T.C.

AMASYA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KENMOTSU MANİFOLDLARDAN RİEMANN MANİFOLDLARA HEMİ-SLANT $\xi^{\perp}$-RİEMANN SUBMERSİYONLAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HACI ALİ YALÇIN

ŞUBAT

HACI ALİ YALÇIN	**MATEMATİK ANABİLİM DALI**	**ŞUBAT 2025**

KENMOTSU MANİFOLDLARDAN RİEMANN MANİFOLDLARA HEMİ-SLANT $\xi^{\perp}$-RİEMANN SUBMERSİYONLAR

Hacı Ali YALÇIN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman
Doç. Dr. Ramazan SARI

AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ŞUBAT 2025

Yüksek Lisans Tezi Kabul ve Onay Sayfası

Hacı Ali YALÇIN tarafından hazırlanan "Kenmotsu Manifoldlardan Riemann Manifoldlara Hemi-Slant $\xi^{\perp}$ Riemann Submersiyonlar" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç.Dr.Ramazan SARI

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum …………………

Başkan : Prof.Dr.Tevfik ŞAHİN

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum …………………

Üye : Doç.Dr. İnan ÜNAL

Kurumsal Temeller Anabilim Dalı, Munzur Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum …………………

Tez Savunma Tarihi: 07 /02/2025

Jüri tarafından kabul edilen bu tezinYüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

…………………………

Doç. Dr. Ümit YILDIRIM

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Hacı Ali YALÇIN
07.02.2025

KENMOTSU MANİFOLDLARDAN RİEMANN MANİFOLDLARA HEMİ-SLANT $\xi^{\perp}$-RİEMANN SUBMERSİYONLAR

(Yüksek Lisans Tezi)

Hacı Ali YALÇIN

AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Şubat 2025

ÖZET

Bu tez çalışmasında Kenmotsu manifoldlardan Riemann manifoldlara hemi-slant $\xi^{\perp}$ Riemann submersiyolar tanımlanmış ve geometrik özellikleri incelenmiştir. İlk bölümde, literatür özeti yapılmış ve tez konusu ile ilgili yapılan çalışmalar tanıtılmıştır. İkinci bölümde, Riemann manifoldu ile Kenmotsu manifoldu ve alt manifoldları ile ilgili temel kavramlar ele alınmıştır. Üçüncü bölümde**,** Kenmotsu manifoldlarından Riemann manifoldlarına hemi-slant $\xi^{\perp}$-Riemann submersiyonunun tanımı, teoremleri ve bu tür submersiyonlarla ilgili örnekler gösterilmiştir. Dördüncü bölümde, bir hemi-slant $\xi^{\perp}$ Riemann submersiyon' un tanımından ortaya çıkan distribüsyonların geometrik özellikleri incelenmiştir.

Sayfa Adedi : 39
Anahtar Kelimeler : Riemann submersiyon, Kenmotsu manifold, Hemi-slant submersiyon
Danışman : Doç. Dr. Ramazan SARI

HEMİ-SLANT $\xi^{\perp}$-RIEMANN SUBMERSIONS FROM KENMOTSU MANIFOLDS TO RIEMANN MANIFOLDS

(M. Sc. Thesis)

Hacı Ali YALÇIN

AMASYA UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

February 2025

ABSTRACT

In this thesis, hemi-slant $\xi^{\perp}$-Riemann submersions from Kenmotsu manifolds to Riemannian manifolds are defined, and their geometric properties are examined. In the first chapter, a literature review is provided, and previous studies related to the topic of the thesis are introduced. In the second chapter, basic concepts related to Riemannian manifolds, Kenmotsu manifolds, and their submanifolds are discussed. In the third chapter, the definition, theorems, and examples of hemi-slant $\xi^{\perp}$-Riemann submersions from Kenmotsu manifolds to Riemannian manifolds are presented. In the fourth chapter, the geometric properties of the distributions arising from the definition of a hemi-slant $\xi^{\perp}$-Riemann submersion are investigated.

Number of pages : 39
Keywords : Riemannian submersion, Kenmotsu manifold, hemi-slant submersion
Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Ramazan SARI

ÖN SÖZ VE TEŞEKKÜR

Tez hazırlığım aşamasında ve tez konum ile ilgili çalışmalar yapabilmem adına, bana bilgi ve tecrubelerini aktaran ve bir çok şey öğrenmemde yardımcı olan değerli danışmanım Doç. Dr. Ramazan SARI' ya sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Aynı zamanda bu süreçte manevi desteğini esirgemeyen aileme ve ders dönemim boyunca fikir alışverişlerinde bulunduğum yüksek lisans sınıf arkadaşlarıma minnet duygumu belirtmek isterim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, yanda açıklamaları verilmek üzere aşağıda listelenmiştir.

Simgeler	**Açıklama**
M	Diferensiyellenebilir manifold
g	Riemann metriği
∇	Lineer konneksiyon
π_*	Türev dönüşümü
$[,]$	Lie braket (parantez operatörü)
$\mathcal{V}$	Dikey distribüsyon
$\mathcal{H}$	Yatay distribüsyon
η	1-form
φ	(1,1) tipinde tensör alanı
ϕ	2-form

Kısaltmalar	**Açıklamalar**
R	Riemann eğrilik tensörü
φ	(1,1) tipinde tensör alanı
g	Riemann metriği
M	Diferensiyellenebilir manifold
$[,]$	Lie braket
TM	Teğet uzayı

ξ	Karakteristik vektör alanı
η	1-form
$\chi^{(M)}$	Vektör alanların uzayı

1. GİRİŞ

Dünyada ki gelişim ve dönüşümde, bilim ve teknolojinin payı yadsınamaz bir gerçektir. Bu dönüşümden geometri de üzerine düşen payı almış ve zamanla çeşitli alanlara ayrılmıştır. Bu alanlardan birisi olan diferansiyel geometri, matematiğin türev işlemini kullanarak geometrik problemleri çözen, diferansiyel hesaplamaların geometriye uygulandığı bir kolu olmuştur.

Eğriler, yüzeyler ve manifoldlar, modern matematiğin en aktif kullanım alanlarından biri olan diferansiyel geometrinin incelediği temel konuların başında gelmektedir.

Manifoldlar arasında diferansiyellenebilir dönüşümler tanımlanarak, manifoldların geometrik yapılarını incelemek ve karşılaştırmak mümkün olmuştur. Bu sayede manifoldların temel özellikleri ve geometrisi daha anlaşılır hale gelmiştir.

Riemann manifoldların geometrik özelliklerini karşılaştırmak için kullanılan dönüşümlerin çeşitliliğinin az olması önemli bir eksiklik olarak karşımıza çıkmaktadır. Riemann geometride, izometrik immersiyonlar ve Riemann submersiyon dönüşümleri olmak üzere iki temel dönüşüm vardır.

İki manifold arasındaki izometrik immersiyon dönüşümü küçük boyuttan daha yüksek boyuta tanımlanırken, Riemann submersiyon dönüşümü ise yüksek boyutlu manifolddan düşük boyutlu manifolda tanımlanır.

Submersiyon teoerisinde izometrik immersiyonların karşılığı olan Riemann submersiyonlar, O' Neill ve Gray tarafından 1966 ve 1967 yıllarında, birbirinden bağımsız olarak çalışılmıştır. Günümüzde ise, O' Neill in teorisi daha çok kullanılmaktadır. Temel amacı negatif eğrilikli manifoladları incelemek olan Riemann submersiyonların, diğer manifoldların özelliklerini de incelemede kullanışlı olduğu görülmüştür.

Manifoldların özelliğine göre birçok farklı Riemann submersiyon tanımı yapıldı. İnvaryant, anti invaryant, semi invaryant, slant, semi slant, quaternionik, hemi slant ve pointwise slant Riemann submersiyonlar da bulunmaktadır. Riemann submersiyonlar fizikte Kaluza-Klein teoride, süper kütle çekim, sicim ve Yung Mills teorilerde kullanılmaktadır.

Son zamanlarda anti invaryant Riemann submersiyonların bir genellemesi olarak hemen hemen kontak metrik manifoldlardan semi invaryant Riemann submersiyon kavramı tanımlanarak, bu tür dönüşümlerin geometrisinin araştırmaları yapıldı (Akyol, 2017).

Ardından, Sasakian manifoldlardan Riemann manifoldlara semi-slant $\xi^{\perp}$- Riemann submersiyonları üzerine çalışmalar yapıldı (Akyol, 2017). 2019 yılında ise, Sarı ve Akyol Sasakian manifoldlardan Riemann manifoldlara hemi-slant $\xi^{\perp}$-Riemann submersiyonu tanımladılar ve çalıştılar (Sarı ve Akyol, 2019).

Negatif eğrilikli manifoldları inceleyen Bishop ve O'Neill olup, warped çarpım manifoldları olarak isimlendirdikleri yeni bir çalışma alanını ortaya çıkarttılar. Buradan hareketle S. Tanno ise hemen hemen değme manifoldları sınıflamayı başarmıştır.

N hemen hemen değme manifold, ξ-karakteristik vektör alanını içeren düzlem kesitinin kesitsel eğriliği sabit ve c olmak üzere,

1. $c > 0 \; ise \; N$ sabit kesitsel eğrilikli Sasakian manifoldtur,
2. $c = 0 \; ise \; N$ sabit kesitsel eğrilikli Kaehler manifoldtur,
3. $c < 0 \; ise \; N$ reel ile kompleks düzlemin warped çarpımı olarak yazılır (Tanno, 1969).

Kenmotsu buradaki üçüncü durumu 1972'de incelemiş ve Sasakian olmayan yeni bir yapı tanımlamıştır. Bu yapının, bir Kaehler manifold ile bir açık aralığın warped çarpımı olarak yazılabildiğini göstermiştir. 1981'de, Kenmotsu'nun tanımladığı bu yeni yapı Janssens ve Vanhecke tarafından Kenmotsu manifoldu olarak adlandırılmıştır.

Bizim motivasyonumuz, kontak geometrisinde hemi-slant $\xi^{\perp}-$Riemannian submersionların geometrisiyle ilgili bir boşluğu doldurmaktır. Bu düşünceyle tez çalışmamız Kenmotsu manifoldlardan Riemann manifoldlara Hemi-slant $\xi^{\perp}$ Riemann submersiyonlar üzerinedir.

Tezin ikinci bölümünde temel kavramlardan bahsedildi. Üçüncü bölümde bir Kenmotsu manifolddan Riemann manifolda tanımlanan hemi-slant $\xi^{\perp}$ - Riemann submersiyon tanımlandı ve daha açıklayıcı olması için örneklerle desteklendi. Dördüncü bölümde ise distribüsyonların geometrisi ele alındı.

2.TEMEL KAVRAMLAR

Temel kavramlar dört alt bölüm halinde incelenmiştir. İlk olarak Riemann submersiyon ve Kenmotsu manifold tanımlanmıştır. İkinci olarak Riemann manifoldların altmanifoldları açıklanmış sonrasında ise immersiyon ve izometrik kavramlarına değinilmiştir. Üçüncü bölümde submersiyon açıklanmıştır. Dördüncü bölümde hemen hemen değme metrik manifoldlar hakkında bilgi verilmiştir.

