



T.C.
OSMANIYE KORKUT ATA ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Özlem ÖCAL

SABİT BİR AÇISAL HIZLA DÖNEN
FONKSİYONEL DERECELİ BASINÇLI
KAPLARIN KUVVET SERİ YÖNTEMİ İLE
ELASTİK ANALİZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

OSMANIYE – 2025

**T.C.
OSMANIYE KORKUT ATA ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**SABİT BİR AÇISAL HIZLA DÖNEN FONKSİYONEL
DERECELİ BASINÇLI KAPLARIN KUVVET SERİ
YÖNTEMİ İLE ELASTİK ANALİZİ**

Özlem ÖCAL

**MATEMATİK
ANABİLİM DALI**

**OSMANIYE
ŞUBAT 2025**

TEZ ONAYI

SABİT BİR AÇISAL HIZLA DÖNEN FONKSİYONEL DERECELİ BASINÇLI KAPLARIN KUVVET SERİ YÖNTEMİ İLE ELASTİK ANALİZİ

Özlem ÖCAL tarafından Doç. Dr. Durmuş YARIMPABUÇ danışmanlığında, Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü **Matematik** Anabilim Dalı'nda hazırlanan bu çalışma, aşağıda imzaları bulunan jüri üyeleri tarafından oy birliği/çokluğu ile **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. Durmuş YARIMPABUÇ
Matematik Anabilim Dalı, OKÜ

.....

Üye: Prof. Dr. Hakan ÖZTÜRK
Fizik Anabilim Dalı, OKÜ

.....

Üye: Doç. Dr. Müslüm DEMİR
Kimya Mühendisliği Anabilim Dalı, Boğaziçi Üniversitesi

.....

Yukarıdaki jüri kararı Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun/...../..... tarih ve/..... sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Eyyup TEL
Enstitü Müdürü, **Lisansüstü Eğitim Enstitüsü**

.....

Bu tezde kullanılan özgün bilgiler,şekil,çizelge ve fotoğraflardan kaynak göstermeden alıntı yapmak 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunu hükümlerine tabidir.

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, bu çalışma sonucunda elde edilmeyen her türlü bilgi ve ifade için ilgili kaynağa eksiksiz atf yapıldığını ve bu tezin Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlandığını bildiririm.

Özlem ÖCAL



ÖZET

SABİT BİR AÇISAL HIZLA DÖNEN FONKSİYONEL DERECELİ BASINÇLI KAPLARIN KUVVET SERİ YÖNTEMİ İLE ELASTİK ANALİZİ

Özlem ÖCAL

Yüksek Lisans, Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Doç. Dr. Durmuş YARIMPABUÇ

Şubat 2025, 51 sayfa

Bu çalışmada, elastisite teorisi kullanılarak fonksiyonel olarak derecelendirilmiş malzemedan yapılmış izotropik dönen kalın cidarlı basınçlı kaplardaki gerilmeler incelenmiştir. Poisson oranı dışındaki malzeme özelliklerinin radyal yönde Voigt modeli ile değiştiği varsayılmıştır. Bu koşullar altında Navier denkleminin analitik çözümü kuvvet seri çözüm yöntemi ile elde edilmiştir. Literatürde mevcut olan çözümler, bu çalışmada elde edilen sonuçları doğrulamak için kullanılmıştır. Rasgele seçilmiş metal ve hafif metalden oluşan malzeme çifti için farklı hacim kesir oranlarında radyal yer değiştirme, radyal gerilim ve çevresel gerilimin nasıl etkilendiği incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Elastik Analiz, Dönel Basınçlı Kaplar, Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzemeler, Kuvvet Seri Yöntemi.

ABSTRACT

ELASTIC ANALYSIS OF FUNCTIONALLY GRADED PRESSURE VESSELS ROTATING WITH A CONSTANT ANGULAR VELOCITY USING THE POWER SERIES METHOD

Özlem ÖCAL

M.Sc., Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Durmuş YARIMPABUÇ

February 2025, 51 pages

In this study, stresses in isotropic rotating thick walled pressure vessels made of functionally graded material are investigated using elasticity theory. It is assumed that the material properties except Poisson's ratio vary in the radial direction with the Voigt model. Under these conditions, the analytical solution of the Navier equation is obtained by the power series solution method. The solutions available in the literature are used to verify the results obtained in this study. It is investigated how radial displacement, radial stress and circumferential stress are affected at different volume fraction indices for a randomly selected material pair consisting of metal and light metal.

Key Words: Elastic Analysis, Rotating Pressure Vessels, Functionally Graded Materials, Power Series Method.



Değerli aileme...

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans tez konumun belirlenerek tez çalışmamın yürütölmesini üstlenen, çalışmalarım süresince değerli bilgi, tecrübe ve katkılarını esirgemeyen danışman hocam Sayın Doç. Dr. Durmuş YARIMPABUÇ'a teőekkürlerimi sunarım.

Manevi desteği ile daima yanımda duran değerli aileme teşekkür ederim. Ayrıca, çalışmalarıma katkılarından dolayı OKÜ Matematik Bölümünün diğer akademik ve idari personeline teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

TEZ ONAYI	
TEZ BİLDİRİMİ	
ÖZET	i
ABSTRACT	ii
İTHAF SAYFASI	iii
TEŞEKKÜR	iv
İÇİNDEKİLER	v
ŞEKİLLER DİZİNİ	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR	viii
1. GİRİŞ	1
1.1 Basıncılı Kaplar	1
1.2 Literatür Özeti	2
1.3 Çalışmanın Kapsamı	13
2. ARAŞTIRMA PROBLEMİ	14
2.1 Silindirik Basıncılı Kap	15
2.2 Küresel Basıncılı Kap	16
2.3 Boyutsuzlaştırma	18
2.3.1 Boyutsuz Silindirik Basıncılı Kap Denklemleri	18
2.3.2 Boyutsuz Küresel Basıncılı Kap Denklemleri	19
3. KUVVET SERİ YÖNTEMİ	21
3.1 Diferansiyel Denklemlerin Seri Çözümleri	21
3.2 Boyutsuz Silindirik Kapların Kuvvet Seri Yöntemi ile Çözümü	24
3.3 Boyutsuz Küresel Kapların Kuvvet Seri Yöntemi ile Çözümü	27
4. BULGULAR VE TARTIŞMA	30
5. SONUÇLAR	42

KAYNAKLAR	44
ÖZGEÇMİŞ	47
EK.1.....	48
EK.2.....	50



ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1.1	Silindirik basınçlı kap örneği	1
Şekil 4.1	Silindirik kaplarda farklı döndürme hızları için deplasman ve gerinim dağılımları	32
Şekil 4.2	Küresel kaplarda farklı döndürme hızları için deplasman ve gerinim dağılımları	33
Şekil 4.3	Silindirik kaplarda farklı döndürme hızları için radyal ve teğetsel gerilme dağılımları	34
Şekil 4.4	Küresel kaplarda farklı döndürme hızları için radyal ve teğetsel gerilme dağılımları	35
Şekil 4.5	Silindirik kaplarda farklı iç basınç etkisinde deplasman ve gerinim dağılımları	37
Şekil 4.6	Küresel kaplarda farklı iç basınç etkisinde deplasman ve gerinim dağılımları	38
Şekil 4.7	Silindirik kaplarda farklı iç basınç etkisinde radyal ve teğetsel gerilme dağılımları	40
Şekil 4.8	Küresel kaplarda farklı iç basınç etkisinde radyal ve teğetsel gerilme dağılımları	41

SİMGELER VE KISALTMALAR

E_a, E_s	alüminyum ve çeliğin elastik modülü
E_f	karişımın elastik modülü
P	iç yüzeydeki basınç
r_i, r_0	silindir ve kürenin iç/dış yarıçapı
r	yarıçap
s	hacim kesir indeksi
S_r	boyutsuz radyal gerilme, $(\sigma_r/(E_a - E_s))$
S_θ	boyutsuz teğetsel gerilme, $(\sigma_\theta/(E_a - E_s))$
u	deplasman
U	boyutsuz deplasman $(u/(r_0 - r_i))$
V_a, V_s	alüminyum ve çeliğin hacim kesir oranı
w	açısal hız
x	boyutsuz yarıçap $((r - r_i)/(r_0 - r_i))$

Yunan Harfleri

ε_r	radyal gerinme
ε_θ	teğetsel gerinme
(r, θ)	silindir koordinatlar
(r, θ, ϕ)	küresel koordinatlar
ν	Poisson oranı
ρ_f	karişımın yoğunluğu
ρ_a, ρ_s	alüminyum ve çeliğin yoğunluğu
σ_r	radyal gerilme
σ_θ	teğetsel gerilme

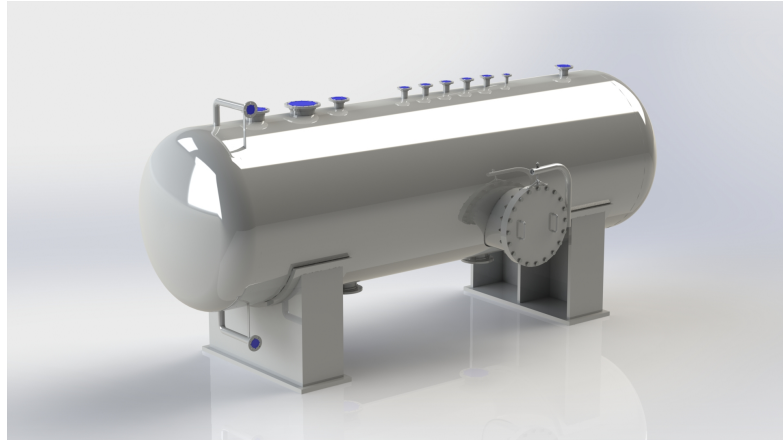
Alt indisler

a	alüminyum malzeme
s	çelik malzeme

1. GİRİŞ

1.1 Basınçlı Kaplar

Basınçlı kaplar (Şekil 1.1), içerisinde bulunan gaz veya sıvıları belirli bir basınç düzeyinde tutan kapalı hacimli sistemlerdir. Basınç, harici bir kaynaktan veya doğrudan veya dolaylı bir kaynaktan ısı uygulanarak veya bunların herhangi bir kombinasyonu ile elde edilebilir. Bu kaplar genellikle petrol, gaz, kimya, gıda ve içecek, otomotiv, tıp, sağlık ve ilaç endüstrileri, enerji üretim santralleri, denizcilik ve benzeri sektörlerde ihtiyaca uygun şekilde yaygın olarak kullanılırlar. Üretim ve taşıma kolaylığı açısından genellikle silindirik ve küresel şekillerde üretilen bu basınçlı kapların, yüksek mukavemet, sızdırmazlık, dayanıklılık ve hafiflik gibi özelliklere sahip olması önemli bir konudur. Endüstriyel uygulamaların yanı sıra, araştırma ve geliştirme faaliyetleri, yeni malzemelerin ve tasarım teknolojilerinin geliştirilmesini içerir. Bu durum basınçlı kapların sürekli olarak iyileştirilmesine ve çeşitlenmesine olanak tanır. Binalarımızda kullanılan basınçlı kaplar ise genellikle su sistemleri, ısıtma, havalandırma ve iklimlendirme sistemleri gibi çeşitli uygulamalarda bulunur.



Şekil 1.1 Silindirik basınçlı kap örneği

Basınçlı kapların, kullanıldığı akışkanlara ve mekanik tasarım verilerine uygun olarak farklı malzeme tiplerinde üretimi sağlanabilmektedir. Genellikle basınçlı kapların karbon çelik, paslanma çelik, alüminyum alaşım, fiberglas veya kompozit vb. malzeme

çeşitliliğinde üretimi gerçekleştirilmektedir. Karbon çelik malzeme genel endüstriyel uygulamalarda dayanıklılık ve ekonomik oluşundan dolayı tercih edilmektedir. Paslanmaz çelik malzeme ise korozif etkileri yüksek olabilecek akışkanlara karşı korozyon direnci sağlaması nedeniyle kimya vb. endüstrilerde tercih sebebidir. Ancak yüksek mukavemet ve sızdırmazlığın yanında yüksek sıcaklıklara dayanıklı ve hafif olma özelliklerinin bir arada olması istendiğinde geleneksel malzemelerin bu ihtiyacı karşılayamadığı görülmektedir.

Son yıllarda teknolojinin gelişmesiyle, özelliklerinde bir veya daha fazla kademeli değişim gösteren bileşenlere yönelik malzemelerin sentezlenmesi mümkün hale gelmiştir. Bileşenleri homojen olmayan bu kompozit malzemeler literatürde Fonksiyonel Dereceli Malzemeler (FDM) olarak adlandırıldı. Bu tip bileşimlerde malzeme özellikleri geometriye de bağlı olarak malzemenin eksenleri boyunca değişiklik gösterir. Bu tip bileşimlerde özel ihtiyaca uygun endüstriyel malzemenin üretilmesi mümkün olmaktadır. Ancak bu malzemelerin üretimleri oldukça maliyetlidir. Bu sebeple, farklı malzeme bileşenleri içeren ve homojen malzemelere göre daha hafif basınçlı kapların üretilmeden önce aşınmaya karşı direncini analiz etmek için gerilme analizlerinin incelenmesi gerekmektedir.

1.2 Literatür Özeti

Son yıllarda, kompozit ve fonksiyonel dereceli basınçlı kaplar üzerine çok fazla çalışma yapılmıştır. Homojen malzemelere göre daha hafif, aşınmalara ve çevre koşullarına daha dayanıklı malzeme ihtiyacı bu alandaki çalışmaları fonksiyonel dereceli malzemeler üzerine yoğunlaştırmıştır. Bunlardan bazıları kronolojik sıralamaya göre aşağıda verilmiştir.

Horgan ve Chan [1], fonksiyonel derecelendirilmiş izotropik doğrusal elastik malzemeler için basınçlı içi boş silindir ve diski incelemiştir. Basınçlı homojen izotropik içi boş dairesel silindir veya disk için klasik Lamé problemlerinin benzeri dikkate alınmıştır. Poisson oranı hariç malzeme özelliklerinin radyal yönde değiştiği varsayılmıştır. Düzgün iç ve/veya dış basınca maruz bırakılmış doğrusal elastik

izotropik içi boş dairesel silindir ve disklerde, fonksiyonel derecelendirilmiş malzemenin gerilmeler üzerine etkileri araştırılmıştır. Homojen olmayan silindirin veya diskin stres tepkisinin homojen cisminkinden önemli ölçüde farklı olduğu gösterilmiştir.

Tutuncu ve Öztürk [2] fonksiyonel olarak derecelendirilmiş basınçlı kaplardaki gerilmeler için kesin çözümü araştırmışlardır. Sadece iç basınca maruz bırakılmış fonksiyonel derecelendirilmiş silindirik ve küresel kaplardaki gerilmeler ve yer değiştirmeler için kapalı form çözümleri, sonsuz küçük elastisite teorisi kullanılarak elde etmişlerdir. Basit bir kuvvet kuralına göre malzeme sertliğinin duvar kalınlığı boyunca değiştiği ve Poisson oranının sabit olduğu varsayılmıştır. Keyfi seçilen homojensizlik sabitlerine bağlı gerilim dağılımları homojen durumla karşılaştırılarak grafikler halinde sunulmuştur. İç yüzeye yakın yerlerde daha yüksek sertliğe sahip olan malzeme seçildiğinde, uygulanan basıncı daha iyi taşıyacağı ve dolayısı ile duvar kalınlığı boyunca gerilmelerin azalacağı ifade edilmiştir. Bu çalışmada sunulan homojensizlik sabitinin, gerilme dağılımlarının özel uygulamalara göre uyarlanabilmesi açısından yararlı bir parametre olduğu gözlemlenmiştir.

You vd. [3], içten basınca maruz bırakılmış kalın cidarlı fonksiyonel olarak derecelendirilmiş küresel basınçlı kapların elastik analizi için analitik bir yöntem sunmuşlardır. Biri kabın iç ve dış yüzeylerine yakın iki homojen katmandan ve biri ortada işlevsel olarak derecelendirilmiş katmandan oluşan, ve diğeri ise yalnızca işlevsel olarak derecelendirilmiş malzemelerden oluşan iki tür basınçlı kap dikkate alınmıştır. Üç farklı tabakadan oluşan kaplardaki deformasyon ve gerilmeler üzerinde dış tabakanın Young modülü ile orta tabakanın Young modülü ve geometrik büyüklüğünün etkileri incelenmiştir. Fonksiyonel olarak derecelendirilmiş malzemedan oluşan basınçlı kaplarda neredeyse sabit bir çevresel gerilim elde etmek için bir yöntem araştırılmıştır. Önerilen yaklaşımı sayısal yöntemle karşılaştırarak, çok hızlı yakınsadığını ve iyi bir doğruluğa sahip olduğunu göstermişlerdir.

Dai vd. [4], düzgün bir manyetik alana yerleştirilen ve iç basınca maruz kalan fonksiyonel derecelendirilmiş silindirik ve küresel kapların manyetoelastik davranışa yönelik analitik çözüm sunulmuştur. Fonksiyonel derecelendirilmiş silindir ve küresel kaplardaki deplasman, gerilme ve manyetik alan vektörünün pertürbasyonu için analitik

çözümler manyetoelastitenin sonsuz küçük teorisi kullanılarak elde edilmiştir. Malzeme sertliğinin ve manyetik geçirgenliğinin duvar kalınlığı boyunca kuvvet kuralına göre değiştiği ve Poisson oranının sabit olduğu varsayılmıştır. Homojensizlik sabite bağlı olarak elde edilen gerilme ve manyetik alan vektörü dağılımları homojen malzemeli basınçlı kaplarla karşılaştırılmıştır. Bu çalışmada kullanılan homojensizlik sabitleri, gerilme ve manyetik alan vektör dağılımlarındaki bozunmaları göstermek için rasgele seçilmiştir. Homojensizlik sabitlerinin, manyetik alan vektör dağılımındaki gerilmeler ve bozulmaları kontrol etmek açısından yararlı bir parametre olduğu ifade edilmiştir.

