



**T.C.
KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**TÜRK ÖĞRENCİLERİN PISA PUANLARININ BAĞIMLILIK
YAPISININ DEMOGRAFİK FAKTÖRLER AÇISINDAN
KOPULA FONKSİYONLARI İLE İNCELENMESİ**

**EBRU TOPRAK
İSTATİSTİK ANABİLİM DALI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**DANIŞMAN
Doç. Dr. Emel KIZILOK KARA**

KIRIKKALE-2025

Ebru TOPRAK tarafından hazırlanan “TÜRK ÖĞRENCİLERİN PISA PUANLARININ BAĞIMLILIK YAPISININ DEMOGRAFİK FAKTÖRLER AÇISINDAN KOPULA FONKSİYONLARI İLE İNCELENMESİ” adlı tez çalışması, aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. Emel KIZILOK KARA

Aktüerya Bilimleri Anabilim Dalı, Kırıkkale
Üniversitesi

İmza:

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

Başkan: Doç. Dr. Sibel AÇIK KEMALOĞLU

İstatistik Anabilim Dalı, Ankara Üniversitesi

İmza:

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

Üye: Prof. Dr. Güvenç ARSLAN

İstatistik Anabilim Dalı, Kırıkkale Üniversitesi

İmza:

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

Tez Savunma Tarihi: 12/02/2025

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

Prof. Dr. Recep ÇALIN

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYANI

Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Ebru TOPRAK

ÖZET

TÜRK ÖĞRENCİLERİN PISA PUANLARININ BAĞIMLILIK YAPISININ DEMOGRAFİK FAKTÖRLER AÇISINDAN KOPULA FONKSİYONLARI İLE İNCELENMESİ

Kırıkkale Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

İstatistik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Doç. Dr. Emel KIZILOK KARA

Şubat 2025, 76 sayfa

PISA, öğrencilerin fen, matematik ve okuma alanlarındaki akademik başarılarını ölçen ve ülkeler arasındaki eğitim düzeylerini karşılaştırmayı amaçlayan uluslararası bir değerlendirme sistemidir. Kopula fonksiyonları ise değişkenler arasındaki bağımlılık ilişkilerini esnek bir şekilde modellemeye olanak tanıyan ve çok değişkenli dağılımların en uygun biçimde elde edilmesini sağlayan istatistiksel araçlardır. Bu çalışmada, 2018 PISA verileri kullanılarak matematik, fen ve okuma puanları arasındaki bağımlılık yapıları, cinsiyet, evdeki eğitim olanakları ve sosyoekonomik düzey değişkenleri açısından kopula fonksiyonları ile analiz edilmiştir. Çalışmadaki analizler üç farklı durum için ele alınmıştır. Birinci durumda genel açıdan, ikinci durumda evdeki eğitim olanaklarına göre, üçüncü durumda ise sosyoekonomik düzey açısından kopula analizi yapılmıştır. Her bir durum için öncelikle, cinsiyet, evdeki eğitim olanakları ve sosyoekonomik düzey değişkenlerine göre PISA puan çiftleri oluşturulmuş ve eliptik ile arşimedyan kopula modelleri kullanılarak bağımlılık yapıları incelenmiştir. En uygun kopula fonksiyonları uyum iyiliği testleri ile belirlenmiş ve seçilen modellere ilişkin kopula parametreleri tahmin edilmiştir. Ayrıca, öğrencilerin ortalama başarı puanlarının üzerinde olma olasılıkları hesaplanarak ortak ve koşullu olasılıklar elde edilmiştir. Bu çalışma, kopula modellerinin eğitim araştırmalarında kullanımına yönelik yeni bir bakış açısı sunmakta ve cinsiyet, evdeki eğitim olanakları ile sosyoekonomik düzey değişkenlerinin PISA performansları üzerindeki etkilerine ilişkin önemli bulgular ortaya koymaktadır.

Anahtar kelimeler: Bağımlılık, kopula, koşullu olasılık, ortak olasılık, PISA.

ABSTRACT

INVESTIGATION OF DEPENDENCE STRUCTURE OF PISA SCORES OF TURKISH STUDENTS WITH REGARDS TO DEMOGRAPHIC FACTORS USING COPULA FUNCTIONS

Kırıkkale University

Institute of Science

Department of Statistic, Master's Thesis

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Emel KIZILOK KARA

Feb 2025, 76 pages

PISA is an international assessment system that measures students' academic achievement in science, maths and reading and aims to compare the educational levels among countries. Copula functions are statistical tools that allow flexible modelling of dependency relationships between variables and provide the most appropriate way to obtain multivariate distributions. In this study, using 2018 PISA data, the dependency structures between mathematics, science and reading scores were analyzed with copula functions in terms of gender, educational opportunities at home and socioeconomic level variables. The analyses in the study are considered for three different cases. In the first case, copula analyses were performed in general terms, in the second case according to educational opportunities at home, and in the third case according to socioeconomic level. For each case, PISA score pairs were created according to gender, educational opportunities at home and socioeconomic level variables and the dependency structures were analyzed by using elliptic and archimedian copula models. The most appropriate copula functions were determined by goodness-of-fit tests and copula parameters for the selected models were estimated. In addition, joint and conditional probabilities were obtained by calculating the probabilities of being above the average achievement scores of the students. This study provides a new perspective on the use of copula models in educational research and reveals important findings on the effects of gender, educational opportunities at home and socioeconomic level variables on PISA performances.

Key Words: Dependency, copula, conditional probability, joint probability, PISA.

TEŞEKKÜR

Bana her konuda katkısı olan, her aradığımda beni candan karşılayan, motive eden, güçlendiren, emeklerinin karşılığını asla ödeyemeyeceğim Değerli Hocam Doç. Dr. Emel KIZILOK KARA. Üzerimdeki tüm emeklerinden dolayı en büyük teşekkür borcum Hocamadır.

Bunun yanında tüm yüksek lisans eğitimim boyunca akademik gelişimime katkı sağlayan Hocalarıma da ayrı ayrı teşekkür etmek isterim.

Üzerimde sonsuz hakları olan annem ve babama tüm kalbimle teşekkür ederim.

Eşim! Yolumu aydınlatan, karanlıklar içinde kaybolmadan yürümemi sağlayan yoldaşım! Varlığına sonsuz teşekkür ederim.

Ruhumun şifası çocuklarım; Ayaz Arın'ım ve Bertuğ'um.

Sizlerin mutluluğuyla...

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	vii
ÇİZELGELER DİZİNİ	viii
ŞEKİLLER DİZİNİ	viii
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ	x
1. GİRİŞ	1
2. KOPULA TEORİSİ	6
2.1. Eliptik ve Arşimedyan Kopulalar	8
2.2. Kopulalar ve Bağımlılık Ölçüleri	11
2.3. Parametre Tahmin Yöntemleri	12
2.3.1. Kendall τ ve Spearman ρ Bağımlılık Ölçülerine Dayalı Par. Tah. Yöntemi	12
2.3.2. Marjinaler için Çıkarım Fonksiyonu Tahmin Yöntemi (IFM)	14
2.3.3. Kanonik En Çok Olabilirlik Tahmin Yöntemi (CMLE)	15
2.3.4. Maksimum Sözde Olabilirlik Tahmin Yöntemi (MPLE)	16
3. KOPULALAR İÇİN UYUM İYİLİĞİ TESTLERİ ve MODEL SEÇİMİ	18
3.1. Uyum İyiliği Testleri	18
3.2. Model Seçimi	20
4. PISA VERİLERİNİN KOPULA FONKSİYONLARIYLA ANALİZİ	23
4.1. PISA Veri Seti ve Modeller.....	23
4.1.1. Birinci Durum: Öğrencilerin Tümü ve Erkek/Kız Öğrenciler için Genel Analiz ...	25
4.1.2. İkinci Durum: Evdeki Eğitim Olanakları Değişkeni için PISA Verilerine Kopula Analizi.....	31
4.1.3. Üçüncü Durum: Sosyoekonomik Düzey Değişkeni için PISA Verilerine Kopula Analizi.....	48
4.1.4. PISA Başarı Puanları için Ortak ve Koşullu Olasılıklar	64
5. SONUÇLAR	69
KAYNAKÇA	71
ÖZGEÇMİŞ	76

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 1. Öğrencilerin tümü ve erkek/kız öğrenciler için model tanımlamaları.	25
Çizelge 2. Öğrencilerin tümü ve erkek/kız öğrenciler için betimsel istatistikler.	25
Çizelge 3. Öğrencilerin tümü ve erkek/kız öğrenciler için korelasyon ve simetriklik test değerleri.	26
Çizelge 4. Öğrencilerin tümü ve erkek/kız öğrenciler için marjinal dağılım uyum iyiliği sonuçları.	27
Çizelge 5. Öğrencilerin tümü ve erkek/kız öğrenciler için en iyi kopula modeli seçimi.	28
Çizelge 6. Öğrencilerin tümü ve erkek/kız öğrenciler için seçilen kopula modellerine yönelik parametre tahmin sonuçları.	29
Çizelge 7. Evdeki eğitim olanakları değişkeni açısından öğrencilerin tümü ve erkek/kız öğrenciler için model tanımlamaları.	31
Çizelge 8. Evdeki eğitim olanakları değişkeni açısından öğrencilerin tümü ve erkek/kız öğrenciler için betimsel istatistikler.	32
Çizelge 9. Evdeki eğitim olanakları değişkeni açısından öğrencilerin tümü ve erkek/kız öğrenciler için korelasyon ve simetriklik test değerleri.	33
Çizelge 10. Evdeki eğitim olanakları değişkeni açısından öğrencilerin tümü için marjinal dağılım uyum iyiliği sonuçları.	34
Çizelge 11. Evdeki eğitim olanakları değişkeni açısından erkek öğrenciler için marjinal dağılım uyum iyiliği sonuçları.	35
Çizelge 12. Evdeki eğitim olanakları değişkeni açısından kız öğrenciler için marjinal dağılım uyum iyiliği sonuçları.	36
Çizelge 13. Evdeki eğitim olanakları değişkeni açısından öğrencilerin tümü için en iyi kopula modeli seçimi.	37
Çizelge 14. Evdeki eğitim olanakları değişkeni açısından erkek öğrenciler için en iyi kopula modeli seçimi.	39
Çizelge 15. Evdeki eğitim olanakları değişkeni açısından kız öğrenciler için en iyi kopula modeli seçimi.	40
Çizelge 16. Evdeki eğitim olanakları değişkeni için seçilen kopula modellerine yönelik parametre tahmin sonuçları.	41
Çizelge 17. Sosyoekonomik düzey değişkeni açısından öğrencilerin tümü ve erkek/kız öğrenciler için model tanımlamaları.	48
Çizelge 18. Sosyoekonomik düzey değişkeni açısından öğrencilerin tümü ve erkek/kız öğrenciler için betimsel istatistikler.	49

Çizelge 19. Sosyoekonomik düzey değişkeni açısından öğrencilerin tümü ve erkek/kız öğrenciler için korelasyon ve simetriklik test değerleri.	50
Çizelge 20. Sosyoekonomik düzey değişkeni açısından öğrencilerin tümü için marjinal dağılım uyum iyiliği sonuçları.	51
Çizelge 21. Sosyoekonomik düzey değişkeni açısından erkek öğrenciler için marjinal dağılım uyum iyiliği sonuçları.	52
Çizelge 22. Sosyoekonomik düzey değişkeni açısından kız öğrenciler için marjinal dağılım uyum iyiliği sonuçları.	53
Çizelge 23. Sosyoekonomik düzey değişkeni açısından öğrencilerin tümü için en iyi kopula modeli seçimi.	54
Çizelge 24. Sosyoekonomik düzey değişkeni açısından erkek öğrenciler için en iyi kopula modeli seçimi.	55
Çizelge 25. Sosyoekonomik düzey değişkeni açısından kız öğrenciler için en iyi kopula modeli seçimi.	57
Çizelge 26. Sosyoekonomik düzey değişkeni için seçilen kopula modellerine yönelik parametre tahmin sonuçları.	58
Çizelge 27. Öğrencilerin tümü ve erkek/kız öğrenciler için seçilen kopula modellerine yönelik ortak ve koşullu olasılıklar.	65
Çizelge 28. Evdeki eğitim olanakları değişkeni için seçilen kopula modellerine yönelik ortak ve koşullu olasılıklar.	66
Çizelge 29. Sosyoekonomik düzey değişkeni için seçilen kopula modellerine yönelik ortak ve koşullu olasılıklar.	67

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1. Farklı Spearman ρ değerleri için eliptik kopulaların saçılım ve kontur grafikleri.....	10
Şekil 2. Farklı Spearman ρ değerleri için arşimedyan kopulaların saçılım ve kontur grafikleri.....	11
Şekil 3. Genel durum için uyan teorik (—, —, —) kopula modelleri ile ampirik (---) kopula modellerinin karşılaştırılması.....	29
Şekil 4. Genel durum için gerçek verilerin seçilen kopula fonksiyonlarına uyumu..	30
Şekil 5. Evdeki eğitim olanakları (Tüm öğrenciler) için uyan teorik (—) kopula modelleri ile ampirik (---) kopula modellerinin karşılaştırılması.	42
Şekil 6. Evdeki eğitim olanakları (Tüm öğrenciler) için gerçek verilerin seçilen kopula fonksiyonlarına uyumunu gösteren grafikler.	43
Şekil 7. Evdeki eğitim olanakları (Erkek öğrenciler) için uyan teorik (—) kopula modelleri ile ampirik (---) kopula modellerinin karşılaştırılması.	44
Şekil 8. Evdeki eğitim olanakları (Erkek öğrenciler) için gerçek verilerin seçilen kopula fonksiyonlarına uyumunu gösteren grafikler.	45
Şekil 9. Evdeki eğitim olanakları (Kız öğrenciler) için uyan teorik (—) kopula modelleri ile ampirik (---) kopula modellerinin karşılaştırılması.	46
Şekil 10. Evdeki eğitim olanakları (Kız öğrenciler) için gerçek verilerin seçilen kopula fonksiyonlarına uyumunu gösteren grafikler.	47
Şekil 11. Sosyoekonomik düzey (Tüm öğrenciler) için uyan teorik (—) kopula modelleri ile ampirik (---) kopula modellerinin karşılaştırılması	59
Şekil 12. Sosyoekonomik düzey (Tüm öğrenciler) için gerçek verilerin seçilen kopula fonksiyonlarına uyumunu gösteren grafikler.	60
Şekil 13. Sosyoekonomik düzey (Erkek öğrenciler) için uyan teorik (—) kopula modelleri ile ampirik (---) kopula modellerinin karşılaştırılması.	61
Şekil 14. Sosyoekonomik düzey (Erkek öğrenciler) için gerçek verilerin seçilen kopula fonksiyonlarına uyumunu gösteren grafikler.	62
Şekil 15. Sosyoekonomik düzey (Kız öğrenciler) için uyan teorik (—) kopula modelleri ile ampirik (---) kopula modellerinin karşılaştırılması.	63
Şekil 16. Sosyoekonomik düzey (Kız öğrenciler) için gerçek verilerin seçilen kopula fonksiyonlarına uyumunu gösteren grafikler.	64

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler Dizini

θ	: Kopula bağımlılık parametresi
τ	: Kendall'ın tau korelasyon katsayısı
ρ	: Spearman'ın rho korelasyon katsayısı
Φ	: Standart normal dağılımın kümülatif dağılım fonksiyonu
Φ^{-1}	: Standart normal dağılımın ters fonksiyonu
t_v^{-1}	: ν serbestlik derecesine sahip t-dağılımının ters fonksiyonu
τ_C	: Kopulaya bağlı Kendall'ın tau korelasyon ölçüsü
ρ_C	: Kopulaya bağlı Spearman'ın rho korelasyon ölçüsü
(α, β)	: Marjinal dağılımların parametreleri
$(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$: Marjinal dağılımların parametre tahminleri
$\hat{\theta}$: Kopula parametre tahmini
$\hat{F}_X(x_i)$: X değişkenlerinin ampirik dağılım fonksiyonları
$\hat{F}_Y(y_i)$: Y değişkenlerinin ampirik dağılım fonksiyonları
D_n	: Kolmogorov- Smirnov test istatistiği
W^2	: Cramer-von Mises test istatistiği
A^2	: Anderson-Darling test istatistiği
\mathcal{L}	: Log olabilirlik değeri
k	: Modeldeki parametre sayısı
n	: Örneklem büyüklüğü
(X, Y)	: Sürekli bir rasgele vektör
$F(x)$: X rasgele değişkeni için marjinal dağılım fonksiyonu
$G(y)$: Y rasgele değişkeni için marjinal dağılım fonksiyonu
$\bar{F}(x)$: X rasgele değişkeni için marjinal yaşam fonksiyonu
$\bar{G}(y)$: Y rasgele değişkeni için marjinal yaşam fonksiyonu
$H(x, y)$: İki boyutlu ortak dağılım fonksiyonu

$\bar{H}(x, y)$: İki boyutlu ortak yaşam fonksiyonu
$C(u, v)$: Kopula fonksiyonu
$\bar{C}(u, v)$: Kopulaya dayalı ortak yaşam fonksiyonu
$\hat{C}(u, v)$: Yaşam kopulası
$\tilde{C}(u, v)$: Dual kopula
$C^*(u, v)$: Ortak kopula
$\bar{C}_v(u)$: V'nin belirli bir değerin üstünde olduğu bilindiğinde U'nun da belirli bir değer üstünde olma olasılığı
$\bar{C}_u(v)$: U'nun belirli bir değerin üstünde olduğu bilindiğinde V'nin de belirli bir değer üstünde olma olasılığı
Par 1	: İki parametrelili marjinal dağılımların birinci parametresi
Par 2	: İki parametrelili marjinal dağılımların ikinci parametresi

Kısaltmalar Dizini

A-D	: Anderson-Darling Testi
AIC	: Akaike Bilgi Kriteri (Akaike Information Criteria)
AMH	: Ali-Mikhail-Haq
BIC	: Bayes Bilgi Kriteri (Bayesian Information Criteria)
CIC	: Kopula Bilgi Kriteri (Copula Information Criteria)
CML	: Kanonik En Çok Olabilirlik (Canonical Maximum Likelihood)
CMLE	: Kanonik En Çok Olabilirlik Tahmini (Canonical Maximum Likelihood Estimation)
CvM	: Cramer von Mises
ECDF	: Ampirik Dağılım Fonksiyonu (Empirical Distribution Function)
IFM	: Marjinaler için Çıkarım Fonksiyonu (Inference Function for Margins)
K-S	: Kolmogorov-Smirnov
LL	: Log-Olabilirlik (Log-Likelihood)
MEB	: Millî Eğitim Bakanlığı
MLE	: En Çok Olabilirlik Tahmini (Maximum Likelihood Estimation)
MPLE	: Sözde En Çok Olabilirlik Tahmini (Maximum Pseudo-Likelihood Estimation)
OECD	: Ekonomik Kalkınma ve İş Birliği Örgütü (Organisation for Economic Cooperation and Development)
PISA	: Uluslararası Öğrenci Değerlendirme Programı (Programme for International Student Assessment)

1. GİRİŞ

PISA uygulamaları 2000 yılından itibaren başlamış olup her üç yılda bir değerlendirmeler gerçekleştirilmektedir. Ülkemiz ilk defa PISA 2003 uygulamasına katılım sağlamıştır. Dünya genelinde 15 yaş grubu öğrencilerin dahil olduğu PISA çalışmalarında öğrencilerin fen okuryazarlığı, matematik okuryazarlığı ve okuma becerileri konularında veri toplanmaktadır. Bunun yanı sıra öğrenci, öğretmen ve okul özelliklerine dair farklı değişkenler açısından da veriler elde edilmektedir. PISA verileri ülkelerin birbiriyle karşılaştırılmaları açısından oldukça güçlü ve güvenilir bulgular ortaya koymakta, ülkelere gelişim alanları için rehberlik edecek bilgiler sunmaktadır (Toprak, 2017). Ülkelerin eğitim alanındaki durumlarını görmek buna bağlı olarak da eksiklerini düzeltmek adına PISA uygulamalarına verdiği önem göz önüne alındığında, son derece kritik olan PISA başarılarının incelenmesi de önemli bir problem durumu olarak karşımıza çıkmaktadır. Bu noktada araştırmanın konusu PISA fen, matematik ve okuma becerileri arasındaki ilişkilerin farklı değişkenler açısından karşılaştırmalı ele alınması olarak belirlenmiştir.

PISA fen, matematik ve okuma başarıları arasındaki bağımlılık yapılarının modellenmesinde, kopula yönteminden yararlanılmıştır. Kopula, finans, ekonomi ve aktüerya bilimi gibi alanlarda çok değişkenli verilerin bağımlılığını modellemek için sıklıkla kullanılan bir olasılıksal modelleme yöntemidir. Kopulalar, ortak dağılımın bağımlılık yapısını marjinal dağılımlardan bağımsız olarak modellemeyi sağlar. Ayrıca marjinallerin normal dağılmama durumunda da değişkenler arasındaki bağımlılık yapısını açıklayabilir.

Kopula modelleri, finansal veri analizi (Kara ve Kemaloğlu, 2016; Kızılok Kara vd. 2022; Patton, 2013), hidroloji (Baykal, 2024; Favre vd., 2004; Genest ve Favre, 2007; Kara ve Yıldız, 2014) ve çevresel verilerin modellenmesi (Bhatti ve Do 2019; Goda 2010; Kara 2017; Kwon ve Yoon 2017; Nguyen-Huy vd., 2019) gibi farklı alanlarda geniş bir uygulama yelpazesi sunarak bağımlılık yapılarının incelenmesine olanak tanımaktadır. Ancak, yapılan araştırmalar sonucunda Türkiye’de PISA verilerinin

kullanılarak yapılan çalışmalar olmasına rağmen başarı puanları arasında bağımlılık yapısını dikkate alarak kopula yöntemi ile modellendiği sınırlı sayıda çalışma tespit edilmiştir (Anıl, 2009; Kasap vd., 2021; Sarier, 2021). Bu konuda yapılmış en güncel çalışma, Pala ve Sağlam (2019) tarafından 2006-2015 PISA verileri için gerçekleştirilmiş ancak demografik özelliklere göre ayrıntılı bir değerlendirmeye yer verilmemiştir.

Mevcut çalışmanın amacı, PISA (2018) verilerini kullanarak matematik, okuma ve fen puanları arasındaki bağımlılık yapılarının cinsiyet, evdeki eğitim olanakları ve sosyoekonomik düzey değişkenlerine göre kopula fonksiyonları aracılığıyla analiz edilmesidir. Her bir demografik grup için en uygun kopula fonksiyonları uyum iyiliği testleri ile belirlenmiştir. Özellikle öğrencilerin ortalama başarı puanlarının üstünde olma olasılıklarına odaklanılarak, bu kopula fonksiyonları aracılığıyla hem ortak hem de koşullu olasılıklar hesaplanmıştır. Güncel verilerin kullanılması ve demografik değişkenlere dayalı bağımlılık yapılarının değerlendirilmesiyle çalışmanın literatüre metodolojik açıdan bir katkı sunması hedeflenmiştir.

Çalışma boyunca eliptik (Normal ve t) ve arşimedyan (Clayton, Frank, Gumbel ve Joe) kopula aileleri kullanılmıştır. Kopula parametrelerinin tahmini için sözde en çok olabilirlik tahmin (Maksimum Pseudo Likelihood Estimation-MPLE) yöntemi tercih edilmiştir. Uyum iyiliği testleri ve model seçimi için Akaike Bilgi Kriteri (AIC), Bayes Bilgi Kriteri (BIC), Log-Olabilirlik Fonksiyonu (LL), ve Cramer von Mises (CvM) değerleri kullanılmıştır. Analizler, Hofert vd. (2024) tarafından yazılmış R yazılımındaki “copula” paketiyle gerçekleştirilmiş ve Cherubini vd. (2004), Joe (2014), Nelsen (2006) ile Embrechts vd. (2003) gibi temel literatür kaynaklarına başvurulmuştur.

Bu çalışmanın bulgularının, PISA sonuçlarına dayalı eğitim politikalarının oluşturulmasında önemli bir kaynak sağlayacağı düşünülmektedir. Demografik değişkenlere göre farklı bağımlılık yapılarını ortaya çıkarmak, eğitimde fırsat eşitliği sağlama çabalarına ve öğrenci başarısına yönelik politikaların şekillendirilmesine katkı sunabilir. Çalışmanın devamında ikinci bölümde kopula, kopulaya göre ortak ve koşullu olasılık tanımlamaları, eliptik ve arşimedyan kopula fonksiyonları, parametre tahminleri ve model seçimi konuları ele alınmıştır. Üçüncü bölümde PISA verisi ve demografik değişkenlere göre oluşturulan modeller tanımlanmıştır. Oluşturulan modellere ilişkin betimsel istatistikler, korelasyon ve simetriklik test sonuçları

verilmiştir. Dördüncü bölümde uyum iyiliği test sonuçlarına göre oluşturulan modeller için seçilen en iyi kopula modelleri ve parametre tahminlerini içeren kopula analiz sonuçları sunulmuştur. Beşinci bölümde bazı ortak ve koşullu olasılıklar hesaplanmıştır. Sonuç bölümü ile çalışma sonlandırılmıştır.

Literatür Taraması:

Latince olan “kopula” kelimesi “bağlantı, bağ, ilişki” anlamlarına gelmekte, herhangi iki şeyi birbirine bağlayan kavram olarak kullanılmaktadır. Matematiksel ve istatistiksel literatürde kopula; çok değişkenli dağılım fonksiyonlarını, onların düzgün dağılıma sahip tek boyutlu marjinal dağılım fonksiyonlarına bağlayan fonksiyonlar olarak ifade edilmektedir. Kopulalar ile ilgili çalışmaların başlangıcı 20. yy’ın ilk yarısına dayanmaktadır. Kopula kavramının günümüze kadar gelişiminde Hoeffding (1940), Frechet (1951), Feron (1956), Sklar (1959), Moore ve Spruill (1975), Schweizer (1991), Embrechts ve diğerleri (2003), Cherubini ve diğerleri (2004), Nelsen (2006), ve Joe (2014) gibi birçok araştırmacının katkısı olmuştur. Kopulalar bugün matematik ve istatistik alanları dışında ekonomi (Özgür, 2022), finans (Yamut, 2018), aktüerya (Gönenç-Erdemir, 2020; Özer Uyar, 2018; Sarıdaş, 2020; Yıldırım Külekci, 2021) ve mühendislik (Avşaroğlu, 2023; Başak, 2024; Değer, 2023; Eşit, 2021; Nelsen, 2006; Bağrıaçık, 2021) alanlarında da kullanılmaktadır.

İstatistik biliminde bağımlı değişkenler arasındaki ilişkileri modellemek için kullanılan bir yöntem olarak kullanılan kopulalar, özellikle çok değişkenli dağılımların modellenmesinde önemli bir rol oynamaktadır. Kopula kavramı ilk olarak Sklar (1959) tarafından ortaya atılmıştır. Sklar Teoremi, marjinal dağılımlar bilindiğinde, değişkenler arasındaki bağımlılığın bir kopula fonksiyonu aracılığıyla ifade edilebileceğini göstermektedir. Bu teori, bağımlı değişkenleri modelleme konusunda istatistikçilerin eline güçlü bir araç sunmuştur. 1970’ler ve 1980’ler boyunca, kopula fonksiyonları finans, sigorta ve risk yönetimi alanlarında uygulanmaya başlanmıştır. Joe ve Xu (1996) ve Nelsen (1999) gibi araştırmacılar, kopulaların teorik temellerini geliştirmiş ve farklı kopula türlerini tanımlamıştır (Joe ve Xu, 1996; Nelsen, 1999.). Özellikle Gaussian ve t-kopula türleri, finansal risk modellemelerinde yaygın olarak kullanılmaktadır (Embrechts, vd., 2002).

2000’lerden itibaren kopula teorisi, finansal krizler ve bağımlılık modelleme bağlamında büyük ilgi görmüştür. Özellikle 2008 küresel finans krizinde kopula modellerinin eksiklikleri gündeme gelmiş ve bu alanda yeni araştırmalar yapılmıştır.

Günümüzde kopula fonksiyonları makine öğrenimi, aktüerya bilimi ve veri madenciliği gibi alanlarda da kullanılmaktadır. Kopula teorisi, bağımlı değişkenler arasındaki ilişkileri modellemekte devrim niteliğinde bir yaklaşım sunmuştur. Sklar'ın öncülüğünü yaptığı bu alan, yıllar içinde gelişerek modern istatistik, finans ve sigorta bilimlerinde vazgeçilmez bir araç haline gelmiştir.

Kopulalar, bağımlılık modellemesi açısından diğer istatistiksel yöntemlerden farklı olarak çeşitli avantajlar sunmaktadır:

- ***Esnek bağımlılık modellemesi:*** Kopulalar, değişkenler arasındaki bağımlılığı herhangi bir marjinal dağılımdan bağımsız olarak modelleyebilmektedir. Bu özellik, farklı dağılımlara sahip değişkenlerin bağımlılık yapısını esnek bir şekilde analiz etmeye olanak tanımaktadır (Nelsen, 2006).
- ***Marjinal dağılımlardan ayrı olarak incelenebilme:*** Sklar'ın Teoremi'ne göre, herhangi bir çok değişkenli dağılım, marjinal dağılımları ve bir kopula fonksiyonu aracılığıyla ayrıştırılabilir (Sklar, 1959). Bu, bağımlılık yapısının doğrudan incelenmesine olanak tanımakta ve çok değişkenli analizleri daha modüler hale getirmektedir. Geleneksel çok değişkenli modelleme yöntemleri, bağımlılık yapısını doğrudan marjinal dağılımlarla ilişkilendirir. Örneğin, çok değişkenli normal dağılım kullanıldığında, tüm değişkenlerin normal dağıldığı varsayılır. Ancak, gerçek hayatta değişkenler farklı dağılımlara sahip olabilir (Örn; biri normal dağılmışken diğeri üstel dağılım gösterebilir). Kopulalar sayesinde her değişkenin marjinal dağılımı istenildiği gibi belirlenebilir ve bağımlılık yapısı, marjinal dağılımlardan bağımsız olarak analiz edilebilir.
- ***Kuyruk bağımlılığını modelleme yeteneği:*** Kopulalar, finans ve sigortacılık uygulamalarında önemli olan aşırı uç olayları modellemede güçlüdür. Örneğin, Gumbel kopulası üst kuyruk bağımlılığını, Clayton kopulası ise alt kuyruk bağımlılığını yakalamada etkilidir (Demarta & McNeil, 2005).
- ***Yüksek boyutlu bağımlılık yapılarında kullanılabilirlik:*** Vine kopulalar gibi yapılandırılmış kopula modelleri, çok boyutlu bağımlılık yapılarının esnek ve hesaplamalı olarak verimli şekilde modellenmesini sağlar (Aas vd., 2009). Bu, özellikle finans ve sigorta gibi alanlarda portföy bağımlılıklarını analiz etmek için büyük bir avantajdır.
- ***Finansal risk ve sigorta modellerinde yaygın kullanım:*** Kopulalar, finansal

risk ölçümlerinde korelasyon yerine daha ayrıntılı bağımlılık modellemesiyle risk yönetimini iyileştirir (Embrechts et al., 2003). Aynı zamanda, sigorta sektöründe hasar bağımlılığını analiz etmek için de kullanılır (Frees ve Valdez, 1998).



2. KOPULA TEORİSİ

Kopula, olasılık teorisinde çok değişkenli dağılımlar arasındaki bağımlılık yapısını modellemek amacıyla kullanılan bir matematiksel araçtır. Diğer taraftan, kopulalar çok değişkenli dağılımların marjinal dağılımlarını bağımsız hale getirerek, ortak ve koşullu olasılıkları hesaplamamıza olanak tanır. Aşağıda X ve Y iki farklı rastgele değişkeni için $P(X \leq x, Y \leq y)$, $P(X > x, Y > y)$ ortak olasılıkları ile $P(X > x|Y > y)$ ve $P(Y > y|X > x)$ koşullu olasılıklarına ilişkin ifadelerin kopula kullanarak nasıl tanımlandığı ve hesaplandığı açıklanmaktadır. Ortak ve koşullu olasılıklar ile ilgili ayrıntılı bilgiler için Joe (2014) ve Nelsen (2006) kaynaklarına bakılabilir.

