

**MODİFİYE EDİLMİŞ ÜSTEL TRİGONOMETRİK
KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN HADAMARD TIPLİ
EŞİTSİZLİKLER VE KESİRLİ İNTEGRAL OPERATÖR
YARDIMIYLA ELDE EDİLMİŞ CHEBYSHEV**

TIPLİ EŞİTSİZLİKLER

**Kübra DEMİR BUDAK
Yüksek Lisans Tezi
Matematik Ana Bilim Dalı
Doç. Dr. Mustafa GÜRBÜZ
AĞRI-2025
(Her Hakkı Saklıdır)**



**LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
TEZ KABUL VE ONAY TUTANAĞI**

| | |
|------------------|------------|
| Doküman No | FR-211 |
| İlk Yayın Tarihi | 26.02.2024 |
| Revizyon Tarihi | |
| Revizyon No | 00 |
| Sayfa No | 1/1 |

**MODİFİYE EDİLMİŞ ÜSTEL TRİGONOMETRİK KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN
HADAMARD TIPLI EŞİTSİZLİKLER VE KESİRLİ İNTEGRAL OPERATÖRLER
YARDIMIYLA ELDE EDİLMİŞ CHEBYSHEV TIPLI EŞİTSİZLİKLER**

Doç. Dr. Mustafa GÜRBÜZ danışmanlığında, Kübra DEMİR BUDAK tarafından hazırlanan bu çalışma, 28/02/2025 tarihinde aşağıda isimleri belirtilen jüri tarafından değerlendirilmiş olup Matematik Anabilim Dalı Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalında yüksek lisans tezi olarak oybirliği ile kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Erhan SET

İmza :

Üye : Prof. Dr. Ahmet O. AKDEMİR

İmza :

Üye : Doç. Dr. Mustafa GÜRBÜZ

İmza :

Yukarıdaki sonuç;

Enstitü Yönetim Kurulu .../.../... tarih ve / numaralı kararı ile onaylanmıştır.

.....
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildiriş, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

| | | |
|-------------------|---------------------|------------------|
| HAZIRLAYAN | KONTROL EDEN | ONAYLAYAN |
|-------------------|---------------------|------------------|



LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
TEZ BENZERLİK RAPORU

| | |
|------------------|------------|
| Doküman No | FR-213 |
| İlk Yayın Tarihi | 26.02.2024 |
| Revizyon Tarihi | |
| Revizyon No | 00 |
| Sayfa No | 1 / 2 |

Benzerlik Oranlarına Dair Beyannamedir

| | | |
|----------------------------|--|-----------------|
| Öğrenci Adı Soyadı | Kübra DEMİR BUDAK | |
| Numarası | | |
| Ana Bilim Dalı | Matematik | |
| Bilim Dalı | Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi | |
| Programı | Tezli Yüksek Lisans | |
| Danışman Unvanı Adı Soyadı | Doç. Dr.Mustafa GÜRBÜZ | |
| Tez Başlığı | Modifiye Edilmiş Üstel Trigonometrik Konveks Fonksiyonlar için Hadamard Tipli Eşitsizlikler ve Bir Kesirli İntegral Operatör Yardımıyla Elde Edilmiş Chebyshev Tipli Eşitsizlikler | |
| Bölümler | Turnitin Sonucu | En Yüksek Değer |
| TEZ (GENEL) | %20 | % 25 |

07/03/2025

Yukarıda bilgileri yazılı tez çalışmasının benzerlik oranları Turnitin raporundan alındığı haliyle yazılmış olup tüm bilgilerin doğru olduğunu, aksi halde doğacak hukuki sorumlulukları kabul ve beyan ederiz.

Kübra DEMİR BUDAK

- 1) Benzerlik raporunun alınması sırasında “başlıklar, içindekiler, teşekkür, ön söz, dizin, alıntılar, kaynaklar, atıflar, ve 6 kelimededen küçük eşlemeler” kapsam dışı bırakılabilir. “İnternet, Yayınlar ve Öğrenci Ödevleri veri tabanlarından” hiç birisi kesinlikle tarama dışı bırakılmamalıdır.
- 2) Tez çalışmasında tabloda belirtilenden daha fazla sayıda bölüm/başlık olması halinde satırlar çoğaltılabilir.
- 3) Çalışmadaki benzerlik oranlarının tabloda belirtilen en yüksek değerleri aşması halinde bu çalışma Enstitü tarafından değerlendirmeye alınmaz ve savunma süreci başlatılmaz.
- 4) Bu beyannameye ek olarak Turnitin Benzerlik Raporu gönderilmelidir.
- 5) Bu beyanname, tez jüri öneri formu ve savunma öncesi kontrol formu ile birlikte Ana Bilim Dalı Başkanlığına teslim edilecek ve akabinde EBYS üzerinden Müdürlüğümüze gönderilecektir.

| | | |
|------------|--------------|-----------|
| HAZIRLAYAN | KONTROL EDEN | ONAYLAYAN |
|------------|--------------|-----------|

T.C.
AĞRI İBRAHİM ÇEÇEN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Kübra DEMİR BUDAK

**Modifiye Edilmiş Üstel Trigonometrik Konveks Fonksiyonlar İçin
Hadamard Tipli Eşitsizlikler ve Kesirli İntegral Operatör Yardımıyla Elde
Edilmiş Chebyshev Tipli Eşitsizlikler**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

TEZ YÖNETİCİSİ

Doç. Dr. Mustafa GÜRBÜZ

AĞRI – 2025

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Modifiye Edilmiş Üstel Trigonometrik Konveks Fonksiyonlar İçin Hadamard Tipli Eşitsizlikler ve Bir Kesirli İntegral Operatör Yardımıyla Elde Edilmiş Chebyshev Tipli Eşitsizlikler

Bu tez, kesirli integral operatörleri ve Chebyshev tipi integral eşitsizlikleri üzerine kapsamlı bir inceleme sunmaktadır. Beş ana bölümden oluşan tezde , her bölüm belirli bir konuya odaklanarak okuyucuya derinlemesine bir anlayış kazandırmayı hedeflemektedir.

Birinci bölümde, eşitsizliklerin, kesirli analizlerin, kesirli türev ve integralin yanı sıra kesirli integral operatörlerinin tarihsel gelişimi ve önemi ele alınmıştır. Bu bölüm, konunun tarihsel arka planını ve matematiksel düşüncenin evrimini ortaya koyarak okuyucunun ilgi duymasını sağlamaktadır.

İkinci bölüm, kesirli analiz ve integral operatörleriyle ilgili temel tanım ve teoremleri içermekte olup, okuyucunun konunun temellerini kavramasına yardımcı olmaktadır. Bu bölüm, kesirli integrallerin matematiksel çerçevesini sağlam bir şekilde sunmaktadır.

Üçüncü bölümde, literatürde yer alan çeşitli kesirli integral operatörlerinin tanımları ve özellikleri incelenmiştir. Bu bölüm, mevcut bilgi birikimine katkıda bulunarak, kesirli integral operatörlerinin uygulama alanlarını genişletmeyi amaçlamaktadır.

Dördüncü bölüm, yeni tanımlanan konveks fonksiyon sınıfıyla elde edilen bazı yeni eşitsizlikler ve integral operatörleri ile Chebyshev tipi integral eşitsizliklerinin ortaya konulduğu bölümdür. Bu kısım, hem teorik hem de pratik açıdan önemli bulgular sunmaktadır.

Beşinci bölümde ise, bu çalışmada elde edilen sonuçlar ve gelecekteki çalışmalar için öneriler paylaşılmaktadır. Bu bölüm , araştırmanın genel değerlendirmesini yaparak, alanın gelişimine yönelik yeni yönelimler sunmaktadır.

Tez, kesirli analiz alanında önemli katkılar sağlamayı hedeflemekte ve ilgili literatüre yeni bakış açıları kazandırmaktadır.

2025, 46 sayfa

Anahtar Kelimeler: Modifiye edilmiş üstel trigonometrik konveks fonksiyon, Hadamard tipli eşitsizlikler, Chebyshev eşitsizliği.