You vd. [5], iç basınca maruz bırakılmış fonksiyonel olarak derecelendirilmiş kalın cidarlı silindirik kaplardaki akma defarmasyonları ve gerilmelerini incelenmişlerdir. Norton yasasında yer alan malzeme parametrelerini radyal koordinatın fonksiyonları olarak alarak, gerilme oranı-gerilme ilişkileri, Norton yasası, deformasyon uyumluluk koşulu ve eksenel simetrik, düzlem gerilme problemlerinin denge denkleminde basit ve doğru bir yöntem geliştirmişlerdir. Önerilen yaklaşım ile kalın cidarlı silindirik kaplardaki gerilmeleri ve akma gerilme oranlarını hesaplamak için kullanılmıştır. Malzeme parametrelerinin radyal yön boyunca değişimlerinin kaplardaki gerilmeleri nasıl etkilediği incelenmiştir. Fonksiyonel olarak derecelendirilmiş malzemelerden yapılmış ve iç basınca maruz kalan kalın cidarlı silindirik kaplarda, bu parametrelerin özellikle çevresel ve eksenel yönlerdeki gerilmeleri büyük ölçüde etkilediği bulunmuştur.

Chen ve Lin [6] fonksiyonel olarak derecelendirilmiş malzemelerden yapılmış kalın silindirik ve küresel basınçlı kapların elastik analizini sunmuşlardır. Malzeme özelliklerinin radyal yönde üstel değiştiği varsayılmıştır. Sistemi modelleyen adi diferansiyel denklem Runge-Kutta yönteminin kullanıldığı sayısal bir entegrasyon kullanılarak çözülmüştür. Fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme özelliklerinin radyal yön boyunca gerilme dağılımları üzerine önemli bir etkiye sahip olduğu gösterilmiştir. Elde edilen sonuçların, makul bir gerilim dağılımına sahip fonksiyonel derecelendirilmiş malzemedan yapılmış bir basınçlı kap tasarımlarına yardımcı olacağı ifade edilmiştir.

Akis [7], fonksiyonel derecelendirilmiş küresel basınçlı kapların elastoplastik analizini sunmuştur. Tamamen elastik, kısmen plastik ve tamamen plastik gerilme durumları, küçük deformasyon teorisi kullanılarak analitik olarak çözülmüştür. Küresel basınçlı

kapların elastiklik modülü ile tek eksenli akma limitinin radyal yönde doğrusal olmayan bir şekilde değiştiği varsayılmıştır. Plastik model, Tresca'nın akma kriterine ve idael plastik malzeme davranışına dayandırılarak ele alınmıştır. Homojen küresel basınç kaplar için iç yüzeyin kritik olduğunu ve basıncın elastik sınırına ulaştığında iç yüzeyde akma başladığı belirtilmiştir. Ancak fonksiyonel derecelendirilmiş küresel basınçlı kaplar için plastik deformasyon; iç yüzeyde, dış yüzeyde, her iki yüzeyde aynı anda veya fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme parametrelerinin radyal değişimine bağlı olarak cidarın herhangi bir yerinde başlayabileceği gösterilmiştir. Farklı başlangıç akma modlarına karşılık gelen elastik sınır iç basınçları için analitik ifadeler türetilmiştir. Homojen bir küresel basınçlı kap durumundan farklı olarak, işlevsel derecelendirme parametrelerinin radyal değişimi nedeniyle farklı plastikleştirme modlarının meydana gelebileceğini göstermiştir. Ayrıca, tüm bu durumların kısmen plastik ve tamamen plastik tepkileri incelenmiştir.

Jahromi vd. [8], otofretaj kaplarındaki kalıntı gerilmeler için sistematik bir analiz sunmuşlardır. Fonksiyonel olarak derecelendirilmiş metal-seramik kompozitten yapılmış, otofretlenmiş kalın bir kaptaki kalıntı gerilmeleri incelemek için, değişken elastik ve plastik özelliklere sahip malzemeler için Değişken Malzeme Özelliği yönteminin bir uzantısını kullanmışlardır. Metal kabın, iç yarıçaptan dış yarıçapa doğru artan seramik hacim oranına sahip seramik parçacıklarla güçlendirilmesinin, otofretlenmiş bir kabın iç bölümündeki sıkıştırılmış kalıntı gerilmelerin büyüklüğünü artırdığı ve böylece kabın daha iyi yorulma ömrüne ve yük taşıma kapasitesine yol açabileceği gösterilmiştir. Kalın bir kapta seramik parçacık mukavemetinin ve mekansal dağılımının ve ayrıca otofretlenmiş basıncın indüklenen kalıntı gerilmeler üzerindeki rolünü vurgulamak için parametrik bir çalışma yapılmıştır. Otofretajlı kapların yorulma ömrü ve yük taşıma kapasitesi indüklenen kalıntı gerilmelere bağlı olduğundan, işlevsel olarak derecelendirilmiş malzemeler otofretajlı kapların performansını artırmak için yeni fırsatlar sağlayabileceği ifade edilmiştir.

Maleki vd. [9], farklı otofretaj basınçlara maruz kalan otofretajlı homojen küresel basınçlı kaplardaki artık gerilme dağılımlarını incelemişlerdir. Değişen malzeme özellikleri için Değişken Malzeme Özelliği yönteminin bir uzantısını kullanmışlardır.

Değişken Bauschinger etkisi dikkate alınarak, Değişken Malzeme Özelliği yöntemini hem yükleme hem de boşaltma sırasında gerçek malzeme davranışına dayalı küresel kapların analizleri için uygulanabilir hale getirmişlerdir. Sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak belirlenen kalıntı gerilimler, değişken malzeme özelliği sonuçlarıyla karşılaştırılmış ve basitleştirilmiş malzeme modellerinin kullanılmasının, özellikle kabın iç yüzeyine yakın çembersel kalıntı geriliminin tahmininde önemli hatalara neden olabileceği gösterilmiştir. Parametrik bir çalışma gerçekleştirilerek, istenen kalıntı gerilim durumunu oluşturmak için optimum otofretaj basıncı ve buna karşılık gelen otofretaj yüzdesi belirlenmiştir.

Dai vd. [10], mekanik yük ve elektriksel uyarım etkisi altındaki fonksiyonel derecelendirilmiş piezoelektrik içi boş silindirik ve küresel kaplardaki gerilme analizi analitik olarak sunulmuştur. Malzemenin mekanik, piezoelektrik ve dielektrik özelliklerinin radyal yönde aynı kuvvet kuralına göre değiştiği varsayılmıştır. Sonsuz küçük piezoelastisite teorisi kullanılarak içi boş küresel silindirik yapılardaki yer değiştirme, gerilimler ve elektrik potansiyeli için kapalı form çözümler elde edilmiştir. Bu çözümler kullanılarak, bileşenlerin hacimsel oranını, gözenekliliğin piezoelastik gerilmelerin ve elektrik potansiyeli üzerindeki etkisini anlamının yanında optimum silindirik ve küresel yapılar tasarlamayı amaçlamışlardır. Malzemelerin homojensizlik parametresinin farklı değerleri için sayısal örnekler ve grafikler sunularak bu katsayının önemi vurgulanmıştır. Homojensizlik parametresinin belirli değerlerinde piezoelastik tepkileri optimize edilebileceği ifade edilmiştir. Elektrik yüklerinin olduğu ve olmadığı durumlar incelendiğinde, sonuçlarda farklı karakteristiklerin oluştuğunu gözlemlemişlerdir. Farklı yük dağılımları kullanarak silindirik ve küresel yapılarda gerilme dağılımları ile elektrik potansiyelinin kontrol edilebileceğini göstermişlerdir. Sayısal sonuçlarda homojensizlik parametresinin gerilmeler ve elektrik potansiyeli üzerinde büyük etkisi olduğunu ve özel gereksinimli mühendislik tasarımında kullanılabilirliğini belirtmişlerdir.

Nejad vd. [11], iç ve dış cidarda sabit basınca maruz bırakılmış fonksiyonel olarak derecelendirilmiş izotropik dönen kalın cidarlı silindirik basınç kaplarındaki gerilmeleri, elastisite teorisi kullanarak radyal yönün bir fonksiyonu olarak elde etmişlerdir. Poisson

oranı hariç malzeme özelliklerinin silindirin yarıçapının bir kuvvet yasası fonksiyonuna bağlı olarak değiştiği varsayılmıştır. Navier denkleminin analitik çözümünü düzlem şekil değiştirme, düzlem gerilim ve kapalı uçlu silindir koşulları için elde etmişlerdir. Elastik modülünün farklı homojensizlik parametrelerinde, radyal yerdeğiştirme, radyal gerilim ve çevresel gerilim incelenmiştir. Radyal doğrultudaki gerilmelerin değişimini en aza indirecek ve malzemenin optimum kullanımını sağlayacak şekilde optimum bir homojensizlik değeri bulmanın mümkün olduğu ifade edilmiştir.

Sadeghian vd. [12], fonksiyonel derecelendirilmiş küresel basınçlı bir kaptaki elastik ve mükemmel plastik termal gerilme dağılımlarını ayrı ayrı ve birleştirilerek ele almışlardır. Analizde, Tresca akma kriteri ve küçük deformasyon teorisi kullanılmıştır. Poisson oranı hariç, elastik modülü, akma gerilimi, ısı iletim katsayısı ve ısı genleşme katsayısı içeren dört karakteristik faktör, yarıçapına bağlı olarak kuvvet kuralına göre değiştiği varsayılmıştır. Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemenin yapısı, basınç ve sıcaklığın kararlı durum dağılımı, plastik bölgenin yayılmasını ve büyümesini etkileyebileceği öngörülmüştür. Bu genelleştirilmiş homojen olmayan durumdaki homojen malzemelerin aksine, plastik bölgenin sürekli büyüyen alanının mutlaka içeride başlamadığı görülmüştür. Bu bağlamda plastik bölgenin artması ve büyümesinin içeride, dışarıda, radyal eksenin ortasında veya içeriden veya dışarıdan aynı anda başlayacağına dair farklı senaryolar düşünülebileceği ifade edilmiştir. Tüm kategorileri benzersiz bir çerçeveye sığdırmak için malzeme parametrelerinin akma modelini nasıl etkileyebileceğini gösteren bazı monografiler sunulmuştur.

Son vd. [13], yakıt hücreli araçlar için önceden ayarlanmış sarım desenine sahip bir Tip III hidrojen basınç kabının ofofretaj işlemi sonlu elemanlar analizini sunmuşlardır. Kesin bir sonlu elemanlar analizi için, kompozit katmanlar için katman bazlı modelleme tekniği kullanılmış; kubbe kısmındaki lifler için tam sarım açısını belirlemek üzere bir kontur fonksiyonu türetilmiş ve tam kompozit kalınlığı da dikkate alınmıştır. En uygun ofofretaj basıncını belirlemek için, basınçlı kap tasarımına ilişkin uluslararası düzenlemeler dikkate alınarak basınçlı kabın iç basıncına göre gerilim analizi yapılmıştır. Minimum gerilim oranı, kalıcı hacimsel genleşme ve oluşan kalıntı gerilim araştırılmış ve anizotropik kompozitlerin çeşitli arıza kriterlerinin uygulanmasıyla

basınçlı kabın minimum patlama basıncı altında arızası tahmin edilmiştir.

Kashkoli ve Nejad [14], malzemenin termo-akma tepkisinin Norton yasası tarafından yönetildiğini varsayarak, homojen kalın cidarlı silindirik basınç kaplarının zamana bağlı akma gerilmeleri ve yer değiştirmelerinin hesaplanması için analitik bir çözüm sunmuşlardır. İç ve dış cidarda sabit basınç uygulanmış, iç yüzeyde düzgün bir ısı akışı ve dış yüzeyde ise bir hava akımı olduğu varsayılmıştır. Analitik çözüm hem düzlemsel gerilme hem de düzlemsel gerilim koşulları için elde edilmiştir. Silindirdeki sıcaklık dağılımını elde etmek için kutupsal koordinatlardaki tek boyutlu problem için ısı iletim denklemini kullanılmıştır. Düzlemsel gerilme durumunda 10 saatlik akma sonrası gerilme dağılımına göre, hem radyal hem de çevresel gerilmelerin tüm silindir yarıçapı boyunca sıkıştırma yönünde olduğu gözlemlenmiştir. Düzlemsel gerilme durumunda 10 saatlik akma sonrası gerilme dağılımına göre, üç gerilimin de maksimum değeri sıfıra eşit bir zamandadır, başka bir deyişle üç gerilimin de zaman arttıkça azaldığı ifade edilmiştir.

Nejad ve Kashkoli [15], dönen kalın cidarlı fonksiyonel derecelendirilmiş silindirik basınçlı kaplar için zamana bağlı termoelastik akma tepkisini, Norton modelinde açıklandığı şekliyle basınç kaplar için araştırmışlardır. Sabit alınan Poisson oranı dışındaki malzeme özelliklerinin yarıçapa bağlı bir kuvvet kuralına göre değiştiği varsayılmıştır. Doğrusal elastik davranışa sahip malzemelerin çözümü için malzeme akma davranışı ve sıfıra eşit bir zamanda gerilmeler alınmıştır. Denge, gerilim-yer değiştirme ve şekil değiştirme-yer değiştirme denklemleri kullanılarak, yer değiştirme için bir diferansiyel denklem elde edilip sıfıra eşit bir zamandaki gerilimler analitik olarak elde edilmiştir. Çok eksenli formdaki Norton yasası kullanılarak, radyal yer değiştirme oranı elde edilmiş ve daha sonra düzlemsel gerilim ve düzlemsel gerilim koşulları için radyal, çevresel ve eksenel akma gerilim oranları hesaplanmıştır. İç yüzeyin düzgün bir akıya ve dış yüzeyin bir hava akımına maruz kaldığı varsayılarak, kutupsal koordinatlarda tek boyutlu problem için ısı iletim denklemini, silindirdeki sıcaklık dağılımını elde etmek için kullanılmıştır. Homojensizlik parametresinin farklı değerleri için akma gerilimleri, gerinimleri ve radyal yer değiştirmeler boyutsuz yarıçap ve zaman yönünde hesaplanmıştır. Homojenlik katsayılarının akma gerilimlerinin ve radyal yer değiştirme dağılımları üzerinde önemli bir etkiye sahip olduğu bulunmuştur.

Wang vd. [16], iç basınca ve termal yüke maruz bırakılmış fonksiyonel dereceli kaplamalı basınçlı kaptaki gerilim dağılımını hesaplamak için kapalı form bir analitik çözüm türetmişlerdir. Analitik çözümü doğrulamak için, sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak sayısal bir çözüm de oluşturulmuştur. Analitik çözümün sayısal çözümlerle iyi uyduğu bulunmuş ve fonksiyonel dereceli kaplamanın termomekanik özellikleri de ayrıntılı olarak tartışılmıştır. Farklı basınçlı kabın karşılaştırmalı analizi yapılarak, fonksiyonel dereceli kaplamanın iyi arayüz özelliği ve güçlü ısı direnci performansı gibi birçok avantajı olduğu gösterilmiştir. Elde edilen çözümün, yük taşıma kapasitesini iyileştirecek ve basınçlı kapların uygulama ortamını genişletecek fonksiyonel dereceli kaplamalı veya ince cidarlı yapılara sahip basınçlı kapların doğru hesaplanması ve bilimsel tasarımı için yararlı olacağı ifade edilmiştir.

Jabbari vd. [17], yüksek mertebeden kesme deformasyon teorisi ve çok katmanlı yöntem kullanarak, sıcaklık gradyanına ve iç düzensiz basınca maruz kalan değişken kalınlığa sahip fonksiyonel olarak derecelendirilmiş dönen kalın silindirik basınç kaplarının termoelastik analizi için yarı analitik bir çözüm sunmuşlardır. Dışbükey, doğrusal ve içbükey olmak üzere değişken kalınlıklı üç farklı silindirik kap dikkate alınmıştır. Poisson oranı hariç malzeme özelliklerinin, kabın aksenal yönünde kuvvet kuralına göre değiştiği varsayılmıştır. Değişken katsayılı diferansiyel denklem sistemi çok katmanlı yöntem ile çözülmüştür. Yüksek mertebeden yaklaşımların radyal ve aksenal yer değiştirmeler, von Mises gerilimi ve kesme gerilimi üzerindeki etkileri incelenmiştir. Mekanik ve termal yüklemenin, kalınlık profili tipinin ve gradyan indeksinin silindirik basınç kabının mekanik davranışı üzerindeki etkilerini incelemek için bazı sayısal çözümler yapılmıştır.

Mazarei vd. [18], iç yüzey düzgün bir ısı akışına ve dış yüzeyi ise bir hava akımına maruz bırakılmış kalın cidarlı fonksiyonel derecelendirilmiş küresel kapların termoelasto-plastik problemini çözmek için kapalı form bir analitik çözüm sunmuşlardır. Malzeme özelliklerindeki küçük değişiklikler nedeniyle Poisson oranı sabit tutulurken, diğer malzeme özelliklerinin bir kuvvet yasasına bağlı olarak değiştiği varsayılmıştır. Plastik model, mükemmel plastik malzeme davranışı varsayımı altında von Mises akma kriterine ve bununla ilişkili akış kurallarına dayandırılmıştır. Farklı homojensizlik para-

metreleri; sınır ısı akışı, yer değiştirme ve gerilmelerin radyal yöne göre dağılımını incelemek için kullanılmıştır. Isı akışı ve basıncın artırılmasının plastik bölgenin yayılması üzerindeki etkisi araştırılmıştır. Ayrıca, Poisson oranındaki değişimin kritik malzeme parametresinin değeri üzerindeki etkisi gösterilmiştir.

