

T.C.
MİMAR SİNAN GÜZEL SANATLAR ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

FONTAİNE-WINTENBERGER
NORMLAR CİSMİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
HARUN ŞATIROĞLU

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi Sevan BEDİKYAN

OCAK-2025

T.C.
MİMAR SİNAN GÜZEL SANATLAR ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

FONTAİNE-WINTENBERGER
NORMLAR CİSMİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
HARUN ŞATIROĞLU

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi Sevan BEDİKYAN

OCAK-2025

Harun ŞATIROĞLU tarafından hazırlanan FONTAİNE-WİNTENBERGER NORMLAR CİSMİ
adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Dr. Öğr. Üyesi Sevan BEDİKYAN

Tez Yöneticisi

Aslı ıslak imzalıdır

Bu çalışma, jürimiz tarafından MATEMATİK Anabilim Dalında
YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Dr. Öğretim Üyesi Sevan BEDİKYAN

Aslı ıslak imzalıdır

Üye : Prof. Dr. Sefa Feza ARSLAN

Aslı ıslak imzalıdır

Üye : Prof Dr. Kazım İlhan İKEDA

Aslı ıslak imzalıdır

Bu tez, Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü tez yazım kurallarına
uygundur.

*Bu tez, bana her zaman destek olan ve ilham veren
sevgili eşim Gizem Ay Şatıroğlu'na ithaf edilmiştir.*

Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü tez yazım klavuzuna uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel etik kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- ücret karşılığı başka kişilere yazdırmadığımı (dikte etme dışında), uygulamalarımı yaptırmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı beyan ederim.

Harun ŞATIROĞLU

Aslı ıslak imzalıdır

FONTAİNE-WINTENBERGER
NORMLAR CİSMİ

(Yüksek Lisans Tezi)

Harun ŞATIROĞLU

MİMAR SİNAN GÜZEL SANATLAR ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

OCAK/2025

ÖZET

Bu tez çalışmasında, bir K yerel cisminin L/K APF genişlemesine bağlı $\mathbb{X}(L/K)$ Fontaine-Wintenberger normlar cisimlerinin inşası ve temel özellikleri incelenmiştir. Çalışmada ayrıca, Fontaine ve Wintenberger'in normlar cisimleri için temel teoreminin, mükemmelimsi (perfectoid) cisimler üzerindeki genellemesine değinilmiştir. Bunun yanında, Koch'un yaklaşımına göre yerel abelyen olmayan sınıf cisim kuramının inşası ve Arf'in yaklaşımına göre K yerel cisminin G_K mutlak Galois grubunun betimlenmesinde Fontaine-Wintenberger normlar cisimleri teorisinin sağladığı katkılar ele alınmıştır.

FONTAINE -WINTENBERGER
FIELDS OF NORMS

(MscThesis)

Harun ŞATIROĞLU

MIMAR SINAN FINE ARTS UNIVERSITY
INSTITUTE OF POSTGRADUATE EDUCATIONS

JANUARY/2025

ABSTRACT

In this thesis, we study the construction and fundamental properties of the Fontaine-Wintenberger norm field $\mathbb{X}(L/K)$ associated with an *APF* extension L/K of a local field K . We also address the generalization of Fontaine and Wintenberger's fundamental theorem for the fields of norms to perfectoid fields. Furthermore, we examine the contributions of the Fontaine-Wintenberger's theory of fields of norms to the construction of local non-abelian class field theory in the sense of Koch and the description of the absolute Galois group G_K of the local field K in the sense of Arf.

ÖNSÖZ

Bu tezin ortaya çıkmasında bana rehberlik eden, karşılaştığım her zorlukta bana cömertçe zaman ayırıp bu zorlukların üstesinden gelmemi sağlayan ve akademik yolculuğum boyunca desteğini hiçbir zaman esirgemeyen değerli danışman hocam Sevan Bedikyan'a en içten teşekkürlerimi sunarım. Kendisi derin akademik bilgisi, sabrı ve desteğiyle bu süreci benim için çok anlamlı ve verimli hale getirmiştir. Onun desteği olmasaydı bu çalışmayı aynı kararlılıkla tamamlamak mümkün olmazdı.

Yüksek lisans programında derslerini aldığım Fatma Altunbulak Aksu, Sibel Şahin, Ayşe Berkman, Sefa Feza Arslan, Didem Öztürk hocalarıma destekleri, anlayışları ve bana kattıkları tüm bilgiler için teşekkür ederim.

Yakın zamanda kaybettiğimiz, lisans dönemimde fakülte sekreteri olan İdris Altın'ı anmak istiyorum. Her zaman güleryüzlü, yardımsever ve pozitif tavırlarıyla çevresindekilere hem moral hem de güven verirdi. Mesleğini büyük bir tutkuyla yapar, her zaman bir çok alanda kendini geliştirmeye çalışırdı. Onun bu yaklaşımı, bana da yol gösterici oldu ve hepimizin hayatında güzel izler bıraktı. Ailesi ve sevenlerine başsağlığı diliyorum.

Son olarak sevgi dolu, anlayışlı ve sabırlı duruşuyla her zaman yanımda olan, beni daima yüreklendiren sevgili eşim Gizem Ay Şatıroğlu'na da gönülden teşekkür ederim. Eşimin desteği bu süreci benim için daha kolaylaştırıcı ve anlamlı hale getirmiştir.

Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi Matematik Bölümü'ne, bu süreçteki değerli katkıları ve destekleri için teşekkür ederim.

Bu çalışma, Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi Bilimsel Araştırmalar Projeleri Koordinatörlüğü'nün 24/BAP/31 numaralı projesi tarafından desteklenmiştir.

İçindekiler

1 GİRİŞ	1
2 TOPOLOJİK GRUPLAR TOPOLOJİK HALKALAR ve TOPOLOJİK CİSİMLER	3
2.1 Topolojik gruplar	3
2.2 Topolojik Halkalar ve Topolojik Cisimler	3
3 İZDÜŞÜMSEL OLARAK SONLU GRUPLAR	5
4 SONSUZ GALOIS KURAMI	9
4.1 Galois kuramı	9
5 YEREL CİSİMLER	11
5.1 Değerlendirme cisimleri	11
5.2 Tam değerlendirme cisimleri ve tamlanış	14
5.3 Ayırık değerlendirme cisimleri ve yerel cisimler	17
5.4 Yerel cisimler ve yerel cisimlerin genişlemeleri	21
5.5 Yerel cisimlerin genişlemelerinin dallanma kuramı	24
5.5.1 Yerel cisimlerin dallanmamış genişlemeleri	25
5.5.2 Yerel cisimlerin tamamen dallanmış genişlemeleri	27
5.6 Yerel cisimlerin Galois genişlemelerinin dallanma süzümüleri	28
6 FONTAINE ve WINTENBERGER'İN NORMLAR CİSİMLERİ TEORİSİ	35
6.1 APF Genişlemeleri	36
6.2 Fontaine-Wintenberger Normlar Cisimleri	40
6.3 Mükemmeliimsi cisimler	45
7 NORMLAR CİSİMLERİ ve YEREL ABELYEN OLMAYAN SINIF CİSİM KURAMI	49

7.1	Koch'un yaklaşıma göre yerel abelyen olmayan sınıf cisim kuramı	49
7.2	Arf'in yaklaşıma göre herhangi bir yerel cismin mutlak Galois grubunun betimlenmesi	53
8	SONUÇLAR ve ÖNERİLER	55



SEMBOL LİSTESİ

$\mathbb{Z}$	: tamsayılar halkası
$\mathbb{Q}$	: rasyonel sayılar cismi
$\mathbb{Z}_{\geq t}$	: t 'den büyük veya t 'ye eşit olan tamsayılar
$\mathbb{R}_{\geq t}$	: t 'den büyük veya t 'ye eşit olan reel sayılar
$\mathbb{Q}_p$	: p -sel sayı cismi
$\mathbb{Z}_p$	: p -sel tamsayı halkası
$\mathbb{F}_p$	: p elemanlı sonlu cisim
$\mathbb{F}_p[[t]]$	: $\mathbb{F}_p$ katsayılı, t belirsizine göre formel Taylor serileri halkası
$\mathbb{F}_p((t))$	: $\mathbb{F}_p$ katsayılı, t belirsizine göre formel Laurent serileri cismi
ζ_{p^n}	: birimin p^n 'inci ilkel kökü
$\text{kar}K$	: K cisminin karakteristiği
$\text{Çek}(f)$	: f morfizmasının çekirdeği
$\varprojlim$	: izdüşümsel limit
$K^\times$	: K cisminin $K - \{0\}$ çarpımsal grubu
K^+	: K cisminin $(K, +)$ toplamsal grubu
$\overline{K}$	: K cisminin sabitlenen bir cebirsel kapanışı
K^{ayr}	: K cisminin sabitlenen bir ayrılabilir kapanışı
K^{ab}	: K cisminin K^{ayr} içindeki maksimal abelyen genişlemesi
G_K	: $\text{Gal}(K^{\text{ayr}}/K)$ mutlak Galois grubu
G_K^{ab}	: $\text{Gal}(K^{\text{ab}}/K)$ Galois grubu
$\mathcal{O}_K$	: K yerel cisminin tamsayı halkası
$\mathfrak{p}_K$	: K yerel cisminin maksimal ideali
κ_K	: K yerel cisminin $\kappa_K = \mathcal{O}_K/\mathfrak{p}_K$ kalıntı cismi
π_K	: K yerel cisminin sabitlenmiş bir asal elemanı
U_K	: K yerel cisminin birim grubu
U_K^i	: K yerel cisminin i 'inci yüksek birim grubu
$\varphi_{L/K}, \psi_{L/K}$	: Yerel cisimlerin L/K genişlemesinin Hasse-Herbrand fonksiyonu
G_u	: G 'nin alttan numaralandırılmaya göre u -uncu yüksek dallanma altgrubu
G^u	: G 'nin üstten numaralandırmaya göre u -uncu yüksek dallanma altgrubu

$\widehat{K}$	: K değerli cisminin tamlanışı
$\mathbb{C}_K$	: Bir K yerel cismi için, $\overline{K}$ cisminin tamlanışı
$\widehat{K^\times}$	: $K^\times$ grubunun izdüşümsel sonlu tamlanışı
K_d^{nr}	: K yerel cisminin genişleme derecesi d olan dallanmamış genişlemesi
K^{nr}	: K yerel cisminin $\overline{K}$ içindeki maksimal dallanmamış genişlemesi
$\widetilde{K}$	: K^{nr} cisminin tamlanışı
$N_{L/K}$	: L/K genişlemesinin norm tasviri
Art_K	: K yerel cisminin Artin karşılıklılık tasviri
φ_K	: K yerel cisminin Lubin-Tate parçalanışı
$K_{\varphi_K^d}$	: K^{ayr} içindeki, φ_K^d altında sabit kalan elemanların oluşturduğu cisim
$\mathbb{X}(L/K)$	: L/K APF genişlemesinin Fontaine-Wintenberger normlar cismi
$\widetilde{\mathbb{X}}(L/K)$	: $\widetilde{\mathbb{X}(L/K)}$ cismi
$K^\flat$	: K cisminin tilti
$K^\sharp$	: K cisminin ters tilti
μ_p	: birimin p 'inci köklerini içeren grup
$U_{\widetilde{\mathbb{X}}(L/K)}^\diamond$	: $U_{\widetilde{X}(L/K)}$ birim grubunun elmas altgrubu
$Y_{L/K}$	: $U_{\widetilde{\mathbb{X}}(L/K)}^\diamond$ grubunun $U_{\mathbb{X}(L/K)}$ 'yi içeren altgrubu
$\Gamma_d^{(n)}$	: K_d^{nd} cisminin $K_{\varphi_K^d}$ içindeki biricik maksimal n -abelyen genişlemesi
$\nabla_K^{(\varphi_K)}$	: $\widehat{\mathbb{Z}} \times \varprojlim_{(n,d)} U_{\widetilde{X}(\Gamma_d^{(n)}/K_d^{\text{nd}})}^\diamond / Y_{\Gamma_d^{(n)}/K_d^{\text{nd}}}$ grubu
$\Phi_{\Gamma_d^{(n)}/K}^{(\varphi_K)}$	: K yerel cismi için abelyen olmayan karşılıklılık tasviri

1. GİRİŞ

Modern matematiğin, cebirsel sayı kuramı, aritmetik geometri gibi alanlarında, özellikle Diyofant denklemler ve yerel-küresel ilkeleri üzerine yapılan çalışmalarda, $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar cismi yerine, bir p asal sayısı için $\mathbb{Q}$ 'nun p -sel norma göre tamlanması olan $\mathbb{Q}_p$ p -sel sayı cismi ile çalışmak daha elverişlidir. Bunun bir sebebi, p -sel sayı cisminde, yalnızca tek bir p asalına odaklanıyor oluşumuzdur. Diğer taraftan, cebirsel geometri, fonksiyon cisimleri gibi alanlarda yapılan çalışmalarda ise, $\mathbb{Q}_p$ 'nin analogu olarak, katsayıları p elemanlı $\mathbb{F}_p$ cisminden alınan, t belirsizine göre formel Laurent serilerinden oluşan $\mathbb{F}_p((t))$ cismi ortaya çıkar.

Ayrık değerlendirme cisimleri için temel örnekler olan $\mathbb{Q}_p$ ve $\mathbb{F}_p((t))$ cisimlerinin yapısal özelliklerine bakacak olursak, $\mathbb{Q}_p$ cisminin tipik bir elemanı,

$$\sum_{n=k}^{\infty} a_n p^n$$

biçiminde, katsayıları $0 \leq a_n \leq p-1$ olan, p asalının formel Laurent serileri biçiminde temsil edilir. Diğer taraftan $\mathbb{F}_p((t))$ cisminin de elemanları

$$\sum_{m=t}^{\infty} b_m t^m$$

biçimindeki formel Laurent serilerinden oluşur. Dahası, seriler arasındaki toplama ve çarpma işlemleri benzer şekilde gerçekleşir. Bununla birlikte, $\mathbb{Q}_p$ cisminde olduğu gibi, $\mathbb{F}_p((t))$ üzerinde de, bir *ayrık değerlendirme* fonksiyonu tanımlıdır ve $\mathbb{F}_p((t))$, bu değerlendirme fonksiyonunun ürettiği t -sel norma göre, *tam topolojik cisimdir*. Her ne kadar, $\mathbb{Q}_p$ 'nin karakteristiği 0 iken, $\mathbb{F}_p((t))$ 'nin karakteristiğinin p olsa da, $\mathbb{Q}_p$ ile $\mathbb{F}_p((t))$ cisimleri yapısal olarak oldukça benzer gözük-mektedir. Eğer birimin p^n 'inci ilkel kökü ζ_{p^n} ile gösterilmek üzere, $\mathbb{Q}_p$ yerine $\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^\infty}) := \bigcup_n \mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n})$ cismini ele alırsak, Fontaine ve Wintenberger'in teoremi, $G_{\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^\infty})}$ ile, $G_{\mathbb{F}_p((t))}$ mutlak Galois grupları arasında kanonik bir izomorfizmanın mevcut olduğunu gösterir.

Fontaine ve Wintenberger'in 1979 yılında ortaya attıkları normlar cisimleri ku-ramı, p -sel nesnelerle ilişkili problemleri, karakteristik p nesnelerle ilgili yöntem-lerle çözebilmek için bir köprü vazifesi görür ([8]). Bu bakımdan, cebirsel sayılar

kuramı, aritmetik geometri gibi alanlarda yapılan çalışmalar için temel bir araç olmuştur. Bununla birlikte, ikibinli yılların başlarında Sholze'nin mükemmelimsi cisimler (perfectoid cisimler) ile ilgili çalışmaları, Fontaine-Wintenberger norm cisimleri kuramını genişleterek, karakteristik 0 ile karakteristik p cisimleri arasındaki ilişkiyi daha zengin bir çerçeveye oturtmuştur ([21]).

Bu tez çalışmasında, Fontaine-Wintenberger normlar cisimleri ile ilgili detaylı bilgiyi edinmenin yanı sıra, özellikle yerel cisimler ve yerel sınıf cisim kuramı ile ilgili ileriki çalışmalar için gerekli olan temel altyapının elde edilmesi amaçlanmaktadır. Bu bağlamda, ikinci ve üçüncü bölümlerinde gerekli ön bilgilere yer verildikten sonra, dördüncü bölümde yerel cisimler, yerel cisimlerin genişlemeleri ve dallanma kuramı kavramları detaylıca özetlenmiştir.

Tezimizin beşinci bölümünde APF genişlemeleri ve Fontaine-Wintenberger normlar cisimleri kavramları derinlemesine ele alınmış ve normlar cisimleri teorisiyle ilgili temel sonuçlara yer yer verilerek, matematiğin diğer alanları için önemlerine vurgu yapılmıştır. Ayrıca, normlar cisimleri teorisinin mükemmelimsi cisimlere olan genellemesi tartışılmıştır.

Altıncı bölümde, Koch felsefesine göre abelyen olmayan sınıf cisim kuramının inşası ile ilgili çalışmalar incelenmiş ve söz konusu çalışmalarda normlar cisimlerinin katkısına değinilmiştir. Ayrıca, Arf'in karakteristik $p > 0$ yerel cisimlerin mutlak Galois grubunun bir betimlenişini elde ettiği [1] çalışmasının, herhangi bir yerel cismin mutlak Galois grubuna genellenişinin yapıldığı, Fırat'ın [10] numaralı kaynakta verilen doktora çalışmasında, normlar cisimleri kuramının katkısı tartışılmıştır.

Yedinci ve son bölümde ise, tez ile ilgili sonuç ve önerilere yer verilmiştir.

2. TOPOLOJİK GRUPLAR TOPOLOJİK HALKALAR ve TOPOLOJİK CİSİMLER

2.1 Topolojik gruplar

Tanım 2.1

Verilen bir G grubu, aynı zamanda bir topolojik uzaysa ve eğer, $G \times G$ 'den G 'ye tanımlanan $(x, y) \mapsto xy^{-1}$ göndermesi sürekli ise, üzerindeki topoloji ile birlikte G 'ye topolojik grup adı verilir.

Eğer G üzerindeki topolojik uzay yapısı kompakt ise, G topolojik grubuna *kompakt topolojik grup* denir; G üzerindeki topolojik uzay yapısı Hausdorff ise, G topolojik grubuna *Hausdorff topolojik grup* denir.

Örnek 2.1

Herhangi bir grup, üzerindeki ayrık (ya da aşıkâr) topolojiye göre bir topolojik gruptur.

Örnek 2.2

Verilen bir G topolojik grubunun herhangi bir H altgrubu, üzerindeki alt-uzay topolojisi ile birlikte bir topolojik gruptur.

Tanım 2.2

Verilen G_1 ve G_2 topolojik grupları için, eğer $f : G_1 \rightarrow G_2$ göndermesi, eğer hem bir grup homomorfizması hem de sürekli bir dönüşüm ise f göndermesine *topolojik grup homomorfizması* adı verilir.

2.2 Topolojik Halkalar ve Topolojik Cisimler

Topolojik grup tanımına benzer olarak, topolojik halka ve topolojik cisim kavramları aşağıdaki gibi tanımlanır:

Tanım 2.3

Bir R halkası, aynı zamanda bir topolojik uzaysa ve eğer $(R, +)$ toplamsal grubu bir topolojik grupsa ve R 'deki çarpma işlemi sürekliyse, o zaman bir topolojik halkadır. Şayet R topolojik halkası bir cisimse ve $R^\times$ çarpımsal grubu da altuzay topolojine göre bir topolojik grupsa, o zaman R bir topolojik cisimdir.

Örnek 2.3

Topolojik cisimlere temel örnek olarak $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{C}$ verilebilir. Her zaman olduğu gibi, $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{C}$ üzerindeki topolojiyi, öklidisel topoloji olarak; $\mathbb{Q}$ üzerindeki topolojiyi de altuzay topolojisi olarak ele alıyoruz.

Bilindiği gibi, verilen bir (X, τ) topolojik uzayında, her $x \in X$ elemanın kompakt komşuluğu varsa, (X, τ) topolojik uzayına *yerel kompakt uzay* diyoruz. Şimdi, topolojik gruplar (halkalar, cisimler) için yerel kompaktlık kavramının tanımını verelim:

Tanım 2.4

Üzerindeki topolojiye göre yerel kompakt ve Hausdorff olan bir topolojik gruba (halkaya, cisme), yerel kompakt topolojik grup (halka, cisim) denir.