Kopulaların en büyük avantajı, bağımlılığı modellemek için marjinal dağılımlar hakkında herhangi bir varsayıma ihtiyaç duymamasıdır. Geleneksel korelasyon ölçümlerinin aksine, kopulalar doğrusal olmayan bağımlılıkları da modelleyebilir. Bu özellikleri sayesinde, verilerin normal dağılmadığı veya dağılımın bilinmediği durumlarda bile güvenilir çok değişkenli modeller oluşturmak için kullanılırlar. Ayrıca, kopulalar marjinal dağılımları sabit tutarak bağımlılık yapısını doğru bir şekilde yansıtmaktadırlar. Başka bir ifade ile farklı marjinal dağılımlar kullanılarak aynı bağımlılık yapısını koruma esnekliği sağlamaktadırlar. Bu özellikleri nedeniyle kopulaların finans, sigorta, risk yönetimi ve aktüerya gibi alanlarda kullanımı sıklıkla tercih edilmektedir.

Kopulalar, Sklar (1959) tarafından ortaya konulan Sklar Teoremi ile tanımlanmaktadır. Bu teoreme göre, marjinalleri F ve G olan sürekli bir rasgele vektör (X, Y) için iki boyutlu ortak dağılım fonksiyonu $H(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$,

$$H(x, y) = C(F(x), G(y))$$

olacak şekilde tek bir $C : [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ kopulası ile tanımlanabilir. Diğer taraftan ortak yaşam fonksiyonu $\bar{H}(x, y) = P(X > x, Y > y)$ ise kopulaya bağlı olarak

$$\bar{H}(x, y) = \bar{F}(x) + \bar{G}(y) - 1 + C(1 - \bar{F}(x), 1 - \bar{G}(y))$$

şeklinde tanımlanır. Burada \bar{F} ve \bar{G} sırasıyla X ve Y rasgele değişkenlerin marjinal yaşam fonksiyonlarıdır.

Marjinal dağılımlar $U(0,1)$ düzgün dağılımlı olduğunda $F(x) = U$ ve $G(y) = V$ dönüşümleri ile $C: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ kopulası ($C(u, v)$) ve kopulaya dayalı ortak yaşam fonksiyonu ($\bar{C}(u, v)$) sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanır (Nelsen, 2006):

$$C(u, v) = P(U \leq u, V \leq v) = H(F^{-1}(u), G^{-1}(v)),$$

$$\bar{C}(u, v) = P(U > u, V > v) = 1 - u - v + C(u, v).$$

Ayrıca $\hat{C}(u, v)$ yaşam kopulası, $\tilde{C}(u, v)$ dual kopula ve $C^*(u, v)$ ortak kopula tanımları da aşağıda verilmiştir:

$$\hat{C}(u, v) = P(U > u, V > v) = u + v - 1 + C(1 - u, 1 - v),$$

$$\tilde{C}(u, v) = P(U \leq u \text{ veya } V \leq v) = u + v - C(u, v),$$

$$C^*(u, v) = P(U > u \text{ veya } V > v) = 1 - C(1 - u, 1 - v).$$

Y (X) değişkeninin alt ya da üst sınırı bilindiğinde X (Y) değişkeninin de belirli bir değer altında ya da üzerinde olma olasılıkları marjinal ve ortak olasılık bilgileri kullanılarak koşullu olasılık ifadeleri de aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$P(X \leq x | Y \leq y)$: Y değişkeninin belirli bir değer altında olması koşuluyla X değişkeninin belirli bir değer altında olma olasılığı:

$$P(X \leq x | Y \leq y) = \frac{P(X \leq x, Y \leq y)}{P(Y \leq y)} = \frac{H(x, y)}{G(y)}.$$

$P(Y \leq y | X \leq x)$: X değişkeninin belirli bir değer altında olması koşuluyla Y değişkeninin belirli bir değer altında olma olasılığı:

$$P(Y \leq y | X \leq x) = \frac{P(X \leq x, Y \leq y)}{P(X \leq x)} = \frac{H(x, y)}{F(x)}.$$

$P(X > x | Y > y)$: Y değişkeninin belirli bir değer üzerinde olması koşuluyla X değişkeninin belirli bir değer üzerinde olma olasılığı:

$$P(X > x | Y > y) = \frac{P(X > x, Y > y)}{P(Y > y)} = \frac{\bar{H}(x, y)}{\bar{G}(y)}.$$

$P(Y > y | X > x)$: X değişkeninin belirli bir değer üzerinde olması koşuluyla Y değişkeninin belirli bir değer üzerinde olma olasılığı:

$$P(Y > y|X > x) = \frac{P(X > x, Y > y)}{P(X > x)} = \frac{\bar{H}(x, y)}{\bar{F}(x)}.$$

Burada örneğin, X ve Y için $F_X(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)$ ve $F_Y(y) = \Phi\left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)$ marjinal Normal dağılımları ve seçilen bir C kopula fonksiyonu ile ortak olasılık ve koşullu olasılıklar aşağıdaki gibi hesaplanabilir:

$$P(X \leq x, Y \leq y) = C\left(\Phi\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right), \Phi\left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)\right),$$

$$\bar{H}(x, y) = \bar{F}(x) + \bar{G}(y) - 1 + C(1 - \bar{F}(x), 1 - \bar{G}(y)),$$

$$P(X > x, Y > y) = 1 - \Phi\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right) - \Phi\left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right) + C\left(\Phi\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right), \Phi\left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)\right).$$

$F_X(x) = U$ ve $F_Y(y) = V$ dönüşümleri ile

$$\bar{H}(F^{-1}(u), F^{-1}(v)) = 1 - u - v + C(u, v) = \bar{C}(u, v)$$

elde edilir. Burada Φ standart normal dağılımın kümülatif dağılım fonksiyonudur.

Marjinal dağılımlar $U(0,1)$ düzgün dağılımlı olduğunda $C(u, v)$ kopulası ve $\bar{C}(u, v)$ ortak yaşam fonksiyonuna göre koşullu olasılıklar aşağıda verilmiştir:

V 'nin belirli bir değerin üstünde olduğu bilindiğinde U 'nun da belirli bir değer üstünde olma olasılığı $\bar{C}_v(u)$ ile, benzer şekilde U 'nun belirli bir değerin üstünde olduğu bilindiğinde V 'nin de belirli bir değer üstünde olma olasılığı $\bar{C}_u(v)$ ile gösterilirse bu koşullu olasılıklar sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$\bar{C}_v(u) = P(U > u|V > v) = \frac{P(U > u, V > v)}{P(V > v)} = \frac{\bar{C}(u, v)}{\bar{G}(v)},$$

$$\bar{C}_u(v) = P(V > v|U > u) = \frac{P(U > u, V > v)}{P(U > u)} = \frac{\bar{C}(u, v)}{\bar{F}(u)}.$$

2.1. Eliptik ve Arşimedyen Kopulalar

Kopulalar, bağımlılık yapılarını farklı şekillerde modellemek için çeşitli aileler altında sınıflandırılmaktadır. Bunlardan en bilinenleri eliptik ve arşimedyen kopulalardır. Eliptik kopulalar (Normal ve t), simetrik bağımlılıkları modelleme yeteneği ile bilinirken, arşimedyen kopulalar (Clayton, Frank, Gumbel, Joe ve AMH) esnek bağımlılık yapıları sunar. Frank kopulası, üst ve alt kuyruk bağımlılığını modelleyen

simetrik bir yapı sunarken, Clayton kopulası asimetrik bir yapıya sahiptir ve negatif sol kuyruk bağımlılığını modellemektedir. Gumbel kopulası asimetrik olup, daha çok pozitif sağ kuyruk bağımlılığı modellemede kullanılmaktadır. Joe kopulası ise pozitif bağımlılıkları ve sağ kuyruk bağımlılıklarını modelleyen bir kopuladır. Ali-Mikhail-Haq (AMH) kopulası, daha zayıf bağımlılıkları modellemek için kullanılabilir. Mevcut araştırma verileri yüksek korelasyon değerlerine sahip olduğundan AMH kopulası bu çalışmada kullanılmamıştır. Ayrıca değişkenlerinin bağımsız olduğunu ifade eden bağımsızlık kopulası vardır (Cherubini vd., 2004; Joe ve Xu 1996; Nelsen, 2006).

Aşağıda bağımsızlık kopulası, eliptik ve arşimedyan kopulalara ilişkin matematiksel fonksiyonlar verilmiştir:

Bağımsız kopula:

$$C(u, v) = uv$$

Normal kopula:

$$C_{\theta}(u, v) = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(v)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\theta^2}} \exp\left(-\frac{s^2 - 2\theta st + t^2}{2(1-\theta^2)}\right) ds dt, \theta \in [0,1]$$

t copula

$$C_{\theta}(u, v) = \int_{-\infty}^{t_v^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{t_v^{-1}(v)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\theta^2}} \exp\left(-\left(1 + \frac{s^2 - 2\theta st + t^2}{v(1-\theta^2)}\right)\right) ds dt$$

$$-1 < \theta < 1; v > 2$$

Clayton kopula:

$$C_{\theta}(u, v) = [\max(u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1, 0)]^{-1/\theta}, \quad \theta \in [-1, \infty) \setminus \{0\}$$

Frank kopula:

$$C_{\theta}(u, v) = -\frac{1}{\theta} \ln\left(1 + \frac{(e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{e^{-\theta} - 1}\right), \quad \theta \neq 0$$

Gumbel kopula:

$$C_{\theta}(u, v) = \exp\left(-[(-\log u)^{\theta} + (-\log v)^{\theta}]^{1/\theta}\right), \quad \theta \in [1, \infty)$$

Joe kopula:

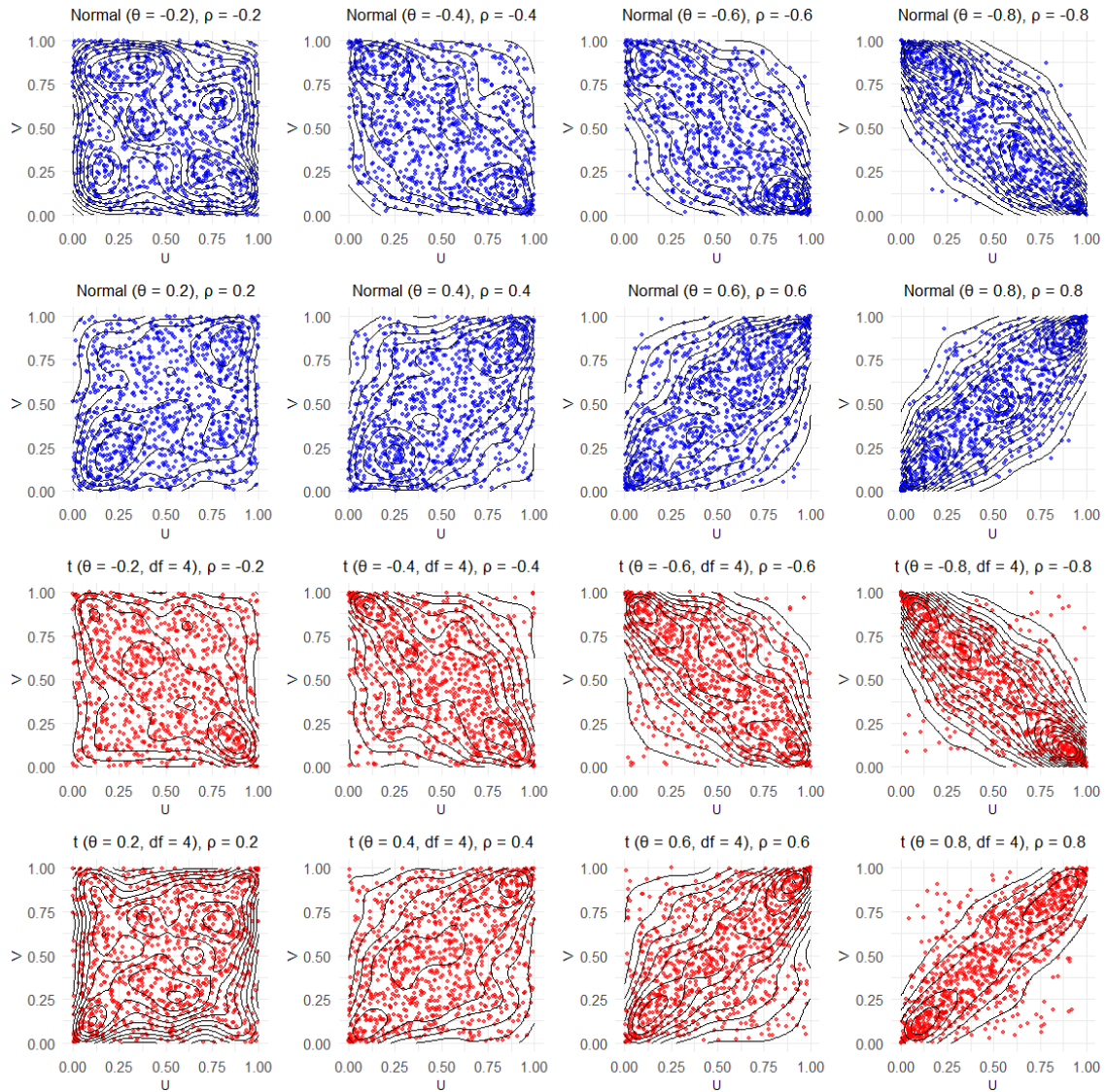
$$C_{\theta}(u, v) = 1 - ((1-u)^{\theta} + (1-v)^{\theta} - (1-u)^{\theta}(1-v)^{\theta})^{1/\theta}, \quad \theta \in [1, \infty)$$

AMH kopulası:

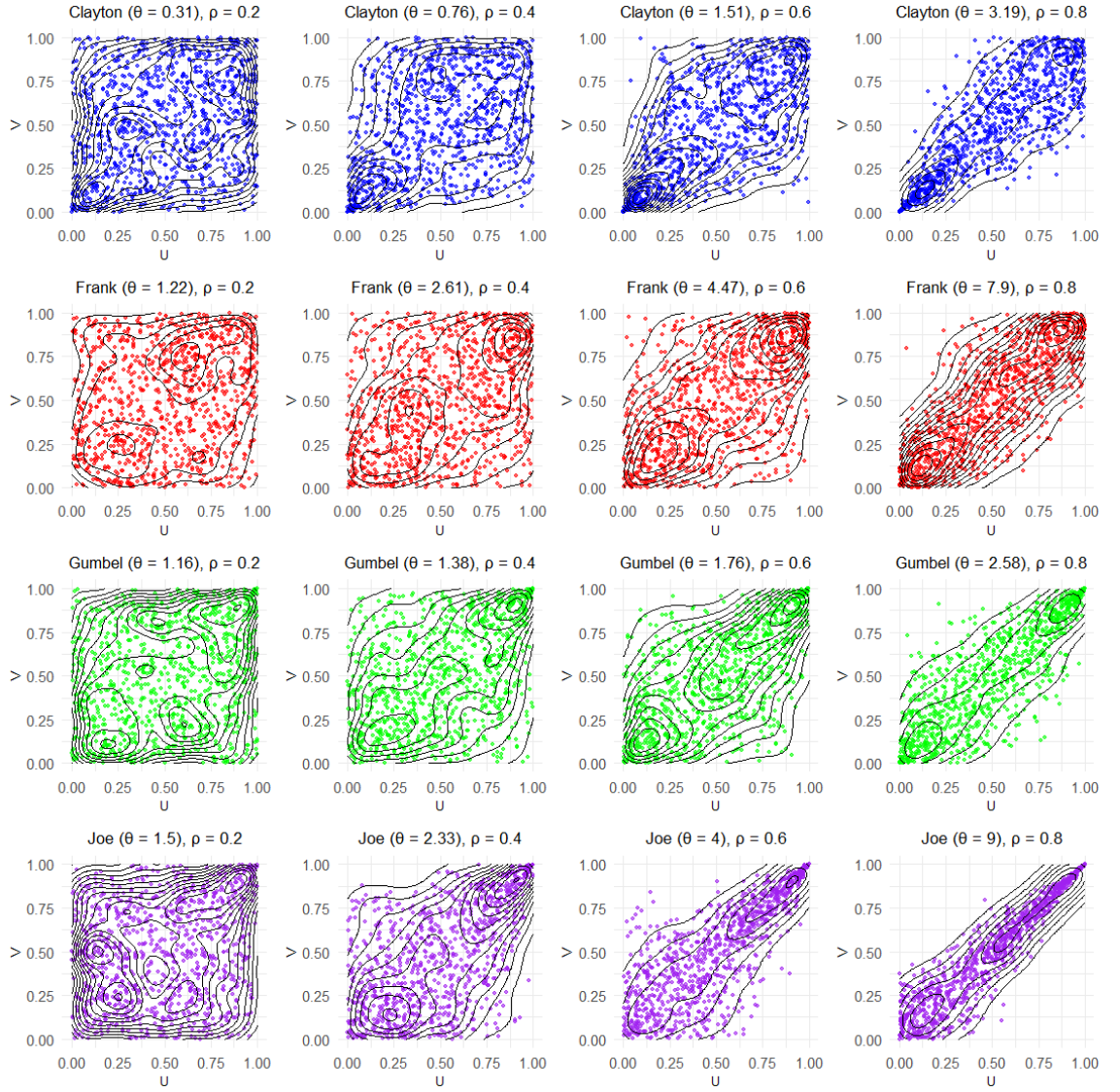
$$C(u, v) = \frac{uv}{1 - \theta(1-u)(1-v)}, \quad -1 \leq \theta \leq 1$$

Burada Φ^{-1} , standart normal dağılımın ters fonksiyonu; t_v^{-1} , v serbestlik derecesine sahip t-dağılımının ters fonksiyonudur. Bu kopulalar, verilerdeki bağımlılık türüne bağlı olarak seçilebilir. Örneğin, kuyruk bağımlılığı ya da simetri gibi özellikler dikkate alınarak uygun kopula modeli belirlenebilir.

Eliptik ve Arşimedyan kopulalara ait farklı Spearman ρ değerleri için eliptik kopulaların saçılım ve kontur grafikleri Şekil 1 ve Şekil 2’de sırasıyla verilmiştir.



Şekil 1. Farklı Spearman ρ değerleri için eliptik kopulaların saçılım ve kontur grafikleri.



Şekil 2. Farklı Spearman ρ değerleri için arşimedyan kopulaların saçılım ve kontur grafikleri.

2.2. Kopular ve Bağımlılık Ölçüleri

Kopula, bağımlılığın ölçülmesinde bir yöntem olması nedeniyle bağımlılık ölçüleriyle yakından ilişkilidir. Kendall'ın Tau (τ) ve Spearman'ın Rho (ρ) ile kopula arasındaki bağıntılar sırasıyla aşağıda verilmiştir:

$$\tau_C = 4 \iint_{I^2} C(u, v) dC(u, v) - 1,$$

$$\rho_C = 12 \iint_{I^2} C(u, v) dudv - 3.$$

2.3. Parametre Tahmin Yöntemleri

Kopula parametre tahminlerinde parametrik ve parametrik olmayan yöntemler kullanılır. Parametrik yöntemler arasında, maksimum olabilirlik tahmini (MLE), kopula ve marjinal dağılımların parametrelerini aynı anda tahmin ederken, marjinal çıkarım fonksiyonu (IFM) yöntemi, bu tahminleri iki adımda gerçekleştirir: İlk adımda, her bir değişkenin marjinal dağılım parametreleri bağımsız olarak tahmin edilir; ikinci adımda ise, bu marjinal dağılımlar kullanılarak kopula fonksiyonunun parametreleri tahmin edilir (Joe ve Xu, 1996). Parametrik olmayan yöntemlerden kanonik maksimum olabilirlik (CML) yöntemi, marjinal dağılımlar doğrudan tahmin etmeden bunun yerine ampirik dağılım fonksiyonlarını kullanarak kopula parametrelerini tahmin eder (Cherubini vd., 2004). Maksimum sözde olabilirlik tahmin yöntemi (MPLE) ise, ampirik dağılımı fonksiyonu kullanmadan verilerin sıralamasına dayalı olarak oluşturulan sözde gözlemler kullanarak kopula parametrelerini tahmin eden basit ve yaygın olarak kullanılan bir yaklaşımdır (Genest vd. 1995; Shih ve Louis, 1995).

Ayrıca, Kendall'ın Tau (τ) ve Spearman'ın Rho (ρ) gibi iki korelasyon katsayısı da kopulaların bağımlılık parametrelerini tahmin etmek için kullanılmaktadır (Joe, 2014; Nelsen, 2006). Bu yöntemlerin aşamaları aşağıda verilmiştir.

Mevcut çalışmada, parametre tahmini için sözde en çok olabilirlik tahmin yöntemi (MPLE) kullanılmıştır. Parametre tahmini, R programının “copula” paketindeki ‘fitCopula’ fonksiyonu kullanılarak MPLE yöntemiyle gerçekleştirilmiştir (Hofert vd., 2024).

2.3.1. Kendall τ ve Spearman ρ Bağımlılık Ölçülerine Dayalı Parametre Tahmin Yöntemi

Kendall τ ve Spearman ρ bağımlılığı ölçmek için kullanılan parametrik olmayan korelasyon katsayılarıdır ve kopula parametrelerinin tahmini için de kullanılabilirler. Her iki tahmin edici de sıralı bağımlılığa dayanır. Aşağıda bu iki tahmin edicinin matematiksel ifadeleri verilmiştir:

Kendall τ , iki rastgele değişken X ve Y arasındaki sıralı bağımlılığı ölçer. n gözlemleri veri çiftleri (X_i, Y_i) ve (X_j, Y_j) için toplam uyumlu ve uyumsuz gözlem çiftleri üzerinden hesaplanır.

- Uyumlu Çiftler: Eğer $(X_i - X_j)(Y_i - Y_j) > 0$, yani X_i ve X_j aynı yönde değiştiğinde Y_i ve Y_j de aynı yönde değişiyorsa çift uyumludur.
- Uyumsuz Çiftler: Eğer $(X_i - X_j)(Y_i - Y_j) < 0$ ise çift uyumsuzdur.

Kendall τ şu şekilde tanımlanır:

$$\tau = \frac{(\text{Uyumlu Çiftler} - \text{Uyumsuz Çiftler})}{\binom{n}{2}}$$

$$= \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i < j} \text{sgn}((X_i - X_j)(Y_i - Y_j)).$$

Burada, n , toplam gözlem sayısını temsil eder. $\text{sgn}(z)$, işaret fonksiyonudur:

$$\text{sgn}(z) = \begin{cases} 1, & z > 0 \\ 0, & z = 0 \\ -1, & z < 0 \end{cases}$$

Kendall τ , bağımlılığı -1 ile $+1$ arasında değerlendirir, -1 tam tersi yönde sıralı bağımlılık, $+1$ ise tam sıralı bağımlılık anlamına gelir.

Spearman ρ , iki değişken arasındaki sıralı korelasyonu ölçer ve veri değerlerinin sıralamaları kullanılarak hesaplanır. Spearman ρ , veri çiftlerinin sıralarına dayanır ve aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\rho = 1 - \frac{6 \sum_{i=1}^n d_i^2}{n(n^2 - 1)}.$$

Burada:

- $d_i = R(X_i) - R(Y_i)$, her bir veri çifti için sıralama farkını temsil eder (yani, X_i ve Y_i için sıralama farkı).
- $R(X_i)$ ve $R(Y_i)$, sırasıyla X_i ve Y_i değerlerinin sıralama değerleridir.
- n , toplam gözlem sayısını temsil eder.

Spearman ρ , -1 ile $+1$ arasında bir değer alır. $+1$, sıralamalar arasında tam bir pozitif bağımlılığı gösterirken -1 tam tersi yönde bir bağımlılığı ifade eder.

Kopula bağımlılığı θ ile τ ve ρ arasındaki ilişki, kopulanın türüne bağlıdır ve parametrik formülasyonlarla ifade edilir.

Örneğin, Clayton kopulası için θ ile τ arasındaki ilişki şu şekildedir:

$$\tau = \frac{\theta}{\theta + 2}$$

ve benzer şekilde, Gumbel kopulası için

$$\tau = 1 - \frac{1}{\theta}$$

olduğu bilinir. Bu tür formüller sayesinde kopulanın bağımlılık parametresi θ , τ veya ρ 'ya dayalı olarak tahmin edilebilir.

2.3.2. Marjinaler için Çıkarım Fonksiyonu Tahmin Yöntemi (IFM)

IFM yönteminin ilk aşamasında, her bir değişkenin marjinal dağılım parametreleri tahmin edilir. Eğer X ve Y değişkenlerinin marjinal dağılımları sırasıyla $F_X(x; \alpha)$ ve $F_Y(y; \beta)$ şeklinde parametrik fonksiyonlar ise, bu marjinal parametreler α ve β , maksimum olabilirlik tahmin yöntemi (MLE) ile ayrı ayrı tahmin edilir.

Marjinal parametreler için olabilirlik fonksiyonu şu şekilde yazılır:

$$L_X(\alpha) = \prod_{i=1}^n f_X(x_i; \alpha), \quad L_Y(\beta) = \prod_{i=1}^n f_Y(y_i; \beta).$$

Burada f_X ve f_Y , marjinal yoğunluk fonksiyonlarıdır. Bu yoğunluk fonksiyonlarının maksimumunu bularak parametre tahminleri şu şekilde yapılır:

$$\hat{\alpha} = \arg \max_{\alpha} \sum_{i=1}^n \log f_X(x_i; \alpha),$$

$$\hat{\beta} = \arg \max_{\beta} \sum_{i=1}^n \log f_Y(y_i; \beta).$$

Bu adımın sonunda, X ve Y değişkenlerinin marjinal parametre tahminleri $\hat{\alpha}$ ve $\hat{\beta}$ elde edilir.

İkinci aşamada, marjinal parametreler tahmin edildikten sonra, kopula fonksiyonunun parametreleri tahmin edilir. İlk aşamada elde edilen tahminler $\hat{\alpha}$ ve $\hat{\beta}$ kullanılarak, marjinal dağılımlar için sözde gözlemler elde edilir:

$$u_i = F_X(x_i; \hat{\alpha}), \quad v_i = F_Y(y_i; \hat{\beta}), \quad \text{for } i = 1, 2, \dots, n$$

Bu sözde gözlemler (u_i, v_i) kullanılarak kopula fonksiyonunun parametreleri θ , maksimum olabilirlik yöntemi ile tahmin edilir. Kopula parametresi θ 'yı tahmin etmek

için kopulanın olabilirlik fonksiyonu şu şekilde yazılır:

$$L_c(\theta) = \prod_{i=1}^n c(u_i, v_i; \theta).$$

Burada $c(u, v; \theta)$, kopula fonksiyonunun yoğunluk fonksiyonudur. Kopula parametresi θ 'nin tahmini, bu olabilirlik fonksiyonunu maksimize ederek elde edilir:

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta} \sum_{i=1}^n \log c(u_i, v_i; \theta).$$

IFM yönteminin bu iki aşaması sonucunda, önce marjinal parametreler $\hat{\alpha}$ ve $\hat{\beta}$, ardından kopula parametreleri $\hat{\theta}$ tahmin edilmiş olur. Marjinal dağılımlar ve kopula bağımsız olarak tahmin edildiği için IFM, kopula tahmini için iki aşamalı bir süreçtir.

2.3.3. Kanonik En Çok Olabilirlik Tahmin Yöntemi (CMLE)

CMLE yöntemi, kopula parametrelerini marjinal dağılımlar ampirik olarak tahmin edildikten sonra tahmin etmeye yönelik yarı-parametrik bir yaklaşımdır. İlk olarak, gözlem verilerinden marjinal dağılımlar ampirik dağılım fonksiyonları (ECDF) kullanılarak oluşturulur. Ardından, bu dağılımlardan elde edilen sözde gözlemler (pseudo-observations) kullanılarak kopula parametreleri, en çok olabilirlik yöntemi (MLE) ile tahmin edilir. CMLE, parametrik olmayan bir yöntemdir çünkü marjinal dağılımlar hakkında herhangi bir dağılım varsayımı yapmaz; yalnızca ampirik dağılımları kullanır. CMLE yönteminin aşamaları aşağıda verilmiştir:

İlk adımda, gözlemlerden X_1, X_2, \dots, X_n ve Y_1, Y_2, \dots, Y_n veri çiftleri kullanılarak ampirik marjinal dağılımlar oluşturulur. Her bir değişken için ampirik dağılım fonksiyonu (ECDF) şu şekilde hesaplanır:

$$\hat{F}_X(x_i) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbf{1}(X_j \leq x_i), \quad \hat{F}_Y(y_i) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbf{1}(Y_j \leq y_i).$$

Burada $\mathbf{1}(\cdot)$ gösterimi, belirli bir koşul sağlandığında 1 değerini alan gösterimdir. $\hat{F}_X(x_i)$ ve $\hat{F}_Y(y_i)$, sırasıyla X ve Y değişkenlerinin ampirik dağılım fonksiyonlarıdır.

Ampirik dağılımlar kullanılarak sözde gözlemler (u_i, v_i) oluşturulur:

$$u_i = \hat{F}_X(X_i), \quad v_i = \hat{F}_Y(Y_i), \quad \text{for } i = 1, 2, \dots, n$$

Ampirik dağılım fonksiyonlarına dayalı sözde gözlemler (u_i, v_i) kullanılarak kopula

parametreleri θ , maksimum olabilirlik tahmin yöntemi (MLE) ile tahmin edilir. Kopula parametresini tahmin etmek için kopulanın olabilirlik fonksiyonu şu şekilde yazılır:

$$L_c(\theta) = \prod_{i=1}^n c(u_i, v_i; \theta).$$

Burada $c(u, v; \theta)$, kopulanın yoğunluk fonksiyonudur. Kopula parametresi θ ' nın tahmini, bu olabilirlik fonksiyonunu maksimize ederek elde edilir:

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta} \sum_{i=1}^n \log c(u_i, v_i; \theta).$$

2.3.4. Maksimum Söзде Olabilirlik Tahmin Yöntemi (MPLE)

MPLE, söзде gözlemleri kullanarak kopula parametrelerini tahmin eder. Gözlemler (x_i, y_i) sıralama ile elde edilerek söзде gözlemler şu şekilde hesaplanır:

$$u_i = \frac{r_i}{n+1}, \quad v_i = \frac{s_i}{n+1}.$$

Burada $r_i = \text{Rank}(x_i)$ ve $s_i = \text{Rank}(y_i)$, x ve y gözlemlerinin sıralamalarıdır. Kopula parametreleri ise bu (u_i, v_i) söзде gözlemlere dayanarak tahmin edilir:

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta} \prod_{i=1}^n c(u_i, v_i; \theta).$$

Elde edilen söзде gözlemler (u_i, v_i) kullanılarak kopula fonksiyonunun parametreleri maksimum olabilirlik yöntemi ile tahmin edilir. Kopula parametresini tahmin etmek için kopulanın olabilirlik fonksiyonu şu şekilde yazılır:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n c(u_i, v_i; \theta).$$

Burada $c(u, v; \theta)$, kopulanın yoğunluk fonksiyonudur. Maksimum olabilirlik tahmincisi (MLE), bu olabilirlik fonksiyonunu maksimize ederek θ parametresini tahmin eder:

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta} \prod_{i=1}^n c(u_i, v_i; \theta).$$

Denklemin hesaplamasını kolaylaştırmak için logaritması alınır:

$$\ell(\theta) = \sum_{i=1}^n \log c(u_i, v_i; \theta).$$

Böylece, log-olabilirlik fonksiyonunu maksimize ederek θ 'nın tahmini elde edilir:

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta} \ell(\theta).$$



3. KOPULALAR İÇİN UYUM İYİLİĞİ TESTLERİ ve MODEL SEÇİMİ

3.1. Uyum İyiliği Testleri

Uygunluk testi (goodness-of-fit test), bir modelin gözlemlenen verilere ne kadar iyi uyduğunu değerlendirmek amacıyla kullanılan bir istatistiksel yöntemdir. Bu test, gözlemlenen ve modelden beklenen dağılımlar arasındaki farkları analiz ederek, modelin veriye uygunluğunu ölçer. Popülasyonun olasılık dağılımı bilinmiyorsa, geleneksel bir olasılık dağılımı ile popülasyonu doğru bir şekilde temsil etmek zor olabilir. Bu nedenle, çeşitli teknikler aracılığıyla çok sayıda bilgi kullanarak uygun bir dağılım seçmek mantıklı bir yaklaşımdır (Shin vd., 2010).

Bu bağlamda, K-S (Kolmogorov-Smirnov), CvM (Cramer-von Mises) ve A-D (Anderson Darling) testleri yaygın olarak kullanılmaktadır. K-S testi, gözlemlenen dağılım ile modelin dağılımı arasındaki en büyük farkı değerlendirirken, A-D ve CvM testleri bu farkların karelerinin toplamını dikkate alır. Çalışmamızda, uyum iyiliği testlerinden CvM testi kullanılmış ve R programında “copula” paketinin `gofCopula` fonksiyonu ile uygulanmıştır (Hofert vd., 2024). Aşağıda bu testler iki değişkenli kopula fonksiyonu $C(u, v; \theta)$ için tanımlanmıştır.