ABSTRACT

MASTER'S THESIS

The Hadamard-Type Inequalities for Modified Exponential Trigonometric Convex Functions and Chebyshev-Type Inequalities Obtained via a Fractional Integral Operator

This thesis presents a comprehensive survey of fractional integral operators and Chebyshev-type integral inequalities. The thesis consists of five main chapters, each chapter focusing on a specific topic and aiming to provide the reader with an in-depth understanding. The first chapter deals with the historical development and importance of inequalities, fractional analyses, fractional differentiation and integration, as well as fractional integral operators. This chapter provides the historical background of the subject and the evolution of mathematical thought, thus arousing the reader's interest.

The second chapter contains the basic definitions and theorems related to fractional analysis and integral operators and helps the reader to grasp the fundamentals of the subject. This chapter provides a solid mathematical framework of fractional integrals.

In the third chapter, the definitions and properties of various fractional integral operators in the literature are analysed. This chapter aims to extend the application areas of fractional integral operators by contributing to the existing knowledge.

The fourth chapter presents some new inequalities and integral operators obtained with the newly defined class of convex functions and Chebyshev type integral inequalities. This section presents important findings from both theoretical and practical points of view.

In the fifth chapter, the results obtained and suggestions for future work are presented. This chapter provides an overall evaluation of the research and suggests new directions for the development of the field.

The thesis aims to make significant contributions to the field of fractional analysis and brings new perspectives to the related literature.

2025, 46 pages

Key Words: Modified exponential trigonometric convex function, Hadamard type inequalities, Chebyshev inequality.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimim süresince bana her konuda özveri ve samimiyetle destek veren, bu başarıda büyük pay sahibi olan çok değerli danışman hocam, Doç. Dr. Mustafa GÜRBÜZ'e en içten teşekkürlerimi sunarım. Bilgi birikimi ve rehberliğiyle bana ilham vererek bu noktaya gelmemde büyük katkılarda bulundu. Saygı ve minnetle anıyorum.

Ayrıca, öğrenim hayatım boyunca yanımda olan ve her zaman bana destek veren annem Meliha DEMİR, babam İsmet DEMİR ve kardeşim Büşra DEMİR'e teşekkür etmek istiyorum. Onların sevgisi, sabrı ve destekleri benim için her zaman çok değerli oldu ve bu süreçte bana güç verdi.

Her türlü fedakarlığı ve desteği esirgemeyen sevgili eşim Habip BUDAK'a da yürekten minnettarım. Hayatımın bu önemli döneminde, her zaman destek olması, bu başarıda en büyük motivasyon kaynağım oldu.

Şubat 2025

Kübra DEMİR BUDAK

İÇİNDEKİLER

| | |
|---|-----|
| ÖZET | ii |
| ABSTRACT | iii |
| TEŞEKKÜR | iv |
| ŞEKİLLER LİSTESİ | vi |
| SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ | vii |
| 1. GİRİŞ | 1 |
| 2. KURAMSAL TEMELLER | 3 |
| 2.1. Konvekslikle İlgili Bazı Temel Terimler..... | 3 |
| 2.2. Bazı İyi Bilinen Eşitsizlikler | 6 |
| 3. MATERYAL VE YÖNTEM | 16 |
| 4. BULGULAR | 19 |
| 4.1. Modifiye Edilmiş Üstel Trigonometrik Konveks Fonksiyon Tanımı, Bazı Özellikleri ve Bu Fonksiyon Yardımıyla Elde Edilen Bazı Eşitsizlikler | 19 |
| 4.2. Riemann-Liouville Kotanjant Kesirli İntegralları için Chebyshev Tipli Eşit- sizlikler | 33 |
| 5. SONUÇ | 43 |
| KAYNAKLAR | 44 |
| ÖZGEÇMİŞ | 46 |

ŞEKİLLER LİSTESİ

| <u>Şekil</u> | <u>Sayfa</u> |
|---|--------------|
| 2.1 Üstel trigonometrik konveks fonksiyonun katsayılar toplamı | 5 |
| 4.1 Modifiye edilmiş üstel trigonometrik konveks fonksiyonun katsayılar toplamı | 20 |
| 4.2 Konveks ve trigonometrik konveks fonksiyon sınıflarının katsayılarının karşılaştırılması | 20 |
| 4.3 Trigonometrik ve modifiye edilmiş trigonometrik konveks fonksiyon sınıflarının katsayılarının karşılaştırılması | 21 |



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

- \mathbb{R} : Reel sayılar kümesi
- $\Gamma(z)$: Gama fonksiyonu
- $\beta(x, y)$: Beta fonksiyonu
- $L^1[I]$: I aralığında Lebesque anlamında integrallenebilen fonksiyonların sınıfı
- $I_{\eta_1+}^{\alpha} \Omega(\varkappa_1)$: Ω fonksiyonunun α . mertebeden sol taraflı Riemann-Liouville kesirli integrali
- $I_{\eta_2-}^{\alpha} \Omega(\varkappa_1)$: Ω fonksiyonunun α . mertebeden sağ taraflı Riemann-Liouville kesirli integrali
- ${}_H J_{\eta_1+}^{\alpha} \Omega(\varkappa_1)$: Ω fonksiyonunun α . mertebeden sol taraflı Hadamard kesirli integrali
- ${}_H J_{\eta_2-}^{\alpha} \Omega(\varkappa_1)$: Ω fonksiyonunun α . mertebeden sağ taraflı Hadamard kesirli integrali
- ${}^{\rho} I_{\eta_1+}^{\alpha} \Omega(\varkappa_1)$: Ω fonksiyonunun α . mertebeden sol taraflı Katugampola kesirli integrali
- ${}^{\rho} I_{\eta_2-}^{\alpha} \Omega(\varkappa_1)$: Ω fonksiyonunun α . mertebeden sağ taraflı Katugampola kesirli integrali
- $({}^{C\Omega} I_{\eta_1}^{\alpha} \Omega)(\varkappa_1)$: Ω fonksiyonunun α . mertebeden sol taraflı Caputo-Fabrizio kesirli integrali
- $({}^{C\Omega} I_{\eta_2}^{\alpha} \Omega)(\varkappa_1)$: Ω fonksiyonunun α . mertebeden sağ taraflı Caputo-Fabrizio kesirli integrali
- $I_{\eta_1+h}^{\alpha} w(\varkappa_1)$: w fonksiyonunun α . mertebeden sol taraflı Genelleştirilmiş kesirli integrali
- $I_{\eta_2-h}^{\alpha} w(\varkappa_1)$: w fonksiyonunun α . mertebeden sağ taraflı Genelleştirilmiş kesirli integrali
- $({}_{\eta_1} I^{\alpha, \beta} \Omega)(\varkappa_1)$: Ω fonksiyonunun α . mertebeden sol taraflı Riemann-Liouville kotanjant kesirli integrali
- $(I_{\eta_2}^{\alpha, \beta} \Omega)(\varkappa_1)$: Ω fonksiyonunun α . mertebeden sağ taraflı Riemann-Liouville kotanjant kesirli integrali

1. GİRİŞ

Matematikte eşitsizlik kavramı, iki değerin birbirine göre durumlarını ifade etmek için kullanılan önemli bir araçtır. Bu kavramın kökenleri, 18. yüzyılda Leonhard Euler tarafından kullanıldığı düşünölmektedir. İlk olarak küçüktür ($<$) ve büyüktür ($>$) işaretlerini kullanan İngiliz matematikçi Thomas Harriot'tur. Eşitsizlik teorisinin temelleri, Gauss, Cauchy, Chebyshev gibi ünlü matematikçiler tarafından atılmıştır.

Eşitsizliklerin matematiğin birçok alanında uygulamaları bulunmaktadır ve son yıllarda bu alandaki araştırmalar hız kazanmıştır. Özellikle Hadamard, Ostrowski, Jensen, Opial gibi eşitsizlik tipleri, matematiğin çeşitli dallarında sıkça kullanılmaktadır.