Örnek 2.4

Üzerlerindeki öklidisel topolojiye göre, $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{C}$, yerel kompakt cisimdir. Üzerlerindeki altuzay topolojisine göre $\mathbb{Q}$, ayrık yerel kompakt cisimdir.

3. İZDÜŞÜMSEL OLARAK SONLU GRUPLAR

Tanım 3.1

Üzerinde “ $\leq$ ” sıralama bağıntısı bulunan bir I kümesi alalım. Her $i, j \in I$ için $i \leq k$ ve $j \leq k$ olacak şekilde bir $k \in I$ bulunabiliyor ise $(I, \leq)$ sıralı kümesine doğrusal sıralı küme denir.

Örnek 3.1

Tamsayılar kümesi $\mathbb{Z}$ ve üzerindeki “ $\leq$ ” doğal sıralama bağıntısını alalım. Bu durumda, her $m, n \in \mathbb{Z}$ için, $m \leq k$, $n \leq k$ şartını sağlayan bir $k \in \mathbb{Z}$ mevcuttur. Dolayısı ile $(\mathbb{Z}, \leq)$ doğrusal sıralı bir kümedir.

Örnek 3.2

Tamsayılar kümesi $\mathbb{Z}$ üzerine “ $\leq$ ” sıralama bağıntısını bölünebilme ile tanımlayalım. Yani, $m, n \in \mathbb{Z}$ için, $m \leq n \Leftrightarrow m \mid n$ olarak tanımlayalım. Bu durumda $m, n \in \mathbb{Z}$ için $m \mid k$, $n \mid k$ şartını sağlayan bir $k \in \mathbb{Z}$ mevcuttur. Dolayısı ile $(\mathbb{Z}, \leq)$ doğrusal sıralı bir kümedir.

Tanım 3.2

Bir $(\mathcal{I}, \leq)$ doğrusal sıralı kümesi verilsin. Topolojik grupların bir $\{G_i \mid i \in \mathcal{I}\}$ ailesi ile, $\{b_i^j : G_j \rightarrow G_i \mid i, j \in \mathcal{I}, i \leq j\}$ topolojik grup homomorfizmalarının bir ailesi için,

(i) $\forall i \in \mathcal{I}$ için $G_i \xleftarrow{b_i^i} G_i$ birim tasvirdir;

(ii) $i \leq j$ ve $j \leq k$ şartını sağlayan her $i, j, k \in \mathcal{I}$ için

$$\begin{array}{ccccc} G_i & \xleftarrow{b_i^j} & G_j & \xleftarrow{b_j^k} & G_k \\ & \searrow & \text{ } & \swarrow & \\ & & b_i^k = b_i^j \circ b_j^k & & \end{array}$$

koşulları sağlanıyorsa,

$$(G_i, G_i \xleftarrow{b_i^j} G_j)_{\substack{i, j \in \mathcal{I} \\ i \leq j}}$$

sistemine I üzerinde tanımlı bir izdüşümsel sistem denir.

Topolojik halkalar ve cisimler için de izdüşümsel sistem kavramı benzer olarak tanımlanır. İzdüşümsel sistemlere örnekler verelim. Genel olarak, kümeler üzerindeki topolojik yapı belirtilmemişse, ayrık topolojiyle birlikte ele alınacaktır.

Örnek 3.3

Pozitif tamsayılar kümesi $\mathcal{I} := \mathbb{N}_{>0}$ üzerinde

$$n \leq m \Leftrightarrow n \mid m$$

şeklinde tanımlı “ $\leq$ ” doğrusal sıralama bağıntısına göre her $n \in \mathcal{I}$ için, $G_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ olsun. Herhangi bir $x \in \mathbb{Z}$ için, $[x]_n$ ile, $x + n\mathbb{Z}$ kalan sınıfını gösterelim. Buna göre, $n \leq m$ şartı altında, her $n, m \in \mathcal{I}$ için

$$b_n^m([x]_m) = [x]_n$$

eşitliği ile (iyi bir şekilde) tanımlı olan

$$b_n^m : G_m \rightarrow G_n$$

homomorfizmleri için, Tanım 3.2 ’deki koşullar sağlanır. Bu nedenle tanımladığımız $(G_n, b_n^m : G_m \rightarrow G_n)_{\substack{n \leq m \\ n, m \in \mathcal{I}}}$ sistemi izdüşümsel bir sistem oluşturur.

Örnek 3.4

Bir önceki örneği, herhangi bir G grubu için genellemek mümkün: Verilen bir G grubunun normal altgruplarından oluşan bir $\mathcal{I}$ ailesinde, her $U_1, U_2 \in \mathcal{I}$ için, $U_1 \cap U_2 \subseteq V$ olacak şekilde bir $V \in \mathcal{I}$ mevcut olsun ve $\mathcal{I}$ üzerindeki $\leq$ sıralama bağıntısı,

$$V \leq U \Leftrightarrow U \subseteq V$$

ile tanımlansın. Bu durumda, $\mathcal{I}$ kümesi doğrusal sıralı bir kümedir. Şimdi, verilen bir $g \in G$ ve $U \in \mathcal{I}$ için, gV ile, G/U ’daki g ile temsil edilen koseti göstermek kaydı ile, $U \leq V$ koşulunu sağlayan her $U, V \in \mathcal{I}$ ve her $g \in G$ için, $t_U^V(gV) = gU$ ile verilen

$$t_U^V : G/V \rightarrow G/U$$

iyi tanımlı homomorfizmaları için Tanım 3.2’deki koşullar sağlanır. Buna göre,

$$(G/U, t_U^V : G/V \rightarrow G/U)_{\substack{U \leq V \\ U, V \in \mathcal{I}}},$$

bir izdüşümsel sistem oluşturur.

Tanım 3.3

Verilen bir $(\mathcal{I}, \leq)$ doğrusal sıralı kümesi üzerinde tanımlı, topolojik gruplardan (veya halkalardan) oluşan bir $(X_i, t_i^j)_{\substack{i \leq j \\ i, j \in \mathcal{I}}}$ izdüşümsel sisteminin $\varprojlim_i X_i$ ile göste-

rilen izdüşümsel limiti,

$$\varprojlim_i X_i := \left\{ (x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X_i \mid t_i^j(x_j) = x_i, i \leq j \right\}$$

ile tanımlı topolojik gruptur (veya halkadır).

Not olarak, $\varprojlim_i X_i$ üzerindeki topoloji, $\prod_{i \in I} X_i$ üzerindeki çarpım topolojisine göre, alt uzay topolojisidir.

Tanım 3.4

Verilen bir $(\mathcal{I}, \leq)$ doğrusal sıralı kümesi üzerinde tanımlı sonlu gruplardan oluşan $(G_i, t_i^j)_{\substack{i \leq j \\ i, j \in \mathcal{I}}}$ izdüşümsel sisteminin $G = \varprojlim_i G_i$ izdüşümsel limitine, izdüşümsel olarak sonlu grup adı verilir.

Verilen bir $(\mathcal{I}, \leq)$ doğrusal sıralı kümesi üzerinde tanımlı, $G = \varprojlim_i G_i$ izdüşümsel olarak sonlu bir grubu ele alındığında, her $i \in I$ için G_i grubu, sonlu bir grup olduğundan, üzerindeki ayrık topolojiyi ele aldığımızda kompakt, Hausdorff ve tamamen bağlantısız bir gruptur. Bu nedenle, Thychonoff teoremi neticesinde, $\prod_{i \in I} G_i$ çarpım grubu, üzerindeki çarpım topolojisine göre, kompakt, Hausdorff ve tamamen bağlantısızdır. Bu nedenle, G izdüşümsel sonlu grubu üzerindeki alt uzay topolojisiyle birlikte, $\prod_i G_i$ 'nin kapalı bir altgrubu olur. Herhangi bir Hausdorff ve tamamen bağlantısız bir topolojik uzayın bir altuzayı da aynı özelliklere sahip bir topolojik uzay olduğundan ve ayrıca kompakt bir uzayın kapalı bir altuzayı da kompakt bir uzay olduğundan, aşağıdaki teorem ile ifade edilen netice elde edilir. Sonuç olarak, verilen $G = \varprojlim_i G_i$ izdüşümsel sonlu grubu, kompakt, Hausdorff ve tamamen bağlantısız bir topolojik gruptur. Aşağıdaki teorem bu durumun tersinin de doğru olduğunu ifade eder.

Teorem 3.1

Verilen bir G kompakt, Hausdorff ve tamamen bağlantısız bir topolojik grubu, izdüşümsel olarak sonlu bir gruptur.

4. SONSUZ GALOIS KURAMI

4.1 Galois kuramı

Bir K cisminin sonlu veya sonsuz dereceli bir L Galois genişlemesinin

$$G = \text{Gal}(L/K) = \{ \sigma : L \xrightarrow{\sim} L \mid \sigma(\alpha) = \alpha, \forall \alpha \in K \}$$

Galois grubunu ele alalım. K cisminin, L içindeki tüm sonlu genişlemelerinden oluşan $\mathcal{I}_{L/K} = \mathcal{I}$ kümesi üzerinde $E, F \in \mathcal{I}$ için

$$F \leq E \Leftrightarrow F \subseteq E$$

ifadesi ile tanımlanan “ $\leq$ ” sıralama bağıntısı, her $E, F \in \mathcal{I}$ için $EF \in \mathcal{I}$ ve $E \leq EF, F \leq EF$ özelliğini sağladığından, $\mathcal{I}$ kümesi “ $\leq$ ” bağıntısına göre doğrusal sıralı bir kümedir. Sonuç olarak her $F \leq E \in \mathcal{I}$ için

$$\sigma \mapsto \sigma|_F$$

ifadesi ile tanımlanan $\text{kıs}_F^E : \text{Gal}(E/K) \rightarrow \text{Gal}(F/K)$ kısıtlama homomorfizmaları ile birlikte $(\text{Gal}(E/K), \phi_F^E)_{\substack{F \leq E \\ E, F \in \mathcal{I}}}$ ikilisi, bir izdüşümsel sistemdir. Bu nedenle her bir $E \in \mathcal{I}$ için $\text{Gal}(E/K)$ üzerindeki ayrık topoloji altında $\varprojlim_{E \in \mathcal{I}} \text{Gal}(E/K)$ izdüşümsel limiti, izdüşümsel olarak sonlu bir gruptur. Diğer taraftan G üzerinde, *Krull topolojisi* adını verdiğimiz $\sigma \in G$ ve $E \in \mathcal{I}$ olmak üzere, $\sigma|_E \in \text{Gal}(E/K)$ altkümeleri tarafından üretilen bir topolojik grup yapısı vardır. Genel Galois kuramı, $\sigma \mapsto (\sigma|_E)_{E \in \mathcal{I}}$ ile tarif edilen

$$G \rightarrow \varprojlim_{E \in \mathcal{I}} \text{Gal}(E/K)$$

tasvirinin, bu iki objenin hem topolojik, hem de grup yapıları arasında bir eşleşme olduğunu söyler. Sonuç olarak $\text{Gal}(F/K)$, üzerindeki Krull topolojisi ile birlikte izdüşümsel olarak sonlu bir gruptur.

Teorem 4.1 (Genel Galois Kuramının Temel Teoremi)

K cisminin L Galois genişlemesi içinde yer alan K' genişlemeleri ile $G = \text{Gal}(L/K)$

grubunun H kapalı altgrupları arasında $K' \mapsto \text{Gal}(L/K')$ ve $H \mapsto L^H$ kuralları ile birlikte, bire-bir bir eşleşme vardır. Burada L^H ile

$$L^H := \{\alpha \in L \mid \sigma(\alpha) = \alpha, \sigma \in H\}$$

sabit cismi gösterilmektedir. Buna göre,

- (i) Eğer K' cismi, K cisminin herhangi bir Galois genişlemesi ise, buna karşılık gelen $\text{Gal}(L/K')$ grubu, $\text{Gal}(L/K)$ grubunun kapalı ve normal alt grubudur;
- (ii) Eğer K' cismi K üzerinde sonlu bir genişleme ise, buna karşılık gelen $\text{Gal}(L/K')$ grubu da $\text{Gal}(L/K)$ grubunun açık alt grubudur; eğer K' aynı zamanda Galois genişlemesi ise $\text{Gal}(L/K')$ grubu da $\text{Gal}(L/K)$ grubunun açık normal alt grubudur.

koşulları sağlanır.

Örnek 4.1

K cismi olarak q elemanlı sonlu $\mathbb{F}_q$ cismini ele alalım ve bu cismin ayrılabilir kapanışını K^{ayr} ile gösterelim. Bilindiği gibi her $n \in \mathbb{N}$ için K cisminin, K^{ayr} içinde derecesi n olan tek türlü belirli K_n genişlemesi vardır. Söz konusu genişleme Galois genişlemesidir ve $\text{Gal}(K_n/K)$ Galois grubu, üretici $\varphi_n(x) = x^q$ otomorfizmi olan devirsel bir gruptur. $\text{Gal}(K_n/K)$ Galois grubunun söz konusu φ_n elemanına aritmetik Frobenius elemanı denir. $\text{Gal}(K_n/K) \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ izomorfizmi sonucu aşağıdaki çizenek elde edilir:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\sim} & \varprojlim \text{Gal}(K_n/K) \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ \mathbb{Z} & \xrightarrow{\sim} & \varprojlim \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \end{array}$$

Sonuç olarak G grubu “topolojik olarak” $\varphi(x) = x^q$ otomorfizmi tarafından doğurulmuş bir gruptur. G grubunun sözkonusu φ elemanına aritmetik Frobenius elemanı; φ^{-1} tersine ise geometrik Frobenius elemanı adı verilir.

Eğer K cisminin karakteristiği p ise, bu durumda aritmetik Frobenius elemanına mutlak Frobenius elemanı denir.

5. YEREL CİSİMLER

Bu bölümde, [7, 20] kaynakları takip edilerek, ayrık değerlendirme cisimleri ve özel olarak yerel cisimler ile ilgili temel bilgiler özetlenmiştir.

5.1 Değerlendirme cisimleri

Tanım 5.1

Bir K bir cismi verilsin ve $\nu : K \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ göndermesi aşağıdaki şu koşulları sağlasın:

1. $\nu(x) = \infty \Leftrightarrow x = 0$;
2. $\nu|_{K^\times} : K^\times \rightarrow \mathbb{R}$ bir grup homomorfizmasıdır;
3. $\nu(x + y) \geq \min\{\nu(x), \nu(y)\}$.

Bu durumda ν 'ye K üzerinde bir değerlendirme adı verilir; (K, ν) çiftine değerlendirme cismi denir. Eğer $\nu(K^\times) \simeq \mathbb{Z}$ ise, ν değerlendirmesine ayrık değerlendirme, (ν, K) ikilisine de ayrık değerlendirme cismi denir. Eğer $\nu(K^\times) = \mathbb{Z}$ ise ν değerlemesine normalleşmiş değerlendirme denir.

Örnek 5.1

p bir asal sayı olsun. Sıfır olmayan her x tam sayısı için

$$\text{ord}_p x = \max \{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid p^k \mid x\}$$

olmak üzere,

$$\nu_p : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$$

göndermesi, her $a/b \in \mathbb{Q}$ için, $\nu_p(a/b) = \text{ord}_p a - \text{ord}_p b$ ile tanımlansın ve $\nu_p(0) = \infty$ olsun. O zaman, ν_p göndermesi $\mathbb{Q}$ üzerinde iyi tanımlı bir değerlendirmedir. Dahası, $\nu_p(\mathbb{Q}^\times) = \mathbb{Z}$ olduğu için, söz konusu değerlendirme normalleşmiş bir değerlendirmedir. Özel olarak ν_p 'ye, $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar cisminin p -sel değerlendirme adı verilir.

Örnek 5.2

Verilen bir K cismi için ile $L = K((x))$ K katsayılı, x belirsizine göre, formal Laurent serilerinin cismi gösterilmek üzere

$$\nu : L \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$$

göndermesini $\nu(0) = \infty$ ve

$$\nu \left(\sum_{\substack{n \geq m \\ a_m \neq 0}} a_n x^n \right) = m$$

ile tanımlayalım. Bu durumda, ν göndermesi L 'nin bir değerlendirmesidir.

Bir (K, ν) değerlendirme cismi için, $0 < c < 1$ sabit bir reel sayı olmak üzere, verilen her $0 \neq x \in K$ için $|x|_\nu = c^{\nu(x)}$ ve $|0|_\nu = 0$ eşitlikleriyle tanımlı

$$|\cdot|_\nu : K \rightarrow \mathbb{R}$$

göndermesi, K üzerinde “arşimetsel olmayan” bir norm tanımlar; yani, verilen her $x, y \in K$ için,

$$|x + y|_\nu \leq \max\{|x|_\nu, |y|_\nu\}$$

ultrametrik özelliği vardır. Dahası, K cismi, üzerindeki $|\cdot|_\nu$ normundan üretilen metrik topolojisiyle birlikte topolojik bir cisimdir.

Örnek 5.3

Bir $0 < c < 1$ reel sayısı ve bir p asal sayısı alalım. Verilen her $q \in \mathbb{Q}$ için, $|q|_p = c^{\nu_p(q)}$ ile tanımlı $|\cdot|_p : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ göndermesi, $\mathbb{Q}$ üzerinde arşimetsel olmayan bir norm tanımlar. Rasyonel sayılar üzerindeki söz konusu norma, p -sel norm denir.

Verilen bir (K, ν) değerli cisminin

$$O_\nu := \{x \in K : \nu(x) \geq 0\} = \{x \in K : |x|_\nu \leq 1\} \quad (5.1)$$

ile tanımlı altkalkasını alalım. O zaman, O_ν ’deki tersinir olmayan elemanlardan oluşan

$$\mathfrak{p}_\nu := \{x \in K : \nu(x) > 0\} = \{x \in K : |x|_\nu < 1\} \quad (5.2)$$

kümesi, O_ν ’nün biricik maksimal idealidir.

Tanım 5.2

Verilen (K, ν) değerlendirme cismi için, (5.1) numaralı denklem ile verilen O_ν

halkasına, K 'nin değerlendirme halkası (veya tamsayı halkası) ve (5.2) numaralı denklem ile verilen $\mathfrak{p}_\nu \trianglelefteq O_\nu$ biricik maksimal idealine, K 'nin maksimal ideali denir. Bununla birlikte,

$$\kappa_\nu := O_\nu / \mathfrak{p}_\nu$$

cismine de, K 'nın kalıntı cismi denir.

Örnek 5.4

Bir p asal sayısı için, $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar cisminin Örnek 5.1'de bahsedilen ν_p p -sel değerlendirmesi verilsin. O zaman,

$$O_{\nu_p} = \left\{ \frac{x}{y} \in \mathbb{Q} : p \nmid y \right\} = \mathbb{Z}_{(p)}$$

bir değerlendirme halkası,

$$\mathfrak{p}_{\nu_p} = \left\{ \frac{x}{y} \in \mathbb{Q} : p \mid x, p \nmid y \right\} = p\mathbb{Z}_{(p)}$$

maksimal ideali ve

$$\kappa_{\nu_p} = \mathbb{Z}_{(p)} / p\mathbb{Z}_{(p)} \simeq \mathbb{Z} / p\mathbb{Z} = \mathbb{F}_p$$

ν_p ' ye göre bir $\mathbb{Q}$ 'nun kalıntı cismidir.

Örnek 5.5

Verilen $L = K((x))$ cismi üzerindeki ν değerlendirme Örnek 5.2 'te bahsedilen değerlendirme olsun. Bu durumda ν değerlendirmesine göre L 'nin değerlendirme halkası

$$O_\nu = \left\{ f \in L : f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right\} = K[[x]]$$

Olur. Buna göre L 'nin ν değerlendirmesine göre kalıntı cismi de

$$\mathfrak{p}_\nu = \left\{ f \in L : f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \right\} = xK[[x]]$$

bir maksimal ideal ve

$$\kappa_\nu = K[[x]] / xK[[x]] \simeq K$$

dir.