2.1 Riemann Manifold

2. 1. 1. Tanım M, diferansiyellenebilir bir manifold ve M de tanımlı C^{∞} vektör alanlarının uzayı $\chi^{(M)}: M \to \mathbb{R}$ olsun, C^{∞}fonksiyonlarının uzayı ise $C^{\infty}(M, \mathbb{R})$ olmak üzere,

$$g: \chi^{(M)} \times \chi^{(M)} \to C^{\infty}(M, \mathbb{R}) \tag{2.1}$$

dönüşümü 2-lineer, simetrik ve pozitif tanımlı ise g‘ ye M üzerinde bir ve Riemann metriği (M, g) ikilisine de *Riemann manifoldu* denir (Hacısalihoğlu, 1983)

2. 1. 2. Tanım M ve N iki Riemann manifoldları arasında

$$\pi: \mathrm{M} \to \mathrm{N} \tag{2.2}$$

bir C^{∞}- dönüşümünün türev dönüşümü

$$\pi_{*}: \chi(\mathrm{M}) \to \chi(\mathrm{N}) \tag{2.3}$$

şeklinde gösterilir. Bu dönüşümün her $u \in M$ noktasında

$$\pi_{*u}: T_u M \to T_{\pi_{*u}} N \tag{2.4}$$

lineer dönüşümü vardır.

$$\pi_{*}(U)(V)(f) = V(f \circ \pi) \tag{2.5}$$

dönüşümünde, f bir fonksiyon ve V bir vektör alanı olmak üzere, bu dönüşüme π nin u noktasındaki *türev dönüşümü* denir (Yano ve Kon,1984).

2. 1. 3. Tanım M Bir diferansiyellenebilir manifold üzerinde iki vektör alanı U ve V olsun.

$f \in C^{\infty}(M;\mathbb{R})$ fonksiyonu ele alalım.

$$[,]: \chi^{(M)} \times \chi(\mathrm{M}) \to \chi(\mathrm{M}) \tag{2.6}$$

$$[U,V]f = U(Vf) - V(Uf) \tag{2.7}$$

şeklinde tanımlı $[,]$ fonksiyonuna U ve V nin *Lie (parantez) operatörü* denir. Lie operatörü aşağıda verilen özellikleri sağlar (Yano ve Kon, 1984).

$\forall$ U, V, Z $\in \chi(\mathrm{M})$ ve $\forall\, f, g \in C^{\infty}(M;\mathbb{R})$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
&\text{i. } [U,V] = -[V,U] \\
&\text{ii.} [aU + bV, Z] = a[U,Z] + b[V,Z],\ a,b \in \mathbb{R} \\
&\text{iii.} \big[[U,V],Z\big] + \big[[V,Z],U\big] + \big[[Z,U],V\big] = 0 \quad \text{(Jacobi özdeşliği)} \\
&\text{iv.} [fU, gV] = f[U,V] + f(Ug)V - g(Vf)U
\end{aligned} \tag{2.8}$$

2. 1. 4. Tanım M, bir diferansiyellenebilir manifold ve M üzerinde vektör alanlarının uzayı $\chi(\mathrm{M})$ olmak üzere,

$$\nabla: \chi^{(M)} \times \chi(\mathrm{M}) \to \chi(\mathrm{M}) \tag{2.9}$$

$$(U,V) \to \nabla(\mathrm{U},\mathrm{V}) = \nabla_U V \tag{2.10}$$

şeklinde tanımlı

$\forall$ U, V, Z $\in \chi(\mathrm{M})$ ve $\forall\, f \in C^{\infty}(M;\mathbb{R})$ için

i. $\nabla_{U+V} Z = \nabla_U Z + \nabla_V Z$

ii. $\nabla_U (V + Z) = \nabla_U V + \nabla_U Z$

iii. $\nabla_{fU}V = f\nabla_U V$

iv. $\nabla_U fV = U[f]V + f\nabla_U V$

v. $[U,V] = \nabla_U V - \nabla_V U$ (2.11)

vi. $Ug(V,Z) = g(\nabla_U V, Z) + g(V, \nabla_U Z)$

şartları sağlanıyorsa ∇ ya M üzerinde bir *Riemann konneksiyonu* ∇_U' ya da U ya göre *kovaryant türev operatörü* denir (Yano ve Kon, 1984).

2. 1. 5. Tanım M bir diferansiyellenebilir manifold ve g de M üzerinde tanımlı Riemann metriği ve,

$\forall\, \mathrm{U, V, Z} \in \chi(\mathrm{M})$ için R: $\chi^{(M)} \times \chi(\mathrm{M}) \times \chi(\mathrm{M}) \rightarrow \chi(\mathrm{M})$ olmak üzere

$$(\mathrm{U,V,Z}) \rightarrow \mathrm{R(U,V,Z)} = \mathrm{R(U,V)Z} = \nabla_U\nabla_V Z - \nabla_V\nabla_U Z - \nabla_{[U,V]}Z \qquad (2.12)$$

şeklinde ifade edilen R tensör alanına ∇ konneksiyonunun *eğrilik tensörü* denir (Yano ve Kon, 1984).

2. 1. 6. Tanım M bir diferansiyellenebilir manifold ve g de M üzerinde tanımlı bir Riemann metriği ve,

$\forall\, \mathrm{U, V, W, Z} \in \chi(\mathrm{M})$ için K: $\chi^{(M)} \times \chi(\mathrm{M}) \times \chi(\mathrm{M}) \times \chi(\mathrm{M}) \rightarrow C^{\infty}(M;\mathbb{R})$ olmak üzere

$$(\mathrm{U,V,W,Z}) \rightarrow \mathrm{K(U,V,W,Z)} = g(R(U,V)W,Z) \qquad (2.13)$$

şeklinde verilen eşitliğe M üzerinde *Riemann Chiristoffel eğrilik tensörü* denir (Yano ve Kon, 1984).

2. 1. 7. Tanım M bir diferansiyellenebilir manifold ve g de M üzerinde tanımlı Riemann metriği olsun. Bir $p \in M$ *için* T_pM tanjant uzayın iki boyutlu alt uzayı Π ise , $\forall\, \mathrm{U,V} \in \Gamma(\Pi)$ tanjant vektörleri için

$$K(\Pi) = \frac{g(R(U,V)V,U)}{g(U,U)g(V,V)-g(U,V)^2} \tag{2.14}$$

eşitliğine Π düzleminin *kesitsel eğriliği* denir (Yano ve Kon, 1984).

2.2. İmmersiyon

2. 2. 1. Tanım M ve M' sırasıyla *m* ve *n* boyutlu iki Riemann manifoldu olmak üzere

$$f: M \to \mathrm{M}' \tag{2.15}$$

bir C^∞ dönüşümü için

$$\mathrm{boy}(f_*\left(T_p(M)\right)) = m \tag{2.16}$$

ise f nin $p \in \mathrm{M}$ noktasındaki rankı m olup $rank(f) = m$ ile gösterilir. Eğer $boy(\mathrm{M}) = \mathrm{rank}(f)$ ise f' ye *immersiyon* (daldırma) denir. Burada M de M' nün *immersed* alt manifoltudur denir.

f immersiyonu birebir ise f ' ye *imbedding* (gömme) denir. Burada M *ye* M' nün gömülen alt manifoldu ya da sadece altmanifoldu denir (Hacısalihoğlu, 1983).

2. 2. 2. Tanım (M, g) ve $(M'g')$ sırasıyla *m* ve *n* boyutlu iki Riemann manifold ve $f: M \to M'$ immersiyon olsun. ∀ $U, V \in \chi^M$ için,

$$g(U,V) = g'(f_*U, f_*V) \tag{2.17}$$

eşitliğinde f_* ' a *izometrik immersiyon* denir (Hacısalihoğlu, 1983).

2. 2. 3. Tanım M, n- boyutlu bir Riemann manifold olsun. M nin her p noktasına T_pM teğet uzayında *r*-boyutlu bir D_p alt uzayı bağlayan *D* dönüşümüne M üzerinde rankı *r* olan bir dağılım denir. $U \in \chi^M$ olsun. ∀ $p \in M$ için $U_p \in D_p$ ise U vektör alanına D distribüsyonuna aittir denir. D distribüsyonuna ait olan vektör alanlarının uzayı $\Gamma(D)$ ile gösterilir (Duggal and Bejancu, 1996).

2.3. Submersiyon

2. 3. 1. Tanım (M, g_M) ve (N, g_N) sırasıyla m ve n boyutlu iki Riemann manifold olmak üzere, $\pi: (\mathrm{M}, g_M) \to (\mathrm{N}, g_N)$ dönüşümü için

$$rank\pi_{*x} = boyN \tag{2.18}$$

ise π' ye $x \in M$ noktasında bir *submersiyon* denir. $\forall x \in M$ için π bir submersiyon ise π' ye M üzerinde bir *submersiyon* denir.

m ve *n* pozitif doğal sayılar ve $m > n$ olmak üzere,

$$\pi: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \tag{2.19}$$

dönüşümü için

$$\pi: (u_1, u_2, \dots, u_m) \to (u_1, u_2, \dots, u_n) \tag{2.20}$$

ile verilsin. Bir $u \in \mathbb{R}^m$

$$\pi_{*x}: (v_1, v_2, \dots, v_m) \to (v_1, v_2, \dots, v_n) \tag{2.21}$$

olduğundan π_* diferansiyeli örtendir. Buna göre de projeksiyon dönüşümü bir submersiyondur.

2. 3. 1. Örnek

$$\pi: \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^3 \tag{2.22}$$

$$(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6) \to (\tfrac{u_1+u_2}{\sqrt{2}}, \tfrac{u_3+u_4}{\sqrt{2}}, \tfrac{u_5+u_6}{\sqrt{2}})$$

dönüşümünde $\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$, $\mathbb{R}^6$ nın koordinat sistemini gösterir. Dönüşümün Jakobiyen matrisi π_* olmak üzere

$$\pi_* = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \tag{2.23}$$

elde edilir. Dolayısıyla $rank\pi_* = boy\mathbb{R}^3 = 3$ dir. Bu da π dönüşümünün bir submersiyon olduğunu gösterir.

2. 3. 2. Tanım (M, g_M) ve (N, g_N) Riemann manifoldları ve boyutları sırasıyla m ve n olsun. $\pi: M \to N$ dönüşümü aşağıdaki aksiyomları sağlarsa π ye Riemann submersiyon denir.

i. π maksimal ranka sahiptir.

ii. π_* horizontal vektörlerin uzunluklarını korur yani lineer izometriktir.

Riemann submersiyonlar $\mathcal{T}$ ve $\mathcal{A}$ ile gösterilen O‛‛Neill tensörleriyle karakterizedir. Her $E_1, E_2 \in \Gamma(TM_M)$ için

$$\mathcal{T}(E_1, E_2) = \mathcal{H}\nabla^{M_1}_{\mathcal{V}E_1}\mathcal{V}E_2 + \mathcal{V}\nabla^{M_1}_{\mathcal{V}E_1}\mathcal{H}E_2 \tag{2.24}$$

$$\mathcal{A}(E_1, E_2) = \mathcal{H}\nabla^{M_1}_{\mathcal{H}E_1}\mathcal{V}E_2 + \mathcal{V}\nabla^{M_1}_{\mathcal{H}E_1}\mathcal{H}E_2 \tag{2.25}$$

eşitlikleri vardır.

2. 3. 3. Tanım M ve N sırasıyla m ve n boyutlu Riemann manifold ve $\pi: M \to N$ ye bir submersiyon olsun. $\forall u \in N$ için $\pi^{-1}(u)$, (m-n)-boyutlu M nin bir altmanifoldudur. (m-n)-boyutlu altmanifolda submersiyon dönüşümünün lifleri denir.

