

25. Mertebeden Kartezyen Grup Düzleminde Altyapılar Üzerine

Emin Mengi

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı

Aralık 2024



On Substructures in Cartesian Group Plane of Order 25

Emin Mengi

MASTER OF SCIENCE THESIS

Department of Mathematics and Computer

December 2024

25. Mertebeden Kartezyen Grup Düzleminde Altyapılar Üzerine

Emin Mengi

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü

Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği Uyarınca

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı

Geometri Bilim Dalında

YÜKSEK LİSANS TEZİ

olarak hazırlanmıştır.

Danışman: Prof. Dr. Ziya Akça

Aralık 2024

ONAY

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi Emin Mengi'nin YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı "25. Mertebeden Kartezyen Grup Düzleminde Altyapılar Üzerine" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek oybirliği ile kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Ziya AKÇA

İkinci Danışman : -

Yüksek Lisans /Doktora Tez Savunma Jürisi:

Üye: Prof. Dr. Ziya AKÇA

Üye: Prof. Dr. Ayşe Bayar

Üye: Prof. Dr. Mine Turan

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun tarih ve
..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Fatma TÖMSEK

Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre, Prof. Dr. Ziya Akça danışmanlığında hazırlamış olduğum “25. Mertebeden Kartezyen Grup Düzleminde Altyapılar Üzerine” başlıklı Yüksek Lisans tezimin özgün bir çalışma olduğunu; tez çalışmamın tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallarına uygun davrandığımı; tezimde verdiğim bilgileri, verileri akademik ve bilimsel ilke ve kurallara uygun olarak elde ettiğimi; tez çalışmamda yararlandığım eserlerin tümüne atıf yaptığımı ve kaynak gösterdiğimi ve bilgi, belge ve sonuçları bilimsel etik ilke ve kurallara göre sunduğumu beyan ederim 25/12/2024

Emin Mengi

ÖZET

Bu çalışmada, cebirsel yapısı 25. mertebeden en küçük kartezyen grup olan, yani noktaları ve doğruları bu cebirsel yapı ile koordinatlanan 25. mertebeden projektif düzlem incelenmiştir. Bu düzlemde herhangi bir tamdörtgenin tamamlanmışı olan 2. mertebeden Fano düzlemleri ve 5. mertebeden Bear altdüzlemi örnekleri sunulmuştur. Seçilen tamdörtgenin tamamlanmışlarının 3. mertebeden bir altdüzlem oluşturmadığı gösterilmiştir. Son olarak bu düzlemde bazı 3-net örnekleri verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Kartezyen Grup, Projektif Düzlem, Alt Düzlemler.

SUMMARY

In this study, the projective plane of order 25, which has the algebraic structure of the smallest Cartesian group of order 25 meaning its points and lines are coordinated by this algebraic structure is examined. Examples of Fano planes, which are the completions of any quadrangle in this plane, and a fifth-order Baer subplane are presented. It is shown that the completions of the chosen quadrangle do not form a third-order subplane. Finally, some examples of 3-nets in this plane are provided.

Keywords: Cartesian group, Projective plane, Subplanes



TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tez çalışmam boyunca bilgi ve deneyimleriyle bana yol gösteren, desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen değerli danışmanım Prof. Dr. Ziya AKÇA' ya; her zaman yanımda olan ve beni koşulsuz destekleyen sevgili aileme en içten teşekkürlerimi sunarım.

ESKİŞEHİR, 2024

Emin Mengi

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET.....	vi
SUMMARY.....	vii
TEŞEKKÜR.....	viii
İÇİNDEKİLER.....	ix
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	xi
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	xiii
1. GİRİŞ ve AMAÇ.....	1
2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI	2
3. TEMEL KAVRAMLAR	4
3.1. Projektif Düzlem	4
3.2 Projektif Düzlemlerin Koordinatlanması	5
3.3 Projektif Düzlemlerin Cebirsel Yapıları	8
3.4 Kartezyen Grup	10
4. EN KÜÇÜK KARTEZYEN GRUP	15
5. 25. MERTEBEDEN BİR PROJEKTİF DÜZLEMİN YAPISI	18
5.1. P_2S 'nin Düzgün Dörtgenleri	20

İÇİNDEKİLER (Devam)

6. P_2S 'NİN ALT DÜZLEMLERİ	21
6.1. P_2S ' nin Bazı Alt Düzlemlerinin Araştırılması	22
6.2. P_2S ' nin 5. Mertebeden Alt Düzlemi	32
7. 25. MERTEBEDEN PROJEKTİF DÜZLEMDE 3-NET ÖRNEKLERİ	34
7.1. P_2S Düzleminde 3-Netlerin İncelenmesi	34
8. SONUÇ ve ÖNERİLER	39
KAYNAKLAR DİZİNİ	40

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Şekil</u>	<u>Sayfa</u>
3.1. Noktaların Koordinatlanması	6
3.2. Doğruların Koordinatlanması	7
5.1 ABCD Tamdörtgeni	21
6.1 3. Mertebeden Projektif Düzlemin Noktalar Kümesi	23

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge

Sayfa

4.1. Θ İşlemine İlişkin Çizelge	17
--	----



SİMGELER DİZİNİ

Simgeler

Açıklama

\mathcal{N}

Noktalar kümesi

\mathcal{D}

Doğrular kümesi

\circ

Üzerinde bulunma bağıntısı

$N \circ d$

N noktası d doğrusu üzerindedir.

$N \not\circ d$

N noktası d doğrusu üzerinde değildir.

$(\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$

Geometrik yapı

$\mathcal{P} = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$

Projektif Düzlem

T

Üçlü işlem

(S, T)

Üçlü halka

$P_{(S,T)}$

(S, T) üçlü halkasının belirttiği projektif düzlem

\mathbb{R}

Gerçel sayılar kümesi

$+, \oplus, \cdot, *, \circ, \theta$

İkili İşlemler

1. GİRİŞ ve AMAÇ

Cebirsel yapılar ve geometri arasındaki ilişki, matematikte önemli bir araştırma alanı olup, bu çalışmanın temel konusunu oluşturmaktadır. Özellikle projektif düzlemler, gerek teorik matematikte gerekse uygulamalı alanlarda geniş bir kullanım alanına sahiptir. Projektif geometri, cebirsel yapılarla zenginleştirilmiş bir alan olup, sonlu mertebelerdeki projektif düzlemler matematiksel olarak büyük bir ilgi görmektedir.

Bu çalışmanın temel amacı, 25. mertebeden projektif düzlemin cebirsel yapısını ve içerdiği alt yapıların özelliklerini incelemektir. Bu kapsamda, en küçük kartezyen gruba sahip olan bu düzlemdeki noktalar ve doğrular incelenmiş, belirli cebirsel yapılarla ilişkilendirilerek koordinatlanmaları sağlanmıştır.

Ayrıca, bu düzlemde herhangi bir tamdörtgenin tamamlanmışının 2. mertebeden Fano düzlemlerini ve 5. mertebeden Baer altdüzlemini içerdiği gösterilmiştir. Bunun yanında, seçilen tamdörtgenin tamamlanmışlarının 3. mertebeden bir altdüzlem oluşturmadığı da ortaya konulmuştur. Son olarak, bu düzlemde bazı 3-net örnekleri sunularak yapının geometrik ve cebirsel özellikleri arasındaki bağlantılar ele alınmıştır.

Bu tez, projektif düzlemlerin cebirsel ve geometrik özelliklerini anlamaya yönelik yapılan çalışmalara katkı sağlamaya çalışmaktadır. Özellikle 25. mertebeden projektif düzlemdeki cebirsel yapıların detaylı incelenmesi, bu alandaki bilgi birikimine yeni açılımlar kazandırmayı amaçlamaktadır.

2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI

Öklidyen olmayan geometriler, matematiksel yapıların geniş bir yelpazede anlaşılmasını sağlayan kritik bir alandır. Bu geometrilere projektif düzlemler, farklı düzlemler ve bu düzlemler üzerindeki dönüşümler, son yıllarda araştırmacılar tarafından yoğun bir şekilde incelenmiştir. Bu bölümde, çalışmanın temelini oluşturan literatüre dair bir özet sunulmaktadır.

Öklidyen olmayan geometriler, 19. yüzyılda Riemann ve Lobachevsky'nin çalışmalarıyla teorik bir çerçeveye oturtulmuş ve daha sonra projektif düzlemlerle olan bağlantıları derinleştirilmiştir. Projektif düzlemler, doğruların kesişimi ve noktaların birleşimi üzerine kuruludur ve bu geometrik yapılar, bazı cebirsel yapılara koordinatlanabilir hale getirilmiştir. Bu koordinatlanma, düzlemlerin analitik incelenmesine olanak sağlar.

Sonlu geometriler bağlamında, projektif düzlemler üzerine çalışmalar, özellikle geometrik alt yapılar ve dönüşüm gruplarının analizine odaklanmıştır. Bu bağlamda, Dembowski (1968) ve Kirkpatrick (1971) gibi araştırmacılar, bu dönüşümlerin simetrik yapıları ve alt düzlemleri üzerindeki etkilerini detaylı bir şekilde incelemiştir. Fano düzlemi gibi özel yapılar, bu dönüşümlerin geometrik özelliklerini anlamada kritik bir rol oynamıştır.

Dönüşüm grupları, projektif düzlem üzerindeki yapıları koruyan ve dönüştüren işlemleri ifade eder. Bu çalışmada da ele alınan projektif düzlemler, Kartezyen gruplar ile modellenmiştir. Panella (1965), Kaya (1978) ve Özcan (1988), Kartezyen grupların projektif düzlemleri koordinatlamak için kullanılabileceğini ve bu yapıların cebirsel özelliklerini göstermiştir. Kartezyen gruplar, sonlu bir projektif düzlemin yapısal özelliklerini analiz etmek için kullanılan cebirsel yapılardan birisidir.

Bu bağlamda, projektif düzlemlerin alt düzlemleri ve bu düzlemlerde kullanılan simetrik özellikler, dönüşümlerin analizinde önem taşır. Örneğin, Fano düzlemleri gibi belirli yapıların özellikleri, bir projektif düzlemin yapısını anlamak için kritik öneme sahiptir. Fano aksiyomu, bu düzlemleri diğerlerinden ayıran temel bir kriterdir ve bu aksiyom, alt düzlemlerin belirlenmesinde ve yapılandırılmasında kullanılmaktadır.

Sonlu geometrilerin analizi, matematik ve bilgisayar bilimleri gibi birçok farklı alanda uygulamalara sahiptir. Kirkpatrick (1971), sonlu projektif düzlemlerin cebirsel yapılarını ve dönüşümlerle olan bağlantılarını araştırmış; bu çalışmaları, alt düzlemlerin özelliklerini anlamada temel bir kaynak haline getirmiştir. Benzer şekilde, Çiftçi ve Kaya (1990), projektif düzlemlerde kullanılan yöntemlerin nasıl kullanılabileceğine dair örnekler sunmuştur.

Günümüzde, projektif düzlemler ve alt yapıları üzerine yapılan araştırmalar, özellikle sayısal modelleme ve algoritmaların geliştirilmesi için de önemli bir zemin oluşturmaktadır. Dönüşümlerin modellenmesi ve alt düzlemlerin yapılandırılması, bilgisayar tabanlı geometrik analizlerde uygulama alanı bulmaktadır.

Bu çalışmada, cebirsel yapısı 25. mertebeden en küçük kartezyen grup olan, yani noktaları ve doğruları bu cebirsel yapı ile koordinatlanan 25. mertebeden projektif düzlem incelenmiştir. Bu düzlemde herhangi bir tamdörtgenin tamamlanmışı olan 2. mertebeden Fano düzlemleri ve 5. mertebeden Bear altdüzlemi örnekleri sunulmuştur. Seçilen tamdörtgenin tamamlanmışlarının 3. mertebeden bir altdüzlem oluşturmadığı gösterilmiştir. Son olarak bu düzlemde bazı 3-net örnekleri verilmiştir

3. TEMEL KAVRAMLAR

Bu çalışmada yer alan projektif geometrinin bazı temel kavramlarını kısaca ele alalım.

3.1. Projektif Düzlem

Tanım 3.1. \mathcal{N} , noktaları, \mathcal{D} ise doğruları temsil eden ve $\mathcal{N} \cap \mathcal{D} = \emptyset$ olacak şekilde tanımlanan iki küme olsun. Ayrıca \mathbf{o} , $\mathcal{N} \times \mathcal{D}$ kümesi üzerinde bulunma bağıntısı olsun. Eğer $\mathcal{P} = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \mathbf{o})$ aşağıdaki şartları sağlıyor ise, bu sisteme bir *projektif düzlem* denir.

P1) $\forall X, Y \in \mathcal{N}, X \neq Y$ için $\exists_1 l \in \mathcal{D} \ni X \circ l$ ve $Y \circ l$.

P2) $\forall l_1, l_2 \in \mathcal{D}, l_1 \neq l_2$ için $\exists X \in \mathcal{N} \ni X \circ l_1$ ve $X \circ l_2$.

P3) Herhangi üçü doğrudan olmayan dört nokta vardır.

Teorem 3.1. $\mathcal{P} = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \mathbf{o})$ düzlemi içinde, birbirinden farklı iki doğru yalnızca bir nokta belirtir.

