T.C.
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İKİ BOYUTLU YÜKSEK MERTEBEDEN BULANIK FARK DENKLEM SİSTEMLERİNİN DİNAMİĞİ

Tezi Hazırlayan
Osman TOPAN

Tez Danışmanı
Prof. Dr. Yasin YAZLIK

Matematik Anabilim Dalı
Doktora Tezi

Ocak 2025
NEVŞEHİR

T.C.
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İKİ BOYUTLU YÜKSEK MERTEBEDEN BULANIK FARK DENKLEM SİSTEMLERİNİN DİNAMİĞİ

Tezi Hazırlayan
Osman TOPAN

Tez Danışmanı
Prof. Dr. Yasin YAZLIK

Matematik Anabilim Dalı
Doktora Tezi

Ocak 2025

Prof. Dr. Yasin YAZLIK danışmanlığında **Osman TOPAN** tarafından hazırlanan "İki Boyutlu Yüksek Mertebeden Bulanık Fark Denklem Sistemlerinin Dinamiği" başlıklı bu çalışma, jürimiz tarafından Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Doktora Tezi** olarak kabul edilmiştir.

09/01/2025

JÜRİ

Başkan : Prof. Dr. Seydi Battal Gazi KARAKOÇ

Üye : Prof. Dr. Yasin YAZLIK

Üye : Doç. Dr. Zarife ZARARSIZ

Üye : Doç. Dr. Merve KARA

Üye : Doç. Dr. Durhasan Turgut TOLLU

ONAY:

Bu tezin kabulü Fen Bilimleri Enstitü Yönetim Kurulunun………………….tarih ve…………….. sayılı kararı ile onaylanmıştır.

… / … / 2025

Prof. Dr. Cemal ÇARBOĞA

Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİM SAYFASI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada yer alan bütün bilgilerin bilimsel ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu ve bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Osman TOPAN

TEŞEKKÜR

Doktora öğrenimim ve tez çalışmam boyunca bana kıymetli vaktini ayıran, ilgisini eksik etmeyen, bütün bilgi ve tecrübelerini benimle paylaşan, akademik olarak yetişmeme ve gelişmeme katkıda bulunan, tüm süreç boyunca maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen, tezimin hazırlanmasında her türlü desteği sağlayan ve tezimi titizlikle inceleyen saygıdeğer danışmanım Sayın Prof. Dr. Yasin YAZLIK'a ve ikinci danışmanım Sayın Dr. Öğr. Üyesi Sevda ATPINAR'a teşekkür ederim.

Teknik ve idari yardımlarından dolayı Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Matematik Bölümünün değerli hocalarına teşekkür ederim.

İKİ BOYUTLU YÜKSEK MERTEBEDEN BULANIK FARK DENKLEM SİSTEMLERİNİN DİNAMİĞİ
(Doktora Tezi)

Osman TOPAN

NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Ocak 2025

ÖZET

Bu tez çalışması beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde fark denklemleri, fark denklem sistemleri, bulanık kümeler ve bulanık mantık ile ilgili genel bilgiler verilmiştir. İkinci bölümde, fark denklemleri, fark denklem sistemleri, bulanık fark denklemleri ve bulanık fark denklem sistemleri ile ilgili literatürde yapılmış olan bazı çalışmalarla ilgili bilgiler yer almaktadır. Ayrıca fark denklemleri, fark denklem sistemleri, bulanık kümeler ve bulanık sayılar ile ilgili temel tanım ve teoremlere de yer verilmiştir. Üçüncü bölümde, $\beta_{n+1} = \eta_1 + \frac{\sum_{i=1}^{m}\beta_{n-i}}{\gamma_n}, \gamma_{n+1} = \eta_2 + \frac{\sum_{i=1}^{m}\gamma_{n-i}}{\beta_n}, n \in \mathbb{N}_0,$ bulanık fark denklem sistemi göz önüne alınmış, bu denklem sisteminin pozitif çözümlerinin varlığı ve tekliği gösterilmiş, pozitif çözümlerin sınırlılığı ve denge noktasına yakınsaklığı incelenmiştir. Ayrıca, sonuçların doğruluğunu göstermek için iki örnek verilmiştir. Dördüncü bölümde, $\alpha_{n+1} = \tau_1 + \frac{\alpha_n}{\sum_{i=1}^{m}\beta_{n-i}}, \beta_{n+1} = \tau_2 + \frac{\beta_n}{\sum_{i=1}^{m}\alpha_{n-i}}, n \in \mathbb{N}_0,$ bulanık fark denklem sistemi göz önüne alınmış, bu denklem sisteminin pozitif çözümün varlığı ve tekliği gösterilmiş, pozitif çözümlerin sınırlılığı ve denge noktasına yakınsaklığı incelenmiştir. Ayrıca, sonuçların doğruluğunu göstermek için iki örnek verilmiştir. Beşinci bölümde ise, yapılan çalışmalar doğrultusunda sonuç ve öneriler verilmiştir.

Anahtar kelimeler: Fark denklemi, Fark denklem sistemi, Bulanık fark denklem sistemi, Sınırlılık, Denge noktası.

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Yasin YAZLIK

Sayfa sayısı: 118

DYNAMİCS OF TWO-DIMENSIONAL HIGHER-ORDER SYSTEMS OF FUZZY DIFFERENCE EQUATIONS
(PhD Thesis)

Osman TOPAN

NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
January 2025

ABSTRACT

This thesis consists of five chapters.

In the first chapter, general information about difference equations, systems of difference equations, fuzzy sets and fuzzy logic are given.

In the second chapter, information about some studies in literature about difference equations, systems of difference equations, fuzzy difference equations and systems of fuzzy difference equations are given. Moreover, basic definitions and theorems about difference equations, systems of difference equations, fuzzy difference equations and systems of fuzzy difference equations are given. In the third chapter, system of fuzzy difference equations $\beta_{n+1} = \eta_1 + \frac{\sum_{i=1}^{m} \beta_{n-i}}{\gamma_n}, \gamma_{n+1} = \eta_2 + \frac{\sum_{i=1}^{m} \gamma_{n-i}}{\beta_n}, n \in \mathbb{N}_0,$ is considered, the existence and uniqueness of positive solutions of the given system is shown and the equilibrium point is investigated. Also, two examples are given to demonstrate the accuracy of the results. In the fourth chapter, system of fuzzy difference equations $\alpha_{n+1} = \tau_1 + \frac{\alpha_n}{\sum_{i=1}^{m} \beta_{n-i}}, \beta_{n+1} = \tau_2 + \frac{\beta_n}{\sum_{i=1}^{m} \alpha_{n-i}}, n \in \mathbb{N}_0,$ is considered, the existence and uniqueness of positive solutions of the given system is shown and the equilibrium point is investigated. Also, two examples are given to demonstrate the accuracy of the results.

In the fifth chapter, results and suggestions are given in line with the studies carried out.

Keywords: Difference equations, System of difference equations, System of fuzzy difference equations, Boundedness, Equilibrium point.

Thesis Supervisor: Prof. Dr. Yasin YAZLIK

Pages: 118

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER LİSTESİ

SİMGELER ve KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{N}_0$	Doğal Sayılar Kümesi
$\mathbb{N}_{n_0}$	$\{n_0, n_0+1, \ldots\}$
$\mathbb{N}$	Sayma sayılar kümesi
$\overline{k,l}$	$\{n \in \mathbb{Z} : k \leq n \leq l, k; l \in \mathbb{Z}\}$
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^+$	Pozitif reel sayılar kümesi
$\mathbb{Z}^+$	Pozitif tam sayılar kümesi
$\mathbb{R}^n$	$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$ biçiminde tanımlı n boyutlu kartezyen çarpım kümesi
$\mathcal{F}(X)$	X kümesindeki tüm bulanık alt kümelerin koleksiyonu
$\mathbb{R}_f$	Bulanık sayılar kümesi
$\mathbb{R}_f^+$	Pozitif bulanık sayılar kümesi
Δ	İleri fark operatörü
Δ^{-1}	Ters fark operatörü
E	Kaydırma operatörü
$\sum$	Toplam sembolü
$\bar{x}$	Denge noktası
$\subseteq$	Altkümesidir
$\forall$	Her
$\exists$	Bazı
$\cup$	Kümelerin birleşimi
$\cap$	Kümelerin kesişimi

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Bulanık kümeler teorisi, analiz ve yaklaşımlar teorisi ile büyük ölçüde örtüşen bağımsız bir bilim dalıdır. Bulanık kümeler ve bulanık sistemlerin matematik, bilgisayar bilimleri ve mühendislik gibi birçok alanda oldukça fazla uygulaması vardır. Kategorisi kolay yapılamayan bilginin iletilmesinde insan dili ve düşüncesi yani dilsel değişkenler önemli bir rol oynar. Aslında, Zadeh'in bulanık kümeler kavramı şansa bağlı değil, klasik küme teorisinin tam kategori belirtmeyen bilgilerin aktarılmasında olan yetersizliğinden kaynaklanmaktadır. Bulanık küme kavramı, insanın ifadesinin ve düşüncesinin muğlaklığının üstesinden gelmek için matematiğin katı kesinliğini kullanır.

Klasik küme teorisinde, bir elemanın herhangi bir kümeye üyeliği incelendiğinde, karşımıza iki durum çıkmaktadır. Eleman ya kümenin elemanıdır veya değildir. Ancak, her zaman bu cevap yeterli olmayabilir.

Bu noktada, bulanık kümeler kavramı karşımıza çıkar. Bulanık kümelerde kesin ve net sınırlar değil de belirsizlikler vardır. Bu belirsizlikleri modellemek istediğimizde bulanık küme teorisi oldukça güçlü bir araçtır. Gerçek dünyada her zaman kesin olmayan durumlarla karşılaşılmaktadır. Bu durumda, dinamik sistemlerin belirsizliğini ele almak istediğimizde, elimizdeki fark denklemini bulanıklaştırmak iyi bir yaklaşım olacaktır.

Matematiksel hesaplamalar genellikle, verilen değerler kümesinden bir fonksiyonun değerini yinelemeli olarak hesaplamamıza olanak tanıyan denklemlere dayanır. Bu tür denklemlere "fark denklemi" veya "yinelemeli denklem" denir [43].

Fark denklemleri ve rekürans bağıntıları insanlık tarihi boyunca kullanılmış ve hala da kullanılmaya devam etmektedir. Bazı fark denklemleri basit iken bazıları çok daha karmaşık olabilmektedir. Bazı fark denklemlerinin çözümleri bulunabilirken, bazılarının çözümleri bulunamamaktadır. Çözüm bulunamadığında durumlarda ise çözümün davranışları ile ilgili yorumlar yapılmaktadır. Bu yorumlar, sadece matematiğin değil, aynı zamanda diğer bilim dallarının ihtiyacından kaynaklanmaktadır.

Fark denklemlerinin çözümlerinin nitel özelliklerinin çalışılması, eskiden beri hayati ve aktif çalışma alanıdır. Bilim ve teknolojinin hızlı gelişiminden dolayı, biyolojik, teknolojik, jeolojik ve diğer birçok alanda sorunlar ortaya çıkmıştır. Matematiksel modellemelerin çoğu, bu sorunlardan doğmuştur. Fark denklemlerinin niteliksel davranışını incelemek, bu modellerin çözümlerinin karakterlerini öğrenmeye katkı sağlayabilir [61].

Fark denklemleri dünyada gözlemlenen değişimlerin ve olayların doğal tanımı olarak ortaya çıkar. Çünkü zamanla değişen değişkenlerin ölçümleri farklıdır ve bu denklemler kendi başlarına önemli matematiksel modellerdir. Daha önemlisi fark denklemleri, diferansiyel denklemlerin ayrıklaştırılması metotlarının çalışmalarında da ortaya çıkar. Fark denklemleri teorisi, tekabül eden diferansiyel denklemler teorisinden daha zengindir [53].

Fark denklemleri alanındaki çalışmalar, denklemin veya sistemin analitik çözümlerini belirleyerek nicel, denklemin veya sistemin çözümlerinin davranışını inceleyerek nitel veya değişik metotlar kullanarak çözümün yaklaşık değerlerini nümerik olarak hesaplamak suretiyle gerçekleştirilir [34].

Fark denklemleri olasılık teorisi, sıralama problemleri, istatistik problemleri, stokastik zaman serileri, kombinatorik analiz, sayılar teorisi, geometri, elektrik ağları, radyasyon miktarı, genetik, ekonomi, psikoloji, sosyoloji gibi birçok alandaki gerçek yaşam durumlarında ortaya çıkar [3]. Fark denklem modellerinin, aynı zamanda kanser büyümesi gibi biyomedikal alanın spektrumu, yaşlanma, hücre çoğalması ve genetik gibi şaşırtıcı derecede geniş kullanım alanı vardır [61]. Riccati fark denklemi olarak bilinen $x_{n+1} = \dfrac{a + bx_n}{c + x_n}$ denkleminin matematiksel biyoloji ve optik alanlarında birçok uygulaması vardır [67].

Ayrık zamanlı nüfus modeli, çeşitli organizmaların yaşam öykülerinin tanımlanması için en uygun matematiksel tanımdır. Bu modeller balıkçılık gibi alanlarda sıklıkla kullanılmaktadır [102]. Klasik nüfus modellerinden birisi olan ve aynı zamanda Skellam denklemi olarak da bilinen Beverton-Holt modeli

$$x_n = \frac{\beta x_{n-1}}{1+\delta x_{n-1}} \tag{1.1}$$

denklemi ile ifade edilir. Burada β üretkenlik parametresi, δ yoğunluk bağımlılığı seviyesi olmak üzere x_n, n. jenerasyondaki nüfustur.

Bilindiği üzere, 2019 yılında tüm dünyayı COVID 19 denilen bulaşıcı bir hastalık sarmıştır. O süreçte, hastalığın yayılma hızını modellemeye çalışan fark denklemleri de bulunmaktadır. Araştırmacılar kendi ülkelerindeki vaka istatistiklerine göre modellemeler üretmişlerdir. Yapılan bu modellemeler, belki ileride yaşanabilecek buna benzer salgın durumlarında da kullanılabilecektir.

Örneğin Li ve arkadaşları, 2020 yılında Shanxi ilinde COVID 19 hastalığının bulaşmasını tanımlamak için fark denklem modeli yapmışlardır. Bu modelde, $N(t)$ ile insan nüfusu, $S(t)$ ile hassas vakalar, $E(t)$ ile maruz kalınan vakalar, $I(t)$ ile bulaşıcı vakalar, $Q(t)$ ile doğrulanmış vakalar ve $R(t)$ ile de iyileşen vakalar gösterilmiştir. Çalışılan denklem sistemi

$$\begin{cases} S(t+1) = S(t) - \dfrac{\beta S(t)E(t) + \beta_1 S(t)I(t)}{N(t)}, \\ E(t+1) = E(t) + A(t) + \dfrac{\beta S(t)E(t) + \beta_1 S(t)I(t)}{N(t)} - \delta E(t), \\ I(t+1) = I(t) + B(t) + \delta E(t) - mI(t), \\ Q(t+1) = Q(t) + mI(t) - \gamma Q(t), \\ R(t+1) = R(t) + \gamma Q(t), \\ N(t) = S(t) + E(t) + I(t) + Q(t) + R(t), \end{cases} \tag{1.2}$$

biçimindedir.

Dünyada, insan yaşamı ile ilgili her konuda bu şekilde sorular yer almaktadır. Araştırmacılar, karşılaştıkları sorular ile ilgili veri topladıkça, soruların cevabını bulabilmeleri için, matematiksel modellemelere ihtiyaç duymaktadırlar. Dolayısıyla, dünya üzerinde yaşam devam ettiği sürece, fark denklemleri hiçbir zaman güncelliğini kaybetmeyecektir. Çünkü, fark denklemlerinin diğer alanlara uygulanabilir olmasının en büyük nedenlerinden biri, geçmişte toplanan veriyi şimdiki zamanda birleştirip, analiz edip, gelecek için uygun modellemeler üretmesidir [55].

Günümüzde bulanık küme teorisi yapay zekâ, bilgisayar bilimleri, tıp, kontrol mühendisliği, karar teorisi, uzman sistemler, mantık, yönetim bilimi, yöneylem araştırması, model tanıma ve robotik gibi bir çok alanda kullanılmaktadır [104].

Bulanık fark denklemleri, katsayıları ve başlangıç koşulları bulanık sayılar ile çözümü bulanık sayı dizisi olan özel bir fark denklem türüdür. Doğasında var olan belirsizlikle uğraşmanın verdiği avantajdan dolayı bulanık fark denklemleri, bu modellerin nitel özellikleri üzerinde çalışmak hem teorik açıdan hem de uygulama açısından önemli araştırma konusu olmuştur [107].

Bulanık fark denklemleri, değişkenler arasındaki ilişki veya ilişkilerin belirsiz veya muğlak olan kompleks sistemleri temsil etmek için kullanılan matematiksel modellerdir. Bulanık fark denkleminin çözümü ise, sistemin davranışını zamanla tarif eden bulanık sayılar kümesidir. Sistemleri modellemek için bulanık fark denklemleri kullanılarak bu sistemlerin davranışları için daha derin bir anlayış elde edilebilir ve gelecekteki davranışları hakkında ise daha doğru tahminlerde bulunulabilir [81].

1.1. Fark Denklemleri Tarihçesi

Rekürans yoluyla hesaplama fikri, saymanın kendisi kadar eskidir. M. Ö. 2000' lerde Babilliler zamanında kökleri ayıklamak için ilkel formunda karşımıza çıkmaktadır. Sonrasında Pisagor'un M. Ö. 450' lerde betimsel (figurative) sayı çalışmalarında karşımıza çıkmaktadır. Betimsel sayılara örnek olarak şunlar verilebilir. Üçgensel sayılar, $a_n = a_{n-1} + n,\ a_0 = 0,\ n \in \mathbb{N}_0,$ fark denkleminin çözümleridir ve $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$ biçimindedir. Karesel sayılar $b_n = b_{n-1} + n^2,\ b_0 = 0,\ n \in \mathbb{N}_0,$ fark denkleminin çözümleridir ve $b_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ biçimindedir. Pisagor ayrıca, $x^2 - 2y^2 = 1$ Pell denkleminin daha geniş çözümlerini üretmek için, özellikle $\sqrt{2}$ yaklaşımlarını hesaplamak için $x_n = x_{n-1} + 2y_{n-1},\ y_n = x_{n-1} + y_{n-1}$ fark denklem sistemini kullanmıştır. Arşimed (M. Ö. 250) çemberin çevresini hesaplama çalışmalarında P_n (çemberin etrafına çizilen ve n

kenarlı çokgen) ile p_n (çemberin içine çizilen ve n kenarlı çokgen) in çevrel uzunluklarını hesaplamak için, $P_{2n} = 2p_nP_n / \left(p_n + P_n\right), p_{2n} = \sqrt{p_nP_{2n}}$ formundaki denklemlerini kullandı. Bilinen bazı diğer antik buluşlar ise Euclid algoritması ve Zeno paradoksudur. Ayrıca Euclid geometrik serileri çalışmıştır. Ancak, geometrik serilerin toplamlarının formülü Vieta tarafından 1593 yılı civarında bulunmuştur. 1200' lü yılların başlarında (tahmini 1202 yılı) cevabı $1,1,2,3,5,8,13,\ldots$ biçimindeki Fibonacci sayıları olan meşhur tavşan problemi formülize edilmiştir. Ancak, ilgili $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ fark denklemi ilk olarak 1634 yılı civarında Albert Girard tarafından kaleme alınıştır. Bu denklemi 1730 yılında De Moivre çözmüştür. Bombelli 1572 yılında $z_n = 1 + \dfrac{1}{z_{n-1}}$, $\sqrt{2}$ ye yaklaşmak için kullanılan ve Fibonacci sayıları oranlarını sağlayan denklemine benzeyen $y_n = 2 + \dfrac{1}{y_{n-1}}$ denklemini çalışmıştır. Ayrıca, Fibonacci fark denklemleri ile yakından ilişkisi olan sürekli kesirler kavramının yaklaşık bir tanımını vermiştir. Sürekli kesirlerin daha kesin tanımı 1613 yılı civarında Cataldi tarafından verilmiştir. Bilinen en eski iki indisli fark denklemi örnekleri binom katsayıları denklemi olan $b_{n+1,r} = b_{n,r} + b_{n-1,r}$ dir ve kökeni Chia Hsien (1050) ve Ömer Hayyam'a dayanır. Yineleme metodu tümevarımın Fransesco Maurolico tarafından 16. yüzyılda bulunması ve sonrasında 17. yüzyılda Fermat ve Pascal tarafından geliştirilmesi ile önemli ölçüde ilerlemiştir. Sonlu farklar kalkülüsü, Thomas Harriet (1560-1621) tarafından bulunmuş ve Henry Briggs (1556-1630) tarafından logaritma hesaplamalarına uygulanmıştır. Sonrasında sonlu farklar kalkülüsü, 1672 yıllarında Leibniz tarafından tekrar bulunmuştur. Newton, Euler, Lagrange, Gauss ve diğer matematikçiler sonlu farklar kalkülüsünü enterpolasyon (interpolation) teorisinde de kullanmışlardır. Sonlu farklar teorisi, Stirling tarafından 18. yüzyıl başlarında büyük ölçüde ilerletilmiştir. Goldstine, bu alanda yapılmış olan ilk çalışmaların daha detaylı bilgisini vermektedir. Bu arada, Newton metodu (ilkel hali Vieta tarafından biliniyordu) olarak adlandırılan ve lineer olmayan fark denklemlerinin önemli bir sınıfı, Newton tarafından 1669 yıllarında $y^3 - y - 5 = 0$ denkleminin çözümlerinde ve Kepler denklemi hesaplamalarında kullanılmıştır. 1690 yılında Raphson daha sistematik bir metodu ele almıştır. Bir diğer lineer olmayan fark denklemleri sınıfı ise aritmetik ve geometrik ortalamaları ihtiva eden denklem çiftlerinden meydana gelmektedir. Örneğin, $x_n = \frac{x_{n-1} + y_{n-1}}{2}$, $y_n = \sqrt{x_{n-1} y_{n-1}}$ denklemleri Lagrange tarafından eliptik integrallerin indirgenmesi (reduction) ve hesaplanması amacıyla kullanılmıştır. Gauss ve Borhartd bazı ilgili algoritmalar bulmuşlar ve eliptik fonksiyonların keşfine Gauss'un buluşları götürmüştür. Lineer fark denklemleri teorisinin temelleri 18. yüzyılda de Moivre, Euler, Lagrange, Laplace gibi matematikçiler tarafından atılmıştır. Fibonacci denklemini çözmek için kullanılan üreteç fonksiyonları, olasılık teorisindeki bir çalışmasında ilk olarak Laplace faydalandı. Ayrıca Laplace, üreteç fonksiyonları Laplace metodu olarak bilinen çözümlerin ve bu çözümlerin asimptotik davranışlarının integral temsillerine de uygulamıştır. Aslında, asimptotik analiz, konuya kısmen öncesinde Maclaurin (1742) giriş yapmıştır. Euler ise (1755)' in toplamların, yaklaşık toplamların keşfedilmiş çözümlerinin kapalı formları yokluğundan zorlandığında bu alana girmiştir. Lineer fark denklemlerinin çözümlerinin asimptotik özellikleri çalışmalarının kapsamlı temeli 1880' lerde asimptotik seriler kavramını biçimlendiren ve uygun koşullar altında çözümlerin ardışık oranlarının bir karakteristik köke yaklaşmak zorunda olduğunu gösteren, Poincare tarafından atılmıştır. 1909 yılında Perron bu sonucun önemli genişletilmiş biçimini vermiştir ve asimptotik teori 1930 yılında Birkhoff ve öğrencileri tarafından belli bir bütünlük seviyesine getirilmiştir. Diferansiyel denklemlerin çözümlerine yaklaşmak için fark denklemlerini kullanma fikri, 1769 yılında Euler'in, 1840 yılları civarında Cauchy tarafından yakınsama ispatında verilen, çokgen metodundan çıkmıştır. Sonrasında konu, Lipschitz, Kutta ve Runge tarafından ilerletilmiş süreçlerin geliştirdiği 19. yüzyıl sonuna kadar neredeyse canlılığını kaybetmiş gibi görünmektedir. I. Dünya Savaşı sırasında nümerik yaklaşımlara olan acil ihtiyaç, bu alanda çalışmaları büyük oranda teşvik etmiş ve dijital bilgisayar alanındaki gelişmelerle birlikte yayın sayıları daha da artmıştır. Dahlquist çok aşamalı yakınsamanın modern teorisini başlatmıştır. Lineer fark denklemlerinin özel fonksiyonların hesaplamasındaki verimli uygulamaları 1952 yılında Miller'in Bessel fonksiyonları için algoritma geliştirmiştir. Wimp, lineer olmayan fark denklemleri ile hesaplama örneklerinin yanı sıra bu metodun ve ilgili algoritmaların gelişimini tartışmaktadır. Lineer fark denklemleri teorisindeki daha fazla gelişim, konuyu lineer diferansiyel denklemler teorisi ile kıyaslanabilir bir duruma getirmiştir [14, 15, 29, 43, 53, 82].

1950 li yıllarda birçok çevrebilimci, iterasyonun (yineleme) kararlılığına vurgu yaparak bir yıldan bir sonraki yıla veya bir sezondan bir sonraki sezona nüfustaki değişimi çalışmak için x nüfus yoğunluğu ve r maksimum nüfus büyüme oranı olmak üzere $x_{t+1} = x_t e^{r(1-x_t)}$ lojistik denklemi de dahil basit lineer olmayan fark denklemlerini kullanmışlardır [53].

1.2. Bulanık Küme Tarihçesi

Tarihsel olarak baktığımızda, Zadeh 1965 yılında bizi bulanık küme kavramı ile tanıştırdı. Bulanık kümelerdeki üyelik dereceleri akıl yürütme süreci, yoğunluk seviyeleri, benzerlik seviyeleri, belirsizlik seviyeleri ve tercih dereceleri gibi çeşitli şekillerde yorumlanabilir [23]. Bulanık kümeyi üyelik fonksiyonu ile karakterize etmiş ve bulanık kümelerin birleşimi, kesişimi, konveksliği gibi kavramları kurmuştur. Zadeh, sonrasında bulanık algoritma kavramını 1968 yılında vermiştir. Bellman ve Zadeh, 1970 yılında bulanık ortamında karar verme kavramını örneklerle göstermişlerdir. Zadeh, 1971 yılında bulanık benzerlik bağıntıları ve bulanık sıralama kavramlarını takdim etmiştir. 1975 yılında ise yaş, dış görünüş gibi dilsel değişkenler ve uygulamalarını detaylı bir şekilde anlatmıştır.

Son yıllarda, bulanık sistemler teknolojisi ve kaos teorisi, sistem ve kontrol mühendislerinin, uygulamalı matematikçilerin, teorik ve uygulamacı fizikçilerin, fizyologların ve daha birçok araştırmacı grubunun ilgisini giderek daha fazla çekmektedir. Özellikle, gelişen bilgi işleme teknolojilerinden birisi olan bulanık sistemler, kontrol, otomasyon ve yapay zekadan tutunda görüntü, sinyal işleme ve model tanımaya kadar dünya çapında pek çok sektör ve teknik alanlarda yaygın uygulamalar elde etmiştir [57].

1.3. Tezin Amacı

Tez çalışması kapsamında iki farklı bulanık fark denklem sistemi incelenmiştir. Bunlardan birincisi $\beta_{n+1} = \eta_1 + \frac{\sum_{i=1}^{m} \beta_{n-i}}{\gamma_n}$, $\gamma_{n+1} = \eta_2 + \frac{\sum_{i=1}^{m} \gamma_{n-i}}{\beta_n}$, $n \in \mathbb{N}_0$, olup, η_1, η_2 parametreleri ve $i \in \{0,1,\ldots,m\}$ için β_{-i}, γ_{-i} başlangıç koşulları pozitif bulanık sayılardır. Öncelikle verilen bu bulanık fark denklem sisteminin çözümünün varlığı ve tekliği gösterilmiştir. Sonrasında sistemin çözümünün sınırlı olması için gerekli şartların ne olduğu bulunmuştur. Ayrıca, denge noktası elde edilmiştir. Son olarak iki örnek verilerek bulunan sonuçların doğruluğu teyit edilmiştir.

İncelenen ikinci bulanık fark denklem sistemi ise $\alpha_{n+1} = \tau_1 + \frac{\alpha_n}{\sum_{i=1}^{m} \beta_{n-i}}$, $\beta_{n+1} = \tau_2 + \frac{\beta_n}{\sum_{i=1}^{m} \alpha_{n-i}}$, $n \in \mathbb{N}_0$, olup, τ_1, τ_2 parametreleri ve $i \in \{0,1,\ldots,m\}$ için α_{-i}, β_{-i} başlangıç koşulları pozitif bulanık sayılardır. Bu bulanık fark denklem sisteminin çözümünün varlığı ve tekliği gösterilmiş, sınırlı olması için gerekli şartlar bulunmuş ve denge noktası elde edilmiştir. Son olarak, bulunan sonuçların doğruluğunu gösteren bazı örnekler verilmiştir.

BÖLÜM 2

LİTERATÜR TARAMASI VE TEMEL BİLGİLER

Bu bölümde fark denklemleri, fark denklem sistemleri, bulanık fark denklemleri, bulanık fark denklem sistemleri ile ilgili literatürde yapılan çalışmalar ile fark denklemleri, fark denklem sistemleri, bulanık kümeler ve bulanık sayılar ile ilgili temel bilgilere yer verilmiştir.

2.1. Literatür Taraması

2.1.1. Fark denklemleri ve sistemleri ile ilgili yapılan çalışmalar

Bu bölümde fark denklemleri ve fark denklem sistemleri ile ilgili literatürde yapılan çalışmalar yer almaktadır.

Devault ve arkadaşları (1998), "*On the recursive sequence* $x_{n+1}=\frac{A}{x_n}+\frac{1}{x_{n-2}}$" adlı çalışmalarında $x_{-2},x_{-1},x_0,A\in(0,\infty)$ olmak üzere

$$x_{n+1}=\frac{A}{x_n}+\frac{1}{x_{n-2}},\ n\in\mathbb{N}_0, \tag{2.1}$$

fark denkleminin pozitif çözümlerinin 2-periyotlu bir çözüme yakınsadığını göstermişlerdir. Ayrıca (2.1) fark denkleminin çözümlerinin $\{x_{2n}\}_{n=-1}^{\infty}$ ve $\{x_{2n+1}\}_{n=-1}^{\infty}$ alt dizilerinin sonlu limite yakınsadığını da göstermişlerdir [19].

Papaschinopoulos ve Schinas (1998), "*On a system of two nonlinear difference equations*" adlı çalışmalarında $A\in(0,\infty)$, p,q pozitif tam sayılar, $i\in\{0,1,\ldots,p\}$ ve $j\in\{0,1,\ldots,q\}$ için x_{-i} ve y_{-j} pozitif sayılar olmak üzere

$$x_{n+1}=A+\frac{y_n}{x_{n-p}},\ y_{n+1}=A+\frac{x_n}{y_{n-q}},\quad n\in\mathbb{N}_0, \tag{2.2}$$

sisteminin pozitif çözümlerinin salınımlılık hareketi, sınırlılığı ve pozitif denge noktasının global asimptotik kararlılığını çalışmışlardır [63].

Amleh ve arkadaşları (1999), "*On the recursive sequence* $x_{n+1}=\alpha+\frac{x_{n-1}}{x_n}$" adlı çalışmalarında $\alpha\in[0,\infty)$ ve $x_{-1},\ x_0$ pozitif reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1}=\alpha+\frac{x_{n-1}}{x_n},\ n\in\mathbb{N}_0, \tag{2.3}$$

fark denkleminin sınırlılık karakterini, global kararlılığını ve periyodikliğini incelemişlerdir. (2.3) denkleminin pozitif çözümlerinin periyodik olması için gerekli şartları, denge noktasının kararlı olduğu durumları ve monotonluk şartlarını elde etmişlerdir [7].

Kosmala ve arkadaşları (2000), "*On the recursive sequence* $y_{n+1}=\frac{p+y_{n-1}}{qy_n+y_{n-1}}$" adlı çalışmalarında p,q parametreleri ve y_{-1},y_0 başlangıç koşulları pozitif sayılar olmak üzere

$$y_{n+1}=\frac{p+y_{n-1}}{qy_n+y_{n-1}},\ n\in\mathbb{N}_0, \tag{2.4}$$

ikinci mertebeden lineer olmayan rasyonel fark denkleminin çözümlerinin periyodik karakterini ve global kararlılığını incelemişlerdir [51].

Liu ve Cui (2000), "*Hyperbolic logistic difference equation with infinitely many delays*" adlı çalışmalarında $\alpha\in(1,\infty)$, $b\in(0,\infty)$, $c_j\in\mathbb{Z}^+$ ve $s\in\{0,1,\ldots,m\}$ için x_{-s} pozitif reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1}=\frac{\alpha x_n}{1+x_n+b\sum_{i=1}^{m}c_jx_{n-j}},\ n\in\mathbb{N}_0, \tag{2.5}$$

fark denklemini incelemişlerdir. Bu denklem lojistik integral-diferansiyel denklemlerin en iyi yaklaşım yapan sonsuz sayıda gecikmeli fark denklemlerindendir. (2.5) denkleminin sınırlılık şartlarını ve denge noktasının global kararlılığını araştırmışlardır [58].

Abu-Saris ve Devault (2003), "*Global stability of* $y_{n+1}=A+\frac{y_n}{y_{n-k}}$" adlı çalışmalarında $k\in\mathbb{N}_2$, $i\in\{0,1,\ldots,k\}$ için $y_{-i}\in(0,\infty)$ olmak üzere

$$y_{n+1}=A+\frac{y_n}{y_{n-k}},\ n\in\mathbb{N}_0, \tag{2.6}$$

fark denkleminin $\bar{y}=1+A$ pozitif denge noktasının global asimptotik kararlı olması için gerekli şartları elde etmişlerdir [2].

Devault ve arkadaşları (2003), "*On the recursive sequence* $x_{n+1}=p+\frac{x_{n-k}}{x_n}$" adlı çalışmalarında $k\in\mathbb{N}_2$, $i\in\{0,1,\ldots,k\}$ için x_{-i} başlangıç koşulları ve p pozitif reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1}=p+\frac{x_{n-k}}{x_n},\ n\in\mathbb{N}_0, \tag{2.7}$$

fark denkleminin çözümlerinin sınırlılığını, global kararlılığını ve periyodik karakterini incelemişlerdir [20].

Yang ve arkadaşları (2005), "*On the system of high order rational difference equations* $x_n=\frac{a}{y_{n-p}},y_n=\frac{by_{n-p}}{x_{n-q}y_{n-q}}$" adlı çalışmalarında $p\le q$, a,b,p,q pozitif tam sayılar, $s=\max\{p,q\}$ ve $i\in\{0,1,\ldots,s\}$ için x_{-i},y_{-i} pozitif reel sayılar olmak üzere

$$x_n=\frac{a}{y_{n-p}},\ y_n=\frac{by_{n-p}}{x_{n-q}y_{n-q}},\ n\in\mathbb{N}, \tag{2.8}$$

yüksek mertebeden rasyonel fark denklem sisteminin pozitif çözümlerinin periyodiklik durumlarını çalışmışlardır [87].

Stevic (2006), "*On positive solutions of a* $(k+1)$ *th order difference equation*" adlı çalışmasında sabit bir $k \in \mathbb{N}$ ve $i \in \{0,1,\ldots,k\}$ için x_{-i} başlangıç koşulları negatif olmayan reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-k}}{1+x_n+\cdots+x_{n-k+1}}, \ n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.9}$$

fark denkleminin sıfıra yakınsayan bir çözümü olduğunu göstermiştir [72].

Zhang ve arkadaşları (2007), "*On the nonlinear difference equation system* $x_{n+1} = A + \frac{y_{n-m}}{x_n}, \ y_{n+1} = A + \frac{x_{n-m}}{y_n}$" adlı çalışmalarında $A > 0$, m pozitif tamsayı, $i, j \in \{0,1,\ldots,m\}$ için x_{-i}, y_{-j} başlangıç koşulları pozitif reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = A + \frac{y_{n-m}}{x_n}, \ y_{n+1} = A + \frac{x_{n-m}}{y_n}, \ n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.10}$$

fark denklem sisteminin pozitif çözümlerinin sınırlılığı, global asimptotik kararlılığını incelemişlerdir [96].

Berenhaut ve arkadaşları (2007), "*The global attractivity of the rational difference equation* $y_n = 1 + \frac{y_{n-k}}{y_{n-m}}$" adlı çalışmalarında $s = \max\{k, m\}$, $k, m \in \mathbb{N}$ ve $i \in \{1,2,\ldots,s\}$ için $y_{-i} \in (0,\infty)$ başlangıç koşulları olmak üzere

$$y_n = 1 + \frac{y_{n-k}}{y_{n-m}}, \ n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.11}$$

fark denkleminin pozitif çözümlerinin periyodiklik karakterini ve yakınsaklığını incelemişlerdir [11].

Berenhaut ve arkadaşları (2007), "*The global attractivity of the rational difference equation* $y_n = \dfrac{y_{n-k} + y_{n-m}}{1 + y_{n-k} y_{n-m}}$" adlı çalışmalarında $1 \le k < m$ ve $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ için $y_{-i} \in (0, \infty)$ olmak üzere

$$y_n = \frac{y_{n-k} + y_{n-m}}{1 + y_{n-k} y_{n-m}}, \ n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.12}$$

denkleminin pozitif çözümlerinin periyodiklik karakterini ve yakınsaklığını çalışmışlardır [12].

Stevic (2007), "*On the recursive sequence* $x_n = 1 + \dfrac{\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_{n-p_i}}{\sum_{j=1}^{m} \beta_i x_{n-q_j}}$" adlı çalışmasında $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = \sum_{j=1}^{m} \beta_j = 1$ olacak biçimde seçilen pozitif $i \in \{1, \ldots, k\}$ ve $j \in \{1, \ldots, m\}$ sayılar, $p_i, i \in \{1, \ldots, k\}$ ile $q_j, j \in \{1, \ldots, m\}$, $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$ ve $q_1 < q_2 < \ldots < q_m$ olacak biçimde doğal sayılar ve $s = \max\{p_k, q_m\}$ ve $t \in \{1, 2, \ldots, t\}$ için x_{-t} başlangıç koşulları pozitif reel sayılar olmak üzere

$$x_n = 1 + \frac{\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_{n-p_i}}{\sum_{j=1}^{m} \beta_i x_{n-q_j}}, \ n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.13}$$

fark denkleminin pozitif çözümlerinin sınırlılığını göstermiştir. Ayrıca, (2.13) fark denkleminin periyodik olması için gerekli şartları ve denge noktasına yakınsadığı durumları incelemiştir [73].

Elsayed (2009), "*Dynamics of a recursive sequence of higher order*" adlı çalışmasında a, b, c, d pozitif sabitler, $r = \max\{k, l\}$ ve $i \in \{-l, -l+1, \ldots, 0\}$, $j \in \{-k, -k+1, \ldots, 0\}$ için $cx_{n-i} - dx_{n-j} \ne 0$ olacak şekilde alınan keyfi $i \in \{0, 1, \ldots, r\}$ için x_{-i} pozitif reel başlangıç koşulları olmak üzere

$$x_{n+1} = ax_{n-l} + \frac{bx_{n-l}}{cx_{n-l} - dx_{n-k}}, \ n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.14}$$

fark denklemini çalışmıştır. Denklemin periyodik çözümünün olması için gerekli şartları elde etmiştir. Denge noktasının lokal asimptotikliliğini ve global çekimliliğini incelemiştir [26].

Sedaghat (2009), "*Global behaviors of rational difference equations of orders two and three with quadratic terms*" adlı çalışmasında $a, b > 0$ ve $x_{-2}, x_{-1}, x_0 \in \mathbb{R}$ olmak üzere ikinci mertebeden

$$x_{n+1} = \frac{ax_{n-1}}{x_n x_{n-1} + b}, \ n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.15}$$

rasyonel fark denkleminin ve üçüncü mertebeden

$$x_{n+1} = \frac{ax_n x_{n-1}}{x_n + bx_{n-2}}, \ n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.16}$$

rasyonel fark denklemini incelemiştir. Her iki denklemin de iyi tanımlı olmayan noktaların kümesini belirlemiş ve bu yasaklı kümeler dışındaki başlangıç koşulları için denklemlerin çözümlerinin 0 a veya pozitif sabit noktaya yakınsayabileceği, periyodik olabileceği ve sınırlı olmadığı yasaklı kümeleri belirlemiştir [71].

Qian ve Qi-hong (2011), "*Qualitative behavior of a rational difference equation*" adlı çalışmalarında $p \in \mathbb{R}^+, y_{-1}, y_0 \in (0, \infty)$ olmak üzere

$$y_{n+1} = \frac{y_n + y_{n-1}}{p + y_n y_{n-1}}, \ n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.17}$$

rasyonel fark denkleminin denge noktasının lokal asimptotik kararlılığını ve global çekimliliğini araştırmışlardır [69].

Elsayed ve El-Dessoky (2012), “*Dynamics and behavior of a higher order rational recursive sequence*” adlı çalışmalarında $t=\max\{s,l,k\}$ ve $i\in\{0,1,\dots,t\}$ için x_{-i} başlangıç koşulları ve a,b,c,d,e parametreleri pozitif reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1}=ax_{n-s}+\frac{bx_{n-l}+cx_{n-k}}{dx_{n-l}+ex_{n-k}},\ n\in\mathbb{N}_0, \tag{2.18}$$

fark denkleminin çözümlerinin sınırlılığı, periyodik özelliği ve global yakınsaklığını incelemişlerdir [27].

