir.

### Rasgele Değişken

$(\Omega, U, P)$  bir olasılık uzayı olmak üzere

$$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\omega \rightarrow X(\omega)$$

fonksiyonu her  $a \in \mathbb{R}$  için  $\{\omega: X(\omega) \leq a\} \in U$  şartını sağlıyorsa,  $X$  fonksiyonuna rasgele değişken denir.

### 2.1 Stokastik Süreç

$(\Omega, U, P)$  bir olasılık uzayı ve  $T$  bir parametre kümesi olsun.

$$X: T \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(t, \omega) \rightarrow X(t, \omega)$$

fonksiyonu ele alınsın. Her sabit  $t \in T$  için  $X(t, \omega)$  rasgele değişkene karşılık geliyor ise  $X$  fonksiyonu stokastik süreç olarak adlandırılır ve

$$\{X(t), t \in T\}$$

gösterimi kullanılır. Her sabit  $t \in T$  için  $X(t)$ , rasgele değişkeninin değerlerini içeren  $E$  kümesi stokastik süreç için durum uzayıdır.  $E$  durum uzayı ve  $T$  parametre kümesi dört durum için ele alınabilmektedir.

1.  $E$  sayılabilir,  $T$  sayılabilir: durum uzayı kesikli, parametre kümesi kesikli.
2.  $E$  sayılamaz,  $T$  sayılamaz: durum uzayı kesikli, parametre kümesi sürekli.
3.  $E$  sayılabilir,  $T$  sayılamaz: durum uzayı sürekli, parametre kümesi sürekli.
4.  $E$  sayılamaz,  $T$  sayılabilir: durum uzayı sürekli, parametre kümesi sürekli.

## 2.2 $o(h)$ fonksiyonu

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = 0$  ise  $f(h) = o(h)$  yazılır.  $f(h) = o(h)$  olması  $h$  fonksiyonunun 0'a gitmede  $f$  den yavaş olduğunu göstermektedir. Özellik  $f(h) = o(h)$ ,  $g(h) = o(h)$  iken  $af(h) + bg(h) = o(h)$  olur.

## 2.3 Durağan Artışlı Süreç

$\{X(t), t \in T\}$  bir stokastik süreç olsun. Her  $h > 0$  ve  $t + h \in T$  için,  $X(t + h) - X(t)$  rasgele değişkeninin dağılımı  $t$  den bağımsız sadece  $h$  'a bağlı ise  $\{X(t), t \in T\}$  stokastik süreci durağan artışlı süreç olarak adlandırılır.

## 2.4 Bağımsız Artışlı Süreç

$\{X(t), t \in T\}$  bir stokastik süreç olsun. Her  $t_1 < t_2 < \dots < t_n \in T$  için,  $X(t_2) - X(t_1)$ ,  $X(t_3) - X(t_2), \dots, X(t_n) - X(t_{n-1})$  bağımsız rasgele değişkenler ise,  $\{X(t), t \in T\}$  stokastik süreci bağımsız artışlı süreç olarak adlandırılır denir.

### 3. SAYMA SÜREÇLERİ TANIMLARI ve ÖZEL DURUMLAR

Bu bölümde sayma süreci, homojen Poisson süreci (HPS), yenileme süreci, homojen olmayan Poisson süreci (NHPP), Yenileme Süreci, Genelleştirilmiş Yenileme süreci tanımları verilerek sonrasında bazı özel durumlar ele alınmıştır. Weibull Genelleştirilmiş Yenileme Sürecine geçmeden önce Weibull dağılımı ve özellikleri tanıtılmıştır.

#### 3.1 Sayma Süreci

$N(t)$ ,  $(0, t]$  aralığında gerçekleşen belirli bir türden olayların sayısı olmak üzere  $\{N(t), t \geq 0\}$  stokastik sürecine bir sayma süreci denir.  $\{N(t), t \geq 0\}$  sayma süreci,  $T = [0, \infty)$  sürekli parametre kümesi ve  $E = \{0,1,2,.. \}$  kesikli durum uzayı ile dört koşulu sağlamaktadır.

1.  $N(t)$  sifıra eşit ve sıfırdan büyük değerler alır.
2.  $N(t)$  pozitif değerler alır.
3.  $\forall s \leq t$  için  $N(s) \leq N(t)$  dir. (Monotonluk özelliği)
4.  $s < t$  için  $N(t) - N(s)$ ,  $(s, t]$  aralığında gerçekleşen olay sayısını gösterir.

$X_1$  rasgele değişkeni, ilk olay gerçekleşinceye kadar geçen süreyi,  $X_2$  rasgele değişkeni ise birinci olay gerçekleştikten sonra ikinci olay gerçekleşinceye kadar geçen süreyi,  $X_n$  rasgele değişkeni ise  $(n - 1)$ . olay gerçekleştikten sonra  $n$ . olay gerçekleşinceye kadar geçen süreyi gösterebilir.  $\{X_n, n = 1,2,3,.. \}$  dizisi  $\{N(t), t \geq 0\}$  sayma süreci için olaylar arası geçen zaman dizisi olarak adlandırılır. Sayma süreci bu dizi ile tek olarak belirlenir.

$S_0 = 0$   $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$   $n = 1,2,3,..$  rasgele değişkeni ise  $n$ . olay için gerçekleştiği anı ifade eder.  $\forall t \geq 0$  için;

$$N(t) = \sup\{n: S_n \leq t\}$$

dır.  $(N(t) \geq n)$  olayı ile  $(S_n \leq t)$  olayı birbirleri için denktir. Böylece

$$P(N(t) \geq n) = P(S_n \leq t)$$

elde edilir.

### 3.2 Homojen Poisson Süreci

#### Tanım 3.2.1

$\{N(t), t \geq 0\}$  sayma sürecini göstermek üzere

1.  $t = 0$  için  $N(t) = 0$ .
2.  $\{N(t), t \geq 0\}$  bağımsız artışı
3.  $t$  uzunluğa sahip bir aralık için gerçekleşen olay sayılarının dağılımı  $Poisson(\lambda t)$  dir. Böylece

$$P(N(t+s) - N(s) = k) = \frac{e^{-\lambda t} \lambda t^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots; s, t \geq 0$$

İçin  $\{N(t), t \geq 0\}$  sayma süreci  $\lambda$  oranına sahip bir (HPS) süreci olarak adlandırılır.

Poisson süreci, 3 özelliği sağlamasından dolayı durağan artırlılık özelliğini de sağlamaktadır. Bu süreçte, olaylar arası geçen süreler bağımsızdır ve Üstel ( $1/\lambda$ ) dağılımına sahiptir.  $\lambda$  birim zaman başına düşen ortalama olay sayısıdır.

$$E(N(t)) = \lambda t, t \geq 0$$

$$V(N(t)) = \lambda t, t \geq 0$$

#### Teorem 3.2.1

Eğer  $\{N(t), t \geq 0\}$  ilgili koşulları sağlıyor ise  $\lambda$  oranlı bir Poisson sürecini göstermektedir.

1.  $N(0) = 0$
2. Bağımsız ve durağan artışı
3.  $P(N(h) = 1) = \lambda h + o(h)$ , ( $h$  uzunluklu küçük bir aralıkta sadece bir olay gerçekleşmesi olasılığı yaklaşık olarak  $h$  aralık uzunluğu ile orantılıdır.)
4.  $P(N(h) \geq 2) = o(h)$  ( $h$  uzunluklu küçük bir aralıkta ikiye eşit ve daha fazla olayın gerçekleşme olasılığı sıfıra yaklaşmaktadır)

Not: Burada  $o(h)$  ifadesi  $\lambda h$  teriminden sonra geriye kalan terimlerin toplamının

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h)}{h} = 0$  limit eşitliğini sağladığı anlamına gelmektedir.

### 3.3 Homojen Olmayan Poisson Süreci

Zamanın bir fonksiyonu olarak rasgele gerçekleşen çok sayıdaki farklı olay türleri için zaman içerisinde belli bir türden olayın gerçekleşme hızı ya da şiddeti HPS de olduğu gibi sabit bir  $\lambda$  olamaz;  $t$  zamanına bağlı olarak karşımıza bir  $\lambda(t)$  fonksiyonu çıkar. Çoğu durumda bu  $\lambda(t)$  şiddet fonksiyonu monotondur. Örneğin bir maden ocağında meydana gelen kazaların gerçekleşme sıklığı güvenlik tedbirlerinin alınmasıyla azabilecektir ya da bir sistemin ardışık tamirleri için tamire bağlı olarak zaman içerisinde tamirlerin sıklığı artabilecektir. Böyle durumlarda olaylar arası geçen süreler aynı dağılımlı olamaz ve böylece bu ardışık süreler için bir trend vardır. Trendin olduğu durumda bir stokastik model olarak HPS nin bir genelleştirmesi olan homojen olmayan Poisson süreci (NHPP) önerilir, burada  $t$  zamanındaki varış şiddetinin  $t$  nin bir fonksiyonu olmasına izin verilir.

#### Tanım 3.3.1

$\{N(t), t \geq 0\}$  bir sayma süreci olsun.  $t \geq 0$  için  $\lambda(t)$ ,  $t$  nin bir fonksiyonu olmak üzere

- (i)  $N(0) = 0$ ,
- (ii)  $\{N(t), t \geq 0\}$  bağımsız artışı,
- (iii)  $P(N(t+h) - N(t) = 1) = \lambda(t)h + o(h)$ ,
- (iv)  $P(N(t+h) - N(t) \geq 2) = o(h)$

ise  $\{N(t), t \geq 0\}$  sayma sürecine  $\lambda(t)$  şiddet fonksiyonlu homojen olmayan ya da durağan olmayan Poisson süreci (NHPP) denir (Ross 2019).

NHPP nin özelliklerini vermeden önce bu süreçle ilgili Kannan (1979) dan bir örnek verilsin.

**Örnek 3.3.1 (Radyoaktif Çürüme).** Bir radyoaktif kaynaktan  $\gamma$ -fotonlarının yayılımını göz önüne alalım. Bu yayılım şiddet fonksiyonu  $\lambda(t) = \alpha e^{-\beta t}, t \geq 0; \alpha, \beta > 0$  olan bir HOPS yaklaşımı ile modellenebilir, burada  $\alpha$  radyoaktif maddenin miktarına bağlı bir parametre ve  $\beta^{-1}$  kaynağın ortalama ömrüdür. Bu formdaki şiddet fonksiyonları nükleer tıpta, nükleer fizikte ve jeokronolojide kullanılmaktadır.

$M(t) = \int_0^t \lambda(s) ds$  olmak üzere

$$P(N(t+s) - N(s) = k) = \frac{e^{-[M(t+s)-M(s)]} [M(t+s) - M(s)]^k}{k!}, k = 0, 1, \dots$$

olduğu gösterilebilir. Böylece  $N(t+s) - N(s)$  rasgele değişkeni  $M(t+s) - M(s)$  ortalamalı Poisson dağılımlıdır. O halde  $N(t)$   $M(t)$  ortalamalı Poisson dağılımlı bir rasgele değişkendir. Bu sebepten  $M(t)$  NHPP nin hem ortalama değer hem de varyans fonksiyonudur. Ayrıca NHPP sürecinin bağımsız artırlılığı ile bu sürecin kovaryans fonksiyonu

$$K(s, t) = M(\min(s, t)), s, t \geq 0$$

olur. Eğer  $\lambda(t) = \lambda$  ise homojen olmayan  $\{N(t), t \geq 0\}$  Poisson süreci  $\lambda$  oranlı bir homojen Poisson süreci olur ve  $N(t+s) - N(s)$   $\lambda t$  ortalamalı Poisson dağılımlıdır.

Aşağıda yukarıdaki olasılık dağılımı ifadesi bir teorem olarak verilir ve ispatlanır.

**Teorem 3.3.1**  $\{N(t), t \geq 0\}$   $\lambda(t)$  şiddet fonksiyonu ile NHPP olsun.  $M(t) = \int_0^t \lambda(s) ds$  olmak üzere  $N(t+s) - N(s) \sim \text{Poisson}(M(t+s) - M(s))$ , yani

$$P(N(t+s) - N(s) = n) = \frac{e^{-[M(t+s)-M(s)]} [M(t+s) - M(s)]^n}{n!}, n = 0, 1, \dots$$

dır.