Tanım 3.2 Herhangi üçü aynı doğrultuda olmayan dört nokta A, B, C ve D ele alındığında, bu noktaların ikili şekilde birleştirilmesiyle elde edilen doğrular, altı farklı doğru ve bunların kesişimleriyle oluşan yedi belirgin noktayı meydana getirir. Bu geometrik düzenlemeye tamdörtgen adı verilir. A, B, C, D noktaları köşe noktaları olarak adlandırılır. AB ile CD, AC ile BD ve AD ile BC doğruları, birbirinin karşılıklı kenarları olarak isimlendirilir. Karşılıklı kenarların kesişim noktaları ise özel bir anlam taşır ve şu şekilde tanımlanır, U: AB ve CD doğrularının kesişimi, V: AC ve BD doğrularının kesişimi, W: AD ve BC doğrularının kesişimi.

Bu üç kesişim noktası U, V ve W, tamdörtgenin köşegen noktaları olarak bilinir. İlginç bir şekilde, köşegen noktaları köşe noktalarıyla çakışmaz ve tamdörtgenin iç yapısını belirleyen önemli unsurlardır. Ortaya çıkan bu yapı, projektif geometri açısından temel bir örnek olup altı doğru ve yedi noktadan oluşur.

Çalışmanın ilerleyen bölümlerinde ikinci mertebeden Fano düzlemleri ele alınacaktır. Bunun öncesinde, Fano düzleminin tanımı üzerinde duralım.

Tanım 3.3. Bir projektif düzlem, içindeki tüm tamdörtgenlerin köşegen noktaları doğruduş ise, bu düzlem Fano düzlemi olarak adlandırılır. Bir düzlem, diğerlerinden en az bir nokta bakımından farklıysa, bu düzlemler 'Farklı Fano düzlemleri' olarak kabul edilir.

Fano Aksiyomu: Bir Fano düzlemi, içerdiği her tamdörtgenin köşegen noktalarının doğruduş olmayan noktalar olduğunu belirtir

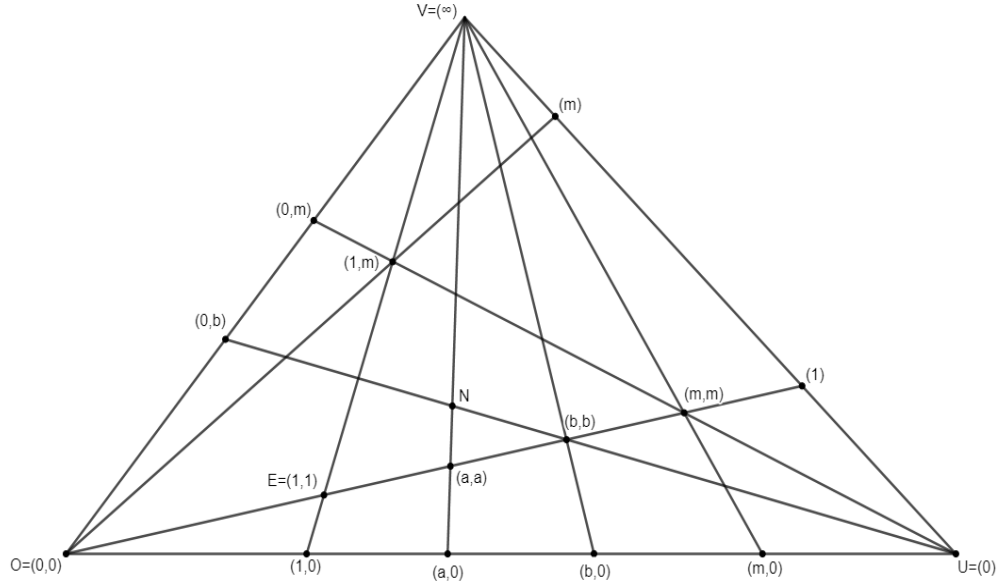
Tanım 3.4: $\mathcal{P} = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \mathbf{o})$ ve $\mathcal{P}' = (\mathcal{N}', \mathcal{D}', \mathbf{o}')$ iki farklı projektif düzlem olsun. Eğer \mathcal{N}' , \mathcal{N} ' nin alt kümesi ise, her $d' \in \mathcal{D}'$ doğrusu için, $d' = d \cap \mathcal{N}'$ olacak şekilde bir tek $d \in \mathcal{D}$ doğrusu bulunduğunda, \mathcal{P}' düzlemi \mathcal{P} düzleminin *projektif altdüzlemidir*. Eğer $\mathcal{P}' \neq \mathcal{P}$ şartı sağlanırsa, yani \mathcal{P}' düzlemi \mathcal{P} düzleminin tamamını kapsamazsa, bu durumda \mathcal{P}' düzlemi \mathcal{P} düzleminin *projektif öz altdüzlemi* olarak adlandırılır.

Teorem 3.2: \mathcal{P} n mertebesine sahip sonlu bir projektif düzlem ise, \mathcal{P}' düzlemi ise \mathcal{P} düzleminin m mertebesine sahip bir projektif öz altdüzlemi olarak verilsin. \mathcal{P} düzleminin bütün doğruları \mathcal{P}' düzleminin en az bir noktasını içeriyorsa $n = m^2$, içermiyorsa $n \geq m^2 + m$ olur.

3.2 Projektif Düzlemin Koordinatlanması

Tanım 3.5. Kardinalitesi $n \geq 2$ olan ve özel elemanları 0 ile 1 olarak tanımlanan S kümesini ele alalım. \mathcal{P} , mertebesi n olan bir projektif düzlem olsun. Bu düzlemde, herhangi üçü doğruduş olmayan O, E, U ve V noktalarından oluşan bir dörtgen seçelim.

Noktaların koordinatlanması:

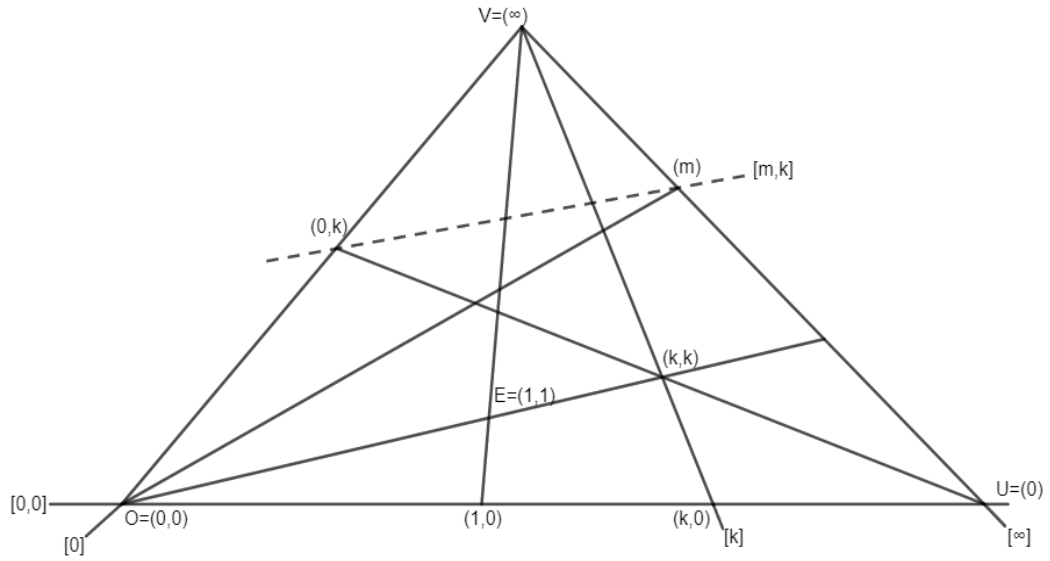


Şekil 3.1. Noktaları Koordinatlanması

OE üzerinde yer alan, $OE \wedge UV$ noktasının dışında kalan her bir noktayı, S^2 kümesinin (a, a) formundaki bir elemanı ile ilişkilendirelim. $O = (0,0)$, $E = (1,1)$ olarak tanımlayalım. Eğer UV doğrusunda yer almayan bir N noktası için $NU \wedge OE = (b, b)$ ve $NV \wedge OE = (a, a)$ ilişkileri sağlanıyorsa, bu noktayı $N = (a, b)$ şeklinde tanımlayalım. Özel durumda, OU doğrusu üzerindeki noktaların koordinatları $(a, 0)$ şeklinde, OV doğrusu üzerindeki noktaların koordinatları ise $(0, b)$ şeklinde ifade edilir. UV doğrusu üzerinde bulunan $[(0,0) \vee (1, m)] \wedge UV$ noktasına (m) koordinatını verelim. Bu durumda, U noktası $U = [(0,0) \vee (1,0)] \wedge UV$ ile belirlendiğinden $U = (0)$ olur. $OE \wedge UV = [(0,0) \vee (1,1)] \wedge UV$ olarak ifade edilir ve bu kesişim $OE \wedge UV = (1)$ olur. $\infty \notin S$ olduğunda UV doğrusu üzerindeki V noktasını $V = (\infty)$ olarak tanımlayalım. (Şekil 3.1)

Doğruların Koordinatlanması:

$V = (\infty)$ noktasını içermeyen ve UV doğrusu ile bir (m) ve OV doğrusu ile bir $(0, k)$ kesişim noktasına sahip olan doğruya $[m, k]$ koordinatını atayalım. Ayrıca, $V = (\infty)$ noktasından geçen ve OU = $[0, 0]$ doğrusu ile bir $(k, 0)$ kesişim noktasına sahip olan doğruya $[k]$ koordinatını ve UV doğrusu üzerinde bulunan doğrulara ise $[\infty]$ koordinatını verelim.



Şekil 3.2. Doğruların Koordinatlanması

Üzerinde Bulunma Bağıntısı:

Seçilen $\forall x, y, m, k \in S$ ise,

$$\begin{array}{lll}
 (\infty) \circ [\infty], & (\infty) \circ [k], & (\infty) \notin [m, k] \\
 (x) \circ [\infty], & (x) \notin [k], & (x) \circ [m, k] \Leftrightarrow x = m \\
 (x, y) \notin [\infty], & (x, y) \circ [k] \Leftrightarrow x = k, & (x, y) \circ [m, k] \Leftrightarrow y = T(m, x, k)
 \end{array}$$

3.3. Projektif Düzlemlerin Cebirsel Yapıları

Tanım 3.6. S , 0 ve 1 elemanlarını içeren, ancak ∞ noktasını barındırmayan bir küme olsun. T , S üzerinde tanımlı bir üçlü işlem olmak üzere, aşağıdaki 5 şartı sağlıyorsa, (S, T) yapısına üçlü halka denir:

$$1) \forall x, y, z \in S \text{ için, } T(0, y, z) = T(x, 0, z) = z \text{ eşitlikleri sağlanır.}$$

$$2) \forall x \in S \text{ için, } T(1, x, 0) = T(x, 1, 0) = x.$$

$$3) \forall x, y, z \in S \text{ için } T(x, y, a) = z \text{ olacak şekilde, yalnızca bir tane } a \in S \text{ vardır.}$$

4) $x \neq z$ olduğu takdirde, $x, y, z, d \in S$ olacak şekilde $T(x, a, y) = T(z, a, d)$ eşitliğini sağlayan yalnızca bir $a \in S$ vardır.

5) $x \neq z$ olduğu takdirde, $\forall x, y, z, d \in S$ için $T(a, x, b) = b$, $T(a, z, b) = d$ eşitliklerini sağlayan yalnızca bir $(a, b) \in S^2$ çifti mevcuttur.

Eğer S , bir projektif düzlemin koordinat sistemi olarak tanımlanabiliyorsa ve T , bu düzlemde bir üçlü işlem olarak ifade edilebiliyorsa, (S, T) yapısına projektif düzlemin üçlü halkası ya da düzlemsel üçlü halka denir.

Teorem 3.3. Her (S, T) üçlü halkası için, o üçlü halkasına karşılık, bir \mathcal{P} projektif düzlemi bulunmaktadır ve bu düzlemde tanımlanan düzlemsel üçlü halka, tam olarak (S, T) olur. Bu düzlem, $\mathcal{P}_{(S, T)}$ olarak adlandırılır.

Teorem 3.4. Bir \mathcal{P} projektif düzlemi ve (S, T) bu düzlemin O, E, U, V koordinatlarıyla tanımlanan düzlemsel üçlü halkası verilsin. Ayrıca (S', T') de \mathcal{P} düzleminin O', E', U', V' koordinatlarıyla tanımlanan düzlemsel üçlü halkası olarak kabul edilsin. (S, T) ve (S', T') arasındaki izomorfizm için, $f(O) = O', f(E) = E', f(U) = U', f(V) = V'$, olacak şekilde bir $f \in G(\mathcal{P})$ kolinasyonunun olması gerek ve yeter koşuldur.

Tanım 3.7. Bir H kümesi üzerinde $*$ işlemi tanımlanmış olsun. $(H, *)$ ikili işlemi $H_1 - H_3$ özelliklerini sağlıyorsa, bu yapı *yarıgrup* ya da *loop* olarak adlandırılır.

H1) $\forall x, y \in H$ elemanı için $x*y = y$ denkleminde sahip olan yalnızca bir $a \in H$ çözümü bulunur.

H2) $\forall x, y \in H$ verildiğinde $a * x = y$ denkleminde yalnızca bir $a \in H$ çözüm mevcuttur.

H3) $\forall a \in H$ elemanı için $a * v = v * c = a$ koşulunu sağlayan yalnızca bir tane $v \in H$ mevcuttur. Bu eleman, birim eleman olarak adlandırılır.

Tanım 3.8. Bir (S, T) üçlü halkasında, T işleminin $a + b = T(1, a, b)$ ve $a \cdot b = T(a, b, 0)$ olarak tanımlanan özel haller, S kümesi üzerinde *toplama* ve *çarpma* işlemleri olarak tanımlanır.