Almasi vd. [19], deformasyon gradyanının çarpımsal ayrıştırılmasını kullanarak, hem analitik hem de sayısal olarak hiperelastik kalın cidarlı silindirik bir basınç kabının termomekanik analizini sunmuşlardır. Deneylerle mükemmel uyumu ve sıkıştırılabilir ve özellikle sıkıştırılmaz malzemeler için üstel terimleri içermesi nedeniyle \exp - \exp enerji yoğunluk fonksiyonu, elastomerlerin hiperelastik tepkisini tahmin etmek için kullanılmıştır. Radyal ve eksenel gerilmelerin, çember gerilmesinden daha çok açısız hızdaki değişime duyarlı olduğu bulunmuştur. Ayrıca, eksenel gerilme değişiminin, eksenel ve çember gerilmeleri üzerinde en önemli etkiye sahip olduğu gözlemlenmiştir. Sabit bir eksenel gerilme için eksenel gerilmenin davranışı, değerinin birden büyük olup olmamasına bağlı olduğu, kabın iç yarıçapında ise çember gerilmesi, eksenel gerilmenin çeşitli değerleri için aynı davranışa sahip olduğu görülmüştür. Pozitif sıcaklık gradyanının dönen silindirde çekme radyal gerilimine ve basınç çember ve eksenel gerilimlerine yol açtığı ve sıcaklık gradyanındaki artışın tüm gerilim bileşenlerinde artışa yol açtığı sonucuna varılmıştır. Cidar kalınlığındaki radyal ve çember gerilimleri, termal eksenel gerilimden sıcaklık değişimine daha duyarlı olduğu ifade edilmiş. Açısız hızın artırılması silindiri daha dengesiz hale getirirken, kararlılığın eksenel gerilmenin birden büyük değerlerinde arttığı görülmüştür. Basınç kabının iç yarıçapındaki eksenel gerilim ne kadar fazlaysa, o kadar kararlı olduğu sonucuna varılmıştır.

Gharibi vd. [20], hem düzlem gerilme hem de düzlem gerinim koşulları altında dönen kalın cidarlı fonksiyonel derecelendirilmiş silindirik basınç kaplarının gerilme analizini sunmuşlardır. Poisson oranı hariç tüm malzeme özelliklerinin radyal yön boyunca üstel fonksiyonla değiştiği varsayılmıştır. İki boyutlu elastik teorilerin ilkesi kullanılarak Navier denklemi elde edilmiş ve bu denklemin kapalı form çözümü Frobenius yöntemi ile elde edilmiştir. Frobenius serisi yönteminin sonuçlarıyla karşılaştırma için bir sonlu eleman modeli geliştirilmiştir. Keyfi homojensizlik parametreleri değerleri için gerilme analizi yapılmıştır. Homojensizlik parametresinin, basınç altındaki silindirin mekanik

davranışları üzerinde büyük bir etkiye sahip olduğunu göstermişlerdir.

Sachdeva ve Padhee [21], fonksiyonel dereceli silindirlerin asimptotik analitik çözümünü Varyasyonel Asimptotik Yöntemini kullanarak elde etmişlerdir. Bu yöntemle, üç boyutlu bir elastikiyet problemi iki boyutlu doğrusal kesit problemi ve tek boyutlu giriş problemi olarak ayrılır. Hacim kesri değişkeni tarafından kontrol edilen radyal olarak homojen olmayan malzeme özelliklerinden oluşan silindirik kesitin değişken geometrisiyle başlayarak, üç boyutlu problem doğrusal olmayan geometriye rağmen analitik olarak formüle edilmiş ve kapalı form analitik çözümler elde edilmiştir. İç ve dış malzeme özelliklerinin, yarıçap değerlerinin ve malzeme bileşiminin değişim eğiliminin mekanik davranış üzerindeki etkisi vurgulanmıştır. Elde edilen analitik çözümlerin, herhangi bir fonksiyonel dereceli silindirin davranışını hızlı ve doğru bir şekilde analiz edebileceği ve değişken sınır koşulları, yükler, malzemeler ve geometrilere sahip herhangi bir statik ve dinamik problem için de kullanılabilmesi ifade edilmiştir.

Nematollahi vd. [22], kalın cidarlı dönen fonksiyonel derecelendirilmiş küresel bir basınçlı kap için termal ve mekanik yer değiştirmeler, gerilmeler ve gerilmelerin analitik bir çözümünü sunmuşlardır. Basınçlı kap, düzgün bir manyetik alan içinde aksel simetrik mekanik ve termal yüklemelere maruz bırakılmıştır. Malzeme özelliklerinin, kalınlık boyunca kuvvet kuralına göre değiştiği kabul edilmiştir. İkinci dereceden Navier denklemi, termal gerilmeler ve manyetik alandan kaynaklanan Lorentz kuvveti dikkate alınarak mekanik denge denkleminde türetilip, yer değiştirme, gerilmeler ve gerilmelerin dağılımları için Navier denkleminin kesin çözümü elde edilmiştir. Termal yüklemenin, manyetik alanın, homojensizlik parametresinin, iç basıncın ve açısal hızın fonksiyonel derecelendirilmiş küresel kabın manyeto-termo-elastik tepkisi üzerindeki etkisi tartışılmıştır. Bu parametrelerin radyal yer değiştirme, radyal ve çevresel gerilmeler ile radyal ve çevresel gerilmelerin dağılımları üzerinde dikkate değer etkilere sahip olduğu gözlemlenmiştir.

Temo ve Yarımabuç [23], fonksiyonel olarak derecelendirilmiş kalın içi boş silindirik ve küresel basınç kaplarının düzgün manyetik alan etkisi altındaki gerilme analizi incelemişlerdir. Basınçlı kaplar, iç yüzey saf metal ve dış yüzey saf seramik ol-

mak üzere, malzeme özellikleri ve manyetik geçirgenliğin radyal yönde üstel olarak derecelendirileceği şekilde tasarlanmıştır. Bu koşullar altında elde edilen değişken katsayılı diferansiyel denklem hem tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemi hem de pseudospektral Chebyshev yöntemi ile çözümlenerek karşılaştırma yapılmıştır. Farklı karışım ve düzgün manyetik alanın gerilmeler ve yer değiştirme dağılımı üzerindeki etkilerini incelemiştir.

Kacar [24], basınçlı ve dönen içi boş silindir ve küre ile ince disklerin düzlem elastikiyet denklemlerine farklı sınır ve yükleme koşulları altında kapalı form analitik çözümler sunmuştur. Malzeme özelliklerinin kuvvet kuralına göre derecelendirildiği varsayılmıştır. Gerilme ve yer değiştirme çözümleri elde edilmiş, iç ve dış basınçların yokluğunda sabit bir dönme hızının etkisi de ayrı ayrı incelenmiştir.

Eker vd. [25], iç basınca maruz bırakılmış kalın cidarlı fonksiyonel derecelendirilmiş bir silindirin elastik analizi incelenmiştir. Malzeme özelliklerinin kalınlık boyunca Mori-Tanaka şeması ile derecelendirildiği varsayılmıştır. Bu koşullar altında elde ettikleri iki noktalı düzensiz sınır değeri problemini pseudospektral Chebyshev yöntemi ile çözmüşlerdir. Keyfi olarak seçilen hacim kesri endeksi ile iç yarıçapın, gerilme ve yer değiştirme dağılımları üzerindeki etkisini incelemiştir.

Yarımpabuç ve Çalışkan [26], fonksiyonel olarak derecelendirilmiş dönen içi boş silindirik basınç kaplarının elastik analizi incelemiştir. Metal ve alüminyum karışımından kademeli olarak oluştuğu düşünülen içi boş silindirin malzeme özellikleri Halpin-Tsai şeması kullanılarak derecelendirilmiştir. Bu koşullar altında elde edilen değişken katsayılı sınır değer problemi pseudospektral Chebyshev yöntemi ile çözülmüştür. Radyal gerilmelerin düşük açısız hızlarda sadece sıkıştırma yönünde oluştuğu, açısız hız arttırıldığında iç duvara yakın bölgelerde sıkıştırma yönünde, diğer bölgelerde ise çekme yönünde oluştuğu görülmüştür. Düşük açısız hızlarda radyal gerilmenin iç duvarda maksimum değerini alırken, dönme hızı arttıkça orta nokta civarında maksimum değerini aldığı ifade edilmiştir. Ayrıca açısız hız arttıkça iç ve dış duvarlar arasındaki teğetsel gerilim oranlarında çok az fark olduğu, radyal yöndeki yer değiştirme değişiminin azalma eğiliminde olduğu, ancak dış cidarda radyal gerilmenin sıfır kabul edilmesinden dolayı duvarın orta noktalarındaki radyal gerilmelerin değerinin arttığı

sonucuna varılmıştır.

1.3 Çalışmanın Kapsamı

Bu çalışmada, sabit açısal bir hızla döndürüldüğü düşünülen fonksiyonel dereceli basınçlı silindirik ve küresel kapların elastik analizi ele alınmıştır. Elastik silindirik ve küresel kaplar üzerindeki tüm kuvvetlerin sıfıra eşit olduğu ve yer değiştirmelerin zamanın bir fonksiyonu olmadığı denge koşulları dikkate alınmıştır. İşlem kolaylığı için sabit alınan Poisson oranı dışındaki malzeme özelliklerinin radyal yönde karışım kuralı olarak da bilinen Voigt şeması ile derecelendirildiği varsayılmıştır. Bu koşullar altında elde edilen değişken katsayılı düzensiz adi diferansiyel denklem Kuvvet Seri Yöntemi ile analitik olarak çözülmüştür. Literatürde mevcut olan benzer bir problemin çözümü, bu çalışmada kullanılan kuvvet seri yöntemi ile çözümlenerek yöntemin doğruluğu gösterilmiştir. Rasgele seçilen metal-hafif metal malzeme çifti için farklı açısal döndürme hızlarında radyal yer değiştirmenin, radyal ve çembresel gerilmenin nasıl değiştiği grafikler üzerinde tartışılmıştır. Ayrıca, basıncın da etkisini göstermek için sabit açısal bir hızda farklı basınç değerleri için radyal deplasman, radyal ve çembresel gerilmeler grafik üzerinde incelenmiştir.

2. ARAŞTIRMA PROBLEMİ

Bu çalışmada, iç basınca ve döndürmeye maruz bırakılmış kalın cidarlı silindirik ve küresel basınçlı kaplar ele alınmıştır. Kalın içi boş kapların iç ve dış yarıçapları sırasıyla r_i ve r_0 olarak alınmıştır. Fonksiyonel dereceli malzeme özelliklerinin değişiminin Voigt homojenizasyonu ile yapıldığı ve radyal yönde değiştiği varsayılmıştır. Diğer malzeme modellerine göre nispeten daha basit olan Voigt modelinde; Young modülü (E_f), ve yoğunluk (ρ_f) gibi karışımın malzeme özellikleri

$$P_f = P_s V_s + P_a V_a \quad (2.1)$$

kuralına göre oluşturulmuştur. Burada P_f cidar boyunca malzeme özelliğini, P_s ve P_a sırasıyla katmanın iç ve dış yüzeylerinin malzeme özelliklerini temsil etmektedir. V_s metal ve V_a hafif metalin hacim kesir oranı olup

$$V_s + V_a = 1 \quad (2.2)$$

şekilde alınmıştır. Voigt modelindeki V_a hacim oranının aşağıdaki gibi basit bir kuvvet kuralına bağlı olduğu varsayılmıştır:

$$V_a = \left(\frac{r - r_i}{r_0 - r_i} \right)^s, \quad V_s = 1 - V_a. \quad (2.3)$$

Burada s hacim kesir indeksi olup yalnızca pozitif değerler alır. Bu modele göre Young modülü (E_f) ve yoğunluğun (ρ_f) malzeme özellikleri sırasıyla

$$E_f(r) = (E_a - E_s) \left(\frac{r - r_i}{r_0 - r_i} \right)^s + E_s \quad (2.4a)$$

$$\rho_f(r) = (\rho_a - \rho_s) \left(\frac{r - r_i}{r_0 - r_i} \right)^s + \rho_s \quad (2.4b)$$

şeklinde olup s ve a alt indisleri sırasıyla metal ve hafif metal malzemeyi göstermektedir. Bu çalışmada etkisinin az olduğu bilinen Poisson oranı (ν), çözümleri basitleştirmek için sabit kabul edilmiştir. Bu kapların iç yüzeyinin sabit bir basıncın etkisinde olduğu varsayılmıştır. Dolayısı ile radial gerilem için sınır koşulları

$$\sigma_r(r_i) = -P, \quad \sigma_r(r_0) = 0 \quad (2.5)$$

şeklinde yazılabilir. Burada σ_r radyal gerilmeyi, P ise iç yüzeydeki basıncı gösterir.

2.1 Silindirik Basıncılı Kap

Sabit bir açısız hız w etkisi altında metal ve hafif metal karışımından oluştuğu düşünölen işlevsel derecelendirilmiş kalın cidarlı silindir ele alınmıştır. Aksi-simetrik düzlemsel gerilme varsayımı altında, silindirik koordinattaki (r, θ) gerilme-gerinim ve gerinim-yer değıştirme denklemleri aşğıdaki şekilde verilebilir:

$$\sigma_r = C_{11}E_f(r)\varepsilon_r + C_{12}E_f(r)\varepsilon_\theta \quad (2.6a)$$

$$\sigma_\theta = C_{12}E_f(r)\varepsilon_r + C_{11}E_f(r)\varepsilon_\theta \quad (2.6b)$$

ve

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr} \quad (2.7a)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r} \quad (2.7b)$$

öyle ki

$$C_{11} = \frac{(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad C_{12} = \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (2.8)$$

şeklindedir. Elastik silindirik kap üzerindeki tüm kuvvetlerin sıfıra eşit olduğu ve yer değıştirmelerin zamanın bir fonksiyonu olmadığı denge koşulları altında sabit bir açısız hız ile döndürölme etkisindeki stres-denge denklemini ise

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \rho_f(r)w^2r^2 = 0 \quad (2.9)$$

biçimindedir. Burada, σ_r , σ_θ , ε_r , ε_θ ve u sırasıyla radyal gerilme, teğetsel gerilme, radyal gerinim, teğetsel gerinim ve deplasmanı göstermektedir. Gerilme-gerinim (2.6) ve gerinim-yer değıştirme (2.7) denklemleri stres-denge denkleminde (2.9) yerine yazılırsa, radyal deplasmana bağılı homojen olmayan adi diferansiyel denklem aşğıdaki şekilde elde edilir:

$$u'' + Q_c(r)u' + R_c(r)u = F_c(r) \quad (2.10)$$

Deplasmana bağılı sınır koşulları, korunum denklemleri (2.6)-(2.7) kullanılarak aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\left[C_{11}E_f(r)u' + C_{12}E_f(r)\frac{u}{r} \right]_{r=r_i} = -P \quad (2.11a)$$

$$\left[C_{11}E_f(r)u' + C_{12}E_f(r)\frac{u}{r} \right]_{r=r_0} = 0 \quad (2.11b)$$

burada ()' radyal yöndeki türevi ifade etmektedir.

2.2 Küresel Basınçlı Kap

Sabit bir açısal hız w etkisi altında metal ve hafif metal karışımından oluştuğu düşünölen işlevsel derecelendirilmiş kalın cidarlı küre ele alınmıştır. Aksi-simetrik düzlemsel gerilme varsayımı altında, küresel koordinattaki (r, θ, ϕ) gerilme-gerinim ve gerinim-yer değiştirme denklemleri aşağıdaki şekilde verilebilir;

$$\sigma_r = C_{11}E_f(r)\varepsilon_r + C_{12}E_f(r)\varepsilon_\theta + C_{12}E_f(r)\varepsilon_\phi \quad (2.12a)$$

$$\sigma_\theta = C_{12}E_f(r)\varepsilon_r + C_{11}E_f(r)\varepsilon_\theta + C_{12}E_f(r)\varepsilon_\phi \quad (2.12b)$$

ve

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr} \quad (2.13a)$$

$$\varepsilon_\theta = \varepsilon_\phi = \frac{u}{r} \quad (2.13b)$$

şekllindedir. Elastik küresel kap üzerindeki tüm kuvvetlerin sıfıra eşit olduğu ve yer değiştirmelerin zamanın bir fonksiyonu olmadığı denge koşulları altında sabit bir açısal hız ile döndürölme etkisindeki stres-denge denklemleri ise

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{2(\sigma_r - \sigma_\theta)}{r} + \rho_f(r)w^2r^2 = 0 \quad (2.14)$$

biçimindedir. Gerilme-gerinim (2.12) ve gerinim-yer değiştirme (2.13) denklemleri stres-denge denkleminde (2.14) yerine yazılırsa, radyal deplasmana bağılı homojen olmayan adi diferansiyel denklem aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$u'' + Q_s(r)u' + R_s(r)u = F_s(r) \quad (2.15)$$

Deplasmana bağlı sınır koşulları, korunum denklemleri (2.12)-(2.13) kullanılarak aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\left[C_{11}E_f(r)u' + 2C_{12}E_f(r)\frac{u}{r} \right]_{r=r_i} = -P \quad (2.16a)$$

$$\left[C_{11}E_f(r)u' + 2C_{12}E_f(r)\frac{u}{r} \right]_{r=r_0} = 0 \quad (2.16b)$$

burada ()' radyal yöndeki türevi ifade etmektedir.



2.3 Boyutsuzlaştırma

Silindirik ve küresel basınçlı kapların fonksiyonel derecelendirilmesi Voigt modeli ile yapıldığında, analitik olarak çözülmesi oldukça karmaşık bir adi diferansiyel denklem ile karşılaşılmaktadır. Her iki geometri için de deplasmana bağlı diferansiyel denklemler elde edilmeden önce, genelliği bozmadan aşağıda verilen boyutsuzlaştırma parametrelerini kullanılarak:

$$x = \frac{r - r_i}{r_0 - r_i}, \quad U = \frac{u}{r_0 - r_i}, \quad S_r = \frac{\sigma_r}{E_a - E_s}, \quad S_\theta = \frac{\sigma_\theta}{E_a - E_s}, \quad R = \frac{r_i}{r_0 - r_i} \quad (2.17)$$

denklemler boyutsuzlaştırılacaktır. Bu işlemler sırasında denklemlerin daha basit bir formda ifade edilebilmesi için,

$$E_N = \frac{E_s}{E_a - E_s}, \quad \rho_N = \frac{\rho_s}{\rho_a - \rho_s}, \quad M_{C_1} = \frac{\rho_a}{E_a - E_s}, \quad M_{C_2} = \frac{\rho_s}{E_a - E_s}, \quad n = \frac{\nu}{1 - \nu} \quad (2.18)$$

boyutsuz sabitleri kullanılmıştır.