### 3.3.1 Varırlar arası ve bekleme zamanı dağılımları

$\{N(t), t \geq 0\}$   $\lambda(t)$  Şiddet fonksiyonu ile bir NHPP olsun.  $X_1, X_2, \dots$  rasgele değişkenleri bu sũrece gũre gerçekteŐen ardışık olaylar arası geçen sũreleri ve  $S_n$   $n$ . olayın gerçekteŐme zamanını gũstersin.  $n = 1, 2, \dots$  için  $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$  olduğu açıktır. Burada  $S_0 = 0$  alınır.

$$P(X_1 > t) = P(N(t) = 0) = e^{-M(t)}, t \geq 0$$

olup

$$F_{X_1}(t) = 1 - e^{-M(t)}, t \geq 0 \quad (3.1)$$

ve

$$f_{X_1}(t) = \lambda(t)e^{-M(t)}, t > 0$$

olur.  $X_1$  rasgele değişkeni ũzerinden koşullandırma ile

$$P(X_2 > t) = \int_0^{\infty} P(X_2 > t | X_1 = s) \lambda(s) e^{-M(s)} ds$$

yazılabilir.

$$\begin{aligned} P(X_2 > t | X_1 = s) &= P(N(t+s) - N(s) = 0 | X_1 = s) \\ &= P(N(t+s) - N(s) = 0), \text{ bağımsız artıŐlılık ile} \\ &= e^{-[M(t+s) - M(s)]}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Bũylece

$$P(X_2 > t) = \int_0^{\infty} \lambda(s) e^{-M(t+s)} ds, t \geq 0$$

olduğundan

$$F_{X_2}(t) = 1 - \int_0^{\infty} \lambda(s) e^{-M(t+s)} ds, t \geq 0$$

ve

$$f_{X_2}(t) = \int_0^{\infty} \lambda(s)\lambda(t+s)e^{-M(t+s)}ds, \quad t > 0$$

bulunur.  $\lambda(t)$  sabit olmadıkça (3.2) ifadesinden  $X_1$  ve  $X_2$  rasgele değişkenlerinin bağımsız olmadığı açıktır. Ayrıca  $X_1$  ve  $X_2$  nin dağılım fonksiyonlarının ifadelerinden yine  $\lambda(t)$  sabit olmadıkça  $X_1$  ve  $X_2$  rasgele değişkenleri aynı dağılımlı olamaz. Genelde,  $n = 1, 2, \dots$  için

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} > t \mid X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) \\ &= P(N(t + x_1 + \dots + x_n) - N(x_1 + \dots + x_n) = 0 \mid X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) \\ &= P(N(t + x_1 + \dots + x_n) - N(x_1 + \dots + x_n) = 0) \quad (\text{Bağımsız artırlılık ile}) \\ &= e^{-[M(t+x_1+\dots+x_n)-M(x_1+\dots+x_n)]}, \quad t \geq 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

olduğundan  $\lambda(t)$  sabit olmadıkça  $X_1, X_2, \dots$  rasgele değişkenleri bağımsız olmayacaktır. Şimdi herhangi bir  $n \in \{1, 2, \dots\}$  için genel halde  $X_n$  rasgele değişkeninin dağılımını bulalım. (3.3) ifadesi göz önüne alındığında

$$P(X_n > t \mid S_1 = s_1, \dots, S_{n-1} = s_{n-1}) = e^{-[M(t+s_{n-1})-M(s_{n-1})]}, \quad t \geq 0$$

olduğu açıktır. Böylece

$$\begin{aligned} P(X_n > t \mid S_1 = s_1, \dots, S_{n-1} = s_{n-1}) &= P(X_n > t \mid S_{n-1} = s_{n-1}) \\ &= e^{-[M(t+s_{n-1})-M(s_{n-1})]}, \quad t \geq 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

dır.

$n = 2, 3, \dots$  için  $S_{n-1}$  rasgele değişkeni üzerinden koşullandırma ile

$$P(X_n > t) = \int_0^{\infty} P(X_n > t \mid S_{n-1} = s) f_{S_{n-1}}(s) ds \quad (3.5)$$

yazılabilir. Bu ifadede (3.5) ile  $P(X_n > t \mid S_{n-1} = s)$  koşullu dağılımının açık ifadesini biliyoruz. Şimdi  $S_{n-1}$  rasgele değişkeninin olasılık dağılımını bulalım.

$$N(t) = n - 1 \text{ ve } (t, t + h] \text{ aralığında 1 olay} \implies t < S_n \leq t + h$$

olduğundan

$P(t < S_n \leq t + h) \geq P(N(t) = n - 1 \text{ ve } (t, t + h] \text{ aralığında 1 olay})$   
dır. Ayrıca  $h$  çok küçük iken

$t < S_n \leq t + h \Rightarrow N(t) = n - 1 \text{ ve } (t, t + h] \text{ aralığında 1 olay}$   
ve böylece

$P(t < S_n \leq t + h) = P(N(t) = n - 1 \text{ ve } (t, t + h] \text{ aralığında 1 olay}) + o(h)$   
olur. Bu durumda

$$P(t < S_n \leq t + h) = P(N(t) = n - 1)P((t, t + h] \text{ aralığında 1 olay}) + o(h)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{e^{-M(t)}(M(t))^{n-1}}{(n-1)!}(\lambda(t)h + o(h)) + o(h) \\ &= \lambda(t) \frac{e^{-M(t)}(M(t))^{n-1}}{(n-1)!}h + o(h) \end{aligned}$$

ve sonuçta  $S_n$  nin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_{S_n}(t) = \lambda(t) \frac{e^{-M(t)}(M(t))^{n-1}}{(n-1)!}, t > 0$$

olur. Bu ifadenin (3.5) formülünde yerine yazılmasıyla

$$\begin{aligned} P(X_n > t) &= \int_0^\infty e^{-[M(t+s)-M(s)]} \lambda(s) \frac{e^{-M(s)}(M(s))^{n-2}}{(n-2)!} ds \\ &= \int_0^\infty \frac{e^{-M(t+s)}(M(s))^{n-2}}{(n-2)!} \lambda(s) ds, t \geq 0 \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$F_{X_n}(t) = 1 - \int_0^\infty \frac{e^{-M(t+s)}(M(s))^{n-2}}{(n-2)!} \lambda(s) ds, t \geq 0$$

ve

$$f_{X_n}(t) = \int_0^\infty \lambda(s) \lambda(t+s) \frac{e^{-M(t+s)}(M(s))^{n-2}}{(n-2)!} ds, t > 0$$

elde edilir.  $X_n$  nin olasılık yoğunluk fonksiyonu incelendiğinde  $\lambda(t)$  sabit olmadıkça  $X_1, X_2, \dots$  rasgele değişkenlerinin aynı dağılımlı olmayacağı kolaylıkla görülür.

Sonuç olarak bir NHPP nin ardışık olaylar arası geçen zaman süreleri şiddet fonksiyonu sabit olmadıkça ne bağımsız ne de aynı dağılımlı olduğu söylenebilir.

Negatif değerler almayan bir  $X$  rasgele değişkenin dağılım fonksiyonunu  $F$  ve bozulma oran fonksiyonunu  $r$  ile gösterelim. Bu durumda bilindiği üzere

$$F(t) = 1 - e^{-\int_0^t r(s)ds}, t \geq 0$$

dır, burada  $r(s) = f(s)/(1 - F(s))$ ,  $s > 0$ . NHPP nin ilk olayının gerçekleşme zamanı olan  $X_1$  rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu

$$F_{X_1}(t) = 1 - e^{-M(t)}, t \geq 0$$

olduğundan yukarıdaki ifadenin göz önüne alınmasıyla  $\lambda(t) = r(t)$  elde edilir. Böylelikle ilk olay zamanı rasgele değişkenin bozulma oran fonksiyonu HOPS in şiddet fonksiyonudur.

### 3.3.2 Şiddet fonksiyonu için parametre tahmini

NHPP ile ilgili uygulamalarda çoğunlukla sürecin  $\lambda(t)$  şiddet fonksiyonunun bir parametrik biçimi, yani bazı bilinmeyen parametrelere bağlı analitik ifadesi hakkında yukarıda açıklanan veri analizi yardımıyla bir iddia da bulunmaktadır. Özellikle  $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  veri kümesindeki ardışık olaylar arası geçen zaman sürelerini ifade eden  $X_i$  ler monoton eğilimde iken daha önce bahsettiğimiz

$$\lambda(t) = \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta-1}, t \geq 0; \alpha, \beta > 0 \quad (3.6)$$

ve

$$\lambda(t) = e^{\alpha+\beta t}, t \geq 0; \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad (3.7)$$

şiddet fonksiyonları ve  $X_i$  ler monoton olmayan eğilimde iken de

$$\lambda(t) = \frac{\beta_1}{\alpha_1} \left(\frac{t}{\alpha_1}\right)^{\beta_1-1} + \frac{\beta_2}{\alpha_2} \left(\frac{t}{\alpha_2}\right)^{\beta_2-1}, t \geq 0; \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2 > 0 \quad (3.8)$$

şiddet fonksiyonu ile verilen NHPP leri çoğu kez kullanılır (**Pulcini 2003**).

Bilinmeyen bazı parametrelere bağlı analitik ifadesi bilinen  $\lambda(t)$  şiddet fonksiyonlu homojen olmayan bir  $\{N(t), t \geq 0\}$  Poisson sürecini göz önüne alalım. Böylelikle  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r$  sonlu  $r$  tane bilinmeyen parametre ve  $g$   $t$  ve  $\theta_i$  lere göre analitik ifadesi bilinen bir fonksiyon olmak üzere  $\lambda(t) = g(t, \theta_1, \dots, \theta_r)$  yazılabilir. Bu NHPP bir  $(0, \tau]$  zaman aralığında gözlemlensin. Karşımıza çıkacak veri kümesine dayalı olarak  $i = 1, 2, \dots, r$  için  $\theta_i$  parametresinin  $\hat{\theta}_i$  tahmin edicisinin elde edilmesiyle her sabit  $t \geq 0$  için  $\lambda(t)$  nin doğal bir parametrik tahmin edicisi

$$\hat{\lambda}(t) = g(t, \hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_r)$$

olur. Her  $i \in \{1, 2, \dots, r\}$  için  $\hat{\theta}_i$  tahmin edicisi  $\theta_i$  için tutarlı ve  $g$  fonksiyonu  $\theta_1, \dots, \theta_r$  parametrelerine göre sürekli ise  $\hat{\lambda}(t)$  tahmin edicisinin  $\lambda(t)$  için tutarlı olduğu süreklilik teoreminden açıktır.

$\lambda(t)$  nin analitik ifadesindeki bilinmeyen  $\theta_1, \dots, \theta_r$  parametreleri için en çok olabilirlik yöntemi ile belli regülerlik şartları altında tutarlı tahmin ediciler elde edildiğini biliyoruz. Şimdi bu parametrelerin en çok olabilirlik tahmin edicilerinin genelde nasıl elde edileceği problemini ele alalım. NHPP nin bağımsız artırlılık özelliğinden  $\lambda_c(t) = \lambda(t)$  olduğundan  $(0, \tau]$  sürecin gözlemlendiği zaman aralığı olmak üzere (3.1) ifadesinden olabilirlik fonksiyonu

$$L(\theta_1, \dots, \theta_r) = \left( \prod_{i=1}^{N(\tau)} g(s_i, \theta_1, \dots, \theta_r) \right) e^{-\int_0^\tau g(u, \theta_1, \dots, \theta_r) du} \quad (3.9)$$

olarak karşımıza çıkar, burada veri  $\{n$  tane olay,  $s_1 < s_2 < \dots < s_n \leq \tau$  zamanlarında} biçiminde zaman kesmesi örnekleme planı altındadır. Bozulma kesmesi örnekleme planı altında olabilirlik fonksiyonu (3.34) ifadesinde  $\tau = s_n$  ve  $N(\tau) = n$  alınmasıyla

$$L(\theta_1, \dots, \theta_r) = \left( \prod_{i=1}^n g(s_i, \theta_1, \dots, \theta_r) \right) e^{-\int_0^{s_n} g(u, \theta_1, \dots, \theta_r) du} \quad (3.10)$$

biçiminde olur. Aynı zamanda belirtelim ki (3.10) olabilirlik fonksiyonunu gözlemlenmiş verinin bir durumu üzerinden koşullandırmayla çıkarmak mümkündür. Bundan dolayı yukarıdaki olabilirlikler literatürde koşullu olabilirlikler olarak da adlandırılır. Şimdi bu çıkarımı verelim.  $(0, \tau]$  zaman aralığında gözlenen homojen olmayan  $\{N(t), t \geq 0\}$  Poisson süreci için  $N(\tau) = n$  alalım. Bu sürece göre gerçekleşen ardışık olaylar arası geçen sürelerin  $X_1, X_2, \dots$  ve  $n = 1, 2, \dots$  için  $n$ . olayın gerçekleşme zamanının  $S_n = X_1 + \dots + X_n$  ile gösterildiğini hatırlayalım.  $s_1 < s_2 < \dots < s_n \leq \tau$  olmak üzere

$$\begin{aligned} X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n, N(\tau) = n &\Leftrightarrow X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n, X_{n+1} \\ &> \tau - (x_1 + \dots + x_n) \\ &\Leftrightarrow S_1 = s_1, \dots, S_n = s_n, S_{n+1} > \tau \end{aligned} \quad (3.11)$$

olduğu açıktır.

$$P(S_{n+1} > t \mid S_1 = s_1, \dots, S_n = s_n) = e^{-\int_{s_n}^t \lambda(u) du}$$

ve

$$\begin{aligned} f_{S_{n+1} \mid S_1, \dots, S_n}(s_{n+1} \mid s_1, \dots, s_n) &= f_{S_{n+1} \mid S_n}(s_{n+1} \mid s_n) \\ &= \lambda(s_{n+1}) e^{-\int_{s_n}^{s_{n+1}} \lambda(u) du} \end{aligned}$$

olduğunu biliyoruz. Bu durumda

$$f_{S_1, \dots, S_{n+1}}(s_1, \dots, s_{n+1}) = f_{S_1}(s_1) f_{S_2 \mid S_1}(s_2 \mid s_1) \dots f_{S_{n+1} \mid S_1, \dots, S_n}(s_{n+1} \mid s_1, \dots, s_n)$$

olduğu göz önüne alınarak, (3.11) ifadesinin kullanılmasıyla

$$\begin{aligned} L(\theta_1, \dots, \theta_r) &= f_{S_1}(s_1) f_{S_2 \mid S_1}(s_2 \mid s_1) \dots f_{S_n \mid S_{n-1}}(s_n \mid s_{n-1}) P(S_{n+1} > \tau \mid S_n = s_n) \\ &= \lambda(s_1) e^{-\int_0^{s_1} \lambda(u) du} \lambda(s_2) e^{-\int_{s_1}^{s_2} \lambda(u) du} \dots \lambda(s_n) e^{-\int_{s_{n-1}}^{s_n} \lambda(u) du} e^{-\int_{s_n}^{\tau} \lambda(u) du} \\ &= \left( \prod_{i=1}^{N(\tau)} \lambda(s_i) \right) e^{-\int_0^{\tau} \lambda(u) du} \end{aligned}$$

biçiminde (3.9) de verilen olabilirlik fonksiyonuna tekrar ulaşılmış olur.