Tanım 3.9. S kümesi, 0 ve 1 dahil olmak üzere elemanlar içerdiğinde, $+$ ve \cdot işlemleri bu küme üzerinde ikili işlemler olarak tanımlanır. $(S, +)$, $(S - \{0\}, \cdot)$ sistemlerinde elemanları 0 ve 1 olan yarıgruplar yer alır. Eğer $\forall x \in S$ için $x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$ şartı sağlanıyorsa $(S, +, \cdot)$ *çifte-yarıgrup* olarak kabul edilir.

Tanım 3.10. (S, T) lineer üçlü halkasında, $+$ birleşme özelliğine (asosyatiflik) sahipse, (S, T) yapısına kartezyen grup denir.

Teorem 3.5. Bir $(S, +, \cdot)$ çift yarıgrupunun $T(x, y, z) = xy + z$ işlemi ile birleşerek oluşturduğu (S, T) yapısının kartezyen grup olabilmesi için şartlar aşağıdaki gibidir:

- 1) $(S, +, \cdot)$ yapısı düzlemsel halka olarak tanımlanır.
- 2) $+$ işlemi asosyatiftir.

Sonuç 3.1. $(S, +, \cdot)$ cebirsel yapısına $T(x, y, z) = xy + z$ üçlü işlemi entegre edilerek elde edilen (S, T) sisteminin kartezyen grup olabilmesi için,

- 1) $(S, +)$ yapısının birim elemanı olarak 0 'ı kabul edip bir grup oluşturması,
- 2) $(S - \{0\}, \cdot)$ yapısının 1 birim elemanına sahip olduğu ve yarıgrup oluşturduğu,
- 3) $\forall a \in S$ elemanı için $0 \cdot a = x \cdot a = 0$ koşulunun sağlanması,
- 4) $\forall x, y, z, v \in S, x \neq z$ elemanları için $xa + y = ca + v$ denkleminin yalnızca bir $a \in S$ çözümüne sahip olması,
- 5) $\forall x, y, z, v \in S, x \neq z$ olduğunda,

$$ax + b = y$$

$$az + b = v$$

eşitliğinin yalnızca bir $(a, b) \in S^2$ çözümünün olması, gerek ve yeter koşuldur.

3.4. Kartezyen Grup

Örnek 3.1. \mathbb{R} gerçel sayılar kümesi ve $+$, \mathbb{R} üzerinde toplama işlemi olsun. Θ işlemi ise her $x, y \in \mathbb{R}$ için

$$x\Theta y = \begin{cases} xy, & xy \geq 0 \\ xy^2, & x < 0 \text{ ve } y > 0 \\ x^2y, & x > 0 \text{ ve } y < 0 \end{cases}$$

Biçiminde verilsin, $(\mathbb{R}, +, \Theta)$ sisteminin bir Kartezyen grup olduğunu, ancak çarpmanın komütatifliği dışında ne birleşim özelliğini ne de toplama üzerinde dağılma gibi standart özellikleri sağlamadığını göstereyim.

- 1) $(\mathbb{R}, +)$ birim elemanı 0 olan bir gruptur.
- 2) $(\mathbb{R} - \{0\}, \Theta)$ nin bir yarıgrup olduğunu gösterecek olursak:

L1) $i, j \in \mathbb{R} - \{0\}$ için $i \Theta x = j$ eşitliğinin yalnız bir $x \in \mathbb{R}$ çözümü mevcuttur.

$i > 0$ ve $j > 0$ iken $ix = j$ ise $x = i^{-1}j > 0$ tek çözüme sahiptir. $i^2x = j$ olursa $x = (i^2)^{-1}j > 0$ olacağından $x < 0$ çözümü olmazdı.

$i < 0$ ve $j > 0$ ise, $ix = j$ ve $x = i^{-1}j < 0$ tek çözüme sahiptir.

Fakat $ix^2 = j$ ise $x^2 = i^{-1}j$ ve $x = \pm\sqrt{i^{-1}j}$ olması gerekirdi. $i^{-1}j < 0$ olacağından böyle bir çözümden bahsedilemez.

$i > 0$ ve $j < 0$ ise, $ix = j$ denklemi için $x = i^{-1}j < 0$ bir çözüme sahip olamaz. $i^2x = j$ ise, $x = (i^2)^{-1}j < 0$ tek çözüme sahiptir.

$i < 0$ ve $j < 0$ ise, $ix = j$ ve $x = i^{-1}j > 0$ olur. Bu nedenle x bir çözüm olamaz.

Fakat $ix^2 = j$ ise, $x = \pm\sqrt{i^{-1}j}$ olacağından $x = \sqrt{i^{-1}j} > 0$ tek çözüme sahiptir. Böylece L1 yalnız bir x çözümüne sahiptir. Açıklamak gerekirse;

$a, b \geq 0$ veya $a, b \leq 0$ olduğunda, $ab \geq 0$ olduğu için $a \Theta b = ab = ba = b \Theta a$ olur.

$a > 0$ ve $b < 0$ ise, $a \Theta b = a^2b = ba^2 = b \Theta a$ olur.

$a < 0$ ve $b > 0$ olduğunda, $a \Theta b = ab^2 = b^2a = b \Theta a$ olduğundan her $a, b \in \mathbb{R}$ için $a \Theta b = b \Theta a$ olur.

L2) Θ işleminin komütatif olduğundan $x \Theta a = y$ denkleminin bir tek çözümü olduğu gibi, $a \Theta x = y$ denkleminin de yalnızca bir tek $a \in \mathbb{R}$ çözümü vardır.

$$L3) 1 \Theta a = \begin{cases} 1a, & a \geq 0 \\ 1^2a, & a < 0 \end{cases} = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ a, & a < 0 \end{cases} = a$$

Bu nedenle $(\mathbb{R} - \{0\}, \Theta)$, birim elemanı 1 olan bir yarıgruptur.

3) Her $x \in \mathbb{R}$ için $0 \Theta x = 0x = 0 = x0 = x \Theta 0$ olmalıdır.

4) Her $a, b, c, d \in \mathbb{R}, a \neq c$ için,

$$a\Theta x + b = c\Theta x + d$$

Eşitliğinin yalnızca bir $x \in \mathbb{R}$ çözümünü inceleyecek olursak,

$$a\Theta x + b = \begin{cases} ax + b, & ax \geq 0 \\ a^2x + b, & a > 0 \text{ ve } x < 0 \\ ax^2 + b, & a < 0 \text{ ve } x > 0 \end{cases}$$

$$c\Theta x + d = \begin{cases} cx + d, & cx \geq 0 \\ c^2x + d, & c > 0 \text{ ve } x < 0 \\ cx^2 + d, & c < 0 \text{ ve } x > 0 \end{cases}$$

İfadelerini kullanarak çeşitli durumları ele alalım.

$a = 0$ olup, $b = c\Theta x + d \Rightarrow c\Theta x = b - d$ ve $c = 0$ ise

$a\Theta x + b = d \Rightarrow a\Theta x = d - b$ eşitliklerinin bir tek çözümlerinin olduğunu, yarıgrup özelliklerinden çıkarabiliriz.

$a > 0$ ve $c > 0$ olsun.

$ax + b = cx + d, (x \geq 0)$ veya $a^2x + b = c^2x + d, (x < 0)$ eşitlikleri sağlanır.

Eğer $(d - b)(a - c)^{-1} \geq 0$ ise, birinci eşitliğin tek çözümü $x = (d - b)(a - c)^{-1}$ olacaktır. Aksi halde $x = (d - b)(a^2 - c^2)^{-1}$ tek çözümüdür.

$a < 0$ ve $c > 0$ olsun. $ax + b = c^2x + d, (x < 0)$ veya $ax^2 + b = cx + d, (x > 0)$ eşitliklerini incelersek $d - b > 0$ ise birinci eşitliğin ve $d - b < 0$ ise ikinci eşitliğin yalnız bir çözümü mevcuttur.

$a > 0$ ve $c < 0$ koşulunda, $d - b < 0$ ise,

$a^2x + b = cx + d$ denkleminin ($x < 0$) şartını sağlayan sadece bir x çözümü vardır.

Ancak $d - b > 0$ ise, $ax + b = cx^2 + d$ denkleminin ($x > 0$) koşulunu sağlayan tek bir çözümü vardır.

$a < 0$ ve $c < 0$ olduğunda, $(d - b)(a - c)^{-1} < 0$ koşulunda $ax + b = cx + d$ denkleminin ($x < 0$) için yalnızca bir çözümü vardır. Ayrıca $(d - b)(a - c)^{-1} > 0$ olduğunda $ax^2 + b = cx^2 + d$ denkleminin de bir tek çözümü bulunduğundan L3 eşitliğinin çözümü tektir.

5) Her $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a \neq c$

$$x\theta a + y = b$$

$$x\theta c + y = d$$

Sisteminin, yalnızca bir tane $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ çözüm içermesi gerekir.

$$x\theta a + y = b \Leftrightarrow \begin{cases} xa + y = b, & xa \geq 0 \text{ ise} \\ x^2a + y = b, & x > 0 \text{ ve } a < 0 \text{ ise} \\ xa^2 + y = b, & x < 0 \text{ ve } a > 0 \text{ ise} \end{cases}$$

$$x\theta c + y = d \Leftrightarrow \begin{cases} xc + y = d, & xc \geq 0 \text{ ise} \\ x^2c + y = d, & x > 0 \text{ ve } c < 0 \text{ ise} \\ xc^2 + y = d, & x < 0 \text{ ve } c > 0 \text{ ise} \end{cases}$$

Olur.

$a = 0$ veya $c = 0$ durumunda, sırasıyla $x\theta c = d - b$ ve $x\theta a = b - d$ eşitliklerinin yarıgrup özellikleri sebebiyle, bir tek x çözümleri bulunduğundan bu sistemin de bir tek (x, y) çözümü olacaktır.

$a > 0$ ve $c > 0$ olsun. $(b - d)(a - c)^{-1} < 0$ ise,

$$xa^2 + y = b$$

$$xc^2 + y = d, \quad (x < 0)$$

Sisteminin yalnızca bir (x, y) çözümü vardır ve $(b - d)(a - c)^{-1} > 0$ ise,

$$xa + y = b$$

$$xc + y = d, \quad (x > 0)$$

Sisteminin yalnızca bir çözümü mevcuttur.

$a > 0$ ve $c < 0$ olsun. $b - d < 0$ ise,

$$xa^2 + y = b$$

$$xc + y = d, \quad (x < 0)$$

Sisteminin yalnızca bir tek çözümü varken, $b - d > 0$ olması halinde

$$xa + y = b$$

$$x^2c + y = d, \quad (x > 0)$$

Sisteminin bir tek çözümü mevcut olacaktır.

$a < 0$ ve $c > 0$ olsun. $b - d > 0$ ise,

$$xa + y = b$$

$$xc^2 + y = d, \quad (x < 0)$$

Tek çözümü ve $b - d < 0$ ise

$$x^2a + y = b$$

$$xc + y = d, \quad (x > 0)$$

Tek çözümü olacaktır.

$a < 0$ ve $c < 0$ olsun. $(b - d)(a - c)^{-1} < 0$ ise,

$$xa + y = b$$

$$xc + y = d$$

Sisteminin bir tek çözümü mevcuttur. Eğer $(b - d)(a - c)^{-1} > 0$ ise,

$$x^2a + y = b$$

$$x^2c + y = d$$

Sisteminin yalnızca bir (x, y) çözümü olduğundan bu sistemin her zaman yalnız bir çözümü vardır. Bu nedenle $(\mathbb{R}, +, \theta)$ bir Kartezyen grup oluşturur. Bir örnek ile gösterecek olursak,

$$(2\theta(-3))\theta(-2) = (-12)\theta(-2) = 24$$

$$2\theta((-3)\theta(-2)) = 2\theta 6 = 12$$

$$2\theta(-5 + 3) = 2\theta(-2) = -8$$

$$2\theta(-5) + 2\theta 3 = (-1)\theta 3 = -9$$

$$(-2)\theta 3 + 1\theta 3 = (-18) + 3 = -15$$

Yukarıdaki örnekten, bu sistemde çarpmanın, birleşme ve toplama üzerine dağılma özelliklerini sağlamadığını rahatlıkla anlayabiliriz.

4. EN KÜÇÜK KARTEZYEN GRUP

$F_5 = \{0,1,2,3,4\}$, 5 ile kalanları içeren bir küme olup F_5 üzerinde tanımlanan $+$ ve \cdot işlemleri 5 modülüne göre toplama ve çarpma işlemleridir. Böylece $(F_5, +, \cdot)$ cisim oluşturur.

$S = F_5 \times F_5 = \{(x, y) \mid x, y \in F_5\}$ üzerinde \oplus ve Θ işlemleri aşağıdaki gibi tanımlanıyor.

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$(a, b) \Theta (c, d) = \begin{cases} (a, b) * (c, d), & b = 0 \text{ veya } (bc - ad)^2 - 2d^2 = 0, 1, 4 \text{ ise} \\ -(a, b) * (c, d), & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

Bu durumda $*$ işlemi ise, şöyle tanımlanır,

$$(a, b) * (c, d) = \begin{cases} (a \cdot c, a \cdot d), & b = 0 \text{ ise} \\ (a \cdot c - b^{-1} \cdot d \cdot (a^2 - 2), b \cdot c - a \cdot d), & b \neq 0 \text{ ise} \end{cases}$$

bu şekilde tanımlanan (S, \oplus, Θ) yapısının bir kartezyen grup belirtir.

(S, Θ) sistemini daha net bir şekilde görebilmek için, Θ işlemine dair tabloyu sunalım. Bu tabloda basitlik sağlamak amacıyla her $(x, y) \in S$ elemanı için xy ifadesi kullanılacaktır.