2. 3. 4. Tanım M ve N sırasıyla m ve n boyutlu iki Riemann manifold, $\pi: M \to N$ ye bir submersiyon olsun. Herhangi bir $u \in M$ için M deki $\mathcal{V}$ ve $\mathcal{H}$ distribüsyonunu

$$\mathcal{V}_u = \mathcal{V}_u(\pi) = çek\pi_{*u} = \{U \in T_uM : \pi_{*u}(U) = 0\} \subset T_uM \tag{2.26}$$

ve

$$\mathcal{H}_U = \mathcal{H}_U(\pi) = \mathcal{V}_u{}^{\perp} \subset T_U M \tag{2.27}$$

verilsin. $\mathcal{V}_u$ uzayına π nin u noktasındaki *dikey uzayı* denir. M deki g metriğine göre $\mathcal{V}_u$ dikey uzayının dik tümleyeni olan $\mathcal{H}_u$ uzayına ise π nin u noktasındaki *yatay uzayı* denir. Böylece M Riemann manifoldu $\forall u \in M$ için

$$T_u M = \mathcal{V}_u \oplus \mathcal{H}_U = \mathcal{V}_u \oplus \mathcal{V}_u{}^{\perp} \tag{2.28}$$

ortogonal ayrışımına sahiptir.

$$\mathcal{V}_u = çek\pi_{*u} \tag{2.29}$$

ile tanımlanır ve $\mathcal{V}_u$' ya submersiyonun dikey distribüsyonu denir.

$$\mathcal{H}_U = \mathcal{V}_u{}^{\perp} \tag{2.30}$$

şeklinde tanımlanan distribüsyona ise submersiyonun yatay distribüsyonu denir.

2. 3. 1. Teorem M ve N sırasıyla m ve n boyutlu iki Riemann manifold, π: M → N ye bir submersiyon ve M' nin dikey distribüsyonu $\mathcal{V}$ olsun. Bu durumda $\pi(p) = x$ ve $p \in M$ için her $\mathcal{V}_p$ dikey distribüsyonu $\pi^{-1}(x)$ in tanjant uzayı ile çakışır (Falcitelli ve diğerleri, 2003).

2. 3. 5. Tanım (M, g_M) ve (N, g_N) sırasıyla m ve n boyutlu iki Riemann manifold ve

$$\pi: (M, g_M) \to (N, g_N) \tag{2.31}$$

olmak üzere,

i. $\forall p \in M$ için, π_{*p} türev dönüşümü maksimal ranka sahiptir,

ii. Her $p \in M$ noktasında π_{*p} dönüşümü yatay vektörlerinin uzunluğunu korur, koşulları sağlar ise π bir Riemann submersiyondur. Buradan

$$g_M(v, u) = g_{N\pi_{*p}}(\pi_{*p} v, \pi_{*p} u)\,, \ \ v, u \in \mathcal{H}_p \tag{2.32}$$

eşitliği yazılır. $\forall p \in M$ için π_{*P} türev dönüşümünün $\mathcal{H}_p$ yatay uzayından $T_{\pi P}(N)$ üzerine bir izometridir (O' Neill ve diğerleri 1966, 2004).

2. 3. 1. Önerme (M, g_M) ve (N, g_N) sırasıyla m ve n boyutlu iki Riemann manifold ve $\pi: (M, g_M) \rightarrow (N, g_N)$ bir Riemann submersiyonu olmak üzere ∇ ve ∇' sırasıyla M ve N' nin Riemann konneksiyonları ise, M üzerindeki $U,\ V$ temel vektör alanları $U',\ V'$ temel vektör alanlarına π bağlı olsun. Bu durumda,

i. $h[U,\ V]$ temel vektör alanı $[U',\ V']$ vektör alanına π -bağlıdır.

ii. $g(U,\ V) = g'(U'V') \circ \pi$ dir.

iii. $h(\nabla_U V)$ temel vektör alanı ve $\nabla'_{U'} V'$ π -bağlıdır.

iv. Herhangi bir $V \in \mathcal{V}_p$ için $[U, \mathcal{V}]$ dikey vektör alanıdır (Falcitelli ve diğerleri, 2003).

2. 3. 1. Tanım (M, g_M) ve (N, g_N) Riemann manifoldları olsun π: M → N bir Riemann submersiyon ise $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$(\nabla \pi_*)(X, Y) = \nabla_X^N \pi_* Y - \pi_* (\nabla_X^M Y) \tag{2.33}$$

eşitliğine dönüşümün ikinci temel formu denir.

2. 3. 2. Lemma (M, g_M) ve (N, g_N) Riemann manifoldları π: (M, g_M) → (N, g_N) bir Riemann submersiyonu olmak üzere her hangi $X, Y \in \Gamma((çek\pi_*)^{\perp})$ ve $V, W \in \Gamma(çek\pi_*)$ için

$$\nabla_{\mathrm{V}}^M W = T_V W + \widetilde{\nabla}_V W \tag{2.34}$$

$$\nabla_{\mathrm{V}}^M X = T_V X + \mathrm{H}(\nabla_{\mathrm{V}}^M X) \tag{2.35}$$

$$\nabla_X^M V = \mathcal{V}(\nabla_X^M V) + \mathcal{A}_X V \tag{2.36}$$

$$\nabla_X^M Y = \mathcal{A}_X Y + \mathcal{H}(\nabla_X^M Y) \tag{2.37}$$

dır.

2.4. Hemen Hemen Değme Metrik Manifoldlar

2. 4. 1. Tanım M, (2n+1) -boyutlu diferansiyellenebilir manifold, M üzerinde φ, (1,1) tipinde tensör alan, ξ -bir vektör alanı ve η, 1-form olsun. M üzerinde herhangi bir vektör alanı U olmak üzere,

$$\eta(\xi) = 1 \tag{2.38}$$

ve

$$\varphi^2 U = -U + \eta(U)\xi \tag{2.39}$$

özellikleri sağlanıyorsa, (φ, ξ, η) ya M üzerinde hemen hemen değme yapı, bu yapı ile birlikte M manifolduna da hemen hemen değme manifold denir (Yano ve Kon, 1984).

2. 4. 2. Tanım (M, φ, ξ, η) hemen hemen değme manifold olsun. Bu durumda

i. $\varphi\xi = 0$

ii. $\eta(\varphi U) = 0$ (2.40)

iii. $rank\varphi = 2n$

eşitlikleri yazılabilir (Yano ve Kon, 1984).

2. 4. 3. Tanım (M, φ, ξ, η) hemen hemen değme manifold olsun. M üzerinde bir g Riemann metriği

$$\eta(U) = g(U, \xi) \tag{2.41}$$

ve

$$g(\varphi U, \varphi V) = g(U, V) - \eta(U)\eta(V) \tag{2.42}$$

eşitliği sağlanıyor ise (g, φ, ξ, η) yapısına hemen hemen değme metrik yapı, (g, φ, ξ, η) yapısı ile M' ye de hemen hemen metrik manifold denir (Yano ve Kon, 1984).

2. 4. 4. Tanım $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen değme metrik manifold olsun. Bu durumda

$$\phi(\mathrm{U}, \mathrm{V}) = g(\mathrm{U}, \varphi V) \tag{2.43}$$

olarak tanımlanan ϕ dönüşümüne hemen hemen değme manifoldun 2-formu denir (Yano ve Kon, 1984).

2. 4. 5. Tanım $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen değme metrik manifold olsun. φ nin Nijenhuis tensör alanı $[\varphi, \varphi]$ olmak üzere,

$$[\varphi, \varphi] + 2d\eta \otimes \xi = 0 \tag{2.44}$$

ise hemen hemen değme manifolda normal denir. M, hemen hemen değme metrik manifold normal ise M' ye değme normal metrik manifold denir (Yano ve Kon, 1984).

2. 4. 6. Tanım $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen değme manifold olsun. Eğer M hemen hemen değme manifoldu normal η, 1-form kapalı $(d\eta = 0)$ ve

$$\mathrm{d}\phi = 2\eta \wedge \phi \tag{2.45}$$

ise hemen hemen değme manifolda Kenmotsu manifold denir (Kenmotsu, 1972).

2. 4. 1. Örnek $(2n + 1)$-boyutlu

$$M = \{(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z) \in \mathbb{R}^{2n+1} : z \neq 0\} \tag{2.46}$$

diferansiyellenebilir manifolduna göre $1 \leq i \leq n$ için

$$X_i = e^{-z} \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad Y_i = e^{-z} \frac{\partial}{\partial y_i}, \quad \xi = \frac{\partial}{\partial z} \tag{2.47}$$

olmak üzere $\{X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n, \xi\}$ vektör alanları M nin her noktasında lineer bağımsızdır. g Riemann metriği,

$$g = e^{2z} \sum_{i=1}^{n} (\mathrm{dx}_i \otimes \mathrm{dx}_i + \mathrm{dy}_i \otimes \mathrm{dy}_i) + \eta \otimes \eta \tag{2.48}$$

şeklinde tanımlanırsa $\{X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n, \xi\}$ bir ortonormal baz olur.

$$\eta(X) = g(X,\xi) \tag{2.49}$$

dir. $1 \leq i \leq n$ olmak üzere (1, 1) -tipinde φ tensör alanı

$$\varphi(Xi) = Yi, \varphi(Yi) = -Xi, \varphi(\xi) = 0 \tag{2.50}$$

olduğundan, o halde

$$\eta(\xi) = 1, \varphi^2 X = -X + \eta(X)\xi \tag{2.51}$$

ve

$$g(\varphi X, \varphi Y) = g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y) \tag{2.52}$$

olur. Buna göre $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen değme manifolddur. Böylece Φ temel 2 -formu

$$\Phi\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial y_i}\right) = -ne^{2z} \tag{2.53}$$

veya

$$\Phi = -ne^{2z} \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dy_i \tag{2.54}$$

olur. Diferansiyel alınırsa

$$d\Phi = -2ne^{2z} dz \wedge \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dy_i \tag{2.55}$$

$$= -2dz \wedge \Phi$$

elde edilir. Bu durumda $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen Kenmotsu manifolddur.

2. 4. 1. Teorem $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen değme manifold olsun, M hemen hemen değme manifoldunun bir Kenmotsu manifoldu olması için gerek ve yeter şart

$$(\nabla_U^M \varphi)V = g(\varphi U, V)\xi - \eta(V)\varphi U \tag{2.56}$$

olmasıdır (Kenmotsu, 1972).

2. 4. 1. *Sonuç* $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir Kenmotsu manifoldu olsun. Bu takdirde,

$$\nabla_u^M \xi = -\varphi^2 U \tag{2.57}$$

dır.

3. HEMİ-SLANT $\xi^{\perp}$−RİEMANN SUBMERSİYONLAR

Bu bölümde hemi-slant $\xi^{\perp}$−Riemann submersiyon tanımlanmış ve bir Kenmotsu manifoldunun hemi-slant altmanifoldunun hemen hemen değme manifoldlarında tanımlı submersiyonları için gerekli temel bilgiler verilmiştir. Ayrıca daha anlaşılır olması için örneklerle desteklenmiştir.

3. 1. Tanım (M,φ,ξ,η,g_M) bir Kenmotsu manifold ve (N,g_N) bir Riemann manifold olsun. π: M $\longrightarrow$ N ye bir Riemann submersiyon ve ξ, $çek\pi_*$' a normal olsun. Bu durumda $D_{\perp}$ ve D_{θ} iki tamamlayıcı distribüsyon olmak üzere

$$ çek\pi_* = D_{\perp} \oplus D_{\theta} \tag{3.1}$$

şeklinde yazılabilir ise π Riemann submersiyonuna hemi-slant $\xi^{\perp}$−Riemann submersiyon denir. Burada $D_{\perp}$ anti-invaryant ve D_{θ} slant distribüsyondur.

Bu durumda θ açısı hemi-slant $\xi^{\perp}$−Riemann submersiyonun hemi-slant açısı olarak adlandırırlır.

Eğer $\theta \neq 0, \frac{\pi}{2}$ ise, bu durumda submersiyona düzgün hemi-slant $\xi^{\perp}$ −Riemann submersiyon denir.