Konvekslik kavramı ise M.Ö. Arşimed dönemine kadar uzanmasına rağmen matematik literatüründe 19. yüzyılda yer almaya başlamıştır (Heath, 2002). Konveks fonksiyonlarla ilgili sistematik çalışmalar, Jensen (Jensen, 1906) tarafından 1905-1906 yıllarında başlatılmış ve A.W. Roberts ile D.E. Varberg'in "Convex Functions" adlı eserinde yayınlanmıştır (Roberts and Varberg, 1973). Konvekslik kavramı, eşitsizliklerle sıkı bir şekilde ilişkilendirilmiştir ve konveks fonksiyonlar teorisinde eşitsizlik kavramı büyük bir öneme sahiptir. Kesirli analizin ortaya çıkışı ise, 1695 yılında Leibniz'e, LHôpital tarafından yöneltilen bir soruyla başlar:

" $n \in N = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ olmak üzere dx_2/dx_1 notasyonun da $n = 1/2$ olursa ne olur?"

Leibniz, bu soruya "Bir paradoks gibi görünen bir gün yararlı bir sonuç olarak ortaya çıkacaktır." şeklinde cevap vermiştir (Oldham and Spanier, 1974). Kesirli analizin geçmişı, son üç yüzyıla dayanmasına rağmen, mühendislik ve bilim camiasında yeterince takdir görmemiştir. Ancak yapılan çalışmalar, kesirli analizle elde edilen modellerin, yaşamı daha doğru bir şekilde yorumlamamızı sağladığını ve daha gerçekçi durumlarla karşılaşmamıza yardımcı olduğunu göstermektedir. Bu durum, gelecekte kesirli analizle ilgili birçok uygulamanın ortaya çıkacağı ve konunun giderek daha fazla değer kazanacağı bir işarettir. Literatürde Hardy, Hadamard, Jensen gibi matematikçilerin eşitsizlikler ve konveks fonksiyonlar üzerine temel çalışmaları bulunmaktadır. Son yıllarda, kesirli integral kavramının gelişimiyle birlikte konveks fonksiyonlar ve eşitsizlikler alanında yeni çalışmalar yapılmıştır. Bu çalışmalar, kesirli integral operatörleri kullanılarak Hermite-Hadamard Mer-

cer tipi eşitsizliklerin elde edilmesini sağlamıştır.

Eşitsizlikler ve konveks fonksiyonlar, matematiğin birçok alanında hayati bir rol oynar. Bu konularla ilgili ilk derinlemesine inceleme, Hardy, Littlewood ve Polya tarafından 1934'te kaleme alınan "Inequalities" adlı kitapla başlar (Hardy et al., 1952). Daha sonra, E. F. Beckenbach ve R. Bellman tarafından 1961'de yayımlanan "Inequalities" adlı ikinci kitap (Beckenbach and Bellman, 1961), 1934 ile 1960 arasındaki döneme odaklanarak eşitsizliklerle ilgili çarpıcı sonuçları içerir. 1970 yılında ise Mitrinović tarafından yayımlanan "Analytic Inequalities" adlı kitap (Mitrinovic and Vasic, 1970), önceki iki kaynakta bulunmayan yeni konuları ele alır. Bu üç ana kaynağın yanı sıra, Mitrinović ve diğerleri (1993), Pachpatte (2005) ve daha sonraki yıllarda Dragomir ve Agarwal (Dragomir and Agarwal, 2000), Lakshmikantham (Lakshmikantham and Trigiante, 2002) gibi araştırmacılar tarafından eşitsizliklerle ilgili pek çok kitap, makale ve monografi yazılmıştır. Son yıllarda eşitsizlikler, farklı alanlarda giderek artan kullanımları ve bilime yeni perspektifler kazandırma potansiyelleri sayesinde büyük bir ilgiyle karşılanmıştır. Bu bağlamda öne çıkan en önemli eşitsizliklerden biri, Chebyshev eşitsizliği (Chebyshev, 1867) olarak bilinen ve geniş bir uygulama yelpazesi olan eşitsizliktir.

Bu tezin amacı , literatürdeki kesirli integral formlarından yararlanarak modifiye edilmiş konveks fonksiyonlar sınıfı için kesirli Hermite-Hadamard integral eşitsizlikleri elde etmektir. Tezin ikinci bölümünde, modifiye edilmiş konveks fonksiyonlar sınıfı kullanılarak, Riemann-Liouville kesirli integralinin kotanjant formu yardımıyla Chebyshev tipli eşitsizlikler bularak matematik literatürüne özgün bir katkı sağlamaktadır.

2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde tez çalışması kapsamında gerekli olan tanım, teorem ve önemli bazı temel özelliklere yer verilecektir.

2.1. Konvekslikle İlgili Bazı Temel Terimler

Tanım 2.1 (Konveks Küme): L bir lineer uzay ve $\eta_1 \subseteq L$ olsun. Eğer $\eta_1, \eta_2 \in \eta_1$ olmak üzere

$$\eta_2 = \{z \in L : z = \tau\eta_1 + (1 - \tau)\eta_2, 0 \leq \tau \leq 1\} \subseteq \eta_1$$

ise η_1 kümesine konveks küme denir.

Geometrik olarak η_2 kümesi uç noktaları \varkappa_1 ve \varkappa_2 olan bir doğru parçasıdır. Öyleki, konveks küme boş olmayan ve herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçasını ihtiva eden kümedir (Bayraktar, 2000).

Tanım 2.2 (Konveks Fonksiyon): I, \mathbb{R} 'de bir aralık ve $\Omega : I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $\eta_1, \eta_2 \in I$ ve $\tau \in [0, 1]$ için

$$\Omega(\tau\eta_1 + (1 - \tau)\eta_2) \leq \tau\Omega(\eta_1) + (1 - \tau)\Omega(\eta_2)$$

şartı sağlanırsa Ω fonksiyonuna konveks fonksiyon denir. Eğer $\eta_1 \neq \eta_2$ ve $\tau \in (0, 1)$ için fonksiyon

$$\Omega(\tau\eta_1 + (1 - \tau)\eta_2) < \tau\Omega(\eta_1) + (1 - \tau)\Omega(\eta_2)$$

şartı sağlanıyorsa bu fonksiyona da kesin konveks fonksiyon denir (Niculescu and Persson, 2006).

Tanım 2.3 (Quasi Konveks Fonksiyon) $\Omega : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I üzerinde quasi konveks fonksiyon olarak adlandırılır ,

$$\Omega(\tau\eta_1 + (1 - \tau)\eta_2) \leq \max \{\Omega(\eta_1), \Omega(\eta_2)\} \quad (2.1)$$

herhangi bir $\eta_1, \eta_2 \in I, \tau \in [0, 1]$ için geçerlidir (Ion, 2007).

Tanım 2.4 (Üstel Konveks Fonksiyon) $I \subseteq \mathbb{R}$ olsun. $\Omega : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu her $\eta_1, \eta_2 \in I, \tau \in [0, 1]$ ve $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ için

$$\Omega(\tau\eta_1 + (1 - \tau)\eta_2) \leq \tau e^{\alpha_1\eta_1} \Omega(\eta_1) + (1 - \tau) e^{\alpha_1\eta_2} \Omega(\eta_2) \quad (2.2)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa üstel konveks olduğu söylenir (Awan et al., 2018).

Tanım 2.5 (Trigonometrik Konveks Fonksiyon) Negatif olmayan bir $\Omega : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu eğer $\eta_1, \eta_2 \in I$ ve $\tau \in [0, 1]$ için

$$\Omega(\tau\eta_1 + (1 - \tau)\eta_2) \leq \left(\frac{\sin \pi\tau}{2} \right) \Omega(\eta_1) + \left(\frac{\cos \pi\tau}{2} \right) \Omega(\eta_2) \quad (2.3)$$

eşitsizliği sağlanırsa I aralığında trigonometrik konveks fonksiyon olarak adlandırılır (Kadakal, 2018).

Tanım 2.6 (Üstel Trigonometrik Konveks Fonksiyon) $I \subseteq \mathbb{R}$ bir aralık olsun. $\Omega : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu eğer her $\eta_1, \eta_2 \in I$ ve $\tau \in [0, 1]$ için

$$\Omega(\tau\eta_1 + (1 - \tau)\eta_2) \leq \frac{\sin \frac{\pi\tau}{2}}{e^{1-\tau}} \Omega(\eta_1) + \frac{\cos \frac{\pi\tau}{2}}{e^\tau} \Omega(\eta_2) \quad (2.4)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa üstel trigonometrik konveks fonksiyon olarak adlandırılır (Kadakal et al., 2021a).