Θ	00	01	02	03	04	10	11	12	13	14	20	21	22	23	24	30	31	32	33	34	40	41	42	43	44
00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00
01	00	30	10	40	20	01	21	14	44	31	02	33	42	12	23	03	32	43	13	22	04	24	11	41	34
02	00	40	30	20	10	02	43	22	32	13	04	14	31	21	44	01	11	34	24	41	03	42	23	33	12
03	00	10	20	30	40	03	12	33	23	42	01	41	24	34	11	04	44	21	31	14	02	13	32	22	43
04	00	20	40	10	30	04	34	41	11	24	03	22	13	43	32	02	23	12	42	33	01	31	44	14	21
10	00	01	02	03	04	10	11	12	13	14	20	21	22	23	24	30	31	32	33	34	40	41	42	43	44
11	00	14	23	32	41	11	30	21	43	03	22	31	10	01	42	33	13	04	40	24	44	02	12	34	20
12	00	34	13	42	21	12	41	30	01	22	24	02	32	44	10	31	40	11	23	03	43	33	04	20	14
13	00	24	43	12	31	13	23	04	30	44	21	10	41	33	03	34	02	22	14	40	42	11	20	01	32
14	00	44	33	22	11	14	02	42	24	30	23	43	04	10	34	32	21	40	01	12	41	20	31	13	03
20	00	02	04	01	03	20	22	24	21	23	40	42	44	41	43	10	12	14	11	13	30	32	34	31	33
21	00	22	44	11	33	21	04	32	40	12	42	30	03	24	14	13	41	31	02	20	34	43	10	23	01
22	00	12	24	31	43	22	40	03	14	34	44	23	30	13	01	11	04	42	20	32	33	21	41	02	10
23	00	42	34	21	13	23	31	11	02	40	41	04	12	30	22	14	33	20	43	01	32	10	03	44	24
24	00	32	14	41	23	24	13	40	33	01	43	11	21	02	30	12	20	03	34	44	31	04	22	10	42
30	00	03	01	04	02	30	33	31	34	32	10	13	11	14	12	40	43	41	44	42	20	23	21	24	22
31	00	23	41	14	32	31	42	10	22	04	12	44	34	03	20	43	30	02	21	11	24	01	33	40	13
32	00	13	21	34	42	32	24	44	03	10	14	01	43	20	33	41	22	30	12	04	23	40	02	11	31
33	00	43	31	24	12	33	10	02	41	21	11	32	20	42	04	44	01	13	30	23	22	34	14	03	40
34	00	33	11	44	22	34	01	23	10	43	13	20	02	31	41	42	14	24	03	30	21	12	40	32	04
40	00	04	03	02	01	40	44	43	42	41	30	34	33	32	31	20	24	23	22	21	10	14	13	12	11
41	00	11	22	33	44	41	03	13	31	20	32	12	01	40	21	23	34	10	04	43	14	30	24	42	02
42	00	31	12	43	24	42	32	01	20	11	34	40	14	22	02	21	03	33	41	10	13	44	30	04	23
43	00	21	42	13	34	43	14	20	04	33	31	03	23	11	40	24	10	44	32	02	12	22	01	30	41
44	00	41	32	23	14	44	20	34	12	02	33	24	40	04	13	22	42	01	10	31	11	03	43	21	30

Çizelge 4.1. Θ İşlemine İlişkin Çizelge

1) $(S - \{(0,0)\}, \Theta)$ yapısının bir yarıgrup olduğunu göstermek gerekirse,

$$\alpha, \beta \in S - \{(0,0)\},$$

$$\alpha \Theta x = \beta$$

eşitliğinin yalnızca bir $x \in S$ çözümü bulunmaktadır. Öyle ki, i . satırın başındaki bir α elemanı ile aynı satırda bir kez olan β elemanı verildiğinde, eğer β , i . satır ve j . sütundaki bir eleman ise j . sütunun ilk elemanı $\alpha \Theta x = \beta$ denkleminde ait tek çözüm $x \in S$ olur. Örnek verecek olursak, $41 \Theta x = 21$ eşitliğinin tek çözümü $x = 24 = (2,4) \in S$ olacaktır.

$\alpha, \beta \in S - \{(0,0)\}$ için, $\alpha \Theta x = \beta$ eşitliğinin yalnızca bir $x \in S$ çözümünün

varlığını, tabloda sütun ve satırların yerlerini değiştirerek gösterebiliriz.

$\forall \alpha \in S$ için, $\alpha \Theta 10 = 10 \Theta \alpha = \alpha$ olduğunu çizelgeden fark edilebiliriz. Öyle ki $(1,0)$ 'ın, $(S - \{(0,0)\}, \Theta)$ kümesinin birim elemanı olduğu sonucuna varabiliriz.

Aynı zamanda $(S - \{(0,0)\}, \Theta)$ kümesi bir yarı gruptur.

2) $\forall \alpha \in S$ için,

$$\alpha \Theta 00 = 00 \Theta \alpha = 00 \text{ eşitliği açıktır.}$$

3) $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in S$ ve $\alpha \neq \beta$ ise,

$\alpha\theta x \oplus \gamma = \beta\theta x \oplus \delta$ eşitliğinin S kümesi üzerinde yalnızca bir çözümü olduğunu anlayabilmek için bu eşitliği, (S, θ) kümesinin grup olma özelliklerinden, $(\alpha\theta x) - (\beta\theta x) = \mu$ biçiminde yazabiliriz. Tabloda α ve β 'nin bulunduğu satırlarda olup aynı sütunda bulunan eleman çiftlerinin farkı μ olan yalnızca bir sütun vardır. Öyle ki bu farklardan her sütun için farklı bir eleman elde edebiliriz. Bu sütunun başında bulunan eleman, $\alpha\theta x \oplus \gamma = \beta\theta x \oplus \delta$ denkleminin tek çözümü olacaktır. Örnek verecek olursak,

$23\theta x \oplus 12 = 04\theta x \oplus 31$ eşitliğinin tek çözümü $x = 10 = (1,0) \in S$ olacaktır.

4) $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in S, \alpha \neq \beta$ ise,

$$x\theta\alpha \oplus y = \gamma$$

$$x\theta\beta \oplus y = \delta$$

Eşitliklerinin yalnız bir $(x, y) \in S^2$ çözümü vardır. Bunu ifade edebilmek için, (S, \oplus) 'nin grup özelliklerinden faydalanacak olursak,

$$(x\theta\alpha) - (x\theta\beta) = \gamma - \delta = \mu \text{ ve } y = \gamma - (x\theta\alpha) \text{ şeklinde ifade edebiliriz.}$$

$\alpha\theta x \oplus \gamma = \beta\theta x \oplus \delta$ eşitliğinin çözümünde satır ve sütunları değiştirecek olursak $(x\theta\alpha) - (x\theta\beta) = \gamma - \delta = \mu$ denkleminin yalnız bir $x \in S$ çözümü olacaktır.

$x \in S$ elde edildikten sonra, (S, \oplus) grup olduğu için,

$y = \gamma - (x\theta\alpha)$ eşitliği kullanılarak yalnız bir $y \in S$ bulunabilir. Bu nedenle,

$$x\theta\alpha \oplus y = \gamma$$

$$x\theta\beta \oplus y = \delta$$

Sisteminin yalnız bir $(x, y) \in S^2$ çözümü vardır.

(S, \oplus, θ) sistemi, çarpmanın değişme özelliği, birleşme özelliği veya toplama üzerine dağılma gibi standart özelliklerin hiçbirini sağlamaz. Bu özelliklerin sağlanmadığını gösterecek olursak,

$$03\theta 23 = 34 \text{ ve } 23\theta 03 = 21 \text{ olduğundan değişme özelliği yoktur.}$$

$$(21\theta 43)\theta 42 = 23\theta 44 = 24 \text{ ve } 21\theta (43\theta 44) = 21\theta 41 = 43 \text{ olduğundan birleşme özelliği sağlanmaz.}$$

$$31\theta (13 \oplus 24) = 31\theta 32 = 02 \text{ ve } (31\theta 13) \oplus (31\theta 24) = 22\theta 20 = 42 \text{ bu nedenle soldan dağılma özelliği bulunmamaktadır.}$$

$$(24 \oplus 13)\theta 42 = 32\theta 42 = 02 \text{ ve } (24\theta 42) \oplus (13\theta 42) = 22\theta 20 = 42$$

Bu nedenle sağdan dağılma özelliği bulunmamaktadır.

5. 25. MERTEBEDEN PROJEKTİF DÜZLEM

Bu bölümde, 25. mertebeden bir projektif düzlemin yapısı incelenecek ve noktalar, doğrular ve bu elemanlar arasındaki ilişkiler temelinde bu yapının bir projektif düzlem olduğunu gösterilecektir.

Düzlemin noktalar kümesi \mathcal{N} olsun.

\mathcal{N} ye ait 625 tane afin nokta (x, y) , $(x, y \in S)$, 25 tane ideal nokta (m) , $(m \in S)$, 1 tane ideal nokta (∞) vardır.

Düzlemin doğrular kümesi \mathcal{D} olsun.

\mathcal{D} ye ait 625 tane afin doğru $y = m\theta x \oplus k$, $(m, k \in S)$, 25 tane afin doğru $x = \lambda$, $(\lambda \in S)$, 1 tane ideal doğru $[\infty]$ vardır.

Üzerinde bulunma bağıntısı \circ olsun,

(m) ideal noktası $y = m\theta x \oplus k$, $(\forall k \in S$ için) doğrusu ile $[\infty]$ doğrusu üzerinde yer alır. (∞) ideal noktası $x = \lambda$, $(\forall \lambda \in S)$ doğruları ve $[\infty]$ doğrusu üzerinde yer alır.

(x, y) afin noktası $y = m\theta x \oplus k$, $(\forall m, k \in S)$ doğrusu üzerinde yer alır ve (x, y) afin noktası $x = \lambda$, $(\lambda \in S)$ doğrusu üzerinde yer alır. Öyle ki,

$(x, y) \circ [m, k] \Leftrightarrow y = m\theta x \oplus k$ ve $(x, y) \circ [\lambda]$ eşitlikleri geçerlidir. (x, y) afin noktası $[\infty]$ doğrusu üzerinde yer almamaktadır.

\mathcal{N} noktalar, \mathcal{D} doğrular ve \circ üzerinde bulunma bağıntısı ile, $(\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ yapısının projektif düzlem olduğunu inceleyerek göstereyim.

P1) $P_1 = (x_1, y_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2)$ iki farklı nokta olarak verilsin.

Eğer $x_1 = x_2$ ise P_1 ve P_2 üzerinden geçen yalnızca bir $x = x_1$ doğrusu bulunmaktadır. $x_1 \neq x_2$ olduğunda $y_1 \neq y_2$ olacağı için P_1 ve P_2 üzerinden $y = m\theta x \oplus k$

biçiminde bir doğru geçmez. Eğer P_1 ve P_2 üzerinden $x_1 = x_2$ olduğunda $y = m\theta x \oplus k$ biçiminde bir doğru geçiyor olsaydı (x_1, y_1) ve (x_1, y_2) noktaları bu denklemi karşılardı. Açıklamak gerekirse,

$$\left. \begin{array}{l} (x_1, y_1) \circ [m, k] \Leftrightarrow y_1 = m\theta x_1 \oplus k \\ (x_1, y_2) \circ [m, k] \Leftrightarrow y_2 = m\theta x_1 \oplus k \end{array} \right\} \Rightarrow y_1 = y_2 \text{ olacağından } P_1 \neq P_2 \text{ ile çelişirdi.}$$

$x_1 \neq x_2$ olduğunda P_1 ve P_2 noktaları $y = m\theta x \oplus k$ doğrusu üzerinde yer alır. Bu durumda,

$$y_1 = m\theta x_1 \oplus k$$

$$y_2 = m\theta x_2 \oplus k$$

Sisteminin yalnızca bir $[m, k]$ çözümü bulunmaktadır. Bu durumda (x_1, y_1) ve (x_2, y_2) noktalarından yalnızca bir doğru geçer. Çünkü $x_1 \neq x_2$ olduğu için $x = \lambda$ biçiminde bir doğru P_1 ve P_2 noktalarını kesmez.

P2) $y = m_1\theta x \oplus k_1$ ve $y = m_2\theta x \oplus k_2$ ($m_1 \neq m_2$) ise

$$(m_1\theta x) - (m_2\theta x) = k_1 - k_2 = k$$

denkleminin sadece bir x çözümü olacağından, y de tek bir değer alacaktır. Bu sebeple, $y = m_1\theta x \oplus k_1$ ve $y = m_2\theta x \oplus k_2$ doğrularının yalnızca bir adet (x, y) ortak noktası bulunur. $x = \lambda$ biçimindeki doğrular ise yalnızca (∞) ideal ortak noktasına sahip oldukları için, bu iki doğrunun arakesiti yalnızca (∞) noktasıdır.

P3) Doğrudaş olmayan herhangi üç noktadan farklı, dört nokta her zaman seçilebilir.

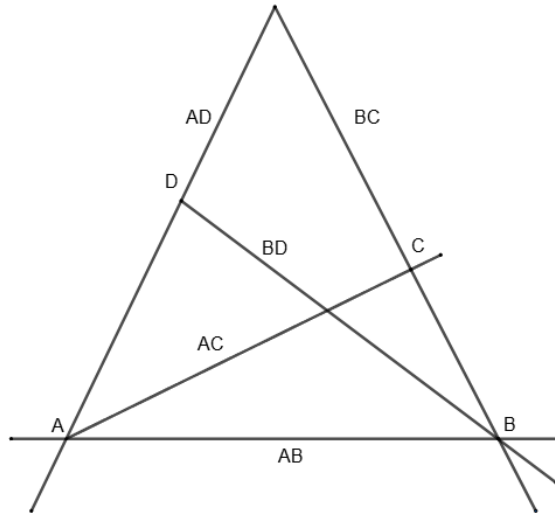
$O = ((0,0), (0,0))$, $I = ((1,0), (1,0))$, $X = ((0,0))$, $Z = (\infty)$ noktalarını örnek verecek olursak, bu noktalarının hiçbirisi herhangi üçü doğrudaş olacak şekilde seçilemez.