2.3.1 Boyutsuz Silindirik Basınçlı Kap Denklemleri

Silindirik basınçlı kaplar için boyutsuzlaştırma denklemleri (2.17) ve boyutsuz sabitler (2.18) kullanılarak boyutsuz gerilme-yer değiştirme denklemleri (2.6),

$$S_r(x) = C_{11} [x^s + E_N] \frac{dU}{dx} + C_{12} [x^s + E_N] \frac{U(x)}{x + R} \quad (2.19a)$$

$$S_\theta(x) = C_{12} [x^s + E_N] \frac{dU}{dx} + C_{11} [x^s + E_N] \frac{U(x)}{x + R} \quad (2.19b)$$

ile boyutsuz denge denklemi,

$$\frac{dS_r}{dx} + \frac{S_r - S_\theta}{x + R} + [(M_{C_1} - M_{C_2}) x^s + M_{C_2}] (x + R)^2 w^2 (r_0 - r_i)^3 = 0 \quad (2.20)$$

şeklinde bulunur. Boyutsuz gerilme-yer değiştirme denklemleri (2.19) stres-denge denkleminde (2.20) yerine yazılırsa, boyutsuz radyal deplasmana bağlı lineer homojen adi diferansiyel denklem aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\frac{d^2U}{dx^2} + P_c(x) \frac{dU}{dx} + Q_c(x)U = F_c(x) \quad (2.21)$$

öyleki

$$P_c(x) = \frac{E_N + x^{s-1}(Rs + x + sx)}{(R+x)(E_N + x^s)} \quad (2.22a)$$

$$Q_c(x) = \frac{nsx^{s-1}}{(R+x)(E_N + x^s)} - \frac{1}{(R+x)^2} \quad (2.22b)$$

$$F_c(x) = \frac{BA3w^2(R+x)^2 [(x^s(M_{C_1} - M_{C_2}) + M_{C_2})]}{C_{11}(E_N + x^s)}. \quad (2.22c)$$

Deplasmana bağlı sınır koşullarının (2.11) boyutsuz formu

$$\left[\frac{dU}{dx} + n \frac{U}{x+R} \right]_{x=0} = - \frac{P}{C_{11}E_s} \quad (2.23a)$$

$$\left[\frac{dU}{dx} + n \frac{U}{x+R} \right]_{x=1} = 0 \quad (2.23b)$$

şeklinde bulunur.

2.3.2 Boyutsuz Küresel Basınçlı Kap Denklemleri

Küresel basınçlı kaplar için boyutsuzlaştırma denklemleri (2.17) ve boyutsuz sabitler (2.18) kullanılarak boyutsuz gerilme denklemleri (2.12),

$$S_r(x) = C_{11} [x^s + E_N] \frac{dU}{dx} + 2C_{12} [x^s + E_N] \frac{U(x)}{x+R} \quad (2.24a)$$

$$S_\theta(x) = C_{12} [x^s + E_N] \frac{dU}{dx} + (C_{11} + C_{12}) [x^s + E_N] \frac{U(x)}{x+R} \quad (2.24b)$$

ile boyutsuz denge denklemi,

$$\frac{dS_r}{dx} + \frac{2(S_r - S_\theta)}{x+R} + [(M_{C_1} - M_{C_2})x^s + M_{C_2}] (x+R)^2 w^2 (r_0 - r_i)^3 = 0 \quad (2.25)$$

şeklinde bulunur. Boyutsuz gerilme-yer değiştirme denklemleri (2.24) stres-denge denkleminde (2.25) yerine yazılırsa, boyutsuz radyal deplasmana bağlı lineer homojen adi diferansiyel denklem aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\frac{d^2U}{dx^2} + P_s(x) \frac{dU}{dx} + Q_s(x)U = F_s(x) \quad (2.26)$$

öyleki

$$P_s(x) = \frac{sx^{s-1}}{E_N + x^s} + \frac{2}{R+x} \quad (2.27a)$$

$$Q_s(x) = \frac{2n sx^{s-1}}{(R+x)(E_N + x^s)} - \frac{2}{(R+x)^2} \quad (2.27b)$$

$$F_s(x) = \frac{w^2(R+x)^2 [(M_{C_1} - M_{C_2})x^s + M_{C_2}]}{C_{11}(E_N + x^s)}. \quad (2.27c)$$

Deplasmana bağılı sınır koşullarının (2.16) boyutsuz formu

$$\left[\frac{dU}{dx} + 2n \frac{U}{x+R} \right]_{x=0} = -\frac{P}{C_{11}E_s} \quad (2.28a)$$

$$\left[\frac{dU}{dx} + 2n \frac{U}{x+R} \right]_{x=1} = 0 \quad (2.28b)$$

şeklinde bulunur.

3. KUVVET SERİ YÖNTEMİ

3.1 Diferansiyel Denklemlerin Seri Çözümleri

Güç serilerinin özellikleri sıradan diferansiyel denklemlerin büyük bir sınıfı, belirli bir aralıkta güç serileri ve ilişkili seriler cinsinden ifade edilebilen çözümlere sahiptir. Kuvvet serileri ile ilgili çözüm yöntemine geçmeden önce kuvvet serilerinin bazı özelliklerini inceleyelim [27]. Aşağıdaki seri,

$$A_0 + A_1(x - x_0) + \dots + A_n(x - x_0)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x - x_0)^n \quad (3.1)$$

bir kuvvet serisi olarak adlandırılır. Sonsuz uzunluktaki bu seri, x 'in limiti olan değerlerinde

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N A_n(x - x_0)^n \quad (3.2)$$

limiti ile tanımlanır ve bu tür x değerleri için serinin yakınsadığı söylenir. Bu çalışmada, kuvvet serisinde x değişkeni ile $A_0, A_1, A_2, A_3, \dots$ katsayılarının reel olduğu varsayılmıştır. Serinin x 'in hangi değerleri için yakınsadığını belirlerken genellikle "Oran Testi" kullanılır.

Tanım 3.1.1 Oran Testi, bir serinin yakınsak olup olmadığını belirlemede kullanılır. Serinin $(n + 1)$. teriminin n . terimine oranının mutlak değerine bakılarak kontrol yapılır.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L \quad (3.3)$$

olsun. Eğer,

- $L < 1$ ise a_n serisi mutlak yakınsak, dolayısı ile yakınsaktır.
- $L > 1$ ise a_n serisi iraksaktır.
- $L = 1$ ise bu test sonuç vermez.

Daha hassas bir testte, aynı oranın mutlak değeri $n \rightarrow \infty$ iken bir Φ sayısı ile sınırlıysa, $\Phi < 1$ olduğunda serinin yakınsak olduğu söylenebilir.

Kuvvet serisi (3.1) için oran testi uygulanırsa,

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{A_{n+1}(x-x_0)^{(n+1)}}{A_n(x-x_0)^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{A_{n+1}}{A_n} \right| |x-x_0| \quad (3.4)$$

olur. Burada $(n+1)$. terimin katsayısının n . terimin katsayısına oranı

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{A_{n+1}}{A_n} \right| \quad (3.5)$$

ile ifade edilirse,

$$L = R|x-x_0| \quad (3.6)$$

bulunur.

- Seri yakınsak ise ($L < 1$),

$$|x-x_0| < \frac{1}{R} \quad (3.7)$$

- Seri ıraksak ise ($L > 1$),

$$|x-x_0| > \frac{1}{R} \quad (3.8)$$

olur.

Serinin yakınsak ($L < 1$) olduğu durum ele alınsın. Eğer R değeri mevcut ve sonlu ise serinin yakınsaklık aralığı,

$$\left(x_0 - \frac{1}{R}, x_0 + \frac{1}{R} \right) \quad (3.9)$$

x_0 noktası etrafında simetrik olarak belirlenir öyleki aralık içinde seri yakınsar ve aralık dışında ise ıraksar. $1/R$ değeri ise yakınsaklık yarıçapı olarak adlandırılır.

NOT 1 Eğer R limiti 0 değerini alıyorsa ($R \rightarrow 0$), serinin yakınsaklık aralığının tüm reel sayılar olduğu söylenebilir. Aksine, eğer R limiti sonsuz değerini alıyorsa ($R \rightarrow \infty$), serinin sadece x_0 noktasında yakınsadığı söylenebilir.

Burada dikkat edilmesi gereken önemli bir nokta da aralığın uç noktalarında, $x = x_0 \pm L^{-1}$, serinin davranışı oran testiyle belirlenemez. Burada iki durum söz konusudur:

- Eğer bir uç noktada, serinin ardışık terimleri n 'nin yeterince büyük değerleri için işaret bakımından değişiyorsa, serinin ardışık terimler belli bir aşamadan sonra her zaman büyüklük olarak azalıp n 'inci terim sifira yaklaşıyorsa yakınsar, yaklaşmıyorsa seri iraksar.
- Eğer bir uç noktada, serinin ardışık terimleri sabit işaretliyse ve $(n + 1)$. terimin n . terime oranı

$$1 - \frac{k}{n} + \frac{\theta_n}{n^2} \quad (3.10)$$

formunda yazılabilir. Burada k , n 'den bağımsız ve θ_n ise $n \rightarrow \infty$ ile sınırlı ise, $k > 1$ için seri yakınsar ve $k \leq 1$ için ise seri iraksar. Bu testin, belirtilen formda bir ifade elde edilebildiği sürece $k = 1$ durumunda bile uygulanabilir olduğu görülür. Bu teste **Raabe's Testi** [28] denir.

Tanım 3.1.2 Raabe's Testi [28] aynı zamanda Gauss testi ile de ilişkilendirilir. Bu test θ_n/n^2 teriminin, yalnızca $p > 0$ ve θ_n 'in sınırlı olması şartıyla θ_n/n^{1+p} ile değiştirilebileceğini ifade eder ve daha da hassas değişiklikler mevcut olduğundan da bahseder.

Raabe's testinin daha iyi anlaşılabilmesi için α negatif olmayan bir tamsayı olmak üzere aşağıdaki şekilde örnek bir seri ele alınsın:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n](x-a)^n}{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3) \cdots (\alpha+n)} \quad (3.11)$$

Bu durumda, bu serinin $(n + 1)$. teriminin katsayısının n . teriminin katsayısına oranı alınır,

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{\alpha+n+1} \right| = 1 \quad (3.12)$$

bulunur. Dolayısıyla bu serinin yakınsaklık aralığı $|x - a| < 1$ ya da

$$a - 1 < x < a + 1 \quad (3.13)$$

ile verilir. $x = a - 1$ olduğunda, $n > -\alpha$ için ardışık terimlerin işaretleri değişir. Cebirsel işaretin dışında, n 'inci terim

$$\frac{n!}{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3) \cdots (\alpha+n)} = \frac{n! \Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+n+1)} \quad (3.14)$$

şeklinde yazılır.

NOT 2 Γ fonksiyonu alternatif olarak

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{x(x+1)(x+2) \cdots (x+n)} n^x = 1 \quad (3.15)$$

limit ile tanımlanır [27]. Dolayısı ile

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!n^x}{\Gamma(x+n+1)} = 1 \quad (3.16)$$

ifadesi de geçerlidir. Bu nedenle, Γ fonksiyonlarını içeren sınırlayıcı işlemlerde, $n \rightarrow \infty$ olduğunda, $\Gamma(x+n+1)$ ifadesi, $n!n^x$ yaklaşık değeri ile değiştirilebilir. Yani,

$$(n+x)! = \Gamma(x+n+1) \approx n!n^x, \quad n \rightarrow \infty. \quad (3.17)$$

olur.

Denklem (3.17) ışığında büyük n için, (3.14) oranı yaklaşık olarak $\Gamma(\alpha+1)n^{-\alpha}$ ile ifade edilebilir ve bu oran yalnızca $\alpha > 0$ olduğunda ve n arttıkça sifira yaklaşır.

Dolayısıyla seri $\alpha > 0$ ise $x = a - 1$ 'de yakınsar ve aksi taktirde $x = a - 1$ 'de ıraksar, $x = a + 1$ olduğunda, $n > -\alpha$ terimler sabit işaretlidir. Ardışık terimlerin oranı ise

$$\frac{n+1}{n+\alpha+1} = 1 - \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{n(n+\alpha+1)} \quad (3.18)$$

olur. Dolayısıyla Raabe's testine göre $\theta_n = [\alpha(\alpha+1)n]/(n+\alpha+1)$ olur. Bu seri de $\alpha > 1$ ise seri $x = a + 1$ 'de yakınsar aksi taktirde $x = a + 1$ 'de ıraksar.

3.2 Boyutsuz Silindirik Kapların Kuvvet Seri Yöntemi ile Çözümü

Sabit bir açışal hızla dönen basınçlı silindirik kapların boyutsuz deplasman denklemi

(2.21) ikinci bölümde

$$\frac{d^2U}{dx^2} + P_c(x) \frac{dU}{dx} + Q_c(x)U = Fc(x) \quad (3.19)$$

şeklinde elde edilmişti. Bu adi diferansiyel denklemin değişken katsayıları ise

$$P_c(x) = \frac{E_N x + x^{s+1} + s(R+x)x^s}{x(R+x)(E_N + x^s)} \quad (3.20a)$$

$$Q_c(x) = \frac{nsx^{s-1}}{(R+x)(E_N + x^s)} - \frac{1}{(R+x)^2} \quad (3.20b)$$

$$Fc(x) = \frac{w^2(R+x)^2 [(M_{C_1} + M_{C_2})x^s - M_{C_2}]}{C_{11}(E_N + x^s)}. \quad (3.20c)$$

ile verilmiştir. Bu adi diferansiyel denklemin değişken katsayıları $P_c(x)$ ve $Q_c(x)$, $x_0 = 0$ da analitik olduğu için bu denklem (3.19) kuvvet seri yöntemi ile çözülebilir. Kuvvet seri yaklaşımında,

$$U(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^k \quad (3.21)$$

alınırsa, deplasmanın türevleri

$$\frac{dU}{dx} = \sum_{k=1}^{\infty} k A_k x^{k-1} \quad (3.22a)$$

$$\frac{d^2U}{dx^2} = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) A_k x^{k-2} \quad (3.22b)$$

şeklinde bulunur. Burada, $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ sınır koşullarından hesaplanacak katsayıları ifade etmektedir. Bu ifadeler diferansiyel denklemde (3.19) yerine yazılırsa

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) A_k x^{k-2} + P_c(x) \sum_{k=1}^{\infty} k A_k x^{k-1} + Q_c(x) \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^k = F_c(x) \quad (3.23)$$

elde edilir. Bu denklemde gerekli düzenlemeler yapılırsa, polinomların eşitliğinden

$$A_2 = \frac{1}{2R^2} A_0 - \frac{1}{2R} A_1 - \frac{R^2 w^2 M_{C_2}}{2C_{11} E_N}$$

$$A_3 = -\frac{3E_N + 2nR^2}{6E_N R^3} A_0 + \left(\frac{1}{2R^2} - \frac{1}{3E_N} \right) A_1 - \frac{R^2 w^2 M_{C_2}}{6C_{11} E_N}$$

$$A_4 = \frac{6E_N + (3n-2)R^2}{12E_N R^4} A_0 + \frac{(3-2n)R^2 - 6E_N}{12E_N R^3} A_1 + \frac{(3R^2 + E_N(R^2 - 2))M_{C_2} w^2 - E_N R^2 M_{C_1} w^2}{12C_{11} E_N^2}$$

$$A_5 = \frac{12nR^4 - 30E_N^2 + E_N(11 - 16n)R^2}{60E_N^2R^5}A_0 + \frac{12R^4 + 30E_N^2 + E_N(11 - 16n)R^2}{60E_N^2R^4}A_1$$

$$+ \frac{((6 + 3n)R^2 + E_N(5R^2 + 6))M_{C_2}w^2 - 5E_NR^2M_{C_1}w^2}{60C_{11}E_N^2R}$$

$$A_6 = \frac{(8n^2 - 60n + 40)R^4 + 180E_N^2 + E_N(99n - 69)R^2}{360E_N^2R^6}A_0$$

$$+ \frac{(16n - 20)R^4 - 60E_N^2 + E_N(33 - 23n)R^2}{120E_N^2R^5}A_1$$

$$- \frac{(60R^4 + E_NR^2(20R^2 + 11n - 37) - 12E_N^2(R^2 - 3))M_{C_2}w^2 + 4E_NR^2(3E_N - 5R^2)M_{C_1}w^2}{360C_{11}E_N^3R^2}$$

$$A_7 = -\frac{E_N(26n^2 - 164n + 110)R^4 + 420E_N^3 + 5E_N^2(47n - 33)R^2 + 120nR^6}{840E_N^3R^7}A_0$$

$$+ \frac{E_N(20n^2 - 408n + 472)R^4 + 1260E_N^3 + 15E_N^2(33n - 47)R^2 - 360R^6}{2520E_N^3R^6}A_1$$

$$- \frac{(60(2n + 3)R^4 + 12E_N^2(R^2 - 21) + E_NR^2(151 - 89n + 150R^2 + 10nR^2))M_{C_2}w^2}{2520C_{11}E_N^3R^3}$$

$$+ \frac{2(6E_N + (75 + 15n)R^2)M_{C_1}E_NR^2w^2}{2520C_{11}E_N^3R^3}$$

⋮

şeklinde A_k katsayıları A_0 ve A_1 'e bağlı bulunur. Katsayıların iki farklı sabite bağlı olarak bulunması, ikinci mertebeden deplasmana bağlı adi diferansiyel denklemin iki lineer bağımsız çözümünün elde edildiğini gösterir. Dolayısı ile bu denklemin genel çözümü,

$$U(x) = U_1(x)A_0 + U_2(x)A_1 + U_p(x) \quad (3.24)$$

formundadır. Deplasmana bağlı sınır koşulları (2.23) kullanılarak A_0 ve A_1 katsayıları Mathematica paket programı kullanılarak bulunmuştur.