$L(\theta_1, \dots, \theta_r)$  olabilirlik fonksiyonu için

$$\frac{\partial L(\theta_1, \dots, \theta_r)}{\partial \theta_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, r$$

ya da denk olarak

$$\frac{\partial \ln L(\theta_1, \dots, \theta_r)}{\partial \theta_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, r$$

denkleminin  $\theta_1, \dots, \theta_r$  parametrelerine göre çözülmesiyle istenilen  $\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_r$  en çok olabilirlik tahmin değerleri elde edilebilir.

Eğer veri bize gözlenmiş bozulma zamanları yerine yalnızca ayırık zaman aralıklarındaki bozulmaların sayısı olarak verilirse olabilirlik fonksiyonu şu şekilde bulunur: Ayırık  $(a_1, b_1], (a_2, b_2], \dots, (a_m, b_m]$  aralıklarında gözlenmiş olayların sayısı sırasıyla  $n_1, n_2, \dots, n_m$  olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} L(\theta_1, \dots, \theta_r) &= P(N(b_i) - N(a_i), i = 1, \dots, m) \\ &= \prod_{i=1}^m P(N(b_i) - N(a_i)) \\ &= \prod_{i=1}^m \frac{e^{-[M(b_i) - M(a_i)]} [M(b_i) - M(a_i)]^{n_i}}{n_i!} \\ &= e^{-\sum_{i=1}^m \int_{a_i}^{b_i} \lambda(t; \theta_1, \dots, \theta_r) dt} \prod_{i=1}^m \frac{\left( \int_{a_i}^{b_i} \lambda(t; \theta_1, \dots, \theta_r) dt \right)^{n_i}}{n_i!} \end{aligned}$$

olur. Böylece log-olabilirlik fonksiyonu  $\sum_{i=1}^m \ln n_i!$  sabiti dışında

$$\ln L(\theta_1, \dots, \theta_r) = \sum_{i=1}^m \left[ n_i \ln \left( \int_{a_i}^{b_i} \lambda(t; \theta_1, \dots, \theta_r) dt \right) - \int_{a_i}^{b_i} \lambda(t; \theta_1, \dots, \theta_r) dt \right]$$

dır.

### 3.4 Minimal Tamir ve Bazı Değişirme Stratejileri

Bu kısımda tamir edilebilen bir sistem için literatürde kabul gören tamir türleri sunulur ve bu tamir türlerinden olan minimal tamir ayrıntılı bir şekilde ele alınır. Daha sonra

minimal tamir stratejisi altındaki bir sayma sürecinin NHPP modeli olduğu gösterilir. Son olarak da NHPP ile ilgili bazı bakım stratejileri verilir.

Bütün sistemler onların aşınması ve bozulması anlamında güvenilir değildir. Bu sistemler çoğunlukla çeşitli bileşenlerden oluşur ve bir ya da daha çok bileşenin bozulmasına bağlı olarak bozulur. Tamir edilebilen bir sistem tamir ya da değiştirme ile çalışır bir duruma getirilebilir, fakat eğer sistem tamir edilemez ise bu durumda tek seçenek bozulma üzerine değiştirmedir. Tamirler sistemin (ürünün) tüm güvenilirliğini etkiler. Ürünün ömrü üzerinde tamirin etkisi tamir derecesi ile ölçülebilir. Örneğin garanti analizinde yüksek dereceli bir garanti tamiri toplam garanti masrafını çoğaltır; garanti tamiri süresince bir iyileştirme (i) ürünün güvenilirliğini artırmasıyla, (ii) garanti periyodu dönemi içerisinde bozulmaları sayısını düşürerek, gelecek garanti masraflarını azaltır. Bir ürün her bir bozulmada tamir edilebilir ya da yenisiyle değiştirilebilir olsun. Burada not edelim ki ürünün yenisiyle değiştirilmesi bir tamir olarak düşünülebilir. Böyle bir ürünün ardışık bozulmaları bir sayma süreci formülasyonu ile modellenebilir. Fakat uygun sayma süreci seçiminin tamirin derecesine bağlı olduğu açıktır. Tamirler onların derecesine göre sınıflandırılabilirler. Bozulma sonrası tamirler aşağıdakilerden birisi ile tamir edilebilen ürünleri etkiler.

- **İyileştirilmiş Tamir.** Ürünü başlangıçta satın alındığından daha iyi bir duruma getiren bir tamirdir. Bu yeni ve iyileştirilmiş ürün ile bozuk ürünün değiştirilmesine denktir.
- **Tam Tamir.** Ürünün performansını tam olarak ilk duruma getiren bir tamirdir ve böylece ürün tekrar çalıştırıldığında yeni bir ürün gibi performans gösterir. Tamirin bu çeşidi bozuk olan bileşenin başlangıçtaki ile aynı yeni bir ürünle değiştirilmesine denktir.
- **Kusurlu (Eksik) Tamir.** Ürünün fark edilebilir bir iyileşmesine sebep olan bir tamirdir. Bu tamir etkili bir şekilde tamir edilen ürün için zamanı geriye alır. Tamirlerden sonra ürünün performansı ve beklenen ömrü daha önceki bir yaşında gibidir.
- **Minimal Tamir.** Ürünün performansını etkilemeyen tamirdir. Bu tamir ürünün performansını etkilemeksizin bozuk bir durumdan bir çalışma durumuna getirir.

- **Kötü Tamir.** Ürünün fark edilebilir bir kötüleşmesine sebep olan bir tamirdir. Tamir edilen bir ürün için saati etkili bir şekilde ileri alır. Tamirlerden sonra ürünün performansı daha sonraki bir yaşında gibi olacaktır.
- **En Kötü Tamir.** İstenmediği halde (kaza ile) ürünün imha olmasına götüren bir tamirdir.

Tamir edilebilen bir ürün her bir bozulmada tamir edilsin, burada yenisiyle değiştirme bir tamir olarak elde alınır.  $(X_n)_{n=1,2,\dots}$  rasgele değişkenler dizisi ürünün bozulmalar arası geçen ardışık sürelerini gösterebilir. Bu dizi üzerine kurulu  $\{N(t), t \geq 0\}$  bozulma süreci, düzeltmeler bir tamir ile yapıldığında  $X_1, X_2, \dots$  ler bağımsız ve aynı dağılımlı negatif olmayan değerli rasgele değişkenler olmak üzere bir yenileme sürecidir. Burada  $N(t)$   $t$  zamanına kadar gerçekleşen bozulmaların sayısıdır ve tamir süreleri ihmal edilmiştir. Eğer tamir süreleri bozulmalar arası sürelerle karşılaştırıldığında önemsiz ise tamir süresinin sıfır iddiası uygundur. Bu iddia aynı zamanda zaman ölçeğinin ürünün çalışma süresi olarak alınması koşuluyla da doğrulanabilir. Böylelikle tamir altında uygun sayma süreci modelimiz bir yenileme sürecidir;  $k = 1, 2, \dots$  için  $F_k$   $X_k$  rasgele değişkenin dağılım fonksiyonu olmak üzere  $F_k = F$  dir. Genellikle  $F_k$  lerin aynı olmadığı, yani tamirlerin başlangıçtaki ürününden farklı bir ömür dağılımı sonuçlandığı iddiasıyla bozulma/tamir sürecinin modellenmesi problemiyle ilgilenilir. İlk tamirden sonraki başlangıç ömrü  $X_1$  den ikinci ömrü  $X_2$  ye geçişin özellikleri detaylı bir şekilde göz önüne alındığında elde edilen sonuçlar ikinci ve üçüncü ömürler arasındaki geçişe uygulamak için genelleştirilebilir ve bu şekilde tüm daha sonrakiler için devam ettirilebilir. Önemli bir biçimde tamirin türü her bir geçişte farklı olabilecek şekilde modeller oldukça esnek olacaktır. Tamir durumunda çoğu kez bu fikirler artan bozulma oranı fonksiyonlu ömür dağılımlarına uygulanabilir.

Şimdi daha önceden bahsettiğimiz uygulamada çoğunlukla tercih edilen özel parametrik şiddet fonksiyonlarına sahip bazı NHPP ler, matematiksel özellikleri ve bilinmeyen parametrelerinin en çok olasılık tahminlerinin nasıl elde edileceği üzerinde duralım.

### 3.5 Weibull Dağılımı ve İstatistiksel Özellikleri

Weibull dağılımı, farklı özelliklerdeki önemli dağılımları içeren bir dağılım ailesini ifade etmektedir. Oldukça esnek ve sürekli bir yapıya sahip olan Weibull dağılımı, literatürde kabul edilmiş olasılık yoğunluk fonksiyonu tanımı ile Eşitlik (3.12)'de verildiği gibidir. Görüldüğü üzere,  $\alpha$  ve  $\beta$  değişkenleri olmak üzere iki farklı değişken üzerinden tanımlıdır. $x$

$$f(x; \alpha, \beta) = \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1} e^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha} \quad (3.12)$$

Dağılımın birikimli dağılım fonksiyonu;

$$F(x) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha\right] \quad (3.13)$$

Weibull dağılımının beklenen değeri;

$$E(X) = \beta \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)$$

Weibull dağılımının varyansı;

$$Var(X) = \beta^2 \Gamma\left(1 + \frac{2}{\alpha}\right) - \left[\beta \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)\right]^2 \text{ dır.}$$

Weibull dağılımının sıfır etrafındaki momentleri;

$$E(X^3) = \beta^3 \Gamma\left(1 + \frac{3}{\alpha}\right)$$

$$E(X^4) = \beta^4 \Gamma\left(1 + \frac{4}{\alpha}\right)$$

bu şekilde devam ederek,

$$E(X^k) = \beta^k \Gamma\left(1 + \frac{k}{\alpha}\right)$$

$k$ -inci momentini elde edilir.

Weibull dağılımı' nın aritmetik ortalama etrafındaki momentlerinin sıfır etrafındaki momentler aracılığı ile hesaplanması;

$$m_1 = E(X), m_2 = E(X^2), m_3 = E(X^3), m_4 = E(X^4)$$

olmak üzere,

$$\mu_1 = E(X) - \mu = \mu - \mu = 0$$

$$\mu_2 = m_2 - m_1^2 \text{ olmak üzere}$$

$$\mu_2 = \beta^2 \Gamma\left(1 + \frac{2}{\alpha}\right) - \left[\beta \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)\right]^2$$

$$\mu_3 = m_3 - 3m_1m_2 + 2m_1^3 \text{ olmak üzere}$$

$$\mu_3 = \beta^3 \left[ \Gamma\left(1 + \frac{3}{\alpha}\right) - 3\beta \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \Gamma\left(1 + \frac{2}{\alpha}\right) + 2\left(\Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)\right)^3 \right]$$

$$\mu_4 = m_4 - 4m_1m_3 + 6m_1^2m_2 - 3m_1^4 \text{ olmak üzere,}$$

$$\mu_4 = \beta^4 \left[ \Gamma\left(1 + \frac{4}{\alpha}\right) - 4\Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \Gamma\left(1 + \frac{3}{\alpha}\right) + 6\left(\Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)\right)^2 \Gamma\left(1 + \frac{2}{\alpha}\right) - 3\left(\Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)\right)^4 \right]$$

olarak elde edilir.

Weibull yaşam fonksiyonu,

$$S(x) = e^{-\frac{x^\alpha}{\beta}}$$

Hazard (şiddet) fonksiyonu,

$$h(x) = \frac{\alpha}{\beta} x^{\alpha-1}$$

Weibull dağılımı  $\alpha < 1$  iken azalan bozulma oranına,  $\alpha = 1$  iken sabit oranına,  $\alpha > 1$  iken artan bozulma oranına sahiptir.

### 3.6 Güç Yasası

En iyi bilinen ve en sık kullanılan homojen olmayan Poisson süreci (3.6) de verilen

$$\lambda(t) = \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta-1}, t \geq 0; \alpha, \beta > 0$$

şiddet fonksiyonuna sahip süreçtir. Bu sürece güç yasası süreci (GYS) ya da Weibull süreci denir. İlk bozulma zamanının bir Weibull dağılımına sahip olmasından dolayı bu sürece aynı zamanda Weibull süreci adı verilmiştir. Fakat daha çok tercih edilen adı GYS dir. Şiddet fonksiyonu güç yasası parametresi  $\beta > 1$  ( $\beta < 1$ ) iken artandır (azalandır) ve böylece GRP hem kötüleşmeyi hem de güvenilirlik iyileşmesini tarif edebilir. Eğer  $\beta = 1$  ise GRP HPP'ye indirgenir. Bozulmaların beklenen sayısı  $M(t) = (t/\alpha)^\beta$  bir log-log ölçeğinde  $t$  ye göre lineerdir:  $\ln M(t) = \beta \ln t - \beta \ln \alpha$ . Bu durumda bir bozulma veri kümesi uygunsu  $s_i$  bozulma zamanlarına karşı  $i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) bozulmaların birikimli sayısının grafiğinin her ikisinin logaritmik ölçekli olduğu bir koordinat sisteminde  $\beta$  eğilimli bir doğruya yakın olması akla uygun olacaktır.