Şimdi, bu çalışmada sunulan yöntemin etkili olduğunu göstermek ve Kenmotsu manifoldlarda hemi-slant $\xi^{\perp}$ −Riemann submersiyon varlığını garanti altına almak için bazı uygun örnekler verelim.

Kabul edelim ki, $(\mathbb{R}^{2n+1}\ ,\pi,\eta,\xi,,g_{\mathbb{R}^{2n+1}})$ üzerinde ki Kenmotsu yapı

$$ \eta = dz \quad \text{ve} \quad \xi = 2\,\partial z \tag{3.2}$$

$$ g = \eta \otimes \eta + e^{-2z}\textstyle\sum_{i=1}^{n}(dx^i \otimes dx^i + dy^i \otimes dy^i) \tag{3.3}$$

$$ \varphi(\textstyle\sum_{i=1}^{n}\left(X_i\frac{\partial}{\partial x^i} + Y_i\frac{\partial}{\partial y^i}\right) + Z\frac{\partial}{\partial z}) = \sum_{i=1}^{n}(Y_i\frac{\partial}{\partial x^i} - X_i\frac{\partial}{\partial y^i}) + \sum_{i=1}^{n} Y_i y^i\frac{\partial}{\partial z} \tag{3.4}$$

şeklindedir. Bu yapı için φ -bazı

$$ \left\{\varepsilon_1 = e^z\frac{\partial}{\partial x^1},\ldots.,\varepsilon_n = e^z\frac{\partial}{\partial x^n},\varepsilon_{n+1} = e^z\frac{\partial}{\partial y^1},\ldots.,\varepsilon_{2n} = e^z\frac{\partial}{\partial y^n},\varepsilon_{2n+1} = \frac{\partial}{\partial z}\right\} \tag{3.5}$$

şeklinde verilebilir.

3. 1. Örnek Bir Kenmotsu manifolddan bir Riemann manifold üzerine tanımlanan her anti-invariant $\xi^{\perp}-$Riemann submersiyon, $D_{\theta} = \{0\}$ olacak şekilde bir hemi-slant $\xi^{\perp}-$Riemannian submersiyondur.

3. 2. Örnek Bir Kenmotsu manifoldundan bir Riemann manifolduna tanımlı her slant $\xi^{\perp}$-Riemann submersiyonu, $D_{\perp} = \{0\}$ olacak şekilde bir hemi-slant $\xi^{\perp}$-Riemann submersiyonudur.

3. 3. Örnek π aşağıda ki şekilde tanımlıyacağımız bir submersiyon olsun,

$$\pi: \quad (R^9, g_{R^9}) \quad \rightarrow \quad (R^5, g_{R^5}) \tag{3.6}$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4, z) \qquad (x_1 + y_2, x_2 + y_1, \sin\gamma x_3 - \cos\gamma x_4, y_4, z)$$

$\gamma \in \left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ dir. Buradan

$$çek\pi_* = Sp\{V_1 = -\varepsilon_1 + \varepsilon_6, V_2 = -\varepsilon_2 + \varepsilon_5, V_3 = -\cos\ \gamma\, \varepsilon_3 - \sin\ \gamma\, \varepsilon_4,\ V_4 = \varepsilon_7\} \tag{3.7}$$

olur. Ayrıca

$$(çek\pi_*)^{\perp} = Sp\{W_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_6, W_2 = \varepsilon_2 + \varepsilon_5, W_3 = \sin\ \gamma\, \varepsilon_3 - \cos\ \gamma\, \varepsilon_4,$$

$$W_4 = \varepsilon_8, W_5 = \varepsilon_9\} \tag{3.8}$$

olur. Buradan

$$\varphi V_1 = \varphi(-\varepsilon_1 + \varepsilon_6) = \varepsilon_2 + \varepsilon_5 = W_2 \tag{3.9}$$

$$\varphi V_2 = \varphi(-\varepsilon_2 + \varepsilon_5) = \varepsilon_1 + \varepsilon_6 = W_1 \tag{3.10}$$

ve

$$\varphi V_3 = \varphi(-\cos\ \gamma\, \varepsilon_3 - \sin\ \gamma\, \varepsilon_4) = \cos\ \gamma\, \varepsilon_7 + \sin\ \gamma\, \varepsilon_8 \tag{3.11}$$

$$\varphi V_4 = \varphi(\varepsilon_7) = \varepsilon_3 \tag{3.12}$$

olur. Bu nedenle $\varphi V_1 = W_2$, $\varphi V_2 = W_1$ dır. $g(\varphi V_3, V_4) = \cos\gamma$ ve $g(\varphi V_4, V_3) = \cos\gamma$ olacağından $\cos\theta = \cos\gamma$ olur. Ayrıca $\varphi D_{\perp} \subset (çek\pi_*)^{\perp}$ için $D_{\perp} = sp\{V_1, V_2\}$ ve $\theta = \gamma$ için $D_{\theta} = sp\{V_3, V_4\}$ seçilirse ozaman

$$çek\pi_* = D_{\perp} \oplus D_{\theta} \tag{3.13}$$

bulunur. Bu nedenle π, bir hemi-slant $\xi^{\perp}$-submersiyondur. Şimdi horizontal vektör boylarının korunduğunu gösterelim.

$$g_{R^9}(\pi_* W_1, \pi_* W_1) = g_{R^5}(W_1, W_1),\ g_{R^9}(\pi_* W_2, \pi_* W_2) = g_{R^5}(W_2, W_2),$$

$$g_{R^9}(\pi_* W_3, \pi_* W_3) = g_{R^5}(W_3, W_3),\ g_{R^9}(\pi_* W_4, \pi_* W_4) = g_{R^5}(W_4, W_4),$$

$$g_{R^9}(\pi_* W_5, \pi_* W_5) = g_{R^5}(W_5, W_5) \tag{3.14}$$

olur. Buradan $i = 1, \dots, 5$ olmak üzere

$$g_{R^9}(W_i, W_i) = g_{R^5}(\varphi W_i, \varphi W_i) \tag{3.15}$$

bulunur. Dolayısıyla horizantal vektörün boyu korunmuş olur. Buradan π bir hemi-slant $\xi^{\perp}$ -Riemann submersiyondur.

3. 4. Örnek π aşağıda ki şekilde tanımlıyacağımız bir submersiyon olsun,

$$\pi: \quad (R^9, g_{R^9}) \quad \rightarrow \quad (R^5, g_{R^5}) \tag{3.16}$$

$$(x_1, \dots, y_1, \dots, z) \qquad (x_1 + y_2, x_2 + y_1, x_3 + x_4, y_3 + y_4, z)$$

$$çek\pi_* = Sp\{V_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_6, V_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_5, V_3 = -\varepsilon_3 + \varepsilon_4, V_4 = \varepsilon_7 + \varepsilon_8\} \tag{3.17}$$

ve

$$(çek\pi_*)^{\perp} = Sp\{W_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_6, W_2 = \varepsilon_2 + \varepsilon_5, W_3 = \varepsilon_3 + \varepsilon_4, W_4 = -\varepsilon_7 + \varepsilon_8, W_5 = \varepsilon_9\} \tag{3.18}$$

buradan

$$\varphi V_1 = -\varepsilon_2 - \varepsilon_5 = -W_2 \tag{3.19}$$

$$\varphi V_2 = -\varepsilon_1 - \varepsilon_6 = -W_1 \tag{3.20}$$

ve

$$\varphi V_3 = \varepsilon_7 - \varepsilon_8 \quad (3.21)$$

$$\varphi V_4 = -\varepsilon_3 + \varepsilon_4 \quad (3.22)$$

bulunur. Ayrıca

$\varphi D_{\perp} \subset (çek\pi_*)^{\perp}$ için $D_{\perp} = sp\{V_1, V_2\}$ ve $\theta = \frac{\pi}{2}$ için $D_{\theta} = sp\{V_3, V_4\}$ olarak alınırsa o halde, $çek\pi_* = D_{\perp} \oplus D_{\theta}$ bulunur.Diğer taraftan $i = 1, \dots ,5$ olmak üzere

$$g_{R^9}(W_i, W_i) = g_{R^5}(\varphi W_i, \varphi W_i) \quad (3.23)$$

şeklinder. O halde π bir hemi-slant $\xi^{\perp}$-Riemann submersiyondur.

3. 5. Örnek π aşağıda ki şekilde tanımlayacağımız bir submersiyon olsun,

$$\begin{array}{llll} \pi: & (R^7, g_{R^7}) & \rightarrow & (R^4, g_{R^4}) \\ & (x_1, \dots, y_1, \dots, z) & & (x_1 + y_1, -\cos\alpha x_2 + \sin\alpha y_3, \cos\beta x_3 - \sin\beta y_2, z) \end{array} \quad (3.24)$$

olmak üzere

$$çek\pi_* = Sp\{V_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_4, V_2 = \cos\alpha\, \varepsilon_2 - \sin\alpha\, \varepsilon_6, V_3 = \sin\beta\, \varepsilon_3 - \cos\beta\, \varepsilon_5\} \quad (3.25)$$

ve

$$(çek\pi_*)^{\perp} = Sp\{W_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_4, W_2 = \sin\alpha\, \varepsilon_6 - \cos\alpha\, \varepsilon_2, W_3 = \cos\beta\, \varepsilon_3 - \sin\beta\, \varepsilon_5,$$

$$W_4 = \varepsilon_7\} \quad (3.26)$$

buradan

$$\varphi V_1 = W_1 \quad (3.27)$$

$$\varphi V_2 = -\sin\alpha\, \varepsilon_2 - \cos\alpha\, \varepsilon_6 \quad (3.28)$$

ve

$$\varphi V_3 = -\cos\beta\, \varepsilon_3 - \sin\beta\, \varepsilon_5 \tag{3.29}$$

bulunur. Ayrıca $\varphi D_\perp \subset (\text{ç}ek\pi_*)^\perp$ için $D_\perp = sp\{V_1\}$ ve $\theta = \alpha + \beta$ için $D_\theta = sp\{V_2, V_3\}$ olarak alınırsa ozaman $\text{ç}ek\pi_* = D_\perp \oplus D_\theta$ bulunur.

O halde π submersiyonu bir hemi-slant $\xi^\perp$ -Riemann submersiyondur.

3. 1. Teorem π, bir Kenmotsu manifoldu $(M, \varphi, \xi, \eta, g_M)$ üzerinden bir Rieman manifoldu (N, g_N)' ye yapılan bir hemi-slant $\xi^\perp$ −Riemann submersiyonu olsun. O zaman,

$U \in \Gamma(\text{ç}ek\pi_*)$ için şunu yazarız

$$U = PU + QU \tag{3.30}$$

Burada, $PU \in \Gamma(D_\perp)$ $ve\ QU \in \Gamma(D_\theta)$ dır.

O halde, $Z \in \Gamma(\mathrm{TM})$ için şunu elde ederiz

$$Z = \mathcal{V}Z + \mathcal{H}Z \tag{3.31}$$

Burada, $\mathcal{V}Z \in \Gamma(\text{ç}ek\pi_*)$ ve $\mathcal{H}Z \in \Gamma(\text{ç}ek\pi_*)^\perp$ dir.