İki değişkenli durumda, örneklem verileri $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^n$ şeklinde olup, bu verilerden ampirik kopula fonksiyonu $C_n(u, v)$ ve teorik copula fonksiyonu $C(u, v; \theta)$ oluşturulur. Uyum iyiliği testlerinde ilk olarak verilerin sıralanması ve marjinal dağılımların ampirik olarak tahmin edilmesi gerekmektedir. Bu süreç, gözlem verilerinin büyüklük sırasına göre düzenlenmesi ile başlar.

Veri setinden

$$\hat{F}_X(x_i) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbf{1}(X_j \leq x_i), \quad \hat{F}_Y(y_i) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbf{1}(Y_j \leq y_i)$$

şeklinde oluşturulan ampirik dağılım fonksiyonları (ECDF) kullanılarak, her bir marjinal dağılım için şu şekilde sözde gözlemler (pseudo-observations) oluşturulur:

$$u_i = \hat{F}_X(x_i), \quad v_i = \hat{F}_Y(y_i), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Sözde gözlemler (u_i, v_i) kullanılarak ampirik kopula fonksiyonu $C_n(u, v)$ elde edilir. Ardından ampirik kopula fonksiyonu ile teorik kopula fonksiyonu arasındaki uyumu ölçmek için K-S, A-D ve CvM testi gibi uyum iyiliği testleri uygulanır. Bu test istatistikleri belirli bir kritik değer ile karşılaştırılarak gözlemlenen verilerin teorik dağılıma ne kadar uyum sağladığı değerlendirilir. Eğer test değeri kritik değerden büyükse, gözlemlenen verilerin teorik dağılımla uyumlu olmadığı sonucuna varılır. Bu test istatistikleri aşağıda verilmiştir.

Kolmogorov-Smirnov (K-S) Testi:

K-S testi, iki dağılım arasındaki en büyük mutlak farkı belirleyerek, bu dağılımların birbirine ne kadar uyduğunu ölçen bir uygunluk testidir. İki değişkenli durumda, K-S testi, ampirik kopula fonksiyonu ile teorik kopula fonksiyonu arasındaki maksimum farkı değerlendirir. Bu maksimum fark D_n istatistiği ile aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$D_n = \sup_{(u,v) \in [0,1]^2} |C_n(u, v) - C(u, v; \theta)|.$$

Cramér-von Mises (CvM) Testi:

CvM testi, gözlemlenen ve teorik dağılım fonksiyonları arasındaki farkların karelerinin toplamını değerlendirerek iki dağılım arasındaki uyumu ölçen bir yöntemdir. CvM test istatistiği, ampirik copula fonksiyonu ile teorik kopula fonksiyonu arasındaki farkların karelerinin bütün veri seti boyunca integralinin alınmasıyla elde edilir ve W^2 istatistiği ile aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$W^2 = n \int_0^1 \int_0^1 (C_n(u, v) - C(u, v; \theta))^2 dC(u, v; \theta).$$

Formülün toplamı belirli bir integral yerine toplam olarak ifade edilirse, CvM test istatistiği aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$W^2 = n \cdot \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (C_n(u_i, v_j) - C(u_i, v_j; \theta))^2.$$

Anderson-Darling (A-D) Testi:

Bu test, ampirik copula fonksiyonu ile teorik kopula fonksiyonu arasındaki farkların ağırlıklı karelerinin toplamını hesaplayarak, özellikle uç noktalardaki uyumu daha hassas bir şekilde değerlendirir ve A^2 istatistiği ile aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$A^2 = n \int_0^1 \int_0^1 \frac{(C_n(u, v) - C(u, v; \theta))^2}{C(u, v; \theta)(1 - C(u, v; \theta))} dC(u, v; \theta).$$

3.2. Model Seçimi

Model seçimi veriye en uygun kopula modelini belirlemek amacıyla Akaike Bilgi Kriteri (AIC) ve Bayesian Bilgi Kriteri (BIC), literatürde yaygın olarak kullanılmaktadır. Ayrıca, Grønneberg ve Hjort (2014) tarafından k-katlı çapraz doğrulama (k-fold cross-validation) yöntemine dayalı olarak geliştirilen Kopula Bilgi Kriteri (CIC), en uygun kopula modelini seçmek için kullanılmaktadır (Kwon ve Yoon, 2017). En düşük AIC ve BIC değerlerine veya en yüksek CIC değerine sahip model, veriye en iyi uyum sağlayan model olarak kabul edilir.

Bu çalışmada, kopula modellerinin seçimi için AIC, BIC ve CIC kriterleri kullanılmıştır. Model seçim sürecinde, sırasıyla Akaike (1974), Schwarz (1978) ve Grønneberg ve Hjort (2014) tarafından tanımlanmış her bir kriterin hesaplanma yöntemleri aşağıda verilmiştir:

$$AIC = -2\mathcal{L} + 2k,$$

$$BIC = -2\mathcal{L} + k \log n.$$

Burada, \mathcal{L} , $\mathcal{L} = \sum_{i=1}^n \log c(u_i, v_i, \hat{\theta})$ ile hesaplanan log olabirlik değerini, k modeldeki parametre sayısını, n örneklem büyüklüğünü temsil eder.

CIC, k-katlı çapraz doğrulama yöntemi kullanılarak hesaplanan en uygun kopula seçim yöntemidir. Bu yöntemde, $D = \{(x_i, y_i)\}_{i=1}^n$ şeklinde olan veri seti k eşit büyüklükteki alt kümeye ayrılır. Her bir katman sırayla test seti olarak kullanılırken, kalan $k - 1$ katman eğitim seti olarak kullanılır. Eğitim setinde kopula modeli eğitilir ve test setinde log olabirlik değeri hesaplanır. Tüm katmanların sonuçları birleştirilerek ortalama log-olabirlik değeri elde edilir. Bu değere dayalı olarak Kopula Bilgi Kriteri (CIC) hesaplanır ve modelin uyumu değerlendirilir.

İki değişkenli kopula için k-katlı çapraz doğrulamanın matematiksel ifadesi aşağıda verilmiştir:

- Veri seti D , k alt kümeye bölünür: $D = D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_k$.
- Burada her bir D_j yaklaşık olarak $\frac{n}{k}$ gözlem içerir ve bu alt kümeler birbirinden ayrıdır: $D_i \cap D_j = \emptyset, i \neq j$

Her bir j -inci adımda, D_j test seti olarak seçilir, kalan $D \setminus D_j$ verisi ise eğitim seti olarak kullanılır:

$$\text{Eğitim Seti: } D_{\text{train}} = D \setminus D_j$$

$$\text{Test Seti: } D_{\text{test}} = D_j$$

Eğitim setinde kopula modeli $C(u, v; \theta)$ kullanılarak θ parametreleri tahmin edilir.

$$\hat{\theta}_j = \arg \max_{\theta} \sum_{(x_i, y_i) \in D_{\text{train}}} \log c(u_i, v_i; \theta).$$

Burada $c(u_i, v_i; \theta)$, kopula yoğunluk fonksiyonudur ve u_i ile v_i , sözde gözlemlerdir. Tahmin edilen parametreler $\hat{\theta}_j$ ile test setindeki her bir veri noktası için kopula yoğunluk fonksiyonu üzerinden log-olabilirlik hesaplanır:

$$\mathcal{L}_j = \sum_{(x_i, y_i) \in D_{\text{test}}} \log c(u_i, v_i; \theta).$$

Tüm k kat çapraz doğrulama ile elde edilen log-olabilirliklerin ortalaması alınarak Kopula Bilgi Kriteri (CIC) şu şekilde ifade edilir:

$$CIC = -2 \cdot \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \mathcal{L}_j + \gamma(\hat{\theta}).$$

Burada, \mathcal{L}_j her katman için hesaplanan en çok olabilirlik değerini, $\gamma(\hat{\theta})$ ise modelin karmaşıklığına bağlı ceza terimini ifade eder ve genellikle parametre sayısına bağlıdır.

Bu kriterler $c(u_i, v_i, \hat{\theta})$ kopula yoğunluk fonksiyonları için $\mathcal{L} = \sum_{i=1}^n \log c(u_i, v_i, \hat{\theta})$ eşitliği ile hesaplanan log olabilirlik fonksiyonları kullanılarak da aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$AIC = -2 \sum_{i=1}^n \log c(u_i, v_i, \hat{\theta}) + 2k.$$

$$BIC = -2 \sum_{i=1}^n \log c(u_i, v_i, \hat{\theta}) + k \log n,$$

$$CIC = -2 \cdot \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \sum_{(x_i, y_i) \in D_{\text{test}}} \log c(u_i, v_i; \hat{\theta}) + \gamma(\hat{\theta}).$$

Çalışmamızda bu hesaplamalar, R programında “copula” paketinin fitCopula (AIC ve BIC için) ve xvCopula (CIC için) fonksiyonları kullanılarak yapılmıştır (Hofert vd., 2024).



4. PISA VERİLERİNİN KOPULA FONKSİYONLARIYLA ANALİZİ

Çalışmada Türk öğrencilerin PISA 2018 verileri kullanılmıştır. Öğrencilerin matematik, fen ve okuma puanları arasındaki ilişkiler oluşturulan veri çiftleri üzerinden ele alınmıştır. Çalışma üç farklı durum üzerinden gerçekleştirilmiştir.

Birinci durumda genel analiz alt başlığında öğrencilerin tümü ve erkek/kız öğrencilere yönelik başarı puanları; ikinci durumda evdeki eğitim olanakları değişkeni açısından öğrencilerin tümü ve erkek/kız öğrencilere yönelik başarı puanları; üçüncü durumda ise sosyoekonomik düzey değişkeni açısından öğrencilerin tümü ve erkek/kız öğrencilere yönelik başarı puanlarına ilişkin veri çiftleri için modeller oluşturulmuş ve bu model tanımlamaları yapılmıştır. Her bir durumda oluşturulan modellere ilişkin betimleyici istatistikler öğrencilerin tümü ve erkek/kız öğrenciler için ayrı ayrı hesaplanmıştır. Sonrasında her bir modele ilişkin bağımlılık yapılarını gösteren Pearson, Spearman ile Kendall korelasyon değerleri elde edilmiş ve simetriklik testleri yapılmıştır. Modellerin her birinde matematik, okuma ve fen değişkenlerine ilişkin dağılımlar marjinal dağılım uyum iyiliği testleri ile incelenmiş, öğrencilerin tümü ve erkek/kız öğrenciler için sonuçlar sırasıyla ortaya konulmuştur.

PISA 2018 yılı Matematik, Okuma ve Fen puanlarının bağımlılık yapıları, cinsiyet, evdeki eğitim olanakları ve sosyoekonomik düzeye göre kopula fonksiyonlarıyla incelenmiştir. Her bir durumda en uygun kopula model seçimleri yapılmış ve parametreleri tahmin edilmiştir. Seçilen kopula modelleri kullanılarak olasılıklar hesaplanmıştır.

4.1. PISA Veri Seti ve Modeller

Çalışmada PISA matematik, fen ve okuma puanları yanı sıra karşılaştırmalı incelemelere olanak verecek cinsiyet, evdeki eğitim olanakları ve sosyoekonomik düzey değişkenleri kullanılmıştır. Bu değişkenlere göre yapılan karşılaştırmalar için

belirlenen düzeyler aşağıda ifade edilmiştir.

Evdeki eğitim olanakları değişkeni anne baba eğitim seviyesi, ev ödevlerinde anne babanın katılımı, ev ödevleri için fiziksel kaynakları içermektedir. Bu fiziksel kaynaklar öğrencinin kendisine ait oda, kitaplar, bilgisayar ve internet bağlantısı olarak somutlaştırılabilir. Bunun yanı sıra ailenin eğitim düzeyi, mesleği ve öğrenciye desteği de soyut kaynaklara örnek olarak belirtilebilir. Tüm bu kaynaklar evdeki eğitim olanakları indeksi ile ifade edilmektedir. Mevcut araştırmada PISA 2018 verisi, evdeki eğitim olanakları değişkeni için aşağıdaki indeks aralıklarında üç alt grupta sınıflandırılmıştır (OECD, 2018):

- Düşük düzey grup; -4,75 / -2,25
- Orta düzey grup; -2,24 / 0,25
- Yüksek düzey grup; 0,26 / 2,76

Sosyoekonomik düzey değişkeni, öğrencinin ailesinin sosyal ve ekonomik durumunu yansıtan çeşitli faktörleri içermektedir. Bu değişken ailenin gelir düzeyi, ebeveynlerin meslekleri, sahip olunan maddi varlıklar (ev, araba, elektronik cihazlar vb.), kültürel kaynaklar (kitap sayısı, sanatsal ve kültürel etkinliklere katılım vb.) gibi unsurları kapsamaktadır. Ayrıca, öğrencinin okul dışında özel ders veya ek eğitim alıp almadığı gibi eğitim destek mekanizmaları da sosyoekonomik düzeyin bir parçası olarak değerlendirilmektedir. Tüm bu faktörler, PISA tarafından belirlenen sosyoekonomik statü indeksi ile ölçülmekte ve analizlerde kullanılmaktadır. PISA 2018 verisi, sosyoekonomik düzey değişkeni için aşağıdaki indeks aralıklarında üç alt grupta sınıflandırılmıştır (OECD, 2018):

- Düşük düzey grup; -4,49 / -2,59
- Orta düzey grup; -2,58 / -0,68
- Yüksek düzey grup; -0,67 / 1,23

PISA matematik, okuma ve fen puanlarından oluşan veri çiftleri (1: Matematik-Okuma, 2: Matematik-Fen, 3: Okuma-Fen) için evdeki eğitim olanakları/sosyoekonomik düzey (1: Düşük, 2: Orta, 3: Yüksek) ve cinsiyet (T: Tüm Öğrenciler, E: Erkek, K: Kız) değişkenlerine göre modeller oluşturulmuştur. Model tanımlamaları her bir durum başlığı altında sunulmuştur.

4.1.1. Birinci Durum: Öğrencilerin Tümü ve Erkek/Kız Öğrenciler için Genel Analiz

Çizelge 1’de öğrencilerin tümü ve erkek/kız öğrenciler için model tanımlamaları verilmiştir.

Çizelge 1. Öğrencilerin tümü ve erkek/kız öğrenciler için model tanımlamaları.

Cinsiyet	Çift	Model
Tüm öğrenciler	Matematik-Okuma	Model T1
	Matematik-Fen	Model T2
	Okuma-Fen	Model T3
Erkek	Matematik-Okuma	Model E1
	Matematik-Fen	Model E2
	Okuma-Fen	Model E3
Kız	Matematik-Okuma	Model K1
	Matematik-Fen	Model K2
	Okuma-Fen	Model K3

Çizelge 1 öğrencilerin tümü ve erkek/kız öğrenciler için model tanımlamalarının matematik-okuma, matematik-fen ve okuma-fen çiftleri için oluşturulduğunu göstermektedir.

Çizelge 2’de öğrencilerin tümü ve erkek/kız öğrenciler için betimsel istatistikler verilmiştir.

Çizelge 2. Öğrencilerin tümü ve erkek/kız öğrenciler için betimsel istatistikler.

Cinsiyet	Alan	N	Ortalama	Medyan	Mod	Standart Sapma	Çarpıklık	Basıklık
Tüm öğrenciler	Matematik	6890	452.7008	449.7600	464.8290	87.3938	0.1477	-0.0432
	Okuma	6890	464.2299	463.4030	334.9190	87.7801	0.0445	-0.3018
	Fen	6890	467.4865	464.8165	299.2330	83.1135	0.0848	-0.3226
Erkek	Matematik	3494	454.8183	453.2050	321.4900	89.0444	0.0708	-0.0772
	Okuma	3494	450.7126	448.0250	346.2500	89.5787	0.0837	-0.3549
	Fen	3494	462.6524	459.2300	372.0000	85.1526	0.1215	-0.2752
Kız	Matematik	3396	450.5231	445.6450	365.2200	85.6209	0.2306	0.0012
	Okuma	3396	478.1383	477.6450	413.4700	83.6533	0.0715	-0.2725
	Fen	3396	472.4610	470.4650	416.7700	80.6727	0.0622	-0.3876

Çizelge 3’te öğrencilerin tümü ve erkek/kız öğrenciler için korelasyon ve simetriklik test değerleri verilmiştir.

Erkek ve kız öğrencilerin matematik, okuma ve fen başarıları arasındaki ilişkiler Pearson, Spearman ve Kendall korelasyon yöntemleriyle analiz edilmiş ve R yazılımında “copula” paketindeki ‘exchTest’ fonksiyonu ile simetriklik testleri yapılmıştır. Çizelge 3’te verilen sonuçlara göre her iki cinsiyette de güçlü pozitif ilişkiler tespit edilmiştir.

Çizelge 3. Öğrencilerin tümü ve erkek/kız öğrenciler için korelasyon ve simetriklik test değerleri.

Model	Pearson*	Spearman*	Kendall*	Simetriklik Testi (p değeri)**
Model T1	0.8074	0.8008	0.6045	0.013400 (0.6588)
Model T2	0.8336	0.8276	0.6329	0.010014 (0.9006)
Model T3	0.8678	0.8648	0.6766	0.008141 (0.9605)
Model E1	0.8250	0.8211	0.6256	0.014863 (0.4510)
Model E2	0.8393	0.8341	0.6399	0.014472 (0.4560)
Model E3	0.8722	0.8700	0.6830	0.011686 (0.5450)
Model K1	0.8178	0.8129	0.6177	0.011319 (0.8357)
Model K2	0.8339	0.8295	0.6350	0.008440 (0.9825)
Model K3	0.8691	0.8642	0.6762	0.014368 (0.3002)

(*) Tüm korelasyonlar anlamlıdır ($p < 0.05$)

(**) Tüm modeller simetrikdir ($p > 0.05$)

Özellikle kız öğrencilerde okuma ve fen başarıları arasındaki ilişki oldukça yüksek bulunmuştur. Tüm korelasyon testlerinin p değerleri 0.05'in altında olup, bu ilişkilerin istatistiksel olarak anlamlı olduğu bulunmuştur. Ayrıca, simetriklik testi sonuçlarına göre modeller simetrik dağılım varsayımını desteklemektedir ($p > 0.05$).

Çizelge 4'te öğrencilerin tümü ve erkek/kız öğrenciler için marjinal dağılım uyum iyiliği sonuçları verilmiştir. Her bir model için en iyi uyum marjinal dağılımları (*) ile göstermektedir. Marjinal model seçimleri $p > 0.05$ olan en küçük KS ve en küçük AIC değerlerine göre yapılmıştır. Tüm öğrenciler ve erkek öğrenciler için Matematik, Okuma ve Fen başarılarında en iyi uyum sağlayan dağılım Normal dağılım olmuştur. Kız öğrencilerde ise matematik başarısı için Gamma dağılımı, okuma ve fen başarıları için ise yine Normal dağılım en iyi uyumu sağlamıştır.

Uygun kopula seçimleri en küçük Cramer von Mises (CvM), en küçük AIC, BIC ve en büyük CIC değerleri dikkate alınarak gerçekleştirilmiş ve sonuçlar Çizelge 5'te verilmiştir. Ayrıca Şekil 3'te teorik kopula modelleri ile ampirik kopula modellerinin karşılaştırıldığı grafikler yer almaktadır. Bu grafikler, seçilen kopula modellerinin verilerle uyumlu olduğunu ve sonuçların tutarlılığını göstermektedir. Şekil 4'te gerçek verilerin seçilen kopula fonksiyonlarına uyumunu gösteren grafikler verilmiştir. Burada öğrencilerin tümü turuncu, erkek öğrenciler mavi, kız öğrenciler kırmızı renkle gösterilmiş olup, her bir popülasyon için konturlar siyah çizgi ile belirtilmiştir.

Çizelge 4. Öğrencilerin tümü ve erkek/kız öğrenciler için marjinal dağılım uyum iyiliği sonuçları.

Cinsiyet	Alan	Marjinal Dağılım	KS	p değeri	AIC	Par1	Par2
Tüm Öğrenciler	Mat	Normal*	0.0173	0.0330	81158.4128	452.7008	87.3874
		Log- Normal	0.0278	0.0000	81370.5091	6.0959	0.1999
		Gamma	0.0634	0.0000	82168.0375	42.0705	0.0933
		Weibull	0.0405	0.0000	81479.7821	5.5739	488.7385
	Oku	Normal*	0.0128	0.2114	81219.1908	464.2299	87.7737
		Log- Normal	0.0366	0.0000	81494.7186	6.1217	0.1965
		Gamma	0.0266	0.0001	81320.3420	27.0199	0.0583
		Weibull	0.0307	0.0000	81418.4838	5.8079	500.5220
	Fen	Normal*	0.0184	0.0187	80466.4291	467.4865	83.1075
		Log- Normal	0.0300	0.0000	80644.9634	6.1310	0.1831
		Gamma	0.0214	0.0036	80517.9522	31.6524	0.0676
		Weibull	0.0396	0.0000	80737.8217	6.1311	502.3828
Erkek	Mat	Normal*	0.0113	0.7594	41288.6148	454.8183	89.0316
		Log- Normal	0.0383	0.0001	41463.2541	6.0997	0.2048
		Gamma	0.0240	0.0363	41353.9187	25.3650	0.0558
		Weibull	0.0377	0.0001	41409.9819	5.5629	491.3234
	Oku	Normal*	0.0145	0.4505	41330.4218	450.7126	89.5659
		Log- Normal	0.0357	0.0003	41450.1115	6.0902	0.2064
		Gamma	0.0256	0.0203	41365.2645	24.0716	0.0534
		Weibull	0.0345	0.0005	41430.1874	5.5177	487.4218
	Fen	Normal*	0.0233	0.0458	40976.3247	462.6524	85.1404
		Log- Normal	0.0267	0.0140	41056.6358	6.1195	0.1894
		Gamma	0.0248	0.0273	40991.1356	29.0706	0.0629
		Weibull	0.0413	0.0000	41125.0956	5.8948	498.1308
Kız	Mat	Normal	0.0255	0.0242	39864.3473	450.5231	85.6082
		Log- Normal	0.0215	0.0878	39899.6069	6.0919	0.1946
		Gamma*	0.0132	0.5937	39845.4470	27.3982	0.0609
		Weibull	0.0469	0.0000	40066.9974	5.5908	486.0297
	Oku	Normal*	0.0160	0.3517	39706.4430	478.1383	83.6409
		Log- Normal	0.0331	0.0012	39801.4122	6.1541	0.1802
<i>Çizelge 4'ün devamı.</i>							
Kız	Oku	Gamma	0.0570	0.0000	40026.2207	46.6148	0.0974
		Weibull	0.0368	0.0002	39843.5830	6.2242	513.3180
	Fen	Normal*	0.0158	0.3637	39460.0244	472.4610	80.6608
		Log- Normal	0.0329	0.0013	39543.8684	6.1429	0.1755
		Gamma	0.0248	0.0303	39485.2664	33.6834	0.0713
		Weibull	0.0408	0.0000	39588.5474	6.4067	506.5585

Çizelge 5'te öğrencilerin tümü ve erkek/kız öğrenciler için en iyi kopula modeli seçimi verilmiştir.

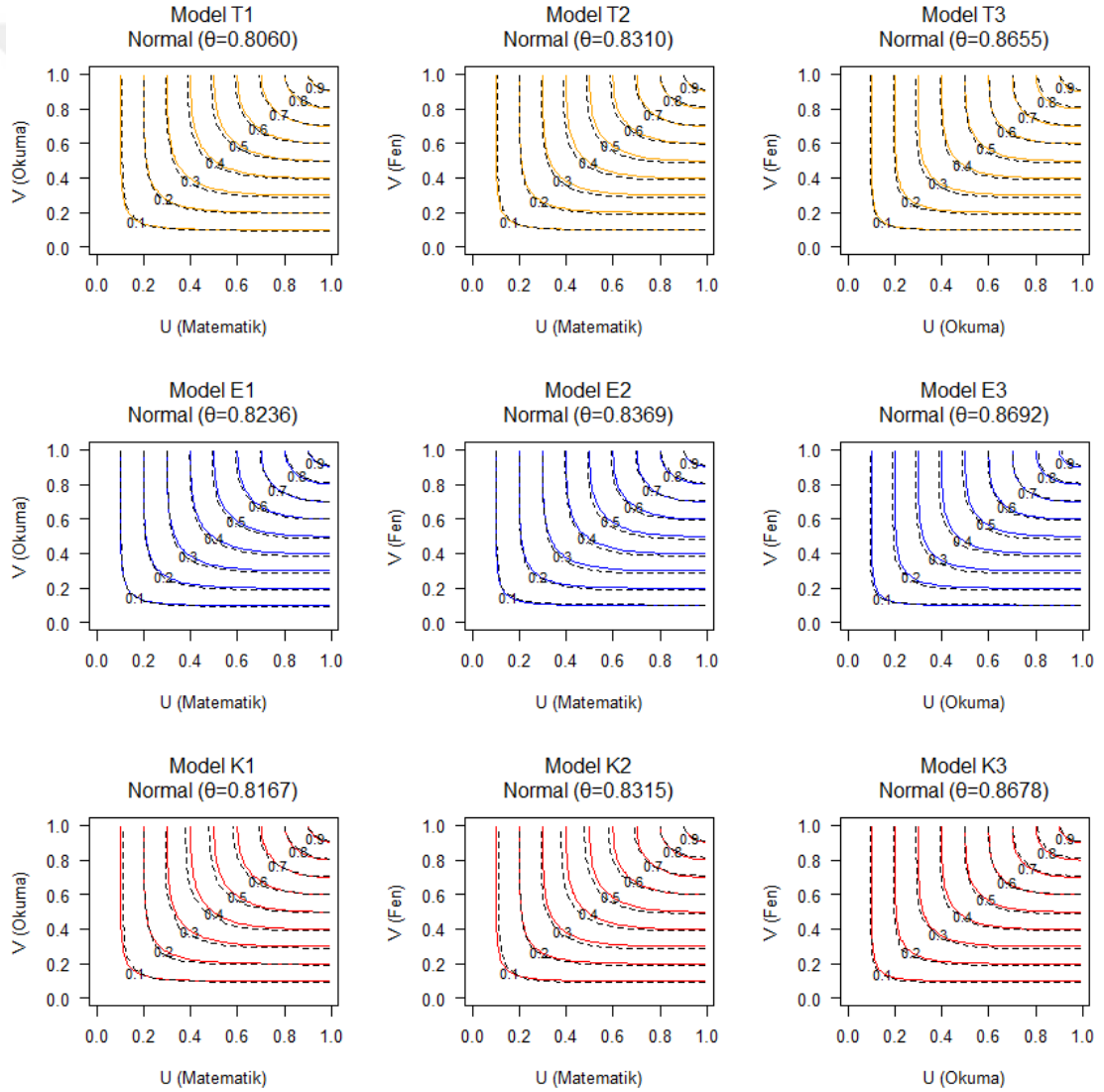
Çizelge 5. Öğrencilerin tümü ve erkek/kız öğrenciler için en iyi kopula modeli seçimi.

Model	Kopula	Uyum İyiliği Testi		Bilgi Kriterleri		
		CvM	p değeri	AIC	BIC	CIC
Model T1	Normal*	0.0622	0.2500	-7212.1231	-7205.2852	3603.3102
	t	0.3197	0.2500	-6881.3193	-6874.4815	3434.1436
	Clayton	2.1885	0.2500	-5030.6774	-5023.8396	1732.4686
	Frank	0.2867	0.2500	-6781.7262	-6774.8884	3388.0643
	Gumbel	0.4490	0.2500	-6756.3696	-6749.5318	3370.1041
	Joe	3.9804	0.2500	-5494.7077	-5487.8699	2736.4352
Model T2	Normal*	0.1170	0.2500	-8066.1956	-8059.3578	4033.2332
	t	0.3812	0.2500	-7690.8034	-7683.9655	3842.4600
	Clayton	2.4992	0.2500	-5371.6524	-5364.8146	1656.8415
	Frank	0.3525	0.2500	-7594.3389	-7587.5010	3797.0986
	Gumbel	0.3029	0.2500	-7732.5628	-7725.7249	3849.0422
	Joe	3.3274	0.2500	-6468.6581	-6461.8203	3223.7083
Model T3	Normal*	0.0759	0.2500	-9510.0678	-9503.2300	4748.6630
	t	0.2916	0.2500	-9179.6044	-9172.7666	4573.3194
	Clayton	2.0160	0.2500	-6704.7969	-6697.9591	2262.7781
	Frank	0.2996	0.2500	-9036.3451	-9029.5073	4515.8148
	Gumbel	0.4181	0.2500	-8994.6840	-8987.8462	4481.5074
	Joe	4.0574	0.2500	-7375.5965	-7368.7586	3681.0214
Model E1	Normal*	0.0382	0.0055	-3949.6947	-3943.5359	1971.3392
	t	0.1760	0.0005	-3770.5387	-3764.3799	1879.2329
	Clayton	1.0791	0.0005	-2776.0623	-2769.9035	952.6383
	Frank	0.1445	0.0005	-3742.9406	-3736.7818	1869.7206
	Gumbel	0.2587	0.0005	-3680.1983	-3674.0395	1830.0194
	Joe	2.1695	0.0005	-2982.7395	-2976.5807	1488.5478
Model E2	Normal*	0.0642	0.0005	-4198.6269	-4192.4681	2094.2197
	t	0.2113	0.0005	-3992.9691	-3986.8103	1992.3079
	Clayton	1.2410	0.0005	-2813.0227	-2806.8639	868.3719
	Frank	0.1699	0.0005	-3956.3433	-3950.1844	1979.0236
	Gumbel	0.1756	0.0005	-4001.4113	-3995.2525	1999.8309
	Joe	1.7687	0.0005	-3334.9050	-3328.7462	1661.3668
Model E3	Normal*	0.0554	0.0005	-4907.5615	-4901.4027	2450.2747
	t	0.1665	0.0005	-4740.0455	-4733.8867	2362.3670
	Clayton	1.0920	0.0005	-3374.4038	-3368.2450	1060.4477
	Frank	0.1688	0.0005	-4692.2232	-4686.0644	2347.4177
	Gumbel	0.1804	0.0005	-4706.9008	-4700.7420	2340.8251
	Joe	1.8624	0.0005	-3915.8442	-3909.6854	1951.9165
Model K1	Normal*	0.0437	0.0015	-3720.1955	-3714.0651	1856.7730
	t	0.1718	0.0005	-3574.1021	-3567.9718	1784.1999
	Clayton	1.0720	0.0005	-2592.8684	-2586.7380	869.8849
	Frank	0.1316	0.0005	-3523.4632	-3517.3328	1760.6693
	Gumbel	0.2387	0.0005	-3512.4822	-3506.3518	1749.8277
	Joe	2.0227	0.0005	-2867.9035	-2861.7731	1425.3621
Model K2	Normal*	0.0694	0.0005	-3978.8169	-3972.6866	1984.5701
	t	0.1988	0.0005	-3805.7479	-3799.6176	1899.9257
	Clayton	1.2652	0.0005	-2627.0993	-2620.9690	783.9393
	Frank	0.1782	0.0005	-3771.2157	-3765.0853	1882.7061
	Gumbel	0.1466	0.0005	-3843.7876	-3837.6572	1918.8872
	Joe	1.6020	0.0005	-3234.5420	-3228.4116	1609.1090
Model K3	Normal*	0.0334	0.0045	-4734.6224	-4728.4920	2361.1666
	t	0.1314	0.0005	-4582.6598	-4576.5294	2289.7190
	Clayton	0.9597	0.0005	-3421.9421	-3415.8117	1222.6956
	Frank	0.1593	0.0005	-4438.3191	-4432.1888	2216.8263
	Gumbel	0.2196	0.0005	-4454.8816	-4448.7513	2224.6088
	Joe	2.0601	0.0005	-3637.2222	-3631.0919	1809.5249

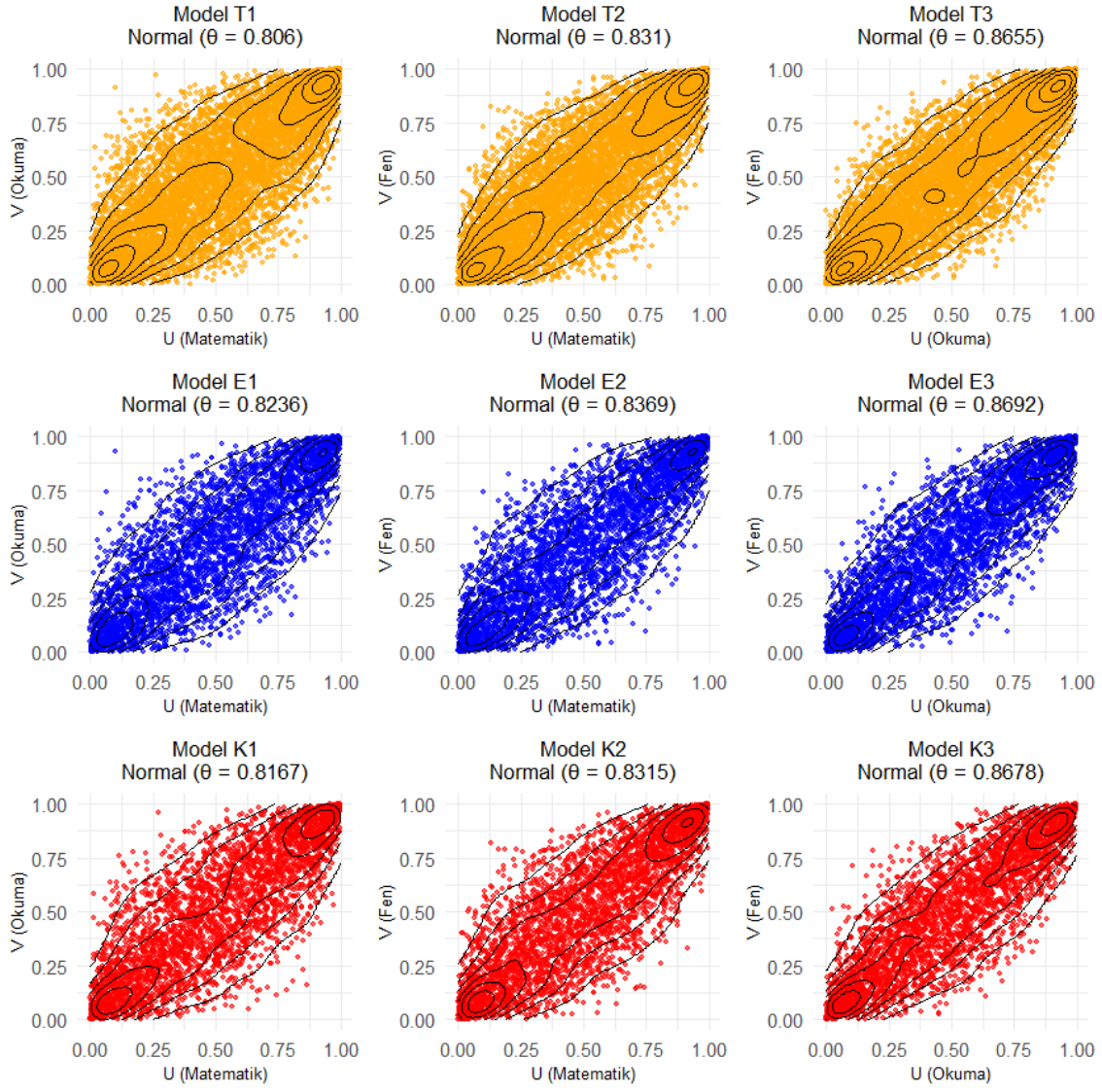
Her bir model için seçilen kopulalara ilişkin parametre tahmin (MPLE) ve standart hata değerleri Çizelge 6’da sunulmuştur.