Obaid ve arkadaşları (2012), “*Global attractivity and periodic character of difference equation of order four*” adlı çalışmalarında $a,b,c,d,\alpha,\beta,\gamma$ ile başlangıç koşulları x_{-3},x_{-2},x_{-1},x_0 pozitif reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1}=ax_n+\frac{bx_{n-1}+cx_{n-2}+dx_{n-3}}{\alpha x_{n-1}+\beta x_{n-2}+\gamma x_{n-3}},\ n\in\mathbb{N}_0, \tag{2.19}$$

denkleminin çözümlerinin sınırlılığı, periyodikliği, global kararlılık karakterini araştırmışlardır [62].

Touafek ve Elsayed (2012), “*On the periodicity of some systems of nonlinear difference equations*” adlı çalışmalarında sıfırdan farklı x_{-1},y_{-1},x_0,y_0 başlangıç koşulları için

$$x_{n+1}=\frac{y_n}{x_{n-1}\left(\pm1\pm y_n\right)},\ y_{n+1}=\frac{x_n}{y_{n-1}\left(\pm1\pm x_n\right)},\ n\in\mathbb{N}_0, \tag{2.20}$$

ikinci mertebeden rasyonel fark denklem sisteminin çözüm formlarını elde etmişlerdir [75].

Zhang ve arkadaşları (2013), “*On the symmetrical system of rational difference equation* $x_{n+1}=A+\frac{y_{n-k}}{y_n},y_{n+1}=A+\frac{x_{n-k}}{x_n}$” adlı çalışmalarında, $A>0$, $i\in\{0,1,\dots,k\}$ için $x_{-i},y_{-i}\in(0,\infty)$ olmak üzere

$$x_{n+1} = A + \frac{y_{n-k}}{y_n}, \; y_{n+1} = A + \frac{x_{n-k}}{x_n}, \; n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.21}$$

simetrik rasyonel fark denklem sistemini çalışmışlardır. $0 < A < 1$, $A = 1$ ve $A > 1$ şartları için çözümlerin davranışını araştırmışlardır [99].

Zhang ve arkadaşları (2014), "*On the system of higher order rational difference equations*" adlı çalışmalarında $i \in \{0,1,\ldots,k\}$ için $x_{-i}, y_{-i} \in (0,\infty)$ ve A, B pozitif sabitler olmak üzere

$$x_{n+1} = A + \frac{x_n}{\sum_{i=1}^{k} y_{n-i}}, \; y_{n+1} = B + \frac{y_n}{\sum_{i=1}^{k} x_{n-i}}, \; n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.22}$$

fark denkleminin pozitif çözümlerinin sınırlı olması için gerekli şartları bulmuşlar, denge noktasını elde etmişler, lokal ve global asimptotik kararlı olduğu durumları incelemişlerdir [100].

Halim (2015), "*Global character of systems of rational difference equations*" adlı çalışmasında fark denklem sisteminin x_0, y_0 başlangıç koşulları sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{1}{1 \pm y_n}, \; y_{n+1} = \frac{1}{1 \pm x_n}, \; n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.23}$$

fark denklem sistemlerinin çözümlerinin Fibonacci sayılar ile ilişkili olduğunu bulmuş ve bu çözümlerin kararlılık karakterini ve asimptotik davranışlarını da incelemiştir [34].

Yazlık ve arkadaşları (2015), "*On the solutions of a max-type difference equation system*" adlı çalışmalarında A ile x_0, y_0 başlangıç koşulları pozitif reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \max\left\{\frac{1}{x_n}, \frac{A}{y_n}\right\}, \; y_{n+1} = \max\left\{\frac{1}{y_n}, \frac{A}{x_n}\right\}, \; n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.24}$$

max-type fark denklem sisteminin periyodik çözümlerini incelemişlerdir [88].

Hu (2016), "*Global behavior of a system of two nonlinear difference equation*" adlı çalışmasında $A, B, a, b \in (0, \infty), x_0, y_0 \in (0, \infty)$ olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{A + ay_n}, \; y_{n+1} = \frac{y_n}{B + by_n}, \; n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.25}$$

lineer olmayan fark denklem sisteminin global davranışını çalışmıştır [38].

Ahmed ve Eshtewy (2016), "*Attractivity of the recursive sequence* $x_{n+1} = \dfrac{A - Bx_{n-2}}{C + Dx_{n-1}}$" adlı çalışmalarında A, B negatif olmayan reel sayılar, C, D ise pozitif reel sayılar ve her $n \geq 0$ için $C + Dx_{n-1} \neq 0$ olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{A - Bx_{n-2}}{C + Dx_{n-1}}, \; n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.26}$$

fark denkleminin global çekimliliğini incelemişlerdir [5].

Dekkar ve arkadaşları (2017), "*Global stability of a third-order nonlinear system of difference equations with period-two coefficients*" adlı çalışmalarında 2- periyotlu pozitif $\{p_n\}$ ve $\{q_n\}$ sayı dizileri ve $i \in \{0,1,2\}$ için $x_{-i}, y_{-i} \in [0, \infty)$ olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{p_n + y_n}{p_n + y_{n-2}}, \; y_{n+1} = \frac{q_n + x_n}{q_n + x_{n-2}}, \; n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.27}$$

üçüncü mertebeden rasyonel fark denklem sisteminin çözümlerinin sınırlılığını, pozitif denge noktasının lokal asimptotik kararlığını ve global asimptotik kararlılığını incelemişlerdir [18].

Tollu ve arkadaşları (2017), "*Behavior of positive solutions of a difference equation*" adlı çalışmalarında a, b, c, d pozitif reel sayılar, y_{-2}, y_{-1}, y_0 negatif olmayan reel sayılar olmak üzere

$$y_{n+1} = \frac{ay_{n-1}}{by_n y_{n-1} + cy_{n-1} y_{n-2} + d}, \; n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.28}$$

fark denkleminin pozitif çözümlerinin global asimptotik kararlılığını, periyodikliğini, sınırlılığını ve salınımlılığını incelemişlerdir [76].

Saleh ve arkadaşları (2017), "*On the Dynamics of a rational difference equation* $x_{n+1}=\dfrac{\alpha+\beta x_n+\gamma x_{n-k}}{Bx_n+Cx_{n-k}}$," adlı çalışmalarında α,β,γ parametreleri ile $k\in\mathbb{N}$, $i\in\{0,1,\ldots,k\}$ için x_{-i} başlangıç şartları pozitif reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1}=\frac{\alpha+\beta x_n+\gamma x_{n-k}}{Bx_n+Cx_{n-k}},\ n\in\mathbb{N}_0, \tag{2.29}$$

lineer olmayan yüksek mertebeden rasyonel fark denkleminin pozitif çözümlerinin periyodiklik karakteri, invaryant aralıkları, yarı döngü ve global asimptotik kararlılığını incelemişlerdir [70].

Gümüş (2018), "*The global asymptotic stability of a system of difference equations*" adlı çalışmasında $m\in\mathbb{Z}^+$, $A\in(0,\infty)$ ve $i\in\{0,1,\ldots,m\}$ için x_{-i},y_{-i} pozitif sayılar olmak üzere

$$x_{n+1}=A+\frac{y_{n-m}}{y_n},\ y_{n+1}=A+\frac{x_{n-m}}{x_n},\ n\in\mathbb{N}_0, \tag{2.30}$$

fark denklem sisteminin tek pozitif denge noktasının global asimptotik kararlılığı ve yakınsama oranını çalışmıştır [31].

Tollu ve arkadaşları (2018), "*On a solvable nonlinear difference equation of higher order*" adlı çalışmalarında k,l sabit doğal sayı, $\alpha,\beta,\delta,\gamma$ ile $i=\overline{1,k+l}$ için $\beta^2+\gamma^2\neq 0$ olacak biçimde reel sayılar olmak üzere

$$x_n=\alpha x_{n-k}+\frac{\delta x_{n-k}x_{n-(k+l)}}{\beta x_{n-(k+l)}+\gamma x_{n-l}},\ n\in\mathbb{N}_0, \tag{2.31}$$

yüksek mertebeden lineer olmayan fark denkleminin kapalı formda çözülebilir olduğunu göstermişler ve literatürde önemli sonuçlara genişletilebilecek bazı sonuçlar elde etmişlerdir [77].

Abualrub ve Aloqeili (2020), "*Dynamics of the system of difference equations* $x_{n+1}=A+\frac{y_{n-k}}{y_n},\ y_{n+1}=B+\frac{x_{n-k}}{x_n}$" adlı çalışmalarında $k\in\mathbb{Z}^+$, $A,B>0$ ve $i\in\{0,1,\ldots,k\}$ için x_{-i},y_{-i} pozitif sayıları olmak üzere

$$x_{n+1}=A+\frac{y_{n-k}}{y_n},\ \ y_{n+1}=B+\frac{x_{n-k}}{x_n},\ \ n\in\mathbb{N}_0, \tag{2.32}$$

rasyonel fark denklem sisteminin pozitif çözümlerinin sınırlılığını, salınımlılık davranışı ile tek pozitif denge noktasının global asimptotik kararlı olduğunu göstermişlerdir [1].

Amira ve Halim (2021), "*Global behavior of p-dimensional difference equations system*" adlı çalışmalarında A negatif olmayan bir sabit ve $j\in\{1,2,\ldots,p\}$ ve $i\in\{0,1,\ldots,m\}$ için $x_{-i}^{(j)}$ pozitif reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1}^{(1)}=A+\frac{x_{n-m}^{(2)}}{x_n^{(2)}},\ \ x_{n+1}^{(2)}=A+\frac{x_{n-m}^{(3)}}{x_n^{(3)}},\ldots,\ \ x_{n+1}^{(p)}=A+\frac{x_{n-m}^{(1)}}{x_n^{(1)}},\ \ n,m,p\in\mathbb{N}_0, \tag{2.33}$$

p - boyutlu lineer olmayan rasyonel fark denklemlerinin çözümlerinin denge noktasının global asimptotik kararlılığını ve yakınsama oranını çalışmışlardır. Ayrıca, (2.33) sisteminin çözümlerinin genel davranışları hakkında bazı sonuçlar elde etmişlerdir [6].

Li ve Li (2021), "*Global asymptotical stability in a rational difference equation*" adlı çalışmalarında $k\in\mathbb{N}$, $p,q\in[0,\infty)$, $r>0$ başlangıç koşulları $x_{-k},\cdots,x_{-1},x_0\in(0,\infty)$ olmak üzere

$$x_{n+1}=\frac{p+qx_n}{1+rx_{n-k}},\ \ n\in\mathbb{N}_0, \tag{2.34}$$

fark denkleminin pozitif denge noktasının global asimptotik kararlılığını araştırmışlardır [56].

Elsayed ve Gafel (2022), “*Dynamics and global stability of second order nonlinear difference equation*” adlı çalışmalarında a,b,c,d,e,f parametreleri ile x_{-1},x_0 pozitif reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1}=ax_n+bx_{n-1}+\frac{cx_n+dx_{n-1}}{e+fx_{n-1}},\ n\in\mathbb{N}_0, \tag{2.35}$$

ikinci mertebeden rasyonel fark denkleminin çözümlerinin sınırlı olması için gerekli şartları elde etmişler, denge noktasının lokal asimptotik kararlı ve global asimptotik kararlı olduğu durumları incelemişlerdir [28].

Gümüş (2023), “*Global asymptotic behavior of a discrete system of difference equations with delays*” adlı çalışmasında $\alpha,\beta\in(0,\infty)$, $m\in\mathbb{Z}^+$ ve $i\in\{0,1,\ldots,m\}$ için x_{-i},y_{-i} negatif olmayan reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1}=\alpha+\frac{\sum_{i=1}^{m}x_{n-i}}{y_n},\ y_{n+1}=\beta+\frac{\sum_{i=1}^{m}y_{n-i}}{x_n},\ n\in\mathbb{N}_0, \tag{2.36}$$

fark denklem sisteminin sınırlılık karakteri ve asimptotik kararlılık özelliklerini incelemiştir. Ayrıca, sistemin yakınsama oranını da elde etmiştir [32].

Hassani ve arkadaşları (2023), “*Dynamics of a higher-order three-dimensional nonlinear system of difference equations*” adlı çalışmalarında $X>0,Y>0,Z>0$ ve $i\in\{0,1,\ldots,k\}$ için u_{-i},v_{-i},w_{-i} pozitif sayıları olmak üzere

$$u_{n+1}=X+\frac{v_{n-k}}{v_n},\ v_{n+1}=Y+\frac{w_{n-k}}{w_n},\ w_{n+1}=Z+\frac{u_{n-k}}{u_n},\ n\in\mathbb{N}_0,\ k\in\mathbb{Z}^+, \tag{2.37}$$

fark denklem sisteminin pozitif çözümlerinin yarı döngü analizini yapmışlar, X,Y,Z parametrelerinin durumlarına göre (2.37) sisteminin çözümlerinin sınırlılığını göstermişler, sistemin çözümlerinin yakınsama oranını bulmuşlar ve denge noktasının global asimptotik davranışını incelemişlerdir [36].

2.1.2. Bulanık fark denklemleri ve sistemleri ile ilgili yapılan çalışmalar

Bu bölümde, bulanık fark denklemleri ve bulanık fark denklem sistemleri ile ilgili literatürde yapılan çalışmalar yer almaktadır.

Deeba ve arkadaşları (1996), "*A fuzzy difference equation with an application*" adlı çalışmalarında $(n+1)$. nesildeki genotip sıklığını veren w, q bulanık sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = wx_n + q,\ n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.38}$$

bulanık fark denklemini incelemişlerdir. Verilen bulanık fark denkleminin çözümünü elde etmişlerdir. Ayrıca, w, q ve x_0 başlangıç koşulu bulanık sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = f\left(x_n, w, q\right),\ n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.39}$$

birinci mertebeden bulanık fark denkleminin çözümü için genel bir metot önermişlerdir [16].

Deeba ve De Korvin (1999), "*Analysis by fuzzy difference equations of a model of CO_2 level in the blood*" adlı çalışmalarında a, b, m parametreleri ve C_0, C_1 başlangıç koşulları bulanık sayılar olmak üzere

$$C_{n+1} = C_n - abC_{n-1} + m,\ n \in \mathbb{N}_1, \tag{2.40}$$

bulanık fark denkleminin çözümünü elde etmişlerdir [17].

Papaschinopoulos ve Papadopoulos (2002), "*On the fuzzy difference equation $x_{n+1} = A + \frac{x_n}{x_{n-m}}$*" adlı çalışmalarında A parametresi ve $i \in \{0, 1, \ldots, m\}$ için x_{-i} pozitif bulanık sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = A + \frac{x_n}{x_{n-m}},\ n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.41}$$

bulanık fark denkleminin pozitif çözümünün olduğunu ve bu bulanık sayı çözümün tek pozitif çözüm olduğunu göstermişlerdir. (2.41) denkleminin pozitif bulanık sayı çözümünün hangi durumlarda sınırlı olduğunu bulmuşlar, denge noktasının asimptotik davranışını incelemişlerdir [64].

Papaschinopoulos ve Stefanidou (2003), "*Boundedness and asymptotic behavior of the solutions of a fuzzy difference equation*" adlı çalışmalarında $k \in \mathbb{N}$, $i \in \{0,1,\ldots,k\}$ için p_i pozitif reel sabitler, $j \in \{0,1,\ldots,k\}$ için A_j parametreleri ile $i \in \{0,1,\ldots,k\}$ için x_{-i} pozitif bulanık sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \sum_{i=0}^{k} \frac{A_i}{x_{n-i}^{p_i}}, \ n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.42}$$

$(k+1)$. mertebeden parametrik bulanık fark denkleminin pozitif çözümünün olduğunu ve bu çözümün tek pozitif çözüm olduğunu göstermişlerdir. (2.42) denkleminin pozitif bulanık sayı çözümünün hangi durumlarda sınırlı olduğunu bulmuşlar, denge noktasının asimptotik davranışını incelemişlerdir [65].

Zhang ve arkadaşları (2012), "*On the fuzzy difference equation* $x_{n+1} = A + \sum_{i=0}^{k} \frac{B_i}{x_{n-i}}$" adlı çalışmalarında $\{x_n\}$ pozitif bulanık sayı dizisi, $k \in \mathbb{N}_0$, A parametresi, $i \in \{0,1,\ldots,k\}$ için B_i ve $j \in \{0,1,\ldots,k\}$ için x_{-j} pozitif bulanık sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = A + \sum_{i=0}^{k} \frac{B_i}{x_{n-i}}, \ n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.43}$$

lineer olmayan bulanık fark denkleminin tek bir pozitif çözümünün olduğunu göstermişlerdir. Ayrıca, denge noktasının hangi durumlarda mevcut olduğunu ve bu denge noktasının asimptotik kararlı olduğunu bulmuşlardır [97].

Zhang ve arkadaşları (2012), "*Behavior of solutions to a fuzzy nonlinear difference equation*" adlı çalışmalarında, $\{x_n\}$ pozitif bulanık sayısı dizisi, A, B, x_{-1}, x_0 pozitif bulanık sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{Ax_n + x_{n-1}}{B + x_{n-1}}, \ n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.44}$$

lineer olmayan bulanık fark denkleminin pozitif çözümünün varlığını ve tekliğini göstermişler ve çözümlerin sınırlı olduğu durumu bulmuşlardır. Ayrıca, (2.44) denkleminin pozitif çözümünün denge noktasının olduğu durumları bulmuşlar ve çözümlerin bu denge noktasına yakınsadığını göstermişlerdir [98].

Hatir ve arkadaşları (2014), "*On a fuzzy difference equation*" adlı çalışmalarında, $\{x_n\}$ pozitif bulanık sayısı dizisi, A, B, x_{-1}, x_0 bulanık sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = A + \frac{B}{x_{n-1}}, \ n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.45}$$

bulanık fark denkleminin tek bir pozitif çözümünün olduğunu göstermişlerdir. Ayrıca, bu pozitif bulanık sayı çözümünün denge noktasının olduğunu ve hangi durumlarda bu noktaya yakınsadığını ve hangi durumlarda bu denge noktası civarında salınımlı olduğunu bulmuşlardır [37].

Din (2015), "*Asymptotic behavior of a second-order fuzzy rational difference equation*" adlı çalışmasında P, x_{-1}, x_0 pozitif bulanık sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{x_n + x_{n-1}}{P + x_n x_{n-1}}, \ n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.46}$$

ikinci mertebeden rasyonel bulanık fark denkleminin tek bir pozitif çözümünün olduğunu göstermiştir. Ayrıca, bu pozitif bulanık sayı çözümün sınırlılığını incelemişler ve kararlılık analizini yapmıştır [22].

Khastan (2017), "*New solutions for first order linear fuzzy difference equations*" adlı çalışmasında w, q parametreleri ve x_0 başlangıç koşulu pozitif bulanık sayılar olmak üzere

$$x_n = wx_{n-1} + q, \ n \in \mathbb{N}, \tag{2.47}$$

birinci mertebeden lineer bulanık fark denkleminin bulanık bölme operatörüne göre tek bir pozitif çözümünün olduğunu göstermiş ve bu çözümün sınırlı olduğu durumları incelemiştir [45].

Khastan (2018), "*Fuzzy logistic difference equation*" adlı çalışmasında $\{x_n\}$ pozitif bulanık sayı dizisi, β parametresi ve x_0 başlangıç koşulu pozitif bulanık sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \beta x_n (1 - x_n), \; n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.48}$$

ve

$$x_{n+1} = \beta x_n \ominus \beta x_n^2, \; n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.49}$$

bulanık fark denklemlerini incelemiştir. Burada "$\ominus$" Hukuhara fark operatörüdür. Bu denklemler lojistik fark denklemleridir. Bu denklemlerin pozitif bulanık sayı çözümlerinin varlığını ve tekliğini göstermiş ve bu çözümlerin denge noktasına yakınsadığını göstermiştir [46].

Lavanya ve Lovenia (2018), "*Positive solutions of a fuzzy nonlinear difference equations*" adlı çalışmalarında $i \in \{0,1,\dots,k\}$ için A_i, B_i ile $i \in \{0,1,\dots,k+1\}$ için x_{-i} pozitif bulanık sayılar ve $i \in \{0,1,\dots,k\}$ için p_i pozitif sabit sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \sum_{i=0}^{k} \frac{A_i x_n + x_{n-i}}{B_i x_{n-i}^{p_i}}, \; n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.50}$$

lineer olmayan bulanık fark denkleminin tek bir pozitif çözümünün olduğunu göstermişler ve bu çözümün sınırlı olması için gerekli şartları bulmuşlardır. Ayrıca, bu pozitif bulanık sayı çözümünün denge noktasını bulmuşlar ve denge noktasına yakınsadığı durumları incelemişlerdir [54].

Wang ve Zhang (2018), "*Dynamical behavior of first-order nonlinear fuzzy difference equation*" adlı çalışmalarında, $\{x_n\}$ pozitif bulanık sayısı dizisi, A, B, C ile x_0 başlangıç koşulu pozitif bulanık sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = A + Bx_n e^{-Cx_n}, \; n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.51}$$

birinci mertebeden lineer olmayan bulanık fark denkleminin pozitif çözümünün varlığı, tekliği ve asimptotik davranışını incelemişlerdir [80].

Khastan ve Alijani (2019), "*On the new solutions to the fuzzy difference equation* $x_{n+1} = A + \frac{B}{x_n}$" adlı çalışmalarında A, B pozitif bulanık sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = A + \frac{B}{x_n}, \; n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.52}$$

bulanık fark denkleminin g-bölme işlemine göre çözümünün varlığı ve tekliğini göstermişler ve tek pozitif denge noktasını elde etmişlerdir. Ayrıca, bu pozitif çözümün denge noktası civarında hangi durumlarda salınımlı olduğunu bulmuşlardır [47].

Zhang ve arkadaşları (2019), "*On discrete time Beverton-Holt population model with fuzzy environment*" adlı çalışmalarında $A, B, \tilde{1}$ ve x_0 başlangıç değeri pozitif bulanık sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{Ax_n}{\tilde{1} + Bx_n}, \; n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.53}$$

ayrık zamanlı Beverton-Holt modeli olan bulanık fark denkleminin tek bir pozitif çözümünün olduğunu göstermişler, tek bir pozitif denge noktası olduğunu ve pozitif çözümün bu noktaya yakınsadığını da göstermişlerdir [102].

Zhang ve arkadaşları (2019), "*Asymptotic behavior of discrete time fuzzy single species model*" adlı çalışmalarında, $\{x_n\}$ pozitif bulanık sayı dizisi, A, B parametreleri ve x_0 başlangıç koşulu pozitif bulanık sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = x_n e^{(A - Bx_n)}, \; n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.54}$$

ayrık zamanlı tek tür modeli olan bulanık fark denklemini çalışmışlardır. Burada x_n, n. nesildeki birey sayısı, A içsel büyüme oranı, B çevreyi kuşatan ortamın taşıma kapasitesini göstermektedir. Hukuhara fark operatörünü kullanarak modelin tek bir pozitif çözümünün olduğunu ve bu çözümün global asimptotik davranışını incelemişlerdir [101].

Jia (2020), “*Dynamic behaviors of a class of high-order fuzzy difference equations*” adlı çalışmasında $\{x_n\}$ pozitif bulanık sayı dizisi, $A, B, C_3, C_4, \ldots, C_k$ ile $i \in \{0,1,\ldots,k\}$ için x_{-i} başlangıç koşulları pozitif bulanık sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{Ax_{n-1}x_{n-2}}{B + \sum_{i=3}^{k} C_i x_{n-i}}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.55}$$

yüksek mertebeden bulanık fark denkleminin tek bir pozitif çözümünün olduğunu göstermiş ve denge noktalarının lokal asimptotik kararlı olduğunu incelemiştir [39].

Jia ve arkadaşları (2020), “*Existence and uniqueness of positive fuzzy solution for a three-order fuzzy difference equation*” adlı çalışmalarında, A, B, C, D, E, F, G, H parametreleri ile x_{-2}, x_{-1}, x_0 başlangıç koşulları pozitif bulanık sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{A + Bx_n + Cx_{n-1} + Dx_{n-2}}{E + Fx_n + Gx_{n-1} + Hx_{n-2}}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.56}$$

üçüncü mertebeden bulanık fark denkleminin tek bir çözümünün olduğunu göstermişlerdir [40].

Khaliq ve arkadaşları (2021), “*Global dynamics of sixth-order fuzzy difference equation*” adlı çalışmalarında, $\{y_i\}$ bulanık sayı dizisi, D, E, F, G, H parametreleri ve $i \in \{0,1,2,3,4,5\}$ için y_{-i} başlangıç koşulları negatif olmayan bulanık sayılar olmak üzere

$$y_{i+1} = \frac{Dy_{i-1}y_{i-2}}{E + Fy_{i-3} + Gy_{i-4} + Hy_{i-5}}, \quad i \in \mathbb{N}_0, \tag{2.57}$$

altıncı mertebeden bulanık fark denkleminin tek bir negatif olmayan çözümünün olduğunu göstermişler, denge noktalarını elde etmişler ve bu çözümün hangi denge noktalarında kararlı olduğunu incelemişlerdir [48].

Wang ve arkadaşları (2021), "*Dynamics of a high-order nonlinear fuzzy difference equation*" adlı çalışmalarında negatif olmayan m tamsayı, A, B, C parametreleri ve $i \in \{0,1,\dots,m\}$ için x_{-i} pozitif bulanık sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{Ax_{n-m}}{B + C\prod_{i=0}^{m} x_{n-i}}, \ n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.58}$$

yüksek mertebeden lineer olmayan bulanık fark denkleminin pozitif çözümünün varlığını, tekliğini, sınırlılığını, denge noktasının lokal ve global kararlılığını incelemişlerdir [81].

Zhang ve arkadaşları (2021), "*On dynamic behavior of second-order exponential-type fuzzy difference equations*" adlı çalışmalarında A, B, C ile x_{-1}, x_0 pozitif bulanık sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{A + Be^{-x_n}}{C + x_{n-1}}, \ n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.59}$$

ikinci mertebeden üstel bulanık fark denkleminin g-bölme işlemine göre pozitif çözümünün varlığını ve tekliğini göstermişler ve global asimptotik davranışını incelemişlerdir [103].

Zhang ve arkadaşları (2021), "*On discrete-time laser model with fuzzy environment*" adlı çalışmalarında A, B, C, H parametreleri ile x_0 başlangıç koşulu pozitif bulanık sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = Ax_n + \frac{Bx_n}{Cx_n + H}, \ n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.60}$$

ayrık zamanlı bulanık parametreli ve başlangıç koşullu fark denklemini çalışmışlardır. Burada, x_n, n. zamandaki lazer foton sayısıdır. Bu modelin pozitif çözümünün varlığını ve tekliğini göstermişlerdir. Ayrıca, g-bölmeyi kullanarak bu çözümün hangi durumlarda sınırlı olduğunu bulmuşlardır [104].

Han ve arkadaşları (2022), “*Dynamical behaviors of a k-order fuzzy difference equation*” adlı çalışmalarında A, B parametreleri ve $i \in \{0,1,\ldots,k\}$ için x_{-i} başlangıç koşulları pozitif bulanık sayılar ve $k \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{A + Bx_{n-k}}, \ n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.61}$$

lineer olmayan bulanık fark denkleminin tek bir pozitif çözümünün olduğunu göstermişler ve bu çözümlerin sınırlılığı, yakınsaklığı ve asimptotik kararlılığını incelemişlerdir [35].

Jia ve arkadaşları (2022), “*Dynamic behavior of a fractional-type fuzzy difference system*” adlı çalışmalarında $\{x_n\}$ pozitif bulanık sayı dizisi, A, B, C, D parametreleri ve $i \in \{0,1,2,3,4,5\}$ için x_{-i} başlangıç koşulları pozitif bulanık sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{Ax_{n-1}x_{n-2} + Bx_{n-3}}{D + Cx_{n-4}}, \ n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.62}$$

beşinci mertebeden bulanık fark denkleminin tek bir pozitif çözümünün olduğunu göstermişler ve denge noktasının dinamik davranışlarını incelemişlerdir [41].

Sun ve arkadaşları (2022), “*Eventual periodicity of a system of max-type fuzzy difference equations of higher order*” adlı çalışmalarında $k \in \mathbb{N}$, A, B parametreleri ile $i \in \{1,2,\ldots,k\}$ için x_{-i}, y_{-i} pozitif bulanık sayılar olmak üzere

$$\begin{cases} x_n = \max\left\{A, \dfrac{y_{n-1}}{x_{n-k}}\right\}, \\ y_n = \max\left\{B, \dfrac{x_{n-1}}{y_{n-k}}\right\}, \end{cases} \ n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.63}$$

yüksek mertebeden max-type bulanık fark denklem sisteminin tek bir pozitif çözümünün olduğunu göstermişler ve bu çözümün periyodikliğini incelemişlerdir [74].

Yalçınkaya ve arkadaşları (2022), "*On a nonlinear fuzzy difference equation*" adlı çalışmalarında $\{z_n\}$ pozitif bulanık sayı dizisi, A ve $j \in \{0,1,2\}$ için z_{-j} pozitif bulanık sayılar ve p pozitif sayı olmak üzere

$$z_{n+1} = \frac{Az_{n-1}}{1+z_{n-2}^{p}}, \ n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.64}$$

bulanık fark denkleminin tek bir pozitif çözümünün olduğunu göstermişler, bu çözümün sınırlı olduğu durumları bulmuşlar ve asimptotik davranışını incelemişlerdir [83].

Zhang ve arkadaşları (2022), "*On second-order fuzzy discrete population model*" adlı çalışmalarında $\{x_n\}$ $n.$ gözlem anındaki nüfus büyüklüğünü temsil eden pozitif bulanık sayı dizisi, A, B pozitif bulanık sayılar, x_{-2}, x_{-1} başlangıç koşulları pozitif bulanık sayı olmak üzere

$$x_n = \frac{Ax_{n-1}}{1+x_{n-1}+Bx_{n-2}}, \ n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.65}$$

ikinci mertebeden bulanık fark denkleminin tek bir pozitif çözümünün olduğu g-bölme kullanarak göstermişlerdir. Ayrıca, bu çözümün hangi durumlarda sınırlı olduğunu ve denge noktasının global asimptotik kararlı olduğunu incelemişlerdir [105].

Jia ve arkadaşları (2023), "*Dynamic behavior of a seven-order fuzzy difference equation*" adlı çalışmalarında $p, q, r \in \mathbb{R}^+$, A, B, C parametreleri ve $i \in \{0,1,2,3,4,5,6\}$ için x_{-i} pozitif bulanık sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{Ax_{n-1}}{B+Cx_{n-2}^{p}x_{n-4}^{q}x_{n-6}^{r}}, \ n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.66}$$

yedinci mertebeden bulanık fark denkleminin pozitif çözümünün sınırlılığı ve denge noktasının kararlı olması için gerekli şartları bulmuşlardır [42].

Yalçınkaya ve arkadaşları (2023), "*Qualitative behavior of a higher-order fuzzy difference equation*" adlı çalışmalarında $\{z_n\}$ pozitif bulanık sayı dizisi, s pozitif tamsayı, A, B, C parametreleri ve $j \in \{0,1,\dots,s\}$ için z_{-j} pozitif bulanık sayılar olmak üzere

$$z_{n+1} = \frac{Az_{n-s}}{B + C\prod_{i=0}^{s} z_{n-i}}, \ n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.67}$$

bulanık fark denkleminin tek bir pozitif çözümünün olduğunu göstermişlerdir. Bu çözümün sınırlı olduğu şartlar ile çözümlerin 0 a yakınsadığı durumları bulmuşlardır [84].

Zhang ve arkadaşları (2023), "*Qualitative analysis of second-order fuzzy difference equation with quadratic term*" adlı çalışmalarında A, B parametreleri ve x_0, x_{-1} başlangıç değerleri pozitif bulanık sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = A + \frac{Bx_n}{x_{n-1}^2}, \ n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.68}$$

ikinci mertebeden karesel terimli bulanık fark denkleminin tek bir pozitif çözümünün olduğunu göstermişler, bu çözümlerin sınırlı ve yakınsak olması için gerekli şartları bulmuşlardır [106].

Atpınar ve Yazlık (2023), "*Qualitative behavior of exponential type of fuzzy difference equations system*" adlı çalışmalarında $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$ parametreleri ve x_{-1}, x_0, y_{-1}, y_0 başlangıç değerleri pozitif bulanık sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{\alpha_1 + \beta_1 e^{-x_{n-1}}}{\gamma_1 + y_n}, \ y_{n+1} = \frac{\alpha_2 + \beta_2 e^{-y_{n-1}}}{\gamma_2 + x_n}, \ n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.69}$$

ikinci mertebeden lineer olmayan üstel bulanık fark denklem sisteminin g-bölmeye göre tek bir pozitif çözümünün olduğunu göstermişler ve bu çözümün pozitif denge noktasına yakınsaması ve global asimptotik kararlı olması için gerekli şartları elde etmişlerdir [8].

Yalçınkaya ve arkadaşları (2023), "*Behavior of solutions to the fuzzy difference equation*" adlı çalışmalarında m pozitif tamsayı, $\{z_n\}$ pozitif bulanık sayı dizisi, A, B parametreleri ve $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ için z_{-j} pozitif bulanık sayılar olmak üzere

$$z_{n+1} = A + \frac{B}{z_{n-m}}, \ n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.70}$$

bulanık fark denkleminin tek bir pozitif çözümünün olduğunu göstermişler, bu çözümün sınırlılığı, asimptotik kararlılığı ve salınımlılık davranışını incelemişlerdir [86].

Yalçınkaya ve arkadaşları (2023), "*On the dynamics of a higher-order fuzzy difference equation with rational terms*" adlı çalışmalarında m_1, m_2 negatif olmayan tam sayılar, $s = \max\{m_1, m_2\}$, $\{z_n\}$ pozitif bulanık sayı dizisi, A, B, C parametreleri ve $j \in \{0, 1, \dots, s\}$ için z_{-j} pozitif bulanık sayılar olmak üzere

$$z_{n+1} = A + \frac{B}{z_{n-m_1}} + \frac{C}{z_{n-m_2}}, \ n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.71}$$

bulanık fark denkleminin tek bir pozitif çözümünün olduğunu göstermişler, bu çözümün sınırlılığı, asimptotik kararlılığı ve salınımlılık davranışını incelemişlerdir [85].

Althagafi ve Ghezal (2024), "*Global Stability of a System of Fuzzy Difference Equations of Higher-Order*" adlı çalışmalarında $j \in \{0, 1, \dots, l\}$ için t_{-j}, s_{-j} bulanık başlangıç koşulları ve $\phi, \rho, \hat{\phi}, \hat{\rho}$ pozitif bulanık sayılar olmak üzere

$$t_{m+1} = \phi + \frac{\rho}{s_{m-l}}, \ s_{m+1} = \hat{\phi} + \frac{\hat{\rho}}{t_{m-l}}, \ m \in \mathbb{N}_0, \tag{2.72}$$

yüksek mertebeden bulanık fark denklem sisteminin tek bir pozitif çözümünün olduğunu göstermişler ve bu pozitif çözümün nitel dinamiklerini incelemişlerdir.

2.2. Temel Bilgiler

Bu bölümde fark denklemleri, bulanık kümeler ve bulanık sayılar ile ilgili temel tanımlar ve teoremler yer almaktadır.

2.2.1. Fark denklemleri ve sistemleri ile ilgili temel bilgiler

Bu kısımda fark denklemleri ve fark denklem sistemleri ile ilgili temel bilgiler ile temel teoremlere yer verilmiştir.

Tanım 2.2.1.1 ([43]). $y(n)$ reel veya kompleks n değişkenine bağlı bir fonksiyon olsun. Δ ileri fark operatörü

$$\Delta y(n) = y(n+1) - y(n) \tag{2.73}$$

olarak tanımlanır. $y(n)$ nin tanım kümesi genellikle doğal sayılardır.

Tanım 2.2.1.2 ([43]). Öteleme (kaydırma) operatörü E

$$Ey(n) = y(n+1) \tag{2.74}$$

şeklinde tanımlanır. I birim operatörü olmak üzere, ileri fark operatörü ile kaydırma operatörü arasında

$$\Delta = E - I \tag{2.75}$$

ilişkisi vardır.

Tanım 2.2.1.3 ([43]). Eğer $\Delta Y(n) = y(n)$ ise, keyfi c sabiti için $\Delta^{-1} y(n) = Y(n) + c$ olup, Δ^{-1} operatörü ters fark operatörü ve $Y(n)$ de $y(n)$ nin ters farkı olarak adlandırılır.

Teorem 2.2.1.1 ([43]). Bir $y(n)$, $n \geq n_0$ için tanımlı fonksiyonu için Δ^{-1} ters fark operatörü keyfi bir c sabiti için aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$\Delta^{-1} y(n) = \sum_{i=0}^{n-1} y(i) + c. \tag{2.76}$$

Tanım 2.2.1.4 ([43]). $n \in \mathbb{N}_0$ bağımsız değişken, y bilinmeyen bir fonksiyon olmak üzere

$$F(n, y(n), y(n+1), \ldots, y(n+k)) = 0 \tag{2.77}$$

eşitliğine fark denklemi denir. Fark denkleminde bilinmeyen fonksiyonun en büyük ve en küçük indisleri arasındaki farka (2.77) fark denkleminin mertebesi denir.

Tanım 2.2.1.5 ([43]). $n \geq n_0$ için tanımlı, $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ için $p_i(n)$ ile $g(n)$ reel değerli fonksiyonlar, $g(n) \neq 0$ ve $p_k(n) \neq 0$ olmak üzere

$$y(n+k) + p_1(n)y(n+k-1) + \ldots + p_k(n)y(n) = g(n) \tag{2.78}$$

denklemine k. mertebeden homojen olmayan lineer fark denklemi denir.

Lineer fark denklemlerinin sınıflandırılması, $i \in \{0, 1, \ldots, k\}$ için $y(n+i)$ fonksiyonlarının katsayıları ve $g(n)$ ye göre yapılır. Eğer $g(n) = 0$ ise, (2.78) denklemine lineer homojen fark denklemi denir. Eğer $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ için $p_i(n)$ ler sabit ise (2.78) denklemine sabit katsayılı lineer fark denklemi denir. $i \in \{0, 1, \ldots, k\}$ için $p_i(n)$ lerden en az biri bağımsız bir değişkenin fonksiyonu olduğu taktirde, (2.78) denklemine değişken katsayılı fark denklemi denir.

Teorem 2.2.1.2 ([25]). I reel sayıların herhangi bir alt kümesi ve $y : I^{k+1} \to I$ sürekli diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun. $(k+1)$. mertebeden

$$x(n+1) = f(x(n), x(n-1), \ldots, x(n-k)) \tag{2.79}$$

$k+1$ tane $x_{-k}, x_{-k+1}, \ldots, x_0 \in I$ başlangıç koşulları verildiği taktirde, (2.79) denkleminin $x(-k) = x_{-k}, x(-k+1) = x_{-k+1}, \ldots, x(0) = x_0$ olacak şekilde tek bir $\{x(n)\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümü vardır.

Tanım 2.2.1.6 ([19], [20]). Eğer bir fark denkleminin $\{x(n)\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümü için, $P \le x_n \le Q$ olacak biçimde pozitif P ve Q sabitleri varsa, $\{x(n)\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümü sınırlıdır denir.

Tanım 2.2.1.7 ([25]). Eğer $f(\bar{x}, \bar{x}, \ldots, \bar{x}) = \bar{x}$ olacak şekilde $\bar{x} \in I$ varsa, bu $\bar{x}$ noktasına (2.79) denkleminin denge noktası denir. Eğer $\forall n \in \mathbb{N}_0$ için $x_n = \bar{x}$ ise $\bar{x}$ a sabit nokta denir.

Tanım 2.2.1.8 ([30]). $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ (2.79) denkleminin bir çözümü ve $\bar{x}$ ise (2.79) denkleminin $\bar{x} = f(\bar{x}, \bar{x}, \ldots, \bar{x})$ olacak biçimde bir denge noktası olsun. Bu durumda,

i. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için $|x_{-k} - \bar{x}| + |x_{-k+1} - \bar{x}| + \cdots + |x_0 - \bar{x}| < \delta$ olduğunda her $n \ge -k$ için $|x_n - \bar{x}| < \varepsilon$ olacak biçimde bir $\delta > 0$ sayısı bulunabiliyorsa (2.79) denkleminin $\bar{x}$ noktası (lokal) kararlıdır denir,

ii. Eğer $\bar{x}$ denge noktası kararlı ve $|x_{-k} - \bar{x}| + |x_{-k+1} - \bar{x}| + \cdots + |x_0 - \bar{x}| < \gamma$ olduğunda $\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$ olacak biçimde bir $\gamma > 0$ bulunabiliyorsa (2.79) denkleminin $\bar{x}$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır denir,

iii. Eğer (2.79) denkleminin her $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümü için $\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$ oluyorsa (2.79) denkleminin $\bar{x}$ denge noktası global çekim noktasıdır denir.

iv. Eğer $\bar{x}$ denge noktası kararlı ve global çekim noktası ise $\bar{x}$ global asimptotik kararlıdır denir,

v. Eğer $\bar{x}$ kararlı değil ise, $\bar{x}$ kararsızdır denir.