3.3 Boyutsuz Küresel Kapların Kuvvet Seri Yöntemi ile Çözümü

Sabit bir açısal hızla dönen basınçlı küresel kapların boyutsuz deplasman denklemi (2.26) ikinci bölümde

$$\frac{d^2U}{dx^2} + P_s(x)\frac{dU}{dx} + Q_s(x)U = F_s(x) \quad (3.25)$$

şeklinde elde edilmişti. Bu adi diferansiyel denklemin değişken katsayıları ise

$$P_s(x) = \frac{sx^{s-1}}{E_N + x^s} + \frac{2}{R+x} \quad (3.26a)$$

$$Q_s(x) = \frac{2n_s x^{s-1}}{(R+x)(E_N + x^s)} - \frac{2}{(R+x)^2} \quad (3.26b)$$

$$F_s(x) = \frac{w^2(R+x)^2 [(M_{C_1} - M_{C_2})x^s + M_{C_2}]}{C_{11}(E_N + x^s)}. \quad (3.26c)$$

ile verilmiştir. Bu adi diferansiyel denklemin değişken katsayıları $P_s(x)$ ve $Q_s(x)$, $x_0 = 0$ da analitik olduğu için bu denklem (3.25) kuvvet seri yöntemi ile çözülebilir. Kuvvet seri yaklaşımında,

$$U(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^k \quad (3.27)$$

alınırsa, deplasmanın türevleri

$$\frac{dU}{dx} = \sum_{k=1}^{\infty} k A_k x^{k-1} \quad (3.28a)$$

$$\frac{d^2U}{dx^2} = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) A_k x^{k-2} \quad (3.28b)$$

şeklinde bulunur. Burada, $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ sınır koşullarından hesaplanacak katsayıları ifade etmektedir. Bu ifadeler diferansiyel denklemde (3.25) yerine yazılırsa

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) A_k x^{k-2} + P_s(x) \sum_{k=1}^{\infty} k A_k x^{k-1} + Q_s(x) \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^k = F_s(x) \quad (3.29)$$

elde edilir. Bu denklemde gerekli düzenlemeler yapılırsa, polinomların eşitliğinden

$$A_2 = \frac{1}{2R^2}A_0 - \frac{1}{2R}A_1 - \frac{R^2w^2M_{C_2}}{2C_{11}E_N}$$

$$A_3 = -\frac{3E_N + 2nR^2}{6E_NR^3}A_0 + \left(\frac{1}{2R^2} - \frac{1}{3E_N}\right)A_1 - \frac{R^2w^2M_{C_2}}{6C_{11}E_N}$$

$$A_4 = \frac{6E_N + (3n-2)R^2}{12E_NR^4}A_0 + \frac{(3-2n)R^2 - 6E_N}{12E_NR^3}A_1 + \frac{(3R^2 + E_N(R^2 - 2))M_{C_2}w^2 - E_NR^2M_{C_1}w^2}{12C_{11}E_N^2}$$

$$A_5 = \frac{12nR^4 - 30E_N^2 + E_N(11 - 16n)R^2}{60E_N^2R^5}A_0 + \frac{12R^4 + 30E_N^2 + E_N(11 - 16n)R^2}{60E_N^2R^4}A_1 + \frac{((6+3n)R^2 + E_N(5R^2 + 6))M_{C_2}w^2 - 5E_NR^2M_{C_1}w^2}{60C_{11}E_N^2R}$$

$$A_6 = \frac{(8n^2 - 60n + 40)R^4 + 180E_N^2 + E_N(99n - 69)R^2}{360E_N^2R^6}A_0 + \frac{(16n - 20)R^4 - 60E_N^2 + E_N(33 - 23n)R^2}{120E_N^2R^5}A_1 - \frac{(60R^4 + E_NR^2(20R^2 + 11n - 37) - 12E_N^2(R^2 - 3))M_{C_2}w^2 + 4E_NR^2(3E_N - 5R^2)M_{C_1}w^2}{360C_{11}E_N^3R^2}$$

$$A_7 = -\frac{E_N(26n^2 - 164n + 110)R^4 + 420E_N^3 + 5E_N^2(47n - 33)R^2 + 120nR^6}{840E_N^3R^7}A_0 + \frac{E_N(20n^2 - 408n + 472)R^4 + 1260E_N^3 + 15E_N^2(33n - 47)R^2 - 360R^6}{2520E_N^3R^6}A_1 - \frac{(60(2n+3)R^4 + 12E_N^2(R^2 - 21) + E_NR^2(151 - 89n + 150R^2 + 10nR^2))M_{C_2}w^2}{2520C_{11}E_N^3R^3} + \frac{2(6E_N + (75 + 15n)R^2)M_{C_1}E_NR^2w^2}{2520C_{11}E_N^3R^3}$$

⋮

şeklinde A_k katsayıları A_0 ve A_1 'e bağlı bulunur. Katsayıların iki farklı sabite bağlı olarak bulunması, ikinci mertebeden deplasmana bağlı adi diferansiyel denklemin iki

lineer bağımsız çözümünün elde edildiğini gösterir. Dolayısı ile bu denklemin genel çözümü,

$$U(x) = U_1(x)A_0 + U_2(x)A_1 + U_p(x) \quad (3.30)$$

formundadır. Deplasmana bağlı sınır koşulları (2.28) kullanılarak A_0 ve A_1 katsayıları Mathematica paket programı kullanılarak bulunmuştur.



4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu çalışmada, sabit açısal bir hızla döndürüldüğü düşünülen fonksiyonel dereceli basınçlı silindirik ve küresel kapların elastik analizi ele alınmıştır. Elastik modülü ve yoğunluk gibi malzeme özelliklerinin Voigt şeması ile derecelendirildiği varsayılmış, diğer malzeme özelliklerine göre değişimi nispeten daha az olduğu bilinen [29] Poisson oranı işlem kolaylığı için sabit alınmıştır. Silindirik ve basınçlı kaplar, paslanmaz çelik ve alüminyum karışımından radyal yönde derecelendirilmiştir. Homojen malzemeye göre daha hafif olan çelik-alüminyum karışımının malzeme özellikleri Çizelge 4.1 'de verilmiştir.

Çizelge 4.1 Malzemelerin özellikleri (Metal-Metal) [26].

<i>Malzeme</i>	<i>E (GPa)</i>	<i>ρ kg/m³</i>	<i>ν</i>
SUS304 (Paslanmaz Çelik)	201.04	7800	0.3
Alüminyum (Al)	70	2700	0.3

Bu koşullar altında elde edilen değişken katsayılı düzensiz adi diferansiyel denklem Kuvvet Seri Yöntemi ile analitik olarak çözülmüştür. Literatürde mevcut olan benzer bir problemin çözümü, bu çalışmada kullanılan kuvvet seri yöntemi ile çözümlenerek yöntemin doğruluğu gösterilmiştir.

Fonksiyonel dereceli silindir ve kürenin basit derecelendirme modelleri (kuvvet kuralı ve exponansiyel derecelendirme) için analitik çözümleri literatürde verilmiştir, bkz. [15, 24]. Bu çalışmada kullanılan Kuvvet Seri Yöntemini (KSY) test etmek için, literatürde kuvvet kuralına göre derecelendirilmiş silindirin analizi kuvvet seri yöntemi için elde edilmiş ve Nejad ve Rahimi'nin [15] çalışmasında verilen analitik çözümle karşılaştırılması Çizelge 4.2'de verilmiştir. Bu karşılaştırmanın yapılabilmesi için, elastik modülü ve yoğunluğun kuvvet kuralına göre değiştiği ($E = E_i r^\beta$, $\rho = \rho_i r^\alpha$) ve Poisson oranının ise ($\nu = 0.33$) sabit olduğu kabul edilmiş, homojensizlik parametreleri $\beta = 2$ ve $\alpha = 1$ alınmıştır. Silindirin iç ve dış yarıçapı sırasıyla $a = 1.5m$ ve $b = 1.7m$ alınmıştır. Kuvvet kuralında verilen malzeme özellikleri $E_i = 200 GPa$ ve

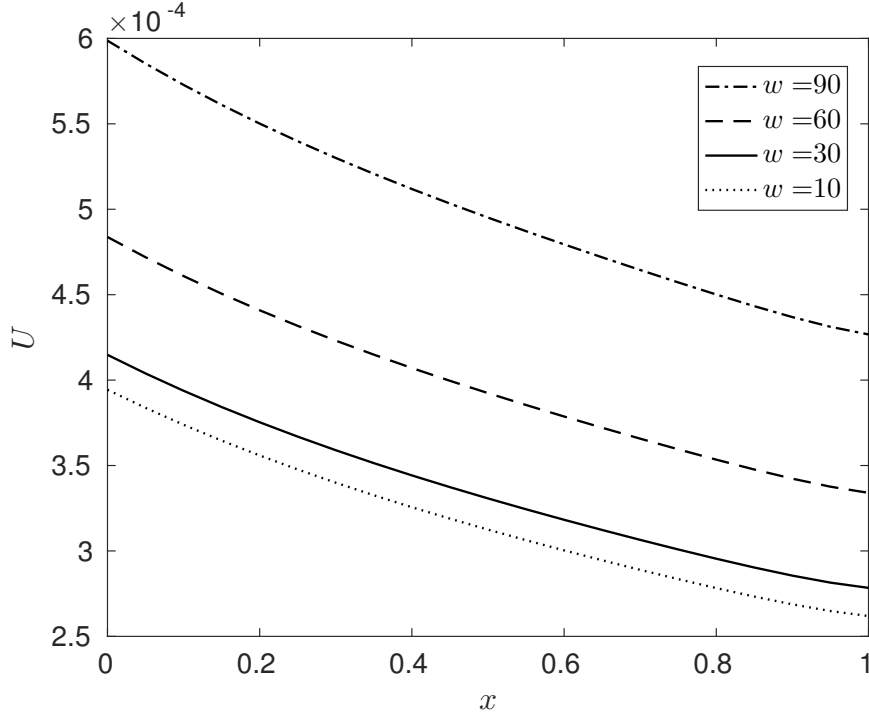
$\rho_i = 7860 \text{ kg/m}^3$, sabit açısız hız $w = 15 \text{ rad/sn}$ ve iç basınç ise $P = 30 \text{ MPa}$ olarak alınmıştır.

Çizelge 4.2 Sabit bir açısız hızla dönen fonksiyonel derecelendirilmiş basınçlı silindirik kabın yer değıştirme, radyal ve teğetsel gerilmelerinin kalınlık boyunca Nejad ve Rahimi [15] ile mukayesesi.

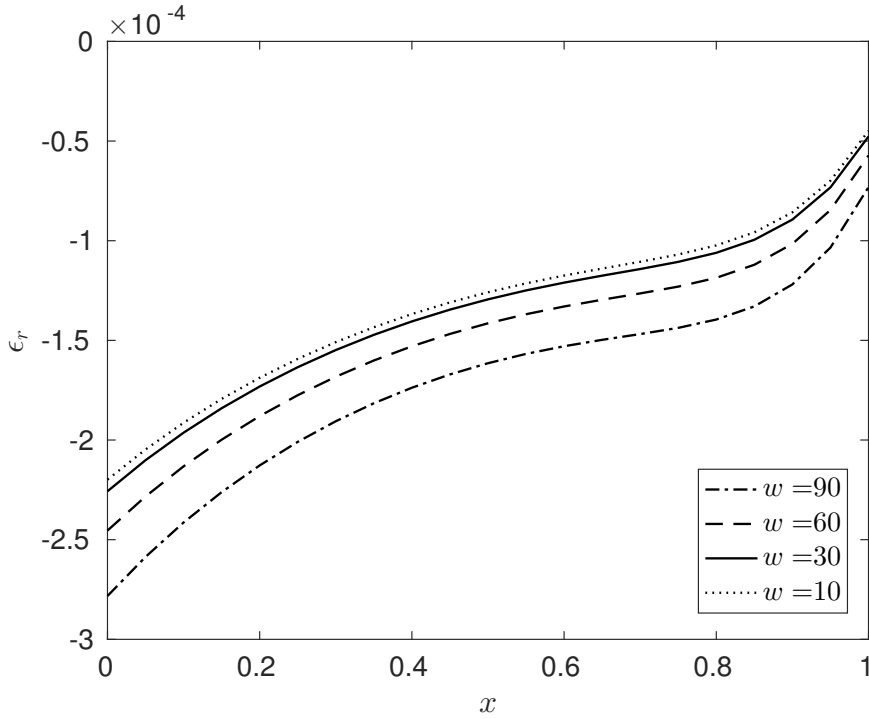
r	u		σ_r/P		σ_θ/P	
	KSY	Analitik [15]	KSY	Analitik [15]	KSY	Analitik [15]
0.0000	0.000701807	0.000701807	-1.000000000	-1.000000000	7.383201315	7.383200000
0.1000	0.000696406	0.000696436	-0.893067000	-0.893310496	7.479447958	7.479460000
0.2000	0.000691212	0.000691268	-0.787822000	-0.788292042	7.575635219	7.575650000
0.3000	0.000686214	0.000686227	-0.684203000	-0.684309367	7.671784987	7.671790000
0.4000	0.000681404	0.000681484	-0.582155000	-0.582846546	7.767834415	7.767860000
0.5000	0.000676770	0.000676770	-0.481623000	-0.481622582	7.863874331	7.863870000
0.6000	0.000672305	0.000672379	-0.382555000	-0.383202941	7.959789882	7.959820000
0.7000	0.000668001	0.000668011	-0.284905000	-0.284994356	8.055695059	8.055700000
0.8000	0.000663849	0.000663892	-0.188624000	-0.189012317	8.151490789	8.151510000
0.9000	0.000659843	0.000659863	-0.093669900	-0.093854303	8.247242473	8.247250000
1.0000	0.000655975	0.000655975	0.000000000	0.000000000	8.342923415	8.342920000

Öncelikle, fonksiyonel dereceli silindirik ve küresel basınçlı kaplar üzerinde döndürmenin etkisini görebilmek için sayısal deneyler gerçekleştirilmiştir. Bunun için basınç sabit ($P = 30 \text{ MPa}$) alınıp farklı açısız hızların ($w = 10, 30, 60, 90 \text{ rad/s}$) seçilerek; Şekil 4.1’de silindirik kaplar için deplasman ve gerinim, Şekil 4.3’de silindirik kaplar için radyal ve teğetsel gerilme, Şekil 4.2’de küresel kaplar için deplasman ve gerinim ve Şekil 4.4’de küresel kaplar için radyal ve teğetsel gerilme değışimleri grafiksel olarak sunulmuştur. Açısız hız arttırıldıkça deplasmanın arttığı (Şekil 4.1(a)) ve basıncın iç cidarda olmasından kaynaklı olarak iç cidardaki yer değıştirmenin daha fazla olduğu gözlemlenmiştir. Şekil 4.1(b)’de açısız hızın arttırılmasıyla gerinimin sıkıştırma yönünde arttığı görülmüş, silindirin iç cidarlarındaki değışimin dış cidardan daha az olduğu dolayısıyla iç basıncın etkisinin cidara yayıldığı söylenebilir. Küresel basınçlı kapların deplasman dağılımı silindirik kaplardakine benzer karakteristik gösterirken, geometrisinden dolayı deplasman (Şekil 4.2(a)) silindirik kaplardakinden daha azdır. Şekil 4.2(b)’de açısız hızın arttırılmasıyla gerinimin sıkıştırma yönünde silindire göre daha az arttığı görülmüş, kürenin iç cidarlarındaki değışimin dış cidardan daha az olduğu

dolayısıyla silindirik kaplardaki gibi iç basıncın etkisinin cidara yayıldığı söylenebilir.

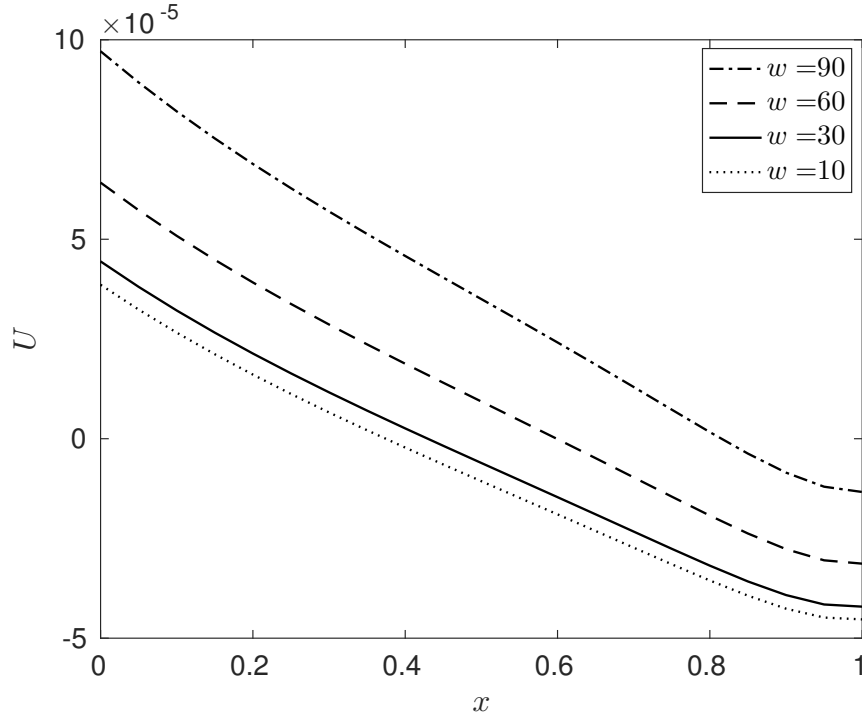


(a) Deplasman dağılımı.

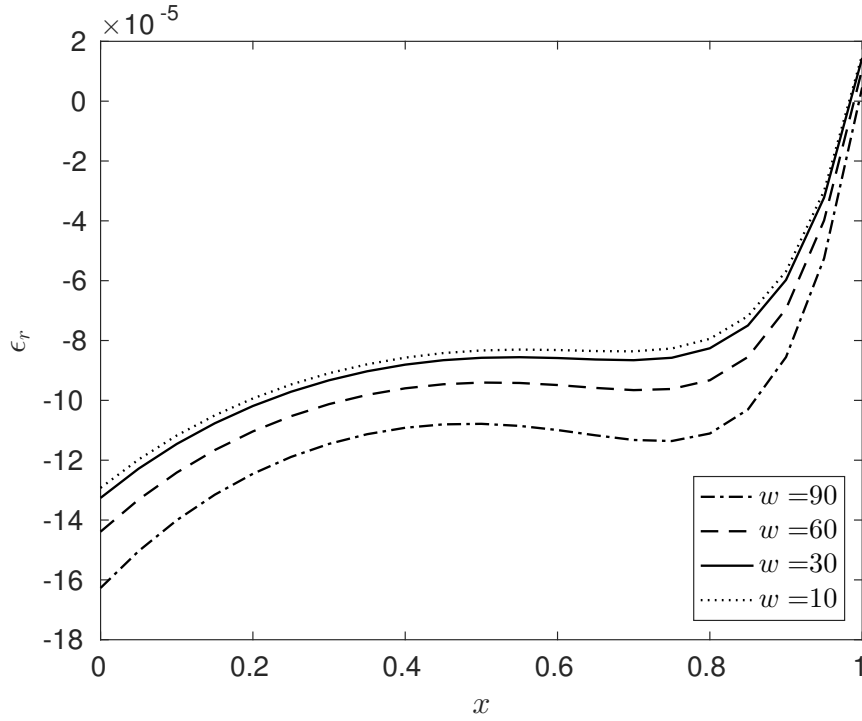


(b) Gerinim (deplasman değişimi) dağılımı.