Çizelge 6. Öğrencilerin tümü ve erkek/kız öğrenciler için seçilen kopula modellerine yönelik parametre tahmin sonuçları.

Cinsiyet	Çift	Model	Kopula	Tahmin	Standart Hata
Tüm Öğrenciler	Matematik-Okuma	Model T1	Normal	0.8060	0.0039
	Matematik-Fen	Model T2	Normal	0.8310	0.0035
	Okuma-Fen	Model T3	Normal	0.8655	0.0026
Erkek	Matematik-Okuma	Model E1	Normal	0.8236	0.0048
	Matematik-Fen	Model E2	Normal	0.8369	0.0048
	Okuma-Fen	Model E3	Normal	0.8692	0.0035
Kız	Matematik-Okuma	Model K1	Normal	0.8167	0.0051
	Matematik-Fen	Model K2	Normal	0.8315	0.0049
	Okuma-Fen	Model K3	Normal	0.8678	0.0039



Şekil 3. Genel durum için uyan teorik (—, —, —) kopula modelleri ile ampirik (---) kopula modellerinin karşılaştırılması.



Şekil 4. Genel durum için gerçek verilerin seçilen kopula fonksiyonlarına uyumu.

4.1.2. İkinci Durum: Evdeki Eğitim Olanakları Değişkeni için PISA Verilerine Kopula Analizi

Çizelge 7’de evdeki eğitim olanakları değişkeni açısından öğrencilerin tümü ve erkek/kız öğrenciler için model tanımlamaları verilmiştir.

Çizelge 7. Evdeki eğitim olanakları değişkeni açısından öğrencilerin tümü ve erkek/kız öğrenciler için model tanımlamaları.

Cinsiyet	Evdeki Eğitim Olanakları	Çift	Model
Tüm Öğrenciler	Düşük	Matematik-Okuma Matematik-Fen Okuma-Fen	Model T11 Model T12 Model T13
	Orta	Matematik-Okuma Matematik-Fen Okuma-Fen	Model T21 Model T22 Model T23
	Yüksek	Matematik-Okuma Matematik-Fen Okuma-Fen	Model T31 Model T32 Model T33
Erkek	Düşük	Matematik-Okuma Matematik-Fen Okuma-Fen	Model E11 Model E12 Model E13
	Orta	Matematik-Okuma Matematik-Fen Okuma-Fen	Model E21 Model E22 Model E23
	Yüksek	Matematik-Okuma Matematik-Fen Okuma-Fen	Model E31 Model E32 Model E33
Kız	Düşük	Matematik-Okuma Matematik-Fen Okuma-Fen	Model K11 Model K12 Model K13
	Orta	Matematik-Okuma Matematik-Fen Okuma-Fen	Model K21 Model K22 Model K23
	Yüksek	Matematik-Okuma Matematik-Fen Okuma-Fen	Model K31 Model K32 Model K33

Çizelge 7 evdeki eğitim olanaklarına göre öğrencilerin tümü ve erkek/kız öğrenciler için model tanımlamalarının matematik-okuma, matematik-fen ve okuma-fen çiftleri için oluşturulduğunu göstermektedir.

Çizelge 8’de evdeki eğitim olanakları değişkeni açısından öğrencilerin tümü ve erkek/kız öğrenciler için betimsel istatistikler verilmiştir. Genel olarak, her iki cinsiyet için de evdeki eğitim olanakları arttıkça başarı ortalamalarının yükseldiği gözlenmiştir. Erkek öğrencilerde evdeki eğitim olanaklarının düşük olduğu durumda başarı dağılımları genellikle simetrik iken, kız öğrencilerde özellikle evdeki düşük eğitim olanaklarında başarı dağılımlarının sağa çarpık olduğu, yani daha yüksek başarıların daha az sıklıkla gözlemlendiği belirlenmiştir. Kız öğrenciler, evdeki eğitim olanaklarının

her düzeyinde okuma ve fen başarılarında erkeklerden daha yüksek ortalamalara sahip olup, çarpıklık ve basıklık değerleri genellikle simetriye yakın bir dağılım sergilemektedir.

Çizelge 8. Evdeki eğitim olanakları değişkeni açısından öğrencilerin tümü ve erkek/kız öğrenciler için betimsel istatistikler.

Cinsiyet	Evdeki Eğitim Olanakları	Alan	N	Ortalama	Medyan	Standart Sapma	Çarpıklık	Basıklık
Tüm Öğrenciler	Düşük	Matematik	254	362.5930	367.0030	94.7986	-0.0143	-0.6678
		Okuma	254	383.7899	378.6185	82.0437	0.2221	-0.5006
		Fen	254	404.9426	396.3785	82.6802	0.2186	-0.4867
	Orta	Matematik	3335	444.1821	440.9490	81.7740	0.2300	-0.1274
		Okuma	3335	454.9197	454.0640	83.2758	0.0381	-0.3072
		Fen	3335	457.5665	455.6850	79.0390	0.1245	-0.2980
	Yüksek	Matematik	3301	468.2406	464.8880	86.9453	0.2119	-0.2264
		Okuma	3301	479.8256	479.3790	87.9441	0.0392	-0.3455
		Fen	3301	482.3211	480.6260	83.4528	0.0392	-0.3581
Erkek	Düşük	Matematik	153	365.3851	376.5970	99.2378	-0.0397	-0.5918
		Okuma	153	373.6318	366.3450	86.9523	0.3074	-0.5166
		Fen	153	399.9808	395.8160	85.2644	0.1899	-0.3253
	Orta	Matematik	1635	446.7775	446.9170	84.2605	0.1052	-0.3052
		Okuma	1635	441.3712	441.5230	85.5481	0.0447	-0.4112
		Fen	1635	453.7162	451.1460	81.6772	0.1292	-0.3308
	Yüksek	Matematik	1706	470.5440	467.2435	86.8013	0.2305	-0.2555
		Okuma	1706	466.5770	464.0395	88.7855	0.1343	-0.3960
		Fen	1706	476.8362	472.8860	84.7532	0.1374	-0.2948
Kız	Düşük	Matematik	101	358.3634	360.5450	87.9623	0.0004	-0.8263
		Okuma	101	399.1779	393.6810	71.6977	0.3299	-0.4532
		Fen	101	412.4590	398.4060	78.4219	0.3445	-0.7898
	Orta	Matematik	1700	441.6859	435.2780	79.2538	0.3627	0.1074
		Okuma	1700	467.9501	465.8625	78.8890	0.1209	-0.2779
		Fen	1700	461.2697	458.4480	76.2567	0.1412	-0.2752
	Yüksek	Matematik	1595	465.7769	462.6160	87.0589	0.1939	-0.1907
		Okuma	1595	493.9962	493.5980	84.8008	-0.0265	-0.1984
		Fen	1595	488.1876	489.7940	81.6587	-0.0608	-0.3811

Çizelge 9’da evdeki eğitim olanakları değişkeni açısından öğrencilerin tümü ve erkek/kız öğrenciler için korelasyon ve simetriklik test değerleri verilmiştir.

Çizelge 9’da verilen sonuçlara göre her iki cinsiyette de güçlü pozitif ilişkiler tespit edilmiştir. Özellikle kız öğrencilerde okuma ve fen başarıları arasındaki ilişki oldukça yüksek bulunmuştur. Tüm korelasyon testlerinin p değerleri 0.05'in altında olup, bu ilişkilerin istatistiksel olarak anlamlı olduğu bulunmuştur. Ayrıca, simetriklik testi sonuçlarına göre modeller simetrik dağılım varsayımını desteklemektedir ($p > 0.05$).

Çizelge 9. Evdeki eğitim olanakları değişkeni açısından öğrencilerin tümü ve erkek/kız öğrenciler için korelasyon ve simetriklik test değerleri.

Model	Pearson*	Spearman*	Kendall*	Simetriklik Testi (p değeri**)
Model T11	0.8010	0.8122	0.6123	0.018151 (0.3721)
Model T12	0.8094	0.8089	0.6092	0.013702 (0.6688)
Model T13	0.8379	0.8431	0.6496	0.012416 (0.5649)
Model T21	0.7881	0.7803	0.5829	0.016642 (0.4331)
Model T22	0.8208	0.8161	0.6188	0.017705 (0.2413)
Model T23	0.8557	0.8547	0.6625	0.011968 (0.6049)
Model T31	0.8043	0.8017	0.6047	0.013257 (0.6918)
Model T32	0.8330	0.8305	0.6355	0.008239 (0.9785)
Model T33	0.8691	0.8662	0.6790	0.008860 (0.9196)
Model E11	0.8280	0.8412	0.6483	0.012218 (0.6798)
Model E12	0.8417	0.8435	0.6488	0.007646 (0.9745)
Model E13	0.8323	0.8435	0.6452	0.018625 (0.2243)
Model E21	0.8094	0.8070	0.6082	0.010212 (0.9316)
Model E22	0.8260	0.8244	0.6271	0.021749 (0.0854)
Model E23	0.8669	0.8684	0.6790	0.015981 (0.1863)
Model E31	0.8191	0.8169	0.6214	0.018632 (0.2133)
Model E32	0.8372	0.8328	0.6379	0.010334 (0.8776)
Model E33	0.8687	0.8639	0.6763	0.008717 (0.9436)
Model K11	0.7947	0.8083	0.6040	0.013136 (0.6748)
Model K12	0.7652	0.7534	0.5489	0.015293 (0.6259)
Model K13	0.8549	0.8545	0.6749	0.020782 (0.1084)
Model K21	0.7975	0.7887	0.5928	0.016194 (0.4201)
Model K22	0.8210	0.8156	0.6185	0.010656 (0.9006)
Model K23	0.8524	0.8480	0.6554	0.010287 (0.8846)
Model K31	0.8191	0.8184	0.6226	0.014972 (0.5230)
Model K32	0.8373	0.8380	0.6442	0.010941 (0.8107)
Model K33	0.8741	0.8696	0.6836	0.018021 (0.0774)

(*) Tüm korelasyonlar anlamlıdır ($p < 0.05$)

(**) Tüm modeller simetrikdir ($p > 0.05$)

Çizelge 10'da evdeki eğitim olanakları değişkeni açısından öğrencilerin tümü için marjinal dağılım uyum iyiliği sonuçları ve her bir model için en iyi uyan marjinal dağılımları yer almaktadır. Bu dağılımlar (*) ile belirtilmiştir. Marjinal model seçimleri $p > 0.05$ olan en küçük KS ve en küçük AIC değerlerine göre yapılmıştır.

En iyi uyum sağlayan dağılımlar evdeki eğitim olanakları düşük düzey olan öğrenciler için matematikte Weibull, okumada Log-Normal, fende Normal; orta düzey olan öğrenciler için matematikte Gamma, okumada Normal, fende Normal; yüksek olanlar için matematikte Gamma, okumada Normal, fende Normal olmuştur.

Çizelge 10 Evdeki eğitim olanakları değişkeni açısından öğrencilerin tümü için marjinal dağılım uyum iyiliği sonuçları.

Evdeki Eğitim Olanakları	Alan	Marjinal Dağılım	KS	p değeri	AIC	Par1	Par2
Düşük	Mat	Normal	0.0854	0.0490	3036.1100	362.5930	94.6118
		Log- Normal	0.0901	0.0324	3053.4599	5.8561	0.2802
		Gamma	0.0884	0.0378	3042.7411	13.7592	0.0379
		Weibull*	0.0775	0.0943	3033.4348	4.3163	398.5938
	Oku	Normal	0.0375	0.8683	2962.7029	383.7899	81.8820
		Log- Normal*	0.0441	0.7074	2962.6670	5.9267	0.2184
		Gamma	0.0892	0.0351	2993.2198	34.6196	0.0903
		Weibull	0.0555	0.4138	2971.5750	5.0837	417.0209
	Fen	Normal*	0.0730	0.1337	2966.6290	404.9426	82.5173
		Log- Normal	0.0398	0.8170	2966.8944	5.9825	0.2083
		Gamma	0.0864	0.0452	2993.9014	37.1011	0.0916
		Weibull	0.0810	0.0714	2976.7833	5.3153	438.8098
Orta	Mat	Normal	0.0218	0.0839	38841.7306	444.1821	81.7618
		Log- Normal	0.0244	0.0382	38848.3018	6.0790	0.1875
		Gamma*	0.0127	0.6592	38810.4498	29.3911	0.0662
		Weibull	0.0466	0.0000	39044.2797	5.7767	478.3653
	Oku	Normal*	0.0167	0.3117	38963.1158	454.9197	83.2633
		Log- Normal	0.0395	0.0001	39091.8694	6.1026	0.1899
		Gamma	0.0285	0.0089	39011.2801	28.6909	0.0631
		Weibull	0.0331	0.0013	39065.0600	5.9993	489.5758
	Fen	Normal*	0.0231	0.0571	38614.8328	457.5665	79.0272
		Log- Normal	0.0266	0.0177	38671.1245	6.1106	0.1769
		Gamma	0.0650	0.0000	38927.9972	48.8615	0.1066
		Weibull	0.0436	0.0000	38777.0917	6.2600	490.9354
Yüksek	Mat	Normal	0.0223	0.0751	38850.6077	468.2406	86.9322
		Log- Normal	0.0268	0.0174	38864.7203	6.1314	0.1894
		Gamma*	0.0140	0.5344	38824.3338	28.7607	0.0614
		Weibull	0.0434	0.0000	39031.8914	5.7665	504.5372
	Oku	Normal*	0.0183	0.2173	38926.0172	479.8256	87.9308
		Log- Normal	0.0376	0.0002	39045.4638	6.1559	0.1899
		Gamma	0.0305	0.0042	38969.7291	28.6844	0.0599
		Weibull	0.0313	0.0031	39023.9002	5.9982	516.4435
	Fen	Normal*	0.0181	0.2311	38579.9391	482.3211	83.4402
		Log- Normal	0.0339	0.0010	38683.8721	6.1631	0.1785
		Gamma	0.0296	0.0062	38617.9165	32.4565	0.0674
		Weibull	0.0367	0.0003	38691.4854	6.3448	517.4375

Çizelge 11’de evdeki eğitim olanakları değişkeni açısından erkek öğrenciler için marjinal dağılım uyum iyiliği sonuçları verilmiştir. En iyi uyum sağlayan dağılımların evdeki eğitim olanakları düşük düzey olan erkek öğrenciler için matematikte Weibull, okumada Normal, fende Gamma; orta düzey olan öğrenciler için matematikte Normal, okumada Normal, fende Normal; yüksek olanlar için matematikte Gamma, okumada Normal, fende Normal olduğunu göstermektedir.

Çizelge 11. Evdeki eğitim olanakları değişkeni açısından erkek öğrenciler için marjinal dağılım uyum iyiliği sonuçları.

Evdeki Eğitim Olanakları	Alan	Marjinal Dağılım	KS	p değeri	AIC	Par1	Par2
Düşük	Mat	Normal	0.0835	0.2361	1844.0327	365.3851	98.9129
		Log- Normal	0.1021	0.0824	1857.1806	5.8603	0.2943
		Gamma	0.0869	0.1983	1849.4386	12.5384	0.0343
		Weibull*	0.0769	0.3260	1841.9317	4.1684	402.5597
	Oku	Normal*	0.0540	0.7636	1803.5920	373.6318	86.6677
		Log- Normal	0.0694	0.4535	1800.2014	5.8959	0.2358
		Gamma*	0.0627	0.5846	1799.1500	18.7380	0.0501
		Weibull	0.0653	0.5308	1808.4101	4.6584	408.1857
	Fen	Normal	0.0475	0.8804	1797.5934	399.9808	84.9853
		Log- Normal	0.0616	0.6077	1799.6863	5.9681	0.2190
		Gamma*	0.0581	0.6793	1796.8978	21.3366	0.0535
		Weibull	0.0706	0.4303	1802.8045	5.1087	434.4287
Orta	Mat	Normal*	0.0170	0.7310	19141.8254	446.7775	84.2347
		Log- Normal	0.0428	0.0050	19180.9615	6.0836	0.1944
		Gamma	0.0327	0.0601	19149.8782	27.1391	0.0608
		Weibull	0.0401	0.0105	19203.0397	5.7729	481.6767
	Oku	Normal*	0.0192	0.5811	19191.4163	441.3712	85.5219
		Log- Normal	0.0425	0.0054	19254.4915	6.0702	0.2015
		Gamma	0.0316	0.0763	19213.5396	25.6945	0.0581
		Weibull	0.0319	0.0715	19230.8552	5.6932	476.5935
	Fen	Normal*	0.0279	0.1576	19040.0030	453.7162	81.6522
		Log- Normal	0.0293	0.1208	19069.4545	6.1008	0.1846
		Gamma	0.0806	0.0000	19258.5373	48.2940	0.1062
		Weibull	0.0406	0.0090	19112.4624	6.0264	487.9299
Yüksek	Mat	Normal	0.0243	0.2643	20074.2931	470.5440	86.7758
		Log- Normal	0.0268	0.1732	20073.2200	6.1366	0.1876
		Gamma*	0.0165	0.7410	20055.7739	28.7082	0.0611
		Weibull	0.0464	0.0013	20171.7918	5.7964	506.8684
	Oku	Normal*	0.0260	0.1975	20151.4134	466.5770	88.7595
		Log- Normal	0.0304	0.0856	20181.6387	6.1267	0.1955
		Gamma	0.0804	0.0000	20427.1537	45.1324	0.0967
		Weibull	0.0439	0.0028	20216.3691	5.7242	503.4106
	Fen	Normal*	0.0259	0.2015	19992.8236	476.8362	84.7284
		Log- Normal	0.0268	0.1733	20020.3232	6.1509	0.1821
		Gamma	0.0666	0.0000	20216.8212	49.5142	0.1039
		Weibull	0.0440	0.0027	20073.8805	6.0859	512.4590

Çizelge 12’de evdeki eğitim olanakları değişkeni açısından kız öğrenciler için marjinal dağılım uyum iyiliği sonuçları verilmiştir. En iyi uyum sağlayan dağılımların evdeki eğitim olanakları düşük düzey olan kız öğrenciler için matematikte Weibull, okumada Log-Normal, fende Log-Normal; orta düzey olan öğrenciler için matematikte Log-Normal, okumada Normal, fende Normal; yüksek olanlar için matematikte Gamma, okumada Normal, fende Normal olduğunu göstermektedir.

Çizelge 12 Evdeki eğitim olanakları değişkeni açısından kız öğrenciler için marjinal dağılım uyum iyiliği sonuçları.

Evdeki Eğitim Olanakları	Alan	Marjinal Dağılım	KS	p değeri	AIC	Par1	Par2
Düşük	Mat	Normal	0.0986	0.2797	1193.9560	358.3634	87.5257
		Log- Normal	0.1039	0.2256	1198.0386	5.8497	0.2573
		Gamma	0.0994	0.2710	1195.2476	15.4475	0.0431
		Weibull*	0.0902	0.3835	1193.0293	4.6249	392.4949
	Oku	Normal	0.0837	0.4781	1152.6573	399.1779	71.3419
		Log- Normal*	0.0482	0.9730	1149.9515	5.9734	0.1792
		Gamma	0.0575	0.8924	1149.9803	31.1312	0.0781
		Weibull	0.1062	0.2046	1159.4555	5.9500	429.4407
	Fen	Normal	0.1385	0.0414	1170.7654	412.4590	78.0327
		Log- Normal*	0.1118	0.1603	1166.7381	6.0043	0.1888
		Gamma	0.1200	0.1090	1167.2267	28.3195	0.0687
		Weibull	0.1415	0.0350	1176.3761	5.6768	445.2812
Orta	Mat	Normal	0.0359	0.0253	19694.4179	441.6859	79.2305
		Log- Normal*	0.0147	0.8536	19660.1867	6.0745	0.1805
		Gamma	0.0542	0.0001	19788.1485	45.1288	0.1021
		Weibull	0.0585	0.0000	19839.7410	5.7899	475.1238
	Oku	Normal*	0.0196	0.5339	19678.7320	467.9501	78.8658
		Log- Normal	0.0287	0.1221	19706.3077	6.1338	0.1724
		Gamma	0.0514	0.0003	19777.1576	47.2835	0.1010
		Weibull	0.0438	0.0029	19764.9994	6.4092	501.4310
	Fen	Normal*	0.0224	0.3607	19563.3487	461.2697	76.2343
		Log- Normal	0.0251	0.2325	19581.8719	6.1200	0.1685
		Gamma	0.0575	0.0000	19674.4995	50.6932	0.1098
		Weibull	0.0496	0.0005	19658.6931	6.5032	493.7424
Yüksek	Mat	Normal	0.0223	0.4086	18777.8205	465.7769	87.0316
		Log- Normal	0.0283	0.1540	18792.2675	6.1258	0.1911
		Gamma*	0.0204	0.5235	18769.9071	28.3919	0.0611
		Weibull	0.0427	0.0059	18861.8263	5.7373	502.0037
	Oku	Normal*	0.0181	0.6715	18693.9868	493.9962	84.7742
		Log- Normal	0.0419	0.0074	18769.8000	6.1871	0.1785
		Gamma	0.0298	0.1186	18728.3738	32.8852	0.0665
		Weibull	0.0338	0.0528	18739.6598	6.4171	529.5292
	Fen	Normal*	0.0191	0.6028	18573.5433	488.1876	81.6331
		Log- Normal	0.0445	0.0036	18647.5229	6.1761	0.1737
		Gamma	0.0346	0.0442	18608.4186	34.5749	0.0708
		Weibull	0.0324	0.0709	18603.9610	6.6643	522.6050

Çizelge 13. Evdeki eğitim olanakları değişkeni açısından öğrencilerin tümü için en iyi kopula modeli seçimi.

Model	Kopula	Uyum İyiği Testi		Bilgi Kriterleri		
		CvM	p değeri	AIC	BIC	CIC
Model T11	Normal	0.0377	0.0105	-241.1930	-237.6557	115.0638
	t	0.0552	0.0025	-230.2299	-226.6926	111.1493
	Clayton	0.1264	0.0005	-155.1073	-151.5699	27.7721
	Frank*	0.0249	0.0774	-252.6532	-249.1158	125.5816
	Gumbel	0.0479	0.0065	-232.2153	-228.6780	112.9858
	Joe	0.1831	0.0005	-194.6250	-191.0877	98.1949
Model T12	Normal*	0.0158	0.4031	-258.2590	-254.7217	129.6224
	t	0.0402	0.0075	-237.0750	-233.5377	117.4965
	Clayton	0.0711	0.0005	-170.4583	-166.9209	41.1958
	Frank	0.0155	0.3631	-251.5319	-247.9946	125.5083
	Gumbel	0.0495	0.0075	-237.6967	-234.1594	116.7277
	Joe	0.2172	0.0005	-193.3159	-189.7786	94.6948
Model T13	Normal	0.0468	0.0035	-278.2260	-274.6887	136.9393
	t	0.0606	0.0005	-270.4981	-266.9608	136.9958
	Clayton	0.1298	0.0005	-178.7163	-175.1790	28.2941
	Frank*	0.0204	0.1224	-294.4036	-290.8663	147.6057
	Gumbel	0.0476	0.0085	-274.4399	-270.9026	132.4921
	Joe	0.1764	0.0005	-232.7427	-229.2054	117.1936
Model T21	Normal	0.0367	0.0115	-3195.1668	-3189.0545	1598.0647
	t	0.1685	0.0005	-3038.3853	-3032.2730	1514.2713
	Clayton	1.0878	0.0005	-2165.4595	-2159.3472	713.0134
	Frank	0.1414	0.0005	-3001.6213	-2995.5091	1499.5473
	Gumbel	0.2034	0.0005	-3038.5254	-3032.4132	1515.0184
	Joe	1.7624	0.0005	-2505.7014	-2499.5891	1246.0546
Model T22	Normal*	0.0530	0.0005	-3652.6861	-3646.5739	1822.6106
	t	0.2063	0.0005	-3475.1128	-3469.0005	1730.7865
	Clayton	1.0974	0.0005	-2423.6599	-2417.5476	729.8924
	Frank	0.1330	0.0005	-3471.2652	-3465.1530	1734.1334
	Gumbel	0.2120	0.0005	-3496.9719	-3490.8597	1746.3032
	Joe	1.8072	0.0005	-2912.8405	-2906.7283	1449.3359
Model T23	Normal*	0.0508	0.0035	-4325.6477	-4319.5355	2160.0459
	t	0.1837	0.0005	-4157.3456	-4151.2333	2072.8798
	Clayton	0.9730	0.0005	-3042.6328	-3036.5206	1002.3057
	Frank	0.1244	0.0005	-4135.6503	-4129.5381	2064.5668
	Gumbel	0.2506	0.0005	-4072.7799	-4066.6677	2032.1855
	Joe	2.0902	0.0005	-3324.1651	-3318.0529	1653.5074
Model T31	Normal*	0.0618	0.0005	-3374.1615	-3368.0595	1681.5836
	t	0.2146	0.0005	-3210.0502	-3203.9483	1599.6123
	Clayton	1.0881	0.0005	-2321.7644	-2315.6625	753.9361
	Frank	0.1218	0.0005	-3252.7020	-3246.6000	1627.3043
	Gumbel	0.2684	0.0005	-3152.7866	-3146.6846	1569.6881
	Joe	2.0505	0.0005	-2556.4447	-2550.3427	1272.6953
Model T32	Normal*	0.1233	0.0005	-3807.7965	-3801.6945	1897.5186
	t	0.2749	0.0005	-3623.7933	-3617.6913	1803.6757
	Clayton	1.3550	0.0005	-2458.7686	-2452.6666	655.3720
	Frank	0.1750	0.0005	-3675.3552	-3669.2532	1839.1644
	Gumbel	0.1634	0.0005	-3681.2037	-3675.1017	1840.3555
	Joe	1.5284	0.0005	-3107.5707	-3101.4688	1546.5725
Model T33	Normal	0.0551	0.0005	-4583.8438	-4577.7418	2285.3032
	t	0.1603	0.0005	-4423.5260	-4417.4240	2204.3901
	Clayton	1.0454	0.0005	-3258.5661	-3252.4642	1095.2881
	Frank	0.1521	0.0005	-4366.4319	-4360.3299	2183.2569
	Gumbel	0.1940	0.0005	-4317.2801	-4311.1782	2157.6477
	Joe	1.9152	0.0005	-3529.0092	-3522.9073	1755.9726

Çizelge 13'te evdeki eğitim olanakları değişkeni açısından öğrencilerin tümü için en iyi kopula modeli seçimi verilmiştir. Uygun kopula seçimleri en küçük Cramer von Mises (CvM), en küçük AIC, BIC ve en büyük CIC değerleri dikkate alınarak gerçekleştirilmiş ve sonuçlar Çizelge 14'te verilmiştir. Ayrıca Şekil 5, teorik ve ampirik kopula modellerinin karşılaştırıldığı grafikleri; Şekil 6 ise gerçek verilerin seçilen kopula fonksiyonlarına uyumunu gösteren grafikleri içermektedir. Şekil 6'da tüm öğrenciler turuncu, erkek öğrenciler mavi, kız öğrenciler kırmızı renkle gösterilmiş; her popülasyonun konturları siyah çizgi ile belirtilmiştir. Bu grafikler, seçilen kopula modellerinin verilerle uyumunu ve sonuçların tutarlılığını göstermektedir.

Çizelge 14'te evdeki eğitim olanakları değişkeni açısından erkek öğrenciler için en iyi kopula modeli seçimi verilmiştir. Erkek öğrenciler için uygun kopula seçimleri en küçük Cramer von Mises (CvM), en küçük AIC, BIC ve en büyük CIC değerleri dikkate alınarak gerçekleştirilmiş ve sonuçlar Çizelge 14'te verilmiştir. Ayrıca Şekil 7, teorik ve ampirik kopula modellerinin karşılaştırıldığı grafikleri; Şekil 8 ise gerçek verilerin seçilen kopula fonksiyonlarına uyumunu gösteren grafikleri içermektedir. Şekil 8'de tüm öğrenciler turuncu, erkek öğrenciler mavi, kız öğrenciler kırmızı renkle gösterilmiş; her popülasyonun konturları siyah çizgi ile belirtilmiştir. Bu grafikler, seçilen kopula modellerinin verilerle uyumunu ve sonuçların tutarlılığını göstermektedir.

Çizelge 14. Evdeki eğitim olanakları değişkeni açısından erkek öğrenciler için en iyi kopula modeli seçimi.