GRP için iyileştirmeyi tarif ettiğinde bazı engeller ortaya çıkar. Aslında  $\beta < 1$  olduğu bir durumda GRP şiddet fonksiyonu (3.6)  $t = 0$  da gerçekçi olmayan bir şekilde sonsuzdur ve  $t$  sonsuza gittiğinde sıfıra gider. Yine de GRP tamir edilebilir teçhizatın bozulma verisi analizinde çok fazla rağbet görür, kısmen istatistiksel sonuç çıkarımı işlemlerinin basitliğine bağlıdır. Gerçekte bir bozulma kesmesi örneklemini altında ilk  $n$  tane  $s_1 < s_2 < \dots < s_n$  ardışık bozulma zamanları verildiğinde bir GRP varsayımı için olabilirlik fonksiyonu şaşırtıcı bir şekilde basittir:

$$L(\alpha, \beta) = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n \prod_{i=1}^n \left(\frac{s_i}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{s_n}{\alpha}\right)^\beta}$$

ve böylece

$$\ln L(\alpha, \beta) = n \ln \beta - n \ln \alpha + (\beta - 1) \sum_{i=1}^n \ln s_i - n(\beta - 1) \ln \alpha - \left(\frac{s_n}{\alpha}\right)^\beta \quad (3.14)$$

Bu durumda

$$\frac{\partial \ln L(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} = -\frac{n\beta}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{S_n}{\alpha}\right)^\beta,$$

$$\frac{\partial \ln L(\alpha, \beta)}{\partial \beta} = \frac{n}{\beta} + \sum_{i=1}^n \ln s_i - n \ln \alpha - \left(\frac{S_n}{\alpha}\right)^\beta \ln \left(\frac{S_n}{\alpha}\right)$$

olduğundan

$$\frac{\partial \ln L(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial \ln L(\alpha, \beta)}{\partial \beta} = 0$$

denklem sisteminin çözümüyle  $\beta$  ve  $\alpha$  parametrelerinin en çok olabilirlik tahmin edicilerinin analitik ifadeleri

$$\hat{\beta} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n-1} \ln(S_n/S_i)}, \quad \hat{\alpha} = \frac{S_n}{n^{1/\hat{\beta}}} \quad (3.15)$$

biçiminde elde edilir. Böylelikle GRP model fonksiyonunun tutarlı bir parametrik tahmin edicisi

$$\hat{\lambda}(t) = \frac{n\hat{\beta}}{S_n^{\hat{\beta}}} t^{\hat{\beta}-1}, \quad t \geq 0$$

olur.

Bir zaman kesmesi örnekleme planı altında, yani GRP önceden belirlenmiş bir  $\tau$  zamanına kadar gözlemlendiğinde  $N(\tau) = n$  alınmak üzere  $\beta$  ve  $\alpha$  parametrelerinin en çok olabilirlik tahmin edicileri

$$\hat{\beta} = \frac{n}{n \ln \tau - \sum_{i=1}^n \ln S_i}, \quad \hat{\alpha} = \frac{\tau}{n^{1/\hat{\beta}}}$$

biçiminde analitik olarak karşımıza çıkar.

NHPP ile ilgili uygulamalarda çoğunlukla karşılaşılan iki önemli şiddet fonksiyonu aşağıda verilir.

$$\lambda_1(t) = e^{\alpha+\beta t}, \quad t \geq 0; \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

$$\lambda_2(t) = \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta-1}, \quad t \geq 0; \alpha, \beta > 0.$$

$\lambda_1(t)$  şiddet fonksiyonlu homojen olmayan Poisson sürecine Cox ve Lewis (1966) modeli denilirken,  $\lambda_2(t)$  şiddet fonksiyonlu homojen olmayan Poisson sürecine Weibull (ya da güç yasası) süreci adı verilir. Weibull süreci yanlış bir adlandırmadır, çünkü burada yalnızca bu sürecin ilk bozulma zamanının dağılımı bir Weibull dağılımıdır.

$\lambda_1(t)$  şiddet fonksiyonu  $\beta > 0$  için artan ve  $\beta < 0$  için azalandır. Ayrıca  $\lambda_1(t)$  log-lineer biçimdedir.  $\lambda_2(t)$  şiddet fonksiyonu  $0 < \beta < 1$  için azalan,  $\beta > 1$  için artan ve  $\beta = 2$  ile lineer olarak artandır.

$\lambda(t)$  şiddet fonksiyonunun çok daha karmaşık formları literatürde vardır. Örneğin  $\lambda_1(t)$  ve  $\lambda_2(t)$  nin bir karması olan bir  $\lambda(t)$  şiddet fonksiyonlu homojen olmayan bir Poisson süreci Lee (1980) tarafından önerilmiş ve  $t$  ye göre polinomial terimler içeren  $\lambda_1(t)$  nin genellemeleri Maclean (1974) ve Lewis ve Shedler (1976) tarafından verilmiştir.

Lee'nin sunduğu cazip bir model olan NHPP in şiddet fonksiyonu  $\lambda_1(t)$  ve  $\lambda_2(t)$  şiddet fonksiyonlarını içerecek şekilde

$$\lambda_3(t) = \lambda \gamma t^{\gamma-1} e^{\beta t}, \quad t \geq 0; \lambda, \gamma > 0, \beta \in \mathbb{R}$$

dır.  $\gamma = 1$  alınması  $\lambda_1(t)$  şiddet fonksiyonunu verirken,  $\beta = 0$  alınması  $\lambda_2(t)$  şiddet fonksiyonunu verir.

### 3.7 Yenileme Süreci

$\{N(t), t \geq 0\}$  bir sayma sürecinde olaylar (yenilemeler) arası geçen zamanlar birbirinden bağımsız ve aynı  $F$  dağılımlı rasgele değişkenler ise  $\{N(t), t \geq 0\}$  sayma sürecine bir yenileme süreci denir.

$\{N(t), t \geq 0\}$  bir yenileme süreci olsun.  $X_n$  rasgele değişkeni  $(n - 1)$ . ve  $n$ . yenilemeler arasında geçen zamanı gösterir.  $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$  olmak üzere, her sabit  $t \geq 0$  için  $N(t) = \max\{n: S_n \leq t\}$ 'dir. Yenileme rasgele değişkeni olarak adlandırılan  $N(t)$ ,  $t$  zamanına kadar, yani  $(0, t]$  zaman aralığında gerçekleşen yenilemelerin sayısını ifade

eder. Olaylar arası geçen zamanların dağılımı üstel olduğunda yenileme süreci HPS ne dönüşecektir.

### 3.8 Genelleştirilmiş Yenileme Süreci

Genelleştirilmiş yenileme süreci (GRP) sanal yaş kavramına dayanan, tamir edilebilir sistemleri modellemek, tahmin etmek ve değerlendirmek için esnek bir stokastik modeldir. Sanal yaş fonksiyonları, bir onarım parametresi aracılığıyla incelenen sistemin gerçek yaşı üzerinde çalışır. Böylece matematiksel olarak GRP, ilgilenilen olayların meydana gelme zamanlarının modellenmesini oluşturur.

Tamir edilebilir bir sistem bir tamirden sonra olası beş durum ile sonuçlanabilir. Bu durumlar:

1. Yenisi kadar iyi (kusursuz tamir)
2. Eskisi kadar kötü (minimal tamir)
3. Eskisinden daha iyi ama yenisinden kötü (kusurlu tamir)
4. Eskisinden kötü (minimal tamirden daha kötü)

olarak verilir. Minimal Tamir ürünün performansını etkilemeyen tamirdir. Bu tamir ürünün performansını etkilemeksizin bozuk bir durumdan bir çalışma durumuna getirir.

Fakat bu model ile yapılabilen daha iyi bir tamir durumu söz konusu değildir. Böyle bir durum için model olarak geometrik süreç kullanılabilir. Tamir edilebilir sistem analizinde kullanılan RP ve NHPP gibi güncel olasılıksal modeller sırası ile ilk iki durumu ele almaktadır. Ancak onarımdan sonra kalan durumları ele alacak pratik ve doğru bir yaklaşım mevcut değildir. Son üç onarım durumunun neden fazla ilgi görmediğinin ana sebebi, matematiksel olarak sağlam ve etkili bir yaklaşım geliştirmenin zorluğu olarak görülmektedir. (Yanez vd.2002 )

Kijima ve Sumita (1986) onarım sonrası tüm durumları ele alan ve GRP olarak adlandırılan bir olasılıksal model önermişlerdir. Kaminsky ve Krivtsov (1998) bu GRP yaklaşımını genişletmiş ve belirli uygulama alanları için Monte Carlo tipi bir çözüm önermişlerdir. Kaminskiy ve Krivtsov (1998) ve Krivtsov (2020) GRP modelinin yaklaşık çözümünde dayanan bir Monte Carlo çalışmasının detaylarını anlatmışlardır.

Yanez vd.2001, GRP nin tamir edilebilir sistemlerin modellenmesinde genel bir yaklaşım sunduğunu göstermiştir ve GRP parametrelerinin tahmininde en çok olasılık ve Bayes yaklaşımlarının uygulanmasını ele almıştır.

Yanez vd.2002, GRP parametreleri için ML tahmin yöntemi geliştirmişlerdir. Bu yöntemden elde edilen sonuçlar, Kaminskiy ve Krivtsov (1998) tarafından geliştirilen GRP Monte Carlo yaklaşımı sonuçları ile karşılaştırılmıştır ve sonuçlar yakın çıkmıştır.

Langseth (2006), açık deniz güvenilirlik veri tabanına (OREDA 2002) ait tek kompresör sistemi arıza verilerini analiz etmiştir.

GRP, birçok yazar tarafından araştırılmıştır. Bakay ve Shklyayev (2020) GRP altında yatan olasılıklara ilişkin asimptotik formülleri tanıttılar ve limit teoremlerini ispatladılar. Koutsellis vd. (2019) lokomotif fren ızgaralarının beklenen arıza sayılarının çıkarımına izin veren nümerik sadeleştirmelere çalışmışlardır. Zhang vd. (2018) uçak ek güç ünitelerinde bakım aktivite etkisinin modellenmesi zorluğu ile mücadele etmek için GRP yi tanıtmışlardır. Wu ve Scarf (2017) birden fazla bileşenden oluşan seri sistemler bağlamında GRP de dahil olmak üzere bir dizi başarısızlık süreci modelleme alternatifinin performansını karşılaştırmıştır. Ferreira vd. (2015) farklı müdahale çeşitlerinin etkisini ayırt edebilen bir GRP modeli önermişlerdir. Oliveir vd. (2016), Rai ve Sharma (2017) uyum iyiliği testleri için GRP yi tartışmışlardır. Yang vd. (2016) satılan ürünlerin arıza sayısını tahmin etmek için ürün kullanım oranını dikkate alan bir GRP modeline çalışmışlardır. Cristino vd. (2020) GRP aracılığı ile ekonomik durgunlukları modellemiş ve tahmin etmişlerdir. (Firmino vd. (2019)).

Tamir edilebilen bir sistemi ele alalım. Başlangıçta yeni olan bu sistemin ömrü  $X$  rasgele değişkeni ile gösterilmek üzere  $X$  in dağılım fonksiyonu  $F$  olsun. Sistem  $t = 0$  zamanında çalışmaya başlatılsın. Bozulmanın her bir zamanında bir tamir işlemi gerçekleştirilir ve böylelikle sistemin çalışmaya devam etmesi sağlanır, burada tamir işleminin ihmal edilebilir bir sürede yapıldığı kabul edilir. Sıfır zamanından itibaren  $X_1, X_2, \dots$  ler sırasıyla sistemin ardışık çalışma sürelerini gösterebilir. Bunların pozitif değerli olduğu varsayalım.  $X_n$  ( $n - 1$ ). bozulmadan sonraki  $n$ . bozulmaya kadar geçen süredir.  $S_0 = 0$  olmak üzere  $S_n = X_1 + \dots + X_n, n = 1, 2, \dots$  ile verilen  $S_n$  rasgele değişkeninin sistemin çalışmasıyla birlikte  $n$ . bozulmaya kadar geçen zamanı temsil ettiği açıktır.  $\{S_n, n = 0, 1, \dots\}$  kısmi toplamlar sürecine karşılık gelen sayma süreci  $\{N(t), t \geq 0\}$ , yani

$$N(t) = \max\{n \geq 0: S_n \leq t\}, t \geq 0$$

olmak üzere  $N(t)$   $t$  zamanına kadar gerçekleşen bozulmaların ya da denk olarak tamirlerin sayısıdır. Bu şekilde oluşturulan  $\{N(t), t \geq 0\}$  sayma sürecine sistemin bozulma süreci adı verilir. Tamir edilebilen bu sistemin zaman içerisinde çalışmasını genel anlamda tarif eden  $\{N(t), t \geq 0\}$  bozulma süreci için tamirin türüne göre uygun bir model geliştirmek mümkündür. Eğer tamir tam, yani sistemin yenisi kadar iyi çalışması sağlanırsa  $\{N(t), t \geq 0\}$  sayma süreci yenilemeler arası geçen süreleri dağılım fonksiyonu  $F$  olan bir yenileme sürecidir. Tamirin minimal, yani sistemin bozulmadan hemen önceki haline gelmesi durumunda  $\{N(t), t \geq 0\}$  sayma süreci bu kez şiddet fonksiyonu  $\lambda(t) = r(t)$  şiddet fonksiyonuyla homojen olmayan bir Poisson sürecidir, burada  $r$   $F$  dağılımını bozulma oranı fonksiyonudur. Pratikte tam tamir varsayımı yapısal olarak basit bir bileşenli sistemler için makul olabilir. Diğer taraftan minimal tamir varsayımı her biri sistemin sahip olduğu bozulma moduna sahip birçok bileşenden oluşan sistemler için akla uygun görülebilir. Çünkü bozulan bileşenin tamiri sistemin bozulma oranını çok fazla etkilemeyecektir. Hâlbuki yalnızca birkaç zayıf (hassas) bileşenli sistemler için olduğu gibi çoğu pratik halde tamirin minimal olduğunu varsaymak akla yatkın değildir. Minimal tamir durumunun aksine böyle sistemler için tamirin bir bozulan sistemin durumunu tam olarak yeni ve bozulmadan hemen öncesi arasında bir yerdeki seviyeye getirecek olmasının düşünülmesi (hayal edilmesi) çok daha mantıklı görünür. Bu şekilde tamirin bir genel mekanizmasını (yöntemini) tarif etmek (anlatmak) için özel

bir hali olarak minimal tamir durumunu içeren bir bozulma süreci modelinin kurulması uygun olacaktır.