$\varphi D_\perp$' nin $(\text{ç}ek\pi_*)^\perp$' deki tamamlayıcı distribüsyonu μ ile gösterirsek. o zaman şunu elde ederiz

$$(\text{ç}ek\pi_*)^\perp = \varphi D_\perp \oplus \mu \tag{3.32}$$

Burada, $\varphi\mu \subset \mu$ bu nedenle μ, ξ' yi içerir. Şimdi ise, $V \in \Gamma(\text{ç}ek\pi_*)$ için şunu yazarız

$$\varphi V = \rho V + \omega V \tag{3.33}$$

Burada, ρV ve ωV, sırasıyla φV ' nin dikey ve yatay bileşenleridir. Ayrıca, $X \in \Gamma(\text{ç}ek\pi_*)^\perp$ için şunu elde ederiz

$$\varphi X = BX + CX \tag{3.34}$$

Burada, BX ve , sırasıyla φX ' in dikey ve yatay bileşenleridir. O zaman, yatay distribüsyon $(\text{ç}ek\pi_*)^\perp$ şu şekilde parçalanır

$$(\text{ç}ek\pi_*)^\perp = \varphi D_\perp \oplus \mu \tag{3.35}$$

Burada μ, $D_\perp$' nin ortogonal tamamlayıcı dağılımıdır. Ayrıca $(çek\pi_*)^\perp$' nin φ' ye göre invaryant dağılımıdır hem de ξ' yi içerir. O zaman, (2.2), (2.3), (3.1) ve (3.2) kullanılarak şunu elde ederiz

$$(\nabla_V^M \rho)W = BT_V W - T_{V\omega} W \tag{3.36}$$

ve

$$(\nabla_V^M \omega)W = CT_V W - T_{V\rho} W \tag{3.37}$$

dır. $V, W \in \Gamma(çek\pi_*)$ için, burada

$$(\nabla_V^M \rho)W = \widehat{\nabla}_{V\rho} W - \rho \widehat{\nabla}_V W \tag{3.38}$$

ve

$$(\nabla_V^M \omega)W = \mathcal{H}\nabla_V^M \omega W - \omega \widehat{\nabla}_V W \tag{3.39}$$

dır.

3. 2. Teorem $\pi: (M, \varphi, \eta, \xi, g_M) \to (N, g_N)$ bir hemi-slant $\xi^\perp$-Riemann submersiyon' u olsun, burada $(M, \varphi, \eta, \xi, g_M)$ bir Kenmotsu manifold' u ve (N, g_N) bir Riemann manifolddur. Bu durumda

$$\rho^2 W = cos^2\theta W, W \in \Gamma(D_\theta) \tag{3.40}$$

şeklindedir. Burada θ, $çek\pi_*$ ‘ nin hemi-slant açısını ifade etmektedir.

3. 1. Lemma $\pi: M \to N$ ye olmak üzere, bir Kenmotsu manifold' u olan $(M, \varphi, \eta, \xi, g_M)$' den, bir Riemann manifold' u olan (N, g_N)' ye bir hemi-slant $\xi^\perp$-Riemann submersiyon' u olsun. O halde her $U, V \in \Gamma(çek\pi_*)$ için

$$g_M(\rho U, \rho V) = cos^2\theta g_M(U, V) \tag{3.41}$$

$$g_M(\omega U, \omega V) = sin^2\theta g_M(U, V) \tag{3.42}$$

şeklindedir.

4.DİSTRİBÜSYONLARIN GEOMETRİSİ

Bu bölümde hemi-slant tanımından elde ettiğimiz distribüsyonun geometrisine, yani $D_{\perp}$ve D_{θ} distribüsyonlarının integrallenebilir olması, paralel olması ve total jeodezik olması durumları için gerek ve yeter şartlarına bakacağız.

4. 1. Teorem π, bir Kenmotsu manifoldu $(M, \varphi, \eta, \xi, g_M)$ ile Riemann manifoldu (N, g_N) arasında bir hemi-slant $\xi^{\perp}$-Riemann submersiyon olsun. O zaman, $D_{\perp}$ distribüsyonunun integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart, her hangi bir $U, V \in \Gamma(D_{\perp})$ ve $Z \in \Gamma(D_{\theta})$ için

$$g_M(T_U\varphi V - T_V\varphi U, \rho Z) = g_N\big((\nabla_{\pi_*})(V, \varphi U) - (\nabla_{\pi_*})(U, \varphi V), \pi_*(\omega Z)\big) \quad (4.1)$$

olmasıdır.

İspat. $\forall\, U, V \in \Gamma(D_{\perp}), Z \in \Gamma(D_{\theta})$ için

$$g_M([U, V], Z) = g_M(\nabla_U V, Z) - g_M(\nabla_V U, Z) \quad (4.2)$$

ise, (2.42) kullanılırsa

$$g_M([U, V], Z) = g_M(\varphi\nabla_U V, \varphi Z) + \eta(\nabla_U V)\eta(Z)$$

$$-g_M(\varphi\nabla_V U, \varphi Z) - \eta(\nabla_V U)\eta(Z)$$

veya

$$g_M([U, V], Z) = g_M(\varphi\nabla_U V, \varphi Z) - g_M(\varphi\nabla_V U, \varphi Z) \quad (4.3)$$

bulunur. Buradan

$$(\nabla_U\varphi)V = \nabla_U\varphi V - \varphi\nabla_U V \quad (4.4)$$

eşitliğinden

$$g_M([U, V], Z) = g_M(\nabla_U\varphi V - (\nabla_U\varphi)V, \varphi Z) - g_M(\nabla_V\varphi U - (\nabla_V\varphi)U, \varphi z) \quad (4.5)$$

elde edilir. (2.56) deki eşitliği kullanılırsa

$$g_M([U,V],Z) = g_M(\nabla_{\mathrm{U}}\varphi V - g_M(\varphi U,V)\xi - \eta(V)\varphi U,\varphi Z)$$

$$-g_M(\nabla_{\mathrm{V}}\varphi U - g_M(\varphi V,U)\xi - \eta(U)\varphi V,\varphi Z) \tag{4.6}$$

ve

$$g_M([U,V],Z) = g_M(\nabla_{\mathrm{U}}\varphi V,\varphi Z) - g_M(\varphi U,V)g_M(\xi,\varphi Z)$$

$$-g_M(\nabla_{\mathrm{V}}\varphi U,\varphi Z) - g_M(\varphi V,U)g_M(\xi,\varphi Z) \tag{4.7}$$

veya

$$g_M([U,V],Z) = g_M(\nabla_{\mathrm{U}}\varphi V,\varphi Z) + g_M(\varphi U,V)g_M(\varphi\xi,Z)$$

$$-g_M(\nabla_{\mathrm{V}}\varphi U,\varphi Z) + g_M(\varphi V,U)g_M(\varphi\xi,Z) \tag{4.8}$$

olur. Böylelikle

$$g_M([U,V],Z) = g_M(\nabla_{\mathrm{U}}\varphi V,\varphi Z) - g_M(\nabla_{\mathrm{V}}\varphi U,\varphi Z) \tag{4.9}$$

yazılabilir. Buradan (2.35) eşitliği kullanılırsa

$$g_M([U,V],Z) = g_M(T_U\varphi V + \mathcal{H}(\nabla_U\varphi V),\varphi Z) - g_M(T_V\varphi U + \mathcal{H}(\nabla_{\mathrm{V}}\varphi U),\varphi Z) \tag{4.10}$$

veya

$$g_M([U,V],Z) = g_M(T_U\varphi V - T_V\varphi U,\varphi Z) + g_M(\mathcal{H}(\nabla_{\mathrm{U}}\varphi V) - \mathcal{H}(\nabla_{\mathrm{V}}\varphi U),\varphi Z) \tag{4.11}$$

olur ve burdan (3.33) eşitliğini kullanırsak

$$g_M([U,V],Z) = g_M(T_U\varphi V - T_V\varphi U,\rho Z + \omega Z)$$

$$+ g_M(\mathcal{H}(\nabla_{\mathrm{U}}\varphi V) - \mathcal{H}(\nabla_{\mathrm{V}}\varphi U),\rho Z + \omega Z) \tag{4.12}$$

veya

$$g_M([U,V],Z) = g_M(T_U\varphi V - T_V\varphi U,\rho Z) + g_M(\mathcal{H}(\nabla_{\mathrm{U}}\varphi V) - \mathcal{H}(\nabla_{\mathrm{V}}\varphi U),\omega Z) \tag{4.13}$$

elde edilir. Buradan π Riemann submersiyon olduğundan

$$g_M([U,V],Z) = g_M(T_U\varphi V - T_V\varphi U, \rho Z) + \ g_N(\pi_*(\nabla_{\mathrm{U}}\varphi V) - \ \pi_*(\nabla_{\mathrm{V}}\varphi U), \pi_*(\omega Z) \quad (4.14)$$

olur ve (2.33) eşitliğinden

$$g_M([U,V],Z) = g_M(T_U\varphi V - T_V\varphi U, \rho Z)$$
$$+g_N\left(\left(\nabla_{\pi_*}\right)(U,\varphi V) - \left(\nabla_{\pi_*}\right)(V,\varphi U), \pi_*(\omega Z)\right) \quad (4.15)$$

elde edilir ve böylelikle ispat etmiş oluruz.

4. 2. Teorem π, bir Kenmotsu manifoldu $(M, \varphi, \eta, \xi, g_M)$ ile Riemann manifoldu (N, g_N) arasında bir hemi-slant $\xi^{\perp}$-Riemann submersiyon olsun ve bu submersiyonun bir hemi-slant açısı θ olsun. O zaman, D_θ distribüsyonunun, her hangi Z,W∈ $\Gamma(D_\theta)$ ve U∈ $\Gamma(D_\perp)$ için integrallenebilir olabilmesinin gerek ve yeter şart

$$g_N\left(\left(\nabla_{\pi_*}\right)(Z,\omega W) - \left(\nabla_{\pi_*}\right)(W,\omega Z), \varphi U\right) = \ g_M(T_Z\omega\rho W - T_W\omega\rho Z, U) \quad (4.16)$$

olmasıdır.

İspat. $Z, W \in \Gamma(D_\theta)\ ve\ U \in \Gamma(D_\perp)$ için

$$g_M([Z,W],U) = g_M(\nabla_{\mathrm{Z}}W, U) - g_M(\nabla_{\mathrm{W}}Z, U) \quad (4.17)$$

ise, (2.42) eşitliğinden

$$g_M([Z,W],U) = g_M(\varphi\nabla_{\mathrm{Z}}W, \varphi U) - \eta(\nabla_{\mathrm{Z}}W)\eta(U) \quad (4.18)$$
$$-g_M(\varphi\nabla_{\mathrm{W}}Z, \varphi U) - \ \eta(\nabla_{\mathrm{W}}Z)\eta(U)$$

ve $\eta(U) = 0$ olduğundan

$$g_M([Z,W],U) = g_M(\varphi\nabla_{\mathrm{Z}}W, \varphi U) - g_M(\varphi\nabla_{\mathrm{W}}Z, \varphi U) \quad (4.19)$$