Tanım 2.2.1.9 ([30]). f, $\bar{x}$ civarında bir açık aralığında sürekli türevlenebilir bir fonksiyon olsun. $i \in \{0, 1, \ldots, k\}$ için

$$p_i = \frac{\partial f}{\partial u_i}(\bar{x}, \bar{x}, \ldots, \bar{x}) \tag{2.80}$$

$f(u_0, u_1, \ldots u_k)$ nın u_i ye göre (2.79) denkleminin $\bar{x}$ denge noktasında hesaplanan türevini göstersin. O zaman,

$$z_{n+1} = p_0 z_n + p_1 z_{n-1} + \cdots + p_k z_{n-k}, \; n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.81}$$

denklemine (2.79) denkleminin $\bar{x}$ denge noktası civarındaki lineer denklemi ve

$$\lambda^{k+1} - p_0 \lambda^k - \cdots - p_{k-1} z_{n-k} = 0 \tag{2.82}$$

denklemine ise (2.81) denkleminin $\bar{x}$ civarındaki karakteristik denklemi denir.

Teorem 2.2.1.3 ([50]). f , $\bar{x}$ civarında bir açık aralıkta tanımlı sürekli türevlenebilir bir fonksiyon olsun. O zaman aşağıdaki ifadeler doğrudur:

i. Eğer (2.82) karakteristik denkleminin kökleri $|\lambda| < 1$ açık diskinin içinde yer alıyorsa, (2.79) denkleminin $\bar{x}$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır,
ii. Eğer (2.82) karakteristik denkleminin köklerinin en az birinin mutlak değeri birden büyük ise $\bar{x}$ denge noktası kararsızdır.

2.2.2. Fark denklem sistemleri ile ilgili temel bilgiler

Bu bölümde fark denklem sistemleri ile ilgili temel tanımlar ve teoremler verilecektir. Öncelikle fark denklem sisteminin genel tanımı yapılacak ve sonrasında tez çalışmasında incelenen dört-boyutlu $(m+1)$. mertebeden fark denklem sistemleri hakkında literatürde yer alan teoremlere yer verilecektir.

Tanım 2.2.2.1 ([108]).

$$\begin{cases} x_1(n+1) = f_1\left(x_1(n), \ldots, x_1(n-m), x_2(n), \ldots, x_2(n-m), x_m(n), \ldots, x_m(n-m)\right), \\ x_2(n+1) = f_2\left(x_1(n), \ldots, x_1(n-m), x_2(n), \ldots, x_2(n-m), x_m(n), \ldots, x_m(n-m)\right), \\ \qquad \vdots \\ x_m(n+1) = f_m\left(x_1(n), \ldots, x_1(n-m), x_2(n), \ldots, x_2(n-m), x_m(n), \ldots, x_m(n-m)\right), \end{cases} \tag{2.83}$$

sistemine $(m+1)$. *mertebeden* $m-$*boyutlu* fark denklem sistemi denir.

Özel olarak,

$$\begin{cases} u_{n+1} = h_1\left(u_n, u_{n-1}, \ldots, u_{n-m}, v_n, v_{n-1}, \ldots, v_{n-m}, w_n, w_{n-1}, \ldots, w_{n-m}, t_n, t_{n-1}, \ldots, t_{n-m}\right), \\ v_{n+1} = h_2\left(u_n, u_{n-1}, \ldots, u_{n-m}, v_n, v_{n-1}, \ldots, v_{n-m}, w_n, w_{n-1}, \ldots, w_{n-m}, t_n, t_{n-1}, \ldots, t_{n-m}\right), \\ w_{n+1} = h_3\left(u_n, u_{n-1}, \ldots, u_{n-m}, v_n, v_{n-1}, \ldots, v_{n-m}, w_n, w_{n-1}, \ldots, w_{n-m}, t_n, t_{n-1}, \ldots, t_{n-m}\right), \\ t_{n+1} = h_4\left(u_n, u_{n-1}, \ldots, u_{n-m}, v_n, v_{n-1}, \ldots, v_{n-m}, w_n, w_{n-1}, \ldots, w_{n-m}, t_n, t_{n-1}, \ldots, t_{n-m}\right), \end{cases} \tag{2.84}$$

sistemine $(m+1)$. mertebeden dört-boyutlu fark denklem sistemi denir.

Teorem 2.2.2.1 ([108])**.** I_1, I_2, I_3, I_4 reel sayıların herhangi dört alt aralığı olmak üzere

$$\begin{cases} h_1 : I_1^{m+1} \times I_2^{m+1} \times I_3^{m+1} \times I_4^{m+1} \to I_1 \\ h_2 : I_1^{m+1} \times I_2^{m+1} \times I_3^{m+1} \times I_4^{m+1} \to I_2 \\ h_3 : I_1^{m+1} \times I_2^{m+1} \times I_3^{m+1} \times I_4^{m+1} \to I_3 \\ h_4 : I_1^{m+1} \times I_2^{m+1} \times I_3^{m+1} \times I_4^{m+1} \to I_4 \end{cases} \tag{2.85}$$

sürekli diferansiyellenebilen dört fonksiyon olsun. Bu durumda, $j \in \{0,1,\ldots,m\}$ için $\left(u_{-j}, v_{-j}, w_{-j}, t_{-j}\right) \in I_1 \times I_2 \times I_3 \times I_4$ başlangıç koşulları olmak üzere sistem (2.84) ün tek bir $\left\{\left(u_n, v_n, w_n, t_n\right)\right\}_{n=-m}^{\infty}$ çözümü vardır.

Tanım 2.2.2.2 ([50])**.** (2.84) sisteminde

$$\begin{cases} \bar{u} = h_1\left(\bar{u}, \bar{u}, \ldots, \bar{u}, \bar{v}, \bar{v}, \ldots, \bar{v}, \bar{w}, \bar{w}, \ldots, \bar{w}, \bar{t}, \bar{t}, \ldots, \bar{t}\right), \\ \bar{v} = h_2\left(\bar{u}, \bar{u}, \ldots, \bar{u}, \bar{v}, \bar{v}, \ldots, \bar{v}, \bar{w}, \bar{w}, \ldots, \bar{w}, \bar{t}, \bar{t}, \ldots, \bar{t}\right), \\ \bar{w} = h_3\left(\bar{u}, \bar{u}, \ldots, \bar{u}, \bar{v}, \bar{v}, \ldots, \bar{v}, \bar{w}, \bar{w}, \ldots, \bar{w}, \bar{t}, \bar{t}, \ldots, \bar{t}\right), \\ \bar{t} = h_4\left(\bar{u}, \bar{u}, \ldots, \bar{u}, \bar{v}, \bar{v}, \ldots, \bar{v}, \bar{w}, \bar{w}, \ldots, \bar{w}, \bar{t}, \bar{t}, \ldots, \bar{t}\right), \end{cases} \tag{2.86}$$

eşitliklerini sağlayan $\left(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{t}\right)$ noktasına sistem (2.84) ün denge noktası denir.

Tanım 2.2.2.3 ([109])**.** $\left(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{t}\right)$, sistem (2.84) ün denge noktası olsun. O zaman,

i. Eğer $j \in \{0,1,\ldots,m\}$ için $\forall\left(u_{-j}, v_{-j}, w_{-j}, t_{-j}\right) \in I_1 \times I_2 \times I_3 \times I_4$ olmak üzere $\forall \varepsilon > 0$ için $\sum_{j=0}^{m}\left|\bar{u} - u_{-j}\right| < \delta,$ $\sum_{j=0}^{m}\left|\bar{v} - v_{-j}\right| < \delta,$ $\sum_{j=0}^{m}\left|\bar{w} - w_{-j}\right| < \delta,$ $\sum_{j=0}^{m}\left|\bar{t} - t_{-j}\right| < \delta,$ iken $\forall n \in \mathbb{N}_0$ için $\left|\bar{u} - u_n\right| < \varepsilon, \left|\bar{v} - v_n\right| < \varepsilon,$

$\left|\bar{w}-w_n\right|<\varepsilon, \left|\bar{t}-t_n\right|<\varepsilon,$ olacak biçimde bir $\delta>0$ sayısı bulunabiliyorsa, $(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{t})$ denge noktası kararlıdır denir,

ii. Eğer $(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{t})$ noktası kararlı ve $j\in\{0,1,\ldots,m\}$ için her $(u_{-j},v_{-j},w_{-j},t_{-j})\in I_1\times I_2\times I_3\times I_4$ iken $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n,v_n,w_n,t_n)=(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{t})$ olacak biçimde $\sum_{j=0}^{m}\left|\bar{u}-u_{-j}\right|<\eta,$ $\sum_{j=0}^{m}\left|\bar{v}-v_{-j}\right|<\eta,$ $\sum_{j=0}^{m}\left|\bar{w}-w_{-j}\right|<\eta,$ ve $\sum_{j=0}^{m}\left|\bar{t}-t_{-j}\right|<\eta$ şartlarını sağlayan $\eta>0$ sayısı bulunabiliyorsa, $(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{t})$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır denir,

iii. Eğer $j\in\{0,1,\ldots,m\}$ için $\forall(u_{-j},v_{-j},w_{-j},t_{-j})\in I_1\times I_2\times I_3\times I_4$ iken $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\bar{u},$ $\lim\limits_{n\to\infty}v_n=\bar{v},$ $\lim\limits_{n\to\infty}w_n=\bar{w},$ ve $\lim\limits_{n\to\infty}t_n=\bar{t}$ oluyorsa, $(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{t})$ denge noktasına global çekim noktası denir,

iv. Eğer $(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{t})$ denge noktası hem lokal asimptotik kararlı hem de global çekim noktası ise $(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{t})$ denge noktası global asimptotik kararlıdır denir,

v. Eğer $(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{t})$ denge noktası kararlı değilse, kararsızdır denir.

Tanım 2.2.2.4 ([50]). h_1,h_2,h_3,h_4 fonksiyonları $(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{t})$ denge noktası civarında sürekli diferansiyellenebilen fonksiyonlar olsun. Bu durumda, eğer $(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{t})$ noktası aynı zamanda

$$\Phi_{n+1}=\omega(\xi_n)=J\Phi_n,\ n\in\mathbb{N}_0, \tag{2.87}$$

sistemine $(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{t})$ denge noktası civarındaki lineerleştirilmiş sistem denir. Burada,

$\xi_n=(u_n,u_{n-1},...,u_{n-m},v_n,v_{n-1},...,v_{n-m},w_n,w_{n-1},...,w_{n-m},t_n,t_{n-1},...,t_{n-m})^T$ ve J ise sistem (2.84) ün Jakobiyen matrisidir.

Teorem 2.2.2.2 ([109]). ω fonksiyonunun sabit noktası $\bar{\Phi}$ olmak üzere (2.87) denklemi göz önüne alınsın. Eğer $\bar{\Phi}$ civarında J Jakobiyen matrisinin bütün özdeğerleri birim diskin içinde yer alıyorsa, yani $i\in\{1,2,\ldots,4m+4\}$ için $|\lambda_i|<1$ ise $\bar{\Phi}$ noktası lokal asimptotik kararlıdır. Eğer özdeğerlerden en az biri birim diskin dışında yer alıyorsa, $\overline{\Phi}$ denge noktası kararsızdır.

Tanım 2.2.2.5 ([19], [20])**.** Eğer bir fark denkleminin $\{u_n, v_n, w_n, t_n\}_{n=-m}^{\infty}$ çözümü için,

$$
\begin{aligned}
&P_1 \le u_n \le Q_1, \\
&P_2 \le v_n \le Q_2, \\
&P_3 \le w_n \le Q_3, \\
&P_4 \le t_n \le Q_4,
\end{aligned}
\tag{2.88}
$$

olacak biçimde pozitif $i \in \{1,2,3,4\}$ için P_i, Q_i sabitleri varsa, $\{u_n, v_n, w_n, t_n\}_{n=-m}^{\infty}$ çözümü sınırlıdır denir.

2.2.3. Bulanık kümeler ile ilgili temel bilgiler

Bu bölümde bulanık küme ve bulanık sayılar ile ilgili temel tanımlar ile teoremlere yer verilmiştir.

Klasik küme teorisinde, bir kümenin eleman sayısı sonlu, sayılabilir sonsuz veya sayılamayan sonsuz olabilir. Klasik küme teorisinde kesin sınırlar vardır, her bir eleman ya bir kümeye aittir ya da değildir. Bir x elemanı A kümesine aitse $x \in A$ biçiminde gösterilir. Aksi taktirde, $x \notin A$ ile gösterilir. Klasik küme teorisinde $A(x)$, x in A da olup olmadığına göre sadece 0 ve 1 değerlerini alabilir. Bu durum matematiksel olarak aşağıdaki biçimde ifade edilebilir:

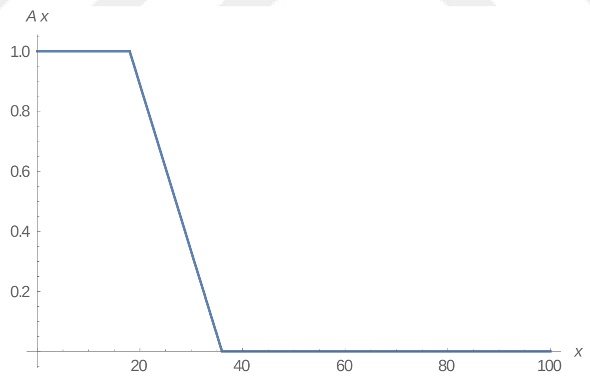
$$
A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \text{ ise} \\ 0, & x \notin A \text{ ise.} \end{cases} \tag{2.89}
$$

Bulanık küme teorisine göre, X içindeki bir bulanık A kümesi bir $A(x)$ üyelik fonksiyonu ile tanımlanır. Burada $A(x)$ fonksiyonu X te yer alan her bir elemanı $[0,1]$ aralığı ile ilişkilendirir. $A(x)$ değeri x in A daki üyelik derecesini temsil eder. Dolayısıyla, $A(x)$ değeri 1 e yaklaştıkça x in A daki üyelik derecesi artar.

Tanım 2.2.3.1 ([89]). X in bir bulanık A alt kümesi, $A: X \to [0,1]$ bir fonksiyon olarak tanımlansın. Burada $x \in X$ için $A(x)$, x elemanının üyelik derecesi olarak adlandırılır. $\mathcal{F}(X)$, X teki bütün bulanık alt kümelerin koleksiyonunu gösterir.

Örnek 2.2.3.1. "*Gençlik*" kavramını "*genç birey*" üzerinden dilsel bir değişkenin bulanık küme olarak nasıl ifade edilebileceğini gösterelim. 0-18 yaş arası üyelik derecesi 1 olup, kesin olarak genç kabul edilirken, 18-36 yaş arası üyelik derecesi azalmaktadır. 36 yaş üzerinde üyelik derecesi 0 olup, birey genç olmayan birey olarak gösterilmektedir. $A:[0,\ 100] \to [0,\ 1]$ bulanık kümesi aşağıdaki gibidir:

$$A(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 18 \\ \dfrac{36-x}{18}, & 18 \le x \le 36 \\ 0, & \text{diğer durumlarda.} \end{cases} \tag{2.90}$$



Şekil 1. Genç bireyi modelleyen bulanık küme örneği

Tanım 2.2.3.2 ([93]). Eğer bir A bulanık kümesinin yüksekliği 1 ise, yani $A(x)=1$ olacak biçimde $x_0 \in X$ varsa A bulanık kümesi *normaldir*. Aksi taktirde *subnormaldir*.

Tanım 2.2.3.3 ([93]). $A, B \subseteq \mathcal{F}(X)$ olsun. Eğer her $x \in X$ için $A(x) \le B(x)$ şartı sağlanıyorsa, A kümesi B kümesinin alt kümesidir denir ve $A \subseteq B$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.3.4 ([9]). Boş bulanık küme $\varnothing$ sembolü ile gösterilir. Her $x \in X$ için $\varnothing(x) = 0$ dır. Eğer her $x \in X$ için $X(x) = 1$ ise X kümesi totaldir.

Tanım 2.2.3.5 ([9]). $A, B \subseteq \mathcal{F}(X)$ olsun. A ve B bulanık kümelerinin kesişimi C bulanık kümesi olmak üzere, her $x \in X$ için $C(x) = \min\{A(x), B(x)\} = A(x) \cap B(x)$ şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.2.3.6 ([9]). $A, B \subseteq \mathcal{F}(X)$ olsun. A ve B bulanık kümelerinin birleşimi D bulanık kümesi olmak üzere, her $x \in X$ için $D(x) = \max\{A(x), B(x)\} = A(x) \cup B(x)$ şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.2.3.7 ([9]). $A, B \subseteq \mathcal{F}(X)$ olsun. A kümesinin tümleyeni E bulanık kümesi olmak üzere, her $x \in X$ için $A(x) = 1 - B(x) = \bar{B}(x)$ şeklinde tanımlanır.

Önerme 2.2.3.1 ([9]). $A : X \to [0,1]$ bir bulanık küme olsun. $A(x) \notin \{0,1\}$ olan en az bir $x \in X$ varsa $A \cap A \neq \varnothing$ ve $A \cup A \neq X$ tir.

Tanım 2.2.3.8 ([89]). $A : X \to [0,1]$ bir bulanık küme olsun. $\alpha \in (0,1]$ için A nın $\alpha - kesimi$

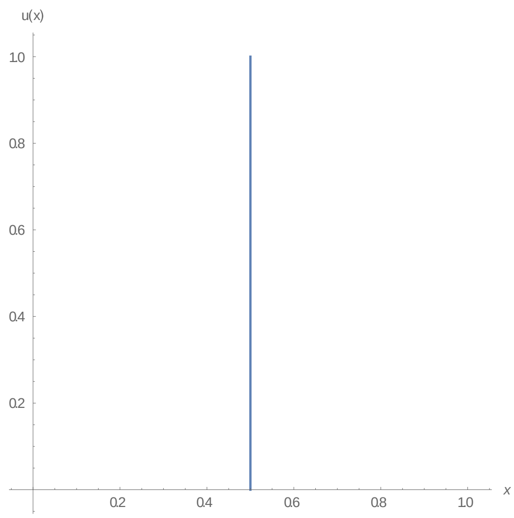
$$A^{\alpha} = \{x \in X \,|\, A(x) \geq \alpha\} \tag{2.91}$$

biçiminde tanımlanır ve $A^{\alpha} = \left[L_A^{\alpha}, R_A^{\alpha}\right]$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.3.9 ([9]) $A : X \to [0,1]$ bir bulanık küme olsun. $A^{1} = \{x \in X \,|\, A(x) \geq 1\}$ kümesi A bulanık kümesinin *çekirdeği* olarak adlandırılır.

Tanım 2.2.3.10 ([9]). $A : X \to [0,1]$ bir bulanık küme olsun. $\operatorname{supp} A = \{x \in X \,|\, A(x) > 0\}$ kümesi A bulanık kümesinin *desteği* olarak adlandırılır.

Tanım 2.2.3.11 ([9]). $A : X \to [0,1]$ bir bulanık küme olsun. $\operatorname{supp} A$ da yalnızca tek bir $x \in X$ var ise bu kümeye, *tek* (*singleton*) bulanık küme denir.



Şekil 2. Tek (singleton) bulanık küme

Tanım 2.2.3.12 ([89]). $A: X \to [0,1]$ bir bulanık küme olsun. A bulanık kümesi bulanık konvekstir ancak ve ancak $\forall \alpha \in (0,1]$ için $\Gamma^{\alpha} = \{x | f_A(x) \geq \alpha\}$ biçiminde tanımlanır. Bir diğer alternatif ve doğrudan bulanık konvekslik tanımı ise şu şekilde yapılabilir.

Tanım 2.2.3.13 ([89]). A bulanık kümesi bulanık konvekstir ancak ve ancak $\forall x_1, x_2 \in X$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$f_A[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] \geq \min \; [f_A(x_1), f_A(x_2)] \tag{2.92}$$

eşitsizliği sağlanır.

Bulanık A kümesinin her $\alpha - kesimine$ tekabül eden aralıklar, ayrık aralıkların birleşiminden oluşuyorsa, A kümesi bulanık konveks değildir. Eğer her $\alpha - kesimine$ sadece tek bir aralık tekabül ediyorsa, A kümesi bulanık konvekstir. Ayrıca, A bulanık kümesinin $\alpha - kesimlerini$ $A^{\alpha} = [L_A^{\alpha}, R_A^{\alpha}]$ ile gösterirsek, $\alpha_1 < \alpha_2$ olduğunda, $A^{\alpha_2} \subset A^{\alpha_1}$ oluyorsa, A kümesi bulanık konvekstir. Bir başka deyişle, $\alpha_1 < \alpha_2$ iken $L_A^{\alpha_1} \leq L_A^{\alpha_2}$ ve $R_A^{\alpha_2} \leq R_A^{\alpha_1}$ oluyorsa, A kümesi bulanık konvekstir.

Teorem 2.2.3.14 ([89]). A ve B konveks bulanık küme ise bu kümelerin kesişimleri, $A \cap B$ de bulanık konvekstir.

2.2.4. Bulanık sayılar ile ilgili temel bilgiler

Tanım 2.2.4.1 ([9]). Reel sayı doğrusunun bir bulanık $u:\mathbb{R}\to[0,1]$ alt kümesini düşünelim. Eğer

i. u normal ise, yani $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ vardır öyle ki $u(x_0)=1$,

ii. u bulanık konveks ise, yani $\forall t\in[0,1]$ ve $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ için $u\left(tx_1+(1-t)x_2\right)\geq \min\{u(x_1),u(x_2)\}$ oluyorsa,

iii. u $\mathbb{R}$ de üstten yarı sürekli ise, yani $\forall \varepsilon>0$ için $\exists \delta>0$ öyle ki $u(x)-u(x_0)<\varepsilon, |x-x_0|<\delta$,

iv. u nun destek kümesi kompakt ise, yani $cl(A)$, A nın kapanışını göstermek üzere $cl\{x\in\mathbb{R} \mid u(x)>0\}$ kümesi kompakt şartları sağlanıyorsa

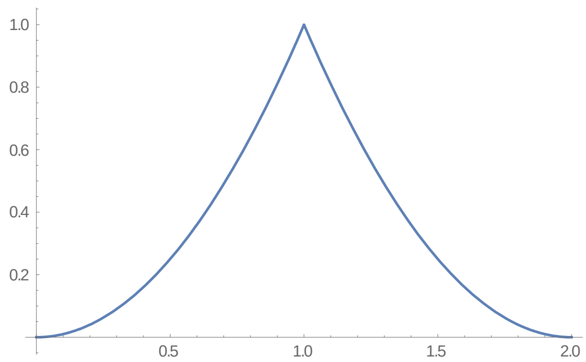
u bir bulanık sayıdır.

Eğer bir bulanık u sayısı için, supp $(u)\subseteq(0,\infty)$ ise u sayısı pozitif bulanık sayıdır denir. Bulanık sayıların kümesi $\mathbb{R}_f$ ile ve pozitif bulanık sayılar kümesi de $\mathbb{R}_f^+$ ile gösterilir.

Örnek 2.2.4.1. $u:\mathbb{R}\to[0,1]$ bulanık bir küme olsun ve

$$u(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ x^2, & 0\leq x<1\\ (2-x)^2, & 1\leq x\leq 2\\ 0, & x\geq 2\end{cases} \tag{2.93}$$

biçiminde tanımlansın. $u:\mathbb{R}\to[0,1]$ bir bulanık sayı olduğu bulanık sayı tanımından aşikardır.

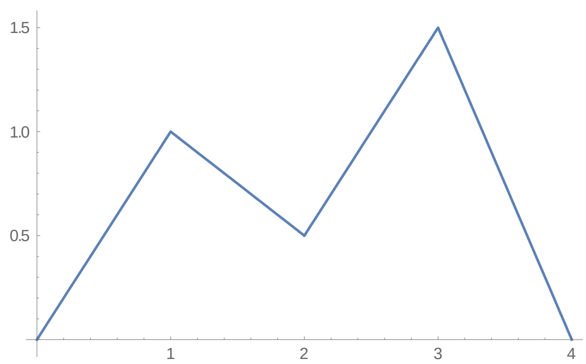


Şekil 3. Bir bulanık sayı örneği

Örnek 2.2.4.2. $u:\mathbb{R}\to[0,1]$ bulanık küme olsun ve

$$u(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ x, & 0\le x<1\\ 1.5-\dfrac{x}{2}, & 1\le x\le 2\\ x-1.5, & 2<x\le 3\\ 6-1.5x, & 3<x\le 4\\ 0, & 4<x\end{cases} \tag{2.94}$$

biçiminde tanımlanırsa, $u:\mathbb{R}\to[0,1]$ bulanık konveks olmadığı için bir bulanık sayı değildir.



Şekil 4. Bulanık sayı olmayan bulanık küme örneği

Tanım 2.2.4.2 ([21]). $u,v\in\mathbb{R}_f$ ve $\alpha\in(0,1]$ için $[u]^\alpha=[L_u^\alpha,R_u^\alpha]$ ve $[v]^\alpha=[L_v^\alpha,R_v^\alpha]$ olarak temsil edilsin. Bulanık sayılar uzayı üzerindeki metrik $\alpha\in(0,1]$ için aşağıdaki biçimde tanımlanır:

$$D(u,v)=\sup_{\alpha\in(0,1]}\max\{|L_u^\alpha-L_v^\alpha|,|R_u^\alpha-R_v^\alpha|\}. \tag{2.95}$$

Tanım 2.2.4.3 ([9]). $u\in\mathbb{R}_f$ olsun. Bu durumda u nun *normu*

$$\|u\|=D(u,0)=\max\{|L_u^\alpha|,|R_u^\alpha|\} \tag{2.96}$$

biçiminde tanımlanır.

Tanım 2.2.4.4 ([9]). (X,D) bir metrik uzay ve $f:X\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall\varepsilon>0$ için $D(x,x_0)<\delta$ olduğunda $f(x)<f(x_0)+\varepsilon$ olacak biçimde $\delta>0$ var ise f fonksiyonuna x_0 da *üstten yarı süreklidir* denir.

Tanım 2.2.4.5 ([9]). (X,D) bir metrik uzay ve $f:X\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall\varepsilon>0$ için $D(x,x_0)<\delta$ olduğunda $f(x)>f(x_0)-\varepsilon$ olacak biçimde $\delta>0$ var ise f fonksiyonuna x_0 da *alttan yarı süreklidir* denir.

Teorem 2.2.4.1 ([9]). (Stacking Teoremi) $u\in\mathbb{R}_F$ ve $[u]^\alpha$ da bu bulanık sayının $\alpha-$*kesimleri* olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur:

i. $\forall\alpha\in[0,1]$ için $[u]^\alpha=[L_u^\alpha,R_u^\alpha]$ kapalı aralığıdır,

ii. Eğer $0\le\alpha_1\le\alpha_2\le1$ ise, $[u]^{\alpha_2}\subseteq[u]^{\alpha_1}$ dir,

iii. $\alpha\in(0,1]$ e alttan yakınsayan herhangi bir α_n dizisi için $\bigcap_{n=1}^{\infty}[u]^{\alpha_n}=[u]^\alpha$ dır,

iv. 0 a üstten yakınsayan herhangi bir α_n dizisi için $cl\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}[u]^{\alpha}\right)=[u]^0$ dır.

Teorem 2.2.4.2 ([9]). $u \in \mathbb{R}_f$ ve $[u]^\alpha = [L_u^\alpha, R_u^\alpha]$ olsun. Bu durumda, $L_u^\alpha, R_u^\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}$ fonksiyonları $\alpha - kesimin$ uç noktaları olmak üzere aşağıdaki koşullar sağlanır:

i. $L_u^\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \in (0,1]$ için sınırlı, azalmayan, soldan süreklidir ve 0 da sağdan süreklidir,

ii. $R_u^\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \in (0,1]$ için sınırlı, artmayan, soldan süreklidir ve 0 da sağdan süreklidir,

iii. $L_u^1 \le R_u^1$ dir.

Lemma 2.2.4.1 ([65]). $f : (\mathbb{R}^+)^k \to \mathbb{R}^+$ ve $u_1, u_2, \ldots, u_k \in \mathbb{R}_f^+$ olsun. Bu durumda, $\alpha \in (0,1]$ için

$$\left[f(u_1, u_2, \ldots, u_k) \right]^\alpha = f\left([u_1]^\alpha, [u_2]^\alpha, \ldots, [u_k]^\alpha \right) \tag{2.97}$$

dır.

Tanım 2.2.4.6 ([9]). $L, R : [0,1] \to [0,1]$, $L(0) = R(0) = 0$, $L(1) = R(1) = 1$ şartlarını sağlayan artan ve sürekli fonksiyon olsun. Ayrıca, $a_0^- \le a_1^- \le a_1^+ \le a_0^+$ olacak şekilde reel sayılar olsun. Eğer $u : \mathbb{R} \to [0,1]$ bulanık kümesi

$$u(x) = \begin{cases} 0, & x < a_0^- \\ L\left(\dfrac{x - a_0^-}{a_1^- - a_0^-} \right), & a_0^- \le x \le a_1^- \\ 1, & a_1^- \le x \le a_1^+ \\ R\left(\dfrac{a_0^+ - x}{a_0^+ - a_1^+} \right), & a_1^+ \le x \le a_0^+ \\ 0, & a_0^+ \le x \end{cases} \tag{2.98}$$

olarak yazılabiliyorsa u ya $L - R$ sayısı denir.

Tanım 2.2.4.7 ([9]). Üçgensel bulanık u sayısı $a,b,c\in\mathbb{R}$ olmak üzere

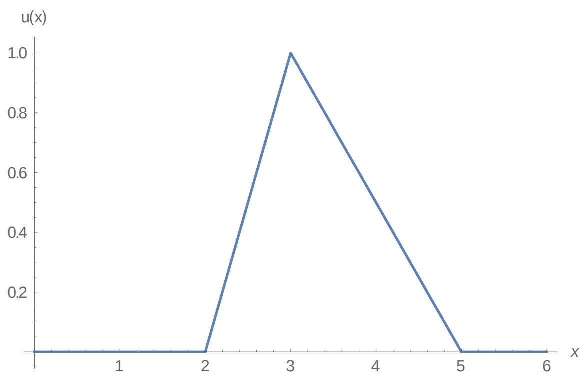
$$u(x)=\begin{cases}0, & x<a\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\le x\le b\\ \dfrac{c-x}{c-b}, & b\le x\le c\\ 0, & c<x\end{cases} \tag{2.99}$$

biçiminde tanımlanır ve $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\ a\le b\le c$ ile temsil edilir.

Örnek 2.2.4.3. Bulanık u sayısı aşağıdaki biçimde tanımlansın:

$$u(x)=\begin{cases}0, & x<2\\ x-2, & 2\le x\le 3\\ \dfrac{5-x}{2}, & 3\le x\le 5\\ 0, & 5<x\end{cases} \tag{2.100}$$

u üçgensel bulanık sayının grafiği aşağıdaki gibidir:



Şekil 5. Üçgensel bulanık sayı örneği

u üçgensel bulanık sayının $\alpha-kesimi$ ve destek kümesi ise şu şekildedir:

$$\begin{aligned}&[u]^\alpha=[\alpha+2,5-2\alpha],\\ &\overline{\bigcup_{\alpha\in(0,1]}[u]^\alpha}=[2,5].\end{aligned} \tag{2.101}$$

Buradan, $[u]^0=[2,5]$, $[u]^{0.5}=[2.5,4]$ ve $[u]^1=[3,3]$ elde edilir.

Tanım 2.2.4.8 ([9])**.** (Zadeh Genişleme Prensibi) X ve Y klasik kümeler ve $f:X\to Y$ bir fonksiyon olsun. Bu fonksiyon, $v=F(u)$ olacak şekilde $F:\mathcal{F}(X)\to\mathcal{F}(Y)$ genişletilebilir bulanık fonksiyonu

$$v(y)=\begin{cases}\sup\{u(x):x\in X,\, f(x)=y\}, & f^{-1}(y)\neq\varnothing\\ 0, & \textit{diğer durumlarda}\end{cases}\tag{2.102}$$

olarak tanımlanır. Bu f fonksiyonunun bir F fonksiyonuna *Zadeh genişlemesi* (*Zadeh extension*) denir.

Tanım 2.2.4.9 ([45])**.** $u,v\in\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ ve $\lambda\in\mathbb{R}$ olsun. İki bulanık sayının toplamı $u+v$, bulanık sayının skalar (sabit reel sayı) çarpımı ve iki bulanık sayının bölümü standart aralık aritmetiğine göre aşağıdaki şekilde tanımlanır:

i. $[u+v]^\alpha=\{x+y \mid x\in[u]^\alpha, y\in[v]^\alpha\}=[u]^\alpha+[v]^\alpha$,

ii. $[\lambda u]^\alpha=\{\lambda x \mid x\in[u]^\alpha\}=\lambda[u]^\alpha, \forall\alpha\in(0,1]$,

$[uv]^\alpha=\left[\min\{L_u^\alpha L_v^\alpha, L_u^\alpha R_v^\alpha, R_u^\alpha L_v^\alpha, R_u^\alpha R_v^\alpha\}, \max\{L_u^\alpha L_v^\alpha, L_u^\alpha R_v^\alpha, R_u^\alpha L_v^\alpha, R_u^\alpha R_v^\alpha\}\right]$,

iii. $\left[\dfrac{u}{v}\right]^\alpha=\left[\min\left\{\dfrac{L_u^\alpha}{L_v^\alpha},\dfrac{L_u^\alpha}{R_v^\alpha},\dfrac{R_u^\alpha}{L_v^\alpha},\dfrac{R_u^\alpha}{R_v^\alpha}\right\},\max\left\{\dfrac{L_u^\alpha}{L_v^\alpha},\dfrac{L_u^\alpha}{R_v^\alpha},\dfrac{R_u^\alpha}{L_v^\alpha},\dfrac{R_u^\alpha}{R_v^\alpha}\right\}\right]$.

Tanım 2.2.4.10 (65)**.** (x_n) bir pozitif bulanık sayı dizisi olsun. Eğer $\operatorname{supp} x_n\subseteq[M,N]$ olacak biçimde M,N pozitif reel sayıları varsa, x_n *sınırlıdır* denir.

BÖLÜM 3

$\beta_{n+1} = \eta_1 + \frac{\sum_{i=1}^{m} \beta_{n-i}}{\gamma_n},\ \gamma_{n+1} = \eta_2 + \frac{\sum_{i=1}^{m} \gamma_{n-i}}{\beta_n}$ BULANIK FARK DENKLEM SİSTEMİ

Bu bölümde, m pozitif tam sayı, η_1, η_2 parametreleri ve $j \in \{0,1,\dots,m\}$ için $\beta_{-j},\ \gamma_{-j}$ başlangıç koşulları pozitif bulanık sayılar olmak üzere

$$\beta_{n+1} = \eta_1 + \frac{\sum_{i=1}^{m} \beta_{n-i}}{\gamma_n},\ \gamma_{n+1} = \eta_2 + \frac{\sum_{i=1}^{m} \gamma_{n-i}}{\beta_n},\ n \in \mathbb{N}_0, \tag{3.1}$$

yüksek mertebeden bulanık fark denklem sisteminin pozitif çözümlerinin davranışları incelenmiştir.

Öncelikle, aşağıdaki teorem ile (3.1) bulanık fark denklem sisteminin pozitif bulanık çözümünün olduğu ve bu çözümün de tek olduğu gösterilmiştir.

Teorem 3.1. η_1, η_2 parametreleri ve $j \in \{0,1,\dots,m\}$ için $\beta_{-j},\ \gamma_{-j}$ başlangıç koşulları pozitif bulanık sayılar olmak üzere, (3.1) bulanık fark denklem sisteminin bir tek pozitif $\{(\beta_n, \gamma_n)\}_{n=-m}^{\infty}$ çözümü vardır.