Başlangıçtaki yeni sistemin bozulma zamanı yukarıda verilen gösterime bağlı kalınarak  $X_1 = x_1$  olarak gözlensin. Bu durumda sistem bozulduğunda gerçek yaşı  $x_1$  dir. Fakat sistem tamir edildikten hemen sonraki gerçek yaşının sisteme yapılan müdahaleden dolayı bir  $q_1 \in [0,1]$  parametresine bağlı olarak  $q_1 x_1$  olduğu hayal edilebilir. Bu şekilde oluşturulan  $q_1 x_1$  değerine Kijima vd. (1988) tarafından sistemin birinci tamirden hemen sonraki sanal yaşı denilmiş ve  $q_1$  parametresi birinci tamirin onarım parametresi olarak adlandırılmıştır.  $q_1$  gerçekte tamirin derecesini gösterir. Dikkat edilirse  $q_1 = 0$  ve  $q_1 = 1$  iken bu tamir sırasıyla tam ve minimal tamir olur.  $n = 1,2, \dots$  için  $q_n$   $n$ . tamirin derecesini gösteren parametre olsun.  $n$ . tamirin sadece  $n$ . çalışma süresi boyunca maruz kalınan zararları ortadan kaldırdığı kabul edilsin. Böylece  $n$ . tamir  $X_n$  yaşını  $q_n X_n$  değişkenine getirir. Bundan dolayı  $V_n$   $n$ . tamirden hemen sonraki sistemin sanal yaşı olarak tanımlandığında

$$V_n = V_{n-1} + q_n X_n, \quad n = 1,2, \dots$$

olur. Burada  $V_0 = 0$  alınır, çünkü yeni sistemlerin 0 sanal yaşına sahip olduğu kabul edilir. Ayrıca not edelim ki  $S_n$   $n$ . bozulmadan hemen sonraki sistemin gerçek yaşıdır.  $n$ . tamirden hemen sonraki sistemin sanal yaşı  $V_n = y$  iken  $n$ . tamirden  $(n + 1)$ . bozulmaya kadar geçen  $X_{n+1}$  rasgele süresi

$$P(X_{n+1} \leq x | V_n = y) = \frac{F(x+y) - F(y)}{1 - F(y)}, \quad x \geq 0 \quad (3.16)$$

dağılımına sahiptir, çünkü

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} \leq x | V_n = y) &= P(X - y \leq x | X > y) \\ &= \frac{P(y < X \leq x + y)}{P(X > y)} \\ &= \frac{F(x + y) - F(y)}{1 - F(y)}. \end{aligned}$$

Burada  $X$  in başlangıçtaki yeni sistemin ömrünü gösteren rasgele değişken ve  $F$  nin onun dağılım fonksiyonu olduğunu hatırlatalım.

Şimdi kabul edelim ki her bir tamirin derecesi eşit bir  $q_n = q$  olsun. Bu durumda sistemin sanal yaş süreci

$$V_n = qS_n = q \sum_{k=1}^n X_k, \quad n = 0, 1, \dots$$

biçiminde olur.  $y \geq 0$  olmak üzere  $Z_y$  (3.16) ile verilen koşullu dağılıma karşılık gelen bir rasgele değişken olsun. Yeni bir sistem  $V_0 = 0$  sanal yaşına sahip olduğundan ilk bozulma zamanı  $Z_0$  ile aynı dağılıma sahiptir, yani  $X_1 \stackrel{d}{=} Z_0 \sim F$ . Birinci tamirden sonra sistemin sanal yaşı  $V_1 = qX_1$  olur. İkinci çalışma süresi olan  $X_2$  rasgele değişkeni  $Z_{V_1}$  ile aynı dağılımlıdır,  $X_2 \stackrel{d}{=} Z_{V_1}$  ve  $V_2 = qS_2$ . Genelde  $n$ . çalışma süresi  $X_n$  için  $X_n \stackrel{d}{=} Z_{V_{n-1}}$  ve  $V_n = qS_n$ . O halde  $X_1 \sim F$  ve  $n = 2, 3, \dots$  için  $X_1 = x_1, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}$  gözlemlendiğinde  $X_n$  nin dağılım fonksiyonu açık olarak

$$F_n(x) = \frac{F(x+q(x_1+\dots+x_{n-1})) - F(q(x_1+\dots+x_{n-1}))}{1 - F(q(x_1+\dots+x_{n-1}))}, \quad x \geq 0 \quad (3.17)$$

olur.

Her bir bozulma üzerine aynı  $q$  dereceli genel bir tamir tipi ve sanal yaş düşüncesiyle oluşturulan yukarıdaki bozulma süreci modelinden hareketle bir genelleştirilmiş yenileme süreci aşağıdaki gibi tanımlanır.

**Tanım 3.7.1**  $(X_n)_{n=1,2,\dots}$  rasgele değişkenler dizisi bir sistemin bozulmalar arası geçen ardışık sürelerini gösterebilir.  $X_1$  bir  $F$  dağılım fonksiyonuna sahip olmak üzere  $n = 2, 3, \dots$  için  $X_n$  nin dağılım fonksiyonu  $F_n$  bir  $q \in [0, \infty)$  sayısı ile (3.17) denkleminde formunda ise bu dizi üzerine kurulu  $\{N(t), t \geq 0\}$  sayma sürecine bir genelleştirilmiş yenileme süreci (GRP) denir ve  $q$  sayısı onarım parametresi olarak adlandırılır.

- $q = 0$  değerinin varsayılması sonucu Yenileme Sürecidir. (yeni kadar iyi)
- $q = 1$  varsayımı ise homojen olmayan bir sürece yol açar. (minimal tamir )

- $0 < q < 1$  aralığına düşen  $q$  değerleri, sistemin durumunun eskisinden daha iyi, yenisinden daha kötü olduğu onarım sonrası durumu temsil eder. (kusurlu tamir)
- $q > 1$  olduğu durumlarda sistem eskisinden daha kötü durumdadır. (minimal tamirden daha kötü)

Bu durumda  $q$ , onarımın etkinliğini ve kalitesini temsil eden bir indeks olarak görülebilir

Tanım göz önüne alındığında tamir edilebilen bir sistem için (3.17) denklemindeki dağılımlarla tarif edilen  $\{N(t), t \geq 0\}$  bozulma süreci modeli  $q$  onarım parametresiyle özel bir genelleştirilmiş yenileme sürecidir. Çünkü burada  $F$   $X_1$  rasgele değişkenin dağılım fonksiyonu ve  $q \in [0,1]$  olmak üzere

$$F(x|y) = \frac{F(x + qy) - F(qy)}{1 - F(qy)}, x \geq 0, y \geq 0$$

dır. Herhangi bir sabit  $y$  için  $F(x|y)$  bir dağılım fonksiyonudur.

Şimdi  $q$  onarım parametrelili bir GRP ile ilgili  $\{V_n, n = 0,1, \dots\}$  sanal yaş sürecini ele alalım.  $V_0 = 0, V_n = qS_n, n = 1,2, \dots$  olduğunu biliyoruz.  $\{V_n, n = 0,1, \dots\}$  sürecinin zamanda homojen bir Markov süreci olduğunu görmek kolaydır. Böylece  $\{S_n, n = 0,1, \dots\}$  süreci de zamanda homojen bir Markov süreci olur. Eğer  $q \leq 1$  ise  $V_n \leq S_n$  olur, bunun anlamı tamirin sistemi yenilemesidir (gençleştirmesidir). Eğer  $q \geq 1$  ise  $V_n \geq S_n$  olduğundan sistem eskisinden daha kötü durumdadır ve tamir sisteme daha çok zarar verir. Bundan dolayı gereksiz durumlardan kaçınmak için  $0 \leq q \leq 1$  alınır. Bu aralığa düşen  $q$  değerleri, sistemin durumunun eskisinden daha iyi, yenisinden daha kötü olduğu tamir (onarım) sonrası durumu temsil eder.  $q = 1$  iken  $V_n = S_n$  olur. Bu durum bir minimal tamir yapıldığını söyler ve genelleştirilmiş yenileme süreci homojen olmayan bir Poisson sürecidir. Aynı zamanda  $q = 0$  iken  $V_n = 0$  olduğundan sistem her bir tamir ile yenilenir ve sonuçta genelleştirilmiş yenileme süreci alışılmış anlamda bir yenileme süreci olur.  $S_n - V_n$  farkının yenileştirmenin derecesini temsil ettiği düşünülebilir.

$X_1 = x_1, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}$  gözlemlendiğinde

$$X_n = X - q(x_1 + \dots + x_{n-1}) | X > q(x_1 + \dots + x_{n-1}).$$

Bu amaç için Kijima vd. (1988)'in sanal yaş kavramını sunarak tanımladığı bir genel tamir aracılığı ile çalışması sürdürülen bir tamir edilebilen sistemin zamanda çalışmasını açıklayacak olan  $\{N(t), t \geq 0\}$  bozulma sürecini tarif etmek için geliştirilmiş yenileme süreci olarak adlandırılan Kijima and Sumita (1986) bir sayma süreci modeli aşağıdaki gibi ortaya çıkartılmıştır (tanımlanmıştır).

Bozulmalar arası sürelerin bu dağılımlarıyla oluşturulan bir sayma sürecine bir geliştirilmiş yenileme süreci adı verilir. Bu sürecin biçimsel olarak tanımı aşağıdadır.



#### 4.WEIBULL GENELLEŞTİRİLMİŞ YENİLEME SÜRECİNDE PARAMETRE TAHMİNİ

Bu bölümde ilk olarak Weibull Genelleştirilmiş Yenileme Süreci (WGRP) tarif edilecek ve sonrasında bu sürecin bilinmeyen parametrelerinin tahmin edicilerinin performansları küçük örneklem büyüklüğüne bir simülasyon çalışması ile değerlendirilecektir.

##### 4.1 Weibull Genelleştirilmiş Yenileme Süreci

$\{N(t), t \geq 0\}$  ilk olayın gerçekleşme zamanı  $\alpha$  şekil ve  $\beta$  ölçek parametrelili Weibull olan,  $q$  onarım parametresi ile bir GRP olsun. Bölüm (3.5) den bilindiği üzere  $\alpha$  şekil ve  $\beta$  ölçek parametrelili Weibull dağılımının  $F$  dağılım fonksiyonu ve  $f$  olasılık fonksiyonu aşağıda verildiği gibidir.

$X_1$ ,  $\alpha$  ve  $\beta$  parametrelili Weibull dağılımına sahip olsun

$$F(x) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha\right], x > 0; \alpha, \beta > 0$$
$$f(x) = \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1} e^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha}, \alpha, \beta > 0$$

dır. Ayrıca bu dağılımın  $k$ .momenti  $X_1 \sim Weibull(\alpha, \beta)$  ile

$$E(X_1^k) = \beta^k \Gamma\left(1 + \frac{k}{\alpha}\right)$$

Burada  $\Gamma$  Gamma fonksiyonudur.

$\{N(t), t \geq 0\}$   $q$  onarım parametresi ile bir WGRP olmak üzere bu sürece göre gerçekleşen olaylar arası geçen  $X_1, X_2, \dots$  rasgele süreleri ve  $n = 2, 3, \dots$  için (3.15)

$$F_{X_1}(x) = F(x)$$

$$F_{X_n|X_1, \dots, X_{n-1}}(x_n|x_1, \dots, x_{n-1}) = \frac{1 - e^{-\left(\frac{qx_1 + \dots + qx_{n-1} + x_n}{\beta}\right)^\alpha} - 1 + e^{-\left(\frac{qx_1 + \dots + qx_{n-1}}{\beta}\right)^\alpha}}{1 - e^{-\left(\frac{qx_1 + \dots + qx_{n-1}}{\beta}\right)^\alpha}}$$

olarak elde edilir. Ayrıca

$$f_{X_n | \dots, X_{n-1}}(x_n | x_1, \dots, x_{n-1}) = \frac{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) \left(\frac{qx_1 + \dots + qx_{n-1} + x_n}{\beta}\right)^{\alpha-1} e^{-\left(\frac{qx_1 + \dots + qx_{n-1} + x_n}{\beta}\right)^\alpha}}{1 - e^{-\left(\frac{qx_1 + \dots + qx_{n-1}}{\beta}\right)^\alpha}}$$

dır.