Bu sebeple, $(\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ sistemi bir projektif düzlem belirtir.

5.1. P_2S nin Düzgün Dörtgenleri

Bu bölümde, P_2S düzleminde düzgün dörtgenlerin toplam sayısı belirlenmekte ve bu dörtgenlerin oluşturulma yöntemleri detaylı bir şekilde incelenmektedir. Düzlemdeki noktaların özellikleri ve yerleşim kuralları dikkate alınarak, her bir aşamada farklı seçimlerin nasıl yapıldığı ve bu seçimlerin toplam sayıya etkisi açıklanmaktadır.

Önerme 5.1. P_2S 'nin düzgün dörtgen sayısı $\frac{651 \cdot 650 \cdot 625 \cdot 576}{4!}$ tanedir.



Şekil 5.1. ABCD Tamdörtgeni

İspat: Bu düzlemde, ABCD dörtgeninin oluşturulabileceği farklı yolların belirlenmesi gerekmektedir. Düzlemde yer alan 651 noktadan biri, bu dörtgenin A noktası olarak belirlenebilir. Düzlemde, A noktasından farklı olacak şekilde B noktası 650 seçenek arasından belirlenebilir. AB doğrusu üzerinde 26 nokta bulunduğu ve C noktası bu doğruya olamayacağından, C noktası 625 farklı seçenek arasından belirlenebilir. AB, AC ve BC doğruları üzerinde toplam 75 nokta yer aldığı ve D noktası bu doğrular üzerinde bulunamayacağı için, 651 noktadan geriye kalan 576 noktadan biri D noktası olarak belirlenebilir. $A'B'C'D'$ dörtgenlerinin kendi içinde $4!$ farklı şekilde sıralanabileceği göz önüne alındığında, $\frac{651 \cdot 650 \cdot 625 \cdot 576}{4!}$ hesaplamasıyla, P_2S kümesindeki düzgün dörtgenlerin toplam sayısına ulaşılır.

6. P_2S NİN ALT DÜZLEMLERİ

Bir Fano düzlemi, pek çok projektif düzlemin alt projektif düzlemi olarak ortaya çıkabilir. Projektif bir düzlemdeki Fano alt düzlemleri, bu düzlemin geometrik yapısının belirlenmesinde kritik bir rol oynar.

6.1. P_2S nin Bazı Alt Düzlemlerinin Araştırılması

$P = ((0,0), (a, b))$ noktasında $a = b = 0$ ve $a = 1, b = 0$ olduğu durumlarda $OIXP'$ nin dörtgen oluşturmadığı bilinmektedir. Buna durumda, aşağıdaki önerme ileri sürülebilir.

Önerme 6.1. $P = ((0,0), (a, b))$ olmak üzere ($a = b = 0$ ve $a = 1, b = 0$ durumları hariç.) P_2S tarafından oluşturulan $OIXP$ dörtgenlerinin tamamlanmasıyla elde edilen konfigürasyonların bazıları 3. mertebeden bir alt düzlem oluşturmaz.

İspat: Bu ispatta P noktasının seçimine göre bazı durumlar ele alınacaktır. $P = ((0,1), (a, b))$ ve $b \neq 0$ olmak üzere $OIXP$ dörtgeninin tamamlanmış hali, P_2S kümesinin 2. mertebeden alt düzlemlerini meydana getirmektedir (Fano düzlemleri). Bu durumda, ispatı tamamlamak adına $b = 0$ ve $a \neq 0,1$ koşulunda $OIXP$ 'nin tamamlanmış konfigürasyonlarının üçüncü mertebeden alt düzlem oluşturmadığını göstermek yeterlidir. Bu değerlendirmeler yapılırken, Şekil 6.1.'deki noktalar ve doğrular dikkate alınacaktır.

$EG \wedge OI = ((1,4), (1,4)) = M$ ve $PX \wedge EG = ((0,4), (1,2)) = M'$ noktasıdır.

Eğer bu dörtgenin tamamlanmış konfigürasyonu 3. mertebeden bir alt düzlem oluşturacaksa, her doğru üzerinde 4 nokta yer almalı ve her noktadan 4 doğru geçmelidir. Böylelikle, $PM = [(3,2), (0,4)]$ doğrusu üzerindeki diğer 2 nokta belirlenmelidir.

$L \circ PM$ olarak kabul edilirse. $L \circ PM \Leftrightarrow (1,0) \neq (3,2) \otimes (2,4) \oplus (0,4)$ olur.

$N \circ PM$ olsun. $N \circ PM \Leftrightarrow (0,0) \neq (3,2) \otimes (2,3) \oplus (0,4)$ olduğu için, PM doğrusu üzerinde bu düzleme ait iki noktanın daha belirlenememesi, bu konfigürasyonun 3. mertebeden bir alt düzlem olma özelliğini taşımadığını gösterir.

2. Durum: $O=((0,0),(0,0))$, $I=((1,0),(1,0))$, $X=((0,0))$, $P=((0,1),(1,3))$

O , I ve X noktaları ile OX , OI , IX doğruları, birinci durumdaki doğru ve noktalarla tamamen aynıdır.

$OP = [(3,2), (0,0)]$ olup, $OP \wedge IX = ((1,4), (1,0)) = E$ elde edilir.

$PX = [(0,0), (1,3)]$ doğrusu ve $PX \wedge OI = ((1,3), (1,3)) = F$ noktası bulunur.

$EF = [(2,0), (4,2)]$ doğrusudur.

$EF \wedge OX = ((3,4), (0,0)) = N$ noktası, $PI = [(1,1), (0,4)]$ doğrusu ve

$EF \wedge PI = ((0,4), (4,0)) = N'$ noktası elde edilir.

$PI \wedge OX = ((2,3), (0,0)) = G$ noktası ile $FG = [(4,4), (0,1)]$ doğrusu ve

$FG \wedge OP = ((4,4), (3,1)) = L'$, $FG \wedge IX = ((0,4), (1,0)) = L$ noktaları bulunur.

$EG = [(2,3), (2,0)]$ doğrusunun, OI doğrusu ile arakesiti $M = ((4,4), (4,4))$ noktası ve PX doğrusu ile arakesiti $M' = ((3,3), (1,3))$ noktasıdır.

$PM = [(2,0), (1,1)]$ olup N ve L noktaları PM doğrusu üzerinde yer almadığından, PM doğrusu üzerinde düzleme ait başka iki nokta bulunamadığı için, bu konfigürasyon 3. mertebeden bir alt düzlem oluşturamaz.

3. Durum: $O=((0,0),(0,0))$, $I=((1,0),(1,0))$, $X=((0,0))$, $P=((0,1),(1,4))$

O, I ve X noktaları ve OX, OI, IX doğruları birinci durumdaki nokta ve doğrularla aynıdır.

$OP = [(1,1), (0,0)]$ olup, $OP \wedge IX = ((2,2), (1,0)) = E$ elde edilir.

$PX = [(0,0), (1,4)]$ doğrusu ve $F = PX \wedge OI = ((1,4), (1,4))$ bulunur.

$EF = [(2,2), (3,0)]$ ile OX doğrusunun arakesiti, $N = ((3,3), (0,0))$ noktasıdır.

$PI = [(3,4), (3,1)]$ doğrusunun EF doğrusu ile arakesiti $N' = ((4,2), (2,1))$ noktasıdır.

$PI \wedge OX = ((3,2), (0,0)) = G$ olur. $FG = [(2,0), (4,1)]$ doğrusunun, IX doğrusu ile arakesiti $L = ((1,2), (1,0))$ noktası ve OP doğrusu ile arakesiti $L' = ((1,0), (1,1))$ noktasıdır.

$EG = [(4,0), (3,2)]$ doğrusunun OI doğrusu ile arakesit noktası $M = ((4,1), (4,1))$ ve PX doğrusu ile kesişimi $M' = ((2,3), (1,4))$ noktası olacaktır.

$PM = [(3,2), (0,1)]$ olduğundan ve $N, L \notin PM$ olduğundan, bu konfigürasyon 3. mertebeden bir alt düzlem belirtmez.

$P=((0,1),(2,0))$, $P=((0,1),(2,1))$, $P=((0,1),(2,2))$, $P=((0,1),(2,3))$, $P=((0,1),(2,4))$ noktaları için durumlar incelenecek olursa,

1. Durum: $O=((0,0),(0,0))$, $I=((1,0),(1,0))$, $X=((0,0))$, $P=((0,1),(2,0))$

$OP=[(0,4),(0,0)]$, $OX=[(0,0),(0,0)]$, $OI=[(1,0),(0,0)]$, $PX=[(0,0),(2,0)]$, $IX=[(0,0),(1,0)]$ olduğundan,

$OP \wedge IX = ((0,3), (1,0)) = E$ ve $F = OI \wedge PX = ((2,0), (2,0))$ noktaları belirlenir.

$[(4,4), (4,2)] = EF$ doğrusudur.

$EF \wedge OX = ((2,4), (0,0)) = N$ noktası ve $PI = [(3,3), (3,2)]$ doğrusu ardından

$PI \wedge OX = ((3,4), (0,0)) = G$ noktası belirlenir.

$EF \wedge PI = ((4,4), (2,2)) = N'$ noktası, $FG = [(0,4), (2,2)]$ doğrusu

$FG \wedge IX = ((2,3), (1,0)) = L$ noktası ve $FG \wedge OP = ((0,4)) = L'$ noktaları elde edilir.

$EG = [(1,4), (4,3)]$ doğrusu ile OI doğrusunun kesişim noktası,

$M = EG \wedge OI = ((0,4), (0,4))$ noktası ve $M' = PX \wedge EG = ((3,0), (2,0))$ noktasıdır.

$PM = [(3,2), (1,2)]$ doğrusu üzerindeki diğer 2 nokta belirlenmelidir.

$L \circ PM$ olarak kabul edilirse. $L \circ PM \Leftrightarrow (1,0) \neq (3,2) \otimes (2,3) \oplus (1,2)$ olur.

$N \circ PM$ olsun. $N \circ PM \Leftrightarrow (0,0) \neq (3,2) \otimes (2,4) \oplus (1,2)$ olmasından dolayı PM doğrusu üzerinde iki nokta daha belirlenemediği için bu konfigürasyon 3. mertebeden bir alt düzlem olma özelliğini taşımaz.

2. Durum: $O=((0,0),(0,0))$, $I=((1,0),(1,0))$, $X=((0,0))$, $P=((0,1),(2,1))$

O , I ve X noktaları ile OX , OI , IX doğruları, birinci durumdaki doğru ve noktalarla tamamen aynıdır.

$OP = [(4,3), (0,0)]$ olup, $OP \wedge IX = ((3,1), (1,0)) = E$ elde edilir.

$PX = [(0,0), (2,1)]$ doğrusu ve $PX \wedge OI = ((2,1), (2,1)) = F$ noktası bulunur.

$EF = [(3,4), (0,1)]$ doğrusudur.

$EF \wedge OX = ((4,4), (0,0)) = N$ noktası, $PI = [(1,3), (0,2)]$ doğrusu ve

$EF \wedge PI = ((4,1), (1,3)) = N'$ noktası elde edilir.

$PI \wedge OX = ((2,3), (0,0)) = G$ noktası ile $FG = [(2,1), (4,1)]$ doğrusu ve

$FG \wedge OP = ((4,2), (0,1)) = L'$, $FG \wedge IX = ((2,3), (1,0)) = L$ noktaları bulunur.

$EG = [(3,1), (3,0)]$ doğrusunun, OI doğrusu ile arakesiti $M = ((3,2), (3,2))$ noktası ve PX doğrusu ile arakesiti $M' = ((0,2), (2,1))$ noktasıdır.

$PM = [(0,3), (1,1)]$ olup N ve L noktaları PM doğrusu üzerinde yer almadığından, PM doğrusu üzerinde düzleme ait başka iki nokta bulunamadığı için, bu konfigürasyon 3. mertebeden bir alt düzlem oluşturmaz.

3. Durum: $O=((0,0),(0,0))$, $I=((1,0),(1,0))$, $X=((0,0))$, $P=((0,1),(2,2))$

O, I ve X noktaları ve OX, OI, IX doğruları birinci durumdaki nokta ve doğrularla aynıdır.

$OP = [(2,1), (0,0)]$ olup, $OP \wedge IX = ((4,2), (1,0)) = E$ elde edilir.

$PX = [(0,0), (2,2)]$ doğrusu ve $PX \wedge OI = ((2,2), (2,2)) = F$ noktası bulunur.

$EF = [(3,4), (2,0)]$ ile OX doğrusunun arakesiti, $N = ((3,4), (0,0))$ noktasıdır. $PI = [(0,3), (1,2)]$ doğrusunun EF doğrusu ile arakesiti $N' = ((1,3), (3,0))$ noktasıdır.

$PI \wedge OX = ((4,4), (0,0)) = G$ olur. $FG = [(4,0), (4,4)]$ doğrusunun, IX doğrusu ile arakesiti $L = ((3,4), (1,0))$ noktası ve OP doğrusu ile arakesiti $L' = ((1,2), (3,2))$ noktasıdır.

$EG = [(4,3), (1,4)]$ doğrusunun OI doğrusu ile arakesit noktası $M = ((1,3), (1,3))$ ve PX doğrusu ile arakesit noktası $M' = ((0,3), (2,2))$ dir.