Model	Kopula	Uyum İyiliği Testi		Bilgi Kriterleri		
		CvM	p değeri	AIC	BIC	CIC
Model E11	Normal	0.0309	0.0235	-160.5268	-157.4964	78.6394
	t	0.0347	0.0125	-160.0805	-157.0500	77.3422
	Clayton	0.0759	0.0005	-101.7045	-98.6741	8.9800
	Frank*	0.0167	0.2223	-173.6919	-170.6615	84.7366
	Gumbel	0.0354	0.0235	-160.6966	-157.6661	79.1489
	Joe	0.1283	0.0005	-138.0549	-135.0245	61.8950
Model E12	Normal*	0.0143	0.4461	-177.0821	-174.0517	87.4671
	t	0.0282	0.0395	-165.0112	-161.9808	77.2770
	Clayton	0.0528	0.0085	-113.5975	-110.5670	24.5576
	Frank	0.0162	0.2702	-176.3328	-173.3024	84.9246
	Gumbel	0.0305	0.0385	-167.5535	-164.5230	78.9948
	Joe	0.1303	0.0005	-139.6985	-136.6681	64.6237
Model E13	Normal	0.0378	0.0115	-162.0242	-158.9937	78.4387
	t	0.0494	0.0015	-157.1345	-154.1040	76.5346
	Clayton	0.0911	0.0005	-96.2035	-93.1731	2.0860
	Frank*	0.0207	0.1204	-171.3872	-168.3567	86.0487
	Gumbel	0.0328	0.0355	-166.7235	-163.6931	82.6460
	Joe	0.0916	0.0005	-149.1639	-146.1335	72.6009
Model E21	Normal*	0.0319	0.0225	-1704.2463	-1698.8469	846.9480
	t	0.1139	0.0005	-1612.1597	-1606.7603	803.9543
	Clayton	0.5274	0.0005	-1154.9323	-1149.5329	359.7287
	Frank	0.0631	0.0005	-1632.4727	-1627.0733	814.6000
	Gumbel	0.1345	0.0005	-1603.3696	-1597.9702	799.0946
	Joe	0.9881	0.0005	-1313.1456	-1307.7462	649.9319
Model E22	Normal*	0.0436	0.0035	-1823.8232	-1818.4238	908.8047
	t	0.1310	0.0005	-1732.7807	-1727.3813	864.9755
	Clayton	0.5309	0.0005	-1201.8948	-1196.4954	326.8904
	Frank	0.0598	0.0005	-1758.4100	-1753.0106	879.3316
	Gumbel	0.1323	0.0005	-1747.1018	-1741.7024	870.3753
	Joe	0.9494	0.0005	-1456.9277	-1451.5283	726.1706
Model E2	Normal*	0.0402	0.0025	-2219.2454	-2213.8460	1100.8888
	t	0.1061	0.0005	-2142.4721	-2137.0727	1065.1773
	Clayton	0.4923	0.0005	-1531.4791	-1526.0797	458.0981
	Frank	0.0644	0.0005	-2160.5108	-2155.1114	1083.6490
	Gumbel	0.1264	0.0005	-2114.8745	-2109.4751	1057.1608
	Joe	1.0130	0.0005	-1742.2796	-1736.8802	859.4011
Model E31	Normal*	0.0437	0.0025	-1836.4099	-1830.9679	916.3304
	t	0.1230	0.0005	-1752.5438	-1747.1019	871.7316
	Clayton	0.5844	0.0005	-1239.5138	-1234.0719	353.8382
	Frank	0.0750	0.0005	-1793.9180	-1788.4761	895.0620
	Gumbel	0.1397	0.0005	-1732.8884	-1727.4465	860.4503
	Joe	1.0547	0.0005	-1419.0104	-1413.5685	707.7315
Model E32	Normal*	0.0734	0.0005	-1980.6022	-1975.1603	985.0178
	t	0.1606	0.0005	-1872.5831	-1867.1412	931.3925
	Clayton	0.7262	0.0005	-1254.5368	-1249.0949	282.3220
	Frank	0.1011	0.0005	-1914.4780	-1909.0361	956.8899
	Gumbel	0.0886	0.0005	-1916.6963	-1911.2544	951.8412
	Joe	0.7803	0.0005	-1625.6206	-1620.1787	807.3084
Model E33	Normal*	0.0501	0.0015	-2342.8707	-2337.4288	1166.8050
	t	0.1079	0.0005	-2256.5547	-2251.1128	1120.1798
	Clayton	0.6404	0.0005	-1602.5468	-1597.1049	488.8919
	Frank	0.1047	0.0005	-2227.4291	-2221.9872	1113.0263
	Gumbel	0.0723	0.0005	-2252.1064	-2246.6645	1122.4463
	Joe	0.7975	0.0005	-1885.9234	-1880.4815	938.5881

Çizelge 15'te evdeki eğitim olanakları değişkeni açısından kız öğrenciler için en iyi kopula modeli seçimi verilmiştir.

Çizelge 15. Evdeki eğitim olanakları değişkeni açısından kız öğrenciler için en iyi kopula modeli seçimi.

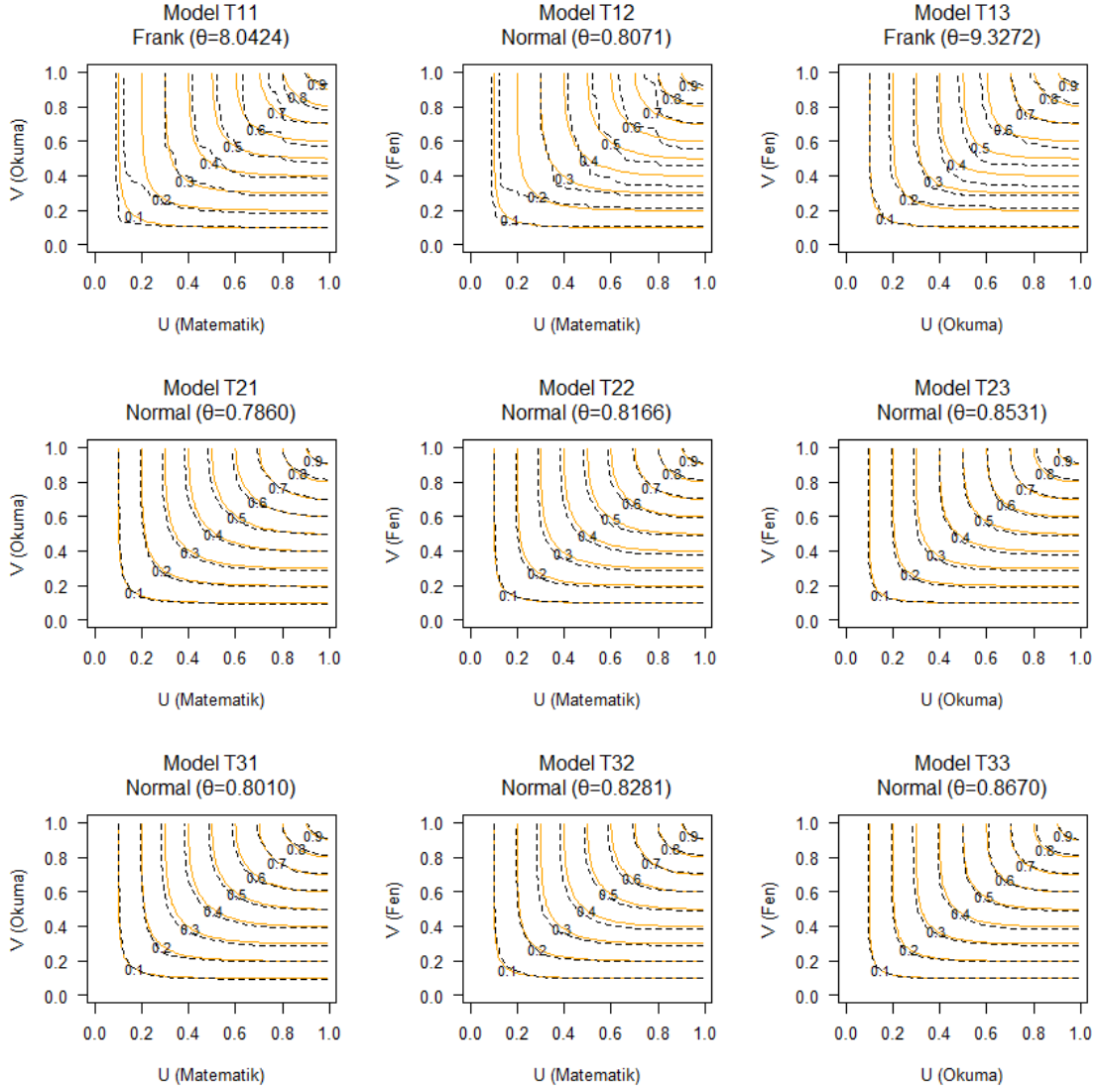
Model	Kopula	Uyum İyiliği Testi		Bilgi Kriterleri		
		CvM	p değeri	AIC	BIC	CIC
Model K11	Normal	0.0279	0.1064	-94.3829	-91.7678	45.8349
	t	0.0395	0.0305	-88.1103	-85.4952	42.8937
	Clayton	0.0673	0.0035	-68.5421	-65.9269	11.8895
	Frank*	0.0233	0.1234	-96.1168	-93.5017	48.8754
	Gumbel	0.0372	0.0485	-85.6661	-83.0510	43.2265
	Joe	0.1033	0.0015	-68.3828	-65.7677	26.4905
Model K12	Normal*	0.0180	0.3881	-81.4144	-78.7993	39.4696
	t	0.0339	0.0794	-73.4414	-70.8262	34.2042
	Clayton	0.0517	0.0155	-55.2510	-52.6358	10.5081
	Frank	0.0157	0.4890	-76.5508	-73.9357	37.5761
	Gumbel	0.0292	0.1134	-74.9429	-72.3278	36.6713
	Joe	0.0842	0.0025	-61.7298	-59.1147	29.9567
Model K13	Normal	0.0294	0.0514	-123.6421	-121.0270	60.3359
	t	0.0347	0.0255	-122.1683	-119.5532	58.7985
	Clayton	0.0486	0.0095	-98.0322	-95.4171	22.8606
	Frank*	0.0150	0.3541	-127.3674	-124.7523	63.3642
	Gumbel	0.0410	0.0215	-113.6253	-111.0102	57.0905
	Joe	0.1292	0.0005	-89.1367	-86.5216	41.3561
Model K21	Normal*	0.0313	0.0195	-1684.5886	-1679.1502	843.0044
	t	0.0860	0.0005	-1631.2507	-1625.8123	810.4349
	Clayton	0.6100	0.0005	-1129.4387	-1124.0003	352.4272
	Frank	0.0829	0.0005	-1589.7045	-1584.2661	794.8592
	Gumbel	0.0823	0.0005	-1648.4645	-1643.0261	822.9915
	Joe	0.7999	0.0005	-1388.1743	-1382.7359	689.1320
Model K22	Normal*	0.0291	0.0275	-1865.3743	-1859.9360	932.8761
	t	0.1029	0.0005	-1780.1917	-1774.7533	888.8107
	Clayton	0.5881	0.0005	-1243.1867	-1237.7484	366.7113
	Frank	0.0768	0.0005	-1764.1615	-1758.7231	882.3307
	Gumbel	0.0959	0.0005	-1793.7086	-1788.2702	892.1150
	Joe	0.8738	0.0005	-1500.1892	-1494.7508	746.4985
Model K23	Normal*	0.0277	0.0315	-2169.4330	-2163.9946	1085.8801
	t	0.0889	0.0005	-2094.2331	-2088.7947	1043.9665
	Clayton	0.5286	0.0005	-1536.9721	-1531.5338	516.9028
	Frank	0.0765	0.0005	-2045.9703	-2040.5319	1021.3401
	Gumbel	0.1144	0.0005	-2055.0322	-2049.5938	1023.0629
	Joe	0.9980	0.0005	-1689.3811	-1683.9427	838.3634
Model K31	Normal*	0.0316	0.0165	-1766.7548	-1761.3802	884.1718
	t	0.1052	0.0005	-1694.9972	-1689.6226	844.0886
	Clayton	0.4469	0.0005	-1298.0983	-1292.7237	471.7959
	Frank	0.0496	0.0005	-1684.2674	-1678.8928	841.1828
	Gumbel	0.1844	0.0005	-1618.2542	-1612.8796	805.9786
	Joe	1.2101	0.0005	-1284.6458	-1279.2712	638.3470
Model K32	Normal*	0.0581	0.0005	-1908.8210	-1903.4463	948.0684
	t	0.1266	0.0005	-1830.2134	-1824.8387	908.2109
	Clayton	0.6349	0.0005	-1273.3662	-1267.9915	367.3689
	Frank	0.0817	0.0005	-1835.8852	-1830.5106	916.6340
	Gumbel	0.0862	0.0005	-1838.5946	-1833.2200	912.5179
	Joe	0.7790	0.0005	-1543.1495	-1537.7748	765.9583
Model K33	Normal*	0.0207	0.0834	-2285.3918	-2280.0172	1138.6953
	t	0.0680	0.0005	-2208.7831	-2203.4085	1097.5980
	Clayton	0.4367	0.0005	-1700.1341	-1694.7595	630.9208
	Frank	0.0810	0.0005	-2142.4474	-2137.0727	1070.7635
	Gumbel	0.1233	0.0005	-2117.8157	-2112.4410	1053.3135
	Joe	1.0604	0.0005	-1705.0189	-1699.6442	846.1195

Kız öğrenciler için uygun kopula seçimleri en küçük Cramer von Mises (CvM), en küçük AIC, BIC ve en büyük CIC değerleri dikkate alınarak gerçekleştirilmiş ve sonuçlar Çizelge 15’te verilmiştir. Ayrıca Şekil 9, teorik ve ampirik kopula modellerinin karşılaştırıldığı grafikleri; Şekil 10 ise gerçek verilerin seçilen kopula fonksiyonlarına uyumunu gösteren grafikleri içermektedir. Şekil 10’da tüm öğrenciler turuncu, erkek öğrenciler mavi, kız öğrenciler kırmızı renkle gösterilmiş; her popülasyonun konturları siyah çizgi ile belirtilmiştir. Bu grafikler, seçilen kopula modellerinin verilerle uyumunu ve sonuçların tutarlılığını göstermektedir.

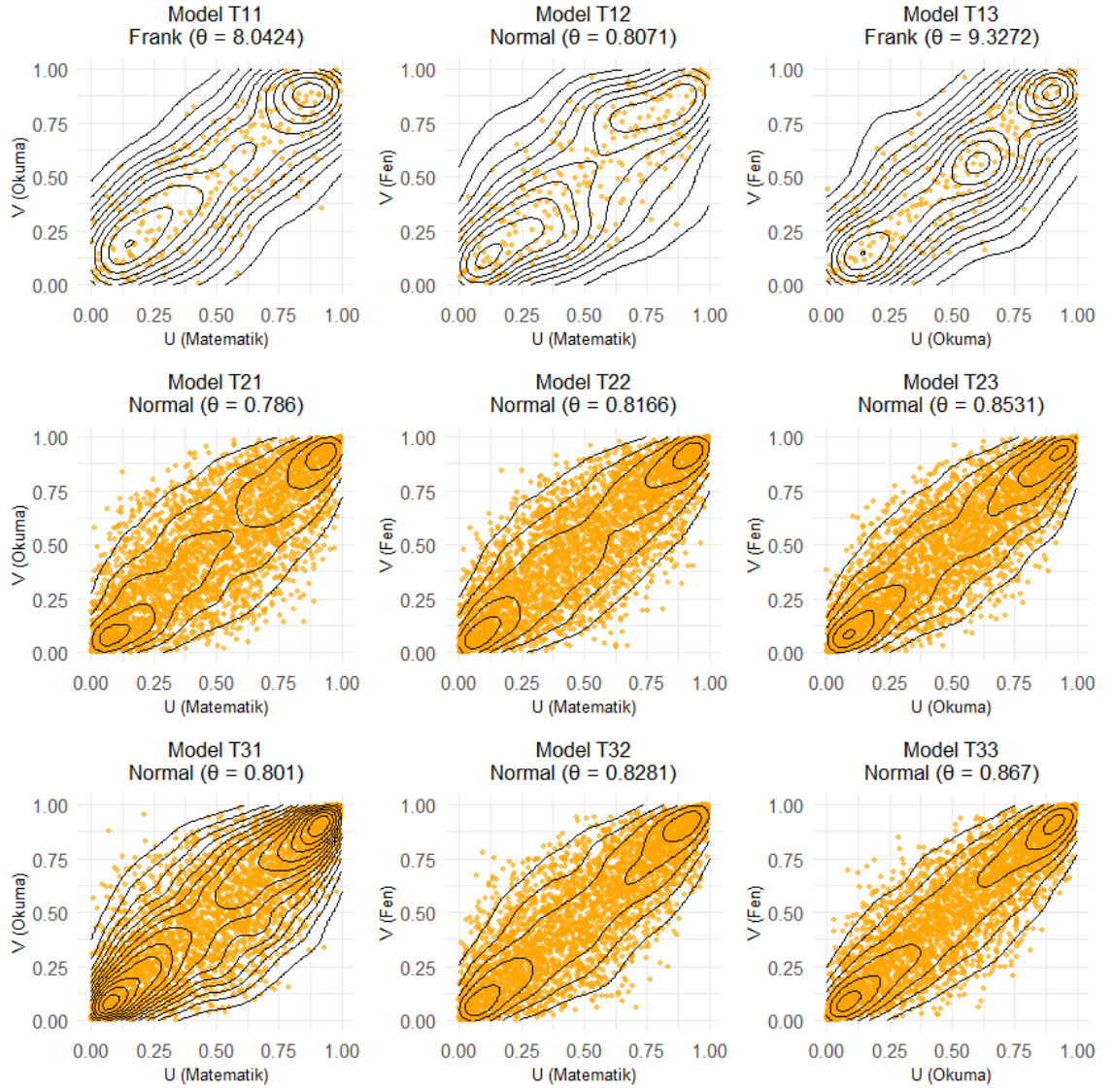
Her bir model için seçilen kopulalar ve bunlara ilişkin parametre tahmin (MPLE) ve standart hata değerleri Çizelge 16’da sunulmuştur.

Çizelge 16. Evdeki eğitim olanakları değişkeni için seçilen kopula modellerine yönelik parametre tahmin sonuçları.

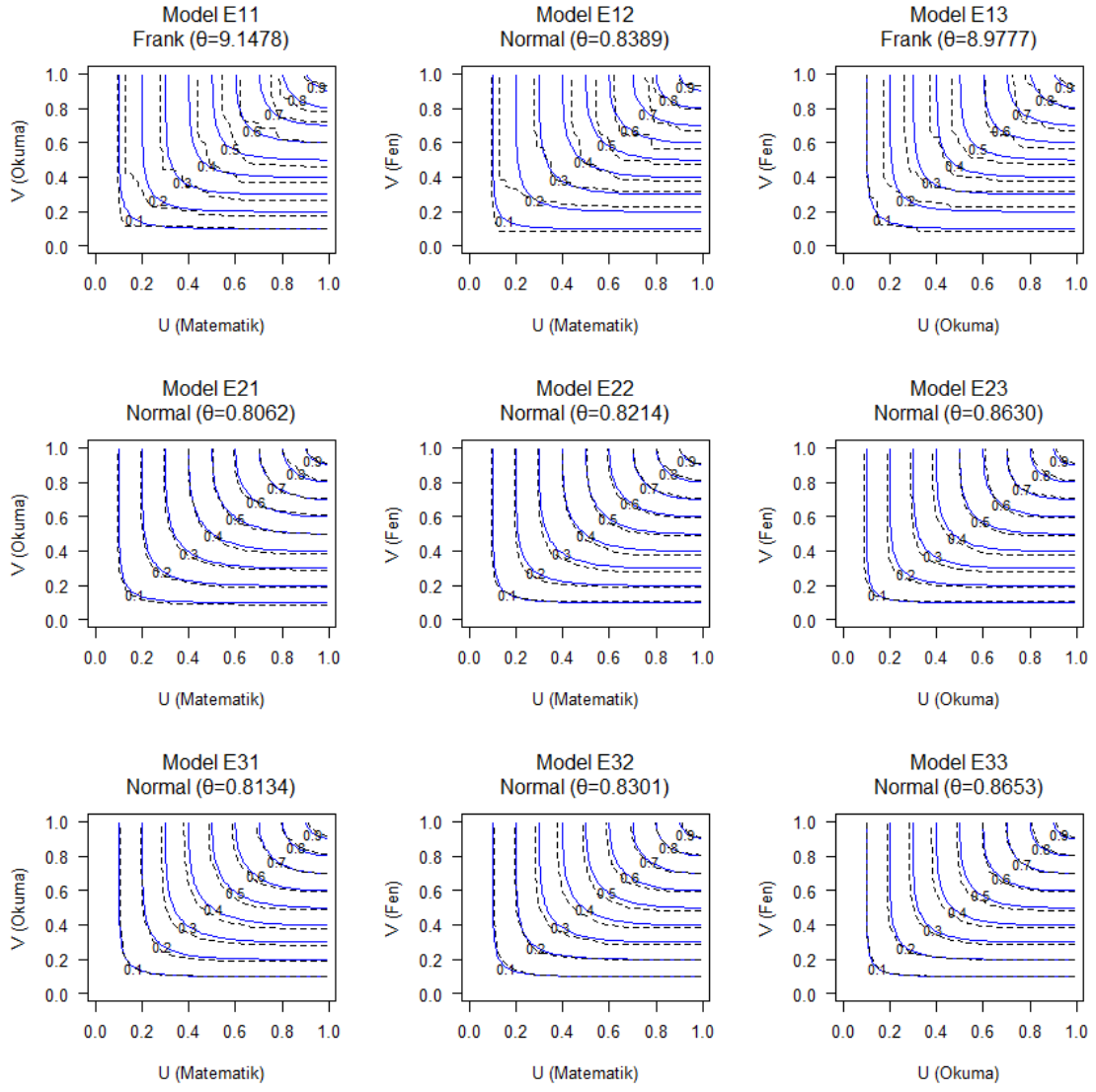
Cinsiyet	Evdeki Eğitim Olanakları	Çift	Model	Kopula	Tahmin	Standart Hata
Tüm Öğrenciler	Düşük	Matematik-Okuma Matematik-Fen Okuma-Fen	Model T11	Frank	8.0424	0.7489
			Model T12	Normal	0.8071	0.0205
			Model T13	Frank	9.3272	0.7627
	Orta	Matematik-Okuma Matematik-Fen Okuma-Fen	Model T21	Normal	0.7860	0.0062
			Model T22	Normal	0.8166	0.0052
			Model T23	Normal	0.8531	0.0043
	Yüksek	Matematik-Okuma Matematik-Fen Okuma-Fen	Model T31	Normal	0.8010	0.0053
			Model T32	Normal	0.8281	0.0048
			Model T33	Normal	0.8670	0.0038
Erkek	Düşük	Matematik-Okuma Matematik-Fen Okuma-Fen	Model E11	Frank	9.1478	0.9950
			Model E12	Normal	0.8389	0.0211
			Model E13	Frank	8.9777	1.0773
	Orta	Matematik-Okuma Matematik-Fen Okuma-Fen	Model E21	Normal	0.8062	0.0077
			Model E22	Normal	0.8214	0.0071
			Model E23	Normal	0.8630	0.0055
	Yüksek	Matematik-Okuma Matematik-Fen Okuma-Fen	Model E31	Normal	0.8134	0.0066
			Model E32	Normal	0.8301	0.0067
			Model E33	Normal	0.8653	0.0054
Kız	Düşük	Matematik-Okuma Matematik-Fen Okuma-Fen	Model K11	Frank	7.8731	1.1864
			Model K12	Normal	0.7657	0.0456
			Model K13	Frank	10.4114	1.1583
	Orta	Matematik-Okuma Matematik-Fen Okuma-Fen	Model K21	Normal	0.7946	0.0081
			Model K22	Normal	0.8177	0.0073
			Model K23	Normal	0.8503	0.0064
	Yüksek	Matematik-Okuma Matematik-Fen Okuma-Fen	Model K31	Normal	0.8199	0.0072
			Model K32	Normal	0.8368	0.0069
			Model K33	Normal	0.8739	0.0054



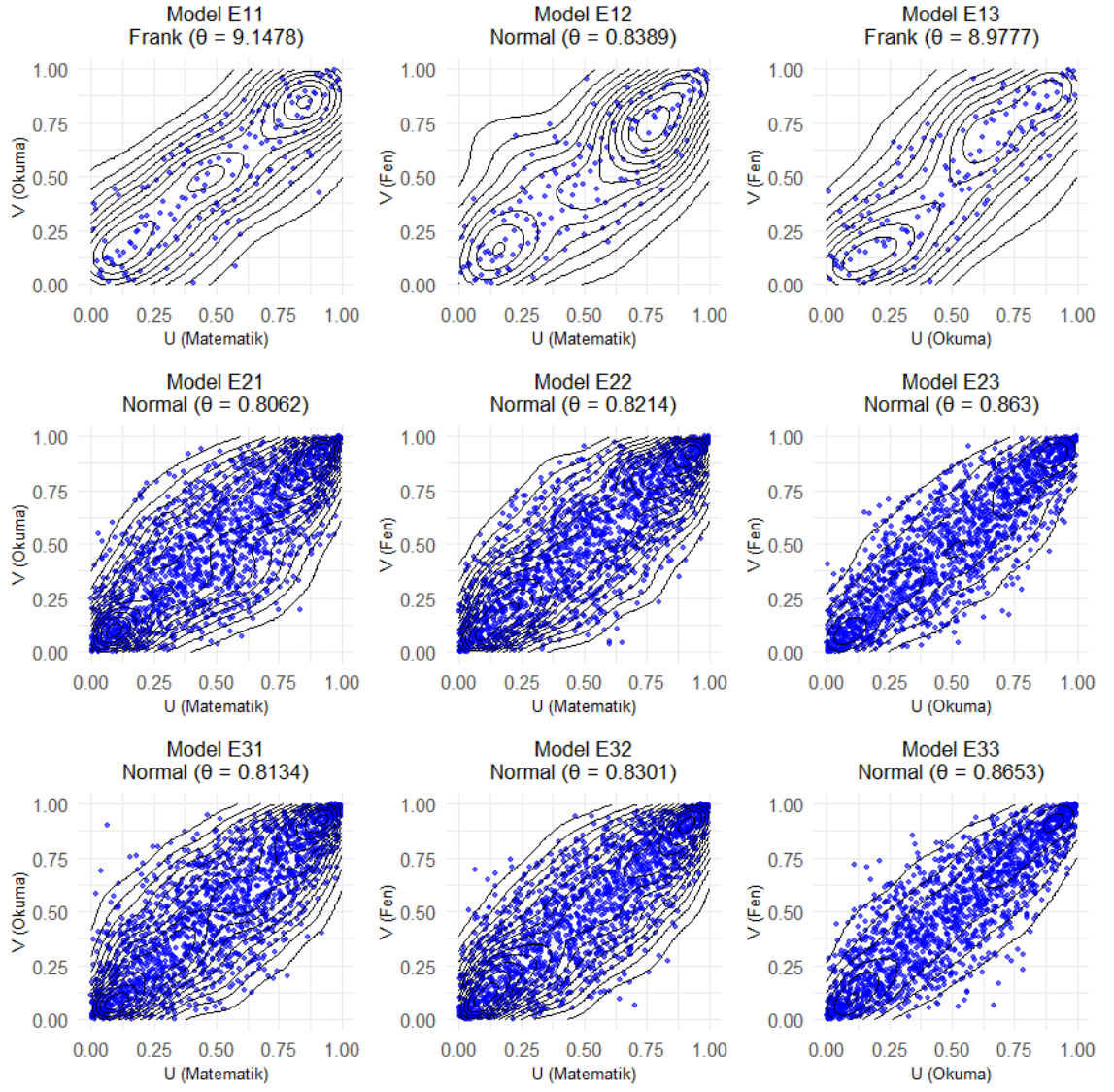
Şekil 5. Evdeki eğitim olanakları (Tüm öğrenciler) için uyan teorik (—) kopula modelleri ile ampirik (---) kopula modellerinin karşılaştırılması.



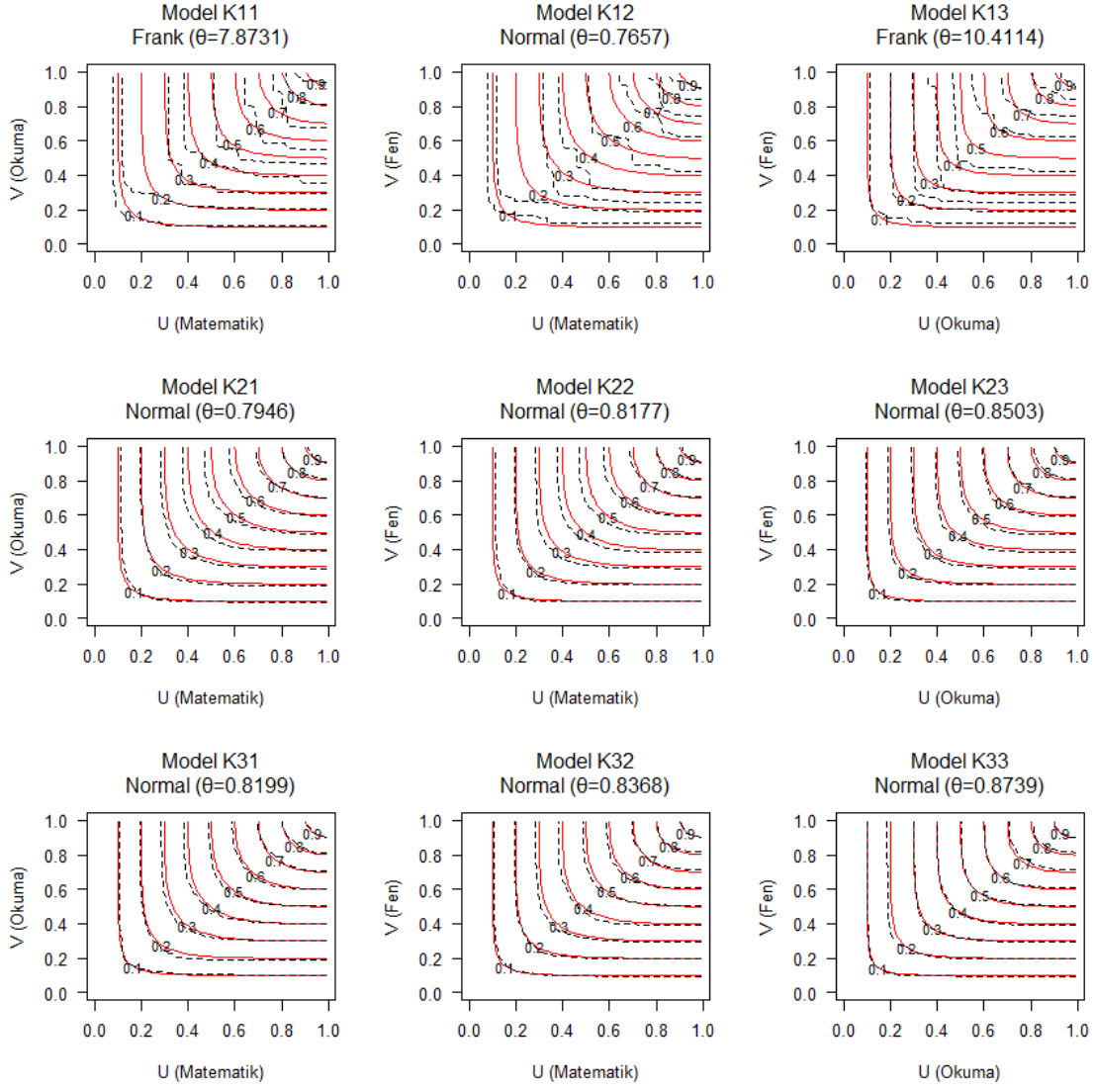
Şekil 6. Evdeki eğitim olanakları (Tüm öğrenciler) için gerçek verilerin seçilen kopula fonksiyonlarına uyumunu gösteren grafikler.