## 4.2 Weibull Genelleştirilmiş Yenileme Süreci için İstatistiksel Çıkarım

$\{N(t), t \geq 0\}$  bir  $q$  onarım parametresiyle bir WGRP olan şimdi bu süreçten  $n$  bilinen bir sabit olmak üzere  $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  gerçekleşişini ele alalım ve bu gözlemlere bağlı olarak  $q$  onarım parametresi ile birlikte Weibull dağılımının bilinmeyen  $\alpha$  ve  $\beta$  parametrelerinin en çok olabilirlik yöntemiyle tahmin edilmesi problemini ele alalım.  $X_1, X_2, \dots, X_n$  bağımsız ve aynı dağılımlı rasgele değişkenler olmamakla birlikte GRP varsayımından  $n = 2, 3, \dots$  için

$$f_{X_n | X_1, \dots, X_{n-1}}(x_n | x_1, \dots, x_{n-1}) = \frac{f(qx_1 + \dots + qx_{n-1} + x_n)}{1 - F(qx_1 + \dots + qx_{n-1})}$$

olduğunu biliyoruz. Bu durumda yukarıdaki denklemin kullanılmasıyla birlikte olabilirlik fonksiyonu,

$$L(\alpha, \beta, q) = f_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$= f_{X_1}(x_1) f_{X_2 | X_1}(x_2 | x_1) f_{X_3 | X_1 X_2}(x_3 | x_1, x_2) \dots f_{X_n | X_1, \dots, X_{n-1}}(x_n | x_1, \dots, x_{n-1})$$

$$= f(x_1) \frac{f(qx_1 + qx_2)}{1 - F(qx_1)} \frac{f(qx_1 + qx_2 + x_3)}{1 - F(qx_1 + qx_2)} \dots \frac{f(qx_1 + \dots + qx_{n-1} + x_n)}{1 - F(qx_1 + \dots + qx_{n-1})}$$

$$= \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{x_1}{\beta}\right)^{\alpha-1} e^{-\left(\frac{x_1}{\beta}\right)^\alpha} \prod_{k=2}^n \left(\frac{\alpha}{\beta}\right) \left(x_k + q \sum_{i=1}^{k-1} x_i\right)^{\alpha-1} e^{-\left(\frac{qx_k + \sum_{i=1}^{k-1} qx_i}{\beta}\right)^\alpha}$$

(4.2)

olarak bulunur. Buradan log-olabilirlik fonksiyonu  $k$

$$\log L(\alpha, \beta, q) = \log f_{x_1, x_2, \dots, x_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$= (\ln(\alpha) - \ln(\beta)) + ((\alpha - 1)(\ln(x_1) - \ln(\beta))) - \left(\frac{x_1}{\beta}\right)^\alpha \quad (4.3)$$

$$+ (n - 1) * (\ln(\alpha) - \alpha \ln(\beta))$$

$$+ \sum_{k=2}^n \left( (\alpha - 1) \ln(x_k + q \sum_{i=1}^{k-1} x_i) + \left(\frac{q \sum_{i=1}^{k-1} x_i}{\beta}\right)^\alpha - \left(\frac{x_k + q \sum_{i=1}^{k-1} x_i}{\beta}\right)^\alpha \right)$$

olarak elde edilir.

Log olabilirlik fonksiyonunun  $\alpha, \beta, q$  ya göre 1.türevlerinin alınıp sifira eşitlenmesi ile aşağıda verilen denklemler elde edilir.

$$\frac{\partial[\ln(L)]}{\partial \beta} = \frac{\alpha}{\beta^{\alpha+1}} \left[ \sum_{k=2}^n [(x_k + q \sum_{i=1}^{k-1} x_i)^\alpha - (q \sum_{i=1}^{k-1} x_i)^\alpha] + \frac{\alpha}{\beta} \left[ \left(\frac{x_1}{\beta}\right)^\alpha - (n) \right] \right] = 0 \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial[\ln(L)]}{\partial \beta} = \frac{\alpha}{\beta^{\alpha+1}} \left[ \sum_{k=2}^n \left( x_k + q \sum_{i=1}^{k-1} x_i \right)^\alpha - \left( q \sum_{i=1}^{k-1} x_i \right)^\alpha \right]$$

$$\frac{\alpha}{\beta} \left[ \left(\frac{x_1}{\beta}\right)^\alpha - n \right] = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial[\ln(L)]}{\partial \alpha} &= \left[ \frac{n}{\alpha} + \ln(x_1) - (n) \ln(\beta) - \left(\frac{x_1}{\beta}\right)^\alpha (\ln(x_1) - \ln(\beta)) \right] \\ &+ \sum_{k=2}^n \left[ \ln(x_k + q \sum_{i=1}^{k-1} x_i) - \left(\frac{x_k + q \sum_{i=1}^{k-1} x_i}{\beta}\right)^\alpha \ln\left(\frac{x_k + q \sum_{i=1}^{k-1} x_i}{\beta}\right) \right. \\ &\left. + \left(\frac{q \sum_{i=1}^{k-1} x_i}{\beta}\right)^\alpha \ln\left(\frac{\sum_{i=1}^{k-1} x_i}{\beta}\right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial[\ln(L)]}{\partial q} &= (\alpha - 1) \sum_{k=2}^n \left( \frac{\sum_{i=1}^{k-1} x_i}{x_k + q(\sum_{i=1}^{k-1} x_i)} \right) \\
&+ \left( \frac{\alpha q^{\alpha-1}}{\beta^\alpha} \right) (\sum_{k=2}^n (\sum_{i=1}^{k-1} x_i)^\alpha) \\
&- \left( \frac{\alpha}{\beta^\alpha} \right) \sum_{k=2}^n \left[ \left( (x_k + q(\sum_{i=1}^{k-1} x_i)) \right)^{(\alpha-1)} (\sum_{i=1}^{k-1} x_i) \right] = 0 \quad (4.6)
\end{aligned}$$

Burada 3 bilinmeyenli  $\alpha$ ,  $\beta$  ve  $q$  ya göre lineer olmayan bir denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminin analitik çözümü yoktur. Tahminler optimizasyon yöntemi ile yaklaşık olarak elde edilebilir. Fakat  $q = 0$  durumunda  $\hat{\beta}$  kolaylıkla bulunuyorken  $\hat{\alpha}$  ise Newton Raphson gibi bir yöntemle lineer olmayan denklemden çözülebilir.  $q = 1$  olduğu biliniirse bu durumda  $\alpha$  ve  $\beta$  nın en çok olabilirlik tahminleri kolaylıkla hesaplanabilir.

$q = 1$  için,

$$\frac{\partial[\ln(L)]}{\partial \beta} = \frac{\alpha}{\beta^{\alpha+1}} \left[ \sum_{k=2}^n \left[ (x_k + \sum_{i=1}^{k-1} x_i)^\alpha - (\sum_{i=1}^{k-1} x_i)^\alpha \right] + \frac{\alpha}{\beta} \left[ \left( \frac{x_1}{\beta} \right)^\alpha - (n) \right] \right] = 0$$

dır. Buradan (4.7) eşitliği elde edilir.

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha}{\beta^{\alpha+1}} \left[ \sum_{k=2}^n \left[ (x_k + \sum_{i=1}^{k-1} x_i)^\alpha - (\sum_{i=1}^{k-1} x_i)^\alpha \right] + \frac{\alpha}{\beta^{\alpha+1}} [(x_1)^\alpha] \right] &= \frac{\alpha}{\beta} n \\
\frac{\alpha}{\beta^{\alpha+1}} \left[ \sum_{k=2}^n [(S_k)^\alpha + \sum_{i=1}^{k-1} (S_{k-1})^\alpha] \right] + \frac{\alpha}{\beta^{\alpha+1}} [(x_1)^\alpha] &= \frac{\alpha}{\beta} n
\end{aligned} \quad (4.7)$$

(4.7) eşitliğinin çözülmesi ile sonuç olarak  $\beta$  için ML tahmin edicisi  $\hat{\beta}$

$$\hat{\beta} = \left( \frac{\sum_{k=1}^n [S_k]^\alpha - \sum_{k=2}^n [S_{k-1}]^\alpha}{n} \right)^{1/\alpha} \quad (4.8)$$

$$\hat{\beta} = \left(\frac{S_k^\alpha}{n}\right)^{1/\alpha} \quad (4.9)$$

olarak elde edilir.  $q = 1$  için,

$$\begin{aligned} \frac{\partial[\ln(L)]}{\partial\alpha} &= \left[ \frac{(n)}{\alpha} + \ln(x_1) - (n) \ln(\beta) - \left(\frac{x_1}{\beta}\right)^\alpha \ln\left(\frac{x_1}{\beta}\right) \right] + \sum_{k=2}^n \left[ \ln(x_k + \sum_{i=1}^{k-1} x_i) \right] \\ &\quad + \sum_{k=2}^n \ln(x_k + \sum_{i=1}^{k-1} x_i) - \left(\frac{x_k + \sum_{i=1}^{k-1} x_i}{\beta}\right)^\alpha \ln\left(\frac{x_k + \sum_{i=1}^{k-1} x_i}{\beta}\right) \\ &\quad + \left(\frac{\sum_{i=1}^{k-1} x_i}{\beta}\right)^\alpha \ln\left(\frac{\sum_{i=1}^{k-1} x_i}{\beta}\right) = 0 \end{aligned} \quad (4.10)$$

dır.

(4.10) eşitliğinin çözülmesi ile

$$\left[ \sum_{k=1}^n \ln(S_k) \right] - \left( \frac{(S_n)^\alpha}{\beta^\alpha} (\ln(S_n) - \ln(\beta)) \right) + \frac{n}{\alpha} - n \ln(\beta) = 0 \quad (4.11)$$

eşitliği elde edilir.

$\hat{\beta} = \left(\frac{(S_k)^\alpha}{n}\right)^{1/\alpha}$  (4.9) ifadesinin, (4.11) eşitliğinde yerine yazılmasıyla (4.12) eşitliği elde edilir.

$$\left[ \sum_{k=1}^n \ln(S_k) \right] - \left( \frac{(S_n)^\alpha}{\frac{(S_n)^\alpha}{n}} (\ln(S_n) - \ln(\beta)) \right) + \frac{n}{\alpha} - n \ln(\beta) = 0 \quad (4.12)$$

Sonuç olarak  $\alpha$  için ML tahmin edicisi  $\hat{\alpha}$

$$\hat{\alpha} = \left( \frac{n}{\sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{S_n}{S_k}\right)} \right) \quad (4.13)$$

olarak bulunur.

$$q = 0 \text{ için } \hat{\beta} = (\sum_{k=1}^n (X_k)^\alpha) / n$$

olarak elde edilir .  $\hat{\beta}$  nın (4.10) eşitliğinde yerine yazılmasıyla ,  $\hat{\alpha}$  elde edilir.

$q = 0, 1$  için,  $q, \alpha, \beta$  parametreleri analitik olarak elde edilebilmektedir.  $0 < q < 1$  için ise (4.4), (4.5) ve (4.6) lineer olmayan denklem sistemleri analitik olarak çözülememektedir. Bu nedenle, sayısal çözümü için Mathematica yazılımında yer alan NMaximize fonksiyonu kullanılarak bir simülasyon çalışması gerçekleştirilmiştir. İlgili çalışma bir sonraki bölümde anlatılmaktadır.



## 5. SİMÜLASYON ÇALIŞMASI

Parametreleri bilinen bir WGRP modelinden bir  $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  veri kümesi aşağıdaki biçimde simüle edilebilir.

$X_1 \sim Weibull(\alpha, \beta)$  olduğundan olasılık integral dönüşümü yardımıyla  $F(X_1) \sim U(0,1)$  olup

$$X_1 = F^{-1}(U) = \beta(-\ln(1 - U))^{\frac{1}{\alpha}}$$

olur. Burada  $U(0,1)$  olur. Dahası

$$P(S_n \leq x | S_{n-1} = y) = \frac{F(x - py) - F(qy)}{1 - F(qy)}, \quad 0 < y \leq x; \quad p = 1 - q$$

olduğundan yine olasılık integral dönüşümü yardımıyla  $y = S_{n-1}$  olmak üzere

$$\frac{F(S_n - py) - F(qy)}{1 - F(qy)} = 1 - U$$

yazılabilir. O halde

$$\begin{aligned} S_n &= F^{-1}[(1 - F(qy)) (1 - U) + F(qy)] + py \\ &= F^{-1}[1 - U(1 - F(qS_{n-1}))] + S_{n-1} - q(S_{n-1}) \end{aligned}$$

olup

$$X_n = F^{-1}[1 - U(1 - F(qy))] - q(S_{n-1}), \quad n = 2, 3, \dots$$

$$= \beta \left( -\ln \left( U e^{-\left( \frac{q(X_1 + \dots + X_{n-1})}{\beta} \right)^\alpha} \right) \right)^{\frac{1}{\alpha}} - q(X_1 + \dots + X_{n-1}).$$

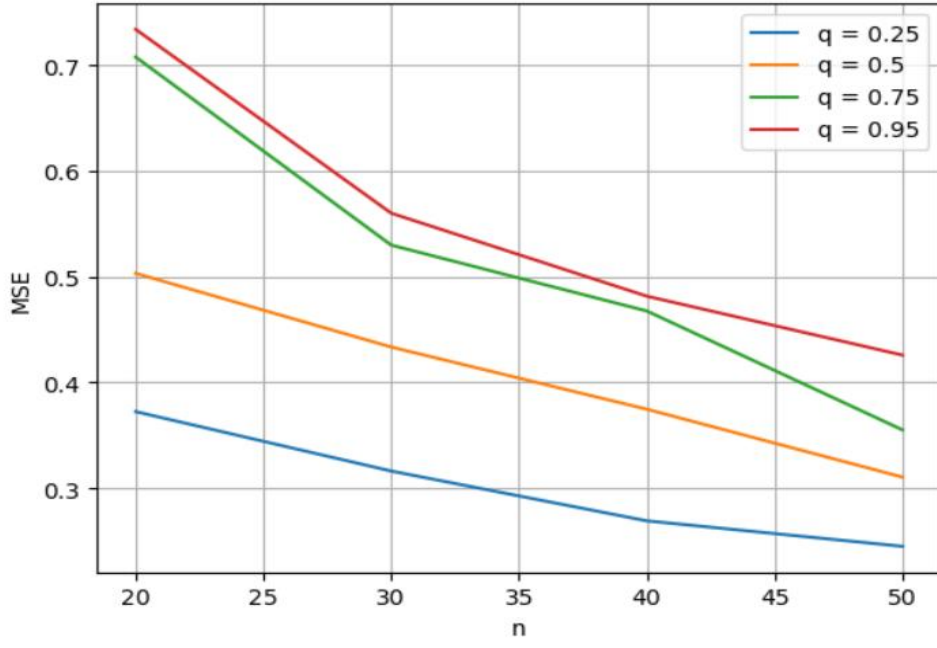
Simülasyon çalışması ile tahmin edicilerin küçük örneklem özelliklerini inceleyebilmek için  $n = 20,30,40,50$  alınmıştır. Simülasyon sayısı 1000 olarak belirlenmiştir. Weibull dağılımı için parametre değerleri  $\alpha = 1,1.5$   $\beta = 1,1.5$ ,  $q$  parametre değeri ise,  $0 < q < 1$  için,  $q = 0.25,0.50,0.75,0.95$  olarak seçilmiştir. Model parametresi  $q$ , dağılım parametreleri  $\alpha, \beta$  için tahmini değer, yan ve HKO değerleri elde edilmiştir. İlgili değerler, Çizelge 5.1 ve 5.2 de verilmiştir.