İspat. η_1, η_2 parametreleri ve $j \in \{0,1,\dots,m\}$ için $\beta_{-j},\ \gamma_{-j}$ başlangıç koşulları pozitif bulanık sayılar olsun. $\forall \alpha \in (0,1]$ ve $n \geq -m$ için

$$\begin{aligned}
[\beta_n]^\alpha &= \left[L_{\beta_n}^\alpha, R_{\beta_n}^\alpha\right], \\
[\gamma_n]^\alpha &= \left[L_{\gamma_n}^\alpha, R_{\gamma_n}^\alpha\right], \\
[\eta_1]^\alpha &= \left[\eta_{1,l}^\alpha, \eta_{1,r}^\alpha\right], \\
[\eta_2]^\alpha &= \left[\eta_{2,l}^\alpha, \eta_{2,r}^\alpha\right]
\end{aligned} \tag{3.2}$$

olsun. Bu durumda, sistem (3.1), (3.2) deki eşitlikler ve Lemma 2.2.4.1 den

$$
\begin{aligned}
[\beta_{n+1}]^{\alpha} &= \left[L^{\alpha}_{\beta_{n+1}}, R^{\alpha}_{\beta_{n+1}}\right] \\
&= \left[\eta^{\alpha}_{1,l}, \eta^{\alpha}_{1,r}\right] + \frac{\sum_{i=1}^{m}\left[L^{\alpha}_{\beta_{n-i}}, R^{\alpha}_{\beta_{n-i}}\right]}{\left[L^{\alpha}_{\gamma_n}, R^{\alpha}_{\gamma_n}\right]} \\
&= \left[\eta^{\alpha}_{1,l} + \frac{\sum_{i=1}^{m} L^{\alpha}_{\beta_{n-i}}}{R^{\alpha}_{\gamma_n}}, \eta^{\alpha}_{1,r} + \frac{\sum_{i=1}^{m} R^{\alpha}_{\beta_{n-i}}}{L^{\alpha}_{\gamma_n}}\right]
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
[\gamma_{n+1}]^{\alpha} &= \left[L^{\alpha}_{\gamma_{n+1}}, R^{\alpha}_{\gamma_{n+1}}\right] \\
&= \left[\eta^{\alpha}_{2,l}, \eta^{\alpha}_{2,r}\right] + \frac{\sum_{i=1}^{m}\left[L^{\alpha}_{\gamma_{n-i}}, R^{\alpha}_{\gamma_{n-i}}\right]}{\left[L^{\alpha}_{\beta_n}, R^{\alpha}_{\beta_n}\right]} \\
&= \left[\eta^{\alpha}_{2,l} + \frac{\sum_{i=1}^{m} L^{\alpha}_{\gamma_{n-i}}}{R^{\alpha}_{\beta_n}}, \eta^{\alpha}_{2,r} + \frac{\sum_{i=1}^{m} R^{\alpha}_{\gamma_{n-i}}}{L^{\alpha}_{\beta_n}}\right]
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

elde edilir. Teorem 2.2.4.2 den, $n \in \mathbb{N}$, $j \in \{0,1,\ldots,m\}$, $\alpha_1, \alpha_2 \in (0,1]$ ve $\alpha_1 \leq \alpha_2$ için

$$
\begin{aligned}
&0 < \eta^{\alpha_1}_{1,l} \leq \eta^{\alpha_2}_{1,l} \leq \eta^{\alpha_2}_{1,r} \leq \eta^{\alpha_1}_{1,r}, \\
&0 < \eta^{\alpha_1}_{2,l} \leq \eta^{\alpha_2}_{2,l} \leq \eta^{\alpha_2}_{2,r} \leq \eta^{\alpha_1}_{2,r}, \\
&0 < L^{\alpha_1}_{\beta_{n-j}} \leq L^{\alpha_2}_{\beta_{n-j}} \leq R^{\alpha_2}_{\beta_{n-j}} \leq R^{\alpha_1}_{\beta_{n-j}}, \\
&0 < L^{\alpha_1}_{\gamma_{n-j}} \leq L^{\alpha_2}_{\gamma_{n-j}} \leq R^{\alpha_2}_{\gamma_{n-j}} \leq R^{\alpha_1}_{\gamma_{n-j}}, \\
&0 < L^{\alpha_1}_{\beta_n} \leq L^{\alpha_2}_{\beta_n} \leq R^{\alpha_2}_{\beta_n} \leq R^{\alpha_1}_{\beta_n}, \\
&0 < L^{\alpha_1}_{\gamma_n} \leq L^{\alpha_2}_{\gamma_n} \leq R^{\alpha_2}_{\gamma_n} \leq R^{\alpha_1}_{\gamma_n},
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

yazılabilir. (3.5) eşitsizliklerinden, $\alpha_1, \alpha_2 \in (0,1]$ için $\alpha_1 \leq \alpha_2$ olmak üzere

$$
L^{\alpha_1}_{\beta_{n+1}} \leq \eta^{\alpha_1}_{1,l} + \frac{\sum_{i=1}^{m} L^{\alpha_1}_{\beta_{n-i}}}{R^{\alpha_1}_{\gamma_n}} \leq \eta^{\alpha_2}_{1,l} + \frac{\sum_{i=1}^{m} L^{\alpha_2}_{\beta_{n-i}}}{R^{\alpha_2}_{\gamma_n}} \leq L^{\alpha_2}_{\beta_{n+1}} \leq \eta^{\alpha_2}_{1,r} + \frac{\sum_{i=1}^{m} R^{\alpha_2}_{\beta_{n-i}}}{L^{\alpha_2}_{\gamma_n}} \leq R^{\alpha_2}_{\beta_{n+1}} \leq \eta^{\alpha_1}_{1,r} + \frac{\sum_{i=1}^{m} R^{\alpha_1}_{\beta_{n-i}}}{L^{\alpha_1}_{\gamma_n}} \leq R^{\alpha_1}_{\beta_{n+1}} \tag{3.6}
$$

ve

$$
L^{\alpha_1}_{\gamma_{n+1}} \leq \eta^{\alpha_1}_{2,l} + \frac{\sum_{i=1}^{m} L^{\alpha_1}_{\gamma_{n-i}}}{R^{\alpha_1}_{\beta_n}} \leq \eta^{\alpha_2}_{2,l} + \frac{\sum_{i=1}^{m} L^{\alpha_2}_{\gamma_{n-i}}}{R^{\alpha_2}_{\beta_n}} \leq L^{\alpha_2}_{\gamma_{n+1}} \leq \eta^{\alpha_2}_{2,r} + \frac{\sum_{i=1}^{m} R^{\alpha_2}_{\gamma_{n-i}}}{L^{\alpha_2}_{\beta_n}} \leq R^{\alpha_2}_{\gamma_{n+1}} \leq \eta^{\alpha_1}_{2,r} + \frac{\sum_{i=1}^{m} R^{\alpha_1}_{\gamma_{n-i}}}{L^{\alpha_1}_{\beta_n}} \leq R^{\alpha_1}_{\gamma_{n+1}} \tag{3.7}
$$

elde edilir. Şimdi tümevarım metodu kullanılarak, (3.1) bulanık fark denklem sisteminin pozitif bulanık çözümünün var olduğu gösterilecektir. $n=0$ için (3.1) bulanık fark denklem sisteminin pozitif bulanık çözümleri

$$\begin{aligned}
\left[\beta_1\right]^\alpha &= \left[L^\alpha_{\beta_1},\, R^\alpha_{\beta_1}\right] = \left[\eta^\alpha_{1,l} + \frac{\sum_{i=1}^m L^\alpha_{\beta_{n-i}}}{R^\alpha_{\gamma_n}},\, \eta^\alpha_{1,r} + \frac{\sum_{i=1}^m R^\alpha_{\beta_{n-i}}}{L^\alpha_{\gamma_n}}\right],\\
\left[\gamma_1\right]^\alpha &= \left[L^\alpha_{\gamma_1},\, R^\alpha_{\gamma_1}\right] = \left[\eta^\alpha_{2,l} + \frac{\sum_{i=1}^m L^\alpha_{\gamma_{n-i}}}{R^\alpha_{\beta_n}},\, \eta^\alpha_{2,r} + \frac{\sum_{i=1}^m R^\alpha_{\gamma_{n-i}}}{L^\alpha_{\beta_n}}\right]
\end{aligned} \tag{3.8}$$

şeklindedir. η_1, η_2 parametreleri ve $j \in \{0,1,\ldots,m\}$ için $\beta_{-j},\ \gamma_{-j}$ başlangıç koşulları pozitif bulanık sayılar olmak üzere $\forall \alpha \in (0,1]$ için $\beta_1 = \eta_1 + \frac{\sum_{i=1}^m \beta_{-i}}{\gamma_0}$ ve $\gamma_1 = \eta_2 + \frac{\sum_{i=1}^m \gamma_{-i}}{\beta_0}$ nin $\alpha - kesim$ çözümleri sırasıyla $\left[L^\alpha_{\beta_1}, R^\alpha_{\beta_1}\right]$ ve $\left[L^\alpha_{\gamma_1}, R^\alpha_{\gamma_1}\right]$ dır. $\eta^\alpha_{1,l}, \eta^\alpha_{1,r}, \eta^\alpha_{2,l}, \eta^\alpha_{2,r}$ ve $j \in \{0,1,\ldots,m\}$ için $L^\alpha_{\beta_{-j}},\ R^\alpha_{\beta_{-j}},\ L^\alpha_{\gamma_{-j}},\ R^\alpha_{\gamma_{-j}}$ soldan sürekli oldukları için, $L^\alpha_{\beta_1},\ R^\alpha_{\beta_1},\ L^\alpha_{\gamma_1},\ R^\alpha_{\gamma_1}$ de soldan süreklidir. $s \in \{1,2,\ldots,k-1\}$ için $\left[L^\alpha_{\beta_s}, R^\alpha_{\beta_s}\right]$ ve $\left[L^\alpha_{\gamma_s}, R^\alpha_{\gamma_s}\right]$ sırasıyla $\beta_s = \eta_1 + \frac{\sum_{i=1}^m \beta_{s-i-1}}{\gamma_{s-1}}$ ve $\gamma_s = \eta_2 + \frac{\sum_{i=1}^m \gamma_{s-i-1}}{\beta_{s-1}}$ nin $\alpha - kesimleri$ olsun. Bu durumda $n=k$ için

$$\begin{aligned}
\left[\beta_{k+1}\right]^\alpha &= \left[L^\alpha_{\beta_{k+1}},\, R^\alpha_{\beta_{k+1}}\right] = \left[\eta^\alpha_{1,l} + \frac{\sum_{i=1}^m L^\alpha_{\beta_{k-i}}}{R^\alpha_{\gamma_k}},\, \eta^\alpha_{1,r} + \frac{\sum_{i=1}^m R^\alpha_{\beta_{k-i}}}{L^\alpha_{\gamma_k}}\right],\\
\left[\gamma_{k+1}\right]^\alpha &= \left[L^\alpha_{\gamma_{k+1}},\, R^\alpha_{\gamma_{k+1}}\right] = \left[\eta^\alpha_{2,l} + \frac{\sum_{i=1}^m L^\alpha_{\gamma_{k-i}}}{R^\alpha_{\beta_k}},\, \eta^\alpha_{2,r} + \frac{\sum_{i=1}^m R^\alpha_{\gamma_{k-i}}}{L^\alpha_{\beta_k}}\right],
\end{aligned} \tag{3.9}$$

elde edilir. (3.9) denklem sisteminden

$$
\begin{aligned}
L^{\alpha}_{\beta_{k+1}} &= \eta^{\alpha}_{1,l} + \frac{\sum_{i=1}^{m} L^{\alpha}_{\beta_{k-i}}}{R^{\alpha}_{\gamma_k}}, \quad R^{\alpha}_{\beta_{k+1}} = \eta^{\alpha}_{1,r} + \frac{\sum_{i=1}^{m} R^{\alpha}_{\beta_{k-i}}}{L^{\alpha}_{\gamma_k}},\\
L^{\alpha}_{\gamma_{k+1}} &= \eta^{\alpha}_{2,l} + \frac{\sum_{i=1}^{m} L^{\alpha}_{\gamma_{k-i}}}{R^{\alpha}_{\beta_k}}, \quad R^{\alpha}_{\gamma_{k+1}} = \eta^{\alpha}_{2,r} + \frac{\sum_{i=1}^{m} R^{\alpha}_{\gamma_{k-i}}}{L^{\alpha}_{\beta_k}},
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

yazılabilir. Dolayısıyla, (3.1) bulanık fark denklem sisteminin $\alpha - kesimleri$, $\left[L^{\alpha}_{\beta_{k+1}}, R^{\alpha}_{\beta_{k+1}}\right]$ ve $\left[L^{\alpha}_{\gamma_{k+1}}, R^{\alpha}_{\gamma_{k+1}}\right]$ dır. O halde, tümevarım metoduna göre $\forall n \in \mathbb{N}_0$ ve $\alpha \in (0,1]$ için $\left[L^{\alpha}_{\beta_n}, R^{\alpha}_{\beta_n}\right]$ ve $\left[L^{\alpha}_{\gamma_n}, R^{\alpha}_{\gamma_n}\right]$ sırasıyla β_n ve γ_n nin $\alpha - kesimleridir.$

$\left[L^{\alpha}_{\beta_n}, R^{\alpha}_{\beta_n}\right]$ ve $\left[L^{\alpha}_{\gamma_n}, R^{\alpha}_{\gamma_n}\right]$ nin kompakt olduğu da tümevarım metodu ile gösterilebilir. Gerçekten $n = 0$ için kapalı olan $\operatorname{supp}\eta_1$ ve $\operatorname{supp}\eta_2$ destek kümelerinin olduğu aşikardır. Bir başka deyişle, öyle $\left[M_{\eta_1}, N_{\eta_1}\right]$ ve $\left[M_{\eta_2}, N_{\eta_2}\right]$ aralıkları vardır ki

$$
\begin{cases}
\left[\eta^{\alpha}_{1,l}, \eta^{\alpha}_{1,r}\right] \subseteq \overline{\bigcup_{\alpha\in(0,1]}\left[\eta^{\alpha}_{1,l}, \eta^{\alpha}_{1,r}\right]} \subseteq \left[M_{\eta_1}, N_{\eta_1}\right],\\
\left[\eta^{\alpha}_{2,l}, \eta^{\alpha}_{2,r}\right] \subseteq \overline{\bigcup_{\alpha\in(0,1]}\left[\eta^{\alpha}_{2,l}, \eta^{\alpha}_{2,r}\right]} \subseteq \left[M_{\eta_2}, N_{\eta_2}\right],\\
\left[L^{\alpha}_{\beta_1}, R^{\alpha}_{\beta_1}\right] \subseteq \overline{\bigcup_{\alpha\in(0,1]}\left[L^{\alpha}_{\beta_1}, R^{\alpha}_{\beta_1}\right]} \subseteq \left[M_{\beta_1}, N_{\beta_1}\right],\\
\left[L^{\alpha}_{\gamma_1}, R^{\alpha}_{\gamma_1}\right] \subseteq \overline{\bigcup_{\alpha\in(0,1]}\left[L^{\alpha}_{\gamma_1}, R^{\alpha}_{\gamma_1}\right]} \subseteq \left[M_{\gamma_1}, N_{\gamma_1}\right],
\end{cases}
\tag{3.11}
$$

koşulları sağlanır. Tümevarımla $n \in \mathbb{N}_0$ için

$$
\begin{aligned}
\left[L^{\alpha}_{\beta_n}, R^{\alpha}_{\beta_n}\right] &\subseteq \overline{\bigcup_{\alpha\in(0,1]}\left[L^{\alpha}_{\beta_n}, R^{\alpha}_{\beta_n}\right]} \subseteq \left[M_{\beta_n}, N_{\beta_n}\right],\\
\left[L^{\alpha}_{\gamma_n}, R^{\alpha}_{\gamma_n}\right] &\subseteq \overline{\bigcup_{\alpha\in(0,1]}\left[L^{\alpha}_{\gamma_n}, R^{\alpha}_{\gamma_n}\right]} \subseteq \left[M_{\gamma_n}, N_{\gamma_n}\right],
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

olduğu ve β_n, γ_n dizilerinin de kompakt olduğu gösterilebilir. O halde, (3.6), (3.7) ve (3.12) den $\beta_n = [\beta_n]^{\alpha} = \left[L^{\alpha}_{\beta_n}, R^{\alpha}_{\beta_n}\right]$ ve $\gamma_n = [\gamma_n]^{\alpha} = \left[L^{\alpha}_{\gamma_n}, R^{\alpha}_{\gamma_n}\right]$ pozitif bulanık sayı dizileridir. Bu, η_1, η_2 parametreleri ve $j \in \{0,1,\ldots,m\}$ için β_{-j}, γ_{-j} başlangıç koşulları pozitif bulanık sayılar için (3.1) bulanık fark denklem sisteminin bir çözümün olduğunu göstermektedir.

Şimdi çözümün tekliğini gösterilsin. (β'_n, γ'_n) de η_1, η_2 parametreleri ve $j \in \{0,1,\ldots,m\}$ için β_{-j}, γ_{-j} başlangıç koşulları olmak üzere sistem (3.1) in başka pozitif bulanık çözümleri olsun. Tümevarım metodu ile $\alpha \in (0,1]$ ve $n \in \mathbb{N}_{-m}$ için

$$[\beta'_n]^\alpha = \left[L^\alpha_{\beta_n}, R^\alpha_{\beta_n}\right],\ [\gamma'_n]^\alpha = \left[L^\alpha_{\gamma_n}, R^\alpha_{\gamma_n}\right] \tag{3.13}$$

olduğu gösterilebilir. O halde, (3.1) bulanık fark denklem sisteminin tek bir çözümü vardır.■

Kolaylık olması için (3.10) denklem sistemi u_{n+1}, v_{n+1}, w_{n+1}, t_{n+1} sırasıyla $L^\alpha_{\beta_{n+1}}$, $R^\alpha_{\beta_{n+1}}$, $L^\alpha_{\gamma_{n+1}}$, $R^\alpha_{\gamma_{n+1}}$ yı temsil edecek şekilde yeniden ifade edilirse, aşağıda verilen dört-boyutlu fark denklem sistemi

$$\begin{aligned}
L^\alpha_{\beta_{n+1}} &= u_{n+1} = \Delta_1 + \frac{\sum_{i=1}^m u_{n-i}}{t_n}, \\
R^\alpha_{\beta_{n+1}} &= v_{n+1} = \Delta_2 + \frac{\sum_{i=1}^m v_{n-i}}{w_n}, \\
L^\alpha_{\gamma_{n+1}} &= w_{n+1} = \Delta_3 + \frac{\sum_{i=1}^m w_{n-i}}{v_n}, \\
R^\alpha_{\gamma_{n+1}} &= t_{n+1} = \Delta_4 + \frac{\sum_{i=1}^m t_{n-i}}{u_n},
\end{aligned} \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{3.14}$$

yazılabilir. Bundan sonra, (3.14) denklem sisteminin pozitif çözümlerinin davranışı incelenecektir.

Şimdi aşağıdaki teorem ile (3.14) dört-boyutlu fark denklem sisteminin pozitif $\{(u_n, v_n, w_n, t_n)\}_{n=-m}^{\infty}$ çözümünün sınırlılığı gösterilsin.

Teorem 3.2. Eğer $m < \{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4\}$ ise (3.14) fark denklem sisteminin her pozitif çözümü sınırlıdır.

İspat. Sistem (3.14) den $\forall n \geq 1$ için $\Delta_1 \leq u_n,\ \Delta_2 \leq v_n,\ \Delta_3 \leq w_n,\ \Delta_4 \leq t_n$ olduğu kolayca görülür. Bu alt sınırlardan,

$$\begin{cases} u_n = \Delta_1 + \dfrac{\sum_{i=2}^{m+1} u_{n-i}}{t_{n-1}} \leq \Delta_1 + \dfrac{\sum_{i=2}^{m+1} u_{n-i}}{\Delta_4}, \\ v_n = \Delta_2 + \dfrac{\sum_{i=2}^{m+1} v_{n-i}}{w_{n-1}} \leq \Delta_2 + \dfrac{\sum_{i=2}^{m+1} v_{n-i}}{\Delta_3}, \\ w_n = \Delta_3 + \dfrac{\sum_{i=2}^{m+1} w_{n-i}}{v_{n-1}} \leq \Delta_3 + \dfrac{\sum_{i=2}^{m+1} w_{n-i}}{\Delta_2}, \\ t_n = \Delta_4 + \dfrac{\sum_{i=2}^{m+1} t_{n-i}}{u_{n-1}} \leq \Delta_4 + \dfrac{\sum_{i=2}^{m+1} t_{n-i}}{\Delta_1}, \end{cases} n \in \mathbb{N}_2 \tag{3.15}$$

eşitsizlikleri yazılabilir. $\{(\overline{u}_n,\ \overline{v}_n,\ \overline{w}_n,\ \overline{t}_n)\}_{n=0}^{\infty}$ aşağıda verilen

$$\begin{aligned} \overline{u}_n &= \begin{cases} u_n & ,0 \leq n < m \text{ ise} \\ \Delta_1 + \dfrac{\sum_{i=2}^{m+1} \overline{u}_{n-i}}{\Delta_4} & ,m+1 \leq n \text{ ise} \end{cases}, \\ \overline{v}_n &= \begin{cases} v_n & ,0 \leq n < m \text{ ise} \\ \Delta_2 + \dfrac{\sum_{i=2}^{m+1} \overline{v}_{n-i}}{\Delta_3} & ,m+1 \leq n \text{ ise} \end{cases}, \\ \overline{w}_n &= \begin{cases} w_n & ,0 \leq n < m \text{ ise} \\ \Delta_3 + \dfrac{\sum_{i=2}^{m+1} \overline{w}_{n-i}}{\Delta_2} & ,m+1 \leq n \text{ ise} \end{cases}, \\ \overline{t}_n &= \begin{cases} t_n & ,0 \leq n < m \text{ ise} \\ \Delta_4 + \dfrac{\sum_{i=2}^{m+1} \overline{t}_{n-i}}{\Delta_1} & ,m+1 \leq n \text{ ise} \end{cases}, \end{aligned} \tag{3.16}$$

denklem sisteminin bir çözümü olsun. Şimdi tümevarım metodu kullanılarak aşağıdaki eşitsizlikler ispatlanacaktır:

$$u_n \leq \overline{u}_n,\ v_n \leq \overline{v}_n,\ w_n \leq \overline{w}_n,\ t_n \leq \overline{t}_n,\ n \in \mathbb{N}_{m+1}. \tag{3.17}$$

(3.17) eşitsizlikleri herhangi bir $n=k\geq m+1$ için sağlanıyor olsun. Bu durumda (3.15) eşitsizliklerinden

$$
\begin{aligned}
u_{k+1} &\leq \Delta_1+\frac{\sum_{i=1}^{m}u_{k-i}}{\Delta_4}\leq \Delta_1+\frac{\sum_{i=1}^{m}\overline{u}_{k-i}}{\Delta_4}\leq \overline{u}_{k+1},\\
v_{k+1} &\leq \Delta_2+\frac{\sum_{i=1}^{m}v_{k-i}}{\Delta_3}\leq \Delta_2+\frac{\sum_{i=1}^{m}\overline{v}_{k-i}}{\Delta_3}\leq \overline{v}_{k+1},\\
w_{k+1} &\leq \Delta_3+\frac{\sum_{i=1}^{m}w_{k-i}}{\Delta_2}\leq \Delta_3+\frac{\sum_{i=1}^{m}\overline{w}_{k-i}}{\Delta_2}\leq \overline{w}_{k+1},\\
t_{k+1} &\leq \Delta_4+\frac{\sum_{i=1}^{m}t_{k-i}}{\Delta_1}\leq \Delta_4+\frac{\sum_{i=1}^{m}\overline{t}_{k-i}}{\Delta_1}\leq \overline{t}_{k+1},
\end{aligned}
\tag{3.18}
$$

elde edilir. Bu da $u_n\leq\overline{u}_n,\ v_n\leq\overline{v}_n,\ w_n\leq\overline{w}_n,\ t_n\leq\overline{t}_n,\ n\in\mathbb{N}_{m+1}$ eşitsizliklerinin sağlandığını gösterir. $\left\{\left(\overline{u}_n,\overline{v}_n,\overline{w}_n,\overline{t}_n\right)\right\}_{n=-m}^{\infty}$ çözümleri $\left(\frac{\Delta_1\Delta_4}{\Delta_4-m},\frac{\Delta_2\Delta_3}{\Delta_3-m},\frac{\Delta_2\Delta_3}{\Delta_2-m},\frac{\Delta_1\Delta_4}{\Delta_1-m}\right)$ e yakınsamaktadır. Literatürde iyi bilinen karşılaştırma teoreminden

$$
\begin{aligned}
&\limsup_{n\to\infty}u_n\leq\frac{\Delta_1\Delta_4}{\Delta_4-m},\\
&\limsup_{n\to\infty}v_n\leq\frac{\Delta_2\Delta_3}{\Delta_3-m},\\
&\limsup_{n\to\infty}w_n\leq\frac{\Delta_2\Delta_3}{\Delta_2-m},\\
&\limsup_{n\to\infty}t_n\leq\frac{\Delta_1\Delta_4}{\Delta_1-m},
\end{aligned}
\tag{3.19}
$$

yazılabilir. Şimdi, aşağıdaki eşitsizliklerin doğru olduğu gösterilsin:

$$
\begin{aligned}
&\Delta_1+\frac{m(\Delta_1-m)}{\Delta_4}\leq\liminf_{n\to\infty}u_n,\\
&\Delta_2+\frac{m(\Delta_2-m)}{\Delta_3}\leq\liminf_{n\to\infty}v_n,\\
&\Delta_3+\frac{m(\Delta_3-m)}{\Delta_2}\leq\liminf_{n\to\infty}w_n,\\
&\Delta_4+\frac{m(\Delta_4-m)}{\Delta_1}\leq\liminf_{n\to\infty}t_n.
\end{aligned}
\tag{3.20}
$$

$\forall \varepsilon > 0$ için öyle bir $n \in \mathbb{N}_0$ vardır öyle ki $n \geq n_0$ olduğunda

$$u_n \leq \frac{\Delta_1\Delta_4 + \varepsilon}{\Delta_4 - m},\ v_n \leq \frac{\Delta_2\Delta_3 + \varepsilon}{\Delta_3 - m},\ w_n \leq \frac{\Delta_2\Delta_3 + \varepsilon}{\Delta_2 - m},\ t_n \leq \frac{\Delta_1\Delta_4 + \varepsilon}{\Delta_1 - m}, \tag{3.21}$$

eşitsizlikleri sağlanır. (3.14) ve (3.21) den

$$\begin{aligned}
&\Delta_1 + \frac{m\Delta_1(\Delta_1 - m)}{\Delta_1\Delta_4 + \varepsilon} \leq u_n,\\
&\Delta_2 + \frac{m\Delta_2(\Delta_2 - m)}{\Delta_2\Delta_3 + \varepsilon} \leq v_n,\\
&\Delta_3 + \frac{m\Delta_3(\Delta_3 - m)}{\Delta_2\Delta_3 + \varepsilon} \leq w_n,\\
&\Delta_4 + \frac{m\Delta_4(\Delta_4 - m)}{\Delta_1\Delta_4 + \varepsilon} \leq t_n,
\end{aligned} \tag{3.22}$$

elde edilir. Buradan da,

$$\begin{aligned}
&\Delta_1 + \frac{m(\Delta_1 - m)}{\Delta_4} \leq \liminf_{n\to\infty} u_n,\\
&\Delta_2 + \frac{m(\Delta_2 - m)}{\Delta_3} \leq \liminf_{n\to\infty} v_n,\\
&\Delta_3 + \frac{m(\Delta_3 - m)}{\Delta_2} \leq \liminf_{n\to\infty} w_n,\\
&\Delta_4 + \frac{m(\Delta_4 - m)}{\Delta_1} \leq \liminf_{n\to\infty} t_n,
\end{aligned} \tag{3.23}$$

yazılabilir. Bu da (3.14) fark denklem sisteminin pozitif çözümlerinin sınırlı olduğunu gösterir.■

Teorem 3.3. Eğer $m < \{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4\}$ ise (3.14) fark denklem sisteminin tek bir denge noktası vardır ve (3.14) sisteminin pozitif çözümleri

$$\tilde{u} = \frac{\Delta_1\Delta_4 - m^2}{\Delta_4 - m},\ \tilde{v} = \frac{\Delta_2\Delta_3 - m^2}{\Delta_3 - m},\ \tilde{w} = \frac{\Delta_2\Delta_3 - m^2}{\Delta_2 - m},\ \tilde{t} = \frac{\Delta_1\Delta_4 - m^2}{\Delta_1 - m} \tag{3.24}$$

denge noktasına yakınsar.

İspat. Denge noktası tanımından

$$\Theta = \left(\frac{\Delta_1\Delta_4 - m^2}{\Delta_4 - m}, \frac{\Delta_2\Delta_3 - m^2}{\Delta_3 - m}, \frac{\Delta_2\Delta_3 - m^2}{\Delta_2 - m}, \frac{\Delta_1\Delta_4 - m^2}{\Delta_1 - m} \right) \tag{3.25}$$

noktasının sistem (3.14) ün bir denge noktası olduğu kolayca görülür. Şimdi, (3.14) sisteminin pozitif çözümlerinin Θ noktasına yakınsadığı gösterilsin. Sistem (3.14) ün her pozitif çözümü Teorem 3.1.2 den sınırlı olduğundan, $j \in \{1,2,3,4\}$ için $l_j, L_j \in (0,\infty)$ olur ve

$$\begin{aligned}
&\liminf_{n\to\infty} u_n = l_1, \ \limsup_{n\to\infty} u_n = L_1, \\
&\liminf_{n\to\infty} v_n = l_2, \ \limsup_{n\to\infty} v_n = L_2, \\
&\liminf_{n\to\infty} w_n = l_3, \ \limsup_{n\to\infty} w_n = L_3, \\
&\liminf_{n\to\infty} t_n = l_4, \ \limsup_{n\to\infty} t_n = L_4,
\end{aligned} \tag{3.26}$$

şeklindedir. Öte yandan Teorem 3.1.2 ve (3.26) dan

$$\begin{aligned}
&\Delta_1 + \frac{ml_1}{L_4} \le l_1, \ L_1 \le \Delta_1 + \frac{mL_1}{l_4}, \\
&\Delta_2 + \frac{ml_2}{L_3} \le l_2, \ L_2 \le \Delta_2 + \frac{mL_2}{l_3}, \\
&\Delta_3 + \frac{ml_3}{L_2} \le l_3, \ L_3 \le \Delta_3 + \frac{mL_3}{l_2}, \\
&\Delta_4 + \frac{ml_4}{L_1} \le l_4, \ L_4 \le \Delta_4 + \frac{mL_4}{l_1},
\end{aligned} \tag{3.27}$$

yazılabilir. (3.27) deki eşitsizliklerden

$$\begin{aligned}
&\Delta_4 L_1 + ml_4 \le L_1 l_4 \le \Delta_1 l_4 + mL_1, \\
&\Delta_3 L_2 + ml_3 \le L_2 l_3 \le \Delta_2 l_3 + mL_2, \\
&\Delta_2 L_3 + ml_2 \le L_3 l_2 \le \Delta_3 l_2 + mL_3, \\
&\Delta_1 L_4 + ml_1 \le L_4 l_1 \le \Delta_4 l_1 + mL_4,
\end{aligned} \tag{3.28}$$

bulunur ve buradan da

$$
\begin{aligned}
&L_1\left(\Delta_4-m\right)\le l_4\left(\Delta_1-m\right),\\
&L_2\left(\Delta_3-m\right)\le l_3\left(\Delta_2-m\right),\\
&L_3\left(\Delta_2-m\right)\le l_2\left(\Delta_3-m\right),\\
&L_4\left(\Delta_1-m\right)\le l_1\left(\Delta_4-m\right),
\end{aligned}
\tag{3.29}
$$

eşitsizlikleri elde edilir. (3.29) da yer alan eşitsizliklerden birinci ile dördüncü ve ikinci ile üçüncü taraf tarafa çarpılırsa

$$
L_1L_4\le l_1l_4,\ \ L_2L_3\le l_2l_3,
\tag{3.30}
$$

eşitsizlikleri elde edilir. $l_1\le L_1,\ l_2\le L_2,\ l_3\le L_3,\ l_4\le L_4$ olduğundan

$$
\begin{aligned}
&L_4\left(L_1-l_1\right)\le 0,\ L_1\left(L_4-l_4\right)\le 0,\\
&L_3\left(L_2-l_2\right)\le 0,\ L_2\left(L_3-l_3\right)\le 0,
\end{aligned}
\tag{3.31}
$$

bulunur. Dolayısıyla, $j\in\{1,2,3,4\}$ için $l_j=L_j$ olur. Buradan, sistem (3.14) ün $n\to\infty$ iken tek bir Θ denge noktasına yakınsadığı görülür.■

Teorem 3.4. Eğer $m<\{\Delta_1,\Delta_2,\Delta_3,\Delta_4\}$ ve

$$
\begin{aligned}
&m\left(\Delta_1+\Delta_4-2m\right)\left(\Delta_1-m\right)<\left(\Delta_1\Delta_4-m^2\right)\left(\Delta_4-m\right),\\
&m\left(\Delta_1+\Delta_4-2m\right)\left(\Delta_4-m\right)<\left(\Delta_1\Delta_4-m^2\right)\left(\Delta_1-m\right),\\
&m\left(\Delta_2+\Delta_3-2m\right)\left(\Delta_2-m\right)<\left(\Delta_2\Delta_3-m^2\right)\left(\Delta_3-m\right),\\
&m\left(\Delta_2+\Delta_3-2m\right)\left(\Delta_3-m\right)<\left(\Delta_2\Delta_3-m^2\right)\left(\Delta_2-m\right),
\end{aligned}
\tag{3.32}
$$

eşitsizlikleri sağlanırsa, o zaman sistem (3.14) ün

$$
\Theta=\left(\frac{\Delta_1\Delta_4-m^2}{\Delta_4-m},\frac{\Delta_2\Delta_3-m^2}{\Delta_3-m},\frac{\Delta_2\Delta_3-m^2}{\Delta_2-m},\frac{\Delta_1\Delta_4-m^2}{\Delta_1-m}\right)
\tag{3.33}
$$

pozitif denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.

İspat. Sistem (3.14) ün Θ denge noktası civarında lineerleştirilmiş denklemi $\Phi_n=\left(u_n,u_{n-1},...,u_{n-m},v_n,v_{n-1},...,v_{n-m},w_n,w_{n-1},...,w_{n-m},t_n,t_{n-1},...,t_{n-m}\right)^T$ olmak üzere

$$\Phi_{n+1} = \zeta \Phi_n \tag{3.34}$$

biçimindedir. Burada, $\zeta = (\zeta_{ij}),\ 1 \le i, j \le 4m+4$ olmak üzere $(4m+4)\times(4m+4)$ boyutlu matristir. Şimdi $(m+1)\times(m+1)$ boyutlu $\zeta_{\tilde{u}}, \zeta_{\tilde{v}}, \zeta_{\tilde{w}}, \zeta_{\tilde{t}}, \zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4$ matrisleri aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$\begin{gathered}
\zeta_{\tilde{u}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\tilde{u}} & \cdots & \frac{1}{\tilde{u}} & \frac{1}{\tilde{u}} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \zeta_{\tilde{v}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\tilde{v}} & \cdots & \frac{1}{\tilde{v}} & \frac{1}{\tilde{v}} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}, \\
\zeta_{\tilde{w}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\tilde{w}} & \cdots & \frac{1}{\tilde{w}} & \frac{1}{\tilde{w}} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \zeta_{\tilde{t}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\tilde{t}} & \cdots & \frac{1}{\tilde{t}} & \frac{1}{\tilde{t}} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}, \\
\zeta_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix},
\end{gathered} \tag{3.35}$$

ve

$$\begin{gathered}
\zeta_1 = \begin{bmatrix} \frac{-m\tilde{u}}{\tilde{t}^2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \zeta_2 = \begin{bmatrix} \frac{-m\tilde{v}}{\tilde{w}^2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
\zeta_3 = \begin{bmatrix} \frac{-m\tilde{w}}{\tilde{v}^2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \zeta_4 = \begin{bmatrix} \frac{-m\tilde{t}}{\tilde{u}^2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}.
\end{gathered} \tag{3.36}$$

O zaman, $\zeta = (\zeta_{ij}),\ 1 \le i, j \le 4m+4,$ matrisi

$$\zeta = \begin{pmatrix} \zeta_{\tilde{t}} & \zeta_0 & \zeta_0 & \zeta_1 \\ \zeta_0 & \zeta_{\tilde{w}} & \zeta_2 & \zeta_0 \\ \zeta_0 & \zeta_3 & \zeta_{\tilde{v}} & \zeta_0 \\ \zeta_4 & \zeta_0 & \zeta_0 & \zeta_{\tilde{u}} \end{pmatrix} \tag{3.37}$$

şeklinde yazılabilir. $\zeta = \left(\zeta_{ij}\right)$, $1 \le i, j \le 4m+4$ matrisinin özdeğerleri $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{4m+4}$ olsun. $D = \left(d_1, d_2, \ldots, d_{4m+4}\right)$ köşegen matrisinin elemanları, $d_1 = d_{m+2} = d_{2m+3} = d_{3m+4} = 1$ ve diğer elemanları ise $j \in \{0,1,2,3\}$ ve $i \in \{2,3,\ldots,m+1\}$ için $d_{(m+1)j+i} = 1 - i\varepsilon$ olsun. ε değeri de

$$0 < \varepsilon < \frac{1}{m+1} \min\left\{\left(1 - \frac{m\tilde{t} + m\tilde{u}}{\tilde{t}^2}\right), \left(1 - \frac{m\tilde{t} + m\tilde{u}}{\tilde{u}^2}\right), \left(1 - \frac{m\tilde{v} + m\tilde{w}}{\tilde{v}^2}\right), \left(1 - \frac{m\tilde{v} + m\tilde{w}}{\tilde{w}^2}\right)\right\} \tag{3.38}$$

olarak seçilsin. Buradan D matrisinin tersinir olduğu aşikardır. Şimdi $D\zeta D^{-1}$ matris çarpımı hesaplanırsa

$$D\zeta D^{-1} = \begin{bmatrix} \zeta_{\tilde{t}}^{(1)} & \zeta_0^{(1)} & \zeta_0^{(1)} & \zeta_1^{(1)} \\ \zeta_0^{(1)} & \zeta_{\tilde{w}}^{(1)} & \zeta_2^{(1)} & \zeta_0^{(1)} \\ \zeta_0^{(1)} & \zeta_3^{(1)} & \zeta_{\tilde{v}}^{(1)} & \zeta_0^{(1)} \\ \zeta_4^{(1)} & \zeta_0^{(1)} & \zeta_0^{(1)} & \zeta_{\tilde{u}}^{(1)} \end{bmatrix} \tag{3.39}$$

elde edilir ki burada alt blok matrisler aşağıda gösterildiği gibidir:

$$\zeta_{\tilde{u}}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\tilde{u}} d_{3m+4} d_{3m+5}^{-1} & \cdots & \frac{1}{\tilde{u}} d_{3m+4} d_{4m+3}^{-1} & \frac{1}{\tilde{u}} d_{3m+4} d_{4m+4}^{-1} \\ d_{3m+5} d_{3m+4}^{-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{4m+4} d_{4m+3}^{-1} & 0 \end{bmatrix},$$

$$\zeta_{\tilde{v}}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\tilde{v}} d_{2m+3} d_{2m+4}^{-1} & \cdots & \frac{1}{\tilde{v}} d_{2m+3} d_{3m+2}^{-1} & \frac{1}{\tilde{v}} d_{2m+3} d_{3m+3}^{-1} \\ d_{2m+4} d_{2m+3}^{-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{3m+3} d_{3m+2}^{-1} & 0 \end{bmatrix},$$

$$\zeta_{\tilde{w}}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\tilde{w}} d_{m+2} d_{m+3}^{-1} & \cdots & \frac{1}{\tilde{w}} d_{m+2} d_{2m+1}^{-1} & \frac{1}{\tilde{w}} d_{m+2} d_{2m+2}^{-1} \\ d_{m+3} d_{m+2}^{-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{2m+2} d_{2m+1}^{-1} & 0 \end{bmatrix},$$

$$\zeta_{\tilde{t}}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\tilde{t}} d_1 d_2^{-1} & \cdots & \frac{1}{\tilde{t}} d_1 d_m^{-1} & \frac{1}{\tilde{t}} d_1 d_{m+1}^{-1} \\ d_2 d_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{m+1} d_m^{-1} & 0 \end{bmatrix}, \tag{3.40}$$

$$\zeta_0^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \zeta_1^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{-m\tilde{u}}{\tilde{t}^2} d_1 d_{3m+4}^{-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\zeta_2^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{-m\tilde{v}}{\tilde{w}^2} d_{m+2} d_{2m+3}^{-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \zeta_3^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{-m\tilde{w}}{\tilde{v}^2} d_{2m+3} d_{m+2}^{-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\zeta_4^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{-m\tilde{t}}{\tilde{u}^2} d_{3m+4} d_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.41}$$

D köşegen matrisinin köşegen elemanları arasında aşağıdaki gibi ilişki

$$\begin{aligned} &0 < d_{m+1} < d_m < \ldots < d_1, \\ &0 < d_{2m+2} < d_{2m+1} < \ldots < d_{m+2}, \\ &0 < d_{3m+3} < d_{3m+2} < \ldots < d_{2m+3}, \\ &0 < d_{4m+4} < d_{4m+3} < \ldots < d_{3m+4}, \end{aligned} \tag{3.42}$$

olduğundan $j \in \{0,1,2,3\}$ ve $i \in \{2,3,\ldots,m+1\}$ için

$$d_{(m+1)j+i} d_{(m+1)j+i-1} < 1 \tag{3.43}$$

elde edilir. Ayrıca,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tilde{t}} d_1 d_2^{-1} + \ldots + \frac{1}{\tilde{t}} d_1 d_{m+1}^{-1} + \frac{m\tilde{u}}{\tilde{t}^2} d_1 d_{3m+4}^{-1} &= \frac{1}{\tilde{t}} \left(\frac{1}{1-2\varepsilon} + \ldots + \frac{1}{1-(m+1)\varepsilon} \right) + \frac{m\tilde{u}}{\tilde{t}^2} \\ &< \frac{m}{1-(m+1)\varepsilon} \left(\frac{1}{\tilde{t}} + \frac{mu}{\tilde{t}^2} \right) \\ &< 1, \end{aligned} \tag{3.44}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tilde{w}} d_{m+2} d_{m+3}^{-1} + \ldots + \frac{1}{\tilde{w}} d_{m+2} d_{2m+2}^{-1} + \frac{m\tilde{v}}{\tilde{w}^2} d_{m+2} d_{2m+3}^{-1} &= \frac{1}{\tilde{w}} \left(\frac{1}{1-2\varepsilon} + \ldots + \frac{1}{1-(m+1)\varepsilon} \right) + \frac{m\tilde{v}}{\tilde{w}^2} \\ &< \frac{m}{1-(m+1)\varepsilon} \left(\frac{1}{\tilde{w}} + \frac{m\tilde{v}}{\tilde{w}^2} \right) \\ &< 1, \end{aligned} \tag{3.45}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tilde{v}} d_{2m+3} d_{2m+4}^{-1} + \ldots + \frac{1}{\tilde{v}} d_{2m+3} d_{3m+3}^{-1} + \frac{m\tilde{w}}{\tilde{v}^2} d_{2m+3} d_{m+2}^{-1} &= \frac{1}{\tilde{v}} \left(\frac{1}{1-2\varepsilon} + \ldots + \frac{1}{1-(m+1)\varepsilon} \right) + \frac{m\tilde{w}}{\tilde{v}^2} \\ &< \frac{m}{1-(m+1)\varepsilon} \left(\frac{1}{\tilde{v}} + \frac{m\tilde{w}}{\tilde{v}^2} \right) \\ &< 1, \end{aligned} \tag{3.46}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tilde{u}} d_{3m+4} d_{3m+5}^{-1} + \ldots + \frac{1}{\tilde{u}} d_{3m+4} d_{4m+4}^{-1} + \frac{m\tilde{t}}{\tilde{u}^2} d_1 d_{3m+4}^{-1} &= \frac{1}{\tilde{u}} \left(\frac{1}{1-2\varepsilon} + \ldots + \frac{1}{1-(m+1)\varepsilon} \right) + \frac{m\tilde{t}}{\tilde{u}^2} \\ &< \frac{m}{1-(m+1)\varepsilon} \left(\frac{1}{\tilde{u}} + \frac{m\tilde{t}}{\tilde{u}^2} \right) \\ &< 1, \end{aligned} \tag{3.47}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Buradan ζ ve $D\zeta D^{-1}$ matrislerinin özdeğerlerinin aynı olduğu aşikardır. Dolayısıyla, $i \in \{1, 2, \ldots, 4m+4\}$ için

$$\max|\psi_i| \leq \|D\zeta D^{-1}\| = \max \left\{ \begin{array}{l} d_2 d_1^{-1}, \ldots, d_{m+1} d_m^{-1}, d_{m+3} d_{m+2}^{-1}, \ldots, d_{2m+2} d_{2m+1}^{-1}, \\ d_{2m+4} d_{2m+3}^{-1}, \ldots, d_{3m+3} d_{3m+2}^{-1}, d_{3m+5} d_{3m+4}^{-1}, \ldots, d_{4m+4} d_{4m+3}^{-1}, \\ \frac{1}{\tilde{t}}\left(\frac{1}{1-2\varepsilon} + \ldots + \frac{1}{1-(m+1)\varepsilon}\right) + \frac{m\tilde{u}}{\tilde{t}^2}, \frac{1}{\tilde{v}}\left(\frac{1}{1-2\varepsilon} + \ldots + \frac{1}{1-(m+1)\varepsilon}\right) + \frac{m\tilde{w}}{\tilde{v}^2}, \\ \frac{1}{\tilde{w}}\left(\frac{1}{1-2\varepsilon} + \ldots + \frac{1}{1-(m+1)\varepsilon}\right) + \frac{m\tilde{v}}{\tilde{w}^2}, \frac{1}{\tilde{u}}\left(\frac{1}{1-2\varepsilon} + \ldots + \frac{1}{1-(m+1)\varepsilon}\right) + \frac{m\tilde{t}}{\tilde{u}^2} \end{array} \right\} \quad (3.48)$$

$$< 1.$$

Dolayısıyla, ζ ve $D\zeta D^{-1}$ matrislerinin özdeğerleri birim disk içinde yer almaktadır. O halde, (3.14) fark denklem sisteminin (3.33) te verilen pozitif denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.■

Teorem 3.5. Eğer $m < \{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4\}$ ve (3.32) şartları sağlanırsa, (3.14) fark denklem sisteminin (3.33) te verilen pozitif denge noktası global asimptotik kararlıdır.