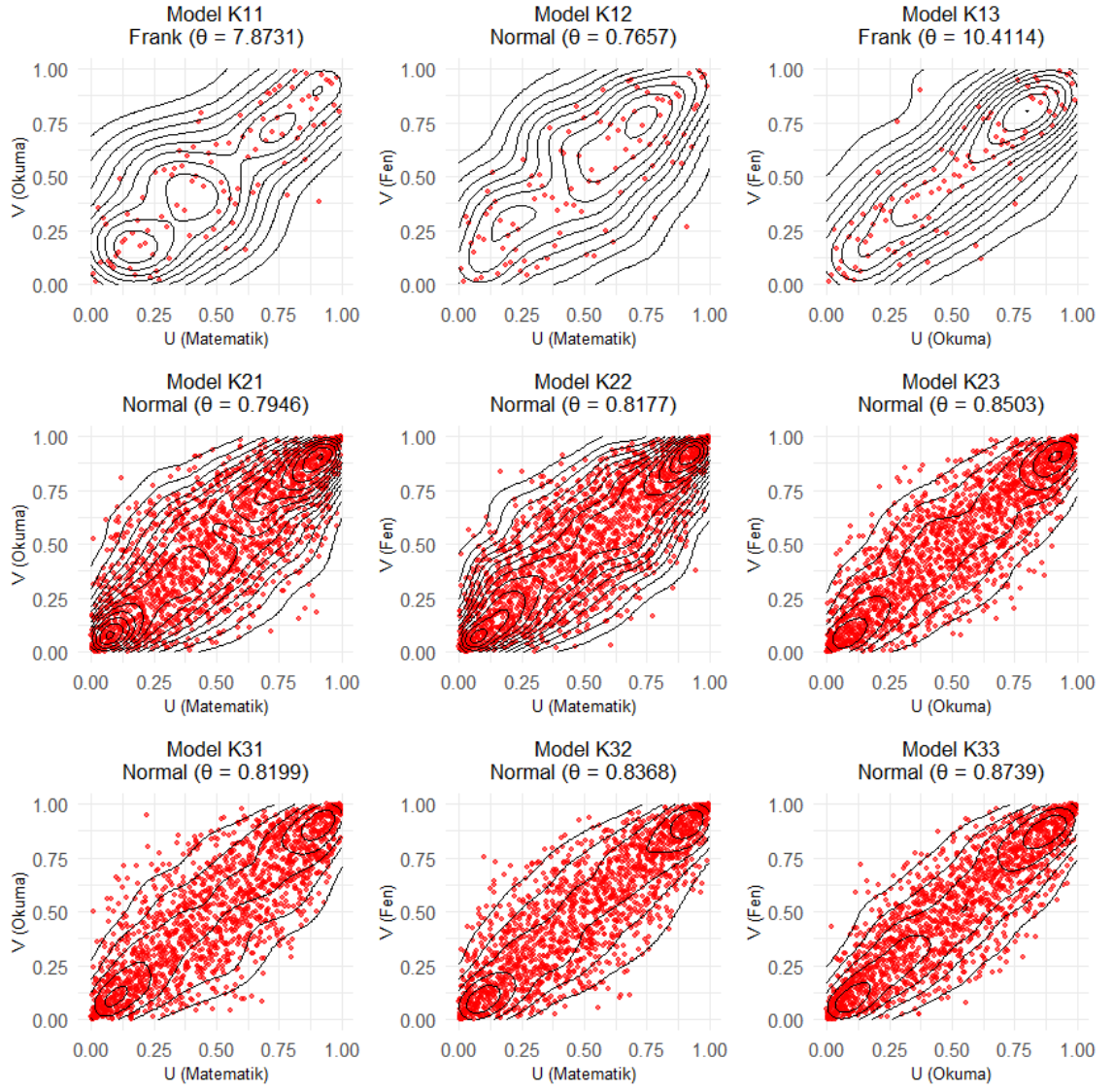
Şekil 7. Evdeki eğitim olanakları (Erkek öğrenciler) için uyan teorik (—) kopula modelleri ile ampirik (---) kopula modellerinin karşılaştırılması.



Şekil 8. Evdeki eğitim olanakları (Erkek öğrenciler) için gerçek verilerin seçilen kopula fonksiyonlarına uyumunu gösteren grafikler.



Şekil 9. Evdeki eğitim olanakları (Kız öğrenciler) için uyan teorik (—) kopula modelleri ile ampirik (- -) kopula modellerinin karşılaştırılması.



Şekil 10. Evdeki eğitim olanakları (Kız öğrenciler) için gerçek verilerin seçilen kopula fonksiyonlarına uyumunu gösteren grafikler.

4.1.3. Üçüncü Durum: Sosyoekonomik Düzey Değişkeni için PISA Verilerine Kopula Analizi

Çizelge 17’de sosyoekonomik düzey değişkeni açısından öğrencilerin tümü ve erkek/kız öğrenciler için model tanımlamaları verilmiştir.

Çizelge 17. Sosyoekonomik düzey değişkeni açısından öğrencilerin tümü ve erkek/kız öğrenciler için model tanımlamaları.

Cinsiyet	Sosyoekonomik Düzey	Çift	Model
Tüm Öğrenciler	Düşük	Matematik-Okuma Matematik-Fen Okuma-Fen	Model T11 Model T12 Model T13
	Orta	Matematik-Okuma Matematik-Fen Okuma-Fen	Model T21 Model T22 Model T23
	Yüksek	Matematik-Okuma Matematik-Fen Okuma-Fen	Model T31 Model T32 Model T33
Erkek	Düşük	Matematik-Okuma Matematik-Fen Okuma-Fen	Model E11 Model E12 Model E13
	Orta	Matematik-Okuma Matematik-Fen Okuma-Fen	Model E21 Model E22 Model E23
	Yüksek	Matematik-Okuma Matematik-Fen Okuma-Fen	Model E31 Model E32 Model E33
Kız	Düşük	Matematik-Okuma Matematik-Fen Okuma-Fen	Model K11 Model K12 Model K13
	Orta	Matematik-Okuma Matematik-Fen Okuma-Fen	Model K21 Model K22 Model K23
	Yüksek	Matematik-Okuma Matematik-Fen Okuma-Fen	Model K31 Model K32 Model K33

Çizelge 17 sosyoekonomik düzeye göre öğrencilerin tümü ve erkek/kız öğrenciler için model tanımlamalarının matematik-okuma, matematik-fen ve okuma-fen çiftleri için oluşturulduğunu göstermektedir.

Çizelge 18’de sosyoekonomik düzey değişkeni açısından öğrencilerin tümü ve erkek/kız öğrenciler için betimsel istatistikler verilmiştir.

Çizelge 18. Sosyoekonomik düzey değişkeni açısından öğrencilerin tümü ve erkek/kız öğrenciler için betimsel istatistikler.

Cinsiyet	Sosyoekonomik Düzey	Alan	N	Ortalama	Medyan	Standart Sapma	Çarpıklık	Basıklık
Tüm Öğrenciler	Düşük	Matematik	1418	425.3908	423.158	77.5391	0.1339	0.0274
		Okuma	1418	433.3426	431.1925	80.0602	0.0953	-0.2483
		Fen	1418	441.5939	440.1860	75.5446	0.1375	-0.2322
	Orta	Matematik	3335	466.3075	472.0470	84.4439	-0.2521	0.3063
		Okuma	3335	475.5984	479.4220	83.8006	-0.1986	-0.1797
		Fen	3335	477.6934	481.6960	79.6621	-0.1356	-0.2125
	Yüksek	Matematik	1019	518.0132	518.9000	84.3865	-0.0481	-0.3331
		Okuma	1019	527.3578	532.8630	84.1222	-0.1928	-0.3259
		Fen	1019	526.1779	533.6960	82.1871	-0.3032	-0.2866
Erkek	Düşük	Matematik	691	426.2819	426.4060	82.4683	0.0854	-0.0756
		Okuma	691	418.9585	416.2700	83.9796	0.2158	-0.1713
		Fen	691	435.2628	428.7400	79.1061	0.2500	-0.1784
	Orta	Matematik	2284	448.5225	448.481	84.7897	0.0193	0.0389
		Okuma	2284	446.3728	445.4155	85.1309	0.0398	-0.2981
		Fen	2284	457.3861	455.0590	81.0783	0.0606	-0.2143
	Yüksek	Matematik	519	520.5144	525.6490	84.4760	-0.1046	-0.3459
		Okuma	519	513.4167	516.4510	85.5627	-0.1766	-0.5114
		Fen	519	522.2912	523.4650	83.0678	-0.1357	-0.3840
Kız	Düşük	Matematik	727	424.5439	421.0680	72.5915	0.1893	0.0565
		Okuma	727	447.9648	444.7920	73.2671	0.1221	-0.3986
		Fen	727	447.6115	448.8210	71.5329	0.0508	-0.2961
	Orta	Matematik	2169	444.2707	442.4250	82.7225	0.1616	0.0536
		Okuma	2169	473.5691	473.9530	80.1263	-0.0273	-0.2569
		Fen	2169	467.4764	465.6420	77.2078	0.0427	-0.3178
	Yüksek	Matematik	500	515.4169	514.5070	84.2995	0.0106	-0.3174
		Okuma	500	541.8286	546.4665	80.1562	-0.1563	-0.1964
		Fen	500	530.2123	543.4045	81.1490	-0.4837	-0.1256

Genel olarak, her iki cinsiyet için de evdeki eğitim olanakları arttıkça başarı ortalamalarının yükseldiği gözlenmiştir. Erkek öğrencilerde evdeki eğitim olanaklarının düşük olduğu durumda başarı dağılımları genellikle simetrik iken, kız öğrencilerde özellikle evdeki düşük eğitim olanaklarında başarı dağılımlarının sağa çarpık olduğu, yani daha yüksek başarıların daha az sıklıkla gözlendiği belirlenmiştir. Kız öğrenciler, evdeki eğitim olanaklarının her düzeyinde okuma ve fen başarılarında erkeklerden daha yüksek ortalamalara sahip olup, çarpıklık ve basıklık değerleri genellikle simetriye yakın bir dağılım sergilemektedir.

Çizelge 19’da sosyoekonomik düzey değişkeni açısından öğrencilerin tümü ve erkek/kız öğrenciler için korelasyon ve simetriklik test değerleri verilmiştir.

Çizelge 19. Sosyoekonomik düzey değişkeni açısından öğrencilerin tümü ve erkek/kız öğrenciler için korelasyon ve simetriklik test değerleri.

Model	Pearson*	Spearman*	Kendall*	Simetriklik Testi (p değeri**)
Model T11	0.7803	0.7671	0.5733	0.033744 (0.02048)
Model T12	0.8081	0.7945	0.6009	0.017024 (0.3322)
Model T13	0.8416	0.8398	0.6491	0.012557 (0.6568)
Model T21	0.7916	0.7742	0.5792	0.019322 (0.2183)
Model T22	0.8228	0.8118	0.6175	0.020461 (0.1084)
Model T23	0.8597	0.8540	0.6633	0.007818 (0.9785)
Model T31	0.7774	0.7689	0.5720	0.023859 (0.1094)
Model T32	0.8207	0.8245	0.6254	0.011274 (0.8297)
Model T33	0.8485	0.8482	0.6537	0.009820 (0.9086)
Model E11	0.8105	0.8015	0.6067	0.017016 (0.3881)
Model E12	0.8213	0.8160	0.6211	0.023138 (0.0854)
Model E13	0.8563	0.8611	0.6706	0.014279 (0.4050)
Model E21	0.8035	0.7980	0.6016	0.015230 (0.4670)
Model E22	0.8194	0.8130	0.6164	0.015287 (0.4351)
Model E23	0.8591	0.8551	0.6647	0.013067 (0.4610)
Model E31	0.8080	0.8052	0.6073	0.017077 (0.3891)
Model E32	0.8313	0.8392	0.6389	0.018640 (0.1993)
Model E33	0.8592	0.8601	0.6673	0.013202 (0.6139)
Model K11	0.7794	0.7670	0.5721	0.028403 (0.0375)
Model K12	0.8006	0.7812	0.5890	0.010016 (0.9645)
Model K13	0.8284	0.8194	0.6293	0.007061 (0.9985)
Model K21	0.8037	0.7975	0.6024	0.019311 (0.2223)
Model K22	0.8193	0.8160	0.6200	0.010201 (0.9166)
Model K23	0.8627	0.8560	0.6664	0.013086 (0.5190)
Model K31	0.7799	0.7671	0.5731	0.023308 (0.1573)
Model K32	0.8152	0.8177	0.6208	0.012176 (0.7987)
Model K33	0.8475	0.8353	0.6447	0.013344 (0.6189)

(*) Tüm korelasyonlar anlamlıdır ($p < 0.05$)

(**) Tüm modeller simetriklik testidir ($p > 0.05$)

Çizelge 19’da verilen sonuçlara göre her iki cinsiyette de güçlü pozitif ilişkiler tespit edilmiştir. Özellikle kız öğrencilerde okuma ve fen başarıları arasındaki ilişki oldukça yüksek bulunmuştur. Tüm korelasyon testlerinin p değerleri 0.05'in altında olup, bu ilişkilerin istatistiksel olarak anlamlı olduğu bulunmuştur. Ayrıca, simetriklik testi sonuçlarına göre modeller simetrik dağılım varsayımını desteklemektedir ($p > 0.05$).

Çizelge 20 sosyoekonomik düzey değişkeni açısından öğrencilerin tümü için marjinal dağılım uyum iyiliği sonuçlarını ve her bir model için en iyi uyan marjinal dağılımları göstermektedir. Bu dağılımlar (*) ile belirtilmiştir. Marjinal model seçimleri $p > 0.05$ olan en küçük KS ve en küçük AIC değerlerine göre yapılmıştır.

En iyi uyum sağlayan dağılımlar sosyoekonomik düzeyi düşük olan öğrenciler için matematikte Normal, okumada Normal, fende Normal; orta olan öğrenciler için matematikte Normal, okumada Weibull, fende Normal; yüksek olanlar için matematikte Normal, okumada Normal, fende Weibull olmuştur.

Çizelge 20. Sosyoekonomik düzey değişkeni açısından öğrencilerin tümü için marjinal dağılım uyum iyiliği sonuçları.

Sosyoekonomik Düzey	Alan	Marjinal Dağılım	KS	p değeri	AIC	Par1	Par2
Düşük	Mat	Normal*	0.0252	0.3305	16365.9287	425.3908	77.5118
		Log- Normal	0.0389	0.0276	16409.4970	6.0358	0.1882
		Gamma	0.0582	0.0001	16553.4898	46.1714	0.1086
		Weibull	0.0538	0.0005	16440.4939	5.8864	457.7288
	Oku	Normal*	0.0215	0.5306	16456.6717	433.3426	80.0320
		Log- Normal	0.0302	0.1505	16499.6169	6.0538	0.1909
		Gamma	0.0262	0.2847	16468.7149	28.4295	0.0657
		Weibull	0.0408	0.0176	16512.5911	5.8891	466.6557
	Fen	Normal*	0.0236	0.4072	16292.0247	441.5939	75.5180
		Log- Normal	0.0318	0.1128	16313.3882	6.0754	0.1749
		Gamma	0.0211	0.5516	16292.9100	33.8102	0.0766
		Weibull	0.0430	0.0106	16367.7346	6.2902	473.5323
Orta	Mat	Normal*	0.0645	0.1550	39056.0194	466.3075	84.4312
		Log- Normal	0.1052	0.0000	39448.9991	6.1268	0.1955
		Gamma	0.0883	0.0000	39268.9013	27.8861	0.0597
		Weibull	0.0433	0.0000	39067.7945	6.2014	500.8406
	Oku	Normal	0.0209	0.1075	39005.0180	475.5984	83.7881
		Log- Normal	0.0586	0.0000	39286.4478	6.1479	0.1869
		Gamma	0.0500	0.0000	39155.0567	29.8183	0.0628
		Weibull*	0.0189	0.1861	39001.9826	6.4299	510.2939
	Fen	Normal*	0.0233	0.0534	38667.2013	477.6934	79.6501
		Log- Normal	0.0546	0.0000	38884.3360	6.1542	0.1748
		Gamma	0.0462	0.0000	38778.8024	34.1596	0.0716
		Weibull	0.0209	0.1096	38706.7444	6.7170	511.0760
Yüksek	Mat	Normal*	0.0178	0.9031	11934.1567	518.0132	84.3451
		Log- Normal	0.0459	0.0274	11977.3723	6.2362	0.1686
		Gamma	0.0631	0.0006	12054.3745	54.7612	0.1059
		Weibull	0.0279	0.4073	11959.7280	6.8062	553.7148
	Oku	Normal*	0.0385	0.0975	11927.7630	527.3578	84.0809
		Log- Normal	0.0599	0.0013	11994.6213	6.2544	0.1670
		Gamma	0.0523	0.0077	11963.7884	36.9721	0.0702
		Weibull	0.0243	0.5818	11927.9771	7.1154	562.8024
	Fen	Normal	0.0440	0.0388	11880.3358	526.1779	82.1468
		Log- Normal	0.0704	0.0001	11964.8715	6.2526	0.1649
		Gamma	0.0617	0.0009	11928.1667	38.6515	0.0735
		Weibull*	0.0296	0.3343	11859.5695	7.4155	560.7001

Çizelge 21’de sosyoekonomik düzey değişkeni açısından erkek öğrenciler için marjinal dağılım uyum iyiliği sonuçları verilmiştir. Erkek öğrenciler için en iyi uyum sağlayan dağılımlar sosyoekonomik düzeyi düşük olan öğrenciler için matematikte Gamma, okumada Gamma, fende Gamma; orta olan öğrenciler için matematikte Normal, okumada Normal, fende Normal; yüksek olanlar için matematikte Normal, okumada Weibull, fende Normal olmuştur.

Çizelge 21. Sosyoekonomik düzey değişkeni açısından erkek öğrenciler için marjinal dağılım uyum iyiliği sonuçları.

Sosyoekonomik Düzey	Alan	Marjinal Dağılım	KS	p değeri	AIC	Par1	Par2
Düşük	Mat	Normal	0.0383	0.2615	8004.4046	435.2628	79.0489
		Log- Normal	0.0265	0.7148	8002.0913	6.0592	0.1844
		Gamma*	0.0247	0.7911	7995.7476	30.3361	0.0696
		Weibull	0.0574	0.0210	8048.5535	5.8460	468.4711
	Oku	Normal	0.0375	0.2854	8087.0246	417.9585	83.9188
		Log- Normal	0.0354	0.3517	8095.2484	6.0146	0.2062
		Gamma*	0.0202	0.9415	8083.2068	24.0489	0.0575
		Weibull	0.0438	0.1417	8120.1377	5.3432	452.3911
	Fen	Normal	0.0383	0.2615	8004.4046	435.2628	79.0489
		Log- Normal	0.0265	0.7148	8002.0913	6.0592	0.1844
		Gamma*	0.0247	0.7911	7995.7476	30.3361	0.0696
		Weibull	0.0574	0.0210	8048.5535	5.8460	468.4711
Orta	Mat	Normal*	0.0088	0.9943	26767.4265	448.5225	84.7711
		Log- Normal	0.0441	0.0003	26908.6328	6.0870	0.1987
		Gamma	0.0322	0.0177	26828.3475	26.8830	0.0600
		Weibull	0.0349	0.0077	26844.7957	5.7705	483.4138
	Oku	Normal*	0.0130	0.8383	26785.7705	446.3728	85.1122
		Log- Normal	0.0411	0.0009	26880.5190	6.0821	0.1984
		Gamma	0.0789	0.0000	27259.3492	46.1634	0.1033
		Weibull	0.0301	0.0319	26849.1891	5.7632	481.4647
	Fen	Normal*	0.0175	0.4845	26562.9699	457.3861	81.0606
		Log- Normal	0.0335	0.0117	26642.5802	6.1092	0.1833
		Gamma	0.0173	0.5000	26591.5221	30.6426	0.0668
		Weibull	0.0397	0.0015	26651.7787	6.1498	491.3392
Yüksek	Mat	Normal*	0.0316	0.6792	6080.9108	520.5144	84.3946
		Log- Normal	0.0612	0.0409	6108.1562	6.2410	0.1688
		Gamma	0.0638	0.0291	6143.0642	54.3555	0.1045
		Weibull	0.0372	0.4680	6088.5212	6.9067	556.2074
	Oku	Normal	0.0471	0.1990	6094.1779	513.4167	85.4802
		Log- Normal	0.0582	0.0596	6126.7447	6.2264	0.1743
		Gamma	0.0831	0.0015	6141.4398	47.1560	0.0918
		Weibull*	0.0387	0.4177	6091.5406	6.8614	549.2765
	Fen	Normal*	0.0370	0.4758	6063.4619	522.2912	82.9878
		Log- Normal	0.0509	0.1358	6092.6090	6.2449	0.1656
		Gamma	0.0725	0.0086	6118.9444	54.6469	0.1044
		Weibull	0.0427	0.2992	6067.8724	7.0981	557.4314

Çizelge 22’de sosyoekonomik düzey değişkeni açısından kız öğrenciler için marjinal dağılım uyum iyiliği sonuçları verilmiştir.

Çizelge 22. Sosyoekonomik düzey değişkeni açısından kız öğrenciler için marjinal dağılım uyum iyiliği sonuçları.

Sosyoekonomik Düzey	Alan	Marjinal Dağılım	KS	P değeri	AIC	Par1	Par2
Düşük	Mat	Normal*	0.0365	0.2875	8296.3051	424.5439	72.5416
		Log- Normal	0.0388	0.2237	8307.2632	6.0361	0.1748
		Gamma	0.0517	0.0409	8355.5095	49.0224	0.1156
		Weibull	0.0668	0.0030	8345.5910	6.2033	455.2554
	Oku	Normal	0.0304	0.5106	8309.7742	447.9648	73.2167
		Log- Normal	0.0351	0.3325	8318.4205	6.0911	0.1667
		Gamma*	0.0314	0.4707	8309.5768	36.9162	0.0825
		Weibull	0.0493	0.0580	8346.5843	6.6264	479.2277
	Fen	Normal*	0.0173	0.9812	8274.9452	447.6115	71.4837
		Log- Normal	0.0408	0.1779	8293.9421	6.0908	0.1639
		Gamma	0.0307	0.4992	8281.5419	38.5641	0.0862
		Weibull	0.0442	0.1163	8306.7021	6.8256	478.1680
Orta	Mat	Normal*	0.0182	0.4704	25312.7587	444.2707	82.7034
		Log- Normal	0.0330	0.0180	25366.2438	6.0785	0.1919
		Gamma	0.0173	0.5321	25321.8787	28.4676	0.0640
		Weibull	0.0440	0.0005	25431.6574	5.7335	478.5857
	Oku	Normal*	0.0108	0.9606	25174.4282	473.5691	80.1078
		Log- Normal	0.0431	0.0006	25271.3742	6.1453	0.1756
		Gamma	0.0290	0.0527	25218.2194	33.6643	0.0710
		Weibull	0.0351	0.0096	25234.9409	6.5229	507.2713
	Fen	Normal*	0.0162	0.6174	25013.4761	467.4764	77.1900
		Log- Normal	0.0373	0.0047	25073.0049	6.1333	0.1698
		Gamma	0.0242	0.1561	25034.9513	35.5967	0.0760
		Weibull	0.0398	0.0021	25099.7736	6.6132	500.2240
Yüksek	Mat	Normal*	0.0245	0.9244	5856.3130	515.4169	84.2151
		Log- Normal	0.0514	0.1423	5872.3400	6.2311	0.1683
		Gamma	0.0418	0.3477	5862.8191	36.5712	0.0710
		Weibull	0.0415	0.3565	5874.2169	6.7067	551.1518
	Oku	Normal*	0.0327	0.6577	5805.9147	541.8286	80.0760
		Log- Normal	0.0590	0.0614	5833.6182	6.2835	0.1537
		Gamma	0.0516	0.1397	5820.6507	43.8876	0.0811
		Weibull	0.0283	0.8180	5813.8113	7.5647	576.0318
	Fen	Normal	0.0716	0.0119	5818.2245	530.2123	81.0678
		Log- Normal	0.0960	0.0002	5873.9195	6.2605	0.1637
		Gamma	0.1307	0.0000	5912.0932	61.3991	0.1169
		Weibull*	0.0344	0.5934	5791.3979	7.8000	563.9641

Kız öğrenciler için en iyi uyum sağlayan dağılımlar sosyoekonomik düzeyi düşük olan öğrenciler için matematikte Normal, okumada Gamma, fende Normal; orta olan öğrenciler için matematikte Normal, okumada Normal, fende Normal; yüksek olanlar için matematikte Normal, okumada Normal, fende Weibull olmuştur.

Çizelge 23'te sosyoekonomik düzey değişkeni açısından öğrencilerin tümü için en iyi kopula modeli seçimi verilmiştir.

Çizelge 23. Sosyoekonomik düzey değişkeni açısından öğrencilerin tümü için en iyi kopula modeli seçimi.

Model	Kopula	Uyum İyiliği Testi		Bilgi Kriterleri		
		CvM	p değeri	AIC	BIC	CIC
Model T11	Normal*	0.0238	0.1154	-1319.5400	-1314.2830	659.0245
	t	0.0638	0.0015	-1270.6800	-1265.4230	632.0197
	Clayton	0.4952	0.0005	-925.7503	-920.4933	326.0425
	Frank	0.0901	0.0005	-1225.2260	-1219.9690	612.2902
	Gumbel	0.0838	0.0005	-1249.5129	-1244.2559	624.6021
	Joe	0.7467	0.0005	-1022.2742	-1017.0172	506.6025
Model T12	Normal*	0.0188	0.2023	-1483.5369	-1478.2799	743.0872
	t	0.0508	0.0025	-1438.8101	-1433.5531	713.2298
	Clayton	0.4811	0.0005	-1012.3448	-1007.0878	344.2625
	Frank	0.0997	0.0005	-1372.3962	-1367.1392	684.8384
	Gumbel	0.0715	0.0005	-1439.5925	-1434.3355	719.8049
	Joe	0.7033	0.0005	-1205.9004	-1200.6434	598.1518
Model T13	Normal*	0.0211	0.1104	-1725.3955	-1720.1385	863.0708
	t	0.0567	0.0005	-1693.6456	-1688.3886	844.4839
	Clayton	0.3778	0.0005	-1268.5725	-1263.3155	450.0954
	Frank	0.0686	0.0005	-1665.7411	-1660.4841	831.5853
	Gumbel	0.1340	0.0005	-1625.3980	-1620.1410	812.1099
	Joe	1.0130	0.0005	-1309.0911	-1303.8341	648.7509
Model T21	Normal*	0.0335	0.0145	-3246.8285	-3240.7163	1623.3571
	t	0.1211	0.0005	-3079.4782	-3073.3660	1533.5525
	Clayton	0.6181	0.0005	-2547.0106	-2540.8984	1052.2004
	Frank	0.2187	0.0005	-2954.1120	-2947.9998	1476.7087
	Gumbel	0.4681	0.0005	-2868.2861	-2862.1738	1429.9743
	Joe	2.7329	0.0005	-2183.6472	-2177.5350	1088.2421
Model T22	Normal*	0.0392	0.0025	-3746.0047	-3739.8925	1872.1052
	t	0.1375	0.0005	-3569.9071	-3563.7949	1775.5175
	Clayton	0.6500	0.0005	-2849.3825	-2843.2702	1116.4278
	Frank	0.2198	0.0005	-3456.7591	-3450.6468	1726.0037
	Gumbel	0.4469	0.0005	-3373.5122	-3367.4000	1678.2256
	Joe	2.7347	0.0005	-2619.8011	-2613.6889	1304.3774
Model T23	Normal*	0.0249	0.0445	-4445.2495	-4439.1373	2219.0838
	t	0.1320	0.0005	-4268.5774	-4262.4651	2128.7646
	Clayton	0.6398	0.0005	-3395.2501	-3389.1379	1325.1436
	Frank	0.1470	0.0005	-4148.9583	-4142.8461	2071.5771
	Gumbel	0.3990	0.0005	-4040.1946	-4034.0824	2016.2761
	Joe	2.7422	0.0005	-3172.5798	-3166.4675	1579.6712
Model T31	Normal*	0.0216	0.1623	-927.2795	-922.3529	461.7469
	t	0.0673	0.0005	-875.5046	-870.5780	437.2411
	Clayton	0.1962	0.0005	-726.9963	-722.0697	288.8998
	Frank	0.0618	0.0005	-873.0459	-868.1194	436.5189
	Gumbel	0.1790	0.0005	-811.7651	-806.8386	406.2307
	Joe	0.9161	0.0005	-611.6161	-606.6895	302.6442
Model T32	Normal*	0.0295	0.0445	-1128.0875	-1123.1609	562.1628
	t	0.0931	0.0005	-1060.1122	-1055.1856	527.1727
	Clayton	0.2136	0.0005	-820.1008	-815.1743	280.6387
	Frank	0.0327	0.0085	-1089.7963	-1084.8697	544.1368
	Gumbel	0.1733	0.0005	-1016.9387	-1012.0121	506.9128
	Joe	0.9157	0.0005	-795.9610	-791.0344	392.9005
Model T33	Normal*	0.0436	0.0015	-1266.9649	-1262.0383	629.8539
	t	0.0918	0.0005	-1217.0307	-1212.1041	604.5261
	Clayton	0.1654	0.0005	-995.9949	-991.0684	391.4633
	Frank	0.0410	0.0015	-1218.7698	-1213.8432	610.0674
	Gumbel	0.2138	0.0005	-1129.7740	-1124.8474	560.8686
	Joe	1.0732	0.0005	-867.0889	-862.1623	429.6425

Uygun kopula seçimleri en küçük Cramer von Mises (CvM), en küçük AIC, BIC ve en büyük CIC değerleri dikkate alınarak gerçekleştirilmiş ve sonuçlar Çizelge 23'te

verilmiştir. Ayrıca Şekil 11, teorik ve ampirik kopula modellerinin karşılaştırıldığı grafikleri; Şekil 12 ise gerçek verilerin seçilen kopula fonksiyonlarına uyumunu gösteren grafikleri içermektedir. Şekil 12’de tüm öğrenciler turuncu, erkek öğrenciler mavi, kız öğrenciler kırmızı renkle gösterilmiş; her popülasyonun konturları siyah çizgi ile belirtilmiştir. Bu grafikler, seçilen kopula modellerinin verilerle uyumunu ve sonuçların tutarlılığını göstermektedir.

Çizelge 24’te sosyoekonomik düzey değişkeni açısından erkek öğrenciler için en iyi kopula modeli seçimi verilmiştir. kopula modellerinin verilerle uyumunu ve sonuçların tutarlılığını göstermektedir.

Çizelge 24. Sosyoekonomik düzey değişkeni açısından erkek öğrenciler için en iyi kopula modeli seçimi.

Model	Kopula	Uyum İyiliği Testi		Bilgi Kriterleri		
		CvM	p değeri	AIC	BIC	CIC
Model E11	Normal*	0.0179	0.2582	-729.9575	-725.4194	365.9421
	t	0.0451	0.0035	-698.4824	-693.9443	347.0776
	Clayton	0.2597	0.0005	-499.5207	-494.9826	151.4423
	Frank	0.0447	0.0005	-682.2063	-677.6682	340.8214
	Gumbel	0.0443	0.0055	-694.9439	-690.4057	343.6138
	Joe	0.3717	0.0005	-576.6357	-572.0976	284.9903
Model E12	Normal*	0.0233	0.1154	-757.8666	-753.3285	377.8174
	t	0.0493	0.0015	-734.9957	-730.4576	366.2154
	Clayton	0.2465	0.0005	-497.7749	-493.2367	135.2393
	Frank	0.0397	0.0005	-723.8962	-719.3581	361.0821
	Gumbel	0.0459	0.0015	-748.7466	-744.2084	373.7507
	Joe	0.3485	0.0005	-639.3200	-634.7819	313.1837
Model E13	Normal*	0.0257	0.0624	-891.5383	-887.0002	440.2784
	t	0.0485	0.0015	-876.7201	-872.1820	433.6538
	Clayton	0.2033	0.0005	-617.8142	-613.2760	184.2656
	Frank	0.0300	0.0095	-882.3972	-877.8590	440.8809
	Gumbel	0.0671	0.0005	-864.0911	-859.5530	423.6664
	Joe	0.4573	0.0005	-718.2363	-713.6981	359.7875
Model E21	Normal*	0.0218	0.1414	-2361.5004	-2355.7667	1179.2011
	t	0.1074	0.0005	-2259.9525	-2254.2188	1123.6096
	Clayton	0.6949	0.0005	-1679.3110	-1673.5773	593.4814
	Frank	0.0970	0.0005	-2218.0666	-2212.3329	1109.0068
	Gumbel	0.1701	0.0005	-2205.3350	-2199.6013	1099.1630
	Joe	1.3833	0.0005	-1782.8813	-1777.1476	888.0029
Model E22	Normal*	0.0372	0.0085	-2527.3908	-2521.6571	1263.5466
	t	0.1406	0.0005	-2394.0846	-2388.3509	1188.9508
	Clayton	0.7904	0.0005	-1727.0917	-1721.3580	555.3170
	Frank	0.1000	0.0005	-2353.4571	-2347.7234	1175.3883
	Gumbel	0.1315	0.0005	-2384.6592	-2378.9256	1191.8925
	Joe	1.2078	0.0005	-1965.5720	-1959.8383	972.7356
Model E23	Normal*	0.0403	0.0015	-3028.4115	-3022.6778	1513.7282
	t	0.1197	0.0005	-2908.4823	-2902.7486	1448.0260
	Clayton	0.7646	0.0005	-2074.7089	-2068.9753	645.9105
	Frank	0.1166	0.0005	-2851.4562	-2845.7225	1424.2498
	Gumbel	0.1109	0.0005	-2904.3226	-2898.5889	1449.2211
	Joe	1.1553	0.0005	-2421.7158	-2415.9821	1202.0227

Çizelge 24. Sosyoekonomik düzey değişkeni açısından erkek öğrenciler için en iyi kopula modeli seçimi (devamı).