(4.4) ve (2.56) eşitlikleri kullanırsa

$$g_M([Z,W],U) = g_M(\nabla_{\mathrm{Z}}\varphi W, \varphi U) - g_M(\nabla_{\mathrm{W}}\varphi Z, \varphi U) \quad (4.20)$$

olur. Buradan (3.33) den hareketle

$$g_M([Z,W],U) = g_M(\nabla_Z \rho W, \varphi U) + g_M(\nabla_Z \omega W, \varphi U)$$

$$-g_M(\nabla_W \rho Z, \varphi U) - g_M(\nabla_W \omega Z, \varphi U) \quad (4.21)$$

elde edilir. Buradan gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$g_M([Z,W],U) = -g_M(\nabla_Z \varphi\rho W, U) + g_M(\nabla_Z \omega W, \varphi U) + g_M(\nabla_W \varphi\rho Z, U)$$

$$-g_M(\nabla_W \omega Z, \varphi U) \quad (4.22)$$

veya

$$g_M([Z,W],U) = -g_M(\nabla_Z \rho^2 W, U) - g_M(\nabla_Z \omega\rho W, U) + g_M(\nabla_Z \omega W, \varphi U)$$

$$+g_M(\nabla_W \rho^2 Z, U) + g_M(\nabla_W \omega\rho Z, U) - g_M(\nabla_W \omega Z, \varphi U) \quad (4.23)$$

olur. Şimdi (3.40) eşitliği kullanılırsa

$$g_M([Z,W],U) = cos^2\theta g_M(\nabla_Z W, U) - g_M(\nabla_Z \omega\rho W, U) + g_M(\nabla_Z \omega W, \varphi U)$$

$$-cos^2\theta g_M(\nabla_W Z, U) + g_M(\nabla_W \omega\rho Z, U) - g_M(\nabla_W \omega Z, \varphi U) \quad (4.24)$$

veya

$$g_M([Z,W],U) = cos^2\theta g_M([Z,W],U) - g_M(\nabla_Z \omega\rho W, U) + g_M(\nabla_Z \omega W, \varphi U)$$

$$+g_M(\nabla_W \omega\rho Z, U) - g_M(\nabla_W \omega Z, \varphi U) \quad (4.25)$$

elde edilir. O halde

$$sin^2\theta g_M([Z,W],U) = g_M(\nabla_W \omega\rho Z - \nabla_Z \omega\rho W, U) + g_M(\nabla_Z \omega W - \nabla_W \omega Z, \varphi U) \quad (4.26)$$

olur. Daha sonra (2.35) eşitliğini kullanarak

$$sin^2\theta g_M([Z,W],U) = g_M(\mathrm{T}_W \omega\rho Z + \mathcal{H}(\nabla_W \omega\rho Z) - \mathrm{T}_Z \omega\rho W - \mathcal{H}(\nabla_Z \omega\rho W), U)$$

$$+g_M(\mathrm{T}_Z \omega W + \mathcal{H}(\nabla_Z \omega W) - \mathrm{T}_W \omega Z - \mathcal{H}(\nabla_W \omega Z), \varphi U) \quad (4.27)$$

elde edilir. Böylelikle

$$g_M([Z,W],U) = g_M(\mathrm{T_W}\omega\rho Z - \mathrm{T_Z}\omega\rho W, U) + g_M(\mathcal{H}(\nabla_{\mathrm{Z}}\omega W)$$

$$-\mathcal{H}(\nabla_{\mathrm{W}}\omega Z), \varphi U) \tag{4.28}$$

veya

$$g_M([Z,W],U) = g_M(\mathrm{T_W}\omega\rho Z - \mathrm{T_Z}\omega\rho W, U) + g_M(\pi_*(\nabla_{\mathrm{Z}}\omega W)$$

$$-\pi_*(\nabla_{\mathrm{W}}\omega Z), \varphi U) \tag{4.29}$$

buradan (2.33) eşitliğini kullanarak

$$g_M([Z,W],U) = g_M(\mathrm{T_W}\omega\rho Z - \mathrm{T_Z}\omega\rho W, U) + g_M\left(\nabla_{\pi_*}\right)(Z, \omega W)$$

$$-\left(\nabla_{\pi_*}\right)(W, \omega Z), \varphi U) \tag{4.30}$$

sonucuna ulaşırız ve böylece istenen sonuç elde edilmiş olur, ispat etmiş oluruz.

4. 3. Teorem π, bir Kenmotsu manifoldu $(M, \varphi, \eta, \xi, g_M)$ ile Riemann manifoldu (N, g_N) arasında bir hemi-slant $\xi^{\perp}$-Riemann submersiyon olsun. O zaman, $D_{\perp}$ distribusyonunun paralel olması için gerek ve yeter şart

$$g_M\left(\pi_*(\nabla_{\mathrm{u}}V), \pi_*(\omega\rho Z)\right) = g_M(\varphi\nabla_{\mathrm{u}}V, \omega Z) \tag{4.31}$$

ve

$$g_M(T_U\pi V + T_U\omega V, BX) = -g_M\left(\hat{\nabla}\pi V + \hat{\nabla}_U\omega V, CX\right) \tag{4.32}$$

olmasıdır.

İspat. $\forall\, U, V \in \Gamma(D_{\perp}), Z \in \Gamma(D_\theta)$ için (2.42) eşitliğinden

$$g_M(\nabla_{\mathrm{u}}V, Z) = g_M(\varphi\nabla_{\mathrm{u}}V, \varphi Z) + \eta(\nabla_{\mathrm{u}}V)\eta(Z) \tag{4.33}$$

yazılabilir, buradan $(\nabla_{\mathrm{U}}\varphi)V = \nabla_{\mathrm{U}}\varphi V - \varphi\nabla_{\mathrm{U}}V$ eşitliği kullanılırsa

$$g_M(\nabla_{\mathrm{u}}V, Z) = g_M(-(\nabla_{\mathrm{u}}\varphi)V + \nabla_{\mathrm{u}}\varphi V, \varphi Z) \tag{4.34}$$

elde ederiz. Şimdi ise (2.56) eşitliğinden

$$g_M(\nabla_{\mathrm{u}}V,Z) = g_M(-g_M(\varphi U,V)\xi - \eta(V)\varphi U) + \nabla_{\mathrm{u}}\varphi V,\varphi Z) \tag{4.35}$$

veya

$$g_M(\nabla_{\mathrm{u}}V,Z) = g_M(\nabla_{\mathrm{U}}\varphi V,\varphi Z) - g_M(\varphi U,V)g_M(\xi,\varphi Z) \tag{4.36}$$

ve

$$g_M(\nabla_{\mathrm{u}}V,Z) = g_M(\nabla_{\mathrm{U}}\varphi V,\varphi Z) + g_M(\varphi U,V)g_M(\varphi\xi,Z) \tag{4.37}$$

burada $\varphi\xi = 0$ olduğundan

$$g_M(\nabla_{\mathrm{u}}V,Z) = g_M(\nabla_{\mathrm{u}}\varphi V,\varphi Z) \tag{4.38}$$

veya

$$g_M(\nabla_{\mathrm{u}}V,Z) = g_M(\varphi\nabla_{\mathrm{u}}V,\varphi Z) \tag{4.39}$$

olur. Şimdi (3.33) den

$$g_M(\nabla_{\mathrm{u}}V,Z) = g_M(\varphi\nabla_{\mathrm{u}}V,\rho Z + \omega Z) \tag{4.40}$$

veya

$$g_M(\nabla_{\mathrm{u}}V,Z) = -g_M(\nabla_{\mathrm{u}}V,\varphi\rho Z + \varphi\omega Z) \tag{4.41}$$

olup

$$g_M(\nabla_{\mathrm{u}}V,Z) = -g_M(\nabla_{\mathrm{u}}V,\rho^2 Z + \omega\rho Z + \varphi\omega Z) \tag{4.42}$$

elde edilir. Burada (3.40) ve (2.35) eşitliğini kullanırsak

$$g_M(\nabla_{\mathrm{u}}V,Z) = cos^2\theta g_M(\nabla_{\mathrm{u}}V,Z) - g_M(\nabla_{\mathrm{u}}V,\omega\rho Z) + g_M(\varphi\nabla_{\mathrm{u}}V,\omega Z) \tag{4.43}$$

veya

$$g_M(\nabla_{\mathrm{u}}V,Z) = cos^2\theta g_M(\nabla_{\mathrm{u}}V,Z) - g_M(\mathrm{T_U}V + \mathcal{H}(\nabla_{\mathrm{u}}V),\omega\rho Z) + g_M(\varphi\nabla_{\mathrm{u}}V,\omega Z) \tag{4.44}$$

olur ve

$$sin^2\theta g_M(\nabla_{\mathrm{u}}V, Z) = -g_M(\mathcal{H}(\nabla_{\mathrm{u}}V), \omega\rho Z) + g_M(\varphi\nabla_{\mathrm{u}}V, \omega Z)$$

$$= -g_M(\pi_*(\nabla_{\mathrm{u}}V), \pi_*(\omega\rho Z)) + g_M(\varphi\nabla_{\mathrm{u}}V, \omega Z) \qquad (4.45)$$

elde ederiz. Öte yandan $U, V \in \Gamma(D_\perp), X \in \Gamma((\text{çek}\pi_*)^\perp)$ için (2.42) eşitliğini kullanarak

$$g_M(\nabla_{\mathrm{u}}V, X) = g_M(\varphi\nabla_{\mathrm{u}}V, \varphi X) + \eta(\nabla_{\mathrm{u}}V)\eta(X) \qquad (4.46)$$

olur ve daha sonra

$(\nabla_{\mathrm{U}}\varphi)V = \nabla_{\mathrm{U}}\varphi V - \varphi\nabla_{\mathrm{U}}V$ eşitliğini kullanırsak

$$g_M(\nabla_{\mathrm{u}}V, Z) = g_M(-(\nabla_{\mathrm{u}}\varphi)V + \nabla_{\mathrm{u}}\varphi V, \varphi X) \qquad (4.47)$$

elde ederiz. Şimdi (2.56) den

$$g_M(\nabla_{\mathrm{u}}V, Z) = g_M(-g_M(\varphi U, V)\xi - \eta(V)\varphi U) + \nabla_{\mathrm{u}}\varphi V, \varphi X)$$

$$= g_M(\nabla_{\mathrm{u}}\varphi V, \varphi X) \qquad (4.48)$$

olur. Buradan (3.33) ve (3.34) yi kullanarak

$$g_M(\nabla_{\mathrm{u}}V, Z) = g_M(\nabla_{\mathrm{u}}(\rho V + \omega V), BX + CX) \qquad (4.49)$$

ve

$$g_M(\nabla_{\mathrm{u}}V, Z) = g_M(\nabla_{\mathrm{u}}\rho V, BX) + g_M(\nabla_{\mathrm{u}}\rho V, CX) + g_M(\nabla_{\mathrm{u}}\omega V, BX)$$

$$+ g_M(\nabla_{\mathrm{u}}\omega V, CX) \qquad (4.50)$$

elde ederiz. Şimdi ise (2.34) den

$$g_M(\nabla_{\mathrm{u}}V, Z) = g_M(\mathrm{T}_{\mathrm{U}}\rho V, BX) + g_M\big(\widehat{\nabla}\rho V, CX\big) + g_M(\mathrm{T}_{\mathrm{U}}\omega V, BX)$$

$$+ g_M\big(\widehat{\nabla}_U\omega V, CX\big) \qquad (4.51)$$

sonucuna varırız ve böylelikle ispat etmiş oluruz.

4. 4. Teorem π, bir Kenmotsu manifoldu $(M, \varphi, \eta, \xi, g_M)$ ile Riemannian manifoldu (N, g_N) arasında bir hemi-slant $\xi^{\perp}$-Riemannian submersiyon olsun ve bu submersiyonun bir hemi-slant açısı θ olsun. O zaman, D_θ distribusyonunun paralel olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$g_N\big(\pi_*(\omega W), (\nabla\pi_*)(Z, \varphi U)\big) = g_M(\rho W, T_Z\varphi U) \tag{4.52}$$

ve

$$g_N\big((\nabla\pi_*)(\nabla_Z\omega\rho W), \pi_*(X)\big) - g_N\big((\nabla\pi_*)(\nabla_Z\omega W), \pi_*(CX)\big) = -g_M(T_Z\omega W, BX)$$

$$+g_M(\omega W, Z)\eta(X) \tag{4.53}$$

olmasıdır.