Tanım 5.3

Verilen bir (K, ν) değerlendirme cisminin O_ν tamsayı halkası için,

$$U_\nu := O_\nu^\times = O_\nu - \mathfrak{p}_\nu$$

çarpımsal grubuna, K 'nin birim grubu adı verilir.

Uyarı 5.1

Verilen (K, ν) değerlendirme cisminin birim grubu aynı zamanda, ν değerlendirmesinden elde edilen

$$K^\times \xrightarrow{\nu} \mathbb{R}$$

homomorfizmasının çekirdeğidir. Buna göre,

$$U_\nu = \{x \in K : \nu(x) = 0\} = \{x \in K : |x|_\nu = 1\}$$

dir.

5.2 Tam değerlendirme cisimleri ve tamlanış

Bu kısımda, $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar cisminin tamlanmasıyla $\mathbb{R}$ 'nin elde edilişine benzer bir biçimde verilen bir (K, ν) değerlendirme cisminin, ν değerlendirmesinden üretilen metriğe tamlanışının nasıl elde edildiği ve tamlanış kavramıyla ilgili temel neticeler özetlenecektir. Öncelikle, yakınsaklık ve Cauchy dizisi tanımını değerlendirme kavramlarını değerlendirme kavramı üzerinden yazmakta fayda var.

Tanım 5.4

Katsayıları, verilen (K, ν) değerlendirme cisminin alından bir $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi için,

- (i) Verilen bir $\ell \in K$ için, eğer her $M \in \mathbb{R}$ sayısına karşılık, şayet bir $m \geq 0$ tamsayısı varsa; öyle ki, her $n \geq m$ için $\nu(a_n - \ell) > M$ ise, o zaman $\{a_n\}$ dizisi yakınsaktır.
- (ii) Verilen her $m \geq 0$ tamsayısına karşılık, şayet bir $l \in \mathbb{N}$ var ise, öyle ki her $m, n \geq l$ için $\nu(a_m - a_n) \geq m$ oluyorsa, o zaman $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi Cauchy dizisidir.

Değerlendirme cisimleri üzerinde çalışırken yakınsaklık ve Cauchy dizisi kavramları için, mutlak değer veya değerlendirme cisiminden tanımları arasında uygun olanına geçiş yapılabilir.

Terimleri (K, ν) değerlendirme cisminin alından bir $\{a_n\}$ Cauchy dizisi verilsin. Diyelim ki, her n pozitif tam sayısı için $|a_m|_\nu \neq |a_{m+1}|_\nu$ olacak şekilde bir $m \geq n$ mevcut olsun. Pozitif reel sayıların $\varepsilon_r \rightarrow 0$ koşulunu sağlayan bir dizisi için, n_r pozitif tamsayıları,

$$n_1 < n_2 < \dots < n_r < \dots$$

ve her $m, n \geq n_r$ için, $|a_m - a_n|_\nu < \varepsilon_r$ sağlanacak şekilde seçilsin. Bu durumda,

her r için, $n'_r \geq n_r$ tamsayılar, $|a_{n'_r}|_\nu \neq |a_{n'_r+1}|_\nu$ olacak şekilde seçildiğinde

$$|a_{n'_r} - a_{n'_r+1}|_\nu = \max(|a_{n'_r}|_\nu, |a_{n'_r+1}|_\nu)$$

olur. Bu nedenle, her $n \geq n'_r$ için,

$$\begin{aligned} |a_n|_\nu &= |a_n - a_{n'_r} + a_{n'_r}|_\nu \\ &\leq \max(|a_n - a_{n'_r}|_\nu, |a_{n'_r}|_\nu) < \varepsilon_r \end{aligned}$$

elde edilir. Bu da,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|_\nu = 0$$

demektir (Burada, $\{a_n\}$ Cauchy dizisi olduğu için $\{|a_n|_\nu\}$ dizisinin de reel terimli bir Cauchy dizisi olduğunu belirtmekte fayda var). Demek ki, verilen bir $\{a_n\}$ Cauchy dizisi için, $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|_\nu \neq 0$ ise, öyle bir n pozitif tamsayısı vardır ki, her $m > n$ için, $|a_m|_\nu = |a_n|_\nu$ sağlanır.

Şimdi, $\mathcal{C}$ kümesini terimleri (K, ν) ayrık değerlendirme cisminde olan tüm Cauchy dizilerinin kümesi olarak belirleyelim. Verilen $\{a_n\}, \{b_n\} \in \mathcal{C}$ elemanları için

$$\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\}$$

ve

$$\{a_n\} \times \{b_n\} = \{a_n b_n\}$$

tanımlı toplama işlemi ve çarpma işlemleri $\mathcal{C}$ üzerinde birimli ve değişmeli bir halka yapısı tanımlar. Ayrıca, $\mathcal{M}$ ile gösterilen 0'a yakınsayan dizilerden oluşan topluluk, $\mathcal{C}$ 'nin biricik maksimal idealidir. Verilen her $x \in K$ için $\overline{\{x\}} \in \mathcal{C}/\mathcal{M}$ ile, terimleri x 'lerden oluşan sabit dizinin temsil ettiği sınıf gösterilsin. Bu durumda,

$$x \mapsto \overline{\{x\}}$$

göndermesi

$$K \hookrightarrow \mathcal{C}/\mathcal{M}$$

gömmesi tanımlar. Böylece, K cismi $\mathcal{C}/\mathcal{M}$ 'nin bir alt cismi olarak ele alınabilir.

Şimdi, verilen her $\overline{\{a_n\}} \in \mathcal{C}/\mathcal{M}$ için

$$\left| \overline{\{a_n\}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|_\nu$$

ile tanımlı

$$|\cdot| : \mathcal{C}/\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

göndermesini tanımlayalım. Söz konusu $|\cdot|$ göndermesi, $\mathcal{C}/\mathcal{M}$ üzerinde bir norm

tanımlar. Dahası, $\mathcal{C}/\mathcal{M}$ cismi, bu normun ürettiği metriğe göre tamdır. Yani, katsayıları $\mathcal{C}/\mathcal{M}$ 'den olan her Cauchy dizisi, yakınsaktır. Üstelik, $|\cdot|$ normu, K üzerindeki ν değerlendirmesinin ürettiği $|\cdot|_\nu$ normunun bir genişlemesidir ve $|\cdot|$ 'den elde edilen metrik topolojisine göre K cismi $\mathcal{C}/\mathcal{M}$ içinde yoğundur. Dahası, $\mathcal{C}/\mathcal{M}$ cismi, topolojik izomorfizma altında, bu özelliklere sahip tek cisimdir.

Tanım 5.5

Verilen $K \subseteq \hat{K}$ cisimleri için, Eğer $\hat{K}$ cismi, üzerinde tanımlı olan $|\cdot|_{\hat{K}}$ normundan elde edilen metrik topolojiye göre tam ve K cismi, $\hat{K}$ içinde yoğunsa, $\hat{K}$ cismine K 'nin, *tamlanışı* denir. Eğer $K = \hat{K}$ ise, o zaman K 'ye *tam cisim* adı verilir.

Bu tanıma göre, verilen bir (K, ν) ayrık değerlendirme cismi için, $\hat{K} = \mathcal{C}/\mathcal{M}$ cismi, K cisminin ν değerlendirmesine göre tamlanışıdır. Eğer $K \simeq \hat{K}$ ise, o zaman K cismi, ν değerlendirmesine göre *tam değerlendirme cismi* denir.

Örnek 5.6

Verilen bir p asal sayısı için, $\mathbb{Q}$ rasyonel sayı cisminin, üzerindeki Örnek 5.1 'de tanımlanan ν_p p -sel değerlendirmeye göre tamlanışı, $\mathbb{Q}_p := \hat{\mathbb{Q}}$ p -sel sayı cisimidir.

Örnek 5.7

Verilen K cismi, $\mathbb{F}_p$ ile gösterilen p elemanlı sonlu cisim olmak üzere, $\mathbb{F}_p((X))$ üzerinde, Örnek 5.2 'de tanımlanan ν değerlendirmesi ile birlikte *tam değerlendirme cismidir*.

Diyelim ki, $\{a_n\}$ dizisi için, $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|_\nu \neq 0$ sağlansın. Daha önce belirttiğimiz gibi, öyle bir n_0 pozitif tamsayısı vardır ki, her $m > n$ için, $|a_m|_\nu = |a_{n_0}|_\nu$ sağlanır. Bu da,

$$\left| \overline{\{a_n\}} \right|_{\hat{K}} = \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|_\nu = |a_{n_0}|_\nu$$

sağlandığı görülmektedir. Buradan,

$$\left| \hat{K}^\times \right|_{\hat{K}} = |K^\times|_\nu$$

olduğu anlaşılır.

Yukarıdaki bilgilerden hareketle, K 'nin tamsayı halkası O_ν 'nün, $\hat{K}$ 'nin tamsayı halkası $O_{\hat{K}}$ içinde yoğun olduğunu, benzer şekilde K 'nin maksimal ideali $\mathfrak{p}_\nu$ 'nün de, $\hat{K}$ 'nin maksimal ideali $\mathfrak{p}_{\hat{K}}$ içinde yoğun olduğunu görmek mümkün. Bunun yanı sıra, her $n \geq 1$ için,

$$O_\nu / \mathfrak{p}_\nu^n \cong O_{\hat{K}} / \mathfrak{p}_{\hat{K}}^n$$

dir.

5.3 Ayrık değerlendirme cisimleri ve yerel cisimler

Hatırlanacağı gibi, verilen bir ayrık değerlendirme cismi (K, ν) ile, $\nu(K^\times) \simeq \mathbb{Z}$ koşulunun sağlandığı anlaşılmaktadır. Eğer $\nu(K^\times) = \mathbb{Z}$ ise, ν değerlendirmesi normalleşmiş değerlendirme adını alır.

Tanım 5.6

Verilen bir K cismi üzerindeki ν_1 ve ν_2 değerlendirmelerinden elde edilen $|\cdot|_{\nu_1}$ ve $|\cdot|_{\nu_2}$ normları denkse; yani söz konusu normların ürettikleri metrik topolojileri aynıysa, ν_1 ve ν_2 değerlendirmeleri denktir denir.

Örnek 5.8

Verilen bir K cismi üzerinde tanımlı herhangi bir ν ayrık değerlendirme, normalleşmiş bir değerlendirmeye denktir.

Bu çalışma boyunca, aksi söylenmedikçe, eğer (K, ν) ayrık değerlendirme cismi ise $\nu(K^\times) = \mathbb{Z}$ olduğu kabul edilecektir.

Tanım 5.7

Verilen bir (K, ν) ayrık değerlendirme cismi için, $\nu(\pi) = 1$ koşulunu sağlayan bir $\pi \in O_\nu$ elemanı vardır. Söz konusu π elemanına K cisminin bir asal elemanı adı denir.

Şimdi, herhangi bir $x \in K^\times$ için, $\nu(x) = k$ olsun ve K 'nin bir π asal elemanını sabitleyelim. Bu durumda, $\nu(x) = \nu(\pi^k)$ dir. Buradan,

$$\nu(\pi^{-k}u) = 0$$

elde edilir. Buna göre, bir $u \in U_\nu$ için,

$$x = \pi^k u$$

biçimindedir. Buradan hareketle, aşağıdaki önerme ile ifade edilen gözlemlere ulaşılır:

Önerme 5.1

Verilen bir (K, ν) ayrık değerlendirme cismi için, K 'nin bir π asal elemanını sabitlediğimizde, her $x \in K$ elemanı, bir $k \in \mathbb{Z}$ ve $u \in U_\nu$ için,

$$x = \pi^k u$$

biçiminde yazılır ve bu yazılış tek türdür. Diğer bir deyişle, her (k, u) ikilisini

$\pi^k u$ 'ya gönderen

$$\mathbb{Z} \times U_\nu \rightarrow K^\times$$

göndermesi bir grup izomorfizmasıdır. Bununla birlikte, her bir $k \in \mathbb{Z}$ için, $\pi^k O_\nu$ 'ler, K toplamsal grubunun doğal bir,

$$\dots \subset \pi^{k+1} O_\nu \subset \pi^k O_\nu \subset \dots \quad (5.3)$$

süzümünü oluşturur.

Yukarıdaki gözlemlerden hareketle, (K, ν) ayrık değerlendirme cisminin O_ν değerlendirme halkasının herhangi bir idealinin bir $k \geq 0$ tamsayısı için $\pi^k O_k$ biçiminde olduğu görülür. Özel olarak $k = 1$ için,

$$\mathfrak{p}_\nu = \pi O_\nu$$

olur. Bununla birlikte, $\pi^k O_\nu$ idealleri O_ν değerlendirme halkasının bir

$$\{0\} \subset \dots \subset \pi^k O_\nu \subset \dots \subset \pi O_\nu \subset O_\nu$$

süzümünü oluşturur. Verilen bir (K, ν) ayrık değerlendirme cismi için (5.1) numaralı denklemde verilen tanımından da anlaşılacağı gibi, K 'nin O_ν ayrık değerlendirme halkası, kapalı bir kümedir. Bununla birlikte, herhangi bir $1 < r < 2$ için

$$O_\nu = \{x \in K : |x|_\nu < r\}$$

sağlandığından, O_ν aynı zamanda açık kümedir. Benzer irdelemelerle, her bir $k \in \mathbb{Z}$ için, $\pi^k O_\nu$ 'lerin ν değerlendirmesinden elde edilen metrik topolojiye göre hem açık hem de kapalı kümeler oldukları gözlemlenebilir. Elde edilen bu gözlem, (5.3) numaralı denklemle birleştirildiğinde, aşağıdaki önermede ifade edilen neticeye ulaşılır.

Önerme 5.2

Verilen bir (K, ν) ayrık değerlendirme cismi için, $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere, $\pi^k O_\nu$ kümeleri, ν 'nün ürettiği topolojide hem açık hem de kapalı kümelerdir ve sıfırın açık komşuluklarının bazıını oluştururlar.

Şimdi de, verilen (K, ν) ayrık değerlendirme cisminin U_ν birim grubunun her $n > 0$ tamsayısı için tanımlanan

$$U_\nu^n := 1 + \pi^n O_\nu = \{1 + \pi^n x : x \in O_\nu\} \quad (5.4)$$

altgruplarını göz önüne alalım.

Tanım 5.8

Verilen (K, ν) ayrık değerlendirme cismi için, (5.4) numaralı denklem ile verilen $U_\nu^n \subseteq U_\nu$ gruplarına, (K, ν) değerli cisminin n 'inci dereceden yüksek birim grupları adı verilir.

Verilen (K, ν) değerli cismi için, aynı O_ν tamsayı halkasının idealleri gibi, yüksek birim grupları da, U_ν birim grubunun altgruplarının bir

$$\{1\} \subset \cdots \subset U_\nu^n \subset \cdots \subset U_\nu^0 := U_\nu .$$

süzümünü oluştururlar. Dahası, ν değerlendirmesinden üretilen topolojiye göre U_ν^n yüksek birim grupları, hem açık hem de kapalı kümelerdir.

Bölmelere geçildiğinde, aşağıdaki önermede ifade edilen izomorfizmalar elde edilir:

Önerme 5.3

Verilen bir (K, ν) ayrık değerlendirme cisminin U_ν^n yüksek birim grupları için,

$$U_\nu/U_\nu^n \simeq (O_\nu/\pi^n O_\nu)^\times , \quad (5.5)$$

$$U_\nu^n/U_\nu^{n+1} \simeq O_\nu/\pi O_\nu \simeq \pi^n O_\nu/\pi^{n+1} O_\nu$$

izomorfizmaları vardır.

Verilen bir (K, ν) ayrık değerlendirme cismi için $\text{kar}(K) = p \neq 0$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, $\text{kar}(\kappa_\nu) = p$ olur. Bu nedenle, eğer $\text{kar}(K) \neq \text{kar}(\kappa_\nu)$ ise, $\text{kar}(K) = 0$ olması gerekir.

Teorem 5.1

Diyelim ki, (K, ν) ayrık değerlendirme cismi olsun ve her bir $n \in \mathbb{Z}$ için, $\pi_n \in K$ elemanları $\nu(\pi_n) = n$ 'yi sağlayacak şekilde seçilsin; $\mathcal{R}_\nu$ ile, $\kappa_\nu = O_\nu/\mathfrak{p}_\nu$ kalıntı cisminin bir tam temsilciler kümesini gösterelim; yani, $R_\nu \subseteq O_\nu$ ve $O_\nu \rightarrow \kappa_\nu$ kanonik göndermesinin $\mathcal{R}_\nu$ 'ye olan kısıtı bijeksiyon olsun. O zaman herhangi bir $\alpha \in \hat{K}$ elemanı,

$$\alpha = \sum_{n \geq n_0} r_n \pi_n \quad (n_0 \in \mathbb{Z}, r_n \in \mathcal{R}_\nu)$$

biçiminde temsil edilebilir.

Bu son teoreme göre, $\hat{K}$ 'nin tamsayı halkası $O_{\hat{K}}$ ve π_K de K 'nin bir asal elemanı

olmak üzere, $\pi_n = \pi_K^n$ seçerek, bir $\alpha \in O_{\hat{K}}$ elemanı

$$\alpha = \sum_{i=0}^{\infty} r_i \pi_K^n \quad (r_i \in \mathcal{R}_\nu)$$

biçiminde bir temsili elde edilir. Eğer $\alpha_n = \sum_{i=0}^{n-1} r_i \pi_K^i$ kısmi toplamı göz önüne alınırsa, $\alpha_{n+1} \equiv \alpha_n \pmod{\pi_K^n}$ olduğu görülür. Bu gözlemden yola çıkarak,

$$\phi : \alpha \mapsto (\alpha_1 \pmod{\mathfrak{p}_K}, \dots, \alpha_n \pmod{\mathfrak{p}_K^n}, \dots)$$

ile tanımlı

$$\phi : O_{\hat{K}} \rightarrow \varprojlim_n O_K/\mathfrak{p}_K^n$$

göndermesi elde edilir. Dahası, $O_{\hat{K}}$ üzerindeki ayrık değerlendirmeden üretilen topoloji ve $O_K/\mathfrak{p}_K^n$ 'ler üzerindeki topoloji ayrık topoloji olmak üzere, $\varprojlim_n O_K/\mathfrak{p}_K^n$ üzerindeki topoloji de çarpım topolojisi olarak ele alındığında, ϕ göndermesinin bir topolojik halka izomorfizması olduğu bilinmektedir. Buradan

$$O_{\hat{K}}^\times \simeq (\varprojlim_n O_K/\mathfrak{p}_K^n)^\times \simeq \varprojlim_n (O_K/\mathfrak{p}_K^n)^\times \simeq \varprojlim_n O_K^\times/U_K^n$$

elde edilir.

Analiz derslerinden hatırlanacağı gibi, Newton'un metodu, verilen bir $f(X) \in \mathbb{R}[X]$ polinomunun kökleri için bir yaklaşım verir. Buna göre, $f'(X)$ ile f 'nin türevi gösterilmek üzere, her $n \geq 0$ tamsayısı için $f'(a_n) \neq 0$ ve

$$a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)}$$

koşullarını sağlayan bir $\{a_n\}$ reel sayı dizisi yakınsaksa, o zaman dizinin yakınsadığı değer, polinomun bir köküdür. Aşağıda ifadesini vereceğimiz Hensel'in lemması olarak bilinen teoremden, Newton'un yöntemine dayanan bir yaklaşım ile, katsayıları bir tam ayrık değerlendirme cisminin değerlendirme halkasından alınan bir polinomun kökleri ile ilgili bir kriter elde edilir:

Teorem 5.2 (Hensel'in lemması)

Diyelim ki, (K, ν) ayrık değerlendirme cismi ν değerlendirmesinin belirlediği metrik topolojiye göre tam bir cisim olsun. Verilen bir $f(X) = \sum_{i=0}^n a_i X^i \in O_\nu[X]$ polinomunun $\kappa_\nu = O_\nu/\mathfrak{p}_\nu$ cismi içinde bir $\bar{\alpha}$ basit kökü mevcut olsun (yani κ_ν cisminde $f(\bar{\alpha}) = 0$ ve $f'(\bar{\alpha}) \neq 0$). O zaman $f(X)$ polinomu, $\bar{a} = \bar{\alpha}$ olacak şekilde bir $a \in O_\nu$ köküne sahiptir.