Model	Kopula	Uyum İyiği Testi		Bilgi Kriterleri		
		CvM	p değeri	AIC	BIC	CIC
Model E31	Normal*	0.0152	0.4321	-534.5331	-530.2812	265.0581
	t	0.0423	0.0025	-504.8426	-500.5907	246.8347
	Clayton	0.1006	0.0005	-446.4357	-442.1838	191.0394
	Frank	0.0316	0.0135	-511.5287	-507.2768	257.6881
	Gumbel	0.1150	0.0005	-452.4990	-448.2471	225.0038
	Joe	0.5754	0.0005	-330.6072	-326.3553	163.7131
Model E32	Normal	0.0298	0.0465	-591.6660	-587.4141	294.1096
	t	0.0694	0.0005	-552.3175	-548.0655	274.3865
	Clayton	0.1283	0.0005	-428.9711	-424.7192	132.8138
	Frank*	0.0186	0.2013	-585.8406	-581.5886	294.1372
	Gumbel	0.1050	0.0005	-528.5261	-524.2742	261.2792
	Joe	0.5013	0.0005	-411.6858	-407.4339	197.4865
Model E33	Normal*	0.0212	0.1294	-678.5643	-674.3124	334.5493
	t	0.0483	0.0025	-653.7310	-649.4791	324.6773
	Clayton	0.1210	0.0005	-528.1376	-523.8857	203.7290
	Frank	0.0165	0.2443*	-652.5200	-648.2681	328.4920
	Gumbel	0.0868	0.0005	-612.6400	-608.3881	305.5120
	Joe	0.4816	0.0005	-478.0874	-473.8355	234.5013

Uygun kopula seçimleri en küçük Cramer von Mises (CvM), en küçük AIC, BIC ve en büyük CIC değerleri dikkate alınarak gerçekleştirilmiştir. Ayrıca Şekil 13, teorik ve ampirik kopula modellerinin karşılaştırıldığı grafikleri; Şekil 14 ise gerçek verilerin seçilen kopula fonksiyonlarına uyumunu gösteren grafikleri içermektedir. Şekil 14'te tüm öğrenciler turuncu, erkek öğrenciler mavi, kız öğrenciler kırmızı renkle gösterilmiş; her popülasyonun konturları siyah çizgi ile belirtilmiştir. Bu grafikler, seçilen

Çizelge 25'te sosyoekonomik düzey değişkeni açısından kız öğrenciler için en iyi kopula modeli seçimi verilmiştir. Uygun kopula seçimleri en küçük Cramer von Mises (CvM), en küçük AIC, BIC ve en büyük CIC değerleri dikkate alınarak gerçekleştirilmiştir. Ayrıca Şekil 15, teorik ve ampirik kopula modellerinin karşılaştırıldığı grafikleri; Şekil 16 ise gerçek verilerin seçilen kopula fonksiyonlarına uyumunu gösteren grafikleri içermektedir. Şekil 16'da tüm öğrenciler turuncu, erkek öğrenciler mavi, kız öğrenciler kırmızı renkle gösterilmiş; her popülasyonun konturları siyah çizgi ile belirtilmiştir. Bu grafikler, seçilen kopula modellerinin verilerle uyumunu ve sonuçların tutarlılığını göstermektedir.

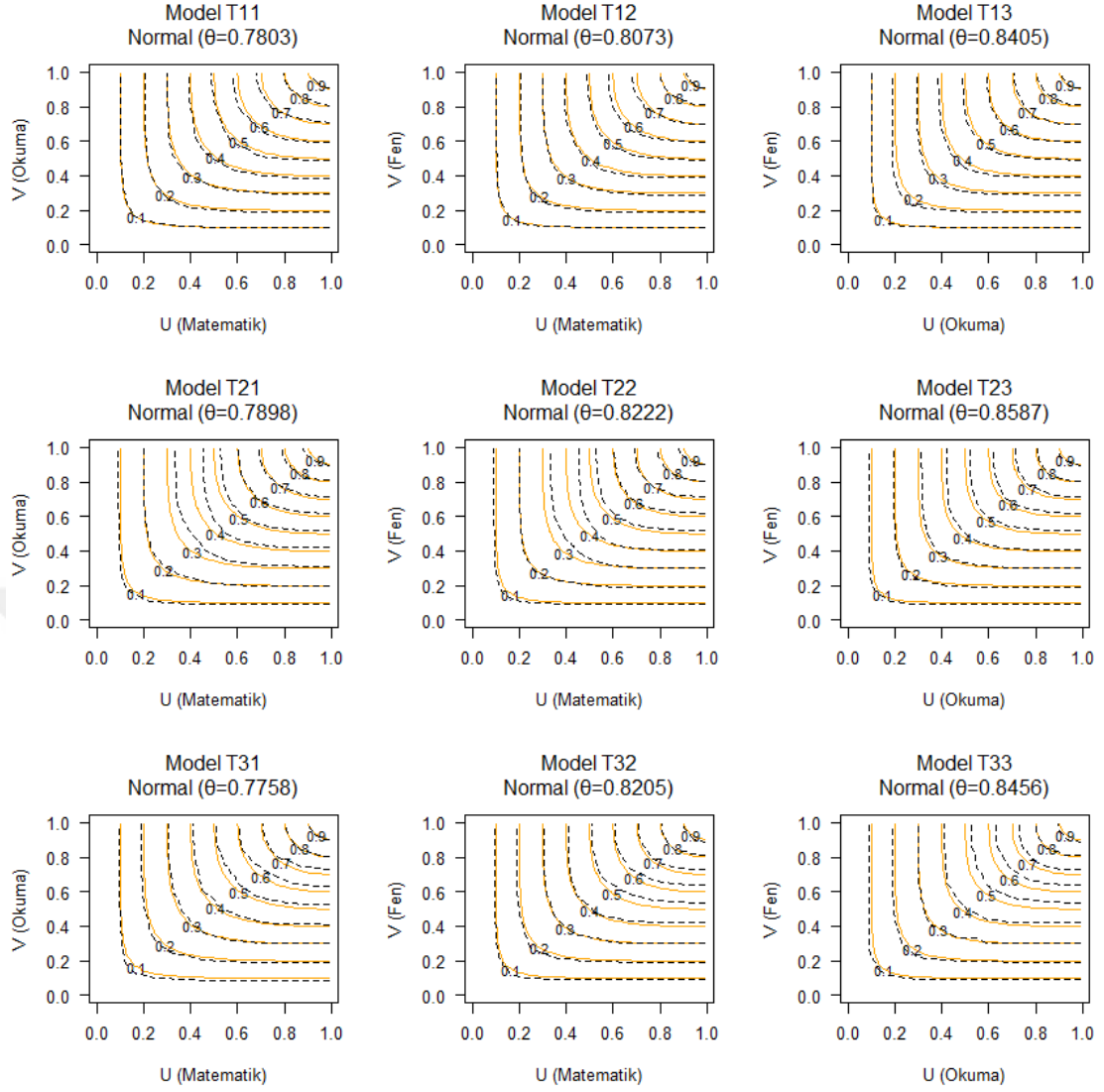
Çizelge 25. Sosyoekonomik düzey değişkeni açısından kız öğrenciler için en iyi kopula modeli seçimi.

Model	Kopula	Uyum İyiliği Testi		Bilgi Kriterleri		
		CvM	p değeri	AIC	BIC	CIC
Model K11	Normal*	0.0245	0.1054	-667.5543	-662.9654	329.4147
	t	0.0479	0.0045	-642.2297	-637.6408	316.2414
	Clayton	0.2951	0.0005	-466.2171	-461.6282	161.1157
	Frank	0.0551	0.0005	-624.5270	-619.9381	310.7223
	Gumbel	0.0426	0.0085	-634.0990	-629.5101	316.2605
	Joe	0.3610	0.0005	-521.8376	-517.2487	258.4182
Model K12	Normal*	0.0188	0.2303	-743.7452	-739.1562	370.6155
	t	0.0290	0.0395	-723.1377	-718.5488	360.1559
	Clayton	0.2897	0.0005	-527.9267	-523.3377	194.2608
	Frank	0.0710	0.0005	-666.7203	-662.1314	332.3743
	Gumbel	0.0304	0.0465	-714.1860	-709.5971	353.1115
	Joe	0.3285	0.0005	-595.1024	-590.5135	292.5983
Model K13	Normal*	0.0110	0.7328	-840.5652	-835.9763	420.1362
	t	0.0247	0.0664	-829.7003	-825.1114	409.6280
	Clayton	0.2256	0.0005	-654.7376	-650.1487	254.0915
	Frank	0.0498	0.0005	-788.2368	-783.6478	395.3451
	Gumbel	0.0602	0.0015	-778.9306	-774.3417	386.3541
	Joe	0.4985	0.0005	-618.3583	-613.7694	305.7814
Model K21	Normal*	0.0172	0.2822	-2243.3313	-2237.6493	1117.6599
	T	0.0934	0.0005	-2144.7321	-2139.0500	1068.3605
	Clayton	0.6074	0.0005	-1601.1857	-1595.5037	564.1079
	Frank	0.1049	0.0005	-2111.0837	-2105.4016	1054.1808
	Gumbel	0.1902	0.0005	-2083.2527	-2077.5707	1041.8801
	Joe	1.4298	0.0005	-1672.1050	-1666.4229	830.8176
Model K22	Normal*	0.0314	0.0195	-2390.4049	-2384.7228	1191.2098
	t	0.1201	0.0005	-2270.9913	-2265.3092	1132.7584
	Clayton	0.7182	0.0005	-1585.8202	-1580.1381	473.3517
	Frank	0.1073	0.0005	-2268.4020	-2262.7200	1134.9006
	Gumbel	0.1285	0.0005	-2289.2705	-2283.5885	1141.5070
	Joe	1.1471	0.0005	-1907.8196	-1902.1376	948.9250
Model K23	Normal*	0.0134	0.4091	-2937.0117	-2931.3296	1464.7136
	t	0.0798	0.0005	-2811.1357	-2805.4536	1401.7017
	Clayton	0.5629	0.0005	-2136.0738	-2130.3918	770.6871
	Frank	0.1218	0.0005	-2723.5381	-2717.8560	1362.8944
	Gumbel	0.1702	0.0005	-2721.4549	-2715.7728	1354.7599
	Joe	1.4398	0.0005	-2196.5972	-2190.9152	1098.7930
Model K31	Normal*	0.0308	0.0405	-459.9010	-455.6864	228.7025
	t	0.0438	0.0085	-441.7576	-437.5430	216.2545
	Clayton	0.1012	0.0005	-349.3109	-345.0963	131.2857
	Frank	0.0644	0.0005	-428.7265	-424.5119	214.1931
	Gumbel	0.1048	0.0005	-419.7823	-415.5677	208.7177
	Joe	0.4451	0.0005	-328.5423	-324.3276	161.1024
Model K32	Normal*	0.0158	0.3621	-550.7455	-546.5309	273.8271
	t	0.0430	0.0045	-524.5457	-520.3311	254.8368
	Clayton	0.1063	0.0005	-410.1717	-405.9571	144.8509
	Frank	0.0259	0.0395	-521.5514	-517.3368	262.5004
	Gumbel	0.0852	0.0005	-501.5395	-497.3249	248.5230
	Joe	0.4441	0.0005	-394.7935	-390.5789	193.4744
Model K33	Normal*	0.0344	0.0135	-620.9866	-616.7720	306.7620
	t	0.0449	0.0005	-602.6674	-598.4528	293.5915
	Clayton	0.0838	0.0015	-492.6796	-488.4650	189.4667
	Frank	0.0643	0.0015	-575.8876	-571.6730	286.8180
	Gumbel	0.1139	0.0005	-564.0005	-559.7859	278.8548
	Joe	0.5137	0.0005	-438.7461	-434.5315	219.3974

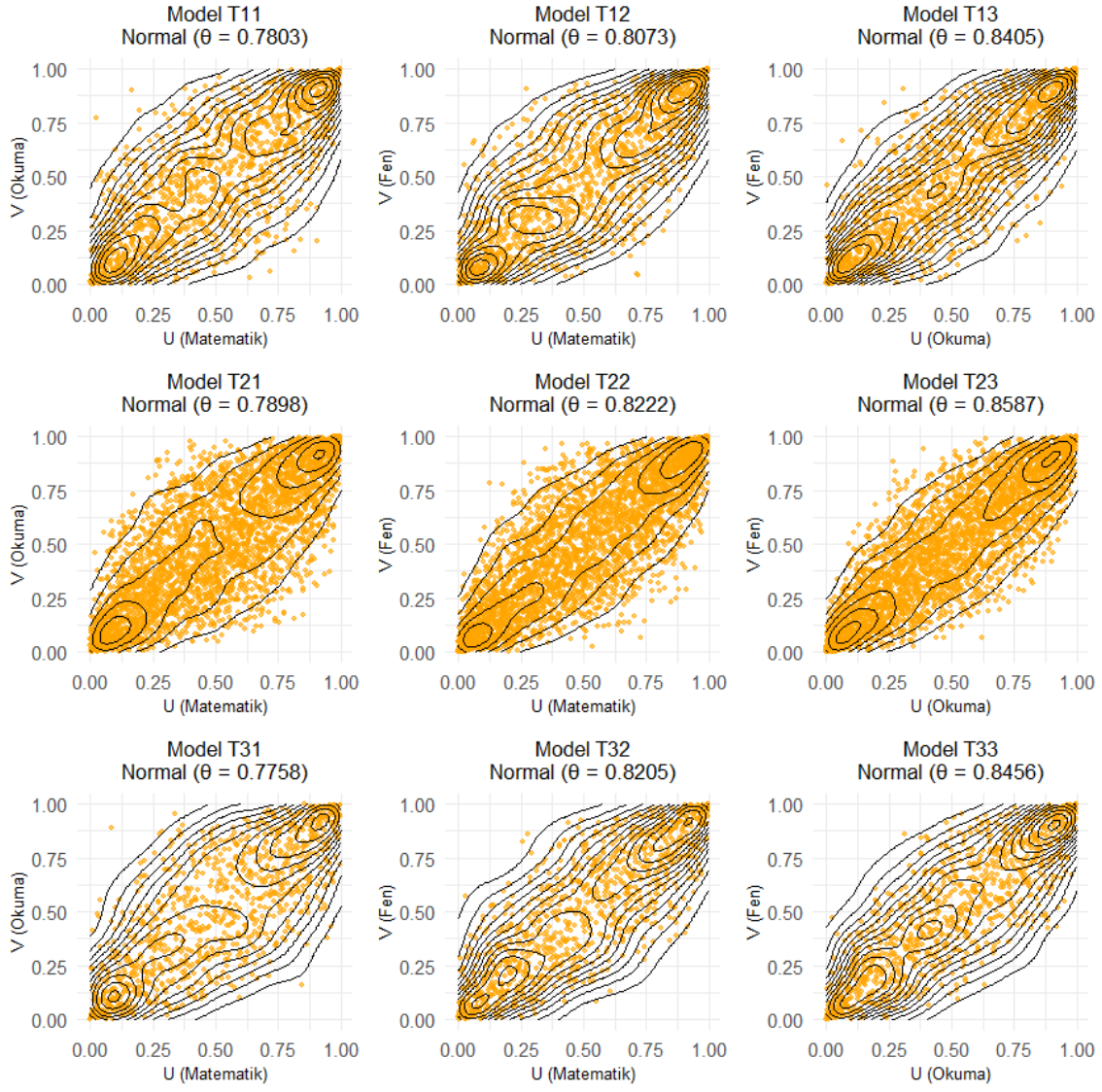
Her bir model için seçilen kopulalara ilişkin parametre tahmin (MPLE) ve standart hata değerleri Çizelge 26’da sunulmuştur.

Çizelge 26. Sosyoekonomik düzey değişkeni için seçilen kopula modellerine yönelik parametre tahmin sonuçları.

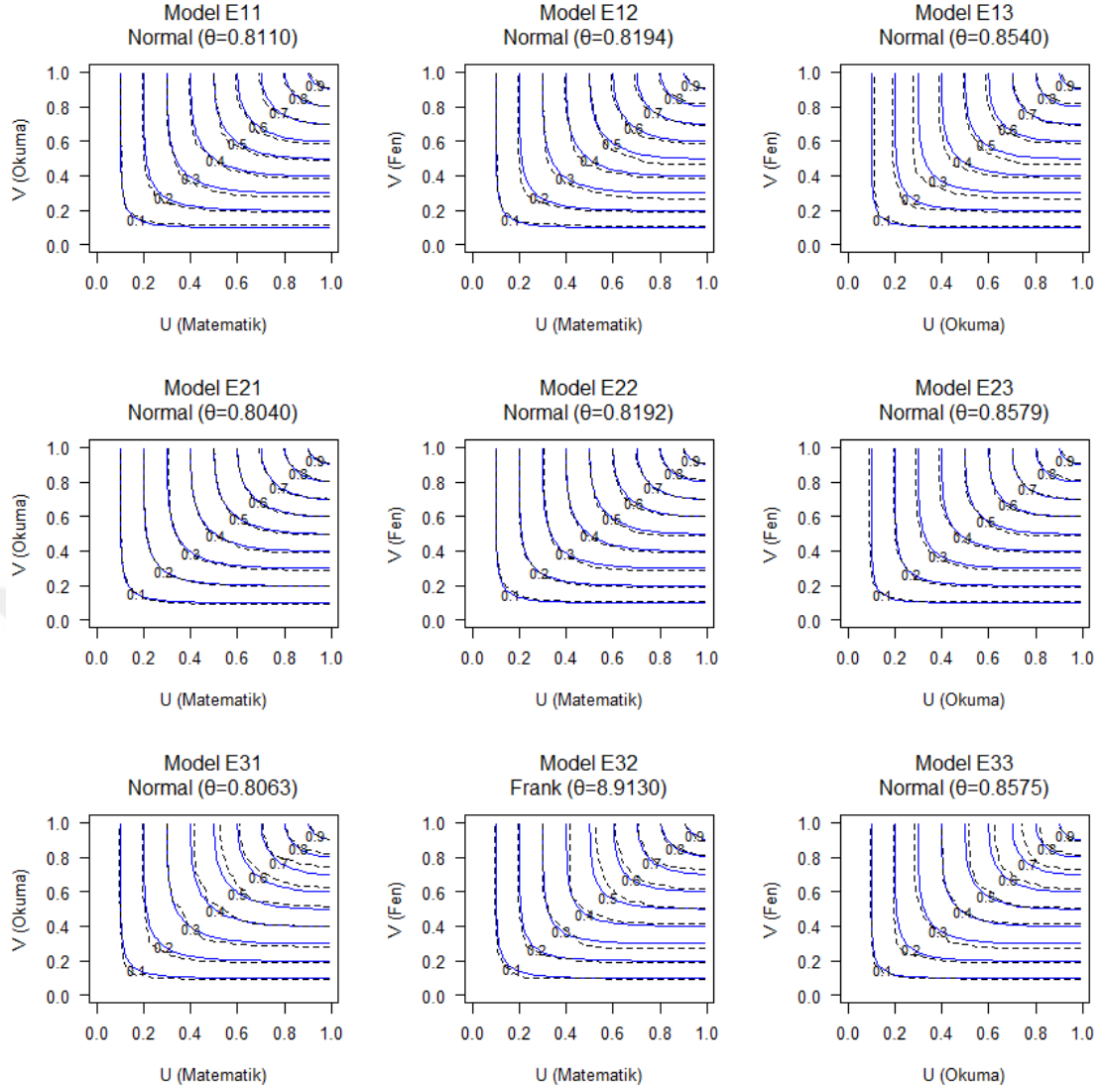
Cinsiyet	Sosyoekonomik Düzey	Çift	Model	Kopula	Tahmin	Standart Hata
Tüm Öğrenciler	Düşük	Matematik-Okuma	Model T11	Normal	0.7803	0.0100
		Matematik-Fen	Model T12	Normal	0.8073	0.0088
		Okuma-Fen	Model T13	Normal	0.8405	0.0064
	Orta	Matematik-Okuma	Model T21	Normal	0.7898	0.0065
		Matematik-Fen	Model T22	Normal	0.8222	0.0055
		Okuma-Fen	Model T23	Normal	0.8587	0.0043
	Yüksek	Matematik-Okuma	Model T31	Normal	0.7758	0.0112
		Matematik-Fen	Model T32	Normal	0.8205	0.0093
		Okuma-Fen	Model T33	Normal	0.8456	0.0081
Erkek	Düşük	Matematik-Okuma	Model E11	Normal	0.8110	0.0128
		Matematik-Fen	Model E12	Normal	0.8194	0.0113
		Okuma-Fen	Model E13	Normal	0.8540	0.0084
	Orta	Matematik-Okuma	Model E21	Normal	0.8040	0.0067
		Matematik-Fen	Model E22	Normal	0.8192	0.0068
		Okuma-Fen	Model E23	Normal	0.8579	0.0051
	Yüksek	Matematik-Okuma	Model E31	Normal	0.8063	0.0139
		Matematik-Fen	Model E32	Frank	8.9130	0.5552
		Okuma-Fen	Model E33	Normal	0.8575	0.0106
Kız	Düşük	Matematik-Okuma	Model K11	Normal	0.7788	0.0138
		Matematik-Fen	Model K12	Normal	0.8037	0.0135
		Okuma-Fen	Model K13	Normal	0.8308	0.0107
	Orta	Matematik-Okuma	Model K21	Normal	0.8041	0.0067
		Matematik-Fen	Model K22	Normal	0.8184	0.0064
		Okuma-Fen	Model K23	Normal	0.8622	0.0051
	Yüksek	Matematik-Okuma	Model K31	Normal	0.7806	0.0157
		Matematik-Fen	Model K32	Normal	0.8213	0.0139
		Okuma-Fen	Model K33	Normal	0.8470	0.0125



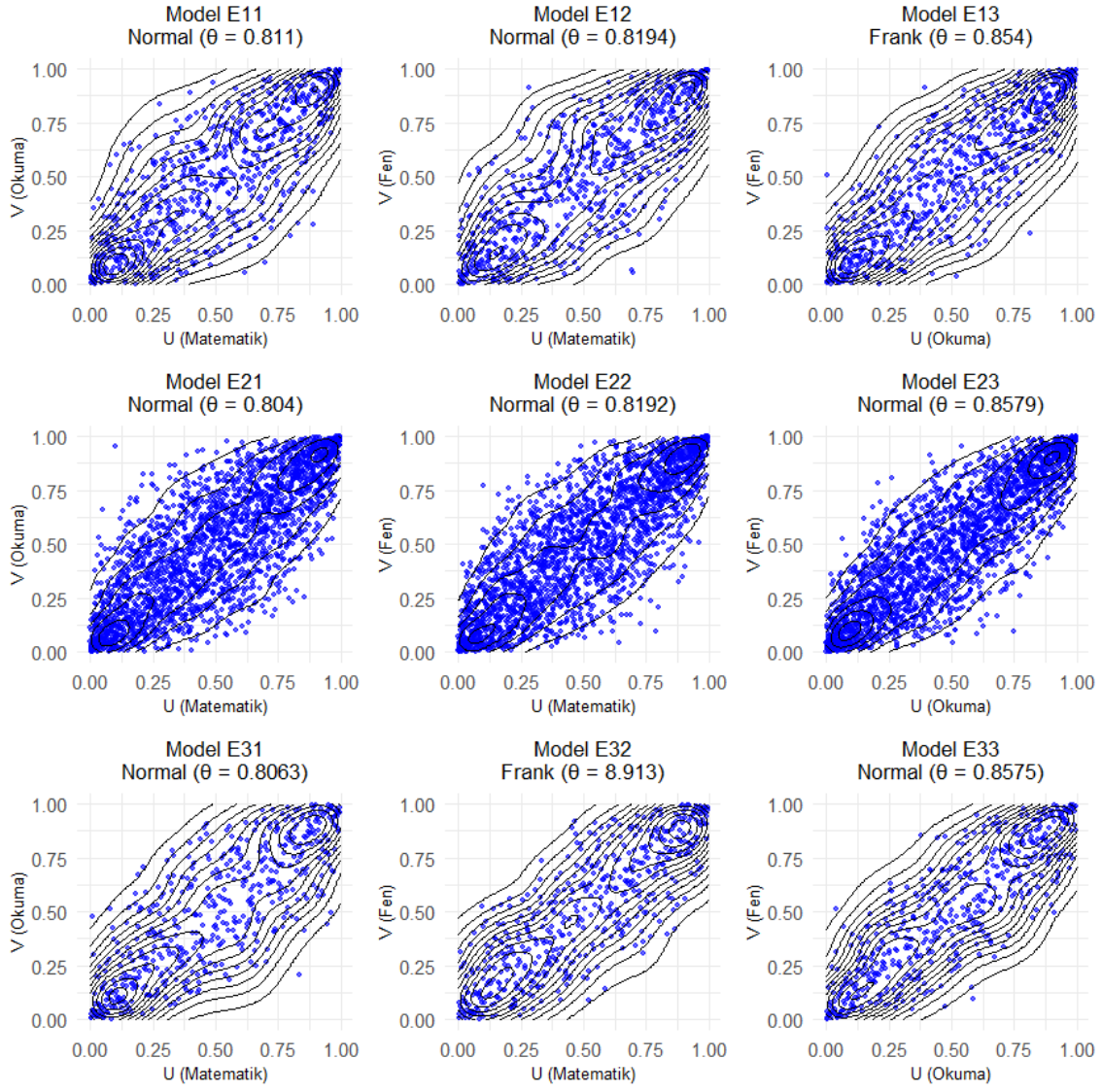
Şekil 11. Sosyoekonomik düzey (Tüm öğrenciler) için uyan teorik (—) kopula modelleri ile ampirik (- -) kopula modellerinin karşılaştırılması



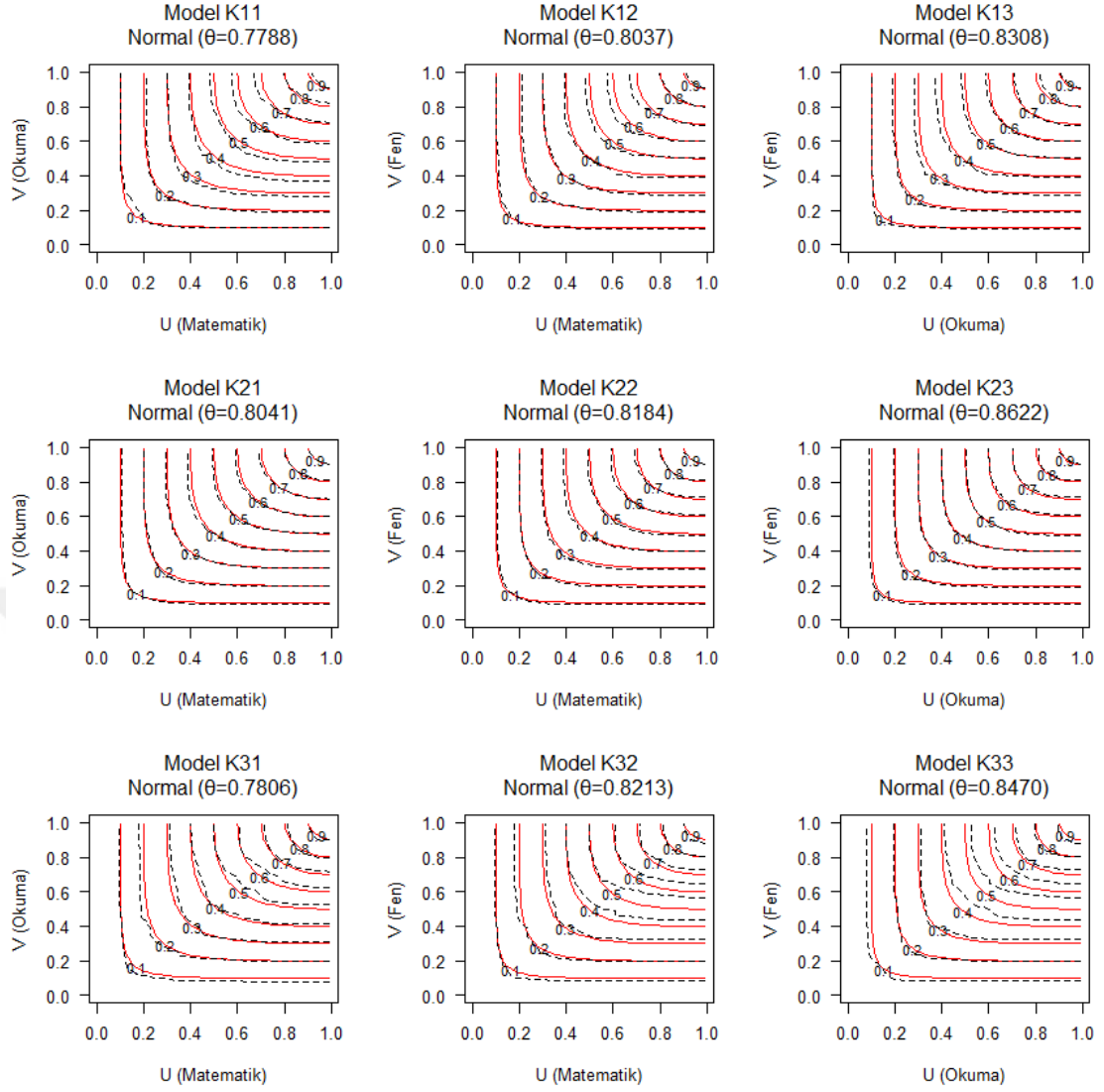
Şekil 12. Sosyoekonomik düzey (Tüm öğrenciler) için gerçek verilerin seçilen kopula fonksiyonlarına uyumunu gösteren grafikler.



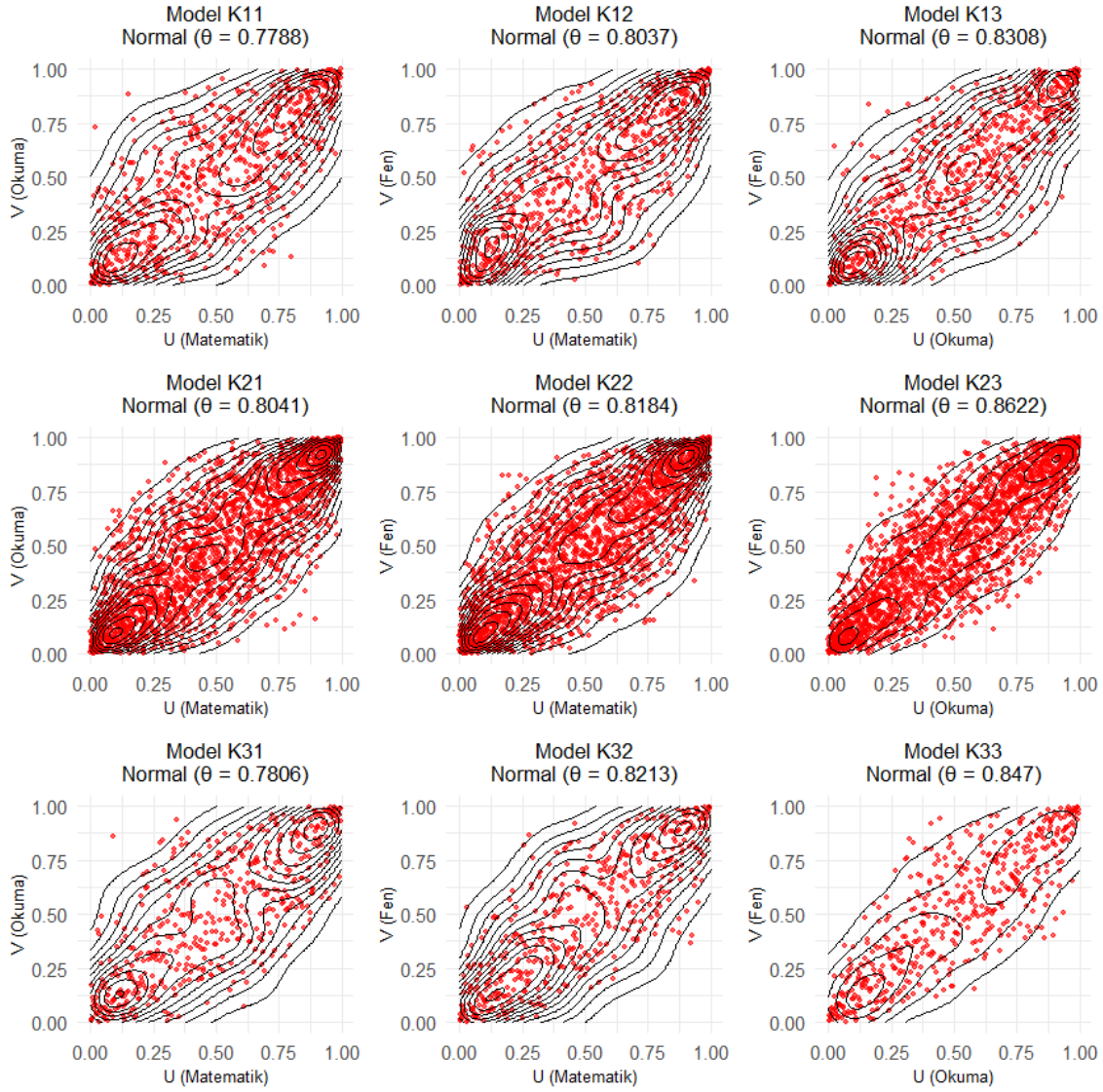
Şekil 13. Sosyoekonomik düzey (Erkek öğrenciler) için uyan teorik (—) kopula modelleri ile ampirik (---) kopula modellerinin karşılaştırılması.