İspat. Teorem 3.1.3 ve Teorem 3.1.4 ten (3.14) fark denklem sistemi global asimptotik kararlı olduğu kolayca görülür. ■

Teorem 3.6. Eğer $m < \{\eta_{1,l}, \eta_{2,l}, \eta_{1,r}, \eta_{2,r}\}$ ise (3.1) bulanık fark denklem sistemi sınırlıdır.

İspat. $\{(\beta_n, \gamma_n)\}_{n=-m}^{\infty}$ pozitif bulanık dizileri, (3.1) bulanık fark denklem sisteminin çözümleri olsun. Bu durumda, β_n ve γ_n nin $\alpha-$*kesimleri* aşağıdaki şekildedir:

$$\begin{cases} [\beta_n]^\alpha = \left[L_{\beta_n}^\alpha, R_{\beta_n}^\alpha\right], \ [\gamma_n]^\alpha = \left[L_{\gamma_n}^\alpha, R_{\gamma_n}^\alpha\right], \\ [\eta_1]^\alpha = \left[\eta_{1,l}^\alpha, \eta_{1,r}^\alpha\right], \ [\eta_2]^\alpha = \left[\eta_{2,l}^\alpha, \eta_{2,r}^\alpha\right]. \end{cases} \quad (3.49)$$

(3.3), (3.4) ve Teorem 3.1.2 den herhangi bir $\alpha \in (0,1]$ için

$$\begin{aligned}
&\eta_{1,l}^{\alpha}+\frac{m\left(\eta_{1,l}^{\alpha}-m\right)}{\eta_{2,r}^{\alpha}}\leq L_{\beta_n}^{\alpha}\leq\frac{\eta_{1,l}^{\alpha}\eta_{2,r}^{\alpha}}{\eta_{2,r}^{\alpha}-m},\\
&\eta_{1,r}^{\alpha}+\frac{m\left(\eta_{1,r}^{\alpha}-m\right)}{\eta_{2,l}^{\alpha}}\leq R_{\beta_n}^{\alpha}\leq\frac{\eta_{1,r}^{\alpha}\eta_{2,l}^{\alpha}}{\eta_{2,l}^{\alpha}-m},\\
&\eta_{2,l}^{\alpha}+\frac{m\left(\eta_{2,l}^{\alpha}-m\right)}{\eta_{1,r}^{\alpha}}\leq L_{\gamma_n}^{\alpha}\leq\frac{\eta_{1,r}^{\alpha}\eta_{2,l}^{\alpha}}{\eta_{1,r}^{\alpha}-m},\\
&\eta_{2,r}^{\alpha}+\frac{m\left(\eta_{2,r}^{\alpha}-m\right)}{\eta_{1,l}^{\alpha}}\leq R_{\gamma_n}^{\alpha}\leq\frac{\eta_{1,l}^{\alpha}\eta_{2,r}^{\alpha}}{\eta_{1,l}^{\alpha}-m},
\end{aligned}\tag{3.50}$$

yazılabilir. Ayrıca destek kümeleri de aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\left[\eta_{1,l}^{\alpha},\eta_{1,r}^{\alpha}\right]\subseteq\left[M_{\eta_1},N_{\eta_1}\right],\ \left[\eta_{2,l}^{\alpha},\eta_{2,r}^{\alpha}\right]\subseteq\left[M_{\eta_2},N_{\eta_2}\right].\tag{3.51}$$

İlaveten, $M_{\eta_1},N_{\eta_1},M_{\eta_2},N_{\eta_2}$ nin $\alpha-kesimlerinin$ hem sağ hem de sol uçları pozitif reel sayılardır. Dolayısıyla, (3.50) ve (3.51) den, $\alpha\in\left(0,1\right]$ için

$$\begin{aligned}
&\left[L_{\beta_n}^{\alpha},R_{\beta_n}^{\alpha}\right]\subseteq\left[M_{\eta_1}+\frac{m\left(M_{\eta_1}-m\right)}{N_{\eta_2}},\frac{N_{\eta_1}M_{\eta_2}}{M_{\eta_2}-m}\right],\\
&\left[L_{\gamma_n}^{\alpha},R_{\gamma_n}^{\alpha}\right]\subseteq\left[M_{\eta_2}+\frac{m\left(M_{\eta_2}-m\right)}{N_{\eta_1}},\frac{M_{\eta_1}N_{\eta_2}}{M_{\eta_1}-m}\right],
\end{aligned}\tag{3.52}$$

yazılabilir ve dahası

$$m_1\leq M_{\eta_1}+\frac{m\left(M_{\eta_1}-m\right)}{N_{\eta_2}},\ M_1\leq\frac{N_{\eta_1}M_{\eta_2}}{M_{\eta_2}-m},\ m_2\leq M_{\eta_2}+\frac{m\left(M_{\eta_2}-m\right)}{N_{\eta_1}},\ M_2\leq\frac{M_{\eta_1}N_{\eta_2}}{M_{\eta_1}-m},$$

olacak biçimde m_1,M_1,m_2,M_2 pozitif reel sayıları vardır. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned}
&\left[L_{\beta_n}^{\alpha},R_{\beta_n}^{\alpha}\right]\subseteq\overline{\bigcup_{\alpha\in(0,1]}\left[L_{\beta_n}^{\alpha},R_{\beta_n}^{\alpha}\right]}\subseteq\left[m_1,M_1\right],\\
&\left[L_{\gamma_n}^{\alpha},R_{\gamma_n}^{\alpha}\right]\subseteq\overline{\bigcup_{\alpha\in(0,1]}\left[L_{\gamma_n}^{\alpha},R_{\gamma_n}^{\alpha}\right]}\subseteq\left[m_2,M_2\right],
\end{aligned}\tag{3.53}$$

olur. O halde, (3.1) bulanık fark denklem sisteminin pozitif çözümleri alttan ve üstten sınırlıdır. Bu da ispatı tamamlar.■

Teorem 3.7. Eğer $m < \min\left\{\eta_{1,l}, \eta_{1,r}, \eta_{2,l}, \eta_{2,l}\right\}$ ise, sistem (3.1) in tek bir

$$\beta = \left[\frac{\eta_{1,l}\eta_{2,r} - m^2}{\eta_{2,r} - m}, \frac{\eta_{1,r}\eta_{2,l} - m^2}{\eta_{2,l} - m}\right], \ \gamma = \left[\frac{\eta_{1,r}\eta_{2,l} - m^2}{\eta_{1,r} - m}, \frac{\eta_{1,l}\eta_{2,r} - m^2}{\eta_{1,l} - m}\right] \tag{3.54}$$

pozitif denge noktası vardır. Hatta, sistem (3.1) in her pozitif bulanık $\left\{\left(\beta_n, \gamma_n\right)\right\}_{n=-m}^{\infty}$ çözümü bu denge noktasına yakınsar.

İspat. (3.3), (3.4) ve Teorem 3.1.3 ten

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} L_{\beta_n}^{\alpha} = l_{\beta_n} = \frac{\eta_{1,l}\eta_{2,r} - m^2}{\eta_{2,r} - m}, \ \lim_{n\to\infty} R_{\beta_n}^{\alpha} = r_{\beta_n} = \frac{\eta_{1,r}\eta_{2,l} - m^2}{\eta_{2,l} - m}, \\
&\lim_{n\to\infty} L_{\gamma_n}^{\alpha} = l_{\gamma_n} = \frac{\eta_{1,l}\eta_{2,r} - m^2}{\eta_{1,l} - m}, \ \lim_{n\to\infty} L_{\gamma_n}^{\alpha} = r_{\gamma_n} = \frac{\eta_{1,r}\eta_{2,l} - m^2}{\eta_{2,l} - m}
\end{aligned} \tag{3.55}$$

eşitlikleri elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} D\left(\beta_n, \beta\right) = \lim_{n\to\infty} D\left(\beta_n - \left[l_{\beta_n}, r_{\beta_n}\right]\right) = \lim_{n\to\infty} \sup \max\left\{\left|L_{\beta_n} - l_{\beta_n}\right|, \left|R_{\beta_n} - r_{\beta_n}\right|\right\} = 0, \\
&\lim_{n\to\infty} D\left(\gamma_n, \tilde{\gamma}\right) = \lim_{n\to\infty} D\left(\gamma_n - \left[l_{\gamma_n}, r_{\gamma_n}\right]\right) = \lim_{n\to\infty} \sup \max\left\{\left|L_{\gamma_n} - l_{\gamma_n}\right|, \left|R_{\gamma_n} - r_{\gamma_n}\right|\right\} = 0
\end{aligned} \tag{3.56}$$

yazılabilir. Dolayısıyla, $\lim_{n\to\infty} \beta_n = \tilde{\beta}$, $\lim_{n\to\infty} \gamma_n = \tilde{\gamma}$ elde edilir. O halde, (3.1) bulanık fark denklem sisteminin her pozitif çözümü $n \to \infty$ iken $\left(\tilde{\beta}, \tilde{\gamma}\right)$ noktasına yakınsar.■

Şimdi, (3.1) bulanık fark denklem sistemi için iki örnek verilecektir. Verilen bu örneklerle, sınırlılık şartı ve denge noktasının bulunan sonuçlarla tutarlı olduğu gösterilecektir. Örneklerde $\alpha - kesimleri$, $\alpha = 0$, $\alpha = 0.50$, $\alpha = 0.75$ ve $\alpha = 1$ olarak alınsın.

Örnek 3.1. $m = 4$ için (3.1) bulanık fark denklemi göz önüne alınsın. Bu durumda (3.1) bulanık fark denklem sistemi aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\beta_{n+1}=\frac{\beta_{n-1}+\beta_{n-2}+\beta_{n-3}+\beta_{n-4}}{\gamma_n},\ \gamma_{n+1}=\frac{\gamma_{n-1}+\gamma_{n-2}+\gamma_{n-3}+\gamma_{n-4}}{\beta_n},\ n\in\mathbb{N}_0, \tag{3.57}$$

olur. Ayrıca, η_1 ve η_2 parametreleri pozitif bulanık sayılar ve başlangıç koşulları $i\in\{0,1,2,3,4\}$ için β_{-i},γ_{-i} ise pozitif üçgensel bulanık sayılar sırasıyla aşağıdaki gibi olsun:

$$\eta_1(x)=\begin{cases}\frac{1}{6}x-1, & 6\le x\le 12\\ -\frac{1}{6}x+3, & 12\le x\le 18\end{cases},\quad \eta_2(x)=\begin{cases}\frac{1}{5}x-1, & 5\le x\le 10\\ -\frac{1}{5}x+3, & 10\le x\le 15\end{cases},$$

$$\beta_{-4}(x)=\begin{cases}\frac{1}{5}x-2, & 10\le x\le 15\\ -\frac{1}{10}x+\frac{5}{2}, & 15\le x\le 25\end{cases},\quad \gamma_{-4}(x)=\begin{cases}\frac{10}{3}x-\frac{10}{3}, & 1\le x\le 1.30\\ -5x+\frac{15}{2}, & 1.30\le x\le 1.50\end{cases},$$

$$\beta_{-3}(x)=\begin{cases}\frac{1}{5}x-2, & 10\le x\le 15\\ -\frac{1}{10}x+\frac{5}{2}, & 15\le x\le 25\end{cases},\quad \gamma_{-3}(x)=\begin{cases}\frac{10}{3}x-\frac{10}{3}, & 1\le x\le 1.30\\ -5x+\frac{15}{2}, & 1.30\le x\le 1.50\end{cases},$$

$$\beta_{-2}(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}x-1, & 3\le x\le 6\\ -\frac{1}{3}x+3, & 6\le x\le 9\end{cases},\quad \gamma_{-2}(x)=\begin{cases}10x-1, & 0.10\le x\le 0.20\\ -5x+2, & 0.20\le x\le 0.40\end{cases},$$

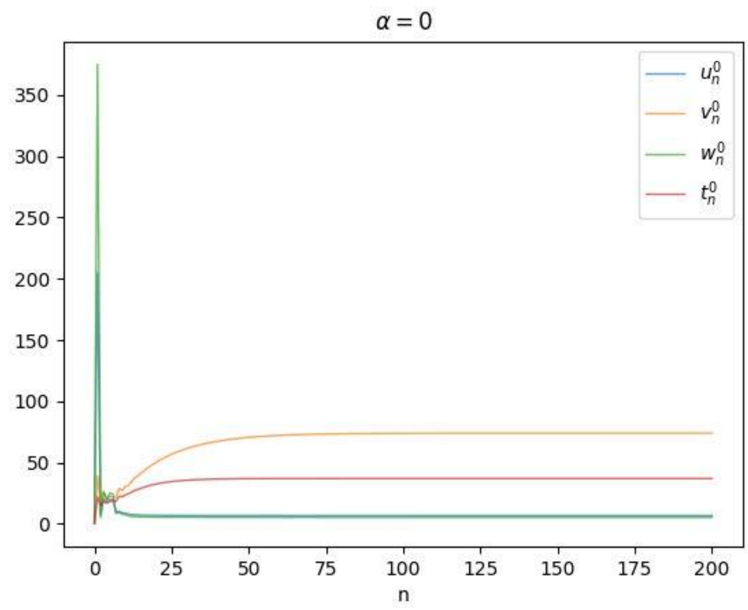
$$\beta_{-1}(x)=\begin{cases}5x-1, & 0.20\le x\le 0.40\\ -5x+3, & 0.40\le x\le 0.60\end{cases},\quad \gamma_{-1}(x)=\begin{cases}\frac{100}{9}x-\frac{1}{9}, & 0.01\le x\le 0.10\\ -5x+\frac{3}{2}, & 0.10\le x\le 0.30\end{cases},$$

$$\beta_0(x)=\begin{cases}\frac{100}{9}x-\frac{1}{9}, & 0.01\le x\le 0.10\\ -5x+\frac{3}{2}, & 0.10\le x\le 0.30\end{cases},\quad \gamma_0(x)=\begin{cases}2x-\frac{3}{5}, & 0.30\le x\le 0.80\\ -\frac{10}{3}x+\frac{11}{3}, & 0.80\le x\le 1.1\end{cases}.$$

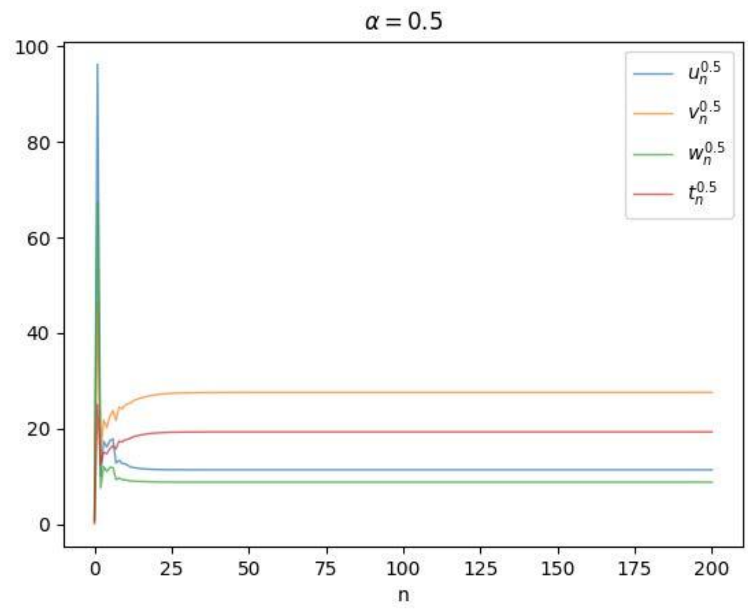
Ayrıca, $\alpha\in(0,1]$ için parametreler ve başlangıç koşullarının kapalı destek kümeleri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{cases} \text{supp } \eta_1 \subseteq [6,18], & \text{supp } \eta_2 \subseteq [5,15], \\ \text{supp } \beta_{-4} \subseteq [10,25], & \text{supp } \gamma_{-4} \subseteq [1,1.15], \\ \text{supp } \beta_{-3} \subseteq [10,25], & \text{supp } \gamma_{-3} \subseteq [1,1.15], \\ \text{supp } \beta_{-2} \subseteq [3,9], & \text{supp } \gamma_{-2} \subseteq [0.20,0.40], \\ \text{supp } \beta_{-1} \subseteq [0.20,0.60], & \text{supp } \gamma_{-1} \subseteq [0.01,0.30], \\ \text{supp } \beta_{0} \subseteq [0.01,0.30], & \text{supp } \gamma_{0} \subseteq [0.30,1.10]. \end{cases} \tag{3.58}$$

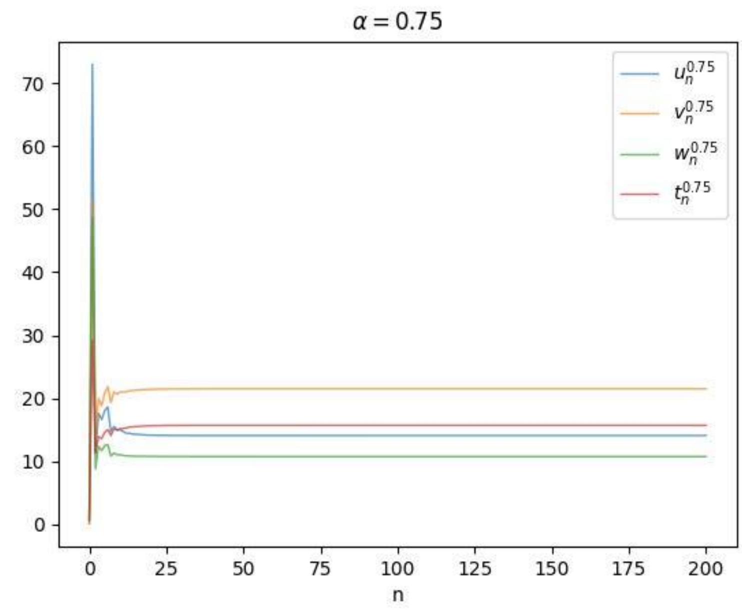
Örnek (3.1) bulanık fark denklem sisteminin çözümlerinin $m < \{\eta_{1,l}, \eta_{2,l}, \eta_{1,r}, \eta_{2,r}\}$ şartı sağlandığında alttan ve üstten sınırlı olduğunu göstermektedir. Üstelik, şekil 6 $\alpha = 0$ için, şekil 7 $\alpha = 0.50$ için, şekil 8 $\alpha = 0.75$ için ve şekil 9 ise $\alpha = 1$ için $n \to \infty$ iken (3.1) bulanık fark denklem sisteminin pozitif çözümlerinin (3.54) te verilen tek bir (β, γ) denge noktasına yakınsadığını da göstermektedir. Şekil 10 $\alpha = 0$ için, şekil 11 $\alpha = 0.50$ için, şekil 12 $\alpha = 0.75$ için ve şekil 13 ise $\alpha = 1$ için (3.57) bulanık fark denklem sisteminin çekimliliğini göstermektedir. $\alpha = 0$ için, $\eta_1 = [6,18]$, $\eta_2 = [5,15]$ olur. Buradan, $(\tilde{\beta}, \tilde{\gamma})$ denge noktası $\tilde{\beta} = [6.7273, 74.0]$, $\tilde{\gamma} = [5.2857, 37]$ elde edilir. $\alpha = 0.50$ için, $\eta_1 = [9,15]$, $\eta_2 = [7.50, 12.50]$ olur. Buradan, $(\tilde{\beta}, \tilde{\gamma})$ denge noktası $\tilde{\beta} = [11.3529, 27.5714]$, $\tilde{\gamma} = [8.7727, 19.30]$ elde edilir. $\alpha = 0.75$ için, $\eta_1 = [10.50, 13.50]$, $\eta_2 = [8.75, 11.25]$ olur. Buradan, $(\tilde{\beta}, \tilde{\gamma})$ denge noktası $\tilde{\beta} = [11.3529, 27.5714]$, $\tilde{\gamma} = [10.75, 15.7115]$ elde edilir. $\alpha = 1$ için, $\eta_1 = [12,12]$, $\eta_2 = [10,10]$ olur. Buradan, $(\tilde{\beta}, \tilde{\gamma})$ denge noktası $\tilde{\beta} = [17.3333, 17.3333]$, $\tilde{\gamma} = [13.0, 13.0]$ elde edilir.



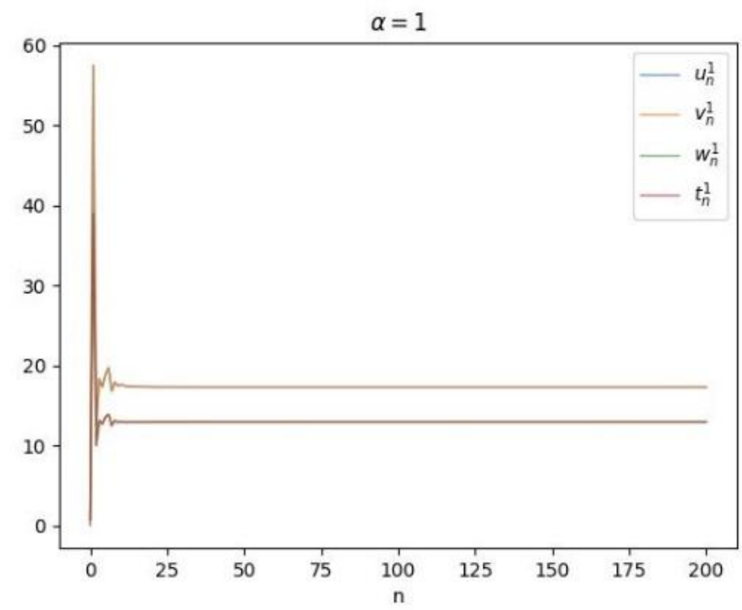
Şekil 6. $\alpha = 0$ için sistem (3.57) nin çözümlerinin grafiği



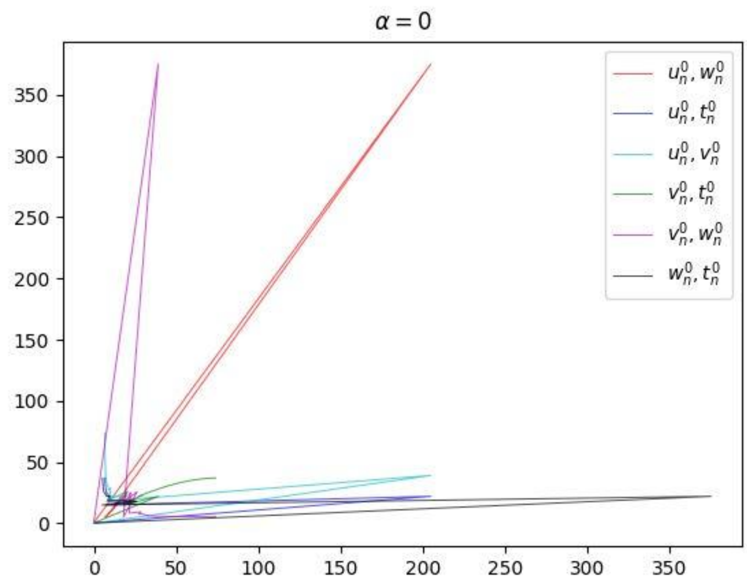
Şekil 7. $\alpha = 0.50$ için sistem (3.57) nin çözümlerinin grafiği



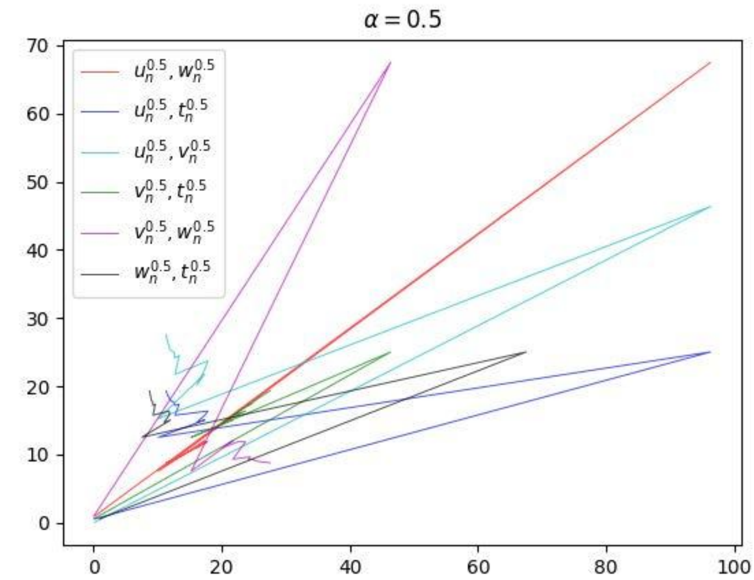
Şekil 8. $\alpha = 0.75$ için sistem (3.57) nin çözümlerinin grafiği



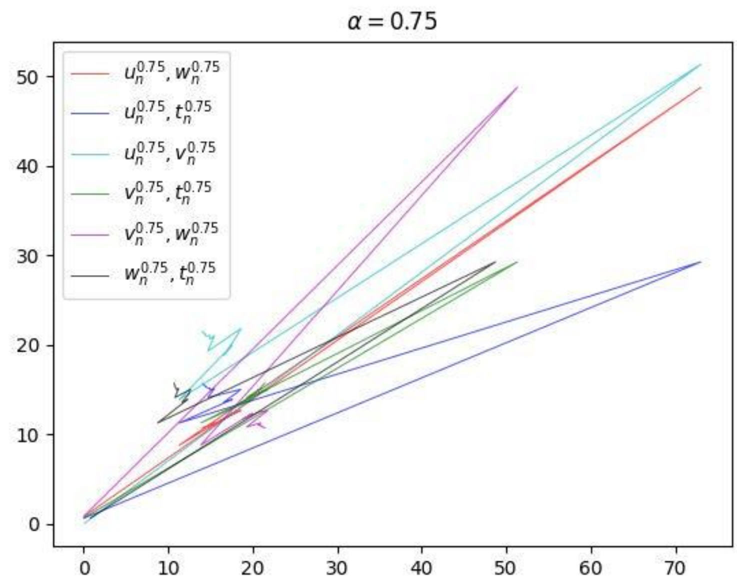
Şekil 9. $\alpha = 1$ için sistem (3.57) nin çözümlerinin grafiği



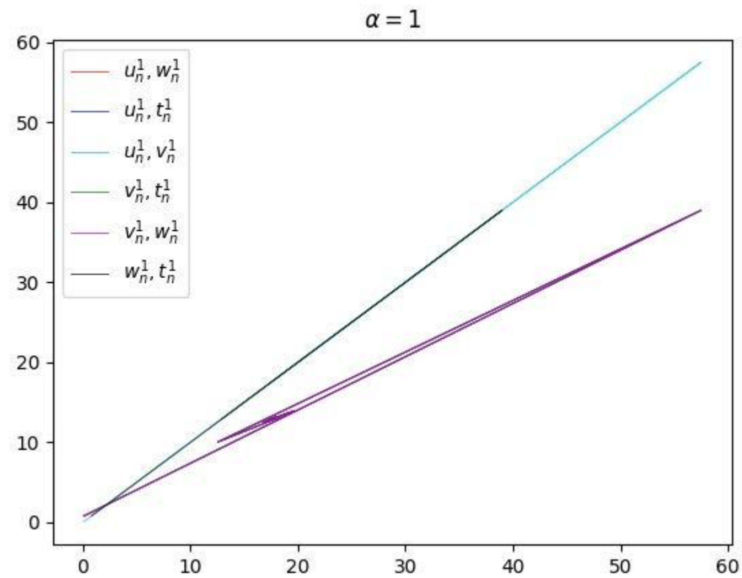
Şekil 10. $\alpha = 0$ için sistem (3.57) nin çözümlerinin çekimliliğinin grafiği



Şekil 11. $\alpha = 0.50$ için sistem (3.57) nin çözümlerinin çekimliliğinin grafiği



Şekil 12. $\alpha = 0.75$ için sistem (3.57) nin çözümlerinin çekimliliğinin grafiği



Şekil 13. $\alpha = 1$ için sistem (3.57) nin çözümlerinin çekimliliğinin grafiği

Örnek 3.2. $m=2$ için (3.1) bulanık fark denklem sistemi göz önüne alınsın. Bu durumda (3.1) bulanık fark denklem sistemi aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\beta_{n+1}=\frac{\beta_{n-1}+\beta_{n-2}}{\gamma_n},\ \gamma_{n+1}=\frac{\gamma_{n-1}+\gamma_{n-2}}{\beta_n},\ n\in\mathbb{N}_0, \tag{3.59}$$

olsun. Parametreler η_1,η_2 ve başlangıç koşulları $i\in\{0,1,2\}$ için β_{-i},γ_{-i} üçgensel bulanık sayılar sırasıyla aşağıdaki gibi olsun:

$$\eta_1(x)=\begin{cases}5x-\frac{7}{2}, & 0.70\le x\le 0.90\\ -\frac{5}{2}x+\frac{13}{4}, & 0.90\le x\le 1.30\end{cases},\ \eta_2(x)=\begin{cases}\frac{5}{3}x-\frac{5}{6}, & 0.50\le x\le 1.10\\ -\frac{5}{3}x+\frac{17}{6}, & 1.10\le x\le 1.70\end{cases},$$

$$\beta_{-2}(x)=\begin{cases}\frac{5}{2}x-4, & 1.60\le x\le 2\\ -\frac{10}{11}x+\frac{31}{11}, & 2\le x\le 3.10\end{cases},\ \gamma_{-2}(x)=\begin{cases}\frac{5}{14}x-\frac{1}{14}, & 0.20\le x\le 3\\ -\frac{5}{8}x+\frac{23}{8}, & 3\le x\le 4.60\end{cases},$$

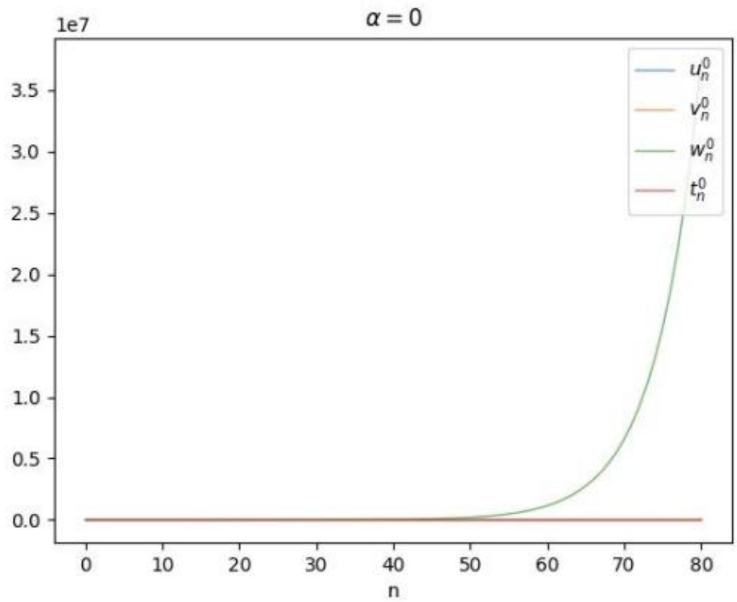
$$\beta_{-1}(x)=\begin{cases}\frac{5}{3}x-\frac{7}{3}, & 1.40\le x\le 2\\ -\frac{5}{2}x+6, & 2\le x\le 2.40\end{cases},\ \gamma_{-1}(x)=\begin{cases}\frac{5}{3}x-4, & 2.40\le x\le 3\\ -\frac{5}{12}x+\frac{9}{4}, & 3\le x\le 5.40\end{cases},$$

$$\beta_{0}(x)=\begin{cases}\frac{10}{59}x-\frac{1}{59}, & 0.10\le x\le 6\\ -\frac{10}{41}x+\frac{101}{41}, & 6\le x\le 10.10\end{cases},\ \gamma_{0}(x)=\begin{cases}\frac{10}{49}x-\frac{1}{49}, & 0.10\le x\le 5\\ -\frac{10}{41}x+\frac{91}{41}, & 5\le x\le 9.10\end{cases}.$$

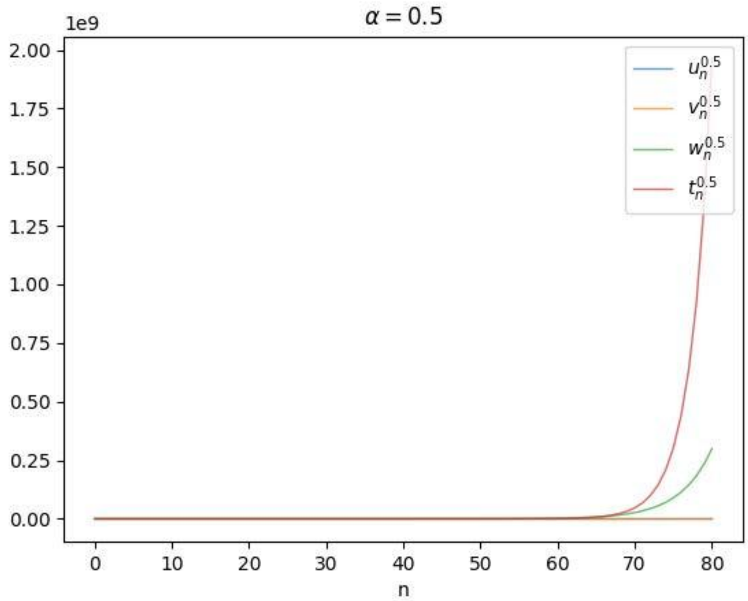
Ayrıca, $\alpha\in(0,1]$ için parametreler ve başlangıç koşullarının kapalı destek kümeleri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{cases} \text{supp } \eta_1 \subseteq [0.70, 1.30], & \text{supp } \eta_2 \subseteq [0.50, 1.70], \\ \text{supp } \beta_{-2} \subseteq [1.60, 3.10], & \text{supp } \gamma_{-2} \subseteq [0.20, 4.60], \\ \text{supp } \beta_{-1} \subseteq [1.40, 2.40], & \text{supp } \gamma_{-1} \subseteq [2.40, 5.40], \\ \text{supp } \beta_0 \subseteq [0.10, 10.10], & \text{supp } \gamma_0 \subseteq [0.10, 9.10]. \end{cases} \tag{3.60}$$

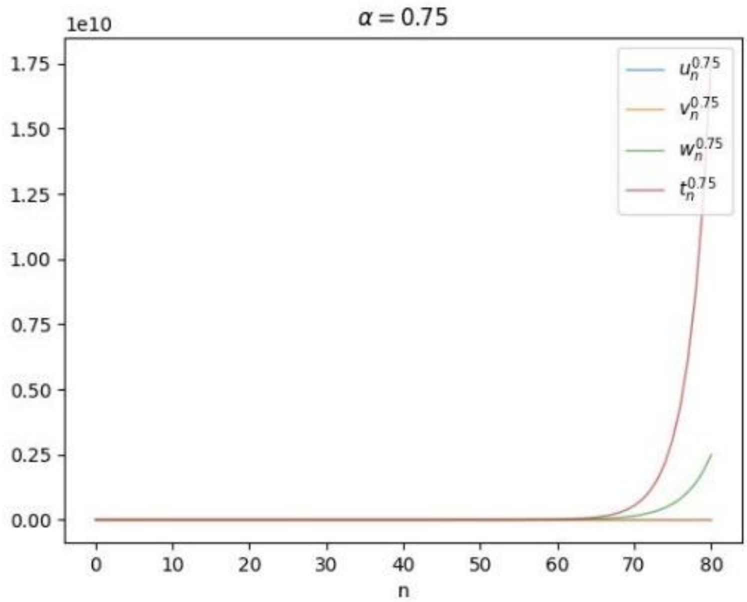
Bu da m nin η_1, η_2 nin en az birinden büyük veya eşit olduğunda (3.1) bulanık fark denklem sisteminin pozitif çözümlerinin sınırlı olmadığını göstermektedir. Hatta, $n \to \infty$ iken (3.59) bulanık fark denklem sisteminin çözümleri (3.54) ile verilen $(\tilde{\beta}, \tilde{\gamma})$ denge noktasına yakınsamamaktadır. Şekil 14 $\alpha = 0$ için, şekil 15 $\alpha = 0.50$ için, şekil 16 $\alpha = 0.75$ için, şekil 17 ise $\alpha = 1$ için (3.59) bulanık fark denklem sisteminin çözümlerinin grafiğini göstermektedir. Şekil 18 $\alpha = 0$ için, şekil 19 $\alpha = 0.50$ için, şekil 20 $\alpha = 0.75$ için, şekil 21 ise $\alpha = 1$ için (3.59) bulanık fark denklem sisteminin faz portrelerini (phase portrait) göstermektedir.



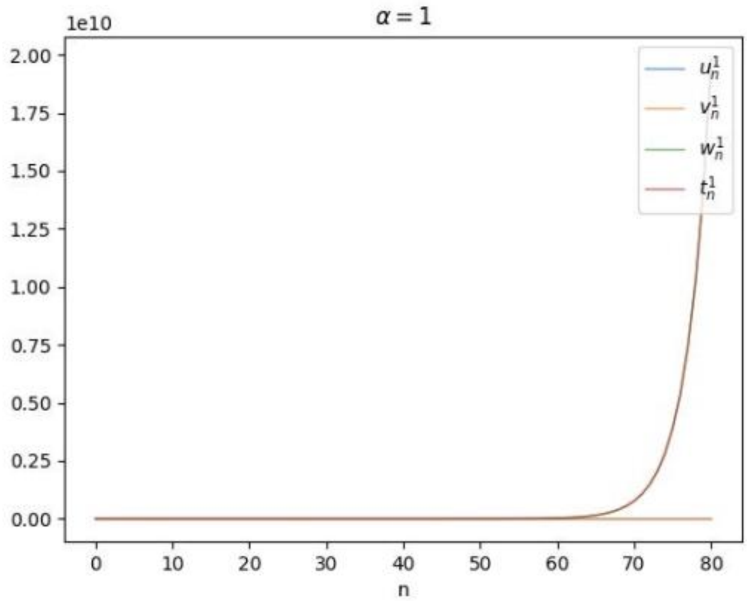
Şekil 14. $\alpha = 0$ için sistem (3.59) un çözümlerinin grafiği



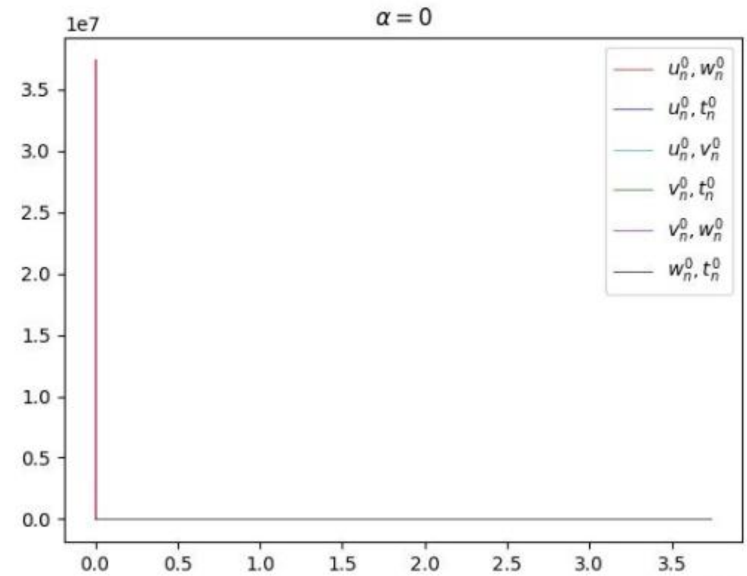
Şekil 15. $\alpha = 0.50$ için sistem (3.59) un çözümlerinin grafiği



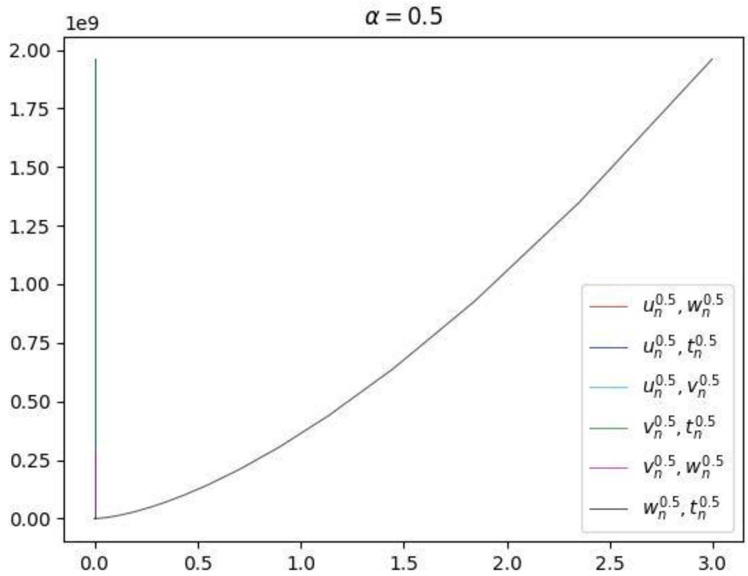
Şekil 16. $\alpha = 0.75$ için sistem (3.59) un çözümlerinin grafiği



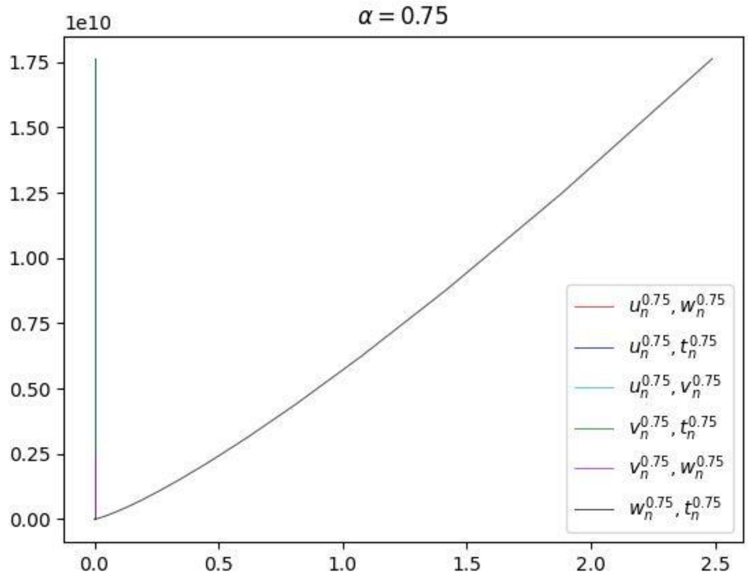
Şekil 17. $\alpha = 1$ için sistem (3.59) un çözümlerinin grafiği



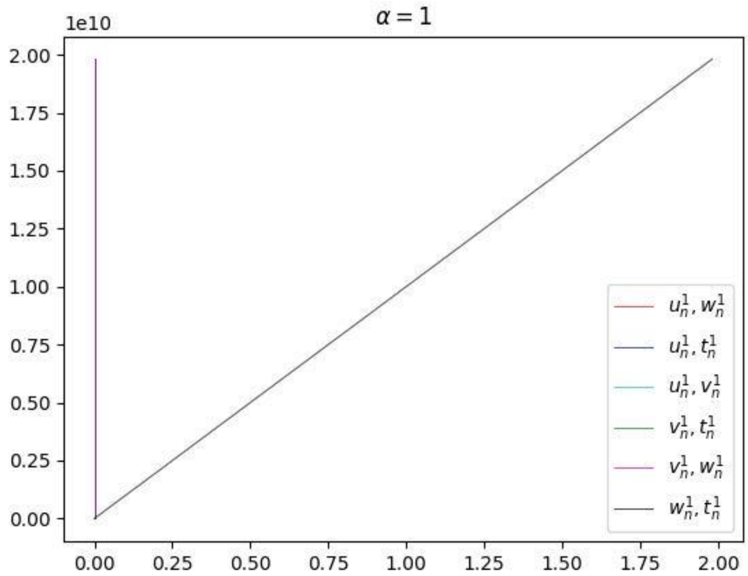
Şekil 18. $\alpha = 0$ için sistem (3.59) un çözümlerinin faz portrelerinin grafiği



Şekil 19. $\alpha = 0.50$ için sistem (3.59) un çözümlerinin faz portrelerinin grafiği



Şekil 20. $\alpha = 0.75$ için sistem (3.59) un çözümlerinin faz portrelerinin grafiği



Şekil 21. $\alpha = 1$ için sistem (3.59) un çözümlerinin faz portrelerinin grafiği

BÖLÜM 4

$\alpha_{n+1} = \tau_1 + \dfrac{\alpha_n}{\sum_{i=1}^{m} \beta_{n-i}}, \ \beta_{n+1} = \tau_2 + \dfrac{\beta_n}{\sum_{i=1}^{m} \alpha_{n-i}}$ BULANIK FARK DENKLEM SİSTEMİ

Bu bölümde, m pozitif tam sayı, τ_1, τ_2 parametreleri ve $j \in \{0,1,\ldots,m\}$ için α_{-j}, β_{-j} başlangıç koşulları pozitif bulanık sayılar olmak üzere

$$\alpha_{n+1} = \tau_1 + \frac{\alpha_n}{\sum_{i=1}^{m} \beta_{n-i}}, \ \beta_{n+1} = \tau_2 + \frac{\beta_n}{\sum_{i=1}^{m} \alpha_{n-i}}, \ n \in \mathbb{N}_0 \tag{4.1}$$

yüksek mertebeden bulanık fark denklem sisteminin pozitif çözümlerinin davranışları incelenmiştir.