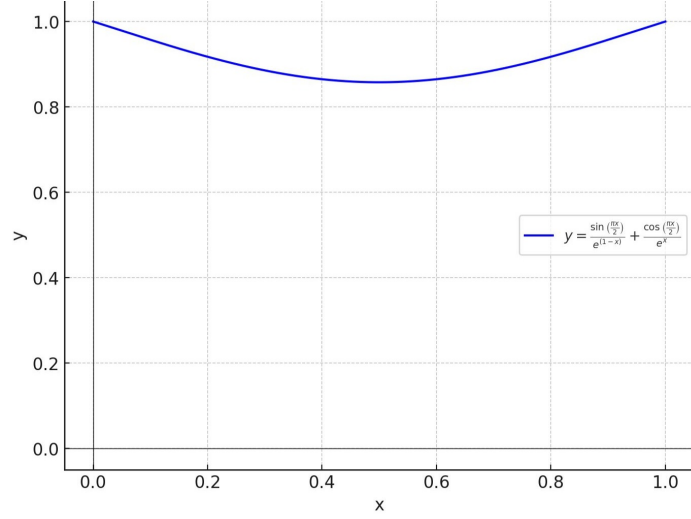
Not 2.1 Her $\tau \in [0, 1]$ için $h(\tau) = \frac{\sin \frac{\pi\tau}{2}}{e^{1-\tau}} + \frac{\cos \frac{\pi\tau}{2}}{e^\tau}$ ifadesi $0 \leq h(\tau) \leq 1$ aralığında yer alır. Tanım 2.6 ifadesinde yer alan üstel trigonometrik konveks fonksiyon tanımına göre tüm $\eta_1 \in I$ için

$$\begin{aligned} \Omega(\eta_1) &= \Omega(\tau\eta_1 + (1 - \tau)\eta_1) \\ &\leq \frac{\sin \frac{\pi\tau}{2}}{e^{1-\tau}} \Omega(\eta_1) + \frac{\cos \frac{\pi\tau}{2}}{e^\tau} \Omega(\eta_1) \\ &= \Omega(\eta_1) \left(\frac{\sin \frac{\pi\tau}{2}}{e^{1-\tau}} + \frac{\cos \frac{\pi\tau}{2}}{e^\tau} \right) \\ &= \Omega(\eta_1) h(\tau) \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$(1 - h(\tau))\Omega(\eta_1) \leq 0$$

sonucuna varılır. Bu durum $\Omega(\eta_1) \leq 0$ olduğunu gösterir.



Şekil 2.1. Üstel trigonometrik konveks fonksiyonun katsayılar toplamı

Tanım 2.7 (Üstel Quasi Konveks Fonksiyon) $\Omega : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu her $\eta_1, \eta_2 \in I$, $\tau \in [0, 1]$ ve $\varkappa_1 \in \mathbb{R}$ için

$$\Omega(\tau\eta_1 + (1 - \tau)\eta_2) \leq \max\{e^{\varkappa_1\eta_1}\Omega(\eta_1), e^{\varkappa_1\eta_2}\Omega(\eta_2)\} \quad (2.5)$$

eşitsizliği sağlanırsa üstel quasi konveks fonksiyon olarak adlandırılır (Latif and Alomari, 2009).

Tanım 2.8 (Trigonometrik Quasi Konveks Fonksiyon) $I \subseteq \mathbb{R}$ bir aralık olsun. $\Omega : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu her $\eta_1, \eta_2 \in I$ ve $\tau \in [0, 1]$ için

$$\Omega(\tau\eta_1 + (1 - \tau)\eta_2) \leq \left(\sin \frac{\pi\tau}{2} + \cos \frac{\pi\tau}{2}\right) \max\{\Omega(\eta_1), \Omega(\eta_2)\} \quad (2.6)$$

eşitsizliği sağlanırsa trigonometrik quasi konveks fonksiyon olarak adlandırılır (Numan and İşcan, 2021).

Tanım 2.9 (Senkronize Fonksiyon): Ω ve ϱ fonksiyonları $[\eta_1, \eta_2]$ kapalı aralığında sürekli iki fonksiyon olsun. Her $\varkappa_1, \varkappa_2 \in [\eta_1, \eta_2]$ için

$$(\Omega(\varkappa_1) - \Omega(\varkappa_2))(\varrho(\varkappa_1) - \varrho(\varkappa_2)) \geq 0 \quad (2.7)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa bu fonksiyonlara senkronize fonksiyonlar denir.

Tanım 2.10 (Gama Fonksiyonu): $\Gamma : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı fonksiyon ve $\varkappa_1 > 0$ için

$$\Gamma(\varkappa_1) = \int_0^{\infty} \tau^{\varkappa_1-1} e^{-\tau} d\tau \quad (2.8)$$

şeklinde parametreye bağlı genelleştirilmiş integrale Gama fonksiyonu veya ikinci çeşit Euler integrali denir (Kannappan, 2009).

(2.8) ile ifade edilen fonksiyon için

i) $0 < \varkappa_1 < \infty$ yakınsak

ii) $\varkappa_1 \leq 0$ için ıraksaktır.

⇒Gama fonksiyonuna ait bazı özellikler

i) $\varkappa_1 > 0$ için $\Gamma(\varkappa_1 + 1) = \varkappa_1 \Gamma(\varkappa_1)$

ii) $\Gamma(\varkappa_1) = (\varkappa_1 - 1)!$

iii) $\Gamma(1) = 0! = 1$

iv) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

2.2. Bazı İyi Bilinen Eşitsizlikler

Teorem 2.1 (Hermite-Hadamard Eşitsizliği): I, \mathbb{R}' 'de bir aralık, $\eta_1, \eta_2 \in I$, ve $\eta_1 < \eta_2$ olmak üzere $\Omega : I \rightarrow \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\Omega\left(\frac{\eta_1 + \eta_2}{2}\right) \leq \frac{1}{\eta_2 - \eta_1} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \Omega(\varkappa_1) d\varkappa_1 \leq \frac{\Omega(\eta_1) + \Omega(\eta_2)}{2}$$

eşitsizliği geçerlidir (Pearce et al., 1998).

İspat (1.Yöntem) Hermite- Hadamard eşitsizliğinin literatürde varolan iki ispatı aşağıda verilecektir. Ω fonksiyonu $[\eta_1, \eta_2]$ aralığında konveks yani (η_1, η_2) aralığında sürekli ve $[\eta_1, \eta_2]$ aralığında sınırlı olduğundan integrallenebilirdir. Konveksliğin geometrik yorumundan eşitsizliğin sağ tarafının ispatı açıktır. $\varkappa_1 = \tau\eta_1 + (1 - \tau)\eta_2$ ve $\tau \in [0, 1]$ için

$$\begin{aligned} \frac{1}{\eta_2 - \eta_1} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \Omega(\varkappa_1) d\varkappa_1 &= \int_0^1 \Omega(\tau\eta_1 + (1 - \tau)\eta_2) d\tau \\ &\leq \Omega(\eta_1) \int_0^1 \tau d\tau + \Omega(\eta_2) \int_0^1 (1 - \tau) d\tau \\ &= \frac{\Omega(\eta_1) + \Omega(\eta_2)}{2} \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir. Ayrıca belirli integralin parçalanışından

$$\frac{1}{\eta_2 - \eta_1} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \Omega(\varkappa_1) d\varkappa_1 = \frac{1}{\eta_2 - \eta_1} \left(\int_{\eta_1}^{\frac{\eta_1 + \eta_2}{2}} \Omega(\varkappa_1) d\varkappa_1 + \int_{\frac{\eta_1 + \eta_2}{2}}^{\eta_2} \Omega(\varkappa_1) d\varkappa_1 \right)$$

olarak yazılabilir. Burada eşitsizliğin sağında $\varkappa_1 = \eta_1 + \frac{\tau(\eta_2 - \eta_1)}{2}$ için

$$\int_{\eta_1}^{\frac{\eta_1 + \eta_2}{2}} \Omega(\varkappa_1) d\varkappa_1 = \frac{\eta_2 - \eta_1}{2} \int_0^1 \Omega\left(\eta_1 + \frac{\tau(\eta_2 - \eta_1)}{2}\right) d\tau$$

ve $\varkappa_1 = \eta_2 - \frac{\tau(\eta_2 - \eta_1)}{2}$ için

$$\begin{aligned} \frac{1}{\eta_2 - \eta_1} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \Omega(\varkappa_1) d\varkappa_1 &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\Omega\left(\eta_1 + \frac{\tau(\eta_2 - \eta_1)}{2}\right) + \Omega\left(\eta_2 - \frac{\tau(\eta_2 - \eta_1)}{2}\right) \right] d\tau \\ &\geq \Omega\left(\frac{\eta_1 + \eta_2}{2}\right) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece her iki eşitsizlikte ispatlanmış olur.