Şekil 14. Sosyoekonomik düzey (Erkek öğrenciler) için gerçek verilerin seçilen kopula fonksiyonlarına uyumunu gösteren grafikler.



Şekil 15. Sosyoekonomik düzey (Kız öğrenciler) için uyan teorik (—) kopula modelleri ile ampirik (---) kopula modellerinin karşılaştırılması.



Şekil 16. Sosyoekonomik düzey (Kız öğrenciler) için gerçek verilerin seçilen kopula fonksiyonlarına uyumunu gösteren grafikler.

4.1.4. PISA Başarı Puanları için Ortak ve Koşullu Olasılıklar

Bu bölümde genel analiz, evdeki eğitim olanakları ve sosyoekonomik düzey değişkenlerine göre sınıflandırılan erkek ve kız öğrencilerin 2018 yılı PISA Matematik, Okuma ve Fen başarı puanlarına yönelik, önceki bölümlerde tespit edilen en uygun marjinal dağılımlar ve kopula modelleri kullanılarak ortak ve koşullu olasılıklar hesaplanmıştır. Burada, Çizelge 1’de tanımlanan her bir model için puanların ortalamaları eşik değer olarak alınmış bu eşik değerlerin üzerindeki başarı olasılıkları değerlendirilmiştir. Elde edilen sonuçlar Çizelge 8’de sunulmuştur.

Erkek ve kız öğrencilerin Matematik, Okuma ve Fen puanlarına ilişkin en uygun

marjinal dağılım parametreleri, sırasıyla Çizelge 4 ve 5'te, kopula uyum iyiliği sonuçları ise Çizelge 6'da verilmiştir. Eşik değerler olarak Çizelge 2'de sunulan ortalama değerler kullanılmıştır. Ayrıca, belirli bir derste ortalamasının üzerinde başarı gösteren öğrencilerin diğer derslerde de aynı başarıyı gösterme olasılıkları, koşullu olasılık yöntemleriyle Bölüm 2'deki eşitlikler kullanılarak analiz edilmiştir.

Okumanın matematik ve fen başarısı üzerindeki etkisini incelemek amacıyla bazı ortak ve koşullu olasılıklar birlikte analiz edilmiştir. Tablo 8, matematik-okuma, matematik-fen ve okuma-fen çiftleri için seçilen kopula modellerine dayalı olarak hesaplanan ortak ve koşullu olasılıkları sunmaktadır. Bu olasılıkların hesaplanmasında, marjinal dağılım bilgilerine göre $U(0,1)$ dönüşümleri uygulanmış ve sonuçlar $\bar{C}(u, v)$, $\bar{C}_v(u)$ ve $\bar{C}_u(v)$ notasyonları ile ifade edilmiştir.

4.1.4.1. Birinci Durum için Bulgular

Elde edilen sonuçlar, öğrencilerin belirli derslerde başarı gösterme olasılıklarının koşullu olasılıklarla nasıl değişebileceğini göstermektedir. Örneğin, Çizelge 27'de E1 modelinde hem matematik hem de okuma dersinde başarılı olma olasılığı %40.40 iken okuma dersinde başarılı olan bir öğrencinin matematikte de başarılı olma olasılığı, koşullu olasılık bilgisi $\bar{C}_v(u)$ kullanılarak %80.80 olarak hesaplanmıştır. K1 modeli için bu olasılıklar sırasıyla %38.74 ve %77.47 olarak bulunmuştur.

Çizelge 27. Öğrencilerin tümü ve erkek/kız öğrenciler için seçilen kopula modellerine yönelik ortak ve koşullu olasılıklar.

Model	Seçilen Kopulalar	Tahmin	Eşik Değerler		Olasılıklar		
					$\bar{C}(u, v)$	$\bar{C}_v(u)$	$\bar{C}_u(v)$
Model T1	Normal	0.8060	$\bar{x}_m = 452.7008$	$\bar{x}_o = 464.2299$	0,3992	0,7984	0,7984
Model T2	Normal	0.8310	$\bar{x}_m = 452.7008$	$\bar{x}_f = 467.4865$	0,4061	0,8122	0,8122
Model T3	Normal	0.8655	$\bar{x}_o = 464.2299$	$\bar{x}_f = 467.4865$	0,4165	0,8330	0,8330
Model E1	Normal	0.8236	$\bar{x}_m = 454.8183$	$\bar{x}_o = 450.7126$	0,4040	0,8080	0,8080
Model E2	Normal	0.8369	$\bar{x}_m = 454.8183$	$\bar{x}_f = 462.6524$	0,4078	0,8156	0,8156
Model E3	Normal	0.8692	$\bar{x}_o = 450.7126$	$\bar{x}_f = 462.6524$	0,4177	0,8354	0,8354
Model K1	Normal	0.8167	$\bar{x}_m = 450.5231$	$\bar{x}_o = 478.1383$	0,3874	0,7747	0,8213
Model K2	Normal	0.8315	$\bar{x}_m = 450.5231$	$\bar{x}_f = 472.4610$	0,3915	0,7830	0,8300
Model K3	Normal	0.8678	$\bar{x}_o = 478.1383$	$\bar{x}_f = 472.4610$	0,4172	0,8345	0,8345

Benzer şekilde, E3 modelinde hem okuma hem de fen dersinde başarılı olma olasılığı %41.77 iken, okuma dersinde başarılı olan bir öğrencinin fen dersinde de başarılı olma olasılığı, $\bar{C}_u(v)$ koşullu olasılık bilgisi ile %83.54 elde edilmiştir. K3 modelinde de benzer bir durum gözlenmiş olup, olasılıklar sırasıyla %41.72 ve %83.45 olarak hesaplanmıştır.

Bu sonuçlara göre, genel olarak erkek öğrencilerin kız öğrencilere kıyasla biraz daha yüksek ortak ve koşullu başarı olasılıklarına sahip olduğu gözlemlenmiştir

4.1.4.2. İkinci Durum için Bulgular

Elde edilen sonuçlar, öğrencilerin belirli derslerde başarı gösterme olasılıklarının koşullu olasılıklarla nasıl değişebileceğini göstermektedir. Örneğin, Çizelge 28'deki E31 modelinde hem matematik hem de okuma dersinde başarılı olma olasılığı %38.67 iken okuma dersinde başarılı olan bir öğrencinin matematikte de başarılı olma olasılığı, koşullu olasılık bilgisi $\bar{C}_v(u)$ kullanılarak %77.34 olarak hesaplanmıştır. K31 modeli için bu olasılıklar sırasıyla %38.74 ve %77.47 olarak bulunmuştur.

Çizelge 28. Evdeki eğitim olanakları değişkeni için seçilen kopula modellerine yönelik ortak ve koşullu olasılıklar.

Model	Seçilen Kopulalar	Tahmin	Eşik Değerler		Olasılıklar		
					$\bar{C}(u, v)$	$\bar{C}_v(u)$	$\bar{C}_u(v)$
Model T11	Frank	8.0424	$\bar{x}_m = 362.5930$	$\bar{x}_o = 383.7899$	0,3986	0,8716	0,7748
Model T12	Normal	0.8071	$\bar{x}_m = 362.5930$	$\bar{x}_f = 404.9426$	0,4066	0,8132	0,7903
Model T13	Frank	9.3272	$\bar{x}_o = 383.7899$	$\bar{x}_f = 404.9426$	0,4033	0,8065	0,8817
Model T21	Normal	0.7860	$\bar{x}_m = 444.1821$	$\bar{x}_o = 454.9197$	0,3807	0,7615	0,8025
Model T22	Normal	0.8166	$\bar{x}_m = 444.1821$	$\bar{x}_f = 457.5665$	0,3888	0,7777	0,8195
Model T23	Normal	0.8531	$\bar{x}_o = 454.9197$	$\bar{x}_f = 457.5665$	0,4126	0,8253	0,8253
Model T31	Normal	0.8010	$\bar{x}_m = 468.2406$	$\bar{x}_o = 479.8256$	0,3855	0,7709	0,8098
Model T32	Normal	0.8281	$\bar{x}_m = 468.2406$	$\bar{x}_f = 482.3211$	0,363	0,7261	0,8562
Model T33	Normal	0.8670	$\bar{x}_o = 479.8256$	$\bar{x}_f = 482.3211$	0,4170	0,8340	0,8340
Model E11	Frank	9.1478	$\bar{x}_m = 365.3851$	$\bar{x}_o = 373.6318$	0.4153	0.8817	0.8097
Model E12	Normal	0.8389	$\bar{x}_m = 365.3851$	$\bar{x}_f = 399.9808$	0.3959	0.8499	0.7720
Model E13	Frank	8.9777	$\bar{x}_o = 373.6318$	$\bar{x}_f = 399.9808$	0.3925	0.8425	0.8333
Model E21	Normal	0.8062	$\bar{x}_m = 446.9170$	$\bar{x}_o = 441.5230$	0.3986	0.7982	0.7982
Model E22	Normal	0.8214	$\bar{x}_m = 446.9170$	$\bar{x}_f = 451.1460$	0.4092	0.7984	0.8195
Model E23	Normal	0.8630	$\bar{x}_o = 441.5230$	$\bar{x}_f = 451.1460$	0.4215	0.8223	0.8442
Model E31	Normal	0.8134	$\bar{x}_m = 470.5440$	$\bar{x}_o = 466.5770$	0.3867	0.7734	0.8191
Model E32	Normal	0.8301	$\bar{x}_m = 470.5440$	$\bar{x}_f = 476.8362$	0.3913	0.7826	0.8289
Model E33	Normal	0.8653	$\bar{x}_o = 466.5770$	$\bar{x}_f = 476.8362$	0.4164	0.8329	0.8329
Model K11	Frank	7.8731	$\bar{x}_m = 358.3634$	$\bar{x}_o = 399.1779$	0.4030	0.8678	0.7771
Model K12	Normal	0.7657	$\bar{x}_m = 358.3634$	$\bar{x}_f = 412.4590$	0.3772	0.8157	0.7272
Model K13	Frank	10.4114	$\bar{x}_o = 399.1779$	$\bar{x}_f = 412.4590$	0.3974	0.8594	0.8556
Model K21	Normal	0.7946	$\bar{x}_m = 441.6859$	$\bar{x}_o = 467.9501$	0.3776	0.7551	0.8129
Model K22	Normal	0.8177	$\bar{x}_m = 441.6859$	$\bar{x}_f = 461.2697$	0.3837	0.7674	0.8261
Model K23	Normal	0.8503	$\bar{x}_o = 467.9501$	$\bar{x}_f = 461.2697$	0.4118	0.8236	0.8236
Model K31	Normal	0.8199	$\bar{x}_m = 465.7769$	$\bar{x}_o = 493.5980$	0.3874	0.7747	0.8241
Model K32	Normal	0.8368	$\bar{x}_m = 465.7769$	$\bar{x}_f = 489.7940$	0.3921	0.7842	0.8342
Model K33	Normal	0.8739	$\bar{x}_o = 493.5980$	$\bar{x}_f = 489.7940$	0.4192	0.8384	0.8384

Benzer şekilde, E33 modelinde, hem okuma hem de fen dersinde başarılı olma olasılığı %41.64 iken, okuma dersinde başarılı olan bir öğrencinin fen dersinde de başarılı olma

olasılığı, $\bar{C}_u(v)$ koşullu olasılık bilgisi ile %83.29 elde edilmiştir. K33 modelinde de benzer bir durum gözlenmiş olup, olasılıklar sırasıyla %41.92 ve %83.84 olarak hesaplanmıştır.

Bu sonuçlara göre, evdeki eğitim seviyesi yüksek olan kız öğrencilerin, erkek öğrencilere kıyasla biraz daha yüksek ortak başarı olasılıklarına sahip olduğu belirlenmiştir. Ayrıca, yüksek eğitim seviyesine sahip kız öğrenciler için okuma başarısı dikkate alındığında, hem matematikte hem de fen bilimlerinde başarılı olma koşullu olasılıklarının erkeklerden biraz daha yüksek olduğu tespit edilmiştir. Ancak, diğer eğitim seviyelerinde bu durum tersine bir eğilim göstermektedir.

4.1.4.3. Üçüncü Durum için Bulgular

Elde edilen sonuçlar, öğrencilerin belirli derslerde başarı gösterme olasılıklarının koşullu olasılıklarla nasıl değişebileceğini göstermektedir.

Çizelge 29. Sosyoekonomik düzey değişkeni için seçilen kopula modellerine yönelik ortak ve koşullu olasılıklar.

Model	Seçilen Kopulalar	Tahmin	Eşik Değerler		Olasılıklar		
					$\bar{C}(u, v)$	$\bar{C}_v(u)$	$\bar{C}_u(v)$
Model T11	Normal	0.7803	$\bar{x}_m = 425.3908$	$\bar{x}_o = 433.3426$	0.3925	0.7849	0.7849
Model T12	Normal	0.8073	$\bar{x}_m = 425.3908$	$\bar{x}_f = 441.5939$	0.3995	0.7991	0.7991
Model T13	Normal	0.8405	$\bar{x}_o = 433.3426$	$\bar{x}_f = 441.5939$	0.4089	0.8177	0.8177
Model T21	Normal	0.7898	$\bar{x}_m = 466.3075$	$\bar{x}_o = 475.5984$	0.4091	0.7726	0.8182
Model T22	Normal	0.8222	$\bar{x}_m = 466.3075$	$\bar{x}_f = 477.6934$	0.4036	0.8073	0.8073
Model T23	Normal	0.8587	$\bar{x}_o = 475.5984$	$\bar{x}_f = 477.6934$	0.4284	0.8567	0.8091
Model T31	Normal	0.7758	$\bar{x}_m = 518.0132$	$\bar{x}_o = 527.3578$	0.3913	0.7827	0.7827
Model T32	Normal	0.8205	$\bar{x}_m = 518.0132$	$\bar{x}_f = 526.1779$	0.4201	0.7842	0.8402
Model T33	Normal	0.8456	$\bar{x}_o = 527.3578$	$\bar{x}_f = 526.1779$	0.4272	0.7975	0.8544
Model E11	Normal	0.8110	$\bar{x}_m = 426.2819$	$\bar{x}_o = 418.9585$	0.3952	0.8417	0.7536
Model E12	Normal	0.8194	$\bar{x}_m = 426.2819$	$\bar{x}_f = 435.2628$	0.4029	0.8413	0.7682
Model E13	Normal	0.8540	$\bar{x}_o = 418.9585$	$\bar{x}_f = 435.2628$	0.3872	0.8086	0.8247
Model E21	Normal	0.8040	$\bar{x}_m = 448.5225$	$\bar{x}_o = 446.3728$	0.3986	0.7973	0.7973
Model E22	Normal	0.8192	$\bar{x}_m = 448.5225$	$\bar{x}_f = 457.3861$	0.4028	0.8056	0.8056
Model E23	Normal	0.8579	$\bar{x}_o = 446.3728$	$\bar{x}_f = 457.3861$	0.4141	0.8282	0.8282
Model E31	Normal	0.8063	$\bar{x}_m = 520.5144$	$\bar{x}_o = 513.4167$	0.4150	0.7787	0.8300
Model E32	Frank	8.9130	$\bar{x}_m = 520.5144$	$\bar{x}_f = 522.2912$	0.4235	0.8471	0.8471
Model E33	Normal	0.8575	$\bar{x}_o = 513.4167$	$\bar{x}_f = 522.2912$	0.4296	0.8592	0.8060
Model K11	Normal	0.7788	$\bar{x}_m = 424.5439$	$\bar{x}_o = 447.9648$	0.3794	0.7981	0.7589
Model K12	Normal	0.8037	$\bar{x}_m = 424.5439$	$\bar{x}_f = 447.6115$	0.3986	0.7971	0.7971
Model K13	Normal	0.8308	$\bar{x}_o = 447.9648$	$\bar{x}_f = 447.6115$	0.3933	0.7866	0.8273
Model K21	Normal	0.8041	$\bar{x}_m = 444.2707$	$\bar{x}_o = 473.5691$	0.3987	0.7974	0.7974
Model K22	Normal	0.8184	$\bar{x}_m = 444.2707$	$\bar{x}_f = 467.4764$	0.4026	0.8051	0.8051
Model K23	Normal	0.8622	$\bar{x}_o = 473.5691$	$\bar{x}_f = 467.4764$	0.4155	0.8309	0.8309
Model K31	Normal	0.7806	$\bar{x}_m = 515.4169$	$\bar{x}_o = 541.8286$	0.3925	0.7851	0.7851
Model K32	Normal	0.8213	$\bar{x}_m = 515.4169$	$\bar{x}_f = 530.2123$	0.4218	0.7825	0.8436
Model K33	Normal	0.8470	$\bar{x}_o = 541.8286$	$\bar{x}_f = 530.2123$	0.4291	0.7960	0.8582

Örneğin, Çizelge 29'da E31 modelinde hem matematik hem de okuma dersinde başarılı olma olasılığı %41.50 iken okuma dersinde başarılı olan bir öğrencinin matematikte de başarılı olma olasılığı, koşullu olasılık bilgisi $\bar{C}_v(u)$ kullanılarak %77.87 olarak hesaplanmıştır. K31 modeli için bu olasılıklar sırasıyla %39.25 ve %78.51 olarak bulunmuştur.

Benzer şekilde, E33 modelinde hem okuma hem de fen dersinde başarılı olma olasılığı %42.96 iken, okuma dersinde başarılı olan bir öğrencinin fen dersinde de başarılı olma olasılığı, $\bar{C}_u(v)$ koşullu olasılık bilgisi ile %80.60 elde edilmiştir. K33 modelinde de benzer bir durum gözlenmiş olup, olasılıklar sırasıyla %42.91 ve %85.82 olarak hesaplanmıştır.

Bu sonuçlara göre, sosyoekonomik düzeyi yüksek olan erkek öğrencilerin, kız öğrencilere kıyasla biraz daha yüksek ortak başarı olasılıklarına sahip olduğu belirlenmiştir. Ayrıca, yüksek sosyoekonomik düzeye sahip erkek öğrencilerin okuma başarısı dikkate alındığında matematikte başarılı olma olasılıklarının kızlardan düşük, fende başarılı olma olasılıklarının kızlardan yüksek olduğu tespit edilmiştir. Ancak, diğer sosyoekonomik düzeylerde bu durum tersine bir eğilim göstermektedir.

5. SONUÇLAR

Bu çalışma, 2018 yılı PISA verilerini kullanarak, öğrencilerin matematik, okuma ve fen bilimleri başarıları arasındaki bağımlılık yapılarının cinsiyet, evdeki eğitim olanakları ve sosyoekonomik düzey faktörlere göre farklılaşma durumunu incelemiştir. Kopula fonksiyonları ile yapılan analizler, başarı olasılıklarını doğru bir şekilde tahmin etmek için en uygun modelleri belirlemiştir.

Özellikle, erkek ve kız öğrencilerin evdeki eğitim olanakları ve sosyoekonomik düzeylerine göre PISA başarı puanları arasındaki bağımlılık, kopula fonksiyonları kullanılarak incelenmiştir. Öncelikle, bu demografik özelliklere göre PISA başarı puanları için çeşitli modeller oluşturulmuş ve oluşturulan her bir model için CvM uyum iyiliği testi ile en iyi kopulalar belirlenmiş, seçilen fonksiyonlar AIC, BIC ve CIC kriterleri ile desteklenmiştir. Ayrıca kopulaların verilere uyumluluğu grafiklerle gösterilmiştir. Daha sonra sözde en çok olasılık (MPLE) yöntemi ile yapılan parametre tahminleri kullanılarak bazı ortak olasılıklar elde edilmiştir. Burada, her bir model için ortalamalar eşik değer olarak alınarak başarı puanlarının bu eşik değerleri aşma olasılıkları başarı olarak değerlendirilmiştir. Ayrıca okumanın matematik ve fen dersleri üzerindeki etkisini görebilmek amacıyla koşullu olasılıklar hesaplanmıştır.

Sonuçlar, öğrencilerin evdeki eğitim olanaklarının ve sosyoekonomik düzeylerinin akademik başarıları üzerinde belirli bir etkiye sahip olduğunu, ancak bu etkinin her durumda sabit ve tutarlı olmadığını göstermektedir. Beklentilere göre, yüksek eğitim seviyesine veya yüksek sosyoekonomik düzeye sahip öğrencilerin başarı olasılıklarının artması gerekirken, bu etkinin cinsiyete ve ders türüne bağlı olarak farklılaştığı görülmüştür.

Elde edilen bulgular, öğrencilerin bir derste başarılı olmalarının diğer derslerdeki başarı olasılıklarını olumlu yönde etkileyebileceğini ortaya koymaktadır. Başka bir deyişle, herhangi iki derste birlikte başarılı olma olasılığı daha düşükken, bir dersten başarılı olduğu bilinen bir öğrencinin diğer derslerde de başarılı olma olasılığı daha

yüksek bulunmuştur.

Çalışma, evdeki eğitim olanaklarına ve sosyoekonomik düzeylere göre sınıflandırılmış başarı puanları arasındaki bağımlılık yapılarının incelenmesine ve öğrencilerin ortalamanın üzerinde başarı gösterme olasılıklarının daha ayrıntılı bir şekilde değerlendirilmesine olanak tanımaktadır. Ayrıca, çalışma farklı demografik gruplarda bu olasılıkların nasıl değiştiğini analiz ederek, eğitim politikalarının geliştirilmesine katkı sağlayabilecek bir çerçeve sunmaktadır. Bu bağlamda, bağımlılık modelleri ve kopula fonksiyonları, yalnızca ortalamanın üzerinde başarı gösterme olasılıklarını belirlemekle kalmayıp, bu olasılıkların koşullu olarak nasıl değiştiğini analiz etme fırsatı da sunmaktadır.

Sonuç olarak çalışma, kopula modellerinin öğrenci başarılarını etkileyen bağımlı faktörleri anlamada etkili bir araç olduğunu ve eğitim analizlerinde etkin bir şekilde kullanılabileceğini ortaya koymaktadır. Elde edilen analizler cinsiyet, evdeki eğitim olanakları ve sosyoekonomik düzey değişkenlerinin yanı sıra, diğer demografik faktörlerin de başarıya olan etkilerini incelemek ve öğrencilerin eğitim süreçlerini daha iyi yönlendirebilmek adına önemli bir temel oluşturmaktadır.

KAYNAKÇA

- Aas, K., Czado, C., Frigessi, A., & Bakken, H. (2009). Pair-copula constructions of multiple dependence. *Insurance: Mathematics and Economics*, 44(2), 182-198.
- Akaike, H. (1974). A new look at the statistical model identification. *IEEE transactions on automatic control*, 19(6), 716-723.
- Anıl, D. (2009). Uluslararası öğrenci başarılarını değerlendirme programı (PISA)'nda Türkiye'deki öğrencilerin fen bilimleri başarılarını etkileyen faktörler. *Eğitim ve Bilim*, 34(152), 87-100.
- Avşaroğlu, Y. (2023). *Dicle Havzası'ndaki kuraklığın iki değişkenli kopula teorisi ile analizi* (Doktora Tezi). Harran University, Şanlıurfa.
- Bağrıaçık, İ. (2021). *Bağımlılık yapılarının kopulalarla incelenmesi* (Yüksek Lisans Tezi). Kırıkkale University, Kırıkkale.
- Başak, A. (2024). *Asi Havzası hidrolojik kuraklığının çok değişkenli kopula teorisi ile değerlendirilmesi* (Doktora Tezi). Harran University, Şanlıurfa.
- Baykal, T. (2024). Joint frequency analysis of streamflow and sediment amount with copula functions in the Kızılırmak Basin, Turkey. *Natural Hazards*, 1-20.
- Bhatti, M. I., & Do, H. Q. (2019). Recent development in copula and its applications to the energy, forestry and environmental sciences. *International Journal of Hydrogen Energy*, 44(36), 19453-19473.
- Cherubini U, Luciano E, Vecchiato W (2004). Copula methods in finance. *John Wiley and Sons*, 289, New York.
- Değer, İ. H. (2023). *Univariate and bivariate hydrological drought severity and duration frequency analysis of Yeşilirmak, Kızılırmak and Euphrates basins of türkiye using copula functions* (Doktora Tezi). Hasan Kalyoncu University, Gaziantep.

- Demarta, S., & McNeil, A. J. (2005). The t copula and related copulas. *International Statistical Review*, 73(1), 111-129.
- Embrechts, P., McNeil, A., & Straumann, D. (2003). Copulas: A Review. *Journal of Multivariate Analysis*, 88(2), 327-344.
- Eşit, M. (2021). *Ceyhan havzasının kopula temelli iki değişkenli kuraklık frekans analizi* (Doktora Tezi). Gaziantep University, Gaziantep.
- Favre, A. C., El Adlouni, S., Perreault, L., Thiémondge, N., & Bobée, B. (2004). Multivariate hydrological frequency analysis using copulas. *Water resources research*, 40(1).
- Feron, R. (1956). Sur les tableaux de corrélation dont les marges sont données. Cas de l'espace à trois dimensions, Publ. Inst. Stat. Univ. Paris.
- Frechet, M. R. (1951). Sur les tableaux de corrélation dont les marges sont données, Ann. Univ. Lyon. Sect. A.
- Frees, E. W., & Valdez, E. A. (1998). Understanding relationships using copulas. *North American Actuarial Journal*, 2(1), 1-25.
- Genest, C., Ghoudi, K. and Rivest, L. P. (1995). A semiparametric estimation procedure of dependence parameters in multivariate families of distributions. *Printed in Great Britain*, 82, 543-552.
- Genest, C., Favre, A-C. (2007). Everything you always wanted to know about copula modeling but were afraid to ask. *Journal of hydrologic engineering* 12(4):347–368.
- Goda, K. (2010). Statistical modeling of joint probability distribution using copula: application to peak and permanent displacement seismic demands. *Structural Safety*, 32(2), 112-123.
- Gönenç-Erdemir, Ö. (2020). *Düzenlenmiş sözde-kopula regresyon modeli* (Doktora Tezi). Hacettepe University, Ankara.
- Grønneberg, S., and Hjort, N.L. (2014) The copula information criteria. *Scandinavian Journal of Statistics* 41, 436–459.
- Hoeffding, W. (1940). Maßstabinvariante Korrelationstheorie, Schriften Des Math. Instituts Und Des Instituts Für Angew. Math. Der Univ. Berlin.

- Hofert, M., Kojadinovic, I., Maechler, M. and Yan, J. (2024). Copula: multivariate dependence with copulas, *R package version: 1*, 1-4, <https://CRAN.R-project.org/package=copula>
- Joe, H. and Xu, J. J. (1996). The estimation method of inference functions for margins for multivariate models, *Department of Statistics, University of British Columbia*.
- Joe, H. (2014). *Dependence modeling with copulas*. CRC press.
- Kara, E. K., & Kemalolu, S. A. (2016). Portfolio optimization of dynamic copula models for dependent financial data using change point approach. *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics*, 65(2), 175-188.
- Kara, E. K. & Yıldız, O. (2014). Bivariate analysis of precipitation and runoff in the Hirfanlı Dam Basin, Turkey, using Copulas. *İstatistik: Journal of the Turkish Statistical Association*, 7(3), 63-70.
- Kara, E. K. (2017). The Earthquake Risk Analysis Based on Copula Models for Turkey. *Sigma: Journal of Engineering & Natural Sciences/Mühendislik ve Fen Bilimleri Dergisi*, 35(2).
- Kasap, Y., Doğan, N. & Koçak, C. (2021). PISA 2018’de okuduğunu anlama başarısını yordayan değişkenlerin veri madenciliği ile belirlenmesi. *Manisa Celal Bayar Üniversitesi Sosyal Bilimler Dergisi*, 19(4), 241-258.
- Kızılok Kara, E., Açık Kemalolu, S., & Evkaya, Ö. O. (2022). Modeling Currency Exchange Data with Asymmetric Copula Functions. *In Advances in Econometrics, Operational Research, Data Science and Actuarial Studies: Techniques and Theories* (pp. 49-62). Cham: Springer International Publishing.
- Kwon, T., & Yoon, S. (2017). Analysis of extreme wind speed and precipitation using copula. *Journal of the Korean Data and Information Science Society*, 28(4), 797-810.
- MEB, (2013). PISA 2012 Ulusal ön raporu <http://pisa.meb.gov.tr/wp-content/uploads/2013/12/pisa2012-ulusal-on-raporu.pdf>, (Erişim tarihi: 10 Temmuz 2022).
- Moore, D. S. & Spruill, M. C. (1975). Unified large-sample theory of general chi-

- squared statistics for *Ann Stat.* 1(3), 599-616.
- Nelsen, R.B. (2006). *An Introduction to Copulas*. 2nd edition, Springer, New York.
- Nguyen-Huy, T., Deo, R. C., Mushtaq, S., Kath, J., & Khan, S. (2019). Copula statistical models for analyzing stochastic dependencies of systemic drought risk and potential adaptation strategies. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*, 33(3), 779-799.
- OECD, (2014). PISA 2012 results in focus.
<https://www.oecd.org/pisa/keyfindings/pisa-2012-results-overview.pdf>,
(Erişim tarihi: 14 Temmuz 2024).
- Özer Uyar, P. (2018). *Bernstein kopula ile hayat dışı sigortasında bağımlılığın modellenmesi* (Yüksek Lisans Tezi). Hacettepe Üniversitesi, Ankara.
- Özgür, C. (2022). *Kopula-GARCH modeli ile hisse getirilerinin tahmini ve BİST30 üzerine bir uygulama* (Doktora Tezi). İstanbul Üniversitesi, İstanbul.
- Pala, M. ve Sağlam, F. (2019). PISA fen, matematik ve okuma puanları arasındaki bağımlılık yapısının kopula ile modellenmesi. *Selçuk Üniversitesi Fen Fakültesi Fen Dergisi*, 45(2), 149-162.
- Patton, A. (2013). Copula methods for forecasting multivariate time series. *Handbook of economic forecasting*, 2, 899-960.
- Sarıdaş, E. S. (2020). *Bağımlı hasar modellerinde kopula regresyon yaklaşımı* (Doktora Tezi). Mimar Sinan Güzel Sanatlar University, İstanbul.
- Sarıer, Y. (2021). PISA uygulamalarında Türkiye'nin performansı ve öğrenci başarısını yordayan değişkenler. *Türkiye Sosyal Araştırmalar Dergisi*, 25(3), 905-926.
- Schweizer, B. 1991. Thirty years of copulas. In: G. Dall'Aglio, S.Kotz, and G. Salinetti (eds.): *Advances in Probability Distributions with Given Marginals: Beyond the Copulas*. The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Schwarz, G. (1978). Estimating the dimension of a model. *The annals of statistics*, 6(2), 461-464.
- Shih, J. H. and Louis, T. A. (1995). Inferences on the association parameter in copula models for bivariate survival data. *Biometrics*, 51, 1384-1399.

- Shin, H. J., Sung, K. M., & Heo, J. H. (2010). Derivation of modified Anderson-Darling test statistics and power test for the Gumbel distribution. *Journal of Korea Water Resources Association*, 43(9), 813-822.
- Sklar, A. (1959). Fonctions de Répartition à n Dimensions et Leurs Marges. *Publ Inst Statist Univ* 8: 229-231.
- Toprak, E. (2017). *Yapay sinir ağı, karar ağaçları ve ayırma analizi yöntemleri ile PISA 2012 matematik başarılarının sınıflandırılma performanslarının karşılaştırılması* (Doktora Tezi). Hacettepe University, Ankara.
- Yamut, T. (2018). *Modelling dependence structure for financial risk: A copula approach* (Yüksek Lisans Tezi). Dokuz Eylül University, İzmir.
- Yıldırım Külekçi, B. (2021). *Risk measurement using time varying extreme value copulas* (Doktora Tezi). Hacettepe University, Ankara.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Ebru TOPRAK

Yabancı Dil : İngilizce

Eğitim Durumu

Lisans : Erciyes Üniversitesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği

Çalıştığı Kurum/lar : MEB (2013-Devam ediyor)

Yayımları : Toprak, E., & Kızılok Kara, E. (2024). Statistical analysis of educational data using copula functions: The case of 2018 PISA. *International Journal of Scholars in Education*, 7(2), 169-184. <https://doi.org/10.52134/ueader.1590602>

Araştırma Alanları : İstatistik, matematik eğitimi.