Şekil 4.1 Silindirik kaplarda farklı döndürme hızları için deplasman ve gerinim dağılımları, $P = 30 \text{ MPa}$.

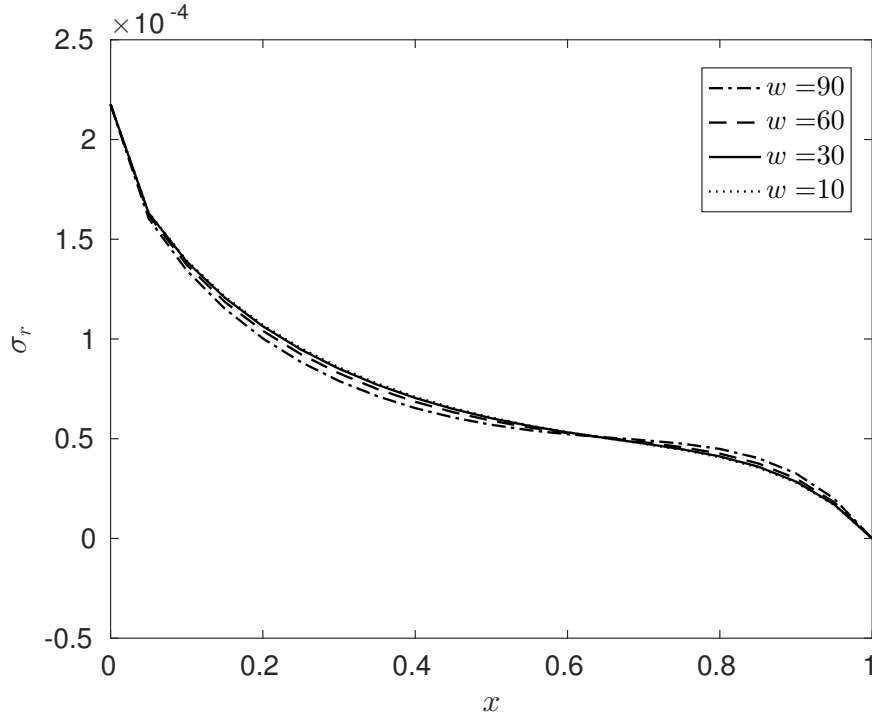


(a) Deplasman dağılımı.

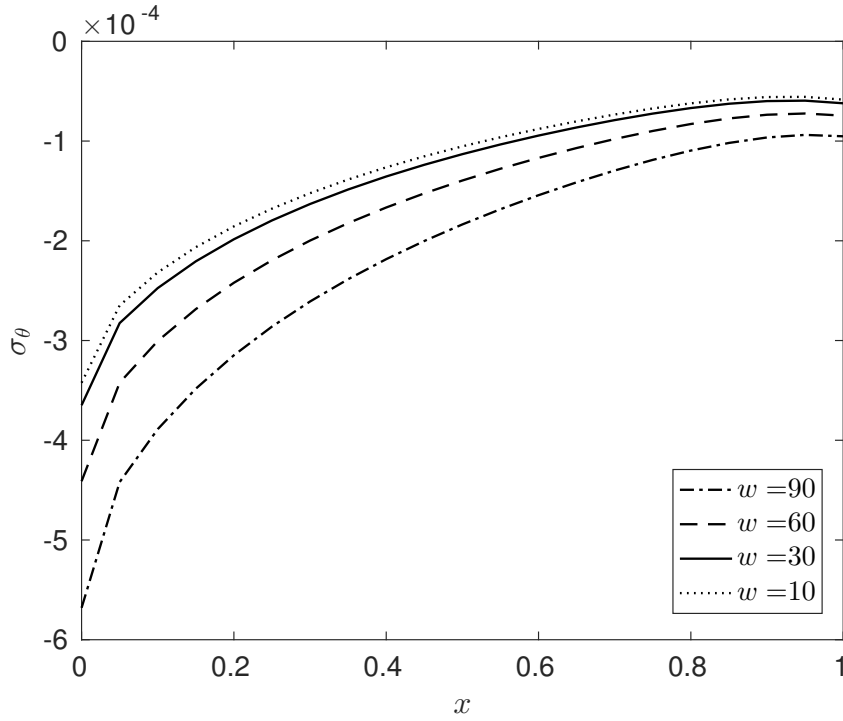


(b) Gerinim (deplasman değişimi) dağılımı.

Şekil 4.2 Küresel kaplarda farklı döndürme hızları için deplasman ve gerinim dağılımları, $P = 30 \text{ MPa}$.

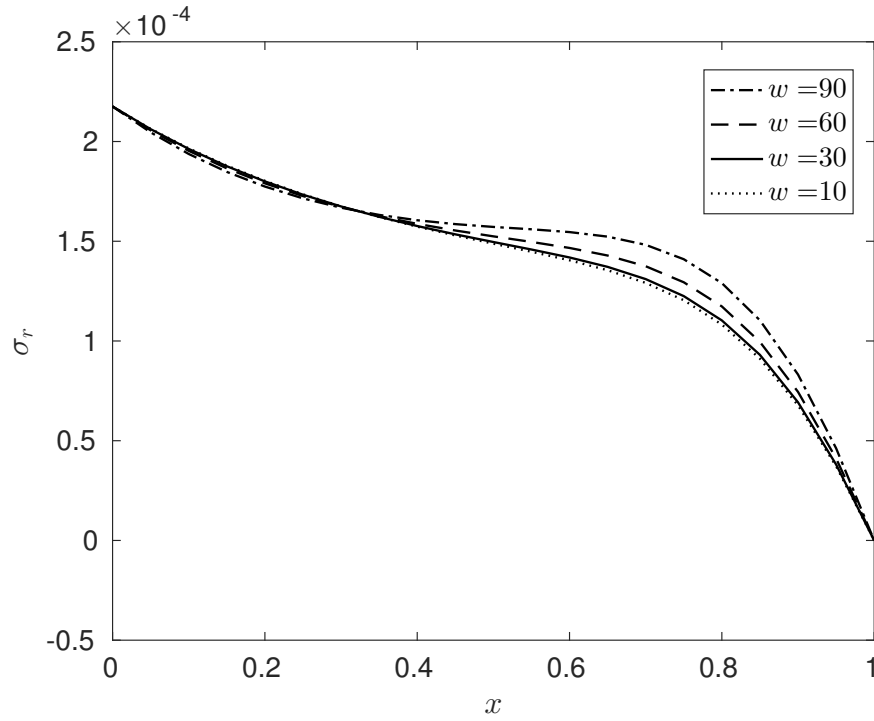


(a) Radyal gerilme dağılımı.

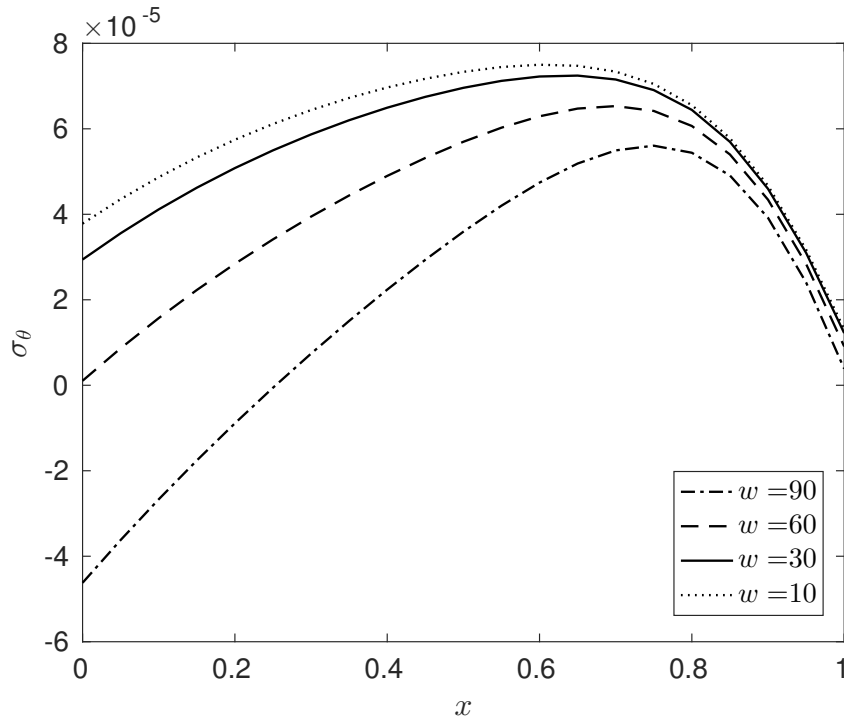


(b) Teğetsel gerilme dağılımı.

Şekil 4.3 Silindirik kaplarda farklı döndürme hızları için radyal ve teğetsel gerilme dağılımları, $P = 30 \text{ MPa}$.



(a) Radyal gerilme dağılımı.



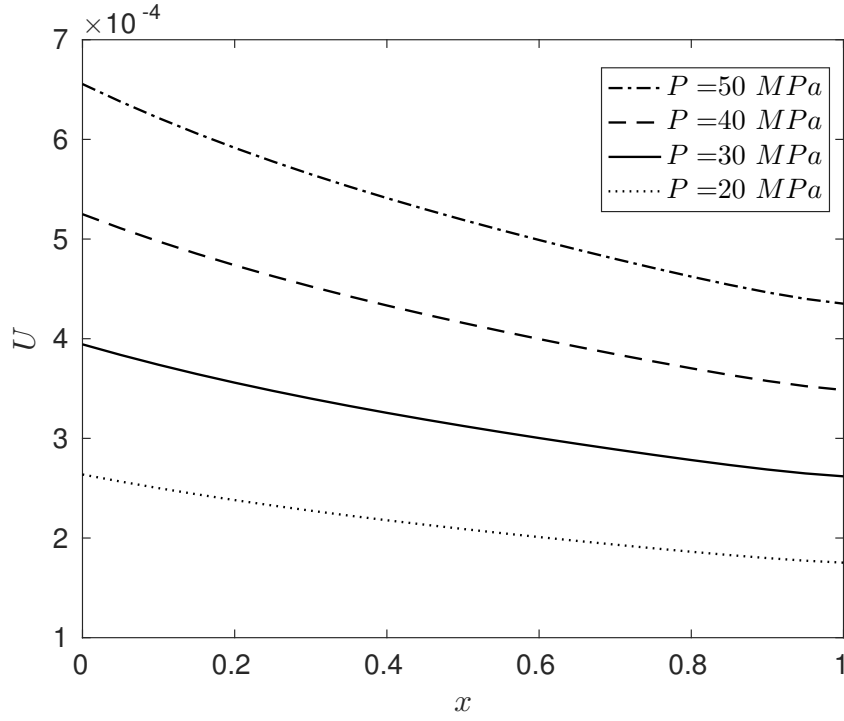
(b) Teğetsel gerilme dağılımı.

Şekil 4.4 Küresel kaplarda farklı döndürme hızları için radyal ve teğetsel gerilme dağılımları, $P = 30 \text{ MPa}$.

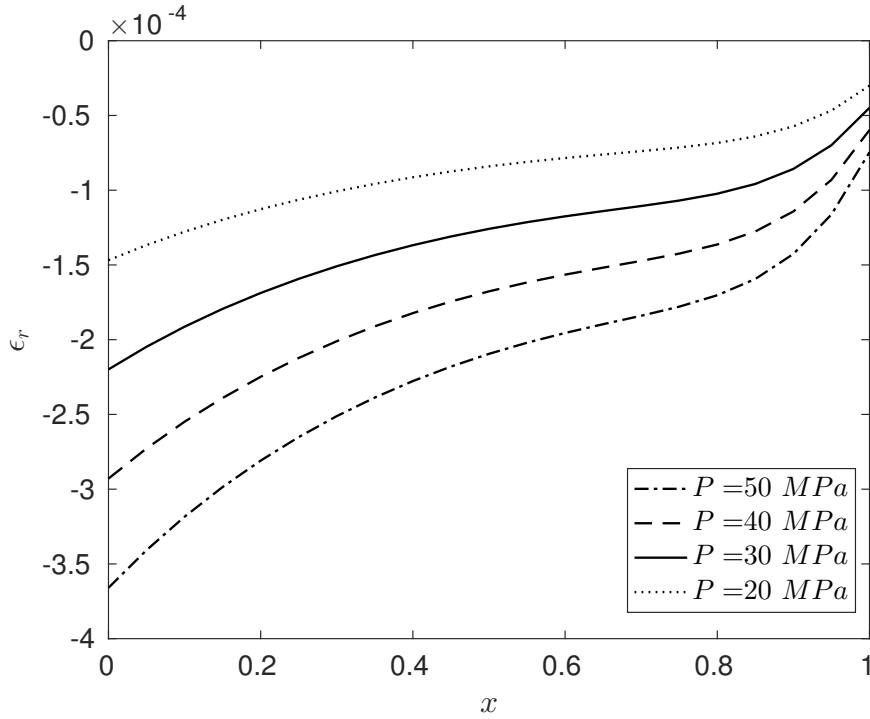
Şekil 4.3(a)'da dönel fonksiyonel dereceli silindirde açısal hız arttırıldığında, radyal gerilmenin iç cidarla cidarın orta noktası arasında değerinde küçük bir azalma, dış cidara doğru da küçük bir artış görülmüştür. Dolayısı ile radyal gerilmenin iç cidardaki etkisinin döndürme ile az da olsa dış cidara doğru kaydığı gözlemlenmiştir. Fonksiyonel dereceli silindirin teğetsel gerilmeleri basma (negatif) yönünde oluşmuştur bkz. Şekil 4.3(b). Açısal hız arttırıldıkça gerilmenin sıkıştırma yönünde arttığı ve bu artışın iç cidardaki etkisinin dış cidara oranla daha fazla olduğu görülmüştür. Ayrıca açısal hız artışının, gerilmenin iç ve dış cidardaki oranında (iç/dış) artışa sebep olduğu görülmüştür.

Şekil 4.4(a)'da dönel fonksiyonel dereceli kürede açısal hız arttırıldığında, iç cidara yakın bölgelerde küçük bir azalma olurken, dış cidara doğru bir artış olduğu ve bu artışın iç cidardaki azalmadan daha fazla olduğu görülmüştür. Dolayısı ile küresel kaptaki radyal gerilmenin iç cidardaki etkisinin döndürme ile dış cidara doğru kaydığı ve bu kaymanın silindirik kaba göre daha fazla olduğu gözlemlenmiştir. Fonksiyonel dereceli kürenin teğetsel gerilmeleri düşük açısal hızlarda çekme (pozitif) yönünde oluşurken, yüksek açısal hızlarda ($w = 90 \text{ rad/s}$) basma (negatif) yönünde olduğu görülmüştür bkz. Şekil 4.4(b). Açısal hız arttırıldıkça gerilmenin belli bir açısal hıza kadar azaldığı ($w = 60 \text{ rad/s}$), daha arttırılınca ($w = 90 \text{ rad/s}$) sonra basma (negatif) yönünde arttığı görülmüştür. Bu azalmanın/artışın iç cidardaki etkisinin dış cidara oranla daha fazla olduğu görülmüştür. Ayrıca açısal hız artışının, gerilmenin iç ve dış cidardaki oranında (iç/dış) azalmaya sebep olduğu görülmüştür.

Bu çalışmada basıncın etkisini dönel basınçlı kaplarda inceleyebilmek için de sayısal çözümler yapılmıştır. Bunun için açısal hız ($w = 10 \text{ rad/s}$) sabit alınıp farklı basınç değerleri ($P = 20 \text{ 30 40 50 MPa}$) seçilerek; Şekil 4.5'de silindirik kaplar için deplasman ve gerinim, Şekil 4.7'de silindirik kaplar için radyal ve teğetsel gerilme, Şekil 4.6'de küresel kaplar için deplasman ve gerinim ve Şekil 4.8'de küresel kaplar için radyal ve teğetsel gerilme değişimleri grafik üzerinde incelenmiştir.

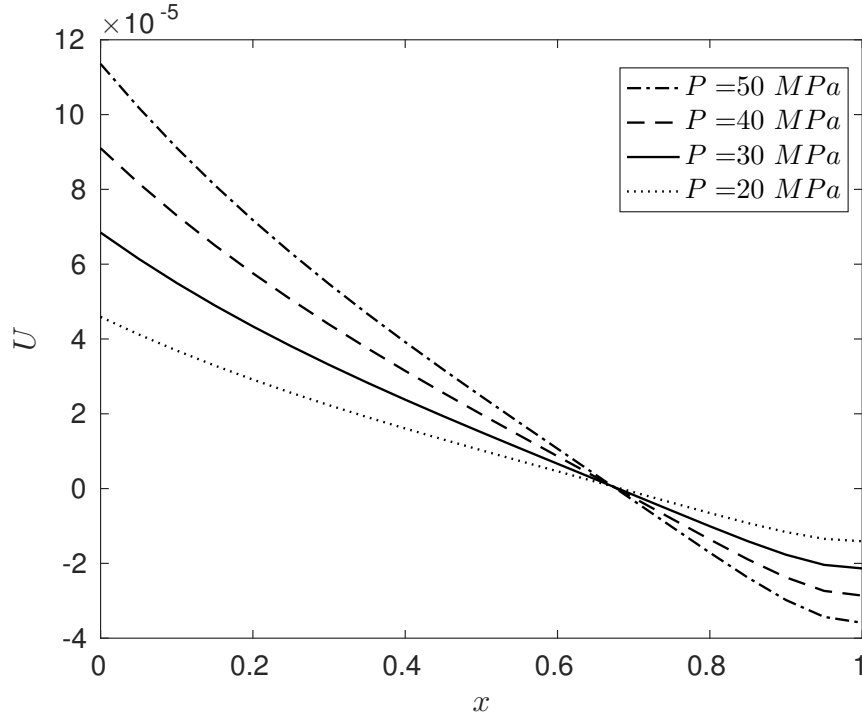


(a) Deplasman dağılımı.