Hermite-Hadamard eşitsizliğinin farklı bir ispatı ise aşağıdaki gibi verilebilir;

İspat (2.Yöntem) Ω fonksiyonu konveks olduğundan fonksiyon grafiği üzerinde alınan herhangi iki noktayı birleştiren doğru parçasının fonksiyon grafiğinin üzerinde olduğu bilinmektedir. Buna göre

$$\Omega(\varkappa_1) \leq \Omega(\eta_1) + \frac{\Omega(\eta_2) - \Omega(\eta_1)}{\eta_2 - \eta_1} (\varkappa_1 - \eta_1)$$

eşitsizliği mevcuttur. Bu eşitsizlikte her iki taraf $[\eta_1, \eta_2]$ aralığı üzerinde \varkappa_1 değişkenine göre integre edilirse

$$\begin{aligned} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \Omega(\varkappa_1) d\varkappa_1 &\leq \int_{\eta_1}^{\eta_2} \Omega(\eta_1) d\varkappa_1 + \frac{\Omega(\eta_2) - \Omega(\eta_1)}{\eta_2 - \eta_1} \int_{\eta_1}^{\eta_2} (\varkappa_1 - \eta_1) d\varkappa_1 \\ &= \frac{\Omega(\eta_1) + \Omega(\eta_2)}{2} \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca sol tarafın ispatına gelindiğinde, sırasıyla $\varkappa_1 = \frac{\eta_1 + \eta_2 - \tau(\eta_2 - \eta_1)}{2}$ ve $\varkappa_1 = \frac{\eta_1 + \eta_2 + \tau(\eta_2 - \eta_1)}{2}$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\eta_2 - \eta_1} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \Omega(\varkappa_1) d\varkappa_1 \\ &= \frac{1}{\eta_2 - \eta_1} \int_{\eta_1}^{\frac{\eta_1 + \eta_2}{2}} \Omega(\varkappa_1) d\varkappa_1 + \frac{1}{\eta_2 - \eta_1} \int_{\frac{\eta_1 + \eta_2}{2}}^{\eta_2} \Omega(\varkappa_1) d\varkappa_1 \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\Omega\left(\frac{\eta_1 + \eta_2 - \tau(\eta_2 - \eta_1)}{2}\right) + \Omega\left(\frac{\eta_1 + \eta_2 + \tau(\eta_2 - \eta_1)}{2}\right) \right] d\tau \\ &\geq \Omega\left(\frac{\eta_1 + \eta_2}{2}\right) \end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Teorem 2.2 (İntegraller İçin Hölder Eşitsizliği): $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. Ω ve ϱ , $[\eta_1, \eta_2]$ aralığında tanımlı ve integrallenebilen iki fonksiyon, $|\Omega|^p$ ve $|\varrho|^q$, $[\eta_1, \eta_2]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise,

$$\int_{\eta_1}^{\eta_2} |\Omega(\varkappa_1) \varrho(\varkappa_1)| d\varkappa_1 \leq \left(\int_{\eta_1}^{\eta_2} |\Omega(\varkappa_1)|^p d\varkappa_1 \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\eta_1}^{\eta_2} |\varrho(\varkappa_1)|^q d\varkappa_1 \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir (Mitrinovic et al., 1993).

İspat $\varkappa_1 \rightarrow \varkappa_1^p$ fonksiyonu $(0, \infty)$ aralığında konvektir. Çünkü $p \geq 1$, yani Jensen eşitsizliğine göre

$$\int \mu dv \leq \left(\int \mu^p dv \right)^{\frac{1}{p}}$$

Burada v , herhangi bir olasılık dağılımı ve herhangi bir v -ölçülebilir bir fonksiyondur. u herhangi bir ölçü olsun ve

$$dv = \frac{\varrho^q}{\int \varrho^q du} du$$

Dolayısıyla $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ kullanarak $p(1 - q) + q = 0$ elde ederiz ve $\mu = \Omega \varrho^{1-q}$ kabul ederiz

$$\begin{aligned} \int \Omega \varrho du &= \left(\int \varrho^q du \right) \int \mu dv \\ &= \left(\int \varrho^q du \right) \int \Omega \varrho^{1-q} \frac{\varrho^q}{\int \varrho^q du} du \\ &\leq \left(\int \varrho^q du \right) \left(\int \Omega^p \varrho^{p(1-q)} \frac{\varrho^q}{\int \varrho^q du} du \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int \varrho^q du \right) \left(\int \frac{\Omega^p}{\int \varrho^q du} du \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan

$$\int \Omega \varrho du \leq \left(\int \Omega^p du \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int \varrho^q du \right)^{\frac{1}{q}}$$

yazılabilir. Bu durum Ω ve ϱ 'nin gerçek olduğunu ve negatif olmadığını varsayımıyla yazılabilir ve karmaşık fonksiyonların genişletilmesi elde edilebilir. Ayrıca $\|\Omega\|_p$, $\|\varrho\|_q$ ne sıfır ne de sonsuzdur ve $p, q > 1$ için geçerlidir.

Hölder eşitsizliğinin bir sonucu olan Power Mean eşitsizliği aşağıdaki gibidir.

Teorem 2.3 (Power Mean Eşitsizliği): Ω ve ϱ , $[\eta_1, \eta_2]$ aralığında tanımlı ve integrallenebilen iki fonksiyon olsun. $q \geq 1$, $|\Omega|$ ve $|\varrho|^q$, $[\eta_1, \eta_2]$ aralığında integrallenebilen fonksiyonlar ise

$$\int_{\eta_1}^{\eta_2} |\Omega(\varkappa_1) \varrho(\varkappa_1)| d\varkappa_1 \leq \left(\int_{\eta_1}^{\eta_2} |\Omega(\varkappa_1)| d\varkappa_1 \right)^{1 - \frac{1}{q}} \left(\int_{\eta_1}^{\eta_2} |\varrho(\varkappa_1)|^q d\varkappa_1 \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Teorem 2.4 (Ostrowski Eşitsizliği): $\Omega : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I° üzerinde diferansiyellenebilen bir fonksiyon, $\eta_1, \eta_2 \in I$ ve $\eta_1 < \eta_2$ olsun. Eğer her $\varkappa_1 \in [\eta_1, \eta_2]$ için $|\Omega'(\varkappa_1)| < M$ ise, bu takdirde aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\left| \Omega(\varkappa_1) - \frac{1}{\eta_2 - \eta_1} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \Omega(\tau) d\tau \right| \leq M(\eta_2 - \eta_1) \left[\frac{1}{4} + \frac{(\varkappa_1 - \frac{\eta_1 + \eta_2}{2})^2}{(\eta_2 - \eta_1)^2} \right]$$

Burada, $\frac{1}{4}$ sabiti en iyi katsayıdır ve daha küçük bir katsayı ile yer değiştiremez (Ostrowski, 1937). Bu eşitsizlik literatürde $\varkappa_1 \in [\eta_1, \eta_2]$ noktasında $\Omega(\varkappa_1)$ değerinin $\frac{1}{\eta_2 - \eta_1} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \Omega(\tau) d\tau$ integral ortalamasına yaklaşımı için bir üst sınır veren Ostrowski integral eşitsizliği olarak adlandırılır (Baloch and İşcan., 2015). Ostrowski integral eşitsizliği başka formda da aşağıdaki gibi verilebilir.