$PM = [(0,4), (0,2)]$ olduğundan ve N, L ϕ PM olduğundan, bu konfigürasyon 3. mertebeden bir alt düzlem belirtmez.

4. Durum: $O=((0,0),(0,0))$, $I=((1,0),(1,0))$, $X=((0,0))$, $P=((0,1),(2,3))$

O, I ve X noktaları ve OX, OI, IX doğruları 1. durumdaki nokta ve doğrularla aynıdır.

$OP = [(3,1), (0,0)]$ olup, $OP \wedge IX = ((1,2), (1,0)) = E$ elde edilir.

$PX = [(0,0), (2,3)]$ doğrusu ve $PX \wedge OI = ((2,3), (2,3)) = F$ noktası bulunur.

$EF = [(3,4), (4,2)]$ doğrusu ile OX doğrusunun arakesiti, $N = ((2,0), (0,0))$ noktasıdır.

$PI = [(2,4), (4,1)]$ ile EF doğrusunun arakesiti $((0,3), (1,4)) = N'$ olur.

$PI \wedge OX = ((0,2), (0,0)) = G$ olur. $FG = [(4,1), (3,3)]$ doğrusunun, IX doğrusu ile arakesiti $L = ((2,0), (1,0))$ noktası ve OP doğrusu ile arakesiti $L' = ((2,2), (3,4))$ noktasıdır.

$EG = [(1,0), (0,3)]$ doğrusunun OI doğrusu ile kesiştiği nokta, $M = ((1,0))$ ve PX doğrusu ile kesişimi $M' = ((2,0), (2,3))$ noktası olacaktır.

$PM = [(1,0), (2,2)]$ olduğundan ve $N, L \notin PM$ olduğundan, bu konfigürasyon 3. mertebeden bir alt düzlem belirtmez.

5. Durum: $O=((0,0),(0,0)), I=((1,0),(1,0)), X=((0,0)), P=((0,1),(2,4))$

O, I ve X noktaları ve OX, OI, IX doğruları ilk durumla aynıdır.

$OP = [(1,3), (0,0)]$ olup, $OP \wedge IX = ((2,1), (1,0)) = E$ elde edilir.

$PX = [(0,0), (2,4)]$ doğrusu ve $PX \wedge OI = ((2,4), (2,4)) = F$ noktası bulunur.

$EF = [(4,1), (2,4)]$ doğrusu ile OX doğrusunun arakesiti, $N = ((1,3), (0,0))$ noktasıdır.

$PI = [(4,0), (2,0)]$ doğrusunun EF doğrusu ile arakesiti $N' = ((1,0), (1,0))$ noktasıdır.

$PI \wedge OX = ((2,0), (0,0)) = G$ olur. $FG = [(3,2), (4,1)]$ doğrusunun, IX doğrusu ile arakesiti

$L = ((1,1), (1,0))$ noktası ve OP doğrusu ile arakesiti $L' = ((3,4), (4,0))$ noktasıdır.

$EG = [(0,2), (0,1)]$ doğrusunun OI doğrusu ile arakesit noktası $M = ((1,4), (1,4))$ ve PX doğrusu ile arakesit noktası $M' = ((4,2), (2,4))$ dir.

$PM = [(2,1), (0,2)]$ olduğundan ve $N, L \notin PM$ olduğundan, bu konfigürasyon 3. mertebeden bir alt düzlem belirtmez.

$P=((0,1),(3,0)), P=((0,1),(3,1)), P=((0,1),(3,2)), P=((0,1),(3,3)), P=((0,1),(3,4))$ noktaları için durumlar incelenecek olursa,

1. Durum: $O=((0,0),(0,0)), I=((1,0),(1,0)), X=((0,0)), P=((0,1),(3,0))$

$OP=[(0,1),(0,0)], OX=[(0,0),(0,0)], OI=[(1,0),(0,0)], PX=[(0,0),(3,0)], IX=[(0,0),(1,0)],$

$E = OP \wedge IX = ((0,2), (1,0))$ ve $OI \wedge PX = ((3,0), (3,0)) = F$ noktaları belirlenir.

$EF = [(3,2), (4,4)]$ doğrusudur.

$EF \wedge OX = ((4,3), (0,0)) = N$ ve $PI = [(4,1), (2,4)]$ ardından

$PI \wedge OX = ((1,3), (0,0)) = G$ noktası belirlenir.

$EF \wedge PI = ((2,3), (1,4)) = N'$ noktası, $FG = [(1,2), (0,4)]$ doğrusu

$FG \wedge IX = ((3,2), (1,0)) = L$ noktası ve $FG \wedge OP = ((0,4), (2,0)) = L'$ elde edilir.

$EG = [(2,2), (4,1)]$ ile OI doğrusunun kesişim noktası,

$EG \wedge OI = ((4,3), (4,3)) = M$ ve $PX \wedge EG = ((2,0), (3,0)) = M'$ noktasıdır.

$PM = [(4,0), (3,1)]$ doğrusu üzerindeki diğer 2 nokta belirlenmelidir.

$L \circ PM$ olarak kabul edilirse. $L \circ PM \Leftrightarrow (1,0) \neq (4,0) \otimes (3,2) \oplus (3,1)$ olur.

$N \circ PM$ olsun. $N \circ PM \Leftrightarrow (0,0) \neq (4,0) \otimes (4,3) \oplus (3,1)$ olmasından dolayı 3. mertebeden bir alt düzlem olamaz.

2. Durum: $O=((0,0),(0,0))$, $I=((1,0),(1,0))$, $X=((0,0))$, $P=((0,1),(3,1))$

O , I ve X noktaları ile OX , OI , IX doğruları, birinci durumdaki doğru ve noktalarla tamamen aynıdır.

$OP = [(4,2), (0,0)]$ olup, $OP \wedge IX = ((3,4), (1,0)) = E$ elde edilir.

$PX = [(0,0), (3,1)]$ ve $F = PX \wedge OI = ((3,1), (3,1))$ bulunur.

$EF = [(2,1), (4,0)]$ doğrusudur.

$EF \wedge OX = ((4,2), (0,0)) = N$ noktası, $PI = [(0,4), (1,1)]$ doğrusu ve

$N' = EF \wedge PI = ((4,2), (0,0))$ elde edilir.

$G = PI \wedge OX = ((4,2), (0,0))$ ile $FG = [(2,1), (4,0)]$ doğrusu ve

$FG \wedge OP = ((3,4), (1,0)) = L'$, $L = FG \wedge IX = ((3,4), (1,0))$ elde edilir.

$EG = [(0,4), (1,1)]$ doğrusunun, OI doğrusu ile arakesiti $M = ((1,0), (1,0))$ noktası ve PX doğrusu ile arakesiti $M' = ((0,1), (3,1))$ noktasıdır.

$PM = [(0,4), (1,1)]$ olup L noktası PM doğrusu üzerinde yer almadığından, PM doğrusu üzerinde düzleme ait başka nokta bulunamadığı için, bu konfigürasyon 3. mertebeden bir alt düzlem oluşturmaz.

3. Durum: $O=((0,0),(0,0))$, $I=((1,0),(1,0))$, $X=((0,0))$, $P=((0,1),(3,2))$

O, I ve X noktaları ve OX, OI, IX doğruları birinci durumdaki nokta ve doğrularla aynıdır.

$OP = [(2,4), (0,0)]$ olup, $OP \wedge IX = ((4,3), (1,0)) = E$ elde edilir.

$PX = [(0,0), (3,2)]$ doğrusu ve $PX \wedge OI = ((3,2), (3,2)) = F$ olur.

$EF = [(3,0), (4,1)]$ doğrusu ile OX doğrusunun arakesiti, $N = ((2,3), (0,0))$ noktasıdır.

$PI = [(1,2), (0,3)]$ doğrusunun EF doğrusu ile arakesiti $N' = ((0,3), (4,0))$ noktasıdır.

$PI \wedge OX = ((2,1), (0,0)) = G$ olur. $FG = [(4,4), (3,1)]$ doğrusunun, IX doğrusu ile arakesiti

$L = ((1,2), (1,0))$ noktası ve OP doğrusu ile arakesiti $L' = ((2,2), (2,1))$ noktasıdır.

$EG = [(3,2), (0,4)]$ ile OI doğrusunun kesişimi $M = ((1,4), (1,4))$ ve PX doğrusu ile kesişimi $((2,4), (3,2)) = M'$ noktası olacaktır.

$PM = [(0,3), (2,2)]$ olduğundan ve $N, L \notin PM$ olduğundan, bu konfigürasyon 3. mertebeden bir alt düzlem belirtmez.

4. Durum: $O=((0,0),(0,0))$, $I=((1,0),(1,0))$, $X=((0,0))$, $P=((0,1),(3,3))$

O, I ve X, OX, OI, IX noktaları ve doğruları birinci durumdaki nokta ve doğrularla aynıdır.

$OP = [(3,4), (0,0)]$ olup, $OP \wedge IX = ((1,3), (1,0)) = E$ elde edilir.

$PX = [(0,0), (3,3)]$ ve $F = PX \wedge OI = ((3,3), (3,3))$ noktası bulunur.

$EF = [(4,1), (3,4)]$ doğrusu ile OX doğrusunun arakesiti, $N = ((2,4), (0,0))$ noktasıdır.

$PI = [(3,0), (3,0)]$ ile EF doğrusunun arakesiti $N' = ((3,4), (2,2))$ noktasıdır.

$PI \wedge OX = ((4,0), (0,0)) = G$ olur. $FG = [(4,2), (4,2)]$ doğrusunun, IX doğrusu ile arakesiti

$L = ((4,4), (1,0))$ noktası ve OP doğrusu ile arakesiti $L' = ((1,0), (3,4))$ noktasıdır.

$EG = [(0,4), (0,4)]$ ile OI doğrusunun kesişimi $M = ((2,1), (2,1))$ ve PX doğrusu ile kesişimi $((1,1), (3,3))$ noktası yani M' olur.

$PM = [(3,2), (2,0)]$ ve $N, L \notin PM$ olduğundan, bu konfigürasyon 3. mertebeden bir alt düzlem belirtmez.

5. Durum: $O=((0,0),(0,0)), I=((1,0),(1,0)), X=((0,0)), P=((0,1),(3,4))$

O, I ve X noktaları ve OX, OI, IX doğruları ilk bulunan nokta ve doğrularla aynıdır.

$OP = [(1,2), (0,0)]$ olup, $OP \wedge IX = ((2,4), (1,0)) = E$ elde edilir.

$PX = [(0,0), (3,4)]$ doğrusu ve $PX \wedge OI = ((3,4), (3,4))$ yani F noktasıdır.

$EF = [(3,3), (1,1)]$ doğrusu ile OX doğrusunun arakesiti, $N = ((3,0), (0,0))$ noktasıdır.

$PI = [(2,3), (4,2)]$ ile EF doğrusunun arakesiti $N' = ((1,4), (3,2))$ noktasıdır.

$PI \wedge OX = ((0,4), (0,0)) = G$ olur. $FG = [(3,1), (2,3)]$ doğrusunun, IX doğrusu ile arakesiti

$L = ((1,1), (1,0))$ noktası ve OP doğrusu ile arakesiti $L' = ((1,4), (2,2))$ noktasıdır.

$EG = [(3,0), (0,3)]$ doğrusunun OI doğrusu ile arakesit noktası $M = ((0,1), (0,1))$ ve PX doğrusu ile arakesit noktası $M' = ((1,2), (3,4))$ dir.

$PM = [(1,0)]$ olduğundan ve $N, L \notin PM$ olduğundan, bu konfigürasyon 3. mertebeden bir alt düzlem belirtmez.

Şimdi ise P noktasının farklı seçimleri için örnekler verelim. $P=((1,2),(3,0)), P=((3,4),(2,0))$ noktaları için durumlar incelenecek olursa,

1. Örnek: $O=((0,0),(0,0)), I=((1,0),(1,0)), X=((0,0)), P=((1,2),(3,0))$

$OP=[(1,2),(0,0)], OX=[(0,0),(0,0)], OI=[(1,0),(0,0)], PX=[(0,0),(3,0)], IX=[(0,0),(1,0)]$ olduğundan,

$OP \wedge IX = ((2,4), (1,0)) = E$ ve $OI \wedge PX = ((3,0), (3,0)) = F$ noktaları belirlenir.

$EF = [(0,4), (3,3)]$ doğrusudur.

$EF \wedge OX = ((2,1), (0,0)) = N$ noktası ve $PI = [(0,2), (1,3)]$ doğrusu ardından

$PI \wedge OX = ((4,1), (0,0)) = G$ noktası belirlenir.

$EF \wedge PI = ((0,1), (0,3)) = N'$ noktası, $FG = [(3,4), (4,3)]$ doğrusu

$FG \wedge IX = ((0,4), (1,0)) = L$ noktası ve $FG \wedge OP = ((4,3), (2,0)) = L'$ noktaları elde edilir.

$EG = [(4,4), (0,2)]$ doğrusu ile OI doğrusunun kesişim noktası,

$EG \wedge OI = ((2,1), (2,1)) = M$ ve $PX \wedge EG = ((2,0), (3,0)) = M'$ noktasıdır.

$PM = [(4,0), (2,0)]$ üzerindeki diğer 2 nokta bulunmalıdır.

$L \circ PM$ olarak kabul edilirse. $L \circ PM \Leftrightarrow (1,0) \neq (4,0) \otimes (0,4) \oplus (4,2)$ olur.

$N \circ PM$ olsun. $N \circ PM \Leftrightarrow (0,0) \neq (4,0) \otimes (2,1) \oplus (4,2)$ olmasından dolayı 3. mertebeden bir alt düzlem değildir.