İspat. $\forall\, Z, W \in \Gamma(D_\theta)$ *ve* $U \in \Gamma(D_\perp)$ için (2.42) eşitliğinden hareketle

$$g_M(\nabla_Z W, U) \;=\; g_M(\varphi\nabla_Z W, \varphi U) + \eta(\nabla_Z W)\eta(U) \tag{4.54}$$

elde edilir. Şimdi (4.4) ve (2.56) eşitliğini kullanırsak

$$g_M(\nabla_Z W, U) = \; g_M(-(\nabla_Z\varphi)W + \nabla_Z\varphi W, \varphi U) \tag{4.55}$$

$$g_M(\nabla_Z W, U) = \; g_M(-\,g_M(\varphi Z, W)\xi - \eta(W)\varphi Z) + \nabla_Z\varphi W, \varphi U) \tag{4.56}$$

ve

$$g_M(\nabla_Z W, U) = \; g_M(\nabla_Z\varphi W, \varphi U) \tag{4.57}$$

olur. Buradan

$$g_M(\nabla_Z W, U) = \; Zg_M(\varphi W, \varphi U) - g_M(\varphi W, \nabla_Z\varphi U) \tag{4.58}$$

bulunur. Daha sonra ise (3.33) ve (2.35) den

$$g_M(\nabla_Z W, U) = -\,g_M(\rho W + \omega W, T_Z\varphi U + \mathcal{H}(\nabla_Z\varphi U)) \tag{4.59}$$

$$g_M(\nabla_Z W, U) = -\,g_M(\rho W, T_Z\varphi U) - g_M(\omega W, \mathcal{H}(\nabla_Z\varphi U)) \tag{4.60}$$

elde edilir. Şimdi π' nin özelliğinden

$$g_M(\nabla_Z W, U) = -\, g_M(\rho W, T_Z \varphi U) + g_M(\pi_*(\omega W), \pi_*(\nabla_Z \varphi U)) \tag{4.61}$$

olur. Buradan (2.33) den hareketle

$$g_M(\nabla_Z W, U) = -\, g_M(\rho W, T_Z \varphi U) + g_M\big(\pi_*(\omega W), (\nabla \pi_*)(\mathrm{Z}, \varphi U)\big) \tag{4.62}$$

olur. Öte yandan $Z, W \in \Gamma(D_\theta)$, $X \in \Gamma((çek\pi_*)^{\perp})$ için (2.42) eşitliğini kullanarak

$$g_M(\nabla_Z W, X) = g_M(\varphi \nabla_Z W, \varphi X) + \eta(\nabla_Z W)\eta(X) \tag{4.63}$$

olur. Şimdi (2.56) ve (4.4) eşitliklerinden

$$g_M(\nabla_Z W, U) = g_M(-(\nabla_Z \varphi)W + \nabla_Z \varphi W, \varphi X) + g_M(\nabla_Z W, \xi)\, \eta(X) \tag{4.64}$$

veya

$$g_M(\nabla_Z W, U) = g_M(-\, g_M((\varphi Z, W)\xi - \eta(W)\varphi Z) + \nabla_Z \varphi W, \varphi X)$$

$$+\{Z g_M(W, \xi) - g_M(W, \nabla_Z \xi)\}\, \eta(X) \tag{4.65}$$

ve

$$g_M(\nabla_Z W, U) = g_M(\nabla_Z \varphi W, \varphi X) + g_M(W, \varphi^2 Z)\eta(X) \tag{4.66}$$

bulunur. Şimdi (3.33) den

$$g_M(\nabla_Z W, U) = g_M(\nabla_Z \rho W, \varphi X) + g_M(\nabla_Z \omega W, \varphi X) + g_M(W, \varphi^2 Z)\, \eta(X)$$

$$= -g_M(\varphi \nabla_Z \rho W, X) + g_M(\nabla_Z \omega W, \varphi X) + g_M(W, \varphi^2 Z)\, \eta(X) \tag{4.67}$$

olur. Ve burada (3.34) eşitliğini de kullanarak

$$g_M(\nabla_Z W, U) = -g_M(\nabla_Z \varphi \rho W, X) + g_M(\mathrm{Z}, \rho W)\eta(X) + g_M(\nabla_Z \omega W, BX + CX)$$

$$+ g_M(W, \varphi^2 Z)\, \eta(X) \tag{4.68}$$

veya

$$g_M(\nabla_Z W, U) = -g_M(\nabla_Z \rho^2 W, X) - g_M(\nabla_Z \omega \rho W, X) + g_M(\mathrm{Z}, \rho W)\eta(X)$$

$$+g_M(\nabla_Z \omega W, BX) + g_M(\nabla_Z \omega W, CX) + g_M(W, \varphi^2 Z)\eta(X) \quad (4.69)$$

elde edilir. Daha sonra (3.40) ve (2.35) eşitliklerini de kullanarak

$$g_M(\nabla_Z W, U) = \cos^2\theta\, g_M(\nabla_Z W, X) - g_M(\mathcal{H}(\nabla_Z \omega\rho W), X) \quad (4.70)$$

$$+g_M(Z, \rho W)\eta(X) + g_M(T_Z \omega W, BX)$$

$$+g_M(\mathcal{H}(\nabla_Z \omega W), CX) + g_M(W, \varphi^2 Z)\,\eta(X)$$

ve

$$\sin^2\theta\, g_M(\nabla_Z W, X) = g_M(\pi_*(\nabla_Z \omega\rho W), \pi_*(X)) + g_M(Z, \rho W)\eta(X) \quad (4.71)$$

$$+g_M(T_Z \omega W, BX) + g_M(\pi_*(\nabla_Z \omega W), \pi_*(CX)) + g_M(W, \varphi^2 Z)\eta(X)$$

elde edilir. Şimdi (2.33) den

$$g_M(\nabla_Z W, U) = g_M\big((\nabla\pi_*(\nabla_Z \omega\rho W), \pi_*(X)\big) + g_M(Z, \rho W)\eta(X) \quad (4.72)$$

$$+g_M(T_Z \omega W, BX) + g_M\big((\nabla\pi_*)(\nabla_Z \omega W), \pi_*(CX)\big) - g_M(W, Z)\eta(X)$$

olur. Böylece istenen sonuç elde edilir ve ispat etmiş oluruz.

4. 5. Teorem π, bir Kenmotsu manifoldu $(M, \varphi, \eta, \xi, g_M)$ ile Riemann manifold (N, g_N) arasında bir hemi-slant $\xi^\perp$-Riemann submersiyon olsun. O zaman, $D_\perp$ distribusyonunun her hangi $U, V \in \Gamma(D_\perp), Z \in \Gamma(D_\theta), X \in \Gamma((çek\pi_*)^\perp)$ için, M üzerinde total jeodezik olmasına gerek ve yeter şart

$$g_N((\nabla\pi_*)(U, \varphi V), \pi_*(\omega Z)) = -g_M(T_U V, \omega\rho Z) \quad (4.73)$$

ve

$$g_M(T_U \varphi V, BX) = g_N((\nabla\pi_*)(U, \varphi V), \pi_*(CX)) \quad (4.74)$$

olmasıdır.

İspat. $\forall\, U, V \in \Gamma(D_\perp), Z \in \Gamma(D_\theta), X \in \Gamma((çek\pi_*)^\perp)\ için$ (2.42) eşitliği kullanılırsa

$$g_M(\nabla_U V, Z) = g_M(\varphi \nabla_U V, \varphi Z) + \eta(\nabla_U V)\eta(Z) \tag{4.75}$$

olur. Şimdi (3.33) den

$$\begin{aligned} g_M(\nabla_U V, Z) &= g_M(\varphi \nabla_U V, \rho Z) + g_M(\varphi \nabla_U V, \omega Z) \\ &= -g_M(\nabla_U V, \varphi\rho Z) + g_M(\nabla_U \varphi V, \omega Z) \end{aligned} \tag{4.76}$$

ve

$$g_M(\nabla_U V, Z) = -g_M(\nabla_U V, \rho^2 Z) - g_M(\nabla_U V, \omega\rho Z) + g_M(\nabla_U \varphi V, \omega Z) \tag{4.77}$$

bulunur. Daha sonra (3.40) ve (2.35) eşitliklerini kullanarak

$$\begin{aligned} g_M(\nabla_U V, Z) &= \cos^2\theta \, g_M(\nabla_U V, Z) - g_M(\mathrm{T}_U V, \omega\rho Z) \\ &\quad + g_M(\mathcal{H}(\nabla_U \varphi V), \omega Z) \end{aligned} \tag{4.78}$$

olur ve

$$\sin^2\theta \, g_M(\nabla_U V, Z) = -g_M(\mathrm{T}_U V, \omega\rho Z) - g_M(\pi_*(\nabla_U \varphi V), \pi_*(\omega Z)) \tag{4.79}$$

elde edilir. Öte yandan (2.42) eşitliğini kullanarak

$$g_M(\nabla_U V, X) = g_M(\varphi \nabla_U V, \varphi X) + \eta(\nabla_U V)\eta(X) \tag{4.80}$$

bulunur. Buradan (3.34), (4.4) ve (2.56) eşitliklerini kullanırsak

$$\begin{aligned} g_M(\nabla_U V, Z) &= g_M(\varphi \nabla_U V, BX) + g_M(\varphi \nabla_U V, CX) \\ &= g_M(\nabla_U \varphi V, BX) + g_M(\nabla_U \varphi V, CX) \end{aligned} \tag{4.81}$$

elde edilir. Daha sonra (2.35) eşitliği ve π‘ nin özelliğinden

$$\begin{aligned} g_M(\nabla_U V, Z) &= g_M(\mathrm{T}_U \varphi V, BX) + g_M(\mathcal{H}(\nabla_U \varphi V), CX) \\ &= g_M(\mathrm{T}_U \varphi V, BX) - g_M(\pi_*(\nabla_U \varphi V), \pi_*(CX)) \end{aligned} \tag{4.82}$$

olur ve ispat tamamlanır.

4. 6. Teorem π, bir Kenmotsu manifoldu $(M, \varphi, \eta, \xi, g_M)$ ile Riemannian manifoldu (N, g_N) arasında bir hemi-slant $\xi^{\perp}$-Riemannian submersiyon olsun ve bu submersiyonun bir hemi-slant açısı θ olsun. O zaman D_θ distribüsyonunun, her hangi $Z, W \in \Gamma(D_\theta)$, $U \in \Gamma(D_\perp)$, $X \in \Gamma((\pi_*)^\perp)$ için total jeodezik olabilmesine gerek ve yeter şart

$$g_N((\nabla\pi_*)(Z, \omega W), \pi_*(\varphi U)) = -g_M(\mathrm{T}_Z\omega\rho W, U) \tag{4.83}$$

ve

$$g_N((\nabla\pi_*)(Z, \omega\rho W), \pi_*(X)) + g_N((\nabla\pi_*)(Z, \omega W), \pi_*(CX)) = g_M(\mathrm{T}_Z\omega W, BX) \tag{4.84}$$

olmasıdır.