Kanıt. Bkz. [7] Corollary 2. ■

5.4 Yerel cisimler ve yerel cisimlerin genişlemeleri

Tanım 5.9

Verilen bir (K, ν_K) tam ayrık değerlendirme cisminin $\kappa_K = O_K/\mathfrak{p}_K$ kalıntı cismi sonlu ise, K 'ye yerel cisim adı verilir.

Örnek 5.9

Daha önce, Örnek 5.6'de verilen p -sel sayı cismi $\mathbb{Q}_p$, yerel cisimdir.

Örnek 5.10

Daha önce, Örnek 5.7'de verilen $\mathbb{F}_p$ katsayılı formel Laurent serileri cismi $\mathbb{F}_p((X))$, yerel cisimdir.

Diyelim ki, verilen (K, ν) yerel cisminin $\kappa_\nu = O_\nu/\mathfrak{p}_\nu$ kalıntı cismi q elemanlı bir cisim ise, o zaman, $X^q - X$ polinomunun, κ_ν 'de birbirinden ve sıfırdan farklı $q - 1$ tane kökü vardır. O halde, Hensel'in lemmasından $X^q - X$ polinomunun O_ν halkasında da birbirinden farklı $q - 1$ tane sıfır olmayan kökünün var olduğu sonucuna varılır (Teorem 5.2). Bu gözlem, aşağıdaki teorem ile ifade edilir.

Teorem 5.3

Verilen bir (K, ν) yerel cisminin $\kappa_\nu = O_\nu/\mathfrak{p}_\nu$ kalıntı cismi için $|\kappa_\nu| = q$ olsun. O zaman O_ν değerlendirme halkası birimin $q - 1$ 'inci ilkel köklerinden birini içerir.

Şimdi, (K, ν) yerel cismi ile ilgili notasyonlar Teorem 5.3'deki gibi olmak üzere, $\zeta \in O_\nu$ elemanı birimin $q - 1$ 'inci ilkel köklerinden biri ise,

$$\mathcal{T} = \{0, \zeta, \zeta^2, \dots, \zeta^{q-1}\}$$

kümesi, κ_ν için bir tam temsilciler kümesidir. O halde, $\pi_K \in O_\nu$ asal eleman olmak üzere, Teorem 5.1'ye göre, herhangi bir $\alpha \in K$ elemanı,

$$\alpha = \sum_{n \geq n_0} r_n \pi_K^n \quad (n_0 \in \mathbb{Z}, r_n \in \mathcal{T})$$

biçiminde temsil edilebilir. Verilen K yerel cisminin elemanlarının bu şekilde temsiline, "Teichmüller temsili" adı verilir; $\mathcal{T}$ tam temsilciler kümesine de "Teichmüller temsilcileri kümesi" adı verilir.

Tez boyunca, verilen bir K ayrık değerlendirme cismi için, ν_K ile K üzerinde tanımlı ayrık değerlendirme göndermesi; $|\cdot|_K$ ile, ν_K değerlendirmesinin ürettiği norm göndermesi; O_K ile, K 'nin değerlendirme halkası; π_K ile, O_K 'nin sabitlenen bir asal elemanı; $\mathfrak{p}_K$ ile, O_K 'nin $\pi_K O_K$ maksimal ideali; κ_K ile, $\kappa_K = O_K/\mathfrak{p}_K$ kalıntı cismi ve U_K ile $U_K = O_K^\times$ birim grubu gösterilecektir.

Diyelim ki, K bir yerel cisim olsun ve derecesi $[L : K] = n$ olan sonlu bir L/K genişlemesi verilsin. O zaman, L üzerinde öyle bir

$$\nu_L : L \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$$

normalleşmiş değerlendirmesi tanımlıdır ki, ν_L değerlendirmesi, değerlendirmelerin denkliği üzerinden, K üzerindeki ν_K değerlendirmesinin L cisminde olan tek türlü genişlemesidir (Yani, ν_L değerlendirmesinin K cisminde kısıtlanıp normalleştirilmesiyle ν_K elde edilir).

Bir K cisminin verilen herhangi bir L/K cebirsel genişlemesi $K \subset E \subset L$ sonlu altgenişlemelerinin birleşimi olduğuna göre, K üzerindeki değerlendirmeyi L 'ye genişletmek mümkündür. Daha genel olarak, eğer $\overline{K}$ ile, K cisminin sabit bir cebirsel kapanışını gösterelim. Bu durumda K üzerindeki ν_K değerlendirmesi, $\overline{K}$ üzerindeki bir $\nu_{\overline{K}}$ değerlemesine genişletilebilir. Fakat $(\overline{K}, \nu_{\overline{K}})$ değerli cismi tam değildir. Diyelim ki, $\overline{K}$ cisminin $\nu_{\overline{K}}$ değerlendirmesine göre tamlanışı $C_K := \widehat{\overline{K}}$ olsun. O zaman C_K cismi, cebirsel olarak kapalı ve tam bir cisimdir. Burada, C_K 'nın yerel cisim olmadığını belirtelim.

Şimdi, yerel cisimlerin bir L/K genişlemesi verilsin. O zaman, $K^\times \subseteq L^\times$ içermesi sağlandığından dolayı, $\nu_K(K^\times) \subseteq \nu_L(L^\times) \subseteq \mathbb{Z}$ altgrup içermesi vardır. Bu nedenle, $(\nu_L(L^\times) : \nu_K(K^\times))$ indeksi sonludur. Aynı zamanda, κ_L ve κ_K kalıntı cisimleri de sonlu olduğuna göre, κ_L/κ_K genişlemesi de sonlu bir genişleme olur. Dahası, $[\kappa_L : \kappa_K] = f$ olmak üzere, ν_L değerlendirme fonksiyonu, her $x \in L^\times$ için

$$\nu_L(x) = \frac{1}{f} \nu_K(N_{L/K}(x)) \quad (5.6)$$

ile tanımlıdır. Burada,

$$N_{L/K} : L \rightarrow K$$

göndermesi, K cisminin sabitlenen cebirsel kapanışı $\overline{K}$ ile gösterilmesi kaydı ile, L cismini $\overline{K}$ içine resmeden K -homomorfizmaların grubu $\text{Hom}_K(L, \overline{K})$ olmak üzere, verilen her $x \in L$ için

$$N_{L/K}(x) = \prod_{\sigma \in \text{Hom}_K(L, \overline{K})} \sigma(x)$$

kuralı ile tanımlı *norm göndermesidir*.

Uyarı 5.2

Yukarıdaki (5.6) numaralı denklemden de anlaşılacağı gibi, eğer ν_K değerlendirmesinin ürettiği norm $|\cdot|_K$ ile, ν_L değerlendirmesinin norm $|\cdot|_L$ ile gösterilirse, her $x \in L^\times$ için

$$|x|_L = |N_{L/K}(x)|_K^{1/f}.$$

Tanım 5.10

Yerel cisimlerin L/K genişlemesi verilsin. O zaman,

$$e_{L/K} := (\nu_L(L^\times) : \nu_K(K^\times))$$

grup indeksine, L/K genişlemesinin dallanma indeksi denir. Kalıntı cisimlerinin

$$f_{L/K} := [\kappa_L : \kappa_K]$$

genişleme derecesine de, L/K genişlemesinin kalıntı sınıf derecesi denir.

Verilen K yerel cisminin genişlemelerinin bir $K \subseteq F \subseteq L$ kulesi için, tanım gereği

$$1. e_{L/K} = e_{L/F} e_{F/K}$$

$$2. f_{L/K} = f_{L/F} f_{F/K}$$

koşulları sağlanır.

Verilen bir K yerel cisminin herhangi bir L/K sonlu genişlemesi ile ilgili, tanımdan elde edilebilecek başka bir önemli özellik de, $e_{L/K} = e$ olmak üzere, asallar arasında

$$\pi_K = \pi_L^e u \quad (u \in U_L) \quad (5.7)$$

ilişkisinin sağlandığıdır.

Verilen bir K yerel cisminin herhangi bir L/K genişlemesini alalım. Aşağıda ispatını özetleyeceğimiz teorem, L 'nin K üzerinde, O_L 'nin elemanlarından oluşan bir bazının (integral baz) mevcut olduğunu ifade eder:

Teorem 5.4

Yerel cisimlerin verilen L/K genişlemesi için $e = e_{L/K}$ ve $f = f_{L/K}$ ile gösterilsin. Diyelim ki, κ_L kalıntı cisminin κ_K üzerindeki bir bazının temsilcileri, $u_1, u_2, \dots, u_f \in U_L$ olsun. O zaman,

$$\pi_L^j u_i \quad (1 \leq i \leq f, 0 \leq j \leq e-1)$$

elemanları da, L/K için bir integral bazdır.

Kanıt. Her bir $n \geq 0$ tamsayısını $n = qe + r$ ($0 \leq r \leq e-1$) biçiminde ederek, $\pi_n = \pi_K^q \pi_E^r$ elemanlarını oluşturalım. Bu durumda, $\nu_L(\pi_n) = n$ olduğu görülür. Eğer $\mathcal{R}_{O_K}$ ile, κ_K için bir tam temsilciler kümesini gösterirsek, o zaman $\mathcal{R}_{O_L} = u_1 \mathcal{R}_{O_K} + \dots + u_f \mathcal{R}_{O_K}$ de, κ_L için bir tam temsilciler kümesi olur. Buradan

hareketle, Teorem 5.1'e göre, her $\beta \in O_L$ için

$$\begin{aligned}\beta &= \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{e-1} \pi_K^q \pi_L^r \left(\sum_{i=0}^f t_{q,r,i} u_i \right), \quad (t_{q,r,i} \in \mathcal{R}_{O_K}) \\ &= \sum_{i=1}^f \sum_{r=0}^{e-1} \pi_L^r u_i \sum_{q=0}^{\infty} \pi_K^q t_{q,r,i} u_i\end{aligned}$$

yazılabilir. Dikkat edilirse, her bir $\sum_{q=0}^{\infty} \pi_K^q t_{q,r,i} u_i \in O_K$ 'dir. Bu da, O_L 'nin sonlu üretilmiş bir O_K modülü olduğunu gösterir. Bu nedenle, L/K bir sonlu genişlemedir. Diğer taraftan, O_K esas idealler bölgesi ve O_L 'nin, L 'deki integral kapanışı olduğu bilinmektedir. Buna göre, cebirsel sayılar teorisi derslerinden hatırlanacağı gibi, O_L halkası, O_K üzerinde, rankı $[L : K]$ olan bir serbest modüldür. Bu da iddiayı kanıtlar. ■

Böylece, Teorem 5.4 ile aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 5.1

Verilen yerel cisimlerin L/K genişlemesi, derecesi

$$[L : K] = e_{L/K} f_{L/K}$$

olan sonlu bir genişlemedir.

Sıradaki teorem arşimetsel olmayan yerel cisimleri karakterize eder.

Teorem 5.5

Arşimetsel olmayan bir yerel cisim, $\mathbb{Q}_p$ 'nin ya da $\mathbb{F}_p((x))$ 'nin sonlu bir genişlemesidir.

5.5 Yerel cisimlerin genişlemelerinin dallanma kuramı

Tanım 5.11

Yerel cisimlerin bir L/K cebirsel genişlemesi için, eğer $e_{L/K} = 1$ ise, L/K genişlemesine dallanmamış genişleme denir. Eğer $f_{L/K} = 1$ ise, L/K genişlemesine tamamen dallanmış genişleme denir.

Uyarı 5.3

Yukarıdaki tanıma göre, (5.7) numaralı denkleme göre, eğer L/K genişlemesi dallanmamış bir genişlemeyse, $\pi_K \in O_K$ asal elemanı, O_L 'de de asal olarak kalır.

5.5.1 Yerel cisimlerin dallanmamış genişlemeleri

Şimdi, yerel cisimlerin L/K genişlemesinin dallanmamış bir genişleme olduğunu varsayalım. Diyelim ki, $\kappa_K = \mathbb{F}_q$, $\kappa_L = \mathbb{F}_q^f$ olsun. O zaman, κ_L cismi, $X^{q^f-1} - 1$ polinomunun parçalanmış cismidir. Hensel'in lemması gereğince $L = K(\zeta)$ olacak şekilde, birimin $q^f - 1$ 'inci ilkel kökü $\zeta \in L$ vardır. Bu durumun tersi de doğrudur; yani $\pi_K \in O_K$ elemanı eğer O_L 'nin de asal elemanıysa, L/K genişlemesi dallanmamış bir genişlemedir. Bu durumun tersi de doğrudur; yani, verilen bir n pozitif tamsayısı için, birimin $q^n - 1$ inci bir ilkel kökü ζ olmak üzere, $K(\zeta)/K$ genişlemesi dallanmamış bir genişlemedir. Bu irdelemelerden, aşağıdaki teoremin ifadesine ulaşılır.

Teorem 5.6

Bir K yerel cismi verilsin. O zaman her n pozitif tamsayısı için, K 'nin sabitlenen bir $\overline{K}$ cebirsel kapanışı içinde, K_n ile göstereceğimiz, $[K_n : K] = n$ olacak şekilde tek türlü belirli bir K_n/K dallanmamış genişlemesi vardır. Dahası, K_n/K devirli bir genişlemedir.

Yerel cisimlerin L/K genişlemesi için, dallanma indeksi $e_{L/K} = e$, kalıntı derecesi $f_{L/K} = f$ olsun. O zaman, K 'nin tek türlü belirli dallanmamış genişlemesi K_f için, K_f/K genişlemesinin L/K 'nin bir alt genişlemesi olduğu görülebilir ve L/K_f genişlemesi tamamen dallanmış bir genişlemedir.

Tanım 5.12

Yerel cisimlerin L/K genişlemesi için, dallanma indeksi $e_{L/K} = e$, kalıntı derecesi $f_{L/K} = f$ olmak üzere, K_f/K dallanmamış genişlemesine, K 'nin L içindeki maksimal dallanmamış genişlemesi denir.

Sonuç 5.2

Verilen yerel cisimlerin genişlemeleri L/K ve L'/K olmak üzere, $E = LL'$ diyelim. Eğer L/K dallanmamış bir genişlemeyse bu durumda, E/L' de dallanmamış bir genişlemedir. Eğer L/K ve L'/K genişlemelerinin her ikisi de dallanmamış genişlemelerse, E/K genişlemesi de dallanmamış bir genişleme olur.

Yukarıda elde ettiklerimizden hareketle, K 'nin sabitlenen bir $\overline{K}$ cebirsel kapanışı içinde, $K^{\text{nr}} := \bigcup_n K_n$ 'nin cisim yapısına sahip olduğu neticesine varılır. Söz konusu K^{nr} cismine, K 'nin $\overline{K}$ içindeki maksimal dallanmamış genişlemesi denir. Dahası, her bir K_n/K genişlemesi Galois olduğu için, K^{nr}/K de Galois genişlemesidir. Şimdi $\text{Gal}(K^{\text{nr}}/K)$ grubunun yapısını inceleyelim: Bir K yerel bir cisminin sabitlenen bir cebirsel kapanışı $\overline{K}$ olsun. Bir $n \in \mathbb{N}$ için, K cisminin K_n dallanmamış

genişlemesini alalım. Her $\sigma \in \text{Gal}(K_n/K)$ elemanı için,

$$\bar{\sigma}(x \pmod{\mathfrak{p}_{K_n}}) = \sigma(x) \pmod{\mathfrak{p}_{K_n}} \quad (x \in O_{K_n})$$

ile tanımlı bir $\bar{\sigma} \in \text{Gal}(\kappa_L/\kappa_K)$ otomorfizması karşılık gelir. Böylece, $\psi(\sigma) = \bar{\sigma}$ ile tanımlı bir

$$\psi : \text{Gal}(K_n/K) \rightarrow \text{Gal}(\kappa_{K_n}/\kappa_K) \quad (5.8)$$

göndermesi elde edilir.

Önerme 5.4

Verilen K yerel cismi için, (5.8) numaralı denklemde verilen ψ göndermesi, izomorfizmadır.

Varsayalım ki κ_K kalıntı cismi q elemanlı bir cisim olsun. O zaman, K_n/K dallanmamış genişlemesinin kalıntı cisimlerinin $\text{Gal}(\kappa_{K_n}/\kappa_K)$ Galois grubu,

$$\text{Frob}_n : x \mapsto x^q \quad (x \in \kappa_{K_n})$$

ile tanımlı Frobenius κ_K -otomorfizması tarafından üretilen devirli bir gruptur. Bu durumda, 5.8 göndermesinin izomorfizma olması nedeniyle, öyle $\varphi_n \in \text{Gal}(K_n/K)$ vardır ki,

$$\overline{\varphi_n} = \text{Frob}_n$$

sağlanır. Yani, $\varphi_n \in \text{Gal}(K_n/K)$ otomorfizması, her $x \in O_{K_n}$ için,

$$\varphi_n(x) \equiv x^q \pmod{\mathfrak{p}_{K_n}}$$

ile tanımlıdır.

Tanım 5.13

Verilen K_n/K dallanmamış genişlemesi için, (5.8) numaralı izomorfizma tarafından, $\text{Frob}_n \in \text{Gal}(\kappa_{K_n}/\kappa_K)$ elemanına karşılık getirilen $\varphi_n \in \text{Gal}(K_n/K)$ elemanına, K_n/K genişlemesinin Frobenius elemanı denir.

Böylece, (5.8) numaralı izomorfizmadan hareketle,

$$\text{Gal}(K^{nr}/K) = \varprojlim_n \text{Gal}(K_n/K) \simeq \varprojlim_n \text{Gal}(\kappa_{K_n}/\kappa_K) \simeq \hat{\mathbb{Z}}$$

elde ederiz.

Tanım 5.14

Verilen K yerel cismi için, $\text{Gal}(K^{nr}/K)$ Galois grubunun $\varphi_K = (\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ elemanına, K cisminin Frobenius elemanı denir.

Not olarak, K^{nr} yerel bir cisim değildir, çünkü genel olarak, üzerindeki metriğe göre tam değildir. Buna göre, K^{nr} cisminin tamlanması $\tilde{K}$ ile gösterilir.

5.5.2 Yerel cisimlerin tamamen dallanmış genişlemeleri

Tanım 5.15

Verilen bir K bir yerel cismi için, $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathfrak{p}_K$ ve $a_0 \notin \mathfrak{p}_K^2$ olmak üzere

$$f(X) = x^n + a_{n-1}X^{n-1} + a_{n-2}X^{n-2} + \dots + a_1X + a_0 \in K[X]$$

polinomuna, K üzerinde bir Eisenstein polinomu denir.

Önerme 5.5

Verilen herhangi bir $f(x) \in K[X]$ Eisenstein polinomu K üzerinde indirgenemezdir.

Şimdi verilen K yerel cismi için $f(X) \in K[X]$ polinomu Eisenstein polinomu olsun ve $f(x)$ 'in bir α kökü için $L = K(\alpha)$ 'yı ele alalım. Bu durumda, gösterilebilir ki, $K(\alpha)/K$ genişlemesi tamamen dallanmış bir genişlemedir.

Şimdi de, L/K genişlemesi tamamen dallanmış ayrılabilir bir genişleme olsun. Diyelim ki, $\pi_L \in L \in L$ bir asal olsun. Bu durumda, Teorem 5.4 gereğince, $\mathcal{O}_L = \mathcal{O}_K(\pi_L)$ 'dir. Bununla birlikte, π_L 'nin minimal polinomu, bir Eisenstein polinomudur.