Yukarıda verilen sistem (4.1) ile ilgili yapılan çalışma, TR Dizin kapsamındaki “Fundamental Journal of Mathematics and Applications” adlı dergide yayınlanmak üzere kabul edilmiştir.

Öncelikle, aşağıdaki teorem ile (4.1) bulanık fark denklem sisteminin pozitif çözümünün olduğu ve bu çözümün de tek olduğu gösterilmiştir.

Teorem 4.1. τ_1, τ_2 parametreleri ve $j \in \{0,1,\ldots,m\}$ için α_{-j}, β_{-j} başlangıç koşulları pozitif bulanık sayılar olmak üzere, (4.1) bulanık fark denklem sisteminin bir tek pozitif $\{(\alpha_n, \beta_n)\}_{n=-m}^{\infty}$ çözümü vardır.

İspat. τ_1, τ_2 parametreleri ve $j \in \{0,1,\ldots,m\}$ için α_{-j}, β_{-j} başlangıç koşulları pozitif bulanık sayılar olsun. Bu durumda, $\gamma \in (0,1]$ ve $n \geq -m$ için

$$\begin{aligned}
[\alpha_n]^\gamma &= \left[L_{\alpha_n}^\gamma, R_{\alpha_n}^\gamma\right], \\
[\beta_n]^\gamma &= \left[L_{\beta_n}^\gamma, R_{\beta_n}^\gamma\right], \\
[\tau_1]^\gamma &= \left[\tau_{1,l}^\gamma, \tau_{1,r}^\gamma\right], \\
[\tau_2]^\gamma &= \left[\tau_{2,l}^\gamma, \tau_{2,r}^\gamma\right]
\end{aligned} \tag{4.2}$$

olsun. (4.1), (4.2) deki eşitlikler ve Lemma 2.2.4.1 den

$$\begin{aligned}
\left[\alpha_{n+1}\right]^{\gamma} &= \left[L^{\gamma}_{\alpha_{n+1}}, R^{\gamma}_{\alpha_{n+1}}\right], \\
&= \left[\tau_1\right]^{\gamma} + \frac{\left[\alpha_n\right]^{\gamma}}{\sum_{i=1}^{m}\left[\beta_{n-i}\right]^{\gamma}} \\
&= \left[\tau^{\gamma}_{1,l}, \tau^{\gamma}_{1,r}\right] + \frac{\left[L^{\gamma}_{\alpha_n}, R^{\gamma}_{\alpha_n}\right]}{\sum_{i=1}^{m}\left[L^{\gamma}_{\beta_{n-i}}, R^{\gamma}_{\beta_{n-i}}\right]} \\
&= \left[\tau^{\gamma}_{1,l} + \frac{L^{\gamma}_{\alpha_n}}{\sum_{i=1}^{m} R^{\gamma}_{\beta_{n-i}}}, \tau^{\gamma}_{1,r} + \frac{R^{\gamma}_{\alpha_n}}{\sum_{i=1}^{m} L^{\gamma}_{\beta_{n-i}}}\right]
\end{aligned} \tag{4.3}$$

ve

$$\begin{aligned}
\left[\beta_{n+1}\right]^{\gamma} &= \left[L^{\gamma}_{\beta_{n+1}}, R^{\gamma}_{\beta_{n+1}}\right], \\
&= \left[\tau_2\right]^{\gamma} + \frac{\left[\beta_n\right]^{\gamma}}{\sum_{i=1}^{m}\left[\alpha_{n-i}\right]^{\gamma}} \\
&= \left[\tau^{\gamma}_{2,l}, \tau^{\gamma}_{2,r}\right] + \frac{\left[L^{\gamma}_{\beta_n}, R^{\gamma}_{\beta_n}\right]}{\sum_{i=1}^{m}\left[L^{\gamma}_{\alpha_{n-i}}, R^{\gamma}_{\alpha_{n-i}}\right]} \\
&= \left[\tau^{\gamma}_{2,l} + \frac{L^{\gamma}_{\beta_n}}{\sum_{i=1}^{m} R^{\gamma}_{\alpha_{n-i}}}, \tau^{\gamma}_{2,r} + \frac{R^{\gamma}_{\beta_n}}{\sum_{i=1}^{m} L^{\gamma}_{\alpha_{n-i}}}\right]
\end{aligned} \tag{4.4}$$

elde edilir. $n \in \mathbb{N}$, $j \in \{0,1,\dots,m\}$, $\gamma_1, \gamma_2 \in (0,1]$ için $\gamma_1 \le \gamma_2$ ve Lemma 2.2.3.9 dan

$$\begin{aligned}
&0 < \tau^{\gamma_1}_{1,l} \le \tau^{\gamma_2}_{1,l} \le \tau^{\gamma_2}_{1,r} \le \tau^{\gamma_1}_{1,r}, \\
&0 < \tau^{\gamma_1}_{2,l} \le \tau^{\gamma_2}_{2,l} \le \tau^{\gamma_2}_{2,r} \le \tau^{\gamma_1}_{2,r}, \\
&0 < L^{\gamma_1}_{\alpha_{n-j}} \le L^{\gamma_2}_{\alpha_{n-j}} \le R^{\gamma_2}_{\alpha_{n-j}} \le R^{\gamma_1}_{\alpha_{n-j}}, \\
&0 < L^{\gamma_1}_{\beta_{n-j}} \le L^{\gamma_2}_{\beta_{n-j}} \le R^{\gamma_2}_{\beta_{n-j}} \le R^{\gamma_1}_{\beta_{n-j}}, \\
&0 < L^{\gamma_1}_{\alpha_n} \le L^{\gamma_2}_{\alpha_n} \le R^{\gamma_2}_{\alpha_n} \le R^{\gamma_1}_{\alpha_n}, \\
&0 < L^{\gamma_1}_{\beta_n} \le L^{\gamma_2}_{\beta_n} \le R^{\gamma_2}_{\beta_n} \le R^{\gamma_1}_{\beta_n},
\end{aligned} \tag{4.5}$$

eşitsizlikleri yazılabilir. (4.5) eşitsizliklerinden $\gamma_1, \gamma_2 \in (0,1]$ için $\gamma_1 \le \gamma_2$ olmak üzere

$$L_{\alpha_{n+1}}^{\gamma_1}=\tau_{1,l}^{\gamma_1}+\frac{L_{\alpha_n}^{\gamma_1}}{\sum_{i=1}^{m}R_{\beta_{n-i}}^{\gamma_1}}\leq\tau_{1,l}^{\gamma_2}+\frac{L_{\alpha_n}^{\gamma_2}}{\sum_{i=1}^{m}R_{\beta_{n-i}}^{\gamma_2}}\leq L_{\alpha_{n+1}}^{\gamma_2}\leq\tau_{1,r}^{\gamma_2}+\frac{R_{\alpha_n}^{\gamma_2}}{\sum_{i=1}^{m}L_{\beta_{n-i}}^{\gamma_2}}\leq R_{\alpha_{n+1}}^{\gamma_2}\leq\tau_{1,r}^{\gamma_1}+\frac{R_{\alpha_n}^{\gamma_1}}{\sum_{i=1}^{m}L_{\beta_{n-i}}^{\gamma_1}}\leq R_{\alpha_{n+1}}^{\gamma_1} \tag{4.6}$$

ve

$$L_{\beta_{n+1}}^{\gamma_1}=\tau_{2,l}^{\gamma_1}+\frac{L_{\beta_n}^{\gamma_1}}{\sum_{i=1}^{m}R_{\alpha_{n-i}}^{\gamma_1}}\leq\tau_{2,l}^{\gamma_2}+\frac{L_{\beta_n}^{\gamma_2}}{\sum_{i=1}^{m}R_{\alpha_{n-i}}^{\gamma_2}}\leq L_{\alpha_{n+1}}^{\gamma_2}\leq\tau_{2,r}^{\gamma_2}+\frac{R_{\beta_n}^{\gamma_2}}{\sum_{i=1}^{m}L_{\alpha_{n-i}}^{\gamma_2}}\leq R_{\alpha_{n+1}}^{\gamma_2}\leq\tau_{2,r}^{\gamma_1}+\frac{R_{\beta_n}^{\gamma_1}}{\sum_{i=1}^{m}L_{\alpha_{n-i}}^{\gamma_1}}\leq R_{\beta_{n+1}}^{\gamma_1} \tag{4.7}$$

elde edilir. Şimdi, (4.1) bulanık fark denklem sisteminin çözümünün olduğu tümevarım metodu kullanılarak gösterilecektir. $n=0$ için (4.1) bulanık fark denklem sisteminin pozitif bulanık çözümleri

$$\begin{aligned}
\left[\alpha_1\right]^{\gamma}&=\left[L_{\alpha_1}^{\gamma},R_{\alpha_1}^{\gamma}\right]=\left[\tau_{1,l}^{\gamma}+\frac{L_{\alpha_0}^{\gamma}}{\sum_{i=1}^{m}R_{\beta_{-i}}^{\gamma}},\tau_{1,r}^{\gamma}+\frac{R_{\alpha_0}^{\gamma}}{\sum_{i=1}^{m}L_{\beta_{-i}}^{\gamma}}\right],\\
\left[\beta_1\right]^{\gamma}&=\left[L_{\beta_1}^{\gamma},R_{\beta_1}^{\gamma}\right]=\left[\tau_{2,l}^{\gamma}+\frac{L_{\beta_0}^{\gamma}}{\sum_{i=1}^{m}R_{\alpha_{-i}}^{\gamma}},\tau_{2,r}^{\gamma}+\frac{R_{\beta_0}^{\gamma}}{\sum_{i=1}^{m}L_{\alpha_{-i}}^{\gamma}}\right]
\end{aligned} \tag{4.8}$$

dir. τ_1,τ_2 parametreleri ve $j\in\{0,1,\ldots,m\}$ için α_{-j},β_{-j} başlangıç koşulları pozitif bulanık sayılar olmak üzere $\forall\gamma\in(0,1]$ için $\alpha_1=\tau_1+\frac{\alpha_0}{\sum_{i=1}^{m}\beta_{-i}}$ ve $\beta_1=\tau_2+\frac{\beta_0}{\sum_{i=0}^{m}\alpha_{-i}}$ nin $\gamma-kesim$ çözümleri sırasıyla $\left[L_{\alpha_1}^{\gamma},R_{\alpha_1}^{\gamma}\right]$ vev$\left[L_{\beta_1}^{\gamma},R_{\beta_1}^{\gamma}\right]$ dır. Ayrıca, $\tau_{1,l},\tau_{1,2},\tau_{2,l},\tau_{2,r}$ ve $j\in\{0,1,\ldots,m\}$ için $L_{\alpha_{-i}}^{\gamma},R_{\alpha_{-i}}^{\gamma},L_{\alpha_{-i}}^{\gamma},R_{\alpha_{-i}}^{\gamma}$ soldan sürekli oldukların için $L_{\alpha_1}^{\gamma},R_{\alpha_1}^{\gamma},L_{\alpha_1}^{\gamma},R_{\alpha_1}^{\gamma}$ de soldan süreklidir. $s\in\{1,2,\ldots,k-1\}$ için $\left[L_{\alpha_j}^{\gamma},R_{\alpha_j}^{\gamma}\right]$ ve $\left[L_{\beta_j}^{\gamma},R_{\beta_j}^{\gamma}\right]$ sırasıyla $\alpha_s=\tau_1+\frac{\alpha_{s-1}}{\sum_{i=1}^{m}\beta_{s-i-1}}$ ve $\beta_s=\tau_2+\frac{\beta_{s-1}}{\sum_{i=1}^{m}\alpha_{s-i-1}}$ in $\gamma-kesimleri$ olsun. Bu durumda, $n=k$ için

$$
\begin{aligned}
\left[\alpha_{k+1}\right]^{\gamma} &= \left[L^{\gamma}_{\alpha_{k+1}}, R^{\gamma}_{\alpha_{k+1}}\right] = \left[\tau^{\gamma}_{1,l} + \frac{L^{\gamma}_{\alpha_k}}{\sum_{i=0}^{m} R^{\gamma}_{\beta_{k-i}}}, \tau^{\gamma}_{1,r} + \frac{R^{\gamma}_{\alpha_k}}{\sum_{i=0}^{m} L^{\gamma}_{\beta_{k-i}}}\right] = \left[\tau_1 + \frac{\alpha_k}{\sum_{i=0}^{m} \beta_{k-i}}\right]^{\gamma}, \\
\left[\beta_{k+1}\right]^{\gamma} &= \left[L^{\gamma}_{\beta_{k+1}}, R^{\gamma}_{\beta_{k+1}}\right] = \left[\tau^{\gamma}_{2,l} + \frac{L^{\gamma}_{\beta_k}}{\sum_{i=0}^{m} R^{\gamma}_{\alpha_{k-i}}}, \tau^{\gamma}_{2,r} + \frac{R^{\gamma}_{\beta_k}}{\sum_{i=0}^{m} L^{\gamma}_{\alpha_{k-i}}}\right] = \left[\tau_2 + \frac{\beta_k}{\sum_{i=0}^{m} \alpha_{k-i}}\right]^{\gamma}
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$

elde edilir. (4.9) denklem sisteminden

$$
\begin{aligned}
L^{\gamma}_{\alpha_{n+1}} &= \tau^{\gamma}_{1,l} + \frac{L^{\gamma}_{\alpha_n}}{\sum_{i=0}^{m} R^{\gamma}_{\beta_{n-i}}}, \quad R^{\gamma}_{\alpha_{n+1}} = \tau^{\gamma}_{1,r} + \frac{R^{\gamma}_{\alpha_n}}{\sum_{i=0}^{m} L^{\gamma}_{\beta_{n-i}}}, \\
L^{\gamma}_{\beta_{n+1}} &= \tau^{\gamma}_{2,l} + \frac{L^{\gamma}_{\beta_n}}{\sum_{i=0}^{m} R^{\gamma}_{\alpha_{n-i}}}, \quad R^{\gamma}_{\beta_{n+1}} = \tau^{\gamma}_{2,r} + \frac{R^{\gamma}_{\beta_n}}{\sum_{i=0}^{m} L^{\gamma}_{\alpha_{n-i}}}
\end{aligned}
\tag{4.10}
$$

yazılabilir. Dolayısıyla, (4.1) bulanık fark denklem sisteminin $\gamma - kesimleri$ $\left[L^{\gamma}_{\alpha_n}, R^{\gamma}_{\alpha_n}\right]$ ve $\left[L^{\gamma}_{\beta_n}, R^{\gamma}_{\beta_n}\right]$ dir.

$\left[L^{\gamma}_{\alpha_n}, R^{\gamma}_{\alpha_n}\right]$ ve $\left[L^{\gamma}_{\beta_n}, R^{\gamma}_{\beta_n}\right]$ nin kompakt olduğu da tümevarım metodu ile gösterilebilir. $n = 0$ için kapalı olan $\operatorname{supp}\tau_1$, $\operatorname{supp}\tau_2$ destek kümelerinin olduğu aşikardır. Bir başka deyişle, öyle $\left[M_{\tau_1}, N_{\tau_1}\right]$ ve $\left[M_{\tau_2}, N_{\tau_2}\right]$ kümeleri vardır ki

$$
\begin{cases}
\left[\tau^{\gamma}_{1,l}, \tau^{\gamma}_{1,r}\right] \subseteq \overline{\bigcup_{\gamma\in(0,1]}\left[\tau^{\gamma}_{1,l}, \tau^{\gamma}_{1,r}\right]} \subseteq \left[M_{\tau_1}, N_{\tau_1}\right], \\
\left[\tau^{\gamma}_{2,l}, \tau^{\gamma}_{2,r}\right] \subseteq \overline{\bigcup_{\gamma\in(0,1]}\left[\tau^{\gamma}_{2,l}, \tau^{\gamma}_{2,r}\right]} \subseteq \left[M_{\tau_2}, N_{\tau_2}\right], \\
\left[L^{\gamma}_{\alpha_1}, L^{\gamma}_{\alpha_1}\right] \subseteq \overline{\bigcup_{\gamma\in(0,1]}\left[L^{\gamma}_{\alpha_1}, L^{\gamma}_{\alpha_1}\right]} \subseteq \left[M_{\alpha_1}, N_{\alpha_1}\right], \\
\left[L^{\gamma}_{\beta_1}, L^{\gamma}_{\beta_1}\right] \subseteq \overline{\bigcup_{\gamma\in(0,1]}\left[L^{\gamma}_{\beta_1}, L^{\gamma}_{\beta_1}\right]} \subseteq \left[M_{\beta_1}, N_{\beta_1}\right]
\end{cases}
\tag{4.11}
$$

koşulları sağlanır. Tümevarımla $n \in \mathbb{N}_0$ için

$$
\begin{aligned}
\left[L^{\gamma}_{\alpha_n}, R^{\gamma}_{\alpha_n}\right] &\subseteq \overline{\bigcup_{\gamma\in(0,1]}\left[L^{\gamma}_{\alpha_n}, R^{\gamma}_{\alpha_n}\right]} \subseteq \left[M_{\alpha_n}, N_{\alpha_n}\right], \\
\left[L^{\gamma}_{\beta_n}, R^{\gamma}_{\beta_n}\right] &\subseteq \overline{\bigcup_{\gamma\in(0,1]}\left[L^{\gamma}_{\beta_n}, R^{\gamma}_{\beta_n}\right]} \subseteq \left[M_{\beta_n}, N_{\beta_n}\right],
\end{aligned}
\tag{4.12}
$$

olduğu ve α_n, β_n dizilerinin de kompakt olduğu gösterilebilir. O halde, (4.6), (4.7) ve (4.12) den $\alpha_n = [\alpha_n]^\gamma = \left[L_{\alpha_n}^\gamma, R_{\alpha_n}^\gamma\right]$ ve $\beta_n = [\beta_n]^\gamma = \left[L_{\beta_n}^\gamma, R_{\beta_n}^\gamma\right]$ pozitif bulanık sayı dizileridir. Bu da, τ_1, τ_2 parametreleri ve $j \in \{0,1,\dots,m\}$ için α_{-j}, β_{-j} başlangıç koşulları pozitif bulanık sayılar için (4.1) bulanık fark denklem sisteminin bir çözümünün olduğunu göstermektedir.

Şimdi çözümün tekliği gösterilsin. Diyelim ki başka bir α'_n ve β'_n de τ_1, τ_2 parametreleri ve $j \in \{0,1,\dots,m\}$ için α_{-j}, β_{-j} başlangıç koşulları pozitif bulanık sayılar olmak üzere başka pozitif bulanık çözümleri olsun. Tümevarım metodu ile $\forall \gamma \in (0,1]$ ve $n \in \mathbb{N}_{-m}$ için

$$[\alpha'_n]^\gamma = \left[L_{\alpha_n}^\gamma, R_{\alpha_n}^\gamma\right],\ [\beta'_n]^\gamma = \left[L_{\beta_n}^\gamma, R_{\beta_n}^\gamma\right] \tag{4.13}$$

olduğu gösterilebilir. O halde, (4.1) bulanık fark denklem sisteminin tek bir çözümü vardır.■

Kolaylık olması için (4.10) denklem sistemini u_{n+1}, v_{n+1}, t_{n+1}, w_{n+1} sırasıyla $L_{\alpha_n}^\gamma, R_{\alpha_n}^\gamma, L_{\beta_n}^\gamma, R_{\beta_n}^\gamma$ i temsil edecek şekilde yeniden ifade edilirse, aşağıda verilen dört boyutlu fark denklem sistemi

$$\left.\begin{aligned}
L_{\alpha_{n+1}}^\gamma &= u_{n+1} = \lambda_1 + \frac{u_n}{\sum_{i=1}^m t_{n-i}},\\
R_{\alpha_{n+1}}^\gamma &= v_{n+1} = \lambda_2 + \frac{v_n}{\sum_{i=1}^m w_{n-i}},\\
L_{\beta_{n+1}}^\gamma &= w_{n+1} = \lambda_3 + \frac{w_n}{\sum_{i=1}^m v_{n-i}},\\
R_{\beta_{n+1}}^\gamma &= t_{n+1} = \lambda_4 + \frac{t_n}{\sum_{i=1}^m u_{n-i}},
\end{aligned}\right. \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{4.14}$$

yazılabilir. Bundan sonra sistem (4.14) ün pozitif çözümleri incelenecektir. Öncelikle, aşağıdaki teorem sistem (4.14) ün pozitif çözümlerinin sınırlı olduğu durumları gösterir.

Teorem 4.2. (4.14) fark denklem sistemi için

$$\frac{1}{m} < \min\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\} \tag{4.15}$$

olsun. Eğer (4.15) şartı sağlanırsa, $n > m$ olduğunda sistem (4.14) ün pozitif $\{(u_n, v_n, w_n, t_n)\}_{n=-m}^{\infty}$ çözümleri için

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 \leq u_n \leq \frac{1}{(m\lambda_4)^{n-m}}\left(u_m - \frac{m\lambda_1\lambda_4}{m\lambda_4 - 1}\right) + \frac{m\lambda_1\lambda_4}{m\lambda_4 - 1},\\
&\lambda_2 \leq v_n \leq \frac{1}{(m\lambda_3)^{n-m}}\left(v_m - \frac{m\lambda_2\lambda_3}{m\lambda_3 - 1}\right) + \frac{m\lambda_2\lambda_3}{m\lambda_3 - 1},\\
&\lambda_3 \leq w_n \leq \frac{1}{(m\lambda_2)^{n-m}}\left(w_m - \frac{m\lambda_2\lambda_3}{m\lambda_2 - 1}\right) + \frac{m\lambda_2\lambda_3}{m\lambda_2 - 1},\\
&\lambda_4 \leq t_n \leq \frac{1}{(m\lambda_1)^{n-m}}\left(t_m - \frac{m\lambda_1\lambda_4}{m\lambda_1 - 1}\right) + \frac{m\lambda_1\lambda_4}{m\lambda_1 - 1},
\end{aligned} \tag{4.16}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Bu da $\{(u_n, v_n, w_n, t_n)\}_{n=-m}^{\infty}$ nin sınırlı olduğunu gösterir.

İspat. $\{(u_n, v_n, w_n, t_n)\}_{n=-m}^{\infty}$ pozitif sayı dizileri (4.14) fark denklem sisteminin pozitif çözümleri olsun. Bu durumda $n \geq 1$ için

$$\lambda_1 \leq u_n,\ \lambda_2 \leq v_n,\ \lambda_3 \leq w_n,\ \lambda_4 \leq t_n \tag{4.17}$$

olduğu kolayca görülür. Ayrıca, (4.14) ve (4.17) yi kullanarak $n > m$ için

$$\begin{cases}
u_n = \lambda_1 + \dfrac{u_n}{\sum_{i=2}^{m+1} t_{n-i}} \leq \lambda_1 + \dfrac{1}{m\lambda_4} u_{n-1},\\
v_n = \lambda_2 + \dfrac{v_n}{\sum_{i=2}^{m+1} w_{n-i}} \leq \lambda_2 + \dfrac{1}{m\lambda_3} v_{n-1},\\
w_n = \lambda_3 + \dfrac{w_n}{\sum_{i=2}^{m+1} v_{n-i}} \leq \lambda_3 + \dfrac{1}{m\lambda_2} w_{n-1},\\
t_n = \lambda_4 + \dfrac{t_n}{\sum_{i=2}^{m+1} u_{n-i}} \leq \lambda_4 + \dfrac{1}{m\lambda_1} t_{n-1},
\end{cases}, \quad n \in \mathbb{N}_2, \tag{4.18}$$

eşitsizlikleri elde edilir. $\{(\tilde{u}_n, \tilde{v}_n, \tilde{w}_n, \tilde{t}_n)\}_{n=0}^{\infty}$ aşağıda verilmiş olan

$$\tilde{u}_n = \begin{cases} u_n, & n \le m \text{ ise} \\ \lambda_1 + \dfrac{1}{m\lambda_4}\tilde{u}_{n-1}, & n > m \text{ ise} \end{cases},$$
$$\tilde{v}_n = \begin{cases} v_n, & n \le m \text{ ise} \\ \lambda_2 + \dfrac{1}{m\lambda_3}\tilde{v}_{n-1}, & n > m \text{ ise} \end{cases},$$
$$\tilde{w}_n = \begin{cases} w_n, & n \le m \text{ ise} \\ \lambda_3 + \dfrac{1}{m\lambda_2}\tilde{w}_{n-1}, & n > m \text{ ise} \end{cases},$$
$$\tilde{t}_n = \begin{cases} t_n, & n \le m \text{ ise} \\ \lambda_4 + \dfrac{1}{m\lambda_1}\tilde{t}_{n-1}, & n > m \text{ ise} \end{cases} \tag{4.19}$$

denklem sisteminin bir çözümü olsun. Şimdi tümevarım metodu ile

$$u_n \le \tilde{u}_n,\ v_n \le \tilde{v}_n,\ w_n \le \tilde{w}_n,\ t_n \le \tilde{t}_n,\ n \in \mathbb{N}_{m+1}, \tag{4.20}$$

eşitsizlikleri ispatlanacaktır. (4.20) eşitsizlikleri herhangi bir $n = k \ge m+1$ için sağlanıyor olsun. Bu durumda, (4.18) eşitsizliklerinden

$$\begin{aligned} u_{k+1} &\le \lambda_1 + \frac{1}{m\lambda_4}u_k \le \lambda_1 + \frac{1}{m\lambda_4}\tilde{u}_k \le \tilde{u}_{k+1}, \\ v_{k+1} &\le \lambda_2 + \frac{1}{m\lambda_3}v_k \le \lambda_2 + \frac{1}{m\lambda_3}\tilde{v}_k \le \tilde{v}_{k+1}, \\ w_{k+1} &\le \lambda_3 + \frac{1}{m\lambda_2}w_k \le \lambda_3 + \frac{1}{m\lambda_2}\tilde{w}_k \le \tilde{w}_{k+1}, \\ t_{k+1} &\le \lambda_4 + \frac{1}{m\lambda_1}t_k \le \lambda_4 + \frac{1}{m\lambda_1}\tilde{t}_k \le \tilde{t}_{k+1}, \end{aligned} \tag{4.21}$$

elde edilir. Bu da $u_n \le \tilde{u}_n,\ v_n \le \tilde{v}_n,\ w_n \le \tilde{w}_n,\ t_n \le \tilde{t}_n,\ n \in \mathbb{N}_{m+1}$ eşitsizliklerinin sağlandığını gösterir. Şimdi $\tilde{u}_n = \dfrac{1}{(m\lambda_4)^{n-m}}\left(u_m - \dfrac{m\lambda_1\lambda_4}{m\lambda_4 - 1}\right) + \dfrac{m\lambda_1\lambda_4}{m\lambda_4 - 1}$ olduğu gösterilsin. $\tilde{u}_n$ tanımından

$$
\begin{aligned}
\tilde{u}_n &= \lambda_1 + \frac{1}{m\lambda_4}\tilde{u}_{n-1} \\
&= \lambda_1 + \frac{1}{m\lambda_4}\left(\lambda_1 + \frac{1}{m\lambda_4}\tilde{u}_{n-2}\right) \\
&\vdots \\
&= \frac{1}{(m\lambda_4)^{n-m}}\left(\tilde{u}_m - \frac{m\lambda_1\lambda_4}{m\lambda_4 - 1}\right) + \frac{m\lambda_1\lambda_4}{m\lambda_4 - 1} \\
&= \frac{1}{(m\lambda_4)^{n-m}}\left(u_m - \frac{m\lambda_1\lambda_4}{m\lambda_4 - 1}\right) + \frac{m\lambda_1\lambda_4}{m\lambda_4 - 1}
\end{aligned} \tag{4.22}
$$

elde edilir. Literatürde iyi bilinen karşılaştırma teoreminden,

$$
u_n \le \frac{1}{(m\lambda_4)^{n-m}}\left(u_m - \frac{m\lambda_1\lambda_4}{m\lambda_4 - 1}\right) + \frac{m\lambda_1\lambda_4}{m\lambda_4 - 1} \tag{4.23}
$$

yazılabilir. O halde (4.23) ten $\{u_n\}_{n=-m}^{\infty}$ üstten sınırlıdır. Benzer şekilde $\{v_n\}_{n=-m}^{\infty}$, $\{w_n\}_{n=-m}^{\infty}$, $\{t_n\}_{n=-m}^{\infty}$ nin de üstten sınırlı olduğu gösterilebilir. Bu da (4.14) fark denklem sisteminin $\{(\tilde{u}_n, \tilde{v}_n, \tilde{w}_n, \tilde{t}_n)\}_{n=-m}^{\infty}$ pozitif çözümlerinin sınırlı olduğunu gösterir.■

Teorem 4.3. Eğer (4.15) şartı sağlanırsa, (4.14) fark denklem sisteminin tek bir denge noktası vardır ve sistemin her bir çözümü $n \to \infty$ iken

$$
\bar{u} = \frac{m^2\lambda_1\lambda_4 - 1}{m(m\lambda_4 - 1)},\ \bar{v} = \frac{m^2\lambda_2\lambda_3 - 1}{m(m\lambda_3 - 1)},\ \bar{w} = \frac{m^2\lambda_2\lambda_3 - 1}{m(m\lambda_2 - 1)},\ \bar{t} = \frac{m^2\lambda_1\lambda_4 - 1}{m(m\lambda_1 - 1)} \tag{4.24}
$$

denge noktasına yakınsar.

İspat. Denge noktası tanımı kullanılarak

$$
\Gamma = \left(\frac{m^2\lambda_1\lambda_4 - 1}{m(m\lambda_4 - 1)}, \frac{m^2\lambda_2\lambda_3 - 1}{m(m\lambda_3 - 1)}, \frac{m^2\lambda_2\lambda_3 - 1}{m(m\lambda_2 - 1)}, \frac{m^2\lambda_1\lambda_4 - 1}{m(m\lambda_1 - 1)}\right) \tag{4.25}
$$

nin (4.14) fark denklem sisteminin pozitif denge noktası olduğu bulunabilir. Sistem (4.14) ün pozitif çözümleri Teorem 4.1.2 den sınırlı olduğundan, $j \in \{1,2,3,4\}$ için $l_j, L_j \in (0,\infty)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
&\liminf_{n\to\infty} u_n = l_1, \quad \limsup_{n\to\infty} u_n = L_1,\\
&\liminf_{n\to\infty} v_n = l_2, \quad \limsup_{n\to\infty} v_n = L_2,\\
&\liminf_{n\to\infty} w_n = l_3, \quad \limsup_{n\to\infty} w_n = L_3,\\
&\liminf_{n\to\infty} t_n = l_4, \quad \limsup_{n\to\infty} t_n = L_4,
\end{aligned} \tag{4.26}$$

yazılabilir. Öte yandan Teorem 4.1.2 ve (4.26) da verilen eşitliklerden

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 + \frac{l_1}{mL_4} \le l_1, \quad L_1 \le \lambda_1 + \frac{L_1}{ml_4},\\
&\lambda_2 + \frac{l_2}{mL_3} \le l_2, \quad L_2 \le \lambda_2 + \frac{L_2}{ml_3},\\
&\lambda_3 + \frac{l_3}{mL_2} \le l_3, \quad L_3 \le \lambda_3 + \frac{L_3}{ml_2},\\
&\lambda_4 + \frac{l_4}{mL_1} \le l_4, \quad L_4 \le \lambda_4 + \frac{L_4}{ml_1},
\end{aligned} \tag{4.27}$$

elde edilir. (4.27) de elde edilen eşitsizlikler düzenlenirse

$$\begin{aligned}
&\frac{m\lambda_4 L_1 + l_4}{m} \le L_1 l_4 \le \frac{m\lambda_1 l_4 + L_1}{m},\\
&\frac{m\lambda_3 L_2 + l_3}{m} \le L_2 l_3 \le \frac{m\lambda_2 l_3 + L_2}{m},\\
&\frac{m\lambda_2 L_3 + l_2}{m} \le L_3 l_2 \le \frac{m\lambda_3 l_2 + L_3}{m},\\
&\frac{m\lambda_1 L_4 + l_1}{m} \le L_4 l_1 \le \frac{m\lambda_4 l_1 + L_4}{m},
\end{aligned} \tag{4.28}$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned}
&L_1(m\lambda_4 - 1) \le l_4(m\lambda_1 - 1),\\
&L_2(m\lambda_3 - 1) \le l_3(m\lambda_2 - 1),\\
&L_3(m\lambda_2 - 1) \le l_2(m\lambda_3 - 1),\\
&L_4(m\lambda_1 - 1) \le l_1(m\lambda_4 - 1),
\end{aligned} \tag{4.29}$$

elde edilir. Teorem 4.1.2 deki (4.15) şartından $j \in \{1,2,3,4\}$ için $1 < m\lambda_j$ dir. (4.29) da yer alan eşitsizliklerin birincisi ile dördüncüsü ve ikincisi ile üçüncü taraf tarafa çarpılırsa

$$L_1L_4 \le l_1l_4, \quad L_2L_3 \le l_2l_3 \tag{4.30}$$

elde edilir. Dolayısıyla, $j \in \{1,2,3,4\}$ için $l_j \le L_j$ olduğundan

$$L_1L_4 = l_1l_4, \quad L_1L_4 = l_1l_4 \tag{4.31}$$

elde edilir. Şimdi

$$L_1 = l_1,\ L_2 = l_2,\ L_3 = l_3,\ L_4 = l_4 \tag{4.32}$$

olduğu gösterilecektir.

$$l_1 < L_1,\ l_2 < L_2,\ l_3 < L_3,\ l_4 < L_4 \tag{4.33}$$

olduğu var sayılsın. (4.32) eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned} &L_1L_4 = l_1l_4 < l_1L_4, \\ &L_1L_4 = l_1l_4 < L_1l_4, \\ &L_2L_3 = l_2l_3 < l_2L_3, \\ &L_2L_3 = l_2l_3 < L_2l_3, \end{aligned} \tag{4.34}$$

elde edilir ki buradan da

$$\begin{aligned} &L_1 < l_1, \\ &L_2 < l_2, \\ &L_3 < l_3, \\ &L_4 < l_4, \end{aligned} \tag{4.35}$$

elde edilir. Bu durum bir çelişkidir. Dolayısıyla,

$$l_1 = L_1,\ l_2 = L_2,\ l_3 = L_3,\ l_4 = L_4 \tag{4.36}$$

olur. O halde (4.36) dan

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \tilde{u},\ \lim_{n\to\infty} v_n = \tilde{v},\ \lim_{n\to\infty} w_n = \tilde{w},\ \lim_{n\to\infty} t_n = \tilde{t}, \tag{4.37}$$

olur ve bu da ispatı tamamlar. ■

Teorem 4.4. Eğer (4.15) şartı ve

$$\frac{m^2\lambda_1\lambda_4 - 1}{m\lambda_1 - 1} + \frac{m^2\lambda_1\lambda_4 - 1}{m\lambda_4 - 1} < 1, \quad \frac{m^2\lambda_2\lambda_3 - 1}{m\lambda_2 - 1} + \frac{m^2\lambda_2\lambda_3 - 1}{m\lambda_3 - 1} < 1, \tag{4.38}$$

eşitsizlikleri sağlanırsa, (4.25) te verilen tek pozitif denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.