$$\left| \Omega(\varkappa_1) - \frac{1}{\eta_2 - \eta_1} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \Omega(\tau) d\tau \right| \leq \frac{M}{\eta_2 - \eta_1} \left[\frac{(\varkappa_1 - \eta_1)^2 + (\eta_2 - \varkappa_1)^2}{2} \right]$$

İspat Bu teoremi ispatlamak için aşağıdaki eşitlik kullanılacaktır. $\Omega : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $(\eta_1, \eta_2) \subset I$ 'de diferansiyellenebilen bir fonksiyon olduğundan $\varkappa_1 \in (\eta_1, \eta_2)$ için

$$C(\varkappa_1, \tau) = \begin{cases} \tau - \eta_1, & \tau \in [\eta_1, \varkappa_1) \\ \tau - \eta_2, & \tau \in [\varkappa_1, \eta_2] \end{cases}$$

olmak üzere

$$\Omega(\varkappa_1) = \frac{1}{\eta_2 - \eta_1} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \Omega(\tau) d\tau + \frac{1}{\eta_2 - \eta_1} \int_{\eta_1}^{\eta_2} C(\varkappa_1, \tau) \Omega'(\tau) d\tau$$

$$\begin{aligned} & \Omega(\varkappa_1) - \frac{1}{\eta_2 - \eta_1} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \Omega(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\eta_2 - \eta_1} \int_{\eta_1}^{\eta_2} C(\varkappa_1, \tau) \Omega'(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\eta_2 - \eta_1} \int_{\eta_1}^{\varkappa_1} (\tau - \eta_1) \Omega'(\tau) d\tau + \frac{1}{\eta_2 - \eta_1} \int_{\varkappa_1}^{\eta_2} (\tau - \eta_2) \Omega'(\tau) d\tau \end{aligned}$$

yazılır. Bu durumda yukarıdaki eşitliğin her iki tarafının mutlak değeri alınıp üçgen eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} & \left| \Omega(\varkappa_1) - \frac{1}{\eta_2 - \eta_1} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \Omega(\tau) d\tau \right| \\ &= \left| \frac{1}{\eta_2 - \eta_1} \int_{\eta_1}^{\varkappa_1} (\tau - \eta_1) \Omega'(\tau) d\tau + \frac{1}{\eta_2 - \eta_1} \int_{\varkappa_1}^{\eta_2} (\tau - \eta_2) \Omega'(\tau) d\tau \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left| \Omega(\varkappa_1) - \frac{1}{\eta_2 - \eta_1} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \Omega(\tau) d\tau \right| \\ & \leq \frac{1}{\eta_2 - \eta_1} \int_{\eta_1}^{\varkappa_1} |\tau - \eta_1| |\Omega'(\tau)| d\tau + \frac{1}{\eta_2 - \eta_1} \int_{\varkappa_1}^{\eta_2} |\tau - \eta_2| |\Omega'(\tau)| d\tau \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca $|\Omega'(\varkappa_1)| < M$ olduğundan

$$\begin{aligned} & \left| \Omega(\varkappa_1) - \frac{1}{\eta_2 - \eta_1} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \Omega(\tau) d\tau \right| \\ & \leq \frac{M}{\eta_2 - \eta_1} \int_{\eta_1}^{\varkappa_1} |\tau - \eta_1| d\tau + \frac{M}{\eta_2 - \eta_1} \int_{\varkappa_1}^{\eta_2} |\tau - \eta_2| d\tau \\ & = \frac{M}{\eta_2 - \eta_1} \left[\int_{\eta_1}^{\varkappa_1} (\tau - \eta_1) d\tau + \int_{\varkappa_1}^{\eta_2} (\eta_2 - \tau) d\tau \right] \\ & = \frac{M}{\eta_2 - \eta_1} \left[\left(\frac{\varkappa_1^2}{2} - \varkappa_1 \eta_1 - \frac{\eta_1^2}{2} + \eta_1^2 \right) + \left(\eta_2^2 - \frac{\eta_2^2}{2} - \eta_2 \varkappa_1 + \frac{\varkappa_1^2}{2} \right) \right] \\ & = \frac{M}{\eta_2 - \eta_1} \left[\frac{(\varkappa_1 - \eta_1)^2 + (\eta_2 - \varkappa_1)^2}{2} \right] \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} & (\varkappa_1 - \eta_1)^2 + (\eta_2 - \varkappa_1)^2 \\ & = \left(\varkappa_1 - \frac{\eta_1 + \eta_2}{2} + \frac{\eta_1 + \eta_2}{2} - \eta_1 \right)^2 + \left(\eta_2 - \frac{\eta_1 + \eta_2}{2} + \frac{\eta_1 + \eta_2}{2} - \varkappa_1 \right)^2 \\ & = \left(\varkappa_1 - \frac{\eta_1 + \eta_2}{2} \right)^2 + 2 \left(\varkappa_1 - \frac{\eta_1 + \eta_2}{2} \right) \left(\frac{\eta_2 - \eta_1}{2} \right) + \left(\frac{\eta_2 - \eta_1}{2} \right)^2 \\ & \quad + \left(\frac{\eta_2 - \eta_1}{2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\eta_1 + \eta_2}{2} - \varkappa_1 \right) \left(\frac{\eta_2 - \eta_1}{2} \right) + \left(\frac{\eta_1 + \eta_2}{2} - \varkappa_1 \right)^2 \\ & = 2 \left(\varkappa_1 - \frac{\eta_1 + \eta_2}{2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\eta_2 - \eta_1}{2} \right)^2 \\ & = 2(\eta_2 - \eta_1) \left[\frac{1}{4} + \frac{\left(\varkappa_1 - \frac{\eta_1 + \eta_2}{2} \right)^2}{(\eta_2 - \eta_1)^2} \right] \end{aligned}$$

yazılır. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 2.5 (Simpson Eşitsizliği): $I = [\eta_1, \eta_2]$ ve $\Omega : I \rightarrow \mathbb{R}$, (η_1, η_2) üzerinde dördüncü mertebeden türevi sürekli olan bir fonksiyon ve $\|\Omega^{(4)}\| = \sup_{\varkappa_1 \in (\eta_1, \eta_2)} |\Omega^{(4)}| < \infty$ olsun.

Bu durumda,

$$\left| \frac{1}{3} \left[\frac{\Omega(\eta_1) + \Omega(\eta_2)}{2} + 2\Omega \left(\frac{\eta_1 + \eta_2}{2} \right) \right] - \frac{1}{\eta_2 - \eta_1} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \Omega(\varkappa_1) d\varkappa_1 \right| \leq \frac{1}{2880} \|\Omega^{(4)}\|_{\infty} (\eta_2 - \eta_1)^4$$

eşitsizliği geçerlidir. Bu eşitsizlik literatürde Simpson eşitsizliği olarak bilinmektedir (Dragomir et al., 1999).

İspat $I = [\eta_1, \eta_2]$ ve $\Omega : I \rightarrow \mathbb{R}$ (η_1, η_2) üzerinde dördüncü mertebeden türevi sürekli olan bir fonksiyon ve $\|\Omega^{(4)}\| = \sup_{\varkappa_1 \in (\eta_1, \eta_2)} |\Omega^{(4)}| < \infty$ olmak üzere $C(\varkappa_1)$ fonksiyonunu

$$C(\varkappa_1) = \begin{cases} \frac{1}{24}(\varkappa_1 - \eta_1)^3 \left(\varkappa_1 - \frac{\eta_1 + 2\eta_2}{3} \right), & \varkappa_1 \in \left[\eta_1, \frac{\eta_1 + \eta_2}{2} \right) \\ \frac{1}{24}(\varkappa_1 - \eta_2)^3 \left(\varkappa_1 - \frac{2\eta_1 + \eta_2}{3} \right), & \varkappa_1 \in \left[\frac{\eta_1 + \eta_2}{2}, \eta_2 \right] \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. Bu durumda verilen eşitlikten

$$\begin{aligned} \int_{\eta_1}^{\eta_2} C(\varkappa_1) \Omega^{(4)}(\varkappa_1) d\varkappa_1 &= \int_{\eta_1}^{\frac{\eta_1 + \eta_2}{2}} \frac{1}{24}(\varkappa_1 - \eta_1)^3 \left(\varkappa_1 - \frac{\eta_1 + 2\eta_2}{3} \right) \Omega^{(4)}(\varkappa_1) d\varkappa_1 \\ &+ \int_{\frac{\eta_1 + \eta_2}{2}}^{\eta_2} \frac{1}{24}(\varkappa_1 - \eta_2)^3 \left(\varkappa_1 - \frac{2\eta_1 + \eta_2}{3} \right) \Omega^{(4)}(\varkappa_1) d\varkappa_1 \end{aligned}$$