Örnek 5.11

Verilen bir p bir asal sayısı için $q = p^n$ olmak üzere, birimin q 'ncü köklerinden biri ζ_q olsun ve $\mathbb{Q}_p$ p -sel sayı cisminin $K = \mathbb{Q}_p(\zeta_q)$ genişlemesini alalım. Bu durumda, ζ_q , $X^{p^n} - 1$ polinomunun bir köküdür. Daha açık olmak gerekirse,

$$X^{p^n} - 1 = (X^{p^{n-1}} - 1)(X^{p^{n-1}(p-1)} + \dots + X^{p^{n-1}} + 1)$$

olduğundan,

$$h(X) = X^{p^{n-1}(p-1)} + \dots + X^{p^{n-1}} + 1$$

polinomunun köklerinden biri ζ_q olur. Bu polinom için, $X \mapsto X + 1$ değişken dönüşümü yapılarak, $h(X + 1)$ polinomunun $\mathbb{Z}_p$ üzerinde bir Eisenstein polinomu olduğu gösterilebilir. Buna göre, $h(X + 1)$ polinomunun bir kökü $\alpha = \zeta_q - 1$ olduğundan, $\mathbb{Q}_p(\alpha) = \mathbb{Q}_p(\zeta_q)$ cismi, $\mathbb{Q}_p$ 'nin tamamen dallanmış bir genişlemesidir ve $\mathbb{Z}_p[\zeta_q]$ de $\mathbb{Q}_p(\zeta_q)$ cisminin değerlendirme halkasıdır.

5.6 Yerel cisimlerin Galois genişlemelerinin dallanma süzümüleri

Bu kısımda, yerel cisimlerin L/K genişlemesinin dallanma süzümü ile bu süzümeye karşılık gelen Galois grupları arasındaki ilişkiyi inceleyeceğiz.

Yerel cisimlerin verilen L/K Galois genişlemesi için, daha önce olduğu gibi ν_K ile, K üzerindeki ayırık değerlendirme gösterilsin ve L üzerindeki ν_L değerlendirme de, ν_K 'nin L cisminde tek türlü genişlemesi olsun. Verilen herhangi bir $\sigma \in \text{Gal}(L/K)$ için $w = \nu_L \circ \sigma$, L üzerinde bir değerlendirme tanımlar. Söz konusu w değerlendirmesi, ν_K değerlendirmesinin L 'ye genişlemesidir. Biliyoruz ki, L üzerindeki ν_L değerlendirmesi, K üzerindeki ν_K değerlendirmesinin tek türlü genişlemesidir. Bu da, w değerlendirmesinin ν_L ile denk olmasını gerektirir. Öyleyse, her $\sigma \in \text{Gal}(L/K)$ için, L 'nin bir asal elemanı π_L ise, $\sigma(\pi_L)$ de, L 'nin bir asal elemanıdır. Dahası, $\sigma(O_L) = O_L$ ve her $i \geq 1$ tamsayısı için, $\sigma(\mathfrak{p}_L^i) = \mathfrak{p}_L^i$ sağlanır. Yapılan bu gözlemler neticesinde, herhangi bir $\sigma \in \text{Gal}(L/K)$ verildiğinde, buna karşılık her $\bar{\alpha} \in O_L/\mathfrak{p}_L^i$ için, $\bar{\sigma}(\bar{\alpha}) := \overline{\sigma(\alpha)}$ ile tanımlı bir

$$\bar{\sigma} : O_L/\mathfrak{p}_L^i \rightarrow O_L/\mathfrak{p}_L^i$$

otomorfizması elde edildiği çıkarımı yapılabilir. Buradan, her $i \geq 0$ için $\varphi_i(\sigma) = \bar{\sigma}$ ile tanımlı bir

$$\varphi_i : \text{Gal}(L/K) \rightarrow \text{Aut}(O_L/\mathfrak{p}_L^{i+1}) \quad (5.9)$$

grup homomorfizması elde edilir. Söz konusu homomorfizmanın G_i ile göstereceğimiz çekirdeği,

$$G_i := \text{çek}(\varphi_i) = \{\sigma \in \text{Gal}(L/K) : \sigma(x) - x \in \mathfrak{p}_L^{i+1}, \forall x \in L\}$$

dir. Not olarak, her $i \leq j$ için $G_j \leq G_i$ olduğu gözlemlenebilir.

Tanım 5.16

Yukarıdaki (5.9) numaralı denklemde verilen φ_i homomorfizmasının çekirdeği olarak tanımladığımız G_i gruplarına, $\text{Gal}(L/K)$ grubunun (alt numaralandırmaya göre) i 'inci dallanma altgrupları adı verilir. Söz konusu altgruplar $\text{Gal}(L/K)$ 'nin bir

$$\{\text{Id}\} = \cdots = G_\ell \leq \cdots \leq G_1 \leq G_0 \leq G_{-1} := \text{Gal}(L/K) \quad (5.10)$$

süzümünü oluşturur.

Özel olarak $i = 1$ durumu için (5.9) numaralı denklemde verilen homomorfizma

$$\varphi_1 : \text{Gal}(L/K) \rightarrow \text{Gal}(\kappa_L/\kappa_K) \quad (5.11)$$

halini alır. Bununla birlikte, L/K genişlemesinin kalıntı derecesi $f = f_{L/K}$ olmak üzere, K 'nin L içindeki $L_0 := K_f$ ile göstereceğimiz maksimal dallanmamış altgenişlemesi için, Önerme 5.4'a göre

$$\text{Gal}(L_0/K) \simeq \text{Gal}(\kappa_{L_0}/\kappa_K) = \text{Gal}(\kappa_L/\kappa_K)$$

dir. Eğer,

$$\text{kis}_{L_0} : \text{Gal}(L/K) \rightarrow \text{Gal}(L_0/K)$$

göndermesi, her $\sigma \in \text{Gal}(L/K)$ 'nin L_0 cisminde kısıtlanmasıyla elde edilen gönderme olmak üzere, φ_1 homomorfizması

$$\varphi_1 : \text{Gal}(L/K) \xrightarrow{\text{kis}_{L_0}} \text{Gal}(L_0/K) \xrightarrow{\sim} \text{Gal}(\kappa_L/\kappa_K)$$

birleşkesi olarak düşünülürse aşağıdaki netice elde edilir:

Önerme 5.6

Verilen yerel cisimlerin genişlemesi L/K için (5.11) numaralı homomorfizma üzerinedir ve çekirdeği de, $\text{Gal}(L/L_0)$ 'dir.

Tanım 5.17

Verilen L/K yerel cisimlerin Galois genişlemesi için, $\text{Gal}(L/K)$ grubunun K cisminin L içindeki L_0 maksimal dallanmamış genişlemesine karşılık gelen ve (5.11) numaralı φ_1 homomorfizmasının çekirdeği olan, $G_0 = \ker(\varphi_1)$ altgrubuna, L/K genişlemesinin atalet grubu adı verilir. Buna göre,

$$G_0 = \{\sigma \in \text{Gal}(L/K) : \sigma(\alpha) - \alpha \in \mathfrak{p}_L, \alpha \in L\}$$

dir.

Şimdi de, Verilen L/L_0 tamamen dallanmış genişlemesini ele alalım. Daha önce de bahsedildiği gibi, $O_L = O_K[\pi_L]$ 'dir (bkz. Teorem 5.4).

Buna göre, herhangi bir $\alpha \in O_L$ elemanı

$$\alpha = \sum_i a_i \pi_L^i \quad (a_i \in O_{L_0})$$

biçiminde yazıldığı için, herhangi bir $\sigma \in \text{Gal}(L/K)$ için,

$$\sigma(\alpha) - \alpha = \sum_i a_i (\sigma(\pi_L^i) - \pi_L^i)$$

dir. Bununla birlikte, $\sigma(\pi_L)$ 'nin O_L halkasında asal olmasından, her $i \geq 1$ için,

$\sigma(\pi_L) - \pi_L$ 'nin O_L halkasında $\sigma(\pi_L)^i - \pi_L^i$ 'yi böldüğü çıkarımında bulunulur. Bundan dolayı, $\sigma(\pi_L) - \pi_L$, O_L halkasında $\sigma(\alpha) - \alpha$ 'yı böler. Bu gözlemimizden hareketle, G_i dallanma altgrupları için

$$G_i = \{\sigma \in \text{Gal}(L/K) : \sigma(\pi_L) - \pi_L \in \mathfrak{p}_L^{i+1}\}$$

biçimindeki başka bir betimlemesini elde ederiz. Buna göre, verilen herhangi bir $\sigma \in G_i$ için,

$$\frac{\sigma(\pi_L)}{\pi_L} \in 1 + \mathfrak{p}_L^i = U_L^i$$

elde edilir. Diyelim ki, $\pi \in O_L$ başka bir asal eleman olsun. O zaman

$$\frac{\sigma(\pi)}{\pi} \equiv \frac{\sigma(\pi_L)}{\pi_L} \pmod{U_L^{i+1}}$$

olduğu görülebilir. Buradan da, verilen her bir $\sigma \in G_i$ elemanını $\sigma(\pi_L)/\pi_L \pmod{U_L^i/U_L^{i+1}}$ 'ye gönderen iyi tanımlı bir

$$\phi_i : G_i \rightarrow U_L^i/U_L^{i+1}$$

homomorfizması elde edilir. Diğer taraftan, Önerme 5.3'ye göre, $U_L/U_L^1 \simeq \kappa_L^\times$ ve $U_L^i/U_L^{i+1} \simeq \kappa_L$ dir. Aşağıdaki teorem tüm bu gözlemlerimizin bir sonucudur:

Teorem 5.7

Yerel cisimlerin L/K Galois genişlemesi ve $\text{Gal}(L/K)$ Galois grubunun G_i dallanma altgrupları için,

1. G_0/G_1 grubu, mertebesi p ile aralarında asal olan devirli bir gruptur. Burada p asal sayısı, κ_K kalıntı cisminin karakteristiğini gösterir.
2. Her bir $i \geq 1$ için, G_i/G_{i+1} 'lerin her biri, elementer abelyen p -gruplardır.
3. Dallanma altgrupları (5.10) numaralı denklemde verilen süzümde yer aldıklarından, $\text{Gal}(L/K)$ grubu çözülebilir bir gruptur.

Bundan sonra şu soruları sormak doğal:

1. Yerel cisimlerinin L/K Galois genişlemesinin herhangi bir E/K alt genişlemesi verildiğinde, $G = \text{Gal}(L/K)$ grubunun bir $H = \text{Gal}(L/E)$ alt grubunun H_i dallanma altgruplarıyla, $\text{Gal}(L/K)$ 'nin G_i dallanma altgrupları arasında nasıl bir bağıntı vardır?
2. Eğer E/K de Galois genişlemesiye, $\text{Gal}(E/K)_i = (G/H)_i$ gruplarıyla, G_i grupları arasında nasıl bir bağıntı vardır?

İlk sorunun yanıtını hemen vermek mümkün: Aşağıdaki

$$H \hookrightarrow G \xrightarrow{\varphi_i} \text{Aut}(O_L/\mathfrak{p}_L^{i+1})$$

bileşkesi olarak verilen $H \rightarrow \text{Aut}(O_L/\mathfrak{p}_L^{i+1})$ homomorfizmasını göz önüne alalım. Burada ψ_i ile, (5.9) numaralı denklem ile verilen homomorfizma gösterilmektedir. Söz konusu homomorfizmanın çekirdeği $H \cap G_i$ olduğuna göre,

$$H_i = H \cap G_i$$

elde edilir. Fakat bölümlere geçildiğinde, alt numaralandırma iyi çalışmaz. Her $i \geq 1$ için,

$$G_i \rightarrow G_i H/H$$

kanonik göndermesinin mevcut olduğu bilinse de, genel olarak $G_i H/H \neq (G/H)_i$ 'dir. Amaç, $G_i H/H$ 'lerle $(G/H)_j$ leri eşleştirecek şekilde i ile j sayıları arasında bir bağıntı elde etmektir. Bu yöndeki strateji, indeks kümesini reel sayıların $\mathbb{R}_{\geq -1} := [-1, \infty]$ altkümeline genişleterek, verilen her bir $i \in \mathbb{R}_{\geq -1}$ için, G_i dallanma altgrubu tanımını,

$$G_i := G_{[i]}$$

olarak modifiye etmek olacak. Buna göre, $G_{-1} = G$, $-1 < i \leq 0$ ise, $G_i = G_0$, $0 < i \leq 1$ ise, $G_i = G_1$ ve bu şekilde devam eder. Buna göre, $\{G_i\}_{i \in \mathbb{R}_{\geq -1}}$ topluluğu, adına G grubunun alt numaralandırılmış dallanma süzümü adı verilen süzümünü verir. Alt numaralandırılmış dallanma süzümüne ilişkilendirilmiş

$$\varphi_{L/K} : \mathbb{R}_{\geq -1} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq -1}$$

Herbrand fonksiyonu,

$$\varphi_{L/K}(u) := \begin{cases} \int_0^u \frac{dt}{(G_0:G_t)} & 0 < u \in \mathbb{R} \\ u & -1 \leq u \leq 0 \end{cases}$$

ile tanımlı, monoton artan, parçalı doğrusal bir bijeksiyon olarak elde edilir. Herbrand fonksiyonunun ters fonksiyonu, $\psi_{L/K}$ ile gösterilir. Yerel cisimlerin L/K Galois genişlemesinin verilen bir K'/K Galois altgenişlemesi için,

$$\psi_{L/K} = \psi_{L/K'} \circ \psi_{K'/K}$$

$$\varphi_{L/K} = \varphi_{K'/K} \circ \varphi_{L/K'}$$

geçiş formülleri sağlanır. Bu formüller kullanılarak, verilen L/K Galois genişle-

mesinin herhangi bir K'/K altgenişlemesinin Herbrand fonksiyonu,

$$\varphi_{K'/K} := \varphi_{L/K} \circ \psi_{L/K'} \quad (5.12)$$

bileşkesi olarak tanımlıdır.

Tanım 5.18

Verilen bir $s \geq 1$ reel sayısı için $\text{Gal}(L/K)$ grubunun G^s üst numaralandırılmış dallanma altgrupları

$$G^s = G_{\psi_{L/K}(s)}$$

ile tanımlıdır. Söz konusu alt gruplardan oluşan $\{G^s\}_{s \geq -1}$ sistemi $\text{Gal}(L/K)$ 'nin üst numaraldırmaya göre dallanma süzümünü oluşturur.

Verilen her $\epsilon > 0$ reel sayısı için $G^{s+\epsilon} \neq G^s$ koşulunu sağlayan $s \geq -1$ reel sayılarına da, $\{G^s\}_{s \geq -1}$ süzümündeki kırılma noktaları adı verilir.

Uyarı 5.4

Tanım 5.4'e göre, $G^{-1} = G_{-1} = \text{Gal}(L/K)$ ve $-1 < s \leq 0$ için, $G^s = G_0$ olduğu görülür.

Uyarı 5.5

Üst numaralandırma kullanılarak ters Herbrand fonksiyonunun

$$\psi_{L/K}(s) = \int_{t=0}^s \frac{|G^0|}{|G^t|} dt$$

integral ifadesi vardır.

Teorem 5.8 (Herbrand)

Eğer $H \leq \text{Gal}(L/K)$ ise, bu durumda

$$(G/H)^s = G^s H/H$$

eşitliği sağlanır.

Dallanma altgrupları ile bölüm grupları arasındaki bu ilişki, genişleme derecesi sonlu olmayan Galois genişlemeleri için de dallanma süzümü elde edilmesine olanak verir. Buna göre, verilen K yerel cisminin genişleme derecesi sonlu olması gerekmeyen bir L/K Galois genişlemesi ele alınsın. Verilen

$$K \subseteq F \subseteq F' \subseteq L$$

sonlu altgenişlemeleri için,

$$t_F^{F'} : \text{Gal}(F'/K)^u \rightarrow \text{Gal}(F/K)^u$$

geçiş morfizmaları

$$\begin{array}{ccc} \text{Gal}(F/K)^u & \xleftarrow{t_F^{F'}(u)} & \text{Gal}(F'/K)^u \\ & \nwarrow \text{kanonik} \nearrow & \\ & \text{Gal}(F'/K)^u \text{ Gal}(F'/F)/\text{Gal}(F'/F) & \end{array} \quad (5.13)$$

çizgesi ile doğal olarak tanımlıdır. Buna göre, her $u \geq -1$ için, $\text{Gal}(L/K)$ grubunun G^u üst numaralandırılmış dallanma altgrupları, $K \subseteq F \subset L$ sonlu Galois altgenişlemeleri için,

$$G^u = \varprojlim_{K \subseteq F \subset L} \text{Gal}(F/K)^u$$

izdüşümsel limiti olarak tanımlıdır. Verilen $u \leq v$ reel sayıları ve $K \subseteq F \subseteq F' \subset L$ sonlu Galois altgenişlemeleri için de,

$$\begin{array}{ccc} \text{Gal}(F/K)^u & \xleftarrow{t_F^{F'}(u)} & \text{Gal}(F'/K)^u \\ \uparrow \iota & & \uparrow \iota \\ \text{Gal}(F/K)^v & \xleftarrow{t_F^{F'}(v)} & \text{Gal}(F'/K)^v \end{array}$$

çizgesi değişmeli olduğundan $G^v \subseteq G^u$ şartı sağlanır. Bu nedenle, üst numaralı dallanma altgrupları, G grubunun,

$$\{G^u\}_{u \in \mathbb{R}_{\geq -1}}$$

üst dallanma süzümünü oluşturur.

Teorem 5.9

Genişleme derecesi sonlu olması gerekmeyen bir L/K Galois genişlemesi verilsin ve F/K genişlemesi de, L/K 'nin sonlu alt genişlemesi olsun. O zaman, $G = \text{Gal}(L/K)$, $H = \text{Gal}(L/F)$ olmak üzere, her $u \geq -1$ reel sayısı için

$$H^u = H \cap G^{\varphi_{F/K}(u)}$$

sağlanır.

Kanıt. Her $u \geq -1$ için, H^u altgrupları, $F \subseteq L' \subseteq L$ sonlu Galois altgenişlemeleri

için

$$H^u = \varprojlim_{F \subseteq L' \subseteq L} \text{Gal}(L'/F)^u$$

özdeşliğini sağlar. Bununla birlikte, $\text{Gal}(L'/F)^u$ sonlu grupları için de, ve (5.12) denklem numaralı tanım gereği $\varphi_{F/K} = \varphi_{L'/K} \circ \psi_{L'/F}$ özdeşliği ile birlikte üst numaralandırma tanımı kullanılarak,

$$\begin{aligned} \text{Gal}(L'/F)^u &= \text{Gal}(L'/F)_{\psi_{L'/F}(u)} \\ &= \text{Gal}(L'/F) \cap \text{Gal}(L'/K)_{\psi_{L'/F}(u)} \\ &= \text{Gal}(L'/F) \cap \text{Gal}(L'/K)^{\varphi_{L'/K} \circ \psi_{L'/F}(u)} \\ &= \text{Gal}(L'/F) \cap \text{Gal}(L'/K)^{\varphi_{F/K}(u)} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece,

$$\begin{aligned} H^u &= \varprojlim_{F \subseteq L' \subseteq L} \text{Gal}(L'/F)^u \\ &= \varprojlim_{F \subseteq L' \subseteq L} \text{Gal}(L'/F) \cap \text{Gal}(L'/K)^{\varphi_{F/K}(u)} \\ &= \text{Gal}(L/F) \cap \text{Gal}(L/K)^{\varphi_{F/K}(u)} \end{aligned}$$

elde edilir. ■

Tanım 5.19

Verilen bir $u \geq -1$ reel sayısı, eğer L/K genişlemesinin en az bir F/K sonlu Galois alt genişlemesinin üst dallanma süzümünün kırılma sayısı ise u reel sayısına, G grubunun üst dallanma süzümünün bir kırılma sayısıdır denir.

Teorem 5.10 (Hasse-Arf Teoremi)

Genişleme derecesi sonlu olmayan bir L/K Galois genişlemesi için,

$$\mathcal{B}_{L/K} := \{u \in \mathbb{R}_{\geq -1} : u = G \text{ grubunun üst dallanma süzümünün kırılma sayısı}\}$$

kümesini alalım. Bu durumda

$$1. \mathcal{B}_{K^{\text{ ayr}}/K} \subseteq \mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_{\geq -1}$$

$$2. \mathcal{B}_{K^{\text{ ab}}/K} \subseteq \mathbb{Z} \cap \mathbb{R}_{\geq -1}$$

şartları sağlanır.