İspat. Teorem 4.1.3 ten (4.14) sisteminin (4.25) te verilen tek bir Γ pozitif denge noktası vardır. $(m+1)\times(m+1)$ boyutlu $\mathcal{P}_{\bar{u}}, \mathcal{P}_{\bar{v}}, \mathcal{P}_{\bar{w}}, \mathcal{P}_{\bar{t}}, \mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3, \mathcal{P}_4$ matrisleri aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\bar{u}} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{m\bar{u}} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{P}_{\bar{v}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m\bar{v}} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathcal{P}_{\bar{w}} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{m\bar{w}} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{P}_{\bar{t}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m\bar{t}} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{4.39}$$

$$\mathcal{P}_0=\begin{bmatrix}0&0&\cdots&0&0\\0&0&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&0&0\end{bmatrix},\quad \mathcal{P}_1=\begin{bmatrix}0&-\frac{\bar{u}}{(m\bar{t})^2}&\cdots&-\frac{\bar{u}}{(m\bar{t})^2}&-\frac{\bar{u}}{(m\bar{t})^2}\\0&0&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&0&0\end{bmatrix},$$

$$\mathcal{P}_2=\begin{bmatrix}0&-\frac{\bar{v}}{(m\bar{w})^2}&\cdots&-\frac{\bar{v}}{(m\bar{w})^2}&-\frac{\bar{v}}{(m\bar{w})^2}\\0&0&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&0&0\end{bmatrix} \tag{4.40}$$

$$\mathcal{P}_3=\begin{bmatrix}0&-\frac{\bar{w}}{(m\bar{u})^2}&\cdots&-\frac{\bar{w}}{(m\bar{u})^2}&-\frac{\bar{w}}{(m\bar{u})^2}\\0&0&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&0&0\end{bmatrix},\ \mathcal{P}_4=\begin{bmatrix}0&-\frac{\bar{t}}{(m\bar{u})^2}&\cdots&-\frac{\bar{t}}{(m\bar{u})^2}&-\frac{\bar{t}}{(m\bar{u})^2}\\0&0&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&0&0\end{bmatrix} \tag{4.41}$$

$(4m+4)\times(4m+4)$ boyutlu $\mathcal{P}=(\rho_{ij}),\ 1\le i,\,j\le 4m+4$ matrisi ise alt matrislerinden oluşan $(4m+4)\times(4m+4)$ matris olsun ve aşağıdaki biçimde tanımlansın:

$$\mathcal{P}=\begin{bmatrix}\mathcal{P}_{\bar{t}}&\mathcal{P}_0&\mathcal{P}_0&\mathcal{P}_1\\\mathcal{P}_0&\mathcal{P}_{\bar{w}}&\mathcal{P}_2&\mathcal{P}_0\\\mathcal{P}_0&\mathcal{P}_3&\mathcal{P}_{\bar{v}}&\mathcal{P}_0\\\mathcal{P}_4&\mathcal{P}_0&\mathcal{P}_0&\mathcal{P}_{\bar{u}}\end{bmatrix}_{(4m+4)\times(4m+4)}. \tag{4.42}$$

O zaman (4.14) sisteminin (4.25) pozitif denge noktası civarında lineerleştirilmiş denklemi $\Omega_n=(u_n,u_{n-1},\ldots,u_{n-m},v_n,v_{n-1},\ldots,v_{n-m},w_n,w_{n-1},,\ldots,w_{n-m},t_n,t_{n-1},\ldots,t_{n-m})^T$ olmak üzere

$$\Omega_{n+1}=\mathcal{P}\Omega_n \tag{4.43}$$

biçimindedir. $\mathcal{P}=(\rho_{ij}),\ 1\le i,\,j\le 4m+4$ matrisinin özdeğerleri $\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_{4m+4}$ olsun. $D=(d_1,d_2,\ldots,d_{4m+4})$ köşegen matrisinin elemanları $d_1=d_{m+2}=d_{2m+3}=d_{3m+4}=1$ ve diğer elemanları da $j\in\{2,3,\ldots,m+1\}$ için $d_j=d_{m+1+j}=d_{2m+2+j}=d_{3m+3+j}=1-j\varepsilon$ olarak tanımlansın. ε sayısı ise

$$0<\varepsilon<\frac{1}{m+1}\min\left\{\left(1-\frac{\bar{u}+\bar{t}}{m\bar{u}^2}\right),\left(1-\frac{\bar{u}+\bar{t}}{m\bar{t}^2}\right),\left(1-\frac{\bar{v}+\bar{w}}{m\bar{v}^2}\right),\left(1-\frac{\bar{v}+\bar{w}}{m\bar{w}^2}\right)\right\} \tag{4.44}$$

olarak seçilsin. D köşegen matrisinin tersinir olduğu aşikardır. $\mathcal{P}_{\bar{u}}^{(1)},\mathcal{P}_{\bar{v}}^{(1)},\mathcal{P}_{\bar{w}}^{(1)},\mathcal{P}_{\bar{t}}^{(1)},\mathcal{P}_{0}^{(1)},\mathcal{P}_{1}^{(1)},\mathcal{P}_{2}^{(1)},\mathcal{P}_{3}^{(1)},\mathcal{P}_{4}^{(1)}$, matrisleri $(m+1)\times(m+1)$ matrisler olmak üzere aşağıdaki biçimde tanımlanırsa

$$\begin{gathered}
\mathcal{P}_{\bar{u}}^{(1)}=\begin{bmatrix}\frac{1}{m\bar{u}} & 0 & \cdots & 0 & 0\\ d_{3m+5}d_{3m+4}^{-1} & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & d_{4m+4}d_{4m+3}^{-1} & 0\end{bmatrix},\mathcal{P}_{\bar{v}}^{(1)}=\begin{bmatrix}\frac{1}{m\bar{v}} & 0 & \cdots & 0 & 0\\ d_{2m+4}d_{2m+3}^{-1} & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & d_{3m+3}d_{3m+2}^{-1} & 0\end{bmatrix},\\
\mathcal{P}_{\bar{w}}^{(1)}=\begin{bmatrix}\frac{1}{m\bar{w}} & 0 & \cdots & 0 & 0\\ d_{m+3}d_{m+2}^{-1} & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & d_{2m+2}d_{2m+1}^{-1} & 0\end{bmatrix},\mathcal{P}_{\bar{t}}^{(1)}=\begin{bmatrix}\frac{1}{m\bar{t}} & 0 & \cdots & 0 & 0\\ d_{2}d_{1}^{-1} & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & d_{m+1}d_{m}^{-1} & 0\end{bmatrix},
\end{gathered} \tag{4.45}$$

$$\mathcal{P}_0^{(1)}=\begin{bmatrix}0&0&\cdots&0&0\\0&0&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&0&0\end{bmatrix},\mathcal{P}_1^{(1)}=\begin{bmatrix}0&\frac{-\bar{u}}{m^2\bar{t}^2}d_1d_{3m+5}^{-1}&\cdots&\frac{-\bar{u}}{m^2\bar{t}^2}d_1d_{4m+3}^{-1}&\frac{-\bar{u}}{m^2\bar{t}^2}d_1d_{4m+4}^{-1}\\0&0&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&0&0\end{bmatrix},$$

$$\mathcal{P}_2^{(1)}=\begin{bmatrix}0&\frac{-\bar{v}}{m^2\bar{w}^2}d_{m+2}d_{2m+4}^{-1}&\cdots&\frac{\bar{v}}{m^2\bar{w}^2}d_{m+2}d_{3m+2}^{-1}&\frac{-\bar{v}}{m^2\bar{w}^2}d_{m+2}d_{3m+3}^{-1}\\0&0&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&0&0\end{bmatrix},$$

$$\mathcal{P}_3^{(1)}=\begin{bmatrix}0&\frac{-\bar{w}}{m^2\bar{v}^2}d_{2m+3}d_{m+3}^{-1}&\cdots&\frac{-\bar{w}}{m^2\bar{v}^2}d_{2m+3}d_{2m+1}^{-1}&\frac{-\bar{w}}{m^2\bar{v}^2}d_{2m+3}d_{2m+2}^{-1}\\0&0&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&0&0\end{bmatrix},$$

$$\mathcal{P}_4^{(1)}=\begin{bmatrix}0&\frac{-\bar{t}}{m^2\bar{u}^2}d_{3m+4}d_2^{-1}&\cdots&\frac{-\bar{t}}{m^2\bar{u}^2}d_{3m+4}d_m^{-1}&\frac{-\bar{t}}{m^2\bar{u}^2}d_{3m+4}d_{m+1}^{-1}\\0&0&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&0&0\end{bmatrix}, \tag{4.46}$$

tanımlansın. O zaman

$$DPD^{-1}=\mathcal{P}^{(1)}=\begin{bmatrix}\mathcal{P}_{\bar{t}}^{(1)}&\mathcal{P}_0^{(1)}&\mathcal{P}_0^{(1)}&\mathcal{P}_1^{(1)}\\\mathcal{P}_0^{(1)}&\mathcal{P}_{\bar{w}}^{(1)}&\mathcal{P}_2^{(1)}&\mathcal{P}_0^{(1)}\\\mathcal{P}_0^{(1)}&\mathcal{P}_3^{(1)}&\mathcal{P}_{\bar{v}}^{(1)}&\mathcal{P}_0^{(1)}\\\mathcal{P}_4^{(1)}&\mathcal{P}_0^{(1)}&\mathcal{P}_0^{(1)}&\mathcal{P}_{\bar{u}}^{(1)}\end{bmatrix}_{(4m+4)\times(4m+4)}, \tag{4.47}$$

yazılabilir. Ayrıca,

$$\begin{aligned}&0<d_{m+1}<d_m<\ldots<d_1,\\&0<d_{2m+2}<d_{2m+1}<\ldots<d_{m+2},\\&0<d_{3m+3}<d_{3m+2}<\ldots<d_{2m+3},\\&0<d_{4m+4}<d_{4m+3}<\ldots<d_{3m+4},\end{aligned} \tag{4.48}$$

olduğu için

$$
\begin{aligned}
&d_2 d_1^{-1} < 1,\\
&d_3 d_2^{-1} < 1,\\
&\vdots\\
&d_{m+1} d_m^{-1} < 1,\\
&d_{m+3} d_{m+2}^{-1} < 1,\\
&\vdots\\
&d_{2m+2} d_{2m+1}^{-1} < 1,\\
&d_{2m+4} d_{2m+3}^{-1} < 1,\\
&\vdots\\
&d_{3m+3} d_{3m+2}^{-1} < 1,\\
&d_{3m+5} d_{3m+4}^{-1} < 1,\\
&\vdots\\
&d_{4m+4} d_{4m+3}^{-1} < 1
\end{aligned}
\tag{4.49}
$$

elde edilir. Dahası, (4.15), (4.38) ve (4.44) ten,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{m\bar{t}} + \frac{\bar{u}}{m^2\bar{t}^2} d_1 d_{3m+5}^{-1} + \ldots + \frac{\bar{u}}{m^2\bar{t}^2} d_1 d_{4m+4}^{-1} &= \frac{1}{m\bar{t}} + \left(\frac{1}{1-2\epsilon} + \ldots + \frac{1}{1-(m+1)\epsilon} \right) \frac{\bar{u}}{m^2\bar{t}^2}\\
&< \frac{1}{m\bar{t}} + \frac{1}{1-(m+1)\epsilon} \frac{\bar{u}}{m\bar{t}^2}\\
&< \frac{1}{1-(m+1)\epsilon} \left(\frac{1}{m\bar{t}} + \frac{\bar{u}}{m\bar{t}^2} \right)\\
&< 1,
\end{aligned}
\tag{4.50}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{m\overline{w}}+\frac{\overline{v}}{m^2\overline{w}^2}d_{m+2}d_{2m+4}^{-1}+\ldots+\frac{\overline{v}}{m^2\overline{w}^2}d_{m+2}d_{3m+3}^{-1} &= \frac{1}{m\overline{w}}+\left(\frac{1}{1-2\epsilon}+\ldots+\frac{1}{1-(m+1)\epsilon}\right)\frac{\overline{v}}{m^2\overline{w}^2}\\
&< \frac{1}{m\overline{w}}+\frac{1}{1-(m+1)\epsilon}\frac{\overline{v}}{m\overline{w}^2}\\
&< \frac{1}{1-(m+1)\epsilon}\left(\frac{1}{m\overline{w}}+\frac{\overline{v}}{m\overline{w}^2}\right)\\
&<1,
\end{aligned}
\tag{4.51}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{m\overline{v}}+\frac{\overline{w}}{m^2\overline{v}^2}d_{2m+3}d_{m+3}^{-1}+\ldots+\frac{\overline{w}}{m^2\overline{v}^2}d_{2m+3}d_{2m+2}^{-1} &= \frac{1}{m\overline{v}}+\left(\frac{1}{1-2\epsilon}+\ldots+\frac{1}{1-(m+1)\epsilon}\right)\frac{\overline{w}}{m^2\overline{v}^2}\\
&< \frac{1}{m\overline{v}}+\frac{1}{1-(m+1)\epsilon}\frac{\overline{w}}{m\overline{v}^2}\\
&< \frac{1}{1-(m+1)\epsilon}\left(\frac{1}{m\overline{v}}+\frac{\overline{w}}{m\overline{v}^2}\right)\\
&<1
\end{aligned}
\tag{4.52}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{m\overline{u}}+\frac{\overline{t}}{m^2\overline{u}^2}d_{3m+4}d_{2}^{-1}+\ldots+\frac{\overline{t}}{m^2\overline{w}^2}d_{3m+4}d_{m+1}^{-1} &= \frac{1}{m\overline{u}}+\left(\frac{1}{1-2\epsilon}+\ldots+\frac{1}{1-(m+1)\epsilon}\right)\frac{\overline{t}}{m^2\overline{u}^2}\\
&< \frac{1}{m\overline{u}}+\frac{1}{1-(m+1)\epsilon}\frac{\overline{t}}{m\overline{u}^2}\\
&< \frac{1}{1-(m+1)\epsilon}\left(\frac{1}{m\overline{t}}+\frac{\overline{u}}{m\overline{u}^2}\right)\\
&<1,
\end{aligned}
\tag{4.53}
$$

elde edilir. $\mathcal{P}$ ve $D\mathcal{P}D^{-1}$ matrislerinin özdeğerleri aynı olduğundan $j\in\{1,2,\ldots,4m+4\}$ için

$$
\max|\mathcal{P}_j|\leq\|D\mathcal{P}D^{-1}\|_\infty=\max\left\{\begin{array}{l}
d_2d_1^{-1},\ldots,d_{m+1}d_m^{-1},d_{m+3}d_{m+2}^{-1},\ldots,d_{2m+2}d_{2m+1}^{-1},\\
d_{2m+4}d_{2m+3}^{-1},\ldots,d_{3m+3}d_{3m+2}^{-1},d_{3m+5}d_{3m+4}^{-1},\ldots,d_{4m+4}d_{4m+3}^{-1},\\
\frac{1}{m\overline{t}}+\left(\frac{1}{1-2\epsilon}+\ldots+\frac{1}{1-(m+1)\epsilon}\right)\frac{\overline{u}}{m^2\overline{t}^2},\\
\frac{1}{m\overline{w}}+\left(\frac{1}{1-2\epsilon}+\ldots+\frac{1}{1-(m+1)\epsilon}\right)\frac{\overline{v}}{m^2\overline{w}^2},\\
\frac{1}{m\overline{v}}+\left(\frac{1}{1-2\epsilon}+\ldots+\frac{1}{1-(m+1)\epsilon}\right)\frac{\overline{w}}{m^2\overline{v}^2},\\
\frac{1}{m\overline{u}}+\left(\frac{1}{1-2\epsilon}+\ldots+\frac{1}{1-(m+1)\epsilon}\right)\frac{\overline{t}}{m^2\overline{u}^2},
\end{array}\right\} \quad (4.54)
$$

$$<1$$

elde edilir. Dolayısıyla, $\mathcal{P}$ ve $D\mathcal{P}D^{-1}$ matrislerinin özdeğerleri birim disk içinde yer almaktadır. O halde, (4.14) fark denklem sisteminin (4.25) te verilen pozitif denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.■

Teorem 4.5. Eğer (4.15) ve (4.38) şartları sağlanırsa, (4.14) fark denklem sisteminin (4.25) te verilen pozitif denge noktası global asimptotik kararlıdır.

İspat. Teorem 4.1.3 ve Teorem 4.1.4 ten (4.14) fark denklem sistemi global asimptotik kararlı olduğu kolayca görülür. ■

Bundan sonra, dört-boyutlu fark denklem sistemi için elde edilen özellikler kullanılarak (4.1) bulanık fark denklem sisteminin bazı özellikleri incelenecektir.

Teorem 4.6. Eğer (4.1) bulanık fark denklem sistemi için,

$$
\frac{1}{m}<\min\left\{\tau_{1,l},\tau_{1,r},\tau_{2,l},\tau_{2,r}\right\}, \quad (4.55)
$$

şartı sağlanırsa, sistemin $\left\{(\alpha_n,\beta_n)\right\}_{n=-m}^{\infty}$ pozitif çözümü sınırlıdır.

İspat. (4.1) bulanık fark denkleminin pozitif bir çözümü $\left\{(\alpha_n,\beta_n)\right\}_{n=-m}^{\infty}$ olsun ve (4.55) şartı sağlansın. Bu durumda,

$$\begin{cases} [\alpha_n]^\gamma & =\left[L^\gamma_{\alpha_n}, R^\gamma_{\alpha_n}\right], [\beta_n]^\gamma = \left[L^\gamma_{\beta_n}, R^\gamma_{\beta_n}\right], \\ [\tau_1]^\gamma & =\left[\tau^\gamma_{1,l}, \tau^\gamma_{1,r}\right], [\tau_2]^\gamma = \left[\tau^\gamma_{2,l}, \tau^\gamma_{2,r}\right], \end{cases} \tag{4.56}$$

olur. (4.3), (4.4) eşitlikleri ve Teorem 4.1.2 den

$$\begin{aligned} \tau_{1,l} \le L_{\alpha_n} &\le \frac{1}{(m\tau_{2,r})^{n-m}}\left(L_{\alpha_m} - \frac{m\tau_{1,l}\tau_{2,r}}{m\tau_{2,r}-1}\right) + \frac{m\tau_{1,l}\tau_{2,r}}{m\tau_{2,r}-1}, \\ \tau_{1,r} \le R_{\alpha_n} &\le \frac{1}{(m\tau_{2,l})^{n-m}}\left(R_{\alpha_m} - \frac{m\tau_{1,r}\tau_{2,l}}{m\tau_{2,l}-1}\right) + \frac{m\tau_{1,r}\tau_{2,l}}{m\tau_{2,l}-1}, \\ \tau_{2,l} \le L_{\beta_n} &\le \frac{1}{(m\tau_{1,r})^{n-m}}\left(L_{\beta_m} - \frac{m\tau_{1,r}\tau_{2,l}}{m\tau_{1,r}-1}\right) + \frac{m\tau_{1,r}\tau_{2,l}}{m\tau_{1,r}-1}, \\ \tau_{2,r} \le R_{\beta_n} &\le \frac{1}{(m\tau_{1,l})^{n-m}}\left(R_{\beta_m} - \frac{m\tau_{1,l}\tau_{2,r}}{m\tau_{1,l}-1}\right) + \frac{m\tau_{1,l}\tau_{2,r}}{m\tau_{1,l}-1}, \end{aligned} \tag{4.57}$$

dir. Ayrıca, her $\gamma \in (0,1]$ için τ_1 ve τ_2 nin destek kümeleri

$$\begin{aligned} &[\tau^\gamma_{1,l}, \tau^\gamma_{1,r}] \subseteq [M_{\tau_1}, N_{\tau_1}], \\ &[\tau^\gamma_{2,l}, \tau^\gamma_{2,r}] \subseteq [M_{\tau_2}, N_{\tau_2}], \end{aligned} \tag{4.58}$$

dir. Ayrıca, $M_{\tau_1}, N_{\tau_1}, M_{\tau_2}, N_{\tau_2}$ nin $\gamma - kesimlerinin$ uç noktaları da pozitif reel sayılardır. Dolayısıyla, (4.57) ve (4.58) yi de kullanarak $\gamma \in (0,1]$ için

$$\begin{aligned} [L^\gamma_{\alpha_n}, R^\gamma_{\alpha_n}] &\subseteq \left[M_{\tau_1}, \frac{1}{(mN_{\tau_{2,r}})^{n-m}}\left(M_{\alpha_m} - \frac{mM_{\tau_{1,l}}N_{\tau_{2,r}}}{mN_{\tau_{2,r}}-1}\right) + \frac{mM_{\tau_{1,l}}N_{\tau_{2,r}}}{mN_{\tau_{2,r}}-1}\right], \\ [L^\gamma_{\beta_n}, R^\gamma_{\beta_n}] &\subseteq \left[N_{\tau_2}, \frac{1}{(mM_{\tau_{1,l}})^{n-m}}\left(N_{\beta_m} - \frac{mM_{\tau_{1,l}}N_{\tau_{2,r}}}{mN_{\tau_{2,r}}-1}\right) + \frac{mM_{\tau_{1,l}}N_{\tau_{2,r}}}{mM_{\tau_{1,l}}-1}\right], \end{aligned} \tag{4.59}$$

elde edilir. Öyle m_1, m_2, M_1, M_2 pozitif reel sayıları vardır ki

$$m_1 \le M_{\tau_1}, m_2 \le N_{\tau_2}, \frac{1}{(mN_{\tau_{2,r}})^{n-m}}\left(M_{\alpha_m} - \frac{mM_{\tau_{1,l}}N_{\tau_{2,r}}}{mN_{\tau_{2,r}}-1}\right) + \frac{mM_{\tau_{1,l}}N_{\tau_{2,r}}}{mN_{\tau_{2,r}}-1} \le M_1,$$
$$\frac{1}{(mM_{\tau_{1,l}})^{n-m}}\left(N_{\beta_m} - \frac{mM_{\tau_{1,l}}N_{\tau_{2,r}}}{mN_{\tau_{2,r}}-1}\right) + \frac{mM_{\tau_{1,l}}N_{\tau_{2,r}}}{mM_{\tau_{1,l}}-1} \le M_2 \tag{4.60}$$

sağlanır. Dolayısıyla,

$$[L^{\gamma}_{\alpha_{n,l}}, R^{\gamma}_{\alpha_{n,r}}] \subseteq \overline{\bigcup_{\gamma\in(0,1]}\left[L^{\gamma}_{\alpha_{n,l}}, R^{\gamma}_{\alpha_{n,r}}\right]} \subseteq [m_1, M_1],$$
$$[L^{\gamma}_{\beta_{n,l}}, R^{\gamma}_{\beta_{n,r}}] \subseteq \overline{\bigcup_{\gamma\in(0,1]}\left[L^{\gamma}_{\beta_{n,l}}, R^{\gamma}_{\beta_{n,r}}\right]} \subseteq [m_2, M_2] \tag{4.61}$$

elde edilir. O halde, (4.1) bulanık fark denklem sisteminin pozitif çözümü sınırlıdır. Bu da ispatı tamamlar. ■

Teorem 4.7. Eğer (4.55) şartı sağlanırsa, (4.1) bulanık fark denklem sisteminin pozitif $\{(\alpha_n, \beta_n)\}_{n=-m}^{\infty}$ çözümü, $n \to \infty$ iken tek bir

$$\bar{\alpha} = \left[\frac{m^2\tau_{1,l}\tau_{2,r}-1}{m(m\tau_{2,r}-1)}, \frac{m^2\tau_{1,r}\tau_{2,l}-1}{m(m\tau_{2,l}-1)}\right], \ \bar{\beta} = \left[\frac{m^2\tau_{1,r}\tau_{2,l}-1}{m(m\tau_{1,r}-1)}, \frac{m^2\tau_{1,l}\tau_{2,r}-1}{m(m\tau_{1,l}-1)}\right], \tag{4.62}$$

denge noktasına yakınsar.

İspat. (4.3), (4.4) ve Teorem 4.1.3 ten

$$\lim_{n\to\infty} L^{\gamma}_{\alpha_n} = l_{\alpha_n} = \frac{m^2\tau_{1,l}\tau_{2,r}-1}{m(m\tau_{2,r}-1)}, \ \lim_{n\to\infty} R^{\gamma}_{\alpha_n} = r_{\alpha_n} = \frac{m^2\tau_{1,r}\tau_{2,l}-1}{m(m\tau_{2,l}-1)},$$
$$\lim_{n\to\infty} L^{\gamma}_{\beta_n} = l_{\beta_n} = \frac{m^2\tau_{1,r}\tau_{2,l}-1}{m(m\tau_{1,r}-1)}, \ \lim_{n\to\infty} R^{\gamma}_{\beta_n} = r_{\beta_n} = \frac{m^2\tau_{1,l}\tau_{2,r}-1}{m(m\tau_{1,l}-1)} \tag{4.63}$$

elde edilir. Buradan,

$$\lim_{n\to\infty} D(\alpha_n, \bar{\alpha}) = \lim_{n\to\infty} D(\alpha_n - [l_{\alpha_n}, r_{\alpha_n}]) = \lim_{n\to\infty} \sup \max\{|L^{\gamma}_{\alpha_n} - l_{\alpha_n}|, |R^{\gamma}_{\alpha_n} - r_{\alpha_n}|\} = 0,$$
$$\lim_{n\to\infty} D(\beta_n, \bar{\beta}) = \lim_{n\to\infty} D(\beta_n - [l_{\beta_n}, r_{\beta_n}]) = \lim_{n\to\infty} \sup \max\{|L^{\gamma}_{\beta_n} - l_{\beta_n}|, |R^{\gamma}_{\beta_n} - r_{\beta_n}|\} = 0, \tag{4.64}$$

elde edilir. Dolayısıyla, $\lim_{n\to\infty}\alpha_n=\bar{\alpha}$ ve $\lim_{n\to\infty}\beta_n=\bar{\beta}$ dir. O halde, (4.1) bulanık fark denklem sisteminin pozitif çözümü $n\to\infty$ iken $\{(\alpha_n,\beta_n)\}_{n=-m}^{\infty}$ noktasına yakınsar. ■

Şimdi (4.1) bulanık fark denklem sistemi için iki örnek verilecektir. Verilen bu örneklerle dördüncü bölümde elde edilen sonuçların tutarlı olduğu gösterilecektir. Örneklerde $\gamma - kesimleri$, $\gamma=0.2,\ \gamma=0.5,\ \gamma=0.8$ ve $\gamma=1$ olarak alınmıştır.

Örnek 4.1. (4.1) bulanık fark denklem sistemi $m=4$ için incelensin. O zaman bulanık fark denklem sistemi aşağıdaki gibidir:

$$\alpha_{n+1}=\tau_1+\frac{\alpha_n}{\beta_{n-1}+\beta_{n-2}+\beta_{n-3}+\beta_{n-4}},\beta_{n+1}=\tau_2+\frac{\beta_n}{\alpha_{n-1}+\alpha_{n-2}+\alpha_{n-3}+\alpha_{n-4}},\ n\in\mathbb{N}_0. \quad (4.65)$$

Ayrıca, τ_1 ve τ_2 parametreleri pozitif üçgensel bulanık sayılar ve $i\in\{0,1,2,3,4\}$ için α_{-i},β_{-i} başlangıç koşulları ise pozitif üçgensel bulanık sayılar aşağıdaki gibi verilsin:

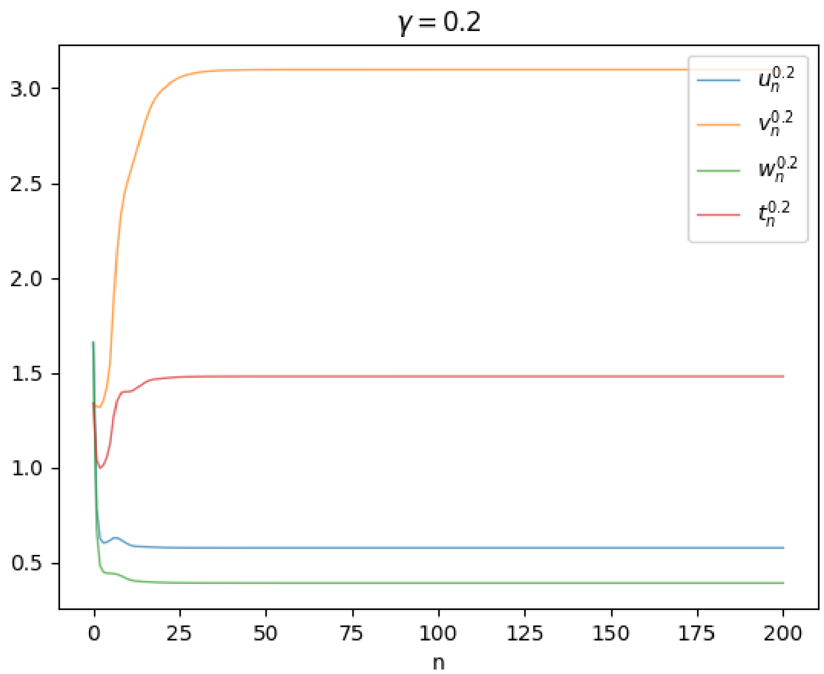
$$\tau_1(x)=\begin{cases}\frac{5}{2}x-1, & 0.4\le x\le 0.8\\ -\frac{5}{2}x+3, & 0.8\le x\le 1.2\end{cases},\tau_2(x)=\begin{cases}\frac{10}{3}x-1, & 0.3\le x\le 0.6\\ -\frac{10}{3}x+3, & 0.6\le x\le 0.9\end{cases},$$

$$\alpha_{-i}(x)=\begin{cases}5x-\frac{13}{2}, & 1.3\le x\le 1.5\\ -5x+\frac{17}{2}, & 1.5\le x\le 1.7\end{cases},\beta_{-i}(x)=\begin{cases}5x-\frac{13}{2}, & 1.3\le x\le 1.5\\ -5x+\frac{17}{2}, & 1.5\le x\le 1.7\end{cases}.$$

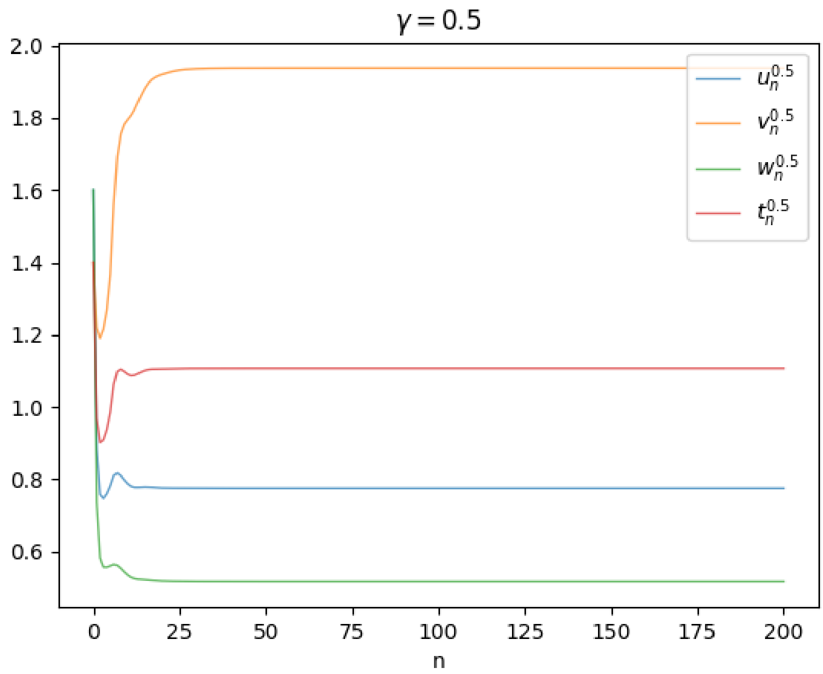
Ayrıca, $\gamma\in(0,1]$ ve $\mathrm{i}\in\{0,1,2,3,4\}$, için $\tau_1,\tau_2,\alpha_{-i},\beta_{-i}$ nin destek kümeleri şu şekildedir:

$$\begin{cases}\operatorname{supp}\tau_1\subseteq[0.4,1.2], & \operatorname{supp}\tau_2\subseteq[0.3,0.9],\\ \operatorname{supp}\alpha_{-i}\subseteq[1.3,1.7], & \operatorname{supp}\beta_{-i}\subseteq[1.3,1.7].\end{cases} \quad (4.66)$$

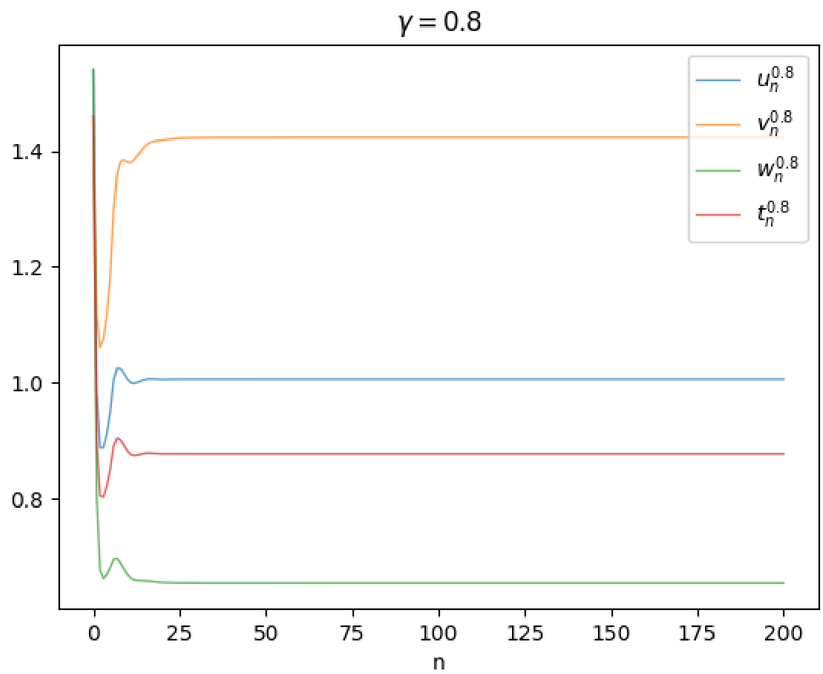
Bu örnek, eğer (4.55) şartı sağlanırsa, (4.1) bulanık fark denklem sisteminin sınırlı olduğunu göstermektedir. Üstelik, bu örnek $\gamma=0.20$ için şekil 22 de, $\gamma=0.50$ için şekil 23 te, $\gamma=0.80$ için şekil 24 te ve $\gamma=1$ için şekil 25 te görüleceği üzere, $n\to\infty$ iken (4.65) bulanık fark denklem sisteminin her çözümü (4.62) ile verilen $(\tilde{\alpha},\tilde{\beta})$ denge noktasına yakınsamaktadır. Şekil 26 $\gamma = 0.20$ için, şekil 27 $\gamma = 0.50$ için, şekil 28 $\gamma = 0.80$ için ve şekil 29 ise $\gamma = 1$ için (4.65) bulanık fark denklem sisteminin çekimliliğini göstermektedir. $\gamma = 0.2$ için, $\tau_1 = [0.48, 1.12]$, $\tau_2 = [0.36, 0.84]$ olur. Buradan, $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ denge noktası $\bar{\alpha} = [0.5775, 3.0973]$, $\bar{\beta} = [0.3916, 1.4813]$ elde edilir. $\gamma = 0.5$ için, $\tau_1 = [0.60, 1.0]$, $\tau_2 = [0.45, 0.75]$ olur. Buradan, $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ denge noktası $\bar{\alpha} = [0.7750, 1.9375]$, $\bar{\beta} = [0.5167, 1.1071]$ elde edilir. $\gamma = 0.8$ için, $\tau_1 = [0.72, 0.88]$, $\tau_2 = [0.54, 0.66]$ olur. Buradan, $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ denge noktası $\bar{\alpha} = [1.0066, 1.4231]$, $\bar{\beta} = [0.6551, 0.8781]$ elde edilir. $\gamma = 1$ için, $\tau_1 = [0.8, 0.8]$, $\tau_2 = [0.6, 0.6]$ olur. Buradan, $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ denge noktası $\bar{\alpha} = [1.1929, 1.1929]$, $\bar{\beta} = [0.7591, 0.7591]$ elde edilir.



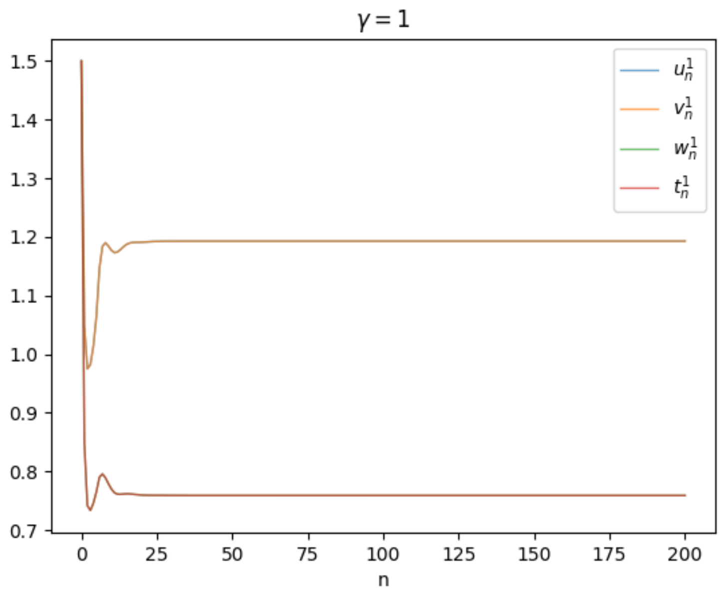
Şekil 22. $\gamma = 0.20$ için sistem (4.65) in çözümlerinin grafiği



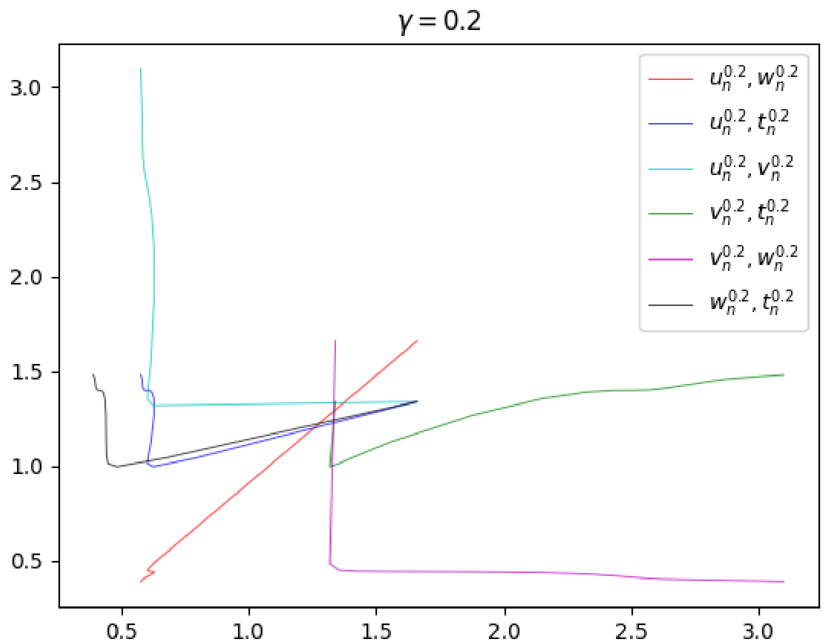
Şekil 23. $\gamma = 0.50$ için sistem (4.65) in çözümlerinin grafiği



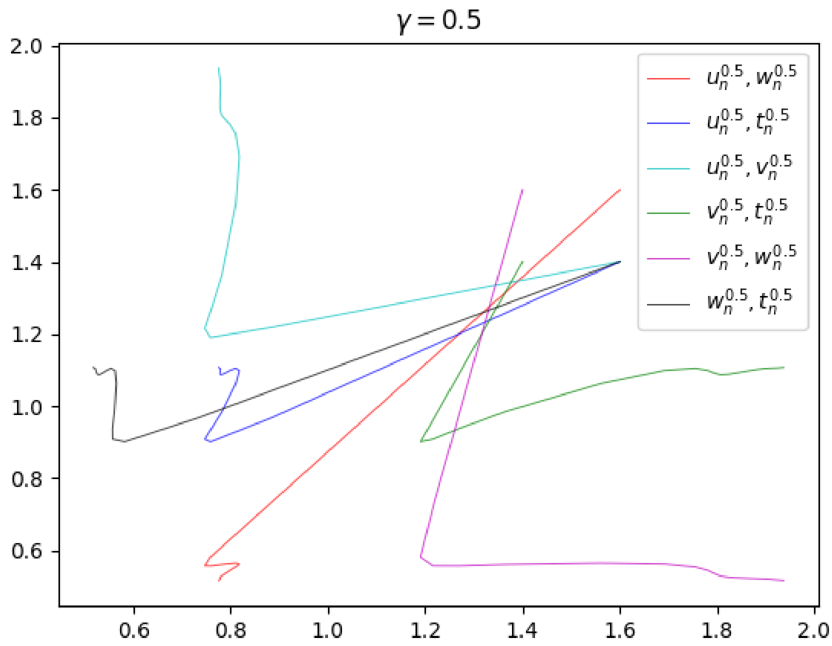
Şekil 24. $\gamma = 0.80$ için sistem (4.65) in çözümlerinin grafiği



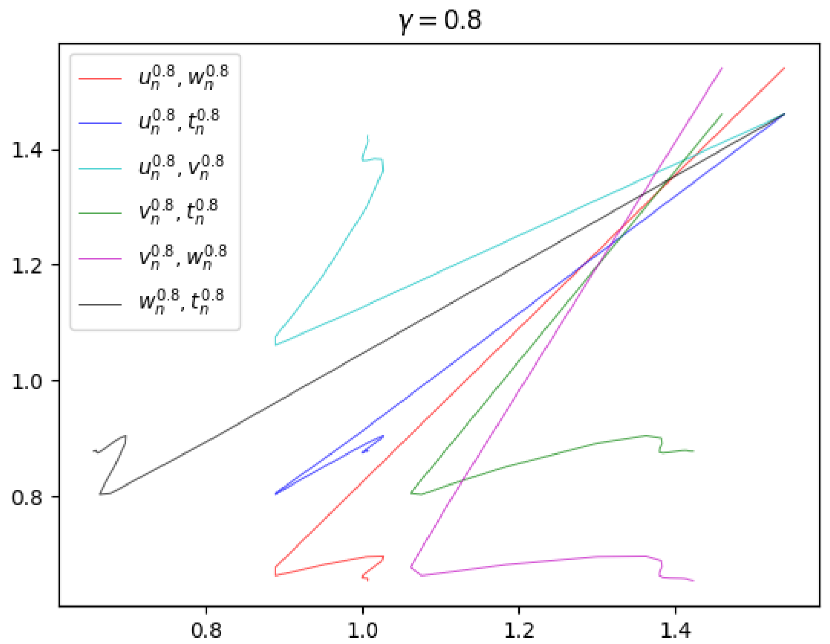
Şekil 25. $\gamma = 1$ için sistem (4.65) in çözümlerinin grafiği



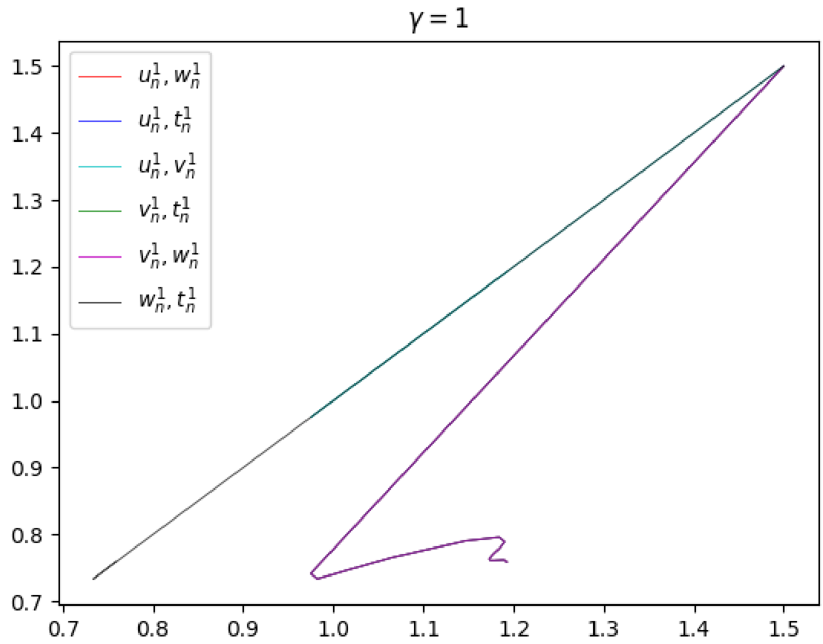
Şekil 26. $\gamma = 0.20$ için sistem (4.65) in çözümlerinin çekimliliğinin grafiği