2. Örnek: $O=((0,0),(0,0))$, $I=((1,0),(1,0))$, $X=((0,0))$, $P=((3,4),(2,0))$

$OP=[(2,1),(0,0)]$, $OX=[(0,0),(0,0)]$, $OI=[(1,0),(0,0)]$, $PX=[(0,0),(2,0)]$, $IX=[(0,0),(1,0)]$ olduğundan,

$OP \wedge IX = ((4,2), (1,0)) = E$ ve $OI \wedge PX = ((2,0), (2,0)) = F$ noktaları belirlenir.

$EF = [(1,1), (0,3)]$ doğrusudur.

$EF \wedge OX = ((4,1), (0,0)) = N$ noktası ve $PI = [(2,2), (4,3)]$ doğrusu ardından

$PI \wedge OX = ((0,1), (0,0)) = G$ noktası belirlenir.

$EF \wedge PI = ((1,1), (3,3)) = N'$ noktası, $FG = [(2,1), (3,3)]$ doğrusu

$FG \wedge IX = ((1,2), (1,0)) = L$ noktası ve $FG \wedge OP = ((2,1)) = L'$ noktaları elde edilir.

$EG = [(3,1), (3,2)]$ doğrusu ile OI doğrusunun kesişim noktası,

$EG \wedge OI = ((2,1), (2,1)) = M$ ve $PX \wedge EG = ((3,0), (2,0)) = M'$ noktasıdır.

$PM = [(4,3), (2,3)]$ doğrusu üzerindeki diğer 2 nokta belirlenmelidir.

$L \circ PM$ olarak kabul edilirse. $L \circ PM \Leftrightarrow (1,0) \neq (4,3) \otimes (1,2) \oplus (2,3)$ olur.

$N \circ PM$ olsun. $N \circ PM \Leftrightarrow (0,0) \neq (4,3) \otimes (4,1) \oplus (2,3)$ olacağından 3. mertebeden bir alt düzlem değildir.

6.2. P_2S nin 5. Mertebeden Alt Düzlemi

Bu bölümde, Baer alt düzlemine odaklanarak, projektif bir düzlemde 5. mertebeden alt düzlemlerin oluşumu tartışılmaktadır. Aşağıdaki teorem ve ispat, Kartezyen grup düzlemindeki düzenli bir dörtgenin nasıl bir Baer alt düzleminin konfigürasyonuna yol açtığını, geometrik özelliklerini ve yapısını detaylandırarak özetlemektedir.

Teorem 6.1. $O = (00, 00)$, $I = (10, 10)$, $X = (00)$ ve $Y = (\infty)$ P_2S 'de düzgün bir dörtgen olsun. P_2S 'nin düzgün dörtgeninin tamamlanmışından elde edilen konfigürasyon, P_2S 'nin bir Baer alt düzlemini belirler.

İspat. Kartezyen grup düzleminin 25. mertebeden Baer alt düzlemi, 5. mertebeden projektif bir alt düzlemdir. Baer alt düzleminin 31 nokta ve 31 doğruya sahip olması gerektiği bilinmektedir. Gerekli hesaplamalar yapılırsa, bu düzlemin noktalar kümesi ve doğrular kümesi aşağıdaki gibi belirlenir.

$$((0,0), (0,0)), ((0,0), (1,0)), ((0,0), (2,0)), ((0,0), (3,0)), ((0,0), (4,0)), \quad ((0,0))$$

$$((1,0), (0,0)), ((1,0), (1,0)), ((1,0), (2,0)), ((1,0), (3,0)), ((1,0), (4,0)), \quad ((1,0))$$

$$((2,0), (0,0)), ((2,0), (1,0)), ((2,0), (2,0)), ((2,0), (3,0)), ((2,0), (4,0)), \quad ((2,0))$$

$$((3,0), (0,0)), ((3,0), (1,0)), ((3,0), (2,0)), ((3,0), (3,0)), ((3,0), (4,0)), \quad ((3,0))$$

$$((4,0), (0,0)), ((4,0), (1,0)), ((4,0), (2,0)), ((4,0), (3,0)), ((4,0), (4,0)), \quad ((4,0))$$

$$[(\infty)]$$

$$[((0,0), (0,0)), ((0,0), (1,0)), ((0,0), (2,0)), ((0,0), (3,0)), ((0,0), (4,0)), \quad ((0,0))$$

$$((1,0), (0,0)), ((1,0), (1,0)), ((1,0), (2,0)), ((1,0), (3,0)), ((1,0), (4,0)), \quad ((1,0))$$

$$((2,0), (0,0)), ((2,0), (1,0)), ((2,0), (2,0)), ((2,0), (3,0)), ((2,0), (4,0)), \quad ((2,0))$$

$$\begin{aligned}
& ((3,0), (0,0)), ((3,0), (1,0)), ((3,0), (2,0)), ((3,0), (3,0)), ((3,0), (4,0)), & ((3,0)) \\
& ((4,0), (0,0)), ((4,0), (1,0)), ((4,0), (2,0)), ((4,0), (3,0)), ((4,0), (4,0)), & ((4,0)) \\
& & [(\infty)]
\end{aligned}$$

Önerme 6.2. P_2S düzleminin, $O = (00, 00)$, $I = (10, 10)$, $X = (00)$ ve $Y = (\infty)$ olmak üzere OIXY düzgün dörtgeninin tamamlanmışı olan, 5. mertebeden altdüzlemine izomorf 24 tane farklı altdüzlem mevcuttur.

İspat. P_2S düzleminin 5. mertebeden altdüzlemine izomorf 24 farklı düzlemin bulunduğunu göstermek için her bir düzlemin en az bir farklı nokta içerdiğini göstermek yeterli olacaktır. Öyle ki, P_2S düzleminin f_a kolinasyonu

$$\begin{aligned}
f_a: (x, y) &\rightarrow (x, y \oplus a) \\
(\mu) &\rightarrow (\mu) \\
(\infty) &\rightarrow (\infty)
\end{aligned}$$

Bu şekilde tanımlı olduğundan dolayı f_a kolinasyonunun bire bir olma durumundan dolayı her bir a için OIXY ile eşleşen 24 farklı dörtgen mevcuttur. Her bir dörtgende I noktasının görüntüsü, her bir düzlemde tek olarak mevcut olacağından dolayı her bir düzlem en az bir farklı nokta içerir.

7. 25. MERTEBEDEN PROJEKTİF DÜZLEMDE 3-NET ÖRNEKLERİ

7.1. P_2S Düzleminde 3-Netlerin İncelenmesi

Cebirsel yapısı cisim olan projektif düzlemlerde k-netler bilinmektedir. Bu çalışmada, daha zayıf bir cebirsel yapıya sahip P_2S düzleminde 3-net örnekleri araştırılmış ve sunulmuştur.

3-netler, sonlu bir projektif düzlemde doğruların ve noktaların düzenlenmesi ve düzlemin simetrisi hakkında fikirler verir. Bu yapılar özellikle sonlu geometrilerin incelenmesinde önemlidir ve belirli cebirsel yapıların geometrik bir yorumunu sunar.

Tanım 7.1. Bir cisimden elde edilen projektif düzlemdeki bir 3-net, bu projektif düzlemde doğrular kümesi $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ şeklinde 3 alt kümeye ayrılan sonlu bir doğru kümesi ve X de projektif düzlemin sonlu bir nokta alt kümesi olan ve aşağıdaki koşulları sağlayan bir (A, X) çiftidir:

- 1- Her $i \neq j$ ve her $\ell \in A_i, \ell' \in A_j$ için $\ell \cap \ell' \in X$ olur.
- 2- Her $x \in X$ noktası ve her $i (i \in \{1, 2, 3\})$ için x noktasından geçen bir tek $\ell \in A_i$ doğrusu vardır.

Teorem 7.1. $X_1 = (00,00), X_2 = (10,10), X_3 = (00), X_4 = (00,cd)$ ve $c \neq 0,1, d = 0, P_2S$ de düzgün bir dörtgen olsun. $(A, X), P_2S$ de $X = \{X_1, X_2, X_3, X_4\}$ noktalar kümesi ve $A = \{l_1 = X_1X_4, l_2 = X_1X_3, l_3 = X_1X_2, l_4 = X_2X_3, l_5 = X_2X_4, l_6 = X_3X_4\}$ doğrular kümesi olmak üzere bir 3-net belirtir.

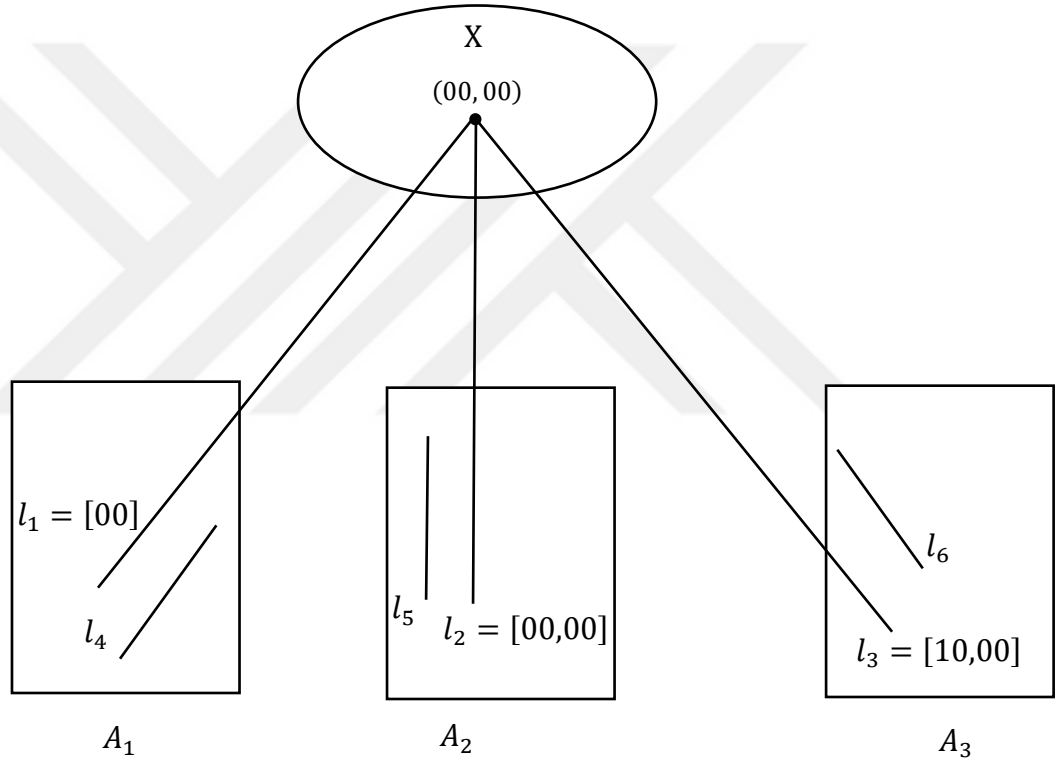
İspat. c ve d $c \neq 0,1, d = 0$ şartıyla F_5 'in elemanlarıdır.

Eğer X noktalar kümesi ve A aşağıda verilen doğrular kümesi ise, (A, X) P_2S üzerinde bir 3-net belirtir.

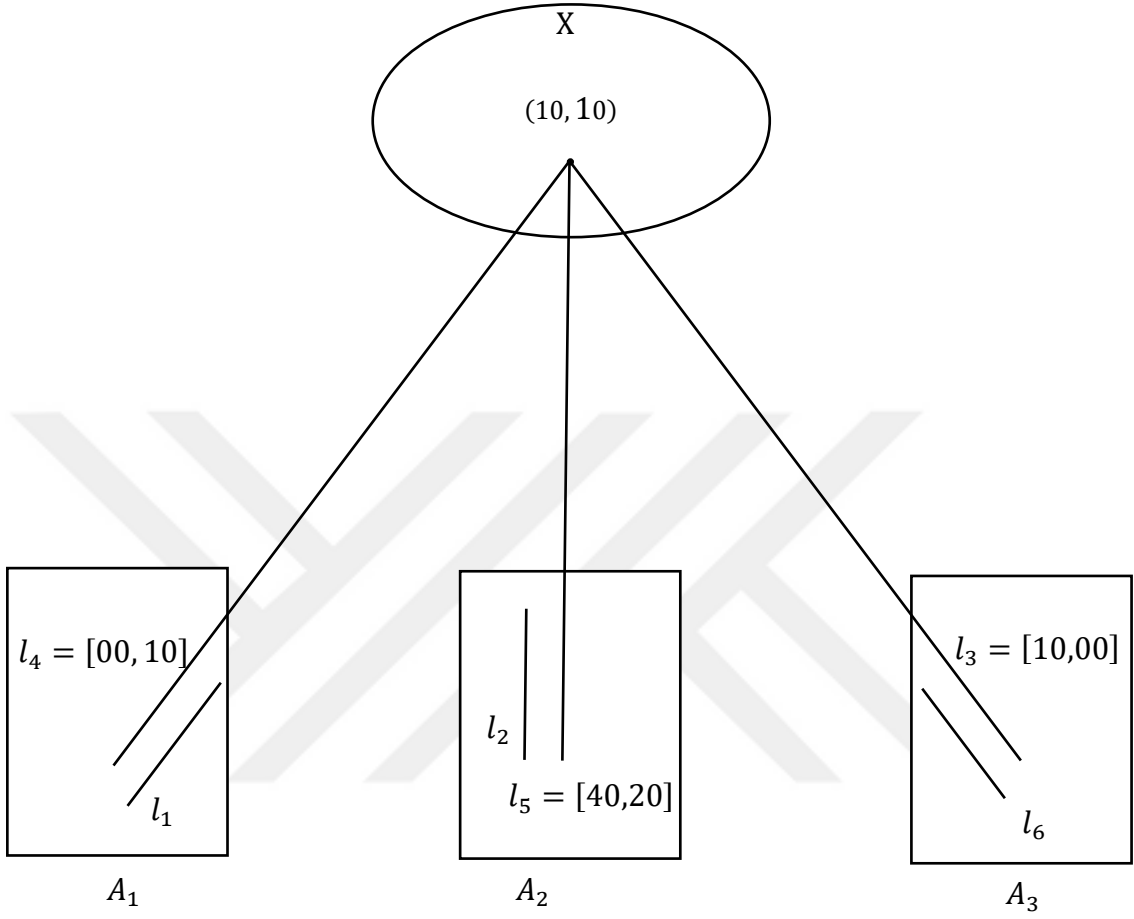
$X = \{(00,00), (10,10), (00), (00,20)\}$ ve $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \{l_1, l_4\} \cup \{l_2, l_5\} \cup \{l_3, l_6\}$ ise $A = \{[00], [00,10]\} \cup \{[00,00], [40,20]\} \cup \{[10,00], [00,20]\}$

Doğrular kümesi olan A , her birinde 2 doğru bulunan üç alt kümeye ayrılmıştır. Ayrıca, X noktalar kümesinden seçilen herhangi bir noktadan, A doğrular kümesinin birleşimi olan her bir A_i alt kümesinden yalnızca bir doğru geçmektedir. Bu geometrik yapı sonlu olduğundan, her nokta için aşağıdaki konfigürasyonlar kolayca elde edilebilir.