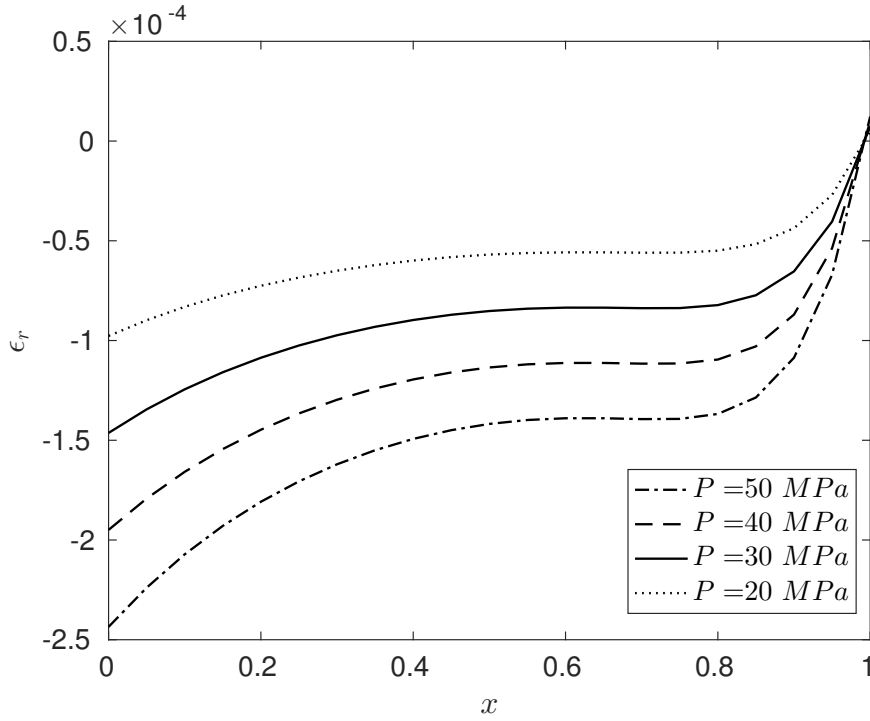


(b) Gerinim (deplasman değişimi) dağılımı.

Şekil 4.5 Silindirik kaplarda sabit açısız hızda ($w = 10$ rad/s) farklı iç basınç etkisinde deplasman ve gerinim dağılımları.



(a) Deplasman dağılımı.



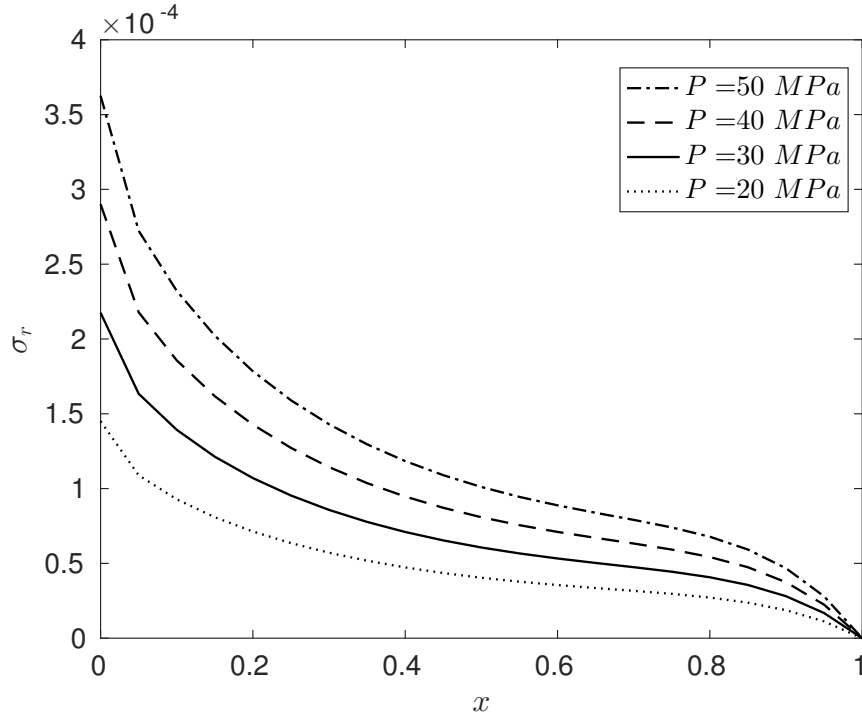
(b) Gerinim (deplasman değişimi) dağılımları.

şekil 4.6 Küresel kaplarda sabit açısal hızda ($w = 10$ rad/s) farklı i basınç etkisinde deplasman ve gerinim dağılımları.

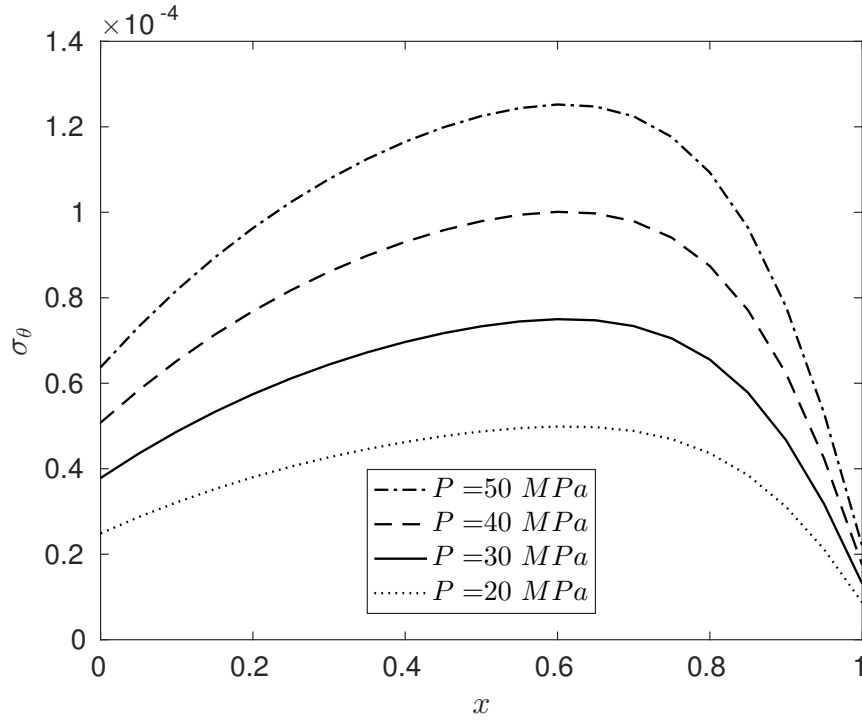
Şekil 4.5(a)'da basınç arttırıldıkça deplasmanın arttığı ve basıncın iç cidarda olmasından kaynaklı olarak iç cidardaki yer değiştiriminin daha fazla olduğu gözlemlenmiştir. Şekil 4.5(b)'de basıncın arttırılmasıyla gerininin sıkıştırma yönünde arttığı görülmüş, silindirin iç cidarı ile dış cidarı arasındaki değişim farkının da arttığı gözlemlenmiştir. Küresel basınçlı kapların deplasmanı iç cidardan belli bir noktaya kadar ($x \approx 0.7$) pozitif yönde bir artış gösterirken, bu noktadan dış cidara doğru negatif yönde bir artma eğilimindedir. Küresel kapların geometrisinden dolayı deplasman (Şekil 4.6(a)) silindirik kaplardakinden daha azdır. Şekil 4.6(b)'de basıncın arttırılmasıyla gerininin sıkıştırma yönünde silindire göre daha az arttığı görülmüş, kürenin iç cidarlarındaki değişimin dış cidara oranla daha fazla olmuştur.

Şekil 4.7(a)'da döneel fonksiyonel dereceli silindirde iç basınç arttırıldığında, radyal gerilmenin arttığı görülmüştür. Fonksiyonel dereceli silindirin teğetsel gerilmeleri çekme (pozitif) yönünde oluşmuştur bkz. Şekil 4.7(b). Basınç arttırıldıkça gerilmenin çekme yönünde arttığı ve bu artışın cidarın orta noktasında daha da belirgin hale geldiği görülmüştür. Ayrıca basınç artışının, gerilmenin iç ve dış cidardaki oranında (iç/dış) artışa sebep olduğu görülmüştür.

Şekil 4.8(a)'da döneel fonksiyonel dereceli kürede iç basınç arttırıldığında, silindirik kaba benzer bir şekilde radyal gerilmenin arttığı görülmüştür. Fonksiyonel dereceli kürenin teğetsel gerilmeleri çekme (pozitif) yönünde oluşmuştur bkz. Şekil 4.8(b). Basınç arttırıldıkça gerilmenin çekme yönünde arttığı ve bu artışın cidarın orta noktasında daha da belirgin hale geldiği görülmüştür. Ayrıca basınç artışının, gerilmenin iç ve dış cidardaki oranında (iç/dış) artışa sebep olduğu görülmüştür.

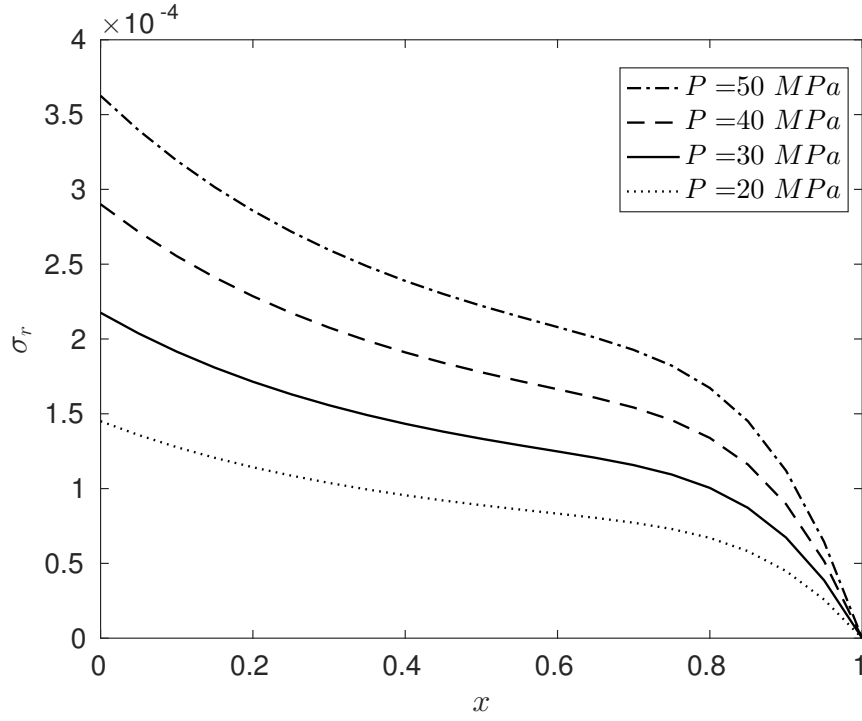


(a) Radyal gerilme dağılımı.

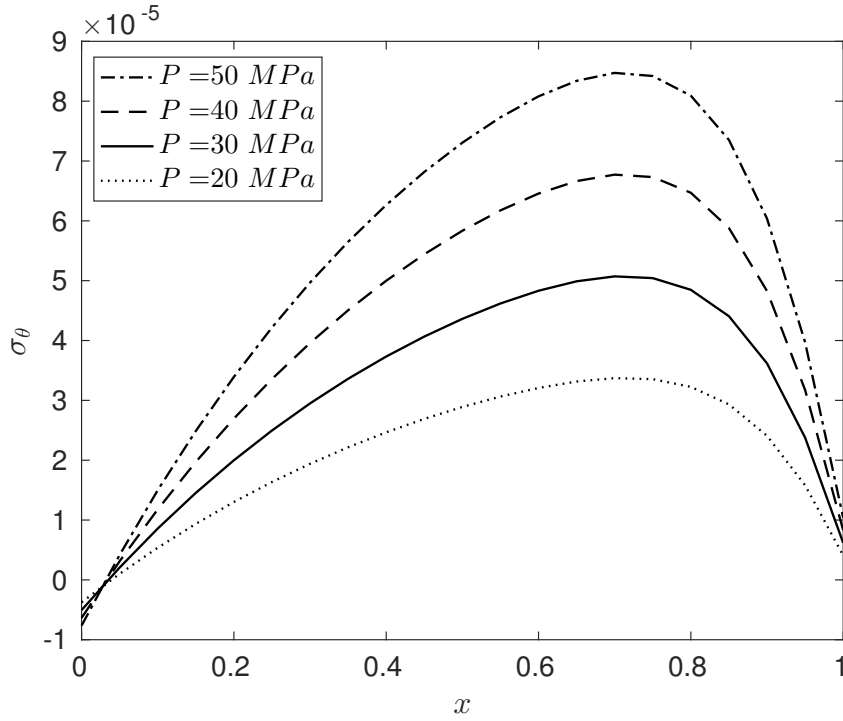


(b) Teğetsel gerilme dağılımı.

Şekil 4.7 Silindirik kaplarda sabit açısız hızda ($w = 10 \text{ rad/s}$) farklı iç basınç etkisinde deplasman ve gerilim dağılımları.



(a) Radyal gerilme dağılımı.



(b) Teğetsel gerilme dağılımı.

Şekil 4.8 Küresel kaplarda sabit açısız hızda ($w = 10$ rad/s) farklı iç basınç etkisinde deplasman ve gerilim dağılımları.

5. SONUÇLAR

Basınçlı kaplar, içerisinde bulunan gaz veya sıvıları belirli bir basınç düzeyinde tutan kapalı hacimli sistemlerdir. Bu kaplardaki basınç, bir kaynaktan, doğrudan veya dolaylı bir kaynaktan ısı uygulanarak veya bunların herhangi bir kombinasyonu ile oluşabilir. Petrol, gaz, kimya, gıda ve içecek, otomotiv, tıp, sağlık ve ilaç endüstrileri, enerji üretim santralleri, denizcilik ve benzeri sektörlerde ihtiyaca uygun kullanılırlar. Üretim ve taşıma kolaylığı açısından genellikle silindirik ve küresel şekillerde üretilen bu basınçlı kapların, yüksek mukavemet, sızdırmazlık, dayanıklılık ve hafiflik gibi özelliklere sahip olması önemli bir konudur.

Bu çalışmada, sabit açısız bir hızla döndürüldüğü düşünülen iç basınca maruz bırakılmış fonksiyonel dereceli silindirik ve küresel kapların elastik analizi ele alınmıştır. Poisson oranı dışındaki malzeme özelliklerinin Voigt şeması ile derecelendirildiği varsayılmıştır. Homojen malzemeye göre daha hafif olan metal-hafif metal karışımı olarak paslanmaz çelik ve alüminyum tercih edilmiştir. Bu koşullar altında elde edilen değişken katsayılı düzensiz adi diferansiyel denklem Kuvvet Seri Yöntemi ile analitik olarak çözülmüştür. Literatürde mevcut olan benzer bir problemin çözümü, bu çalışmada kullanılan kuvvet seri yöntemi ile çözümlenerek yöntemin doğruluğu gösterilmiştir.

Fonksiyonel derecelendirilmiş silindir ve kürenin sabit iç basınç etkisinde, farklı açısız hızlarda döndürülmesi ile oluşan deplasman, gerinim, radyal ve teğetsel gerilim dağılımları incelenmiştir. Açısız hız arttıkça deplasmanın ve buna bağlı olarak radyal gerinimin sıkıştırma yönünde arttığı gözlemlenmiştir. Açısız hız arttıkça iç cidar ile dış cidar arasındaki değişim oranının (iç/dış) azaldığı tespit edilmiştir. Basınçlı kapların açısız hızı arttırıldıkça iç bölgelerde oluşan radyal gerilimin dış cidara doğru ilerlediği gözlemlenmiştir. İç cidardaki basıncın, döndürme hızının arttırılması ile azaldığı ve cidarın iç noktalarına doğru ilerlediği görülmüştür. Teğetsel gerilmelerin açısız hız arttıkça arttığı, iç cidardaki artışın dış cidara oranla daha hızlı olduğu görülmüştür. Sabit açısız bir hızda, farklı iç basınç altında silindirik ve küresel kapların davranışları da incelenmiştir. İç basınç arttıkça deplasman, gerinim, radyal ve teğetsel gerilmelerde artış olduğu görülmüştür.

Bu çalışmada, elastik silindirik ve küresel kaplar üzerindeki tüm kuvvetlerin sıfıra eşit olduğu ve yer değiştirmelerin zamanın bir fonksiyonu olmadığı denge koşulları altında elastostatik bir inceleme yapılmıştır. Sonsuz küçük gerilmeler veya küçük deformasyon varsayımı altındaki doğrusal elastikiyet, katı nesnelere öngörülen yükleme koşulları tarafından nasıl deforme olduğunu ve içsel olarak nasıl gerildiğine ilişkin yapısal analiz yapılmasına yardımcı olan matematiksel bir modeldir. Gelecekte yapılacak çalışmalarda, lineer elastik teori kullanılarak yer değiştirmeler zamanın bir fonksiyonu olarak alınıp, elastostatik çalışmada elde edilen sonuçlarla karşılaştırılabilir.