Şekil 27. $\gamma = 0.50$ için sistem (4.65) in çözümlerinin çekimliliğinin grafiği



Şekil 28. $\gamma = 0.80$ için sistem (4.65) in çözümlerinin çekimliliğinin grafiği



Şekil 29. $\gamma = 1$ için sistem (4.65) in çözümlerinin çekimliliğinin grafiği

Örnek 4.2. (4.1) bulanık fark denklem sistemi $m = 3$ için incelensin. O zaman (4.1) aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\alpha_{n+1} = \tau_1 + \frac{\alpha_n}{\beta_{n-1} + \beta_{n-2} + \beta_{n-3}}, \beta_{n+1} = \tau_2 + \frac{\beta_n}{\alpha_{n-1} + \alpha_{n-2} + \alpha_{n-3}}, \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{4.67}$$

Ayrıca, τ_1 ve τ_2 parametreleri pozitif üçgensel bulanık sayılar ve $i \in \{0,1,2,3\}$ için α_{-i}, β_{-i}, başlangıç koşulları da pozitif üçgensel bulanık sayılar aşağıdaki gibi verilsin:

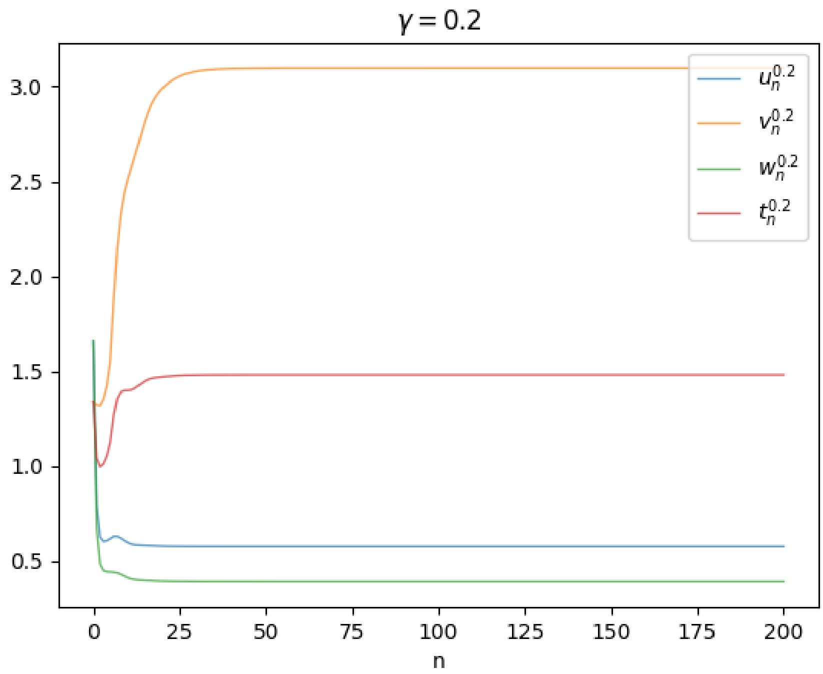
$$\tau_1(x) = \begin{cases} 5x - 3, & 0.6 \le x \le 0.8 \\ -5x + 5, & 0.8 \le x \le 1 \end{cases}, \quad \tau_2(x) = \begin{cases} 5x - 2, & 0.4 \le x \le 0.6 \\ -5x + 4, & 0.6 \le x \le 0.8 \end{cases},$$

$$\alpha_{-i}(x) = \begin{cases} 5x - \dfrac{3}{2}, & 0.3 \le x \le 0.5 \\ -5x + \dfrac{7}{2}, & 0.5 \le x \le 0.7 \end{cases}, \quad \beta_{-i}(x) = \begin{cases} 5x - \dfrac{3}{2}, & 0.3 \le x \le 0.5 \\ -5x + \dfrac{7}{2}, & 0.5 \le x \le 0.7 \end{cases}.$$

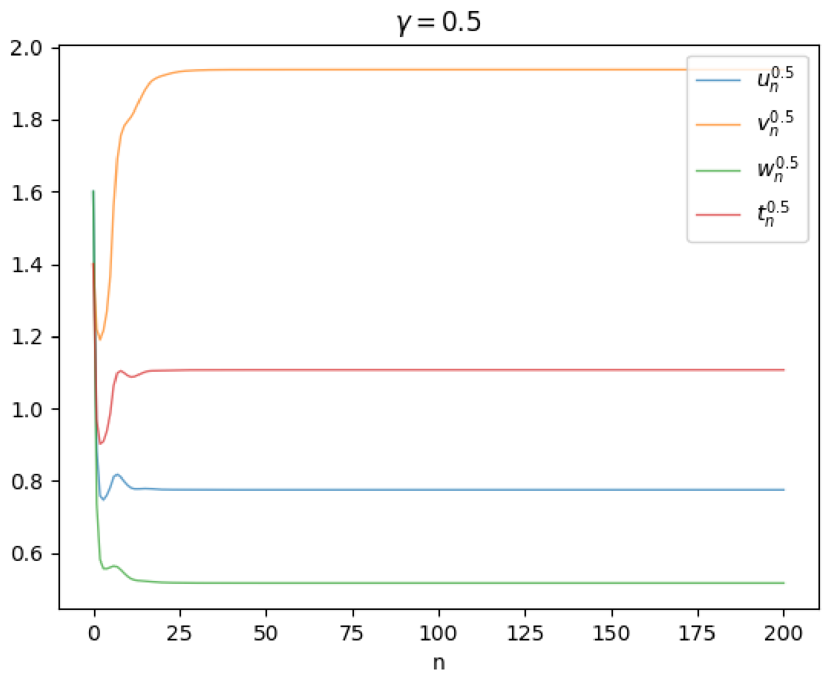
Ayrıca, $\gamma \in (0,1]$ ve $i \in \{0,1,2,3\}$, için $\tau_1, \tau_2, \alpha_{-i}, \beta_{-i}$ nin destek kümeleri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{cases} \operatorname{supp}\tau_1 \subseteq [0.6,1], & \operatorname{supp}\tau_2 \subseteq [0.4,0.8], \\ \operatorname{supp}\alpha_{-i} \subseteq [0.3,0.7], & \operatorname{supp}\beta_{-i} \subseteq [0.3,0.7]. \end{cases} \tag{4.68}$$

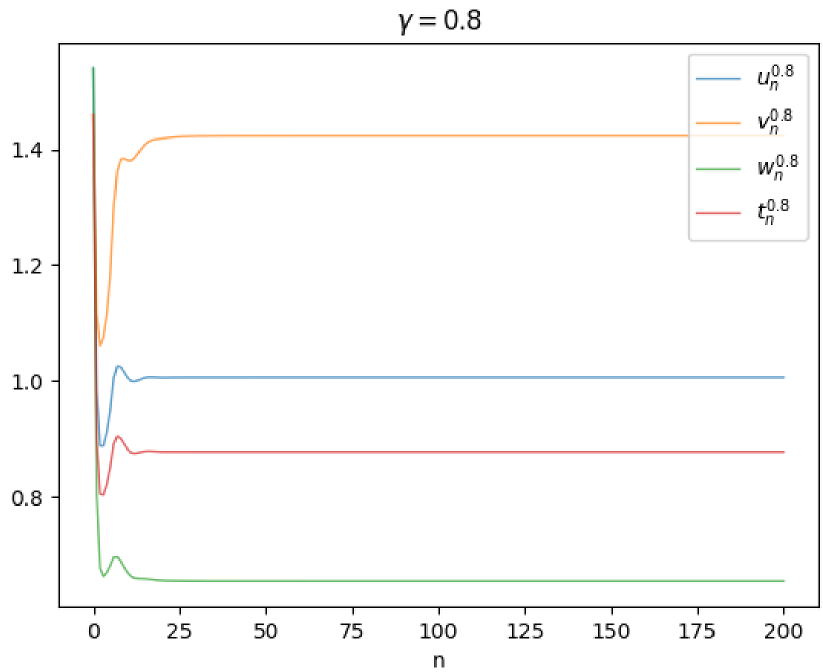
Bu örnek, eğer (4.55) şartı sağlanırsa, (4.1) bulanık fark denklem sisteminin sınırlı olduğunu göstermektedir. Üstelik, bu örnek $\gamma = 0.20$ için şekil 22, $\gamma = 0.50$ için şekil 23, $\gamma = 0.80$ için şekil 24 ve $\gamma = 1$ için ise şekil 25 te görüleceği üzere, $n \to \infty$ iken (4.1) bulanık fark denklem sisteminin her çözümünün (4.62) ile verilen $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ denge noktasına yakınsamaktadır. Şekil 26 $\gamma = 0.20$ için, $\gamma = 0.50$ için şekil 27, $\gamma = 0.80$ için şekil 28 ve şekil 29 ise $\gamma = 1$ için (4.67) bulanık fark denklem sisteminin çekimliliğini göstermektedir. $\gamma = 0.2$ için, $\tau_1 = [0.48, 1.12]$, $\tau_2 = [0.36, 0.84]$ olur. Buradan, $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ denge noktası $\bar{\alpha} = [0.5775, 3.0973]$, $\bar{\beta} = [0.3916, 1.4813]$ elde edilir. $\gamma = 0.5$ için, $\tau_1 = [0.60, 1.0]$, $\tau_2 = [0.45, 0.75]$ olur. Buradan, $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ denge noktası $\bar{\alpha} = [0.7750, 1.9375]$, $\bar{\beta} = [0.5167, 1.1071]$ elde edilir. $\gamma = 0.8$ için, $\tau_1 = [0.72, 0.88]$, $\tau_2 = [0.54, 0.66]$ olur. Buradan, $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ denge noktası $\bar{\alpha} = [1.0066, 1.4231]$, $\bar{\beta} = [0.6551, 0.8781]$ elde edilir. $\gamma = 1$ için, $\tau_1 = [0.8, 0.8]$, $\tau_2 = [0.6, 0.6]$ olur. Buradan, $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ denge noktası $\bar{\alpha} = [1.1929, 1.1929]$, $\bar{\beta} = [0.7591, 0.7591]$ elde edilir.



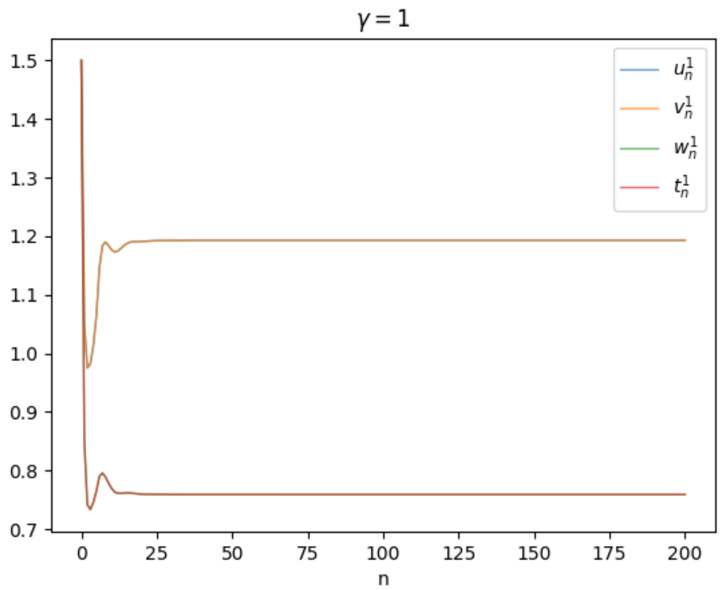
Şekil 30. $\gamma = 0.20$ için sistem (4.67) nin çözümlerinin grafiği



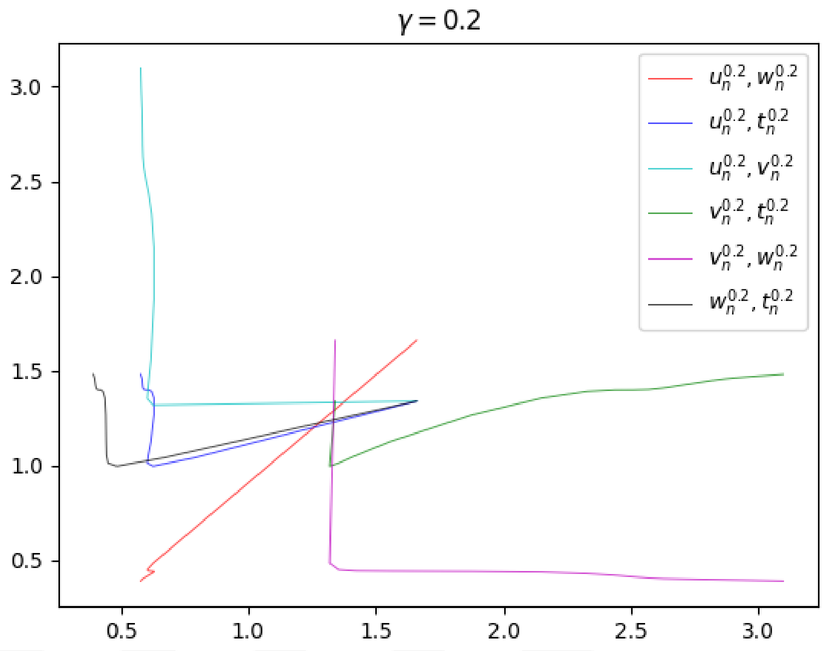
Şekil 31. $\gamma = 0.50$ için sistem (4.67) nin çözümlerinin grafiği



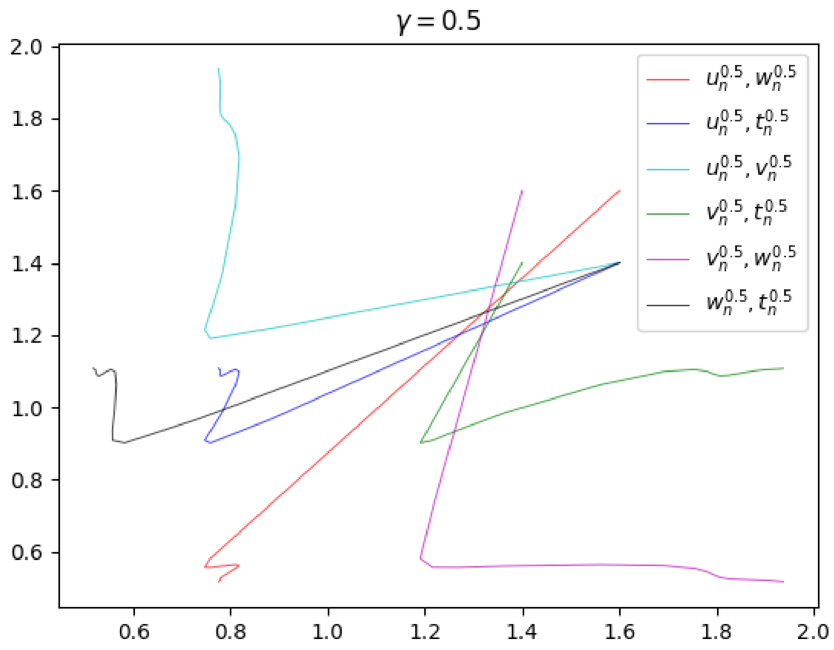
Şekil 32. $\gamma = 0.80$ için sistem (4.67) nin çözümlerinin grafiği



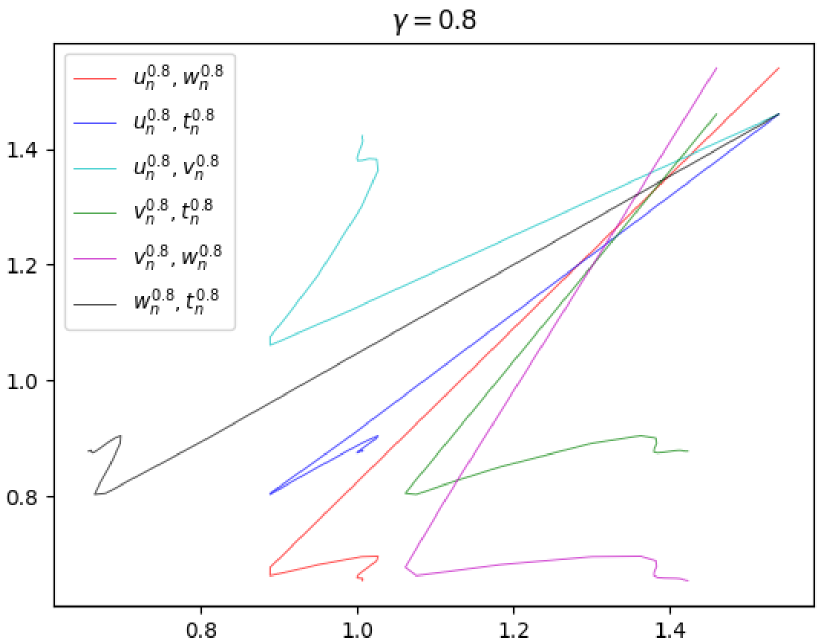
Şekil 33. $\gamma = 1$ için sistem (4.67) nin çözümlerinin grafiği



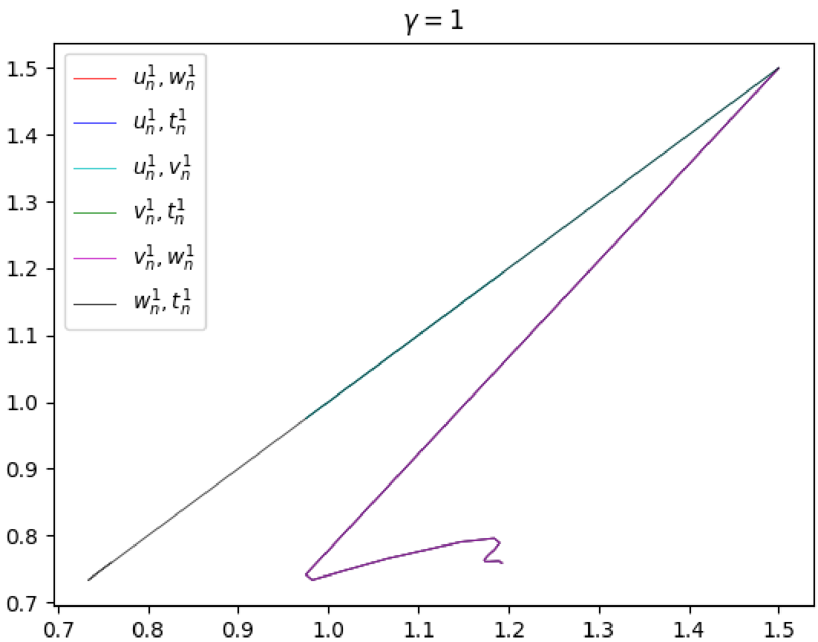
Şekil 34. $\gamma = 0.20$ için sistem (4.67) nin çözümlerinin çekimliliğinin grafiği



Şekil 35. $\gamma = 0.50$ için sistem (4.67) nin çözümlerinin çekimliliğinin grafiği



Şekil 36. $\gamma = 0.80$ için sistem (4.67) nin çözümlerinin çekimliliğinin grafiği



Şekil 37. $\gamma = 1$ için sistem (4.67) nin çözümlerinin çekimliliğinin grafiği

BÖLÜM 5

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında iki farklı bulanık fark denklem sistemi incelenmiştir. Öncelikle, (3.1) bulanık fark denklem sistemi incelenmiş ve sistemin pozitif bulanık çözümünün varlığı ve tekliği gösterilmiştir. Sonrasında, bulanık fark denklem sistemi, dört-boyutlu (3.10) fark denklem sistemine dönüştürülmüştür. Elde edilen sonuçlar ise bulanık sistemin sınırlı olması için gerekli şartların ve pozitif denge noktasının bulunmasında kullanılmıştır.

İkinci olarak (4.1) bulanık fark denklem sistemi çalışılmıştır. Sistemin pozitif çözümün olduğu ve bu çözümün ise sistemin tek pozitif çözümü olduğu gösterilmiştir. Daha sonra, (4.14) fark denklem sistemi fark denklem sistemi incelenmiş ve eldeki sonuçlar (4.1) bulanık fark denklem sistemine aktarılmıştır ve sistemin hangi durumlarda sınırlı olduğu ve pozitif denge noktasının bulunduğu gösterilmiştir.

Son olarak, incelenen (3.1) ve (4.1) bulanık fark denklem sistemleri için örnekler verilmiş ve elde edilen sonuçlar değerlendirilmiştir.

Özet olarak bu tez çalışmasında iki-boyutlu bulanık fark denklem sistemlerinin incelemesi yapılmıştır. Bu çalışmanın $4-boyutlu$ bulanık fark denklem sistemleri göz önüne alınarak, çözümlerin davranışları incelenebilir.

KAYNAKLAR

1. Abualrub, S., & Aloqeili, M., “Dynamics of the System of Difference Equations $x_{n+1} = A + \frac{y_{n-k}}{y_n}$, $y_{n+1} = B + \frac{x_{n-k}}{x_n}$”, *Qualitative theory of dynamical systems*, 19(2), 69, 2020.
2. Abu-Saris, R. M., & DeVault, R., “Global stability of $y_{n+1} = A + \frac{y_n}{y_{n-k}}$”, *Applied Mathematics Letters*, 16(2), 173-178, 2003.
3. Agarwal, R. P., “Difference equations and inequalities: theory, methods, and applications”, *CRC Press*, 2000.
4. Agarwal, R. P., & Wong, P. J., “Advanced topics in difference equations”, 404, *Springer Science & Business Media*, 2013.
5. Ahmed, A. M., & Eshtewy, N. A., “Attractivity of the recursive sequence $x_{n+1} = \frac{A - Bx_{n-2}}{C + Dx_{n-1}}$”, *Journal of the Egyptian Mathematical Society*, 24(3), 392-395, 2016.
6. Amira, K., & Yacine, H., “Global behavior of p-dimensional difference equations system”, *Electronic Research Archive*, 29(5), 3121-3139, 2021.
7. Amleh, A. M., Grove, E. A., Ladas, G., & Georgiou, D. A., “On the Recursive Sequence $x_{n+1} = \alpha + \frac{x_{n-1}}{x_n}$”, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, *233*(2), 790-798, 1999.
8. Atpinar, S., & Yazlik, Y., “Qualitative behavior of exponential type of fuzzy difference equations system”, *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 69(6), 4135-4162, 2023.
9. Bede, B., “Mathematics of Fuzzy Sets and Fuzzy Logic”, *Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag*, 2013.
10. Bellman, R. E., & Zadeh, L. A., “Decision-making in a fuzzy environment”, *Management science*, 17(4), B-141, 1970.

11. Berenhaut, K., Foley, J., & Stević, S., "The global attractivity of the rational difference equation $y_n = 1 + \frac{y_{n-k}}{y_{n-m}}$", *Proceedings of the American Mathematical Society*, 135(4), 1133-1140, 2007.
12. Berenhaut, K. S., Foley, J. D., & Stević, S., "The global attractivity of the rational difference equation $y_n = \frac{y_{n-k} + y_{n-m}}{1 + y_{n-k} y_{n-m}}$", *Applied Mathematics Letters*, *20*(1), 54-58, 2007.
13. Bereketoğlu, H., Kutay, V., "Fark Denklemleri", *Gazi Kitabevi*, Ankara, 2012.
14. Brezinski, C., "History of continued fractions and Padé approximants", 12, *Springer Science & Business Media*, 2012.
15. Carlson, B. C., "Algorithms involving arithmetic and geometric means", *The American Mathematical Monthly*, 78(5), 496-505, 1971.
16. Deeba, E. Y., Korvin, A. D., & Koh, E. L., "A fuzzy difference equation with an application", *Journal of Difference Equations and applications*, 2(4), 365-374, 1996.
17. Deeba, E. Y., & De Korvin, A., "Analysis by fuzzy difference equations of a model of CO_2 level in the blood", *Applied mathematics letters*, 12(3), 33-40, 1999.
18. Dekkar, I., Touafek, N., & Yazlik, Y., "Global stability of a third-order nonlinear system of difference equations with period-two coefficients", *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Fisicas y Naturales. Serie A. Matematicas*, 111, 325-347, 2017.
19. DeVault, R., Ladas, G., & Schultz, S. W., "On the recursive sequence $x_{n+1} = \frac{A}{x_n} + \frac{1}{x_{n-2}}$", *Proceedings of the American Mathematical Society*, 3257-3261, 1998.
20. DeVault, R., Kent, C., & Kosmala, W., "On the Recursive Sequence $x_{n+1} = p + \frac{x_{n-k}}{x_n}$", *Journal of Difference Equations and Applications*, *9*(8), 721-730, 2003.

21. Diamond, P., & Kloeden, P., “Metric spaces of fuzzy sets”, *Fuzzy sets and systems*, 35(2), 241-249, 1990.
22. Din, Q., “Asymptotic Behavior of a Second-Order Fuzzy Rational Difference Equation”, *Journal of Discrete Mathematics*, 2015(1), 524931, 2015.
23. Dubois, D., Esteva, F., Godo, L., & Prade, H., “Fuzzy-set based logics-an history-oriented presentation of their main developments”, *The Many Valued and Nonmonotonic Turn in Logic*, 8, 325-449, 2007.
24. Dubois, D., & Prade, H.”, Possibility theory”, In *Granular, Fuzzy, and Soft Computing* (pp. 859-876). New York, NY: Springer US, 2023.
25. Elaydi, S., “An introduction to difference equations”, *Springer Science & Business Media*, New York, 2005.
26. Elsayed, E. M., “Dynamics of a recursive sequence of higher order”, *Communications on Applied Nonlinear Analysis*, 16(2), 37-50, 2009.
27. Elsayed, E. M., & El-Dessoky, M. M., “Dynamics and behavior of a higher order rational recursive sequence”, *Advances in Difference Equations*, 2012, 1-16, 2012.
28. Elsayed, E. M., & Gafel, H. S., “Dynamics and Global Stability of Second Order Nonlinear Difference Equation”, *Pan-American Journal of Mathematics*, 1, 16, 2022.
29. Goldstine, H. H., “A History of Numerical Analysis from the 16th through the 19th Century”, 2, *Springer Science & Business Media*, 2012.
30. Grove, E. A., & Ladas, G., “Periodicities in nonlinear difference equations”, *Chapman and hall/CRC*, 2004.
31. Gümüş, M., “The global asymptotic stability of a system of difference equations”, *Journal of Difference Equations and Applications*, 24(6), 976-991, 2018.
32. Gümüş, M., “Global asymptotic behavior of a discrete system of difference equations with delays”, *Filomat*, 37(1), 251-264, 2023.
33. Gümüş, M., & Eğilmez, Ş. I., “The Qualitative Analysis of Some Difference Equations Using Homogeneous Functions”, *Fundamental Journal of Mathematics and Applications*, 6(4), 218-231, 2023.

34. Halim, Y., "Global character of systems of rational difference equations", *Electronic Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 3(1), 204-214, 2015.
35. Han, C., Li, L., Su, G., & Sun, T., "Dynamical behaviors of a k-order fuzzy difference equation", *Open Mathematics*, 20(1), 391-403, 2022.
36. Hassani, M. K., Yazlik, Y., Touafek, N., Abdelouahab, M. S., Mesmouli, M. B., & Mansour, F. E., "Dynamics of a Higher-Order Three-Dimensional Nonlinear System of Difference Equations", *Mathematics*, 12(1), 16, 2023.
37. Hatir, E., Mansour, T., & Yalçinkaya, I., "On a fuzzy difference equation", *Util. Math*, *93*, 135-151, 2014.
38. Hu, G., "Global behavior of a system of two nonlinear difference equation", *World J. Res. Rev*, 2(6), 36-38, 2016.
39. Jia, L., "Dynamic Behaviors of a Class of High-Order Fuzzy Difference Equations", *Journal of Mathematics*, 2020(1), 1737983, 2020.
40. Jia, L., Wang, C., & Yang, Q., "Existence and uniqueness of positive fuzzy solution for a three-order fuzzy difference equation", In *Journal of Physics: Conference Series*, Vol. 1592, No. 1, p. 012050, *IOP Publishing*, 2020.
41. Jia, L., Wang, C., Zhao, X., & Wei, W., "Dynamic behavior of a fractional-type fuzzy difference system", *Symmetry*, 14(7), 1337, 2022.
42. Jia, L., Zhao, X., Wang, C., & Wang, Q., "Dynamic behavior of a seven-order fuzzy difference equation", *J Appl Anal Comput*, 13(1), 486-501, 2023.
43. Kelley, W. G., & Peterson, A. C., "Difference equations: an introduction with applications", *Academic Press*, 2001.
44. Kelley, W., "Theory of difference equations-numerical methods and applications", *Bulletin of The Amerıcan Mathematical Society*, 40, No: 2, 259-262, 2003.
45. Khastan, A., "New solutions for first order linear fuzzy difference equations", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 312, 156-166, 2017.
46. Khastan, A., "Fuzzy logistic difference equation", *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, 15(7), 55-66, 2018.

47. Khastan, A., & Alijani, Z., “On the new solutions to the fuzzy difference equation $x_{n+1} = A + \frac{B}{x_n}$”, *Fuzzy Sets and Systems*, 358, 64-83, 2019.
48. Khaliq, A., Adnan, M., & Khan, A. Q., “Global Dynamics of Sixth-Order Fuzzy Difference Equation”, *Mathematical Problems in Engineering*, 2021(1), 9769093, 2021.
49. Klir, G., & Yuan, B., “Fuzzy sets and fuzzy logic”, 4, pp. 1-12, *New Jersey: Prentice hall*, 1995.
50. Kocic, V. L., & Ladas, G., “Global behavior of nonlinear difference equations of higher order with applications”, 256, *Springer Science & Business Media*, 1993.
51. Kosmala, W. A., Kulenović, M. R. S., Ladas, G., & Teixeira, C. T., “On the recursive sequence $y_{n+1} = \frac{p + y_{n-1}}{qy_n + y_{n-1}}$”, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 251(2), 571-586, 2000.
52. Kulenovic, M. R., & Ladas, G., “Dynamics of second order rational difference equations: with open problems and conjectures”, *Chapman and Hall/CRC*, 2001.
53. Lakshmikantham, V., & Trigiante, V., “Theory of difference equations numerical methods and applications”, *CRC Press*, 2002.
54. Lavanya, A. P., & Lovenia, J. D. L., “Positive solutions of a fuzzy nonlinear difference equations”, *Tamsui Oxford Journal of Information and Mathematical Sciences*, 32(2), 27-37, 2018.
55. Li, M. T., Sun, G. Q., Zhang, J., Zhao, Y., Pei, X., Li, L., ... & Jin, Z., “Analysis of COVID-19 transmission in Shanxi Province with discrete time imported cases”, *Math. Biosci. Eng*, 17(4), 3710, 2020.
56. Li, X. Y., & Li, W., “Global asymptotical stability in a rational difference equation”, *Applied Mathematics-A Journal of Chinese Universities*, 36(1), 51-59, 2021.
57. Li, Z., “Fuzzy chaotic systems”, 275-283, *Netherlands: Springer-Verlag Berlin Heidelberg*, 2006.
58. Liu, P., & Cui, X., “Hyperbolic logistic difference equation with infinitely many delays”, *Mathematics and Computers in Simulation*, 52(3-4), 231-250, 2000.

59. Mickens, R. E., "Difference equations: theory, applications and advanced topics", *CRC Press*, 2015.
60. Moaaz, O., & Altuwaijri, A. A., "The dynamics of a general model of the nonlinear difference equation and its applications", *Axioms*, 12(6), 598, 2003.
61. Murray, J. D., "Mathematical biology: I. An introduction", 17, *Springer Science & Business Media*, 2007.
62. Obaid, M. A., Elsayed, E. M., & El-Dessoky, M. M., "Global attractivity and periodic character of difference equation of order four", *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 2012(1), 746738, 2012.
63. Papaschinopoulos, G., & Schinas, C. J., "On a system of two nonlinear difference equations", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 219(2), 415-426, 1998.
64. Papaschinopoulos, G., & Papadopoulos, B. K., "On the fuzzy difference equation $x_{n+1} = A + \frac{x_n}{x_{n-m}}$", *Fuzzy Sets and Systems*, *129*(1), 73-81, 2002.
65. Papaschinopoulos, G., & Stefanidou, G., "Boundedness and asymptotic behavior of the solutions of a fuzzy difference equation", *Fuzzy sets and systems*, 140(3), 523-539, 2003.
66. Redjam, I., Halim, Y., & Fečkan, M., "On a higher order fuzzy difference equation with a quadratic term", *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 1-24, 2024.
67. Saaty, T. L., "Modern nonlinear equations", *Courier Corporation*, 2012.
68. Stefanidou, G., & Papaschinopoulos, G., "Asymptotic Behavior of the Solutions of the Fuzzy Difference Equation", *Eighth International Conference on Difference Equations and Applications*, 253, 2005.
69. Qian, X., & Qi-hong, S., "Qualitative behavior of a rational difference equation", *Advances in Difference Equations*, 1-6, 2011.
70. Saleh, M., Alkoumi, N., & Farhat, A., "On the dynamics of a rational difference equation $x_{n+1} = \frac{\alpha + \beta x_n + \gamma x_{n-k}}{Bx_n + Cx_{n-k}}$", *Chaos, Solitons & Fractals*, 96, 76-84, 2017.

71. Sedaghat, H., “Global behaviours of rational difference equations of orders two and three with quadratic terms”, *Journal of Difference Equations and Applications*, 15(3), 215-224, 2009.
72. Stević, S., “On positive solutions of a (k+1) th order difference equation”, *Applied Mathematics Letters*, 19(5), 427-431, 2006.
73. Stević, S., “On the recursive sequence $x_n = 1 + \frac{\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_{n-p_i}}{\sum_{j=1}^{m} \beta_i x_{n-q_j}}$”, *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 2007(1), 039404, 2007.
74. Sun, T., Su, G., Han, C., Zeng, F., & Qin, B., “Eventual periodicity of a system of max-type fuzzy difference equations of higher order”, *Fuzzy Sets and Systems*, 443, 286-303, 2022.
75. Touafek, N., & Elsayed, E. M., “On the periodicity of some systems of nonlinear difference equations”, *Bulletin mathématique de la Société des Sciences Mathématiques de Roumanie*, 217-224, 2012.
76. Tollu, D. T., Yazlik, Y., & Taskara, N., “Behavior of positive solutions of a difference equation”, *Journal of applied mathematics & informatics*, 35(3), 217-230, 2017.
77. Tollu, D. T., Yazlik, Y., & TAŞKARA, N., “On a solvable nonlinear difference equation of higher order”, *Turkish Journal of Mathematics*, 42(4), 1765-1778, 2018.
78. Usman, M., Khaliq, A., Azeem, M., Swaray, S., & Kallel, M., “The dynamics and behavior of logarithmic type fuzzy difference equation of order two”, *PloS one*, 19(10), e0309198, 2024.
79. Voskoglou, M., “Fuzzy logic: History, methodology and applications to education”, *Sumerianz Journal of Education, Linguistics and Literature*, 1(1), 10-18, 2018.
80. Wang, G. Y., & Zhang, Q. H., “Dynamical behavior of first-order nonlinear fuzzy difference equation”, *IAENG International Journal of Computer Science*, 45(4), 552-559, 2018.
81. Wang, C., Li, J., & Jia, L., “Dynamics of a high-order nonlinear fuzzy difference equation”, *Journal of Applied Analysis and Computation*, 11(1), 404-421, 2021.

82. Wimp, J., “Computation with Recurrence Relations”, *AMS*, 371-372, 1984.
83. Yalçınkaya, İ., Çalışkan, V., & Tollu, D. T., “On a nonlinear fuzzy difference equation”, *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics*, 71(1), 68-78, 2022.
84. Yalçınkaya, İ., Tollu, D.T., Khastan, A., Ahmad, H. & Botmart, T., “Qualitative behavior of a higher-order fuzzy difference equation”, *AIMS Math* 8(3), 6309–6322, 2023.
85. Yalçınkaya, İ., El-Metwally, H., Bayram, M., & Tollu, D. T., “On the dynamics of a higher-order fuzzy difference equation with rational terms”, *Soft Computing*, 27(15), 10469-10479, 2023.
86. Yalçınkaya, İ. I., El-Metwally, H., Tollu, D. T., & Ahmad, H., “Behavior of Solutions to the Fuzzy Difference Equation”, *Mathematical Notes*, 113(1), 292-302, 2023.
87. Yang, X., Liu, Y., & Bai, S., “On the system of high order rational difference equations $x_n = \dfrac{a}{y_{n-p}}, y_n = \dfrac{by_{n-p}}{x_{n-q}y_{n-q}}$”, *Applied Mathematics and Computation*, 171(2), 853-856, 2005.
88. Yazlik, Y., Tollu, D. T., & Taskara, N., “On the solutions of a max-type difference equation system”, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 38(17), 2015.
89. Zadeh, L. A., “Fuzzy sets”, *Information and control*, 8(3), 338-353, 1965.
90. Zadeh, L. A. “Fuzzy Algorithms”, *Information and Control*, 12, 1968.
91. Zadeh, L. A., “Similarity relations and fuzzy orderings”, *Information sciences*, 3(2), 177-200, 1971.
92. Zadeh, L. A., “The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning-I”, *Information sciences*, 8(3), 199-249, 1975.
93. Zadeh, L. A., “The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning-II”, *Information sciences*, 8(4), 301-357, 1975.
94. Zadeh, L. A., “The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning-III”, *Information sciences*, 9(1), 43-80, 1975.
95. Zimmermann, H. J., “Fuzzy set theory”, *Wiley interdisciplinary reviews: computational statistics*, 2(3), 317-332, 2010.

96. Zhang, Y., Yang, X., Evans, D. J., & Zhu, C., “On the nonlinear difference equation system $x_{n+1} = A + \frac{y_{n-m}}{x_n}, y_{n+1} = A + \frac{x_{n-m}}{y_n}$”, *Computers & Mathematics with Applications*, 53(10), 1561-1566, 2007.
97. Zhang, Q., Yang, L., & Liao, D., “On the fuzzy difference equation”, *Engineering and Technology*, 75, 1032-1037, 2012.
98. Zhang, Q. H., Yang, L. H., & Liao, D. X., “Behavior of solutions to a fuzzy nonlinear difference equation”, *Iran. J. Fuzzy Syst*. 9, 1-12, 2012.
99. Zhang, D., Ji, W., Wang, L., & Li, X., “On the Symmetrical System of Rational Difference Equation $x_{n+1} = A + \frac{y_{n-k}}{y_n}, y_{n+1} = A + \frac{x_{n-k}}{x_n}$”, *Applied Mathematics*, 4, 834-837, 2013.
100. Zhang, Q., Zhang, W., Shao, Y., & Liu, J., “On the system of high order rational difference equations”, *International Scholarly Research Notices*, 2014(1), 760502, 2014.
101. Zhang, Q., Lin, F., & Zhong, X., “Asymptotic behavior of discrete time fuzzy single species model”, *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 2019(1), 4170626, 2019.
102. Zhang, Q., Lin, F., & Zhong, X., “On discrete time Beverton-Holt population model with fuzzy environment”, *Math. Biosci. Eng*, 16(3), 1471-1488, 2019.
103. Zhang, Q., Zhang, W., Lin, F., & Li, D., “On dynamic behavior of second-order exponential-type fuzzy difference equation”, *Fuzzy Sets and Systems*, 419, 169-187, 2021.
104. Zhang, Q., Miao, O., Lin, F., & Zhang, Z., “On discrete-time laser model with fuzzy environment”, *AIMS Mathematics*, 6(4), 3105-3120, 2021.
105. Zhang, Q., Ouyang, M., & Zhang, Z., “On second-order fuzzy discrete population model”, *Open Mathematics*, 20(1), 125-139, 2022.
106. Zhang, Q., Ouyang, M., Pan, B., & Lin, F., “Qualitative analysis of second-order fuzzy difference equation with quadratic term”, *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 69(2), 1355-1376, 2023.
107. Zimmermann, H. J., “Fuzzy set theory”, *Wiley interdisciplinary reviews: computational statistics*, 2(3), 317-332, 2010.

108. Camouzis, E., & Ladas, G., “Dynamics of third-order rational difference equations with open problems and conjectures”, *Chapman and Hall/CRC*, 2007.
109. Sedaghat, H., “Nonlinear difference equations: Theory with applications to social science models”, 15, *Springer Science & Business Media*, 2013.
110. Althagafi, H., & Ghezal, A., “Global Stability of a System of Fuzzy Difference Equations of Higher-Order”, *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 1-23, 2024.
111. Topan, O., Yazlik, Y., & Atpinar S., “Dynamical behavior of solutions to higher-order system of fuzzy difference equations”, *Fundamental Journal of Mathematics and Applications*, Accepted paper, 2025.