yazılır. Yukardaki integraller için mutlak değer özelliği dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\eta_1}^{\eta_2} C(\varkappa_1) \Omega^{(4)}(\varkappa_1) d\varkappa_1 \right| \\ &\leq \int_{\eta_1}^{\frac{\eta_1 + \eta_2}{2}} \frac{1}{24} |\varkappa_1 - \eta_1|^3 \left| \varkappa_1 - \frac{\eta_1 + 2\eta_2}{3} \right| |\Omega^{(4)}(\varkappa_1)| d\varkappa_1 \\ &+ \int_{\frac{\eta_1 + \eta_2}{2}}^{\eta_2} \frac{1}{24} |\varkappa_1 - \eta_2|^3 \left| \varkappa_1 - \frac{2\eta_1 + \eta_2}{3} \right| |\Omega^{(4)}(\varkappa_1)| d\varkappa_1 \\ &\leq \frac{\|\Omega^{(4)}\|_{\infty}}{24} \left[\int_{\eta_1}^{\frac{\eta_1 + \eta_2}{2}} (\varkappa_1 - \eta_1)^3 \left(-\varkappa_1 + \frac{\eta_1 + 2\eta_2}{3} \right) d\varkappa_1 \right. \\ &\quad \left. + \int_{\frac{\eta_1 + \eta_2}{2}}^{\eta_2} (\eta_2 - \varkappa_1)^3 \left(\varkappa_1 - \frac{2\eta_1 + \eta_2}{3} \right) d\varkappa_1 \right] \\ &\leq \frac{\|\Omega^{(4)}\|_{\infty}}{2880} (\eta_2 - \eta_1)^5 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\eta_1}^{\frac{\eta_1+\eta_2}{2}} \frac{1}{24} (\varkappa_1 - \eta_1)^3 \left(\varkappa_1 - \frac{\eta_1 + 2\eta_2}{3} \right) \Omega^{(4)}(\varkappa_1) d\varkappa_1 \right. \\ & \quad \left. + \int_{\frac{\eta_1+\eta_2}{2}}^{\eta_2} \frac{1}{24} (\varkappa_1 - \eta_2)^3 \left(\varkappa_1 - \frac{2\eta_1 + \eta_2}{3} \right) \Omega^{(4)}(\varkappa_1) d\varkappa_1 \right| \\ & \leq \frac{\|\Omega^{(4)}\|_{\infty}}{2880} (\eta_1 - \eta_2)^5 \end{aligned}$$

yazılır. Bu eşitsizliğin sol kısmında kısmi integrasyon yöntemi uygulanırsa

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\eta_1}^{\frac{\eta_1+\eta_2}{2}} \frac{1}{24} (\varkappa_1 - \eta_1)^3 \left(\varkappa_1 - \frac{\eta_1 + 2\eta_2}{3} \right) \Omega^{(4)}(\varkappa_1) d\varkappa_1 \right. \\ & \quad \left. + \int_{\frac{\eta_1+\eta_2}{2}}^{\eta_2} \frac{1}{24} (\varkappa_1 - \eta_2)^3 \left(\varkappa_1 - \frac{2\eta_1 + \eta_2}{3} \right) \Omega^{(4)}(\varkappa_1) d\varkappa_1 \right| \\ & = \left| -\frac{2}{3} (\eta_2 - \eta_1) \Omega \left(\frac{\eta_1 + \eta_2}{2} \right) - \frac{1}{6} (\eta_2 - \eta_1) [\Omega(\eta_1) + \Omega(\eta_2)] + \int_{\eta_1}^{\eta_2} \Omega(\varkappa_1) d\varkappa_1 \right| \\ & \leq \frac{\|\Omega^{(4)}\|_{\infty}}{2880} (\eta_2 - \eta_1)^5 \end{aligned}$$

eşitsizliği yazılır. Son durumda

$$\begin{aligned} & \left| -\frac{2}{3} (\eta_2 - \eta_1) \Omega \left(\frac{\eta_1 + \eta_2}{2} \right) - \frac{1}{6} (\eta_2 - \eta_1) [\Omega(\eta_1) + \Omega(\eta_2)] + \int_{\eta_1}^{\eta_2} \Omega(\varkappa_1) d\varkappa_1 \right| \\ & \leq \frac{\|\Omega^{(4)}\|_{\infty}}{2880} (\eta_2 - \eta_1)^5 \end{aligned}$$

olup eşitsizliğin her iki tarafı $(\eta_2 - \eta_1)$ ile bölünürse

$$\left| \frac{1}{3} \left[\frac{\Omega(\eta_1) + \Omega(\eta_2)}{2} + 2\Omega \left(\frac{\eta_1 + \eta_2}{2} \right) \right] - \frac{1}{\eta_2 - \eta_1} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \Omega(\varkappa_1) d\varkappa_1 \right| \leq \frac{1}{2880} \|\Omega^{(4)}\|_{\infty} (\eta_2 - \eta_1)^4$$

eşitsizliği elde edilir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 2.6 (İntegraller İçin Minkowski Eşitsizliği): Ω ve ϱ , $[\eta_1, \eta_2]$ kapalı aralığı üzerinde tanımlı reel değerli iki fonksiyon ve $p > 1$ için,

$$\int_{\eta_1}^{\eta_2} |\Omega(\varkappa_1)|^p d\varkappa_1 < \infty$$

ve

$$\int_{\eta_1}^{\eta_2} |\varrho(\varkappa_1)|^p d\varkappa_1 < \infty$$

olsun. Bu halde,

$$\left(\int_{\eta_1}^{\eta_2} |\Omega(\varkappa_1) + \varrho(\varkappa_1)|^p d\varkappa_1 \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_{\eta_1}^{\eta_2} |\Omega(\varkappa_1)|^p d\varkappa_1 \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{\eta_1}^{\eta_2} |\varrho(\varkappa_1)|^p d\varkappa_1 \right)^{\frac{1}{p}}$$

Eşitsizlik için gerek ve yeter şart hemen hemen her yerde $\Omega(\varkappa_1) = 0$ olmasıdır (Mitrinovic and Vasic, 1970).

Teorem 2.7 (Young Eşitsizliği): $p, q > 1$ olmak üzere $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ eşitliğini sağlayan her p, q ve her $\eta_1, \eta_2 > 0$ sayısı için

$$\eta_1 \eta_2 \leq \frac{\eta_1^p}{p} + \frac{\eta_2^q}{q}$$

eşitsizliği geçerlidir (Young, 1912a).

Teorem 2.8 (İntegraller İçin Young Eşitsizliği) $p, q > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere, Ω, ϱ belirli bir aralıkta integrallenebilir ve pozitif fonksiyonlar ise ve $|\Omega|^p, |\varrho|^q$ integrallenebilir fonksiyonlar olsun.

$$\int \Omega(\varkappa_1) \varrho(\varkappa_1) d\varkappa_1 \leq \int \frac{\Omega^p(\varkappa_1)}{p} + \int \frac{\varrho^q(\varkappa_1)}{q}$$

Bu durumda eşitsizlik sağlanır.(Young, 1912b)

Teorem 2.9 (Chebyshev Eşitsizliği): Ω ve ϱ fonksiyonları integrallenebilir ve senkronize fonksiyonlar olsun. O halde

$$\int_{\eta_1}^{\eta_2} \Omega(\varkappa_1) \varrho(\varkappa_1) d\varkappa_1 \geq \frac{1}{\eta_2 - \eta_1} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \Omega(\varkappa_1) d\varkappa_1 \int_{\eta_1}^{\eta_2} \varrho(\varkappa_1) d\varkappa_1 \quad (2.9)$$

eşitsizliği geçerlidir. Eğer Ω ve ϱ farklı monotonluğa sahip ise eşitsizlik yön değiştirir. Ω ve ϱ fonksiyonları sabit ise eşitlik sağlanır (Chebyshev, 1882).