Çizelge 5.1  $\alpha = 1, \beta = 1$  için simülasyon sonucu elde edilen değerler

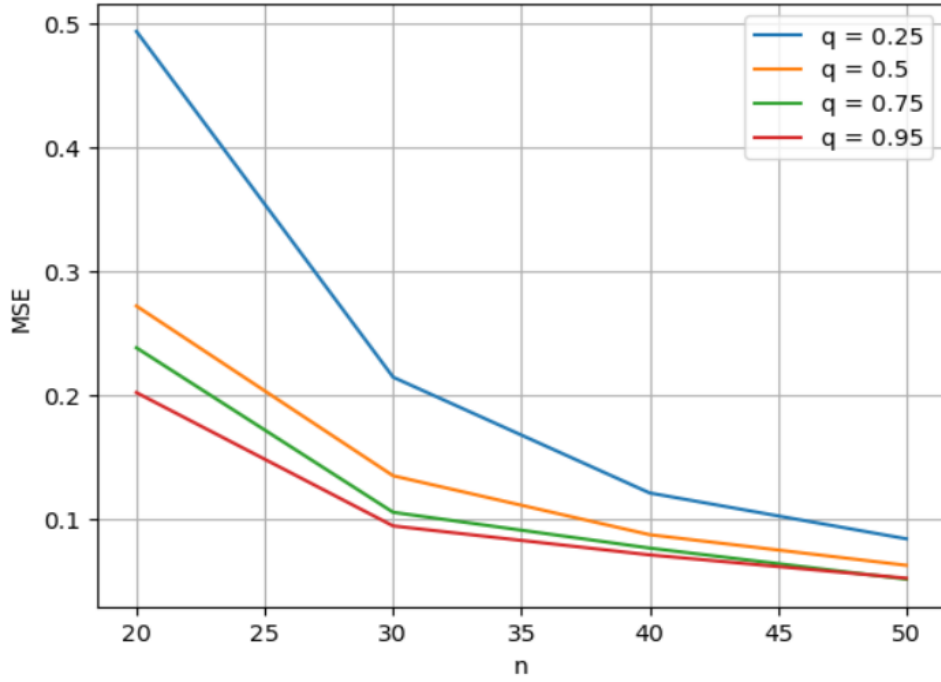
$q$	$n$	$\hat{\alpha}$			$\hat{\beta}$			$\hat{q}$		
		Mean	Bias	MSE	Mean	Bias	MSE	Mean	Bias	MSE
0.25	20	1.3523	0.3523	0.6885	1.2322	0.2322	0.2358	0.2315	-0.0184	0.0042
	30	1.2615	0.2615	0.4935	1.1283	0.1283	0.1062	0.2367	-0.0132	0.0035
	40	1.2351	0.2351	0.4228	1.1040	0.1040	0.0688	0.2418	-0.0081	0.0029
	50	1.2070	0.2070	0.3576	1.0732	0.0732	0.0439	0.2474	-0.0025	0.0024
0.50	20	1.3523	0.3523	0.7669	1.1477	0.1477	0.1299	0.4767	-0.0233	0.0046
	30	1.2996	0.2996	0.6493	1.0901	0.0901	0.0678	0.4880	-0.0119	0.0036
	40	1.2426	0.2426	0.5585	1.0667	0.0667	0.0484	0.4928	-0.0071	0.0030
	50	1.2010	0.2010	0.4537	1.0478	0.0478	0.03381	0.4971	-0.0028	0.0024
0.75	20	1.4484	0.4484	1.0265	1.1515	0.1515	0.1177	0.7275	-0.0225	0.0046
	30	1.3514	0.3514	0.7608	1.0906	0.0906	0.0538	0.7331	-0.0169	0.0038
	40	1.2985	0.2985	0.6645	1.0627	0.0627	0.0395	0.7440	-0.0059	0.0030
	50	1.2181	0.2181	0.5092	1.0392	0.0392	0.0255	0.7476	-0.0024	0.0024
0.95	20	1.4260	0.4260	0.9905	1.1212	0.1212	0.0837	0.9250	-0.0249	0.0047
	30	1.3465	0.3465	0.9027	1.0732	0.0732	0.0527	0.9352	-0.0147	0.0037
	40	1.3125	0.3125	0.7241	1.0598	0.0598	0.0376	0.9381	-0.0118	0.0031
	50	1.2691	0.2691	0.5974	1.0476	0.0476	0.0271	0.9417	-0.0082	0.0030

Çizelge 5.2  $\alpha = 1.5$ ,  $\beta = 1.5$  için simülasyon sonucu elde edilen değerler

$q$	$n$	$\hat{\alpha}$			$\hat{\beta}$			$\hat{q}$		
		Mean	Bias	MSE	Mean	Bias	MSE	Mean	Bias	MSE
0.25	20	1.6175	0.2175	0.3725	1.7684	0.3684	0.4932	0.2222	-0.0277	0.0043
	30	1.6046	0.2046	0.3163	1.6176	0.2176	0.2141	0.2260	-0.0239	0.0036
	40	1.5770	0.1770	0.2692	1.5548	0.1548	0.1206	0.2316	-0.0183	0.0029
	50	1.5436	0.1436	0.2451	1.5143	0.1143	0.0836	0.2329	-0.0170	0.0029
0.50	20	1.6445	0.2445	0.5033	1.6366	0.2366	0.2715	0.4448	-0.0552	0.0043
	30	1.6061	0.2061	0.4336	1.5442	0.1442	0.1345	0.4525	-0.0474	0.0032
	40	1.5896	0.1896	0.3748	1.5097	0.1097	0.0869	0.4605	-0.0394	0.0023
	50	1.5151	0.1151	0.3106	1.4642	0.0642	0.0622	0.4684	-0.0316	0.0015
0.75	20	1.7370	0.3370	0.7079	1.6193	0.2193	0.2378	0.6939	-0.0561	0.0044
	30	1.6402	0.2402	0.5300	1.5242	0.1242	0.1050	0.7006	-0.0493	0.0034
	40	1.5999	0.1999	0.4677	1.4851	0.0851	0.0761	0.7104	-0.0396	0.0023
	50	1.5529	0.1529	0.3553	1.4613	0.0613	0.0510	0.7155	-0.0344	0.0017
0.95	20	1.7080	0.3080	0.7341	1.5834	0.1834	0.2016	0.8841	-0.0659	0.0059
	30	1.6074	0.2074	0.5602	1.4962	0.0961	0.0940	0.8934	-0.0565	0.0045
	40	1.6030	0.2030	0.4817	1.4824	0.0824	0.0706	0.9007	-0.0492	0.0034
	50	1.5917	0.1917	0.4260	1.4665	0.0665	0.0518	0.9111	-0.0388	0.0023



Şekil 5.1  $\alpha = 1.5$  için q onarım parametresi karşısında MSE değerleri üzerindeki değişim



Şekil 5.2  $\beta = 1.5$  için q onarım parametresi karşısında MSE değerleri üzerindeki değişim

Çizelge 5.1 ve 5.2,  $\alpha, \beta, q$  parametrelerinin tahmin edicilerinin yan ve HKO değerlerinin,  $n$  değerinin artması ile küçüldüğünü göstermektedir. Bu beklenen bir sonuçtur. ML tahmin edicileri her zaman asimptotik olarak yansızdır ve tutarlıdır. Simülasyon çalışması ile WGRP için bu özelliğin desteklenmiş olduğu görülmektedir.

Çalışmada tahmin edicilerin küçük örneklem özellikleri incelendiğinde Şekil 5.1 ve 5.2’de örneklem hacmi  $n = 20,30,40,50$  için değişen  $q$  onarım parametresi karşısında tahmin ediciler  $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$  ve  $\hat{q}$  ya ait MSE değerlerinin azaldığı görülmektedir.



## 6. GERÇEK VERİ UYGULAMASI

Bu bölümde, Ascher ve Feingold (1984), ve Langseth ve Lindqvist (2006) çalışmalarında verilen iki veri seti ele alınacaktır. Veri setleri sırası ile itme dizel motor arıza verileri ve açık deniz güvenilirlik veri tabanına (OREDA) ait tek kompresör sistemi arıza verileridir. Çalışmada,  $\alpha, \beta$  dağılım ve  $q$  model parametrelerinin tahmin edicilerinin değerleri Mathematica yazılımı Nmaximize fonksiyonu kullanılarak elde edilmiştir.

Veri kümelerinin WGRP modeline uygunluğunu ve aynı zamanda başka modeller ile karşılaştırılmasının yapılması için

$$\text{MSE} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k - \hat{X}_k)^2$$

ve

$$\text{MPE} = \max_{1 \leq k \leq n} \frac{\{|S_k - \hat{S}_k|\}}{S_k}$$

biçiminde tanımlanan ölçütler göz önüne alınabilir, burada  $\hat{X}_k, X_k$  gözlemine karşılık gelen kestirim değeri ve

$$\hat{S}_k = \sum_{i=1}^k \hat{X}_i.$$

WGRP modeli için  $\hat{S}_k$  kestirim değeri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$P(S_{n+1} \leq x \mid S_n = y) = \begin{cases} \frac{F(x - py) - F(qy)}{1 - F(qy)} & , \quad x \geq y ; p = 1 - q \\ 0 & , \quad x < y \end{cases}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} E(S_{n+1} \mid S_n = y) &= \int_0^{\infty} [1 - P(S_{n+1} \leq x \mid S_n = y)] dx \\ &= y + \frac{1}{1 - F(qy)} \int_y^{\infty} (1 - F(x - py)) dx \end{aligned}$$

olur.

Bu durumda

$$F(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha}, \quad x \geq 0$$

olduğundan  $x - py = z$  değişken değiştirmesi ile

$$\int_y^\infty (1 - F(x - py)) dx = \int_{qy}^\infty (1 - F(z)) dz = \int_{qy}^\infty e^{-\left(\frac{z}{\beta}\right)^\alpha} dz$$

olup son integralde  $t = \left(\frac{z}{\beta}\right)^\alpha$  değişken değiştirmesi yapılmasıyla da

$$\begin{aligned} \int_y^\infty (1 - F(x - py)) dx &= \frac{\beta}{\alpha} \int_{(qy/\beta)^\alpha}^\infty t^{\frac{1}{\alpha}-1} e^{-t} dt \\ &= \frac{\beta}{\alpha} \left( \Gamma(1/\alpha) - \int_0^{(qy/\beta)^\alpha} t^{\frac{1}{\alpha}-1} e^{-t} dt \right) \end{aligned}$$

bulunur. Böylece tam olmayan gama fonksiyonunun

$$\gamma(a, x) = \int_0^x y^{a-1} e^{-y} dy, \quad a > 0, \quad x \geq 0$$

tanımı göz önüne alındığında

$$E(S_{n+1} | S_n = y) = y + \frac{1}{e^{-\left(\frac{qy}{\beta}\right)^\alpha}} \frac{\beta}{\alpha} \left( \Gamma(1/\alpha) - \gamma(1/\alpha, (qy/\beta)^\alpha) \right)$$

elde edilir. O halde  $S_{k+1}$  rasgele değişkeninin WGRP modeli altındaki kestirimi  $k$  ye göre ardışık olarak

$$\hat{S}_{k+1} = \hat{S}_k + \frac{1}{e^{-\left(\frac{\hat{q}\hat{S}_k}{\hat{\beta}}\right)^\alpha}} \frac{\hat{\beta}}{\hat{\alpha}} \left( \Gamma\left(\frac{1}{\hat{\alpha}}\right) - \gamma\left(\frac{1}{\hat{\alpha}}, \left(\frac{\hat{q}\hat{S}_k}{\hat{\beta}}\right)^\alpha\right) \right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

biçiminde karşımıza çıkmış olur, burada  $\hat{S}_0 = 0$ . Sonuçta  $X_k$  nın WGRP modeli altındaki kestirimi

$$\hat{X}_k = \hat{S}_{k+1} - \hat{S}_k, k = 0, 1, \dots, n$$

olur. Burada hemen

$$\hat{X}_1 = \frac{\hat{\beta}}{\hat{\alpha}} \Gamma\left(\frac{1}{\hat{\alpha}}\right)$$

olduğunu belirtelim.