Kanıt. Bkz. [20], sayfa 76. ■

6. FONTAINE ve WINTENBERGER'İN NORMLAR CİSİMLERİ TEORİSİ

Fontaine ve Wintenberger'in 1979 yılında [8, 9] çalışmalarında ortaya attıkları *normlar cisimleri* kavramı, başta sayılar teorisi olmak üzere, matematiğin bir çok alanındaki problemlerin çözümleri için güçlü bir araç olmuştur. Daha sonra, 2013 yılında Peter Scholze'nin [21] çalışmasında tanıttığı mükemmelimsi cisimler için Fontaine ve Wintenberger'in teoremini genellemesiyle, teoriyi ileri bir noktaya taşımıştır. Fontaine ve Wintenberger'in norm cisimleri ve devamında Scholze'nin mükemmelimsi cisimlerini güçlü kılan en önemli özellikleri, karakteristik sıfır nesnelerle karakteristik sıfırdan farklı nesneler arasında hem cebirsel hem de geometrik bir eşleşme oluşturmalarıdır.

Bu bölümde, tezimizin de esas konusu olan Fontaine-Wintenberger normal cisimlerinin inşası ve Fontaine-Wintenberger normlar cisimleri teorisinin temel teoremlerine değinilecektir. Esas olarak [7] kaynağı takip edilmiştir. Konu ile ilgili detaylar için bkz. [8, 9, 23].

Bu bölümden itibaren, aksi belirtilmedikçe, verilen bir K yerel cismi için aşağıdaki notasyonlar kullanılacaktır:

- $\overline{K}$: K yerel cisminin sabitlenen bir cebirsel kapanışı;
- K^{ayr} : K yerel cisminin $\overline{K}$ içindeki ayrılabilir kapanışı;
- K^{ab} : K yerel cisminin $\overline{K}$ içindeki maksimal abelyen genişlemesi.
- ν_K : K yerel cismi üzerinde tanımlanmış olan ayrık, normalleşmiş değerlendirme fonksiyonu;
- O_K : K yerel cisminin tamsayı halkası;
- $\mathfrak{p}_K$: O_K tamsayı halkasının maksimal ideali;
- π_K : K yerel cisminin sabitlenmiş bir asal elemanı;
- κ_K : K yerel cisminin $O_K/\mathfrak{p}_K$ kalıntı cismi;
- U_K : K yerel cisminin birim grubu;
- U_K^i : K yerel cisminin i 'inci yüksek birim grubu ($i \in \mathbb{Z}$);

6.1 APF Genişlemeleri

Verilen K yerel cisminin mutlak Galois grubu $G_K = \text{Gal}(K^{\text{ayr}}/K)$ olmak üzere, verilen her $u \geq -1$ reel sayısına karşılık, $G_K^u \leq G_K$ yüksek dallanma altgrubunun sabit cismini R^u ile gösterelim; yani R^u cismi,

$$R^u := \{x \in K^{\text{ayr}} : \sigma(x) = x, \forall \sigma \in G_K^u\} \quad (6.1)$$

ile tanımlıdır.

Tanım 6.1

Verilen bir L/K ayrılabilir genişlemesi için, eğer

1. Her $u \geq -1$ reel sayısı için, $G_K^u G_L$ grubu G_K mutlak Galois grubunun açık altgrubudur;
2. Her $u \geq -1$ reel sayısı için, $(G_K : G_K^u G_L)$ indeksi sonludur;
3. Her $u \geq -1$ reel sayısı için, $L \cap R^u$ cismi, K yerel cisminin sonlu bir genişlemesidir.

denk koşullarından biri sağlanıyorsa, L/K genişlemesi için, APF genişlemesi adı verilir.

Uyarı 6.1

- (i) Verilen APF genişlemesi L/K için, R^u/K genişlemeleri, (6.1) numaralı denklem ile tanımlı genişlemeler olmak üzere,

$$K^{\text{ayr}} = \bigcup_{u=-1}^{\infty} R^u$$

dur. Bu nedenle,

$$L = \bigcup_{u=-1}^{\infty} R^u \cap L$$

dir.

- (ii) Eğer verilen L/K genişlemesi APF genişlemesiye, $L_0 = L \cap R^0$ cismi, K 'nin L/K içindeki maksimal dallanmamış genişlemesidir. Bu nedenle, APF genişlemesi tanımı gereği $[L_0 : K]$ genişleme derecesi sonludur. Ayrıca, Teorem 5.6 ve Önerme 5.4'e göre κ_L/κ_K sonludur ve $[\kappa_L : \kappa_K]$ genişleme derecesi, $[L_0 : K]$ 'ye eşittir.

- (iii) Eğer L/K genişlemesi APF Galois genişlemesiye, o zaman

$$G_K/G_K^u G_L \simeq (G_K/G_L)/(G_K^u G_L/G_L)$$

ve Herbrand teoremi sonucu

$$G_K^u G_L / G_L \simeq \text{Gal}(L/K)^u$$

olduğundan, $\text{Gal}(L/K)^u$ yüksek dallanma altgrupları, $\text{Gal}(L/K)$ 'nin sonlu indeks altgruplarıdır.

Örnek 6.1

Eğer L/K abelyen genişleme ve κ_L/κ_K kalıntı cisim denişlemesi sonlu olsun. Bu durumda, K 'nin L içindeki maksimal dallanmamış genişlemesi K^0 olmak üzere, K^0/K genişlemesi, genişleme derecesi

$$[K^0 : K] = [\kappa_L : \kappa_K]$$

olan sonlu bir genişlemedir. Buna karşılık, $G = \text{Gal}(L/K)$ grubunun $G^0 = \text{Gal}(L/K^0)$ yüksek dallanma grubu için, $(G : G^0) < \infty$ olur. Diğer taraftan, L/K genişlemesi abelyen olduğundan, abelyen yerel sınıf cisim kuramına göre¹ G 'nin yüksek birim gruplarının $\{G^i\}$ süzümü ile, yüksek birim grupların $\{U_K^i\}$ süzümü uyumludur. Buna göre, 5.5 numaralı denkleme göre, $(G^i : G^{i+1}) < \infty$ olduğu anlaşılır. Bu da, $(G : G^i) < \infty$ demektir. O halde, $(G : G^0) < \infty$ olduğundan, bu durumda,

$$(G : G^i) < \infty$$

sonucuna ulaşılır. Bu da, L/K genişlemesinin APF olduğu anlamına gelir.

Örnek 6.2

Her bir $n \geq 1$ için $\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n})/\mathbb{Q}_p$ tamamen dallanmış genişlemelerini alalım (bkz. Örnek 5.11) ve $\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^\infty})$ ile

$$\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^\infty}) := \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n})$$

cismini gösterelim. Bu durumda, $\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^\infty})/\mathbb{Q}_p$ genişlemesi, APF'dir; çünkü, $K = \mathbb{Q}_p$ ve $L = \mathbb{Q}_p(\zeta_{p^\infty})$ olmak üzere, $G = \text{Gal}(L/K)$ 'nin G^0 yüksek dallanma altgrubu için, L 'nin tanımı gereği $G^0 = G$ dir. Dolayısıyla, yine abelyen yerel sınıf cisim kuramı neticesinde, G 'nin her bir G^i yüksek dallanma altgrupları için

$$(G : G^i) < \infty$$

elde edilir.

¹daha sonraki bölümlerde abelyen yerel sınıf cisim kuramına değinilecektir.

Diyelim ki, L/K genişlemesi APF olsun. Bu durumda, tanım gereği her $u \geq -1$ için $(G_K : G_K^0 G_L)$ ve $(G_K : G_K^u G_L)$ indeksleri sonludur. Öyleyse,

$$(G_K : G_K^0 G_L) = (G_K : G_K^u G_L)(G_K^0 G_L : G_K^u G_L)$$

özdeşliği gereği,

$$(G_K^0 G_L : G_K^u G_L) = (G_K^0 : G_K^u (G_K^0 \cap G_L))$$

indeksi de sonlu olur.

Tanım 6.2

Verilen APF genişlemesi L/K için,

$$G_L^0 := G_K^0 \cap G_L$$

olmak üzere, L/K 'nin

$$\psi_{L/K} : \mathbb{R}_{\geq -1} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq -1}$$

Herbrand fonksiyonu,

$$\psi_{L/K}(u) := \begin{cases} \int_0^u (G_K^0 : G_L^0 G_K^t) dt & 0 < u \in \mathbb{R} \\ u & -1 \leq u \leq 0 \end{cases}$$

ile tanımlı, monoton artan, parçalı doğrusal ve sürekli fonksiyondur.

Eğer verilen APF genişlemesi L/K , Galois grubu $G = \text{Gal}(L/K)$ ile gösterilecek olan bir Galois genişlemesi ise, o zaman

$$G^t = (G_K/G_L)^t = G_K^t G_L/G_L$$

dir. Dahası,

$$G_K^0/G_L^0 G_K^t \simeq G_K^0 G_L/G_K^t G_L \simeq (G_K^0 G_L/G_L)/(G_K^t G_L/G_L) \simeq G^0/G^t$$

sağlanır. Bu durumda $\psi_{L/K}$ Hasse-Herbrand fonksiyonu, $u \geq 0$ için,

$$\psi_{L/K}(u) = \int_0^u (G^0 : G^t) dt$$

özdeşliğini sağlar.

Tanım 6.3

Verilen L/K genişlemesi, bir APF Galois genişlemesi olmak üzere, her $u \geq -1$

reel sayısı için $G = \text{Gal}(L/K)$ 'nin G_u ile gösterilen alt numaralandırmaya göre dallanma altgrupları,

$$G_u := G^{\psi_{L/K}(u)}$$

ile tanımlıdır.

Önerme 6.1 ([23], Proposition 1.2.3)

Ayrılabilir genişlemelerin bir $K \subseteq F \subseteq L$ zinciri için,

- (i) Eğer F/K sonlu bir genişleme ise, L/F genişlemesinin APF olması için gerek ve yeter koşul, L/K genişlemesinin de APF olmasıdır. Dahası, L/K genişlemesinin $\varphi_{L/K}$ ve $\psi_{L/K}$ Hasse-Herbrand fonksiyonları için

$$\psi_{L/K} = \psi_{L/F} \circ \psi_{F/K}$$

ve

$$\varphi_{L/K} = \varphi_{F/K} \circ \varphi_{L/F}$$

geçişme özellikleri sağlanır.

- (ii) Eğer L/F sonlu bir genişleme ise, L/K 'nin APF genişlemesi olabilmesi için gerek ve yeter koşul, F/K 'nin APF genişlemesi olmasıdır.
- (iii) Eğer L/K genişlemesi APF ise, F/K genişlemesi de APF 'dir.

Kanıt. (i) ve (iii) şıklarının ispatlarına kısaca değinelim:

(ii) Verilen L/F genişlemesinin sonlu olması durumunda, $(G_F : G_L G_F^u)$ indeksi sonludur. Diyelim ki, L/K genişlemesi APF olsun. Öyleyse $(G_K : G_K^u G_L)$ indeksi sonludur. Fakat,

$$\begin{aligned} (G_K : G_K^u G_L) &= (G_K : G_K^u G_F)(G_K^u G_F : G_K^u G_L) \\ &= (G_K : G_K^u G_F)(G_F : (G_F \cap G_K^u) G_L) \end{aligned}$$

özdeşliği sağlandığından $(G_F : (G_F \cap G_K^u) G_L)$ indeksi de sonlu olmalıdır. Bununla birlikte, Teorem 5.9 gereğince, $G_F \cap G_K^u = G_K^{\psi_{F/K}(u)}$, dur. Bu da, F/K genişlemesinin APF olduğunu gösterir.

Tersine, Eğer F/K genişlemesi APF ise, bu sefer de tanım gereği $(G_K : G_K^u G_F)$ indeksi sonlu olur. Aynı zamanda $(G_F : G_L G_F^u)$ indeksi de sonlu idi. Bu nedenle

$$\begin{aligned} (G_K : G_K^u G_F) &= (G_K : G_K^u G_L)(G_K^u G_L : G_K^u G_F) \\ &= (G_K : G_K^u G_L)(G_L : (G_L \cap G_K^u) G_F) \end{aligned}$$

elde edilir. Bununla birlikte, Teorem 5.9 gereğince, $G_L \cap G_K^u = G_K^{\psi_{L/K}(u)}$, dur. Bu da, F/K genişlemesinin APF olduğunu gösterir.

(iii) Diyelim ki, G_K^u yüksek dallanma altgrubunun sabit cismi R^u olsun. O zaman, L/K genişlemesi APF ise, $L \cap R^u$ cismi, K 'nin sonlu bir genişlemesidir. Bununla birlikte, $F \cap R^u \subseteq L \cap R^u$ olduğu için, $F \cap R^u$ 'nin de K 'nin sonlu bir genişleme olduğu anlaşılır. Bu durumda, F/K genişlemesi de APF 'dir. ■

6.2 Fontaine-Wintenberger Normlar Cisimleri

Verilen bir L/K bir APF Galois genişlemesi için,

$$\Sigma_{L/K} = \{K \subseteq E_i \subseteq L \mid i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, [E_i : K] < \infty, i \leq j \text{ ise } E_i \subseteq E_j, \cup E_i = L\}$$

olmak üzere,

$$\mathbb{X}(L/K)^\times := \varprojlim_{\substack{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \\ E_i \in \Sigma_{L/K}}} E_i^\times = \left\{ (\alpha_i)_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \in \prod_{\substack{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \\ E_i \in \Sigma_{L/K}}} E_i^\times \mid N_{E_j/E_i}(\alpha_j) = \alpha_i, \forall i \leq j \right\}$$

izdüşümsel sistemini alalım. Burada, her $i \leq j$ için, $N_{E_j/E_i} : E_j^\times \rightarrow E_i^\times$ göndermesi,

$$N_{E_j/E_i}(x) = \prod_{\sigma \in \text{Hom}_{E_i}(E_j, \overline{K})} \sigma(x)$$

ile tanımlı norm homomorfizmasını göstermektedir. Açık bir şekilde görülür ki, verilen her $(\alpha_i), (\beta_i) \in \mathbb{X}(L/K)^\times$ için,

$$(\alpha_i)(\beta_i) := (\alpha_i \beta_i) \tag{6.2}$$

çarpma işlemiyle birlikte, $\mathbb{X}(L/K)^\times$ bir gruptur.

Diyelim ki, her $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ için $K \leq E'_i \leq L$ sonlu genişlemeleri,

$$(i) \ E'_i \leq E_j \ ((\forall i \leq j));$$

$$(ii) \ \bigcup_i E'_i = L$$

özelliklerini sağlasın. Bu durumda, verilen her $i \geq 0$ için, öyle $E_j \in \Sigma_{L/K}$ vardır ki, $E'_i \leq E_j$ ve $N_{E_j/K} = N_{E'_i/K} \circ N_{E_j/E'_i}$ koşulları sağlanır. Bu durum, $\mathbb{X}(L/K)^\times$ 'nin E_i sonlu genişlemelerinin seçiminden bağımsız olarak inşa edilebildiğini gösterir. Buradan hareketle, $\mathcal{S}_{L/K}$ ile, L/K genişlemesinin tüm sonlu alt genişlemelerinin oluşturduğu parçalı sıralı küme gösterilmek üzere,

$$\mathbb{X}(L/K)^\times = \varprojlim_{E \in \mathcal{S}_{L/K}} E^\times = \left\{ (\alpha_E) \in \prod_{E \in \mathcal{S}_{L/K}} E^\times \mid \alpha_E \in E^\times, N_{E_2/E_1}(\alpha_{E_2}) = \alpha_{E_1}, \forall E_1 \leq E_2 \right\}$$

dir. Şimdi,

$$\mathbb{X}(L/K) := \mathbb{X}(L/K)^\times \cup \{0\}$$

diyelim. Norm göndermeleri ile ilgili aşağıdaki özellik, bu topluluk üzerinde uygun bir toplama işlemi tanımlanmasını olanaklı kılar.

Önerme 6.2 ([23], Théorème 2.1.3)

Verilen L/K sonsuz APF genişlemesi için, $(\alpha_E)_{E \in \mathcal{S}_{L/K}}, (\beta_E)_{E \in \mathcal{S}_{L/K}} \in \mathbb{X}(L/K)$ alınsın. Bir $E \in \mathcal{S}_{L/K}$ verilsin. Bu durumda, öyle bir $\omega_E \in E$ vardır ki, her $\epsilon > 0$ reel sayısına karşılık, $[E' : E] \geq M$ şartını sağlayan her $E' \in \mathcal{S}_{L/K}$ için

$$|N(\alpha_{E'} + \beta_{E'}) - \omega_E|_E < \epsilon$$

şartını sağlayan bir $M = M(\epsilon)$ pozitif tamsayısı mevcuttur. Diğer bir ifadeyle,

$$\lim_{\substack{E \subseteq E' \in \mathcal{S}_{L/K} \\ [E' : E] \rightarrow \infty}} N_{E'/E}(\alpha_{E'} + \beta_{E'})$$

limiti, bir $\omega_E \in E$ elemanına yakınsar.

Kanıt. Bkz. [7], syf. 101, (5.5) Theorem. ■

Verilen bir $F \in \mathcal{S}_{L/K}$ için,

$$\begin{aligned} \omega_F &= \lim_{\substack{F \subseteq E' \in \mathcal{S}_{L/K} \\ [E' : F] \rightarrow \infty}} N_{E'/F}(\alpha_{E'} + \beta_{E'}) \\ &= \lim_{\substack{F \subseteq E \subseteq E' \in \mathcal{S}_{L/K} \\ [E' : E] \rightarrow \infty}} N_{E/F} \circ N_{E'/E}(\alpha_{E'} + \beta_{E'}) \\ &= N_{E/F} \left(\lim_{\substack{F \subseteq E \subseteq E' \in \mathcal{S}_{L/K} \\ [E' : E] \rightarrow \infty}} N_{E'/E}(\alpha_{E'} + \beta_{E'}) \right) \\ &= N_{E/F}(\omega_E) \end{aligned}$$

olduğu gözlemlenir. Bu gözleme dayanarak, $(\omega_E)_{E \in \mathcal{S}_{L/K}} \in \mathbb{X}(L/K)$ olduğu anlaşılır. Bununla birlikte,

$$(\alpha_E)_{E \in \mathcal{S}_{L/K}} + (\beta_E)_{E \in \mathcal{S}_{L/K}} := (\omega_E)_{E \in \mathcal{S}_{L/K}} \quad (6.3)$$

ifadesi, $\mathbb{X}(L/K)$ üzerinde iyi tanımlı bir işlemdir.

Teorem 6.1 ([23], Théorème 2.1.3)

Verilen L/K sonsuz APF genişlemesi verilsin. Bu durumda, (6.2) ve (6.3) iş-

lemeleri, $\mathbb{X}(L/K)$ üzerinde bir cisim yapısı tanımlar.

Tanım 6.4

Üzerindeki (6.2) ve (6.3) işlemleri ile birlikte $\mathbb{X}(L/K)$ cismine, L/K sonsuz APF genişlemesinin Fontaine-Wintenberger normlar cismi adı verilir.

Şimdi, L/K sonsuz APF genişlemesi verilsin ve K yerel cisminin kalıntı cisminin karakteristiği $\text{kar}(\kappa_K) = p$ olsun. Bu durumda, her bir $E \in \mathcal{S}_{L/K}$ için, $\text{kar}(\kappa_E) = p$ olacağından $p \cdot 1 \in \mathfrak{p}_E$ 'dir. Buna göre, herhangi bir $E \leq E' \in \mathcal{S}_{L/K}$ için,

$$N_{E'/E}(p \cdot 1) = \pi_E^{[E':E]} x \quad (x \in O_E) \quad (6.4)$$

sağlanır.

Teorem 6.2

Verilen L/K sonsuz APF genişlemesi için,

$$\text{kar}(\mathbb{X}(L/K)) = \text{kar}(\kappa_K) = p$$

dir.