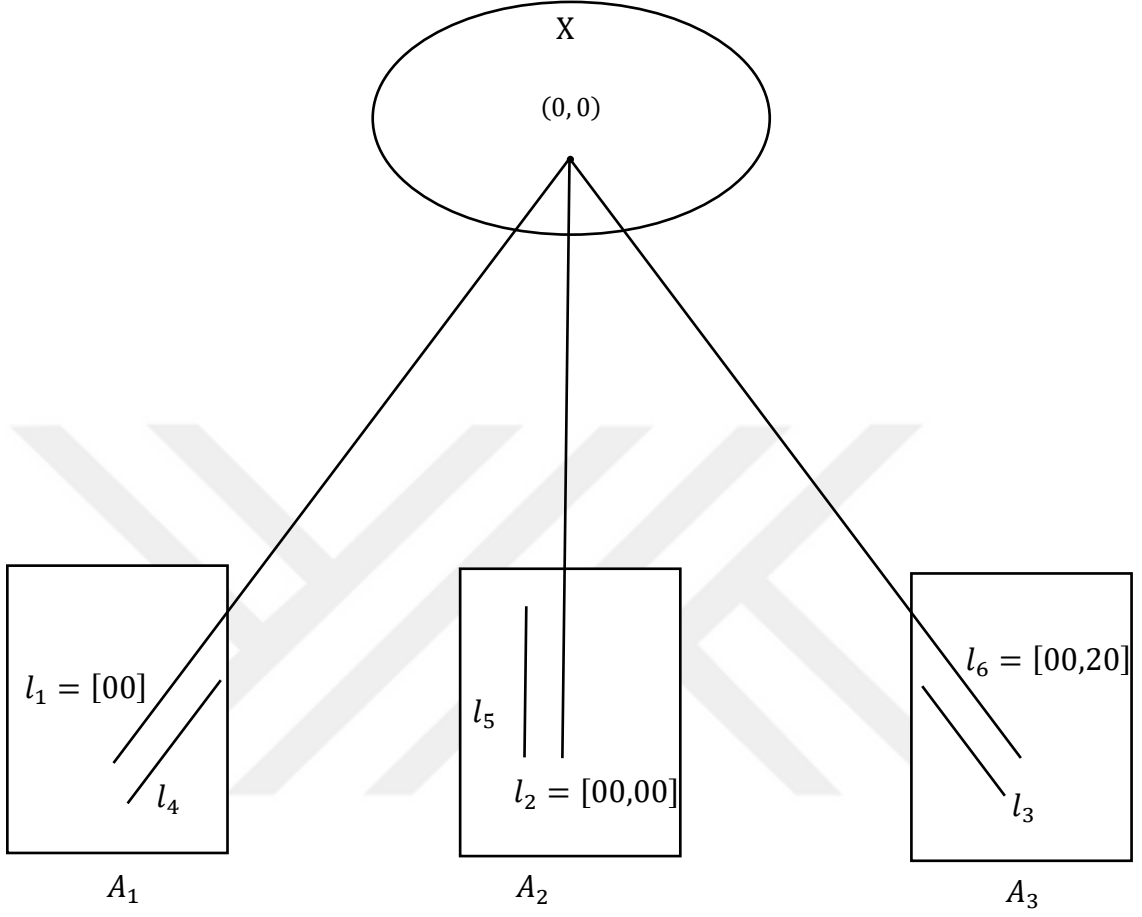
Seçilen nokta $(00,00)$ ise, bu noktadan geçen üç doğrunun kümesi aşağıdaki gibi elde edilir:



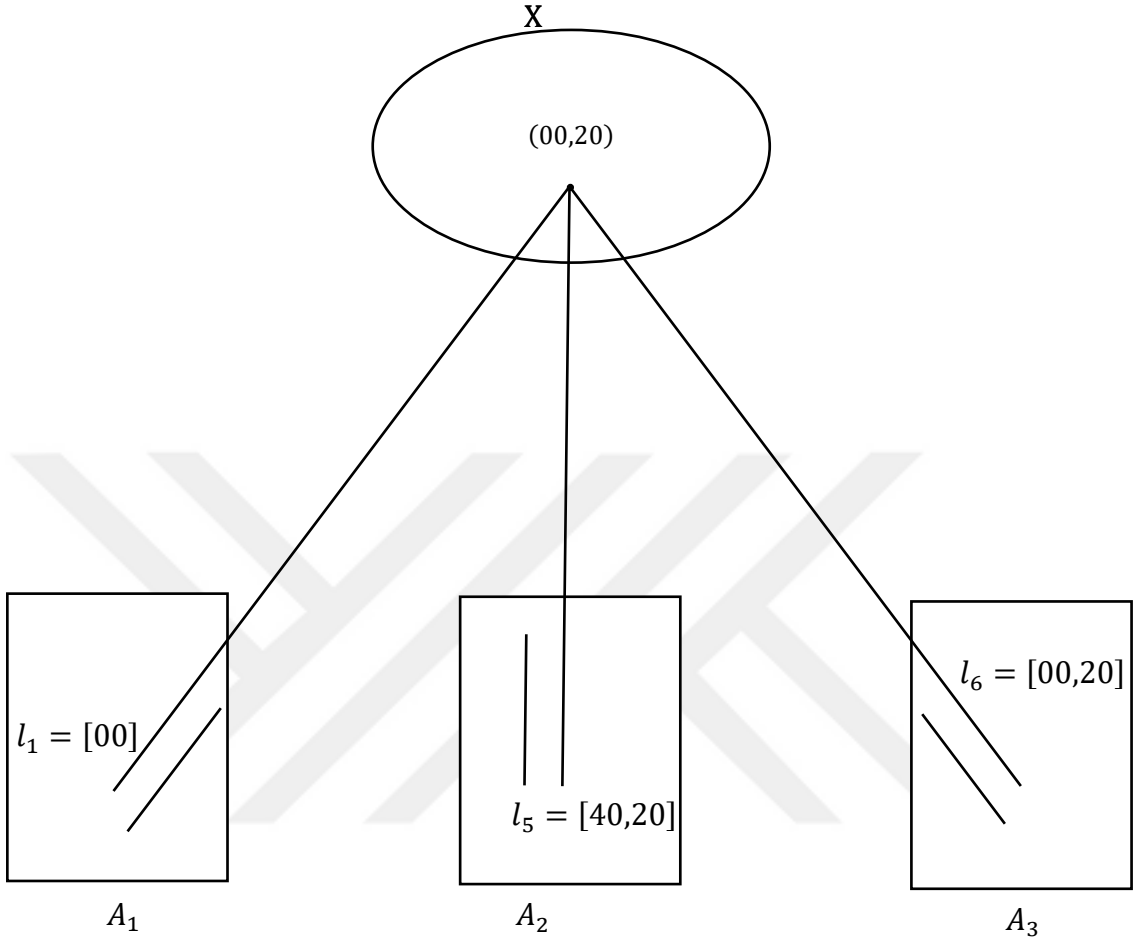
Seçilen nokta $(10,10)$ ise, bu noktadan geçen üç doğrunun kümesi aşağıdaki gibi elde edilir:



Seçilen nokta $(0,0)$ ise, bu noktadan geçen üç doğrunun kümesi aşağıdaki gibi elde edilir:



Seçilen nokta $(2,0)$ ise, bu noktadan geçen üç doğrunun kümesi aşağıdaki gibi elde edilir:



Bu nedenle, P_2S içinden seçilen (A, X) yapısı 2. mertebeden 3-net olur.

Teorem 7.2. P_2S düzlemindeki en az 2. mertebeden projektif düzlem sayısı kadar 3-net vardır.

İspat. P_2S düzlemindeki her ikinci mertebeden projektif düzlemlerin sayısı t tane olsun. Projektif düzlemden herhangi bir doğru, üzerindeki noktalarla alınırsa bir afin düzlem elde edilir. Her 2. mertebeden afin düzlemden bir 3-net elde edilir. Dolayısıyla P_2S düzleminde en az $7.t$ tane 3-net vardır.

8. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, cebirsel yapısı 25. mertebeden en küçük kartezyen grup olan ve noktaları ile doğruları bu cebirsel yapı kullanılarak koordinatlanan 25. mertebeden projektif düzlem incelenmiştir. Çalışma kapsamında, bu düzlemde herhangi bir tamdörtgenin tamamlanmış olan 2. mertebeden Fano düzlemleri ve 5. mertebeden Baer altdüzlemi örnekleri ele alınmıştır. Yapılan incelemeler sonucunda, seçilen tamdörtgenin tamamlanmışlarının 3. mertebeden bir altdüzlem oluşturmadığı gösterilmiştir. Ayrıca, bu düzlemde bazı 3-net örnekleri verilerek yapının farklı yönleri ortaya konulmuştur.

Elde edilen bulgular, projektif düzlemlerin cebirsel ve geometrik özelliklerine dair yeni veriler sunmakta ve bu tür yapıların daha iyi anlaşılmasına katkı sağlamaktadır. Çalışmada incelenen yapılar, projektif geometri ve sonlu cebirsel sistemler arasındaki ilişkileri daha ayrıntılı bir şekilde değerlendirme olanağı sunmuştur.

Bu bağlamda, 25. mertebeden projektif düzlemin farklı cebirsel yapılarla modellenmesi ve karşılaştırmalı analizlerinin yapılması, seçilen tamdörtgenlerin tamamlanmışlarının farklı mertebelerdeki altdüzlemlerle olan ilişkilerinin araştırılması, bu yapıların kodlama teorisi, kriptografi ve diğer uygulamalı matematik alanlarındaki potansiyel kullanım alanlarının değerlendirilmesi ilerleyen çalışmalar için öneriler sunabilir.

Sonuç olarak, bu çalışma projektif düzlemler ve altdüzlemleri üzerine yapılan araştırmalara katkı sağlamış, elde edilen sonuçlarla hem teorik hem de uygulamalı matematik açısından yeni bakış açıları sunmuştur.

KAYNAKLAR DİZİNİ

- Akça Z, Some Results On The Smallest Cartesian Group Plane, *Eskisehir Technical University Journal of Science and Technology B- Theoretical Sciences*, 2023; 11, . 2, 143–147
- Akça Z. The construction of the cartesian group plane of order 25. MSc, University of Anadolu, Eskişehir, Turkey, 1991.
- Bayar A, Akça Z, Ekmekçi S. On Embedding the Projective Plane $PG(2,4)$ to the Projective Space $P(4,4)$. *New Trends in Mathematical Sciences*, 2022: 10- 4: 142– 150.
- A Bayar, Z Akca, E Altintas, S Ekmekci. On the complete arcs containing the quadrangles constructing the Fano planes of the left near field plane of order 9, *New trends in mathematical sciences*, 2016 4 (4), 266-275.
- Ekmekçi S, Bayar A, Akça Z. On The Projective Planes in Projective Space $PG(4,4)$. *Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fen Bilimleri Dergisi*, 2022: 38- 3: 519–524.
- Ekmekçi S, Bayar A, Altıntaş Kahrıman E, Akça Z. On the Complete $(k,2)$ - arcs of the Hall plane of order 9. *International Journal of Advanced Research in Computer Science and Software Engineering*, 2016; 6-10: 282–288.
- S Ekmekçi, Bayar A. A note on fibered quadrangles, *Konuralp Journal of Mathematics*, 2015, 3, 2, 185-189.
- Panella, G. Una Classe Di Sistemi Cartesiani. *Atti Della Accademia Nazionale Lincei Rendiconti*, 1965; 38; 480-485.
- Puccio L and M. J. de Resmini, Subplanes of the Hughes plane of order 25, *Arch. Math.* 49 (1987), 151–165.
- Spencer, J., 1960, On the Lenz-Barlotti Calssification of Projektive planes, *Quart, J. Math. Oxford* (2), 11, 241-275.
- Room, T.G – Kirkpatrick, P.B. 1971, *Miniquaternion Geometry*, London, Cambridge University Press, 177.
- Özcan, M., 1988, *Cebirsel Yapılardan Projektif Düzlem Elde Edilmesi Üzerine*, Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstütüsü Yüksek Lisans Tezi, 130 s.