KAYNAKLAR

- [1] Horgan, C.O., Chan, A.M., The Pressurized Hollow Cylinder or Disk Problem for Functionally Graded Isotropic Linearly Elastic Materials, *Journal of Elasticity*, 55, 43–59, 1999.
- [2] Tutuncu, N., Ozturk, M., Exact solutions for stresses in functionally graded pressure vessels, *Composites Part B: Engineering*, 32(8), 683–686, 2001.
- [3] You, L.H., Zhang, J.J., You, X.Y., Elastic analysis of internally pressurized thick-walled spherical pressure vessels of functionally graded materials, *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 82(5), 347–354, 2005.
- [4] Dai, H.L., Fu, Y.M., Dong, Z.M., Exact solutions for functionally graded pressure vessels in a uniform magnetic field, *International Journal of Solids and Structures*, 43(18-19), 5570–5580, 2006.
- [5] You, L.H., Ou, H., Zheng, Z.Y., Creep deformations and stresses in thick-walled cylindrical vessels of functionally graded materials subjected to internal pressure, *Composite Structures*, 70(2), 285–291, 2007.
- [6] Chen, Y.Z., Lin, X.Y., Elastic analysis for thick cylinders and spherical pressure vessels made of functionally graded materials, *Computational Materials Science*, 44(2), 581–587, 2008.
- [7] Akis, T., Elastoplastic analysis of functionally graded spherical pressure vessels, *Computational Materials Science*, 46(2), 545–554, 2009.
- [8] Jahromi, B.H., Farrahi, G.H., Maleki, M., Nayeb-Hashemi, H., Vaziri, A., Residual stresses in autofrettaged vessel made of functionally graded material, *Engineering Structures*, 31(12), 2930–2935, 2009.
- [9] Maleki, M., Farrahi, G.H., Haghpanah Jahromi, B., Hosseinian, E., Residual stress analysis of autofrettaged thick-walled spherical pressure vessel, *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 87(7), 396–401, 2010.
- [10] Dai, H.-L., Xia, X., Fu, Y.-M., Analytical solutions of stresses in functionally graded piezoelectric hollow structures, *Solid State Communications*, 150(15-16), 763–767, 2010.
- [11] Nejad, M.Z., Rahimi, G.H., Elastic analysis of FGM rotating cylindrical pressure vessels, *Journal of the Chinese Institute of Engineers*, 33(4), 525–530, 2010.

- [12] Sadeghian, M., Toussi, H.E., Axisymmetric yielding of functionally graded spherical vessel under thermo-mechanical loading, *Computational Materials Science*, 50(3), 975–981, 2011.
- [13] Son, D.-S., Hong, J.-H., Chang, S.-H., Determination of the autofrettage pressure and estimation of material failures of a Type III hydrogen pressure vessel by using finite element analysis, *International Journal of Hydrogen Energy*, 37(17), 12771–12781, 2012.
- [14] Kashkoli, M.D., Nejad, M.Z., Effect of Heat Flux on Creep Stresses of Thick-Walled Cylindrical Pressure Vessels, *Journal of Applied Research and Technology*, 12(3), 585–597, 2014.
- [15] Nejad, M.Z., Kashkoli, M.D., Time-dependent thermo-creep analysis of rotating FGM thick-walled cylindrical pressure vessels under heat flux, *International Journal of Engineering Science*, 82, 2014.
- [16] Wang, Z.W., Zhang, Q., Xia, L.Z., Wu, J.T., Liu, P.Q., Stress Analysis and parameter Optimization of an FGM Pressure Vessel Subjected to thermo-mechanical Loadings, *Procedia Engineering*, 130, 374–389, 2015.
- [17] Jabbari, M., Nejad, M.Z., Ghannad, M., Thermo-elastic analysis of axially functionally graded rotating thick cylindrical pressure vessels with variable thickness under mechanical loading, *International Journal of Engineering Science*, 96, 1–18, 2015.
- [18] Mazarei, Z., Nejad, M.Z., Hadi, A., Thermo-Elasto-Plastic Analysis of Thick-Walled Spherical Pressure Vessels Made of Functionally Graded Materials, *International Journal of Applied Mechanics*, 8(4), 1650054, 2016.
- [19] Almasi, A., Baghani, M., Moallemi, A., Thermomechanical analysis of hyperelastic thick-walled cylindrical pressure vessels, analytical solutions and FEM, *International Journal of Mechanical Sciences*, 130, 426–436, 2017.
- [20] Gharibi, M., Nejad, M.Z., Elastic analysis of functionally graded rotating thick cylindrical pressure vessels with exponentially-varying properties using power series method of Frobenius, *Journal of Computational Applied Mechanics*, 48(1), 89–98, 2017.
- [21] Sachdeva, C., Padhee, S.S., Functionally graded cylinders: Asymptotically exact

- analytical formulations, *Applied Mathematical Modelling*, 54, 782–802, 2018.
- [22] Nematollahi, M.A., Dini, A., Hosseini, M., Thermo-magnetic analysis of thick-walled spherical pressure vessels made of functionally graded materials, *Applied Mathematics and Mechanics*, 40, 751–766, 2019.
- [23] Yarımabaç, D. and Temo, A., The effect of uniform magnetic field on pressurized fg cylindrical and spherical vessels, *European Mechanical Science*, 3(4), 133-141, 2019.
- [24] Kacar, I., Exact elasticity solutions to rotating pressurized axisymmetric vessels made of functionally graded materials, *Materialwiss und Werkstofftech*, 51, 1481-1492, 2020.
- [25] Eker, M., Yarımabaç, D., Yıldırım, A., Celebi, K., Elastic solutions based on the Mori-Tanaka scheme for pressurized functionally graded cylinder, *Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics*, 19(4), 57-68, 2020.
- [26] Yarımabaç, D., Çalışkan, A., Elastic Analysis Of Functionally Graded Rotating Pressurized Cylinders, *Composites: Mechanics, Computations, Applications: An International Journal*, 15(1), 53–64, 2024.
- [27] Hildebrand, F.B., *Advanced Calculus for Applications*, Prentice-Hall Inc, New Jersey, USA, 1962.
- [28] Knopp, K., *Infinite Sequences and Series*, Dover Publications Inc., New York, USA, 1955.
- [29] Eker, M., Yarımabaç, D., Celebi, K, Mechanical Behavior of Functionally Graded Pressure Vessels Under the Effect of Poisson's Ratio, *European Mechanical Science*, 2(2), 52–59, 2018

ÖZGEÇMİŞ

1. **Adı Soyadı** : Ö**** Ö***
2. **Ünvanı** : Matematik Öğretmeni
3. **Öğrenim Durumu** :

Derece	Alan	Üniversite	Yıl
Lisans	İlköğretim Matematik Öğretmeliği	Dicle Üniversitesi Eğitim Fakültesi	2002 – 2006
Yüksek Lisans	Matematik	Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi	2023–

4. İş Tecrübesi:

Görev Ünvanı	Görev Yeri	Yıl
Matematik öğretmeni	Şehit Yasemin Tekin Or- taokulu/Osmaniye	2011 – 2019
Matematik öğretmeni	Atatürk Ortaokulu/Osmaniye	2019–

EK.1.

İç basınca ve döndürmeye maruz bırakılmış kalın cidarlı silindirik ve küresel basınçlı kapların boyutsuz gerilme-yer değiştirme (2.17) ve denge denklemleri (2.18) kullanılarak aşağıdaki şekilde elde edilmiştir.

Uzay yönündeki bağımsız değişkenin boyutsuzlaştırması,

$$x = \frac{r - r_i}{r_0 - r_i} \Rightarrow \frac{dx}{dr} = \frac{1}{r_0 - r_i} \quad (\text{EK.1.1.1})$$

şeklinde bulunur. Deplasmanın

$$U = \frac{u}{r_0 - r_i} \quad (\text{EK.1.1.2})$$

bağıntısı ile boyutsuzlaştırılırken, uzay yönündeki türevinin boyutsuzlaştırma işlemi zincir kuralı kullanılarak aşağıdaki şekilde yapılır:

$$\frac{du}{dr} = \frac{dx}{dr} \frac{du}{dx} = \frac{1}{r_0 - r_i} \frac{d}{dx} [(r_0 - r_i)U] = \frac{dU}{dx} \quad (\text{EK.1.1.3})$$

Melzeme özellikleri ise,

$$E_f(x) = (E_a - E_s)x^s + E_s \quad (\text{EK.1.1.4a})$$

$$\rho_f(x) = (\rho_a - \rho_s)x^s + \rho_s \quad (\text{EK.1.1.4b})$$

şeklinde bulunur.

Silindirik basınçlı kap için radyal gerilme denkleminde (2.6a) boyutsuz parametreler yerleştirilip düzenlenirse,

$$(E_a - E_s)S_r = C_{11}[(E_a - E_s)x^s + E_s] \frac{dU}{dx} + C_{12}[(E_a - E_s)x^s + E_s] \frac{(r_0 - r_i)U}{(r_0 - r_i)x + r_i}$$
$$S_r = C_{11} [x^s + E_N] \frac{dU}{dx} + C_{12} [x^s + E_N] \frac{U}{x + R} \quad (\text{EK.1.1.5})$$

bulunur. Benzer şekilde teğetsel gerilme denkleminde (2.6b) boyutsuz parametreler yerleştirilip düzenlenirse,

$$(E_a - E_s)S_\theta = C_{12}[(E_a - E_s)x^s + E_s] \frac{dU}{dx} + C_{11}[(E_a - E_s)x^s + E_s] \frac{(r_0 - r_i)U}{(r_0 - r_i)x + r_i}$$
$$S_\theta = C_{12} [x^s + E_N] \frac{dU}{dx} + C_{11} [x^s + E_N] \frac{U}{x + R} \quad (\text{EK.1.1.6})$$

elde edilir. Denge denkleminde de (2.9) boyutsuz parametreler yerleştirilip düzenlenirse,

$$\frac{dx}{dr} \frac{d}{dx} [(E_a - E_s)S_r] + \frac{(E_a - E_s)S_r - (E_a - E_s)S_\theta}{(r_0 - r_i)x + r_i} + [(\rho_a - \rho_s)x^s + \rho_s] w^2 [(r_0 - r_i)x + r_i]^2 = 0$$
$$\frac{dS_r}{dx} + \frac{S_r - S_\theta}{x + R} + [(M_{C_1} - M_{C_2})x^s + M_{C_2}] (x + R)^2 w^2 (r_0 - r_i)^3 = 0 \quad (\text{EK.1.1.7})$$

elde edilir. Silindirik kabın deplasmana bağlı boyutsuz iç cidardaki ($r = r_i$) sınır koşulu (2.11a),

$$\left[C_{11}[(E_a - E_s)x^s + E_s] \frac{dU}{dx} + C_{12}[(E_a - E_s)x^s + E_s] \frac{(r_0 - r_i)U}{(r_0 - r_i)x + r_i} \right]_{(r_0 - r_i)x + r_i = r_i} = -P$$

$$\left[\frac{dU}{dx} + n \frac{U}{x + R} \right]_{x=0} = -\frac{P}{C_{11}E_s} \quad (\text{EK.1.1.8})$$

bulunur. Dış cidardaki ($r = r_0$) sınır koşulu (2.11b) da benzer şekilde

$$\left[\frac{dU}{dx} + n \frac{U}{x + R} \right]_{x=0} = 0 \quad (\text{EK.1.1.9})$$

elde edilir.

Küresel basınçlı kap için radyal gerilme denkleminde (2.12a) boyutsuz parametreler yerleştirilip düzenlenirse,

$$(E_a - E_s)S_r = C_{11}[(E_a - E_s)x^s + E_s] \frac{dU}{dx} + 2C_{12}[(E_a - E_s)x^s + E_s] \frac{(r_0 - r_i)U}{(r_0 - r_i)x + a}$$

$$S_r = C_{11}[x^s + E_N] \frac{dU}{dx} + 2C_{12}[x^s + E_N] \frac{U}{x + R} \quad (\text{EK.1.1.10})$$

bulunur. Benzer şekilde teğetsel gerilme denkleminde (2.12b) boyutsuz parametreler yerleştirilip düzenlenirse,

$$(E_a - E_s)S_\theta = C_{12}[(E_a - E_s)x^s + E_s] \frac{dU}{dx} + (C_{11} + C_{12})[(E_a - E_s)x^s + E_s] \frac{(r_0 - r_i)U}{(r_0 - r_i)x + r_i}$$

$$S_\theta = C_{12}[x^s + E_N] \frac{dU}{dx} + (C_{11} + C_{12})[x^s + E_N] \frac{U}{x + R} \quad (\text{EK.1.1.11})$$

elde edilir. Denge denkleminde de (2.9) boyutsuz parametreler yerleştirilip düzenlenirse,

$$\frac{dx}{dr} \frac{d}{dx} [(E_a - E_s)S_r] + 2 \frac{(E_a - E_s)S_r - (E_a - E_s)S_\theta}{(r_0 - r_i)x + r_i} + [(\rho_a - \rho_s)x^s + \rho_s] w^2 [(r_0 - r_i)x + r_i]^2 = 0$$

$$\frac{dS_r}{dx} + \frac{2(S_r - S_\theta)}{x + R} + [(M_{C_1} - M_{C_2})x^s + M_{C_2}] (x + R)^2 w^2 (r_0 - r_i)^3 = 0 \quad (\text{EK.1.1.12})$$

elde edilir. Küresel kabın deplasmana bağlı boyutsuz iç cidardaki ($r = r_i$) sınır koşulu (2.16a),

$$\left[C_{11}[(E_a - E_s)x^s + E_s] \frac{dU}{dx} + 2C_{12}[(E_a - E_s)x^s + E_s] \frac{(r_0 - r_i)U}{(r_0 - r_i)x + r_i} \right]_{(r_0 - r_i)x + r_i = r_i} = -P$$

$$\left[\frac{dU}{dx} + 2n \frac{U}{x + R} \right]_{x=0} = -\frac{P}{C_{11}E_s} \quad (\text{EK.1.1.13})$$

bulunur. Dış cidardaki ($r = r_0$) sınır koşulu (2.16b) da benzer şekilde

$$\left[\frac{dU}{dx} + 2n \frac{U}{x + R} \right]_{x=0} = 0 \quad (\text{EK.1.1.14})$$

elde edilir.

EK.2.

Elastisite teorisi kullanılarak fonksiyonel olarak derecelendirilmiş malzemeden yapılmış izotropik dönen kalın cidarlı basınçlı kaplardaki gerilmeler Kuvvet Seri Yöntemi ile elde edilmiştir. Kullanılan yöntemin doğruluğunu göstermek için Nejad ve Rahimi'nin [11] çalışmasında kullandığı fonksiyonel dereceli model için kuvvet seri yöntemi ile çözümler elde edilmiş ve sonuçlar karşılaştırılmıştır. Nejad ve Rahimi'nin [11] çalışmasında silindirik geometri için deplasmana bağlı adi diferansiyel denklem:

$$r^2 u'' + (\beta + 1) r u' + (n\beta - 1) u = -\frac{\rho_i w^2 a^{\beta-\alpha}}{E_i c_{11}} r^{\alpha-\beta+3} \quad (\text{EK.2.2.1})$$

şeklinde elde edilmiştir. $\alpha = 1$, $\beta = 2$ özel seçimi ve boyutsuzlaştırma parametreleri (2.17) kullanılarak, boyutsuz deplasman denklemi

$$(x + R)^2 \frac{d^2 u}{dx^2} + 3(x + R) \frac{du}{dx} + (2n - 1) U = D [x + R]^2 \quad (\text{EK.2.2.2})$$

öyleki

$$D = -\frac{\rho_i w^2 a (b - a)}{E_i c_{11}} \quad (\text{EK.2.2.3})$$

elde edilir. Bu denklemde en yüksek mertebeli türevin değişken katsayısı $P(x) = (x + R)^2$, $x_0 = 0$ da analitik olduğu için adi diferansiyel denklem (EK.1.1.1) kuvvet serisi ile çözülebilir. $x_0 = 0$ 'da $U(x)$ 'in kuvvet seri açılımı

$$U(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^k \quad (\text{EK.2.2.4})$$

şeklinde olup $A_0, A_1, A_2 \dots$ sınır koşullarında elde edilecek katsayıları ifade etmektedir. Bu denklemin türevleri alınıp

$$U' = \sum_{k=1}^{\infty} k A_k x^{k-1}, \quad U'' = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) A_k x^{k-2} \quad (\text{EK.2.2.5})$$

deplasman denkleminde (EK.2.2.1) yerine yazılırsa

$$(x + R)^2 \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) A_k x^{k-2} + 3(x + R) \sum_{k=1}^{\infty} k A_k x^{k-1} + N \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^k = D [x + R]^2 \quad (\text{EK.2.2.6})$$

elde edilir. Burada işlem kolaylığı için $N = 2n - 1$ alınmıştır. Dışarıda çarpım durumdaki terimler toplamların içine alınıp düzenlenirse,

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) A_k x^k + \sum_{k=1}^{\infty} 2Rk(k+1) A_{k+1} x^k + \sum_{k=0}^{\infty} R^2(k+1)(k+2) A_{k+2} x^k + \sum_{k=1}^{\infty} 3k A_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} 3R(k+1) A_{k+1} x^k + \sum_{k=0}^{\infty} N A_k x^k = D [x + R]^2 \quad (\text{EK.2.2.7})$$

elde edilir. Bu denklemde toplamların içindeki x 'lerin kuvvetleri eşitlenip toplam indeksleri aynı noktadan başlayacak şekilde düzenlenirse,

$$\sum_{k=2}^{\infty} [R^2(k+1)(k+2)A_{k+2} + R(k+1)(2k+3)A_{k+1} + (k^2 + 2k + N)A_k] + x [6R^2A_3 + 10RA_2 + (3+N)A_1] + 2R^2A_2 + 3RA_1 + NA_0 = D[x+R]^2 \quad (\text{EK.2.2.8})$$

elde edilir. Sağ taraf fonksiyonu $D[x+R]^2$ açılıp, polinomların eşitliği ilkesi kullanılırsa,

$$A_2 = \frac{DR^2 - 3RA_1 - NA_0}{2R^2} \quad (\text{EK.2.2.9a})$$

$$A_3 = \frac{2D_1R - 10RA_2 - (3+N)A_1}{6R^2} \quad (\text{EK.2.2.9b})$$

$$A_4 = \frac{D_1 - 21RA_3 - (8+N)A_2}{12R^2} \quad (\text{EK.2.2.9c})$$

ve tekrarlılama bağıntısı,

$$A_{k+2} = -\frac{R(k+1)(2k+3)A_{k+1} + (k^2 + 2k + N)A_k}{R^2(k+1)(k+2)}, \quad n \geq 3 \quad (\text{EK.2.2.10})$$

şeklinde elde edilir. Sırasıyla $n = 3, 4, 5, \dots$ yerine yazılırsa, A_i katsayıları,

$$A_5 = -\frac{36RA_4 + (15+N)A_3}{20R^2} \quad (\text{EK.2.2.11a})$$

$$A_6 = -\frac{44RA_5 + (24+N)A_4}{30R^2} \quad (\text{EK.2.2.11b})$$

$$A_7 = -\frac{78RA_6 + (35+N)A_5}{42R^2} \quad (\text{EK.2.2.11c})$$

⋮

bulunur.