Kanıt. $\text{kar}(\mathbb{X}(L/K)) = p$ olduğunu göstermek için,

$$\lim_{\substack{E \subseteq E' \in \mathcal{S}_{L/K} \\ [E':E] \rightarrow \infty}} N_{E'/E}(p \cdot 1) = 0 \quad (6.5)$$

olduğunu göstermemiz yeterlidir. Gerçekten de, herhangi bir $E \in \mathcal{S}_{L/K}$ için, (6.4) numaralı denklemden

$$\nu_K(N_{E'/E}(p \cdot 1)) \geq [E' : E] \quad (\forall E \leq E' \in \mathcal{S}_{L/K})$$

olduğu görülür. Bu da, (6.5) özdeşliğinin sağlandığını gösterir. ■

Diyelim ki, verilen APF genişlemesi L/K için, L_0 ile, K 'nin L içindeki maksimal dallanmamış genişlemesi, L_1 ile de, K 'nin L içindeki maksimal uysalca dallanmış genişlemesi gösterilsin. Bu durumda, APF genişlemelerinin tanımından, $L_0, L_1 \in \mathcal{S}_{L/K}$ dır. Verilen herhangi bir, $F \in \mathcal{S}_{L/K}$ için, $F_0 = FL_0$ cismi de, F 'nin L içindeki maksimal dallanmamış genişlemesi olur. Şimdi herhangi bir

$$\alpha = (\alpha_E)_{E \in \mathcal{S}_{L/K}} \in \mathbb{X}(L/K)$$

verilsin. Bu durumda, $\alpha_F = N_{F_0/F}(\alpha_{F_0})$ olduğuna göre,

$$\nu_F(\alpha) = \nu_F(N_{F_0/F}(\alpha_{F_0})) \quad (6.6)$$

sağlanır. Diğer taraftan, $[F_0 : F] = f_{F_0/F}$ olduğundan dolayı, $\nu_F(N_{F_0/F}(\alpha_{F_0}))$ ve $\nu_{F_0}(\alpha_{F_0})$ için, (5.6) numaralı formülden,

$$\nu_F(N_{F_0/F}(\alpha_{F_0})) = [F_0 : F]\nu_{F_0}(\alpha_{F_0})$$

bağıntısı elde edilir. Bununla birlikte, F_0/L_0 tamamen dallanmış bir genişleme olduğu için de, gene (5.6) numaralı formülden,

$$\nu_{F_0}(\alpha_{F_0}) = \nu_{L_0}(N_{F_0/L_0}(\alpha_{F_0})) = \nu_{L_0}(\alpha_{L_0})$$

sağlanır. Bu son elde edilenlere göre (6.6) numaralı denklem yeniden düzenlendiğinde,

$$\nu_F(\alpha_F) = [F_0 : F]\nu_{K_0}(\alpha_{L_0})$$

sağlandığı görülür. Bu gözlemden yola çıkarak, $\nu_{\mathbb{X}(L/K)}(\alpha) = \nu_F(\alpha_F)$ ile tanımlı

$$\nu_{\mathbb{X}(L/K)} : \mathbb{X}(L/K)^\times \rightarrow \mathbb{Z}$$

göndermesinin, $\mathbb{X}(L/K)$ üzerinde $F \in \mathcal{S}_{L/K}$ 'nin seçiminden bağımsız bir değerlendirme tanımladığı sonucuna varılır. Böylece, Fontaine-Wintenberger'in norm cisimleri ile ilgili aşağıdaki temel teoreme ulaşılır (detaylar için bkz. [23], Théorème 2.1.3).

Teorem 6.3 ([23], Théorème 2.1.3)

Verilen APF genişlemesi L/K için, $\alpha = (\alpha_E)_{E \in \mathcal{S}_{L/K}} \in \mathbb{X}(L/K)$ olmak üzere,

$$\nu_{\mathbb{X}(L/K)}(\alpha) = \nu_{L_0}(\alpha_{L_0})$$

ile tanımlı

$$\nu_{\mathbb{X}(L/K)} : \mathbb{X}(L/K)^\times \rightarrow \mathbb{Z}$$

değerlendirmesi ile birlikte, kalıntı cismi $\kappa_{\mathbb{X}(L/K)} \simeq \kappa_{L_0}$ olan bir yerel cisimdir.

Şimdi, verilen K yerel cisminin $K \subseteq F \subseteq L$ genişleme zinciri için, L/K genişlemesi APF ve F/K sonlu genişleme olsun. Bu durumda, Önerme 6.1 'in (i) şikkına göre, L/F de APF genişlemesidir. Buna göre, normlar cisimlerinin yapısı gereği

$$\mathbb{X}(L/K) = \mathbb{X}(L/F)$$

olur.

Şimdi de, L/K sonsuz APF genişlemesi ve M/L ayrılabilir sonlu genişlemesi verilsin. Eğer E/K sonlu genişlemesi için, $M = LE$ ise, K cisminin

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} L_i = L$$

koşulunu sağlayan

$$K \subseteq L_0 \subseteq \cdots \subset L$$

sonlu genişlemeler zinciri için,

$$K \subseteq L_0 E \subseteq \cdots \subset M$$

ve

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} L_i E = M$$

dir. Bunun yanında, Önerme 6.1'in (ii) şıkkı neticesinde, L/K genişlemesi APF olduğundan, M/K genişlemesi APF 'dir. Söz konusu APF genişlemelerinin $\mathbb{X}(L/K)$ ve $\mathbb{X}(M/K)$ normlar cisimleri ele alındığında, K cisminin sonlu genişlemesi E 'ye bağlı öyle bir $n \geq 0$ pozitif tamsayısı vardır ki, m 'den büyük her $i < j$ tamsayısı için

$$N_{L_j E / L_i E}(x) = N_{L_j / L_i}(x) \quad (\forall x \in L_j) \quad (6.7)$$

elde edilir. Bu da, doğal bir

$$\varepsilon_{L,M}^{(E)} : \mathbb{X}(L/K) \hookrightarrow \mathbb{X}(M/K)$$

gömmesinin mevcut olduğunu gösterir. Diğer bir deyişle, $\varepsilon_{L,M}^{(E)}$ gömmesi altında,

$$\mathbb{X}(L/K) \subseteq \mathbb{X}(M/K)$$

dir.

Uyarı 6.2

Eğer K 'nin E ve E' sonlu genişlemeleri için $LE = LE' = M$ ise, bu durumda (6.7) numaralı denklem gereği, $\varepsilon_{L,M}^{(E)}$ ve $\varepsilon_{L,M}^{(E')}$ gömmelerinin aynı olduğu görülür. Yani, bu gömmeler E/K sonlu genişlemelerinden bağımsızdır. Bu nedenle $\varepsilon_{L,M}^{(E)}$ gömmeleri için $\varepsilon_{L,M}$ gösterimi kullanılabilir.

$\mathbb{X}(E, L/K)$ cismi, her $L \leq E' \leq E'' \leq E$ sonlu altgenişlemeleri için,

$$\varepsilon_{E',E''} : \mathbb{X}(E'/K) \hookrightarrow \mathbb{X}(E''/K)$$

gömmeleri üzerinden,

$$\mathbb{X}(E, L/K) := \varinjlim_{\substack{L \subseteq E' \subseteq E \\ [E':L] < \infty}} \mathbb{X}(E'/K)$$

ile tanımlansın.

Teorem 6.4 (Fontaine-Wintenberger, [23], Théorème 3.2.2)

Verilen K yerel cisminin herhangi bir L/K APF genişlemesi verilsin. Bu durumda, L 'nin her ayrılabilir E/L genişlemesi için, $E \mapsto \mathbb{X}(E, L/K)$ göndermesi, L 'nin ayrılabilir genişlemeleri ile $\mathbb{X}(L/K)$ 'nin ayrılabilir genişlemeleri arasında bire-bir eşleşmedir. Dahası, E/L genişlemesi Galois genişlemesiye, o zaman, $\mathbb{X}(E, L/K)/\mathbb{X}(L/K)$ genişlemesi de Galois genişlemesidir ve

$$G_L \simeq G_{\mathbb{X}(L/K)}$$

dir.

Fontaine-Wintenberger teoremi, normlar cisimleri kuramının en önemli neticesidir. Eğer $\mathbb{X}(L/K)$ cisminin, karakteristiği $p = \text{kar} \kappa_K$ olan bir yerel cisim olduğu düşünülürse, Fontaine-Wintenberger teoreminin bir anlamda karakteristik 0 nesneler ile karakteristik p nesneler arasında geçişi mümkün kıldığı söylenebilir. Fontaine-Wintenberger'in teoremi bu haliyle cebirsel sayılar kuramının yanısıra, aritmetik geometri, p -sel Hodge kuramı gibi alanlardaki problemler için önemli bir araç. bununla birlikte ikibinli yıllarda Scholze'nin teoriyi *mükemmelimsi cisimler* (perfectoid field) ve onların *tiltleri* (tilt) için genellemesi, kuramı çok daha ileri noktalara taşımıştır.

6.3 Mükemmelimsi cisimler

Fontaine ve Wintenberger'in normlar cisimler teorisi, cebirsel ve geometrik problemlere uygulanması açısından çarpıcı uygulamalara sahip olmasıyla birlikte, 21. yüzyıl versiyonu olan mükemmelimsi cisimler teorisi, bunu daha ileri bir noktaya taşımıştır. Bu kısımda, [16] kaynağı takip edilerek, mükemmelimsi cisimler kavramı ile, Fontaine ve Wintenberger'in temel teoreminin mükemmelimsi cisimler için olan versiyonuna kısaca değinilecektir. Konu ile ilgili detaylı bilgi edinmek için, ayrıca bkz. [21, 22].

Üzerinde arşimetsel olmayan bir ν ayrık değerlendirmesi ile birlikte, bir K değerlendirme cismi verildiğinde, K üzerindeki değerlendirmeyi, $\overline{K}$ cebirsel kapanışı üzerindeki bir ω değerlendirmesine genişlettiğimizde, $(\overline{K}, \omega)$ ikilisinin bir tam değerlendirme cismi olmadığından daha önce de bahsedilmişti. Bununla birlikte, K

cisminin herhangi bir L/K genişlemesinin cebirsel kapalı olması için, $\widehat{L}$ tamlanışının da cebirsel kapalı olmasının gerekli ve yeterli koşul olduğu bilinmektedir. Buradan hareketle, aşağıdaki örnekler mükemmelimsi cisimler kavramı için bir temel oluşturur:

Örnek 6.3

$\mathbb{Q}_p(\zeta_p^\infty)$ ile, $\widehat{\mathbb{Q}_p(\zeta_p^\infty)}$ tamlanışının mutlak Galois grupları aynıdır.

Örnek 6.4

$\mathbb{F}_p$ katsayılı formel Laurent serileri cismi $F_p((t))$ 'nin Frobenius kapanışı,

$$\mathbb{F}_p((t^{1/p^\infty})) = \mathbb{F}_p((t))[t^{1/p}, t^{1/p^2}, \dots]$$

ile, $\mathbb{F}_p((t^{1/p^\infty}))$ 'nin tamlanışı $\widehat{\mathbb{F}_p((t^{1/p^\infty}))}$, aynı mutlak Galois gruplarına sahiptir.

Verilen bir K değerlendirme cisminin bir L/K cebirsel genişlemesi verildiğinde, L cismi üzerindeki K 'den elde edilen değerlendirme ayrık olmayabilir.

Örnek 6.5

$K = \mathbb{Q}_p$ p -sel sayılar cismi ele alındığında, her $n \geq 0$ tamsayısı için, $p^{1/n} \in \overline{\mathbb{Q}_p}$ 'dir. Fakat $\nu_p(p^{1/n}) = 1/n$ 'dir.

Tanım 6.5

Kalıntı cisminin karakteristiği p olan bir (K, ν_K) arşimetsel olmayan tam değerlendirme cismi, eğer aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa bir mükemmelimsi cisimdir:

- (i) $\nu_K(K^\times)$ ayrık değildir;
- (ii) $\mathcal{O}_K$ tamsayı halkası için, $\mathcal{O}_K/(p)$ üzerinde, $\text{Frob}_p : x \mapsto x^p$ Frobenius göndermesi üzerine bir göndermedir.

Örnek 6.6

Cebirsel olarak kapalı, üzerinde tanımlı arşimetsel olmayan bir ν değerlendirmesi için, karakteristiği p olan bir kalıntı cismine sahip bir cisim mükemmelimsidir.

Örnek 6.7

$\widehat{\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^\infty})}$, $\widehat{\mathbb{F}_p((t^{1/p^\infty}))}$ mükemmelimsi cisimlerdir.

Örnek 6.8

$\mathbb{Q}_p(p^{1/p^\infty}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{Q}_p(p^{1/p^n})$ olmak üzere, $\widehat{\mathbb{Q}_p(p^{1/p^\infty})}$ mükemmelimsidir.

Örnek 6.9

$\mathbb{Q}_p, \mathbb{F}_p$ cisimleri mükemmelimsi değildir.

Lemma 6.1 ([16], Proposition 1.14)

Verilen bir K mükemmelimsi cismi için,

- (i) $\varprojlim_{x \mapsto x^p} \mathcal{O}_K$ izdüşümsel limiti, üzerindeki bileşen bileşene çarpma işlemi ile birlikte monoid yapısına sahiptir; $\varprojlim_{x \mapsto x^p} \mathcal{O}_K/(p)$ ise bir halkadır. Bununla birlikte,

$$\varprojlim_{x \mapsto x^p} \mathcal{O}_K \rightarrow \varprojlim_{x \mapsto x^p} \mathcal{O}_K/(p)$$

doğal göndermesi, bir çarpımsal monoid izomorfizmasıdır.

- (ii) Önceki şıkkı kullanarak, üzerinde elde edilen halka yapısı ile birlikte, $\varprojlim_{x \mapsto x^p} \mathcal{O}_K$, karakteristiği p olan bir değerlendirme halkası olur.

Tanım 6.6

- (i) Verilen K mükemmelimsi cismi için, $\varprojlim_{x \mapsto x^p} \mathcal{O}_K$ üzerindeki Lemma 6.1 'de elde edilen değerlendirme halkası yapısına göre, kesirler cismi

$$K^{\flat} := \varprojlim_{x \mapsto x^p} K$$

ile gösterilir. $K^{\flat}$ cismine, K cisminin tilti adı verilir.

- (ii) Her $a = (a_0, a_1, \dots) \in K^{\flat}$ için, $\sharp(a) = a_0$ ile tanımlı

$$\sharp : K^{\flat} \rightarrow K$$

göndermesine ters tiltleme göndermesi (untilting map) denir.

Örnek 6.10

$\mathbb{Q}_p(\widehat{p^{1/p^\infty}})^{\flat} = \mathbb{F}_p(\widehat{(t^{1/p^\infty})})$ 'dir. Burada, $t = (p, p^{1/p}, p^{1/p^2}, \dots)$.

Önerme 6.3 ([16], Proposition 1.14)

Her $x \in K^{\flat}$ için, $x \mapsto |\sharp(x)|$ ile tanımlı $|\cdot| : K^{\flat \times} \rightarrow \mathbb{R}$ norm göndermesi ile birlikte, $K^{\flat}$ cismi, K ile aynı değerlendirme halkası ve aynı kalıntı cismine sahip, karakteristiği p olan bir mükemmelimsi cisimdir.

Teorem 6.5 (Genelleştirilmiş Fontaine-Wintenberger teoremi)

Diyelim ki K bir mükemmelimsi cisim olsun. Bu durumda, K 'nin her L/K sonlu genişlemesi için, $L \mapsto L^{\flat}$ göndermesi, K 'nin sonlu genişlemeleri ile $K^{\flat}$ 'nin sonlu genişlemeleri arasında bire-bir eşleşme tanımlar. Dahası, L/K sonlu genişlemesinin Galois olabilmesi için gerek ve yeter koşul $L^{\flat}/K^{\flat}$ sonlu genişlemesinin Galois olmasıdır. Sonuç olarak

$$G_K \simeq G_{K^{\flat}}$$

sağlanır.

Kanıt. Bkz. [21]



7. NORMLAR CİSİMLERİ ve YEREL ABELYEN OLMAYAN SINIF CİSİM KURAMI

Bu bölümde, Koch'un yaklaşımına göre yerel abelyen olmayan sınıf cisim kuramının inşası probleminin çözümünde Fontaine ve Wintenberger'in normlar cisimleri teorisinin uygulanışı ile, Buse Fırat tarafından yapılan, [10] çalışmasındaki, Cahit Arf'in belli semboller kullanarak (Arf sembolleri) $E = \overline{\mathbb{F}_p}((t))(t^{1/n} : n \in \mathbb{Z}, p \nmid n)$ olmak üzere, G_E mutlak Galois grubunu betimlediği [1] çalışmasını, herhangi bir yerel cismin mutlak Galois grubunun betimlenmesinin elde edilmesinde, gene Fontaine ve Wintenberger'in normlar cisimleri teorisinin uygulanışı özetlenecektir.

7.1 Koch'un yaklaşımına göre yerel abelyen olmayan sınıf cisim kuramı

Verilen K yerel cisminin Galois genişlemelerinin aritmetik yapısını, taban cisim K 'ye bağlı cebirsel ve analitik objeler yardımıyla betimlenmesi problemi, “yerel sınıf cisim kuramı”, olarak adlandırılan, sayılar kuramının merkezi problemlerinden birisidir. Verilen, K yerel cisminin abelyen genişlemeleri için problemin çözümü, *Artin karşılıklılık tasviri* olarak adlandırılan,

$$\text{Art}_K : G_K^{\text{ab}} \xrightarrow{\sim} \widehat{K^\times}$$

“doğal”, cebirsel topolojik eşleşmeleri ile verilir. Burada, G_K^{ab} ile, K 'nin K^{ayr} içindeki maksimal abelyen genişlemesi K^{ab} olmak üzere, $G_K^{\text{ab}} = \text{Gal}(K^{\text{ab}}/K)$ Galois grubu; $\widehat{K^\times}$ ile, $K^\times$ grubunun izdüşümsel tamlanışını gösteriyoruz. Art_K 'nin doğallığı ile de, söz konusu eşleşmenin fonktörsel ve dallanma kuramsal belli başlı özellikleri sağladığı anlaşılmaktadır. Detaylar için bkz. [2], [19]. Problemin, abelyen olmayan genişlemeleri de içerecek şekilde çözümü için, biri Langlands'ın, diğeri Koch'un olmak üzere iki farklı yaklaşım vardır. Koch'un yaklaşımına göre yerel abelyen olmayan sınıf cisim kuramının inşasında, APF genişlemeleri ve Fontaine-Wintenberger normlar cisimleri kavramları önemli rol oynar.

Koch felsefesine göre yerel sınıf cisim kuramı, genelleme sırasına göre özetlenirse, Koch ve de Shalit, [17] çalışmalarında, K yerel cisminin 2-abelyen genişlemelerinin aritmetik yapılarını betimlemişlerdir. Burada n-abelyen genişleme demekle, K 'nin

bir L/K genişlemesi için, $\text{Gal}(L/K)$ Galois grubunun n 'inci değişmeli yapan altgrubunun (commutator subgroup) birim grup olduğu anlaşılmaktadır. Gurevich, [11] çalışmasında, bu teoriyi n -abelyen genişlemeler için genelleştir. Laubie de, [18] çalışmasında Koch de Shalit'in çalışmasını genelleterek, K^{nd}/K maksimal dallanmamış genişlemesinin Frobenius otomorfizmasının K^{ayr} cismine, sabitlenmiş bir genişlemesi (K üzerindeki Lubin-Tate parçalanışı) φ_K olmak üzere

$$\Lambda_K^{(\varphi_K)} : G_K \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}_K^{(\varphi_K)}$$

cebirsel ve topolojik izomorfizması inşa etmiş (Laubie karşılıklılık tasviri) ve bu tasvirin belli "doğallık" koşullarını sağladığını göstermiştir. Burada $\mathcal{G}_K^{(\varphi_K)}$ topolojik grubu, K yerel cisminin APF genişlemeleri ve normlar cisimleri ile, Koch ve de Shalit'in inşasına bağlı olarak tanımlıdır. Fesenko [4, 5, 6] çalışmalarında, φ_K ile, K yerel cisminin K^{nd} maksimal dallanmamış genişlemesinin Frobenius otomorfizmasının K^{ayr} cismine olan sabitlenmiş bir genişlemesi (K üzerindeki Lubin-Tate parçalanışı); K_{φ_K} ile, φ_K 'nin sabitlenmiş cismi gösterilmek üzere,

$$\Phi_{L/K}^{(\varphi_K)} : \text{Gal}(L/K) \rightarrow U_{\tilde{\mathbb{X}}(L/K)}^{\diamond} / Y_{L/K}$$

cebirsel ve topolojik izomorfizmasını inşa etmiş (Fesenko karşılıklılık tasviri) ve bu izomorfizmanın gerekli "doğallık" şartlarını sağladığını kanıtlamıştır. Burada $\tilde{\mathbb{X}}(L/K)$, APF genişlemesi L/K 'ye bağlı $\mathbb{X}(L/K)$ normlar cisminin maksimal dallanmamış genişlemesi $\mathbb{X}(L/K)^{\text{nd}}$ 'nin tamlanışı

$$\widehat{\mathbb{X}(L/K)^{\text{nd}}} = \tilde{\mathbb{X}}(L/K)$$

olmak üzere, $U_{\tilde{\mathbb{X}}(L/K)}^{\diamond}$ ile gösterilen cebirsel yapı, $\tilde{\mathbb{X}}(L/K)$ 'nin *Fesenko elmas grubu* olarak adlandırılan

$$U_{\tilde{\mathbb{X}}(L/K)}^{\diamond} \leq U_{\mathbb{X}(L/K)}$$

altgrubudur. Diğer taraftan, μ_p ile, birimin p 'inci köklerini içeren grup gösterilmesi kaydıyla, $U_{\tilde{\mathbb{X}}(L/K)}^{\diamond}$ elmas grubunun $Y_{L/K}$ altgrubu ise,

$$\text{i) } U_{\mathbb{X}(L/K)} \subset Y_{L/K} ;$$

$$\text{ii) } \text{her } \sigma, \tau \in \text{Gal}(L/K) \text{ için } \Phi_{L/K}^{(\varphi_K)}(\sigma\tau) = \Phi_{L/K}^{(\varphi_K)}(\sigma)\Phi_{L/K}^{(\varphi_K)}(\tau)^{\sigma}$$

koşullarını sağlayacak şekilde tanımlıdır. Fakat $Y_{L/K}$ grubunun varlığı için, μ_p ile, birimin p 'inci köklerini içeren grup gösterilmesi kaydıyla,

$$\mu_p \subseteq K \tag{7.1}$$

varsayımına ihtiyaç vardır (p asal sayısı κ_K kalıntı cisminin karakteristiği idi).