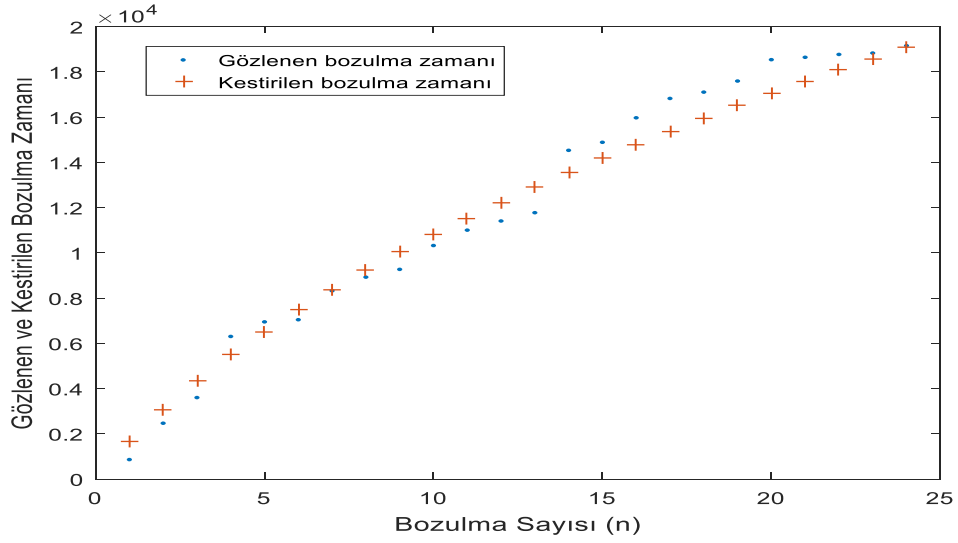
## 6.1 Ascher Dizel Motor Arıza Verisi

Bu veri seti U.S.S. Halfbeak No.3 ana motora ilişkin arıza verilerini içermektedir. Veriler 24 adet gözlemden oluşmaktadır ve arazılar arası geçen zamanı göstermektedir

Çizelge 6.1 Ascher Dizel Motor Arıza verisi için sonuçlar

ML		
$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{q}$
2.0546	1873.32	0.1575

Bu tez çalışmasında, Ascher dizel motor arıza verisi için  $\alpha, \beta$  ve  $q$  parametrelerinin ML tahminleri elde edilmiştir ve sonuçlar Çizelge 6.1 de verilmiştir. Şekil 6.1’de görüldüğü üzere Weibull genelleştirilmiş yenileme süreci Ascher dizel motor arıza verisine iyi uyum sağlamıştır. MSE değeri  $43.1717 \times 10^4$  ve MPE değeri 0.92967’dir. MSE değeri ne kadar küçük ise tahmin modeli o kadar iyidir.



Şekil 6.1 Ascher dizel motor arıza verisi için gözlenen bozulma zamanı ve kestirilen bozulma zamanına ait  $S_k$

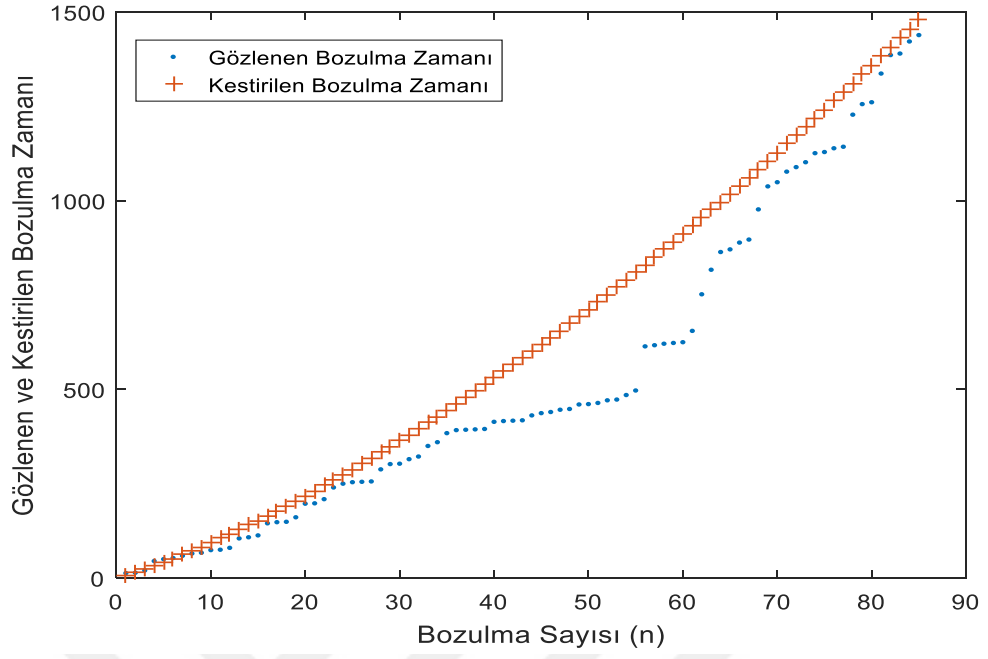
## 6.2 Langseth Kompresör Sistemi Arıza Verisi

Bu veri seti OREDA 2002 veri tabanına dayanan tek kompresör sistemi arıza verilerini içermektedir. İlk olarak Langseth (2005) tarafından çalışılmıştır. Veriler 86 adet gözlemden oluşmaktadır ve arıza zamanlarını göstermektedir. Bu çalışmada öncelikle ilgili veri setine ilişkin 85 adet arızalar arası geçen zamanlar hesaplanmıştır.

Çizelge 6.2 Langseth Kompresör Sistemi Arıza verisi için sonuçlar

ML		
$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{q}$
0.5296	3.7591	0.0212

Bu tez çalışmasında, Langseth kompresör sistemi arıza verisi için  $\alpha, \beta$  ve  $q$  parametrelerinin ML tahminleri elde edilmiştir ve sonuçlar Çizelge 6.2 de verilmiştir. Şekil 6.2’de görüldüğü üzere Weibull genelleştirilmiş yenileme süreci Langseth Kompresör Sistemi Arıza verisine iyi uyum sağlamıştır. MSE değeri  $4.86 \times 10^2$  ve MPE değeri 0.63046’dır. MSE değeri ne kadar küçük ise tahmin modeli o kadar iyidir.



Şekil 6.2 Langseth kompresör sistemi arıza verisi için gözlenen bozulma zamanı ve kestirilen bozulma zamanına ait  $S_k$

## 7. SONUÇ ve TARTIŞMA

Bu tez çalışmasında amaç, tamir edilebilen sistemler için, tamirin yenisi kadar iyi olmadığı durumlarda yenileme sürecine alternatif olarak Kijima ve Sumita (1986) tarafından geliştirilen Weibull genelleştirilmiş yenileme sürecini ve olasılıksal özelliklerini tanıtmaktır. Çalışmada öncelikle bazı temel kavramlar ile sayma süreci ve bazı özel sayma süreci tanımları verilmiştir. Sonrasında, Weibull genelleştirilmiş yenileme süreci ve olasılıksal özellikleri ele alınmıştır. Simülasyon çalışmasında, hem Weibull dağılım parametreleri onarım parametresi için ML yöntemi kullanılarak parametre tahmininde bulunulmuştur. Sonuç olarak, simülasyon çalışması ile tahmin edicilerin asimptotik yansızlık, asimptotik tutarlılık açısından performansları gösterilmiş ve simülasyon çalışmasının ML tahmin edicilerinin bu özelliklerini desteklediği görülmüştür ki bu beklenen bir sonuçtur.

Simülasyon çalışmasının yanı sıra, gerçek veri seti uygulaması yapılmıştır. Ascher ve Feingold (1984), ve Langseth ve Lindqvist (2006) çalışmalarında kullanılan veri kümeleri için Weibull genelleştirilmiş yenileme sürecinde parametre tahmininde bulunulmuştur.

## KAYNAKLAR

- Ascher H., Feingold H., 1986. *Repairable Systems Reliability : Modelling, Inference, Misconceptions and Their Causes*, Marcel Dekker,1984.
- Bakay, G.A., Shklyayev, A.V., 2020. Large deviations of generalized renewal process. *Discrete Mathematics and Applications* 30 (4), 215–241.
- Cox D.R., Lewis P.A.W. 1966 . The statistical analysis of series of events. *Ann. Math. Statist*, 37 (6), 1852-1853.
- Cristino, C.T., ©ebrowski, P., Wildemeersch, M., 2020. Assessing the time intervals between economic recessions. *Plos One* 15 (5), 1-20.
- Ferreira, R.J., Firmino, P.R.A., Cristino, C.T., 2015. A mixed kijima model using the weibull-based generalized renewal processes. *Plos One* 10 (7). e0133772.doi:10.1371/journal.pone.0133772
- Firmino P.R.A., Oliveria C.C.F.de. and Cristino C. T. 2019. Generalized Renewal Process. *Safety and Reliability Modeling and its Applications*,305-353.
- Kaminskiy M, Krivtsov V. A Monte Carlo approach to repairable system reliability analysis. *Probabilistic safety assessment and management*, New York: Springer; 1998. p. 1063–1068.
- Kannan, R. and Bachom, A. 1979. Polynomial algorithms for computing the smith and hermite normal forms of an integer matrix. *SIAM Journal on Computing*, 8, 499-507.
- Kijima M., Sumita U. 1986. A useful generalization of renewal theory: counting process govnrned by non-negative Markovian increments. *Journal of Applied Probabaility*, 23, 71-88.
- Kijima M., Morimura H. and Suziki Y. 1988. Periodical replacement problem without assuming minimal repair. *European Journal of Opreational Reserach* 37, 194-203.
- Koutsellis, T., Mourelatos, Z.P., Hu, Z., 2019. Numerical estimation of expected number of failures for repairable systems using a generalized renewal process model. *ASCE-ASME Journal of Risk and Uncertainty in Engineering Systems, Part B: Mechanical Engineering* 5 (2).
- Krivtsov V. A. 2020. MonteCarlo approach to modeling and estimation of the generalized renewal process in repairable system reliability analysis. Dissertation for The Degree of Doctor of Philosophy, University of Maryland.
- Lee L. 1980. Testing Adequacy of the Weibull and Log Linear Rate Models for a Poisson Process. *Technometrics* 22, 195-199.

- MacLean, C. J. 1974. Estimating and testing of an exponential polynomial rate function within the nonstationary Poisson process. *Biometrika* 61 (1): 81-85.
- Langseth H., Lindqvist B.H. 2006. Competing risks for repairable systems : A data study. *Journal of Statistical Planning and Inference* 136, 1687-1700.
- Lewis P.A.W., Shedler G.S. 1976 . Simulation and Nonhomogeneous Poisson Processes with Degree-Two Exponential Polynomial Rate Function. *Operations Research*, 27 (5) , 1026-1040.
- Oliveira, C.C.F., Cristino, C.T., Firmino, P.R.A., 2016. In the kernel of modelling repairable systems: a goodness of fit test for weibull-based generalized renewal processes. *Journal of Cleaner Production* 133, 358–367.
- Pulcini G., “Modeling The Failure Data of A Repairable Equipment With Bathtub Type Failure Intensity”, *Reliability Engineering and System Safety*, vol. 71, pp. 209-218, 2003.
- Rai, R.N., Sharma, G., 2017. Goodness-of-fit test for generalised renewal process. *International Journal of Reliability and Safety* 11 (1-2), 116–131.
- Ross S.M. 2019. Multivalued State Component Systems. *The Annals of Probability*, 7(2) 379-383.
- Wu, S., Scarf, P., 2017. Two new stochastic models of the failure process of a series system. *European Journal of Operational Research* 257 (3), 763–772.
- Yanez M., A mathematical solution to generalized renewal process. 2001. Center for Technology Risk Studies, University of Maryland, B 117-01.
- Yanez, M., Joglar, F., Modarres M. 2002. Generalized renewal process for analysis of repairable systems with limited failure experience. *Reliability Engineering and System Safety*, 77(2), 217-224.
- Yang, D., He, Z., He, S., 2016. Warranty claims forecasting based on a general imperfect repair model considering usage rate. *Reliability Engineering & System Safety* 145, 147–154.
- Zhang, Y., Wang, L., Wang, S., Wang, P., Liao, H., Peng, Y., 2018. Auxiliary power unit failure prediction using quantified generalized renewal process. *Microelectronics Reliability* 84, 215-222.

## **EKLER**

$X_k$ : Olaylar arası geçen zaman

### **Ascher Dizel Motor Arıza Verileri**

$X_k$ : 860, 1608, 1134, 2703, 645, 95, 1278, 605, 344, 1054, 680, 405, 367, 2758, 355, 1084, 855, 280, 490, 945, 105, 127, 61, 326.

### **Langseth Kompresör Sistemi Arıza Verileri**

$X_k$ : 13, 1, 6, 25, 5, 3, 6, 6, 2, 7, 1, 5, 25, 3, 5, 32, 3, 1, 12, 36, 1, 11, 31, 10, 4, 1, 1, 32, 14, 1, 12, 7, 28, 10, 24, 8, 1, 1, 1, 19, 2, 1, 1, 13, 6, 3, 6, 2, 12, 1, 3, 7, 2, 12, 12, 117, 3, 4, 2, 2, 30, 97, 65, 47, 7, 18, 8, 80, 61, 11, 28, 12, 13, 24, 3, 10, 4, 85, 28, 5, 76, 49, 4, 32, 17.