İspat. $Z, W \in \Gamma(D_\theta)$, $U \in \Gamma(D_\perp), X \in \Gamma((çek\pi_*)^\perp)$ için (2.42), (4.4) ve (2.56) eşitliklerini kullanarak

$$\begin{aligned} g_M(\nabla_Z W, U) &= g_M(\varphi\nabla_Z W, \varphi U) + \eta(\nabla_Z W)\eta(U) \\ &= g_M(\nabla_Z \varphi W, \varphi U) \end{aligned} \tag{4.85}$$

olur. Buradan (3.33) eşitliğini kullanırsak

$$\begin{aligned} g_M(\nabla_Z W, U) &= g_M(\nabla_Z \rho W, \varphi U) + (\nabla_Z \omega W, \varphi U) \\ &= -g_M(\nabla_Z \varphi\rho W, U) + (\nabla_Z \omega W, \varphi U) \end{aligned} \tag{4.86}$$

ve

$$g_M(\nabla_Z W, U) = -g_M(\nabla_Z \rho^2 W, U) - g_M(\nabla_Z \omega\rho W, U) + g_M(\nabla_Z \omega W, \varphi U) \tag{4.87}$$

olur. Şimdi (3.40) ve (2.35) eşitliklerini kullanırsak

$$\begin{aligned} g_M(\nabla_Z W, U) &= \cos^2\theta\, g_M(\nabla_Z W, U) - g_M(\nabla_Z \omega\rho W, U) + g_M(\nabla_Z \omega W, \varphi U) \\ &= \cos^2\theta\, g_M(\nabla_Z W, U) - g_M(\mathrm{T}_Z\omega\rho W, U) + g_M(\mathcal{H}(\nabla_Z \omega W), \varphi U) \end{aligned} \tag{4.88}$$

elde edilir. Ve

$$\sin^2\theta\, g_M(\nabla_Z W, U) = -g_M(\mathrm{T}_Z\omega\rho W, U) - g_M(\pi_*(\nabla_Z \omega W), \pi_*(\varphi U)) \tag{4.89}$$

olur. Öte yandan (2.42), (4.4) ve (2.56) eşitliklerinden

$$g_M(\nabla_Z W, X) = g_M(\varphi\nabla_Z W, \varphi X) + \eta(\nabla_Z W)\eta(X)$$

$$= g_M(\nabla_Z \varphi W, \varphi X) \tag{4.90}$$

bulunur. Buradan (3.33) ve (3.34) eşitliklerini kullanırsak

$$g_M(\nabla_Z W, U) = g_M(\nabla_Z \rho W, \varphi X) + (\nabla_Z \omega W, \varphi X)$$

$$= -g_M(\nabla_Z \varphi\rho W, X) + (\nabla_Z \omega W, BX) + (\nabla_Z \omega W, CX) \tag{4.91}$$

ve

$$g_M(\nabla_Z W, U) = -g_M(\nabla_Z \rho^2 W, X) - g_M(\nabla_Z \omega\rho W, X) + (\nabla_Z \omega W, BX)$$

$$+(\nabla_Z \omega W, CX) \tag{4.92}$$

olur. Şimdi (3.40) ve (2.35) den

$$g_M(\nabla_Z W, U) = \cos^2\theta\, g_M(\nabla_Z W, X) - g_M(\mathcal{H}(\nabla_Z \omega\rho W), X) + g_M(\mathrm{T}_Z \omega W, BX)$$

$$+g_M(\mathcal{H}(\nabla_Z \omega W), CX) \tag{4.93}$$

ve

$$\sin^2\theta\, g_M(\nabla_Z W, X) = g_M(\pi_*(\nabla_Z \omega\rho W), \pi_*(X)) + g_M(\mathrm{T}_Z \omega W, BX)$$

$$-g_M(\pi_*(\nabla_Z \omega W), \pi_*(CX)) \tag{4.94}$$

elde edilir. Böylelikle ispat etmiş oluruz.

5.SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında Kenmotsu manifoldlardan Riemann manifoldlara hemi slant $\xi^{\perp}$ Riemann submersiyonlarla ilgili teoremler ispatlandı. İlk olarak temel kavramlar ile Kenmotsu manifoldun alt manifoldlarının tanım ve teoremleri incelendi. Devamında bir Kenmotsu manifolddan Riemann manifolda tanımlanan hemi-slant $\xi^{\perp}$ Riemann submersiyon tanımlandı ve daha açıklayıcı olması için örneklerle desteklendi. Sonrasında ise distribüsyonların geometrisi incelendi.

Literatüre ilk defa Türkçe kaynak olarak kazandırılan bu tez çalışmasından hareketle değme manifold tabanlı diğer manifoldların semi-invaryant, semi-slant, pseudo (hemi)slant, bi-slant, generik altmanifoldlarından hemen hemen değme manifoldlara tanımlı submersiyon dönüşümü çalışılabilir.

KAYNAKLAR

Akyol, M. A. (2017). Conformal semi-slant submersions. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 14(7), 1750114.

Akyol, M. A. and Şahin, B. (2019). Conformal slant submersions. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 48(1), 28-44.

Akyol, M. A. and Gündüzalp, Y. (2016). Hemi-slant submersions from almost product Riemannian manifolds. *Gulf Journal of Mathematics*, 4(3), 15-27.

Akyol, A., Sarı, R. and Aksoy, E. (2017). Semi-invariant $\xi^{\perp}$-Riemannian submersions from almost contact metric manifolds. *International Journal of Geometric Methods in Modern Phys*ics, 14(5), 1750074.

Akyol, M. A. and Sarı, R. (2017). On semi-slant $\xi^{\perp}$-Riemannian submersions. *Mediterranean Journal of Mathematics, 14, 234. https://doi.org/10.1007/s00009-017-1035-2.*

Baird, P. and Wood, J. C. (2003). *Harmonic morphisms between Riemannian manifolds*. *London Mathematical Society Monographs*, 29. Oxford University Press, The Clarendon Press. Oxford.

Blair, D. E. (1976). Contact manifold in Riemannain geometry. *Lecture Notes in Mathematics,* 509. Springer-Verlag, Berlin-New York,

Bourguignon, J. P. and Lawson, H. B. (1981). Stability and isolation phenomena for Yang-mills fields. *Communications in Mathematical Phys*ics, 79, 189-230.

Bourguignon, J. P. and Lawson, H. B. (1989). A mathematician's visit to Kaluza-Klein theory. *Rendiconti del Seminario Matematico Universita Politec*nica *Torino*, Special Issue, 143-163.

Cabrerizo, J. L., Carriazo, A., Fernandez, L. M. and Fernandez, M. (2000). Slant submanifolds in Sasakian manifolds. *Glasgow Mathematical Journal*, 42(1), 125-138.

Erken, I. K. and Murathan, C. (2014). On slant Riemannian submersions for cosymplectic manifolds. *Bulletin of the Korean Mathematical Soc*iety 51(6), 1749-1771.

Erken, I. K. and Murathan, C. (2016). Slant Riemannian submersions from Sasakian manifolds. *Arap Journal of Mathematical Sciences*, 22(2), 250-264.

Gray, A. (1967). Pseudo-Riemannian almost product manifolds and submersions. *Journal* of *Mathematics and Mechanics*, *16*, 715-737.

Gündüzalp, Y. (2013). Slant submersions from almost product Riemannian manifolds. *Turkish Journal of Mathematics,* 37, 863-873.

Gündüzalp, Y. (2016). Semi-slant submersions from almost product Riemannian manifolds. *Demonstratio Mathematica,* 49(3), 345-356.

Gündüzalp, Y. and Akyol, M. A. (2018). Conformal slant submersions from cosymplectic manifolds. *Turkish Journal of Mathematics,* 48, 2672-2689.

Hacısalihoğlu, H. H. (1983). *Diferensiyel Geometri*, İnönü Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Yayınları, 2, 24-173.

Ianus, S., Pastore, A. M. and Falcitelli, M. (2004). *Riemannian submersions and related topics,* World Scientific, River Edge, NJ,

Ianus, S. and Visinescu, M. (1987). Kaluza-Klein theory with scalar fields and generalized Hopf manifolds. *Classical and Quantum Gravity,* 4(10), 1317-1325.

Ianus, S. and Visinescu, M. (1991). Space-time compaction and Riemannian submersions. In G. Rassias (Ed.), *The Mathematical Heritage of C. F. Gauss*. World Scientific, River Edge 358-371.

Kon, M. and Yano, K. (1985). *Structures on manifolds* (Vol. 3). World scientific Imai,T. (1972).Notes on semi symmetric metric connections. *Tensor (N.S.),* 24, 293-296.

Lee, J. W. (2013). Anti-invariant $\xi^{\perp}-$Riemannian submersions from almost contact manifolds. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics,* 42(3), 231-241.

Massamba, F., Homti, N. E. and Longwap, S. (2019). On Quasi-Hemi-Slant Riemannian Submersion. *Journal of Advances in Mathematics and Computer Science* 34(1), 1-14.

Mustafa, M. T. (2000). Applications of harmonic morphisms to gravity. *Journal of Mathematical Physics,* 41, 6918-6929.

O'Neill, B. (1966). The fundamental equations of a submersion. *Michigan Mathematical Journal,* 13, 458-469.

Park, K. S. and Prasad, R. (2013). Semi-slant submersions. *Bulletin Korean Mathematical Society,* 50(3), 951-962.

Prasad, R., Shukla, S. S. and Kumar, S. (2019). On Quasi bi-slant submersions. *Mediterranean Journal of Mathematics,* 16, 155. https://doi.org/10.1007/s00009-019-1434-7

Sari, R. and Akyol, M. A. (2019). Hemi-slant $\xi^{\perp}-$Riemannian Submersions. *Filomat,* 34(11), 3747-3758.

Sasaki, S. and Hatakeyama, Y. (1961). On differentiable manifolds with contact metric structure. *Journal of the Mathematical Society of Japan,* 14, 249-271.

Sayar, C., Akyol, M. A. and Prasad, R. (2020). On bi-slant submersions in complex geometry. *International journal of Geometric Methods in Modern Physics,* 17(4), 2050055.

Siddiqi, M. S. and Akyol, M. A. (2019). Anti-invariant $\xi^{\perp}-$Riemannian submersions from almost hyperbolic contact manifolds. *International Electronic Journal of Geometry,* 12(1), 32-42.

Şahin, B. (2011). Semi-invariant Riemannian submersions from almost Hermitian manifolds. *Canadian Mathematical Bulletin*, 56, 173-183.

Şahin, B. (2011). Slant submersions from almost Hermitian manifolds. *Bulletin of the Mathematical Society of Sciences of Romania*, 1, 93-105.

Şahin, B. (2017). *Riemannian submersions, Riemannian maps in Hermitian geometry, and their applications*, Elsevier, Academic Press.

Tastan, H. M., Şahin, B. and Yanan, Ş. (2016). Hemi-slant submersions. *Mediterranean Journal of Mathematics,* 13(4), 2171-2184.

Vilcu, A. D. and Vilcu, G. E. (2015). Statistical manifolds with almost quaternionic structures and quaternionic Kahler-like statistical submersions. *Entropy* 17(9), 6213-6228.

Watson, B. and G, G. (1983). Riemannian submersions and nonlinear gauge field equations of general relativity. In T. Rassias (ed.), *Global Analysis - Analysis on Manifolds, Dedicated to M. Morse.* Teubner-Texte Math., 57, 324-349, Teubner, Leipzig.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı-Soyadı : Hacı Ali YALÇIN

Eğitim Derecesi	Okul/Program	Mezuniyet Yılı
Lisans	Azerbaycan Devlet Pedagoji Üniversitesi Matematik Öğretmenliği	2010

İş Deneyimi/Yıl	Çalıştığı Yer	Görevi
2011-2014	Amasya/Taşova Devlet Okullarında	Ücretli Öğretmen
2014-2015	Kavacık Uğur Dershanesi	Öğretmen
2016-2019	Erbaa Özel Açı Lisesi	Öğretmen
2019-halen	Amasya İl Milli Eğitim Müdürlüğü	Öğretmen

Yabancı Dili

İngilizce,Rusça

Bilimsel Faaliyetler (Yayınlar, Bildiriler, Katıldığı Projeler)

1-) Yalçın, H. A. and Sarı, R. (2024). On the geometry of hemi-slant $\xi^{\perp}$ Riemannian submersions. PCFM 2024 7th International Conference on Physical Chemistry & Functional Materials 16-17 May 2024 Malatya Turgut Özal University MALATYA / TÜRKİYE