Fesenko, bu teoremin özel bir durumu olarak Koch-de Shalit ve Gurevich'in teoremlerinin elde edilebileceğini göstermiştir.

Daha sonra İkedo ve Serbest'in [12, 13] çalışmalarında, Fesenko'nun teorisi $K \subseteq L \subseteq K_{\varphi_K^d}$ koşulunu sağlayan APF genişlemeleri için genellenmiştir. Burada d sayısı κ_L/κ_K genişlemesinin derecesidir. K cisminin L içindeki maksimal dallanmamış alt genişlemesi

$$L_0 := L \cap K^{\text{nd}} = K_d^{\text{nd}}$$

ile gösterilirse, L_0 üzerindeki bir Lubin-Tate parçalanışı $\varphi_{L_0} = \varphi_K^d$ olur. Buna göre, İkedo ve Serbest, verilen her $\sigma \in \text{Gal}(L/K)$ için $\sigma|_{L_0} = \varphi_d^m$ şartı altında

$$\Phi_{L/K}^{(\varphi_K)} : \sigma \mapsto (\text{Art}_{L_0/K}(\varphi_d^m), \Phi_{L/L_0}^{(\varphi_{L_0})}(\varphi_d^{-m}\sigma))$$

kuralıyla tanımlı, *genelleştirilmiş Fesenko karşılıklılık sembolü* olarak adlandırılan

$$\Phi_{L/K}^{(\varphi_K)} : \text{Gal}(L/K) \rightarrow K^\times / N_{L_0/K} L_0^\times \times U_{\tilde{\mathbb{X}}(L/L_0)}^\diamond / Y_{L/L_0}$$

cebirsel ve topolojik izomorfizmasını inşa etmişler ve gene bu izomorfizmanın gerekli "doğallık" şartlarını sağladığını göstermişlerdir.

İkedo ve Serbest'in [14] çalışmalarında ise, her bir n, d pozitif tamsayı ikilisi için, $\Gamma_d^{(n)}$ ile, K_d^{nd} cisminin $K_{\varphi_K^d}$ içindeki biricik maksimal n -abelyen genişlemeleri gösterilmek üzere, G_K mutlak Galois grubunun

$$G_K = \varprojlim_{(n,d)} \text{Gal}(\Gamma_d^{(n)}/K)$$

izdüşümsel limiti olarak elde edilebildiğini kanıtlamışlar; bununla birlikte, $\Gamma_d^{(n)}/K$ genişlemelerinin APF olması ve $n' \leq n$ ve $d'|d$ için, $\Gamma_{d'}^{(n')} \subseteq \Gamma_d^{(n)}$ olmasından yola çıkarak,

$$\begin{aligned} \nabla_K^{(\varphi_K)} &:= \varprojlim_{(n,d)} \left(K^\times / N_{K_d^{\text{nd}}/K} K_d^{\text{nd}\times} \times U_{\tilde{\mathbb{X}}(\Gamma_d^{(n)}/K_d^{\text{nd}})}^\diamond / Y_{\Gamma_d^{(n)}/K_d^{\text{nd}}} \right) \\ &= \hat{\mathbb{Z}} \times \varprojlim_{(n,d)} U_{\tilde{\mathbb{X}}(\Gamma_d^{(n)}/K_d^{\text{nd}})}^\diamond / Y_{\Gamma_d^{(n)}/K_d^{\text{nd}}} \end{aligned}$$

grubunu inşa etmişlerdir. Sonrasında da, K yerel cismi için bir

$$\Phi_K^{(\varphi_K)} : G_K \xrightarrow{\sim} \nabla_K^{(\varphi_K)} \quad (7.2)$$

doğal topolojik grup izomorfizmasını elde etmişlerdir (bu çalışmada bu tasvire *İkedo-Serbest karşılıklılık tasviri* adını vereceğiz). Kazancıoğlu'nun [15] doktora tezinde, Laubie'nin ve İkedo-Serbest'in tasvirlerinin birbirlerine denk oldukları

kanıtlanmıştır.

İkeda ve Serbest'in inşası için K yerel cismi için (7.1) varsayımına ihtiyaç vardır. Bununla birlikte, (7.1) şartı gözetilmeyen bir K yerel cismi için, birimin p 'inci ilkel kökü ζ_p için, $K_o = K(\zeta_p)$ olmak üzere, K yerel cisminin abelyen karşılıklılık ilkesinin izomorfizma teoreminden,

$$\text{Art}_{K_o/K} : \text{Gal}(K_o/K) \xrightarrow{\sim} K^\times / N_{K_o/K} K_o^\times$$

ile, K_o yerel cismi için

$$\Phi_{K_o}^{(\varphi_{K_o})} : G_{K_o} \xrightarrow{\sim} \nabla_{K_o}^{(\varphi_{K_o})}$$

İkeda-Serbest yerel karşılıklılık tasviri tanımlıdır. Bedikyan'ın [3] çalışmasında, bu tasvirler uygun bir şekilde bir araya getirilerek

$$\Phi_K^{(\varphi_{K_o})} : G_K \xrightarrow{\sim} \nabla_K^{(\varphi_{K_o})} \quad (7.3)$$

cebirsel ve topolojik izomorfizması elde edilebildiği gösterilmiştir. Burada, $\nabla_K^{(\varphi_{K_o})}$ topolojik grubu, $K^\times / N_{K_o/K} K_o^\times$ ile, $\nabla_{K_o}^{(\varphi_{K_o})}$ gruplarına bağlı olarak tanımlıdır. bununla birlikte, $\nabla_K^{(\varphi_{K_o})}$ karşılıklılık tasvirinin gerekli "doğal" özelliklerinin sağlandığı da gösterilmiştir. Buna göre,

- (i) Verilen K yerel cisminin herhangi bir L/K sonlu Galois genişlemesi için, p asal sayısı K 'nin kalıntı cisminin karakteristiği olmak üzere, birimin p 'inci ilkel kökü ζ_p için, $K_o = K(\zeta_p)$ ve $L_o = L(\zeta_p)$ cisimleri olsun. Bu durumda, $\Phi_K^{(\varphi_{K_o})}$ ile, (7.3) numaralı izomorfizmayı göstermek üzere, $\nabla_K^{(\varphi_{K_o})}$ grubunun $\Phi_K^{(\varphi_{K_o})}(G_L)$ kapalı altgrubu

$$\mathcal{N}_L := \Phi_K^{(\varphi_{K_o})}(G_L) = \Phi_{K_o}^{(\varphi_{K_o})}(G_{L_o}) \times N_{L/K} L^\times / N_{K_o/K} K_o^\times$$

olarak hesaplanmıştır. Burada, $\Phi_{K_o}^{(\varphi_{K_o})}$ ile, K_o için (7.2) ile gösterilen İkeda-Serbest karşılıklılık tasviri gösterilmektedir. Eğer L/K sonsuz Galois genişlemesiye, $K \subset E \subset L$ sonlu altgenişlemeler olmak üzere,

$$\mathcal{N}_L := \bigcap_E \mathcal{N}_E,$$

olarak tanımlanmıştır.

- (ii) Verilen K yerel cisminin herhangi bir L/K Galois genişlemesi için,

$$\Phi_{L/K}^{(\varphi_{K_o})} : \nabla_K^{(\varphi_{K_o})} \xrightarrow[\sim]{(\Phi_K^{(\varphi_{K_o})})^{-1}} G_K \xrightarrow{\text{kis}_L} \text{Gal}(L/K).$$

bileşkesi olarak tanımlı sürekli homomorfizmasının çekirdeği $\mathcal{N}_L$ kapalı

altgrubu olarak elde edilmiştir. Böylece, her bir L/K Galois genişlemesi için $\text{Gal}(L/K)$ Galois grubu ile; $\nabla_K^{(\varphi_{K_0})}/\mathcal{N}_L$ gruplarının hem cebirsel, hem de topolojik olarak eş yapılı oldukları görülmüştür.

7.2 Arf'in yaklaşımına göre herhangi bir yerel cismin mutlak Galois grubunun betimlenmesi

Cahit Arf, [1] çalışmasında, $\mathbb{F}_p((t))$ üzerinde abelyen olmayan sınıf cisim kuramı inşa etmek için, $E = \overline{\mathbb{F}_p}((t))(t^{1/n} : n \in \mathbb{Z}, p \nmid n)$ olmak üzere, $\mathcal{A}_0 = E$ ve her bir $n \geq 1$ tamsayısı için, $\mathcal{A}_{n-1}$ 'e kendi ortaya attığı n -uzunluklu Arf sembolleri adıyla anılan belli sembolleri ekleyerek elde ettiği $\mathcal{A}_n$ halkaları yardımıyla $\mathbb{F}_p((t))^{\text{ayr}}$ cismini betimlemiş ve G_E mutlak Galois grubunu inşa etmiştir. Daha sonra, Fırat'ın 2016 yılında gerçekleştirdiği doktora çalışmasında, $\mathbb{F}_p((t))$ için, Koch yaklaşımına göre yerel sınıf cisim kuramı neticesinde

$$\text{Gal}(E/\mathbb{F}_p((t))) \simeq \nabla_{\mathbb{F}_p((t))}/\mathcal{N}_{E/\mathbb{F}_p((t))}^\infty$$

topolojik grup izomorfizmasının mevcut olması ile birlikte, G_E mutlak Galois grubunun

$$1 \longrightarrow G_E \hookrightarrow G_{\mathbb{F}_p((t))} \longrightarrow \nabla_{\mathbb{F}_p((t))}/\mathcal{N}_{E/\mathbb{F}_p((t))}^\infty \longrightarrow 1 \quad (7.4)$$

kısa kesin dizisine oturmasından hareketle, $G_{\mathbb{F}_p((t))}$ mutlak Galois grubunun bir betimlenmesini elde etmiştir. Bununla birlikte, aynı çalışmada Arf'in yaklaşımını Fontaine ve Wintenberger'in normlar cisimleri teorisi ile birleştirerek, herhangi bir K yerel cisminin G_K mutlak Galois grubunun bir betimlenmesini elde etmiştir: Kalıntı cisminin karakteristiği $\kappa_K = p$ olmak üzere verilen herhangi bir K yerel cismi ve K 'nin bir L/K APF genişlemesi için, Fontaine-Wintenberger teoremine göre (Teorem 6.4),

$$\text{Gal}(K^{\text{ayr}}/L) \simeq G_{\mathbb{X}(L/K)}$$

izomorfizması vardır. Böylece, $\mathbb{X}(L/K) \simeq \mathbb{F}_p((t))$ olduğundan (Bölüm 6.2 'de Fontaine-Wintenberger normlar cisimlerinin karakteristiğinin > 0 olduğu görülmüştü. (Ayrıca bkz. Teorem 5.5), $\mathbb{X}(L/K)^{\text{ayr}}$ ve $G_{\mathbb{X}(L/K)}$ mutlak Galois grubunun Arf sembolleri ile betimlenmesi vardır. Böylece $\text{Gal}(K^{\text{ayr}}/L)$ Galois grubunun bir betimlenmesi elde edilmiş olur. Diğer taraftan, Koch'un yaklaşımına göre yerel abelyen olmayan sınıf cisim kuramı ile, $\text{Gal}(L/K)$ grubunun bir betimlenmesi

vardır. Fırat, G_K mutlak Galois grubunun

$$1 \longrightarrow \text{Gal}(K^{\text{ayr}}/L) \hookrightarrow G_K \longrightarrow \text{Gal}(L/K) \longrightarrow 1 \quad (7.5)$$

kısa kesin dizisinde yer almasından hareketle, $\text{Gal}(K^{\text{ayr}}/L)$ ve $\text{Gal}(L/K)$ gruplarının betimlenmeleri uygun bir biçimde “yapıştırılarak”, G_K mutlak Galois grubunun bir betimlenmesine ulaşmıştır.



8. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, Wintenberger normlar cisimlerinin inşası ve temel özellikleri detaylı bir şekilde ele alınmıştır. Çalışmanın katkıları şu şekilde özetlenebilir:

1. **Fontaine-Wintenberger normlar cisimleri:** bir K yerel cisminin L/K APF genişlemesine bağlı $\mathbb{X}(L/K)$ Fontaine-Wintenberger normlar cisimlerinin inşası ve temel özelliklerine genel bir bakış yapılmış ve söz konusu cisimlerin, karakteristik 0 ve karakteristik p arasındaki derin bağlantılar üzerindeki rolü vurgulanmıştır. Ayrıca, teorinin mükemmelimsi cisimlere genelleştirilmesi de tartışılmıştır.
2. **Yerel abelyen olmayan sınıf cisim kuramı:** Koch'un yaklaşımına göre yerel abelyen olmayan sınıf cisim kuramı ile ilgili yapılan çalışmalar incelenmiş ve Fontaine-Wintenberger normlar cisimlerinin bu kuram üzerindeki katkıları tartışılmıştır. Bu incelemeler, yerel sınıf cisim kuramı ile ilgili çalışmalar için gerekli altyapı oluşmasına katkı sağlamıştır.
3. **Yerel cisimlerin mutlak Galois gruplarının betimlenmesi:** Karakteristik p cisimlerin mutlak Galois gruplarının betimlenmesi için Arf'in yaklaşımının, herhangi bir K yerel cismi için genellenmesinde Fontaine-Wintenberger normlar cisimleri teorisinin sağladığı katkılar açıklanmıştır.

Bu çalışma, MSGSÜ Bilimsel Araştırmalar Projeleri Koordinatörlüğü'nün 24/BAP/31 numaralı projesi kapsamında desteklenmiştir.

Öneriler: Bu çalışma, Fontaine-Wintenberger teorisinin özellikle abelyen olmayan yerel sınıf cisim kuramı alanındaki uygulanabilirliğini ortaya koymuştur. Ancak, K yerel cisminin (7.3) numaralı denklemle verilen $\Phi_K^{(\varphi_{K_0})}$ yerel abelyen olmayan karşılıklılık tarvirinin fonktörel özellikleri arasında, transfer tasvirinin (Verlagerung) inşası yoktur. İleride bu yönde bir çalıştırma gerçekleştirmek hedeflerimiz arasındadır.

Kaynakça

- [1] **Arf, C.** 1955. Eine Explizite Konstruktion der Seperablen Hülle Eines Potenzreihenkörpers, *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, **19**, 119-126.
- [2] **Artin, E., Tate** 2008. Class Field Theory, *American Mathematical Society-Chelsea Publishing*.
- [3] **Bedikyan, S.** 2024. Local Non Abelian Class Field Theory, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics* (erken erişim), <https://doi.org/10.15672/hujms.1391474> .
- [4] **Fesenko, I. B.**, 2000. Local reciprocity cycles, *Invitation to Higher Local Fields* (Ed. I. B. Fesenko, M. Kurihara), *Geom. Topol. Monogr.*, **3**, 293-298.
- [5] **Fesenko, I. B.**, 2001. Noncommutative local reciprocity maps, Class Field Theory - Its Centenary and Prospect (Ed. K. Miyake), *Advanced Studies in Pure Math.*, **30**, 63-78.
- [6] **Fesenko, I. B.**, 2005. On the image of noncommutative local reciprocity map, *Homology, Homotopy and Appl.* **7**, 53-62.
- [7] **Fesenko, I. B. and Vostokov, S.V.**, 2002. Local Fields and Their Extensions (2nd ed.), AMS Translations of Mathematical Monographs, AMS, Providence, Rhode Island.
- [8] **Fontaine, J.M. and Wintenberger, J.P.**, 1979. Le “corps des normes” de certaines extensions algébriques de corps locaux, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A Math.*, **288**, 367-370 .
- [9] **Fontaine, J.M. and Wintenberger, J.P.**, 1979. Extensions algébriques et corps des normes des extensions *APF* des corps locaux, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A Math.*, **288**, 441-444.
- [10] **Firat, B** 2016. Arf symbols and the absolute Galois group of a local field, *Ph.D. Thesis*, Yeditepe Univ.

- [11] **Gurevich, A.**, 1997. Description of Galois groups of local fields with the aid of power series, *Ph.D. Thesis*, Humboldt Univ., Berlin.
- [12] **İkeda, K.İ. and Serbest, E.**, 2008. Fesenko reciprocity map, *Algebra i Analiz*, **20** (3), 112-162.
- [13] **İkeda, K.İ. and Serbest, E.**, 2008. Generalized Fesenko reciprocity map, *Algebra i Analiz*, **20** (4), 118-159.
- [14] **İkeda, K.İ. and Serbest, E.**, 2010. Non-abelian local reciprocity law, *Manuscripta Math.*, **132**, 19-49.
- [15] **Kazancıoğlu, A. S.**, *Laubie ve genelleştirilmiş Fesenko karşılıklılık ilkele-
rinin ilişkisi üzerine*, PhD thesis, Istanbul Technical University, (2012).
- [16] **Kedlaya, K.** 2022. Perfectoid Spaces: An Annotated Bibliography. In Perfectoid Spaces. http://dx.doi.org/10.1007/978-981-16-7121-0_6
- [17] **Koch, H. and de Shalit, E.**, 1996. Metabelian local class field theory, *J. reine angew. Math.*, **478**, 85-106.
- [18] **Laubie, F.** 2007. Une théorie du corps de classes local non abélien, *Composito Math.*, **143**, 339-362.
- [19] **Neukirch, J.**, 1986. Class Field Theory, Grundlehren Math. Wiss., Bd. 280, Springer-Verlag, London.
- [20] **Serre, J.P.**, 1979. Local Fields, Springer-Verleg, New York.
- [21] **Scholze, P.** 2012. Perfectoid Spaces, *Publ. Math. IHÉS*, **116**, 245-313.
- [22] **Scholze, P.** 2013. Perfectoid spaces: a survey, Current developments in mathematics 2012, *Int. Press, Somerville, MA*, 193-227
- [23] **Wintenberger, J.P.**, 1983. Le corps des normes de certaines extensions infinies de corps locaux; applications, *Ann. Sci. École. Norm. Sup.*, **46**, 59-89.

ÖZGEÇMİŞ

Harun Şatıroğlu, 1991 yılında İstanbul’da doğdu. 2015 yılında Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi Matematik Bölümü’nde lisans eğitimini tamamladı. 2021-2022 Bahar Dönemi’nde Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı’nda lisanüstü eğitime başlamıştır. İstanbul’da yaşıyor. Matematik öğretmeni olarak görev yapmaktadır.