İspat Ω ve ϱ , senkronize fonksiyonlardan olduğundan

$$(\Omega(\varkappa_1) - \Omega(\varkappa_2)) (\varrho(\varkappa_1) - \varrho(\varkappa_2)) \geq 0$$

yazılabilir. İki tarafın çift katlı integrali alınırsa

$$\int_{\eta_1}^{\eta_2} \int_{\eta_1}^{\eta_2} (\Omega(\varkappa_1) - \Omega(\varkappa_2)) (\varrho(\varkappa_1) - \varrho(\varkappa_2)) d\varkappa_1 d\varkappa_2 \geq 0$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} & \int_{\eta_1}^{\eta_2} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \Omega(x_1) \varrho(x_1) dx_1 dx_2 + \int_{\eta_1}^{\eta_2} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \Omega(x_2) \varrho(x_2) dx_1 dx_2 \\ & \geq \int_{\eta_1}^{\eta_2} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \Omega(x_1) \varrho(x_2) dx_1 dx_2 + \int_{\eta_1}^{\eta_2} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \Omega(x_2) \varrho(x_1) dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

ve devamında

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\eta_2 - \eta_1} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \Omega(x_1) \varrho(x_1) dx_1 + \frac{1}{\eta_2 - \eta_1} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \Omega(x_2) \varrho(x_2) dx_2 \\ & \geq \int_{\eta_1}^{\eta_2} \Omega(x_1) \left(\int_{\eta_1}^{\eta_2} \varrho(x_2) dx_2 \right) dx_1 + \int_{\eta_1}^{\eta_2} \Omega(x_2) \left(\int_{\eta_1}^{\eta_2} \varrho(x_1) dx_1 \right) dx_2 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\frac{2}{\eta_2 - \eta_1} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \Omega(x_1) \varrho(x_1) dx_1 \geq 2 \left(\frac{1}{\eta_2 - \eta_1} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \Omega(x_1) dx_1 \right) \left(\frac{1}{\eta_2 - \eta_1} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \varrho(x_1) dx_1 \right)$$

bulunur. Son ifadeden istenen sonuç elde edilir ve ispat tamamlanır.

Teorem 2.10 (Üçgen Eşitsizliği): η_1 ve η_2 reel sayı olmak üzere

$$\begin{aligned} |\eta_1 + \eta_2| & \leq |\eta_1| + |\eta_2|, \\ ||\eta_1| - |\eta_2|| & \leq |\eta_1 - \eta_2|, \\ ||\eta_1| - |\eta_2|| & \leq |\eta_1 + \eta_2|, \end{aligned}$$

ve tümevarım yoluyla

$$|\eta_{11} + \dots + \eta_{1n}| \leq |\eta_{11}| + \dots + |\eta_{1n}|$$

eşitsizlikleri geçerlidir. (Mitrinovic et al., 1993).

Teorem 2.11 (İntegraller İçin Üçgen Eşitsizliği): Ω , $[\eta_1, \eta_2]$ aralığında sürekli reel değerli bir fonksiyon olsun. Bu durumda,

$$\left| \int_{\eta_1}^{\eta_2} \Omega(x_1) dx_1 \right| \leq \int_{\eta_1}^{\eta_2} |\Omega(x_1)| dx_1$$

eşitsizliği geçerlidir (Mitrinovic et al., 1993).

Teorem 2.12 (Hölder-İşcan İntegral Eşitsizliği) $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere, Ω ve ϱ fonksiyonları $[\eta_1, \eta_2]$ aralığında tanımlı gerçekteğerli fonksiyonlar olsun ve $|\Omega|^p$, $|\varrho|^q$

, $[\eta_1, \eta_2]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar olsun. Bu durumda şu eşitsizlik sağlanır:

$$\int_{\eta_1}^{\eta_2} |\Omega(\varkappa_1) \varrho(\varkappa_1)| d\varkappa_1 \quad (2.10)$$

$$\leq \frac{1}{\eta_2 - \eta_1} \left\{ \left(\int_{\eta_1}^{\eta_2} (\eta_2 - \varkappa_1) |\Omega(\varkappa_1)|^p d\varkappa_1 \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\eta_1}^{\eta_2} (\eta_2 - \varkappa_1) |\varrho(\varkappa_1)|^q d\varkappa_1 \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ \left. + \left(\int_{\eta_1}^{\eta_2} (\varkappa_1 - \eta_1) |\Omega(\varkappa_1)|^p d\varkappa_1 \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\eta_1}^{\eta_2} (\varkappa_1 - \eta_1) |\varrho(\varkappa_1)|^q d\varkappa_1 \right)^{\frac{1}{q}} \right\}.$$

Hölder-İşcan integral eşitsizliği, klasik Hölder integral eşitsizliğine kıyasla daha iyi yaklaşımlar sunar. Bu eşitsizlik aynı zamanda kuvvet-ortalama integral eşitsizliğinin bir iyileştirilmiş hali olarak değerlendirilebilir (İşcan., 2019).

Teorem 2.13 (Genelleştirilmiş Power-Mean İntegral Eşitsizliği) $q \geq 1$ olmak üzere Ω ve ϱ , $[\eta_1, \eta_2]$ aralığında tanımlı gerçekteğerli fonksiyonlar olsun. Ayrıca, $|\Omega|$, $|\Omega| |\varrho|^q$, $[\eta_1, \eta_2]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\int_{\eta_1}^{\eta_2} |\Omega(\varkappa_1) \varrho(\varkappa_1)| d\varkappa_1 \quad (2.11)$$

$$\leq \frac{1}{\eta_2 - \eta_1} \left\{ \left(\int_{\eta_1}^{\eta_2} (\eta_2 - \varkappa_1) |\Omega(\varkappa_1)| d\varkappa_1 \right)^{1 - \frac{1}{q}} \left(\int_{\eta_1}^{\eta_2} (\eta_2 - \varkappa_1) |\Omega(\varkappa_1)| |\varrho(\varkappa_1)|^q d\varkappa_1 \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ \left. + \left(\int_{\eta_1}^{\eta_2} (\varkappa_1 - \eta_1) |\Omega(\varkappa_1)| d\varkappa_1 \right)^{1 - \frac{1}{q}} \left(\int_{\eta_1}^{\eta_2} (\varkappa_1 - \eta_1) |\Omega(\varkappa_1)| |\varrho(\varkappa_1)|^q d\varkappa_1 \right)^{\frac{1}{q}} \right\}.$$

Bu Genelleştirilmiş power-mean integral eşitsizliği, Power-mean eşitsizliğinden daha iyi yaklaşımlar sunar (Kadikal et al., 2021b).

Lemma 2.1 Ω , reel sayıların bir I alt kümesinden yine reel sayılara tanımlı bir fonksiyon olsun. η_1 ve η_2 , I kümesinin içinden seçilsin ve η_1, η_2 'den küçük olsun. Ω fonksiyonun türevi $L[\eta_1, \eta_2]$ kümesinin elemanı olmak üzere aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\frac{\Omega(\eta_1) + \Omega(\eta_2)}{2} - \frac{1}{\eta_2 - \eta_1} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \Omega(\varkappa_1) d\varkappa_1 = \frac{\eta_2 - \eta_1}{2} \int_0^1 |1 - 2\tau| |\Omega'(\tau\eta_1 + (1 - \tau)\eta_2)| d\tau \quad (2.12)$$

(Dragomir and Agarwal, 1998).

Makale boyunca $\mathbb{R}^+ \cup \{0\} = \mathbb{R}_0^+$ olarak göstereceğiz.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu kısımda bazı kesirli integral operatörler tanıtılacaktır.

Tanım 3.1 (Riemann – Liouville Kesirli İntegral Operatör): $\Omega \in L[\eta_1, \eta_2]$ olmak şartıyla $I_{\eta_1^+}^\alpha \Omega$ ve $I_{\eta_2^-}^\alpha \Omega$ Riemann - Liouville kesirli integrallerinin $\eta_1 > 0$ ve $\alpha \geq 0$ için tanımları sırasıyla

$$I_{\eta_1^+}^\alpha \Omega(\varkappa_1) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\eta_1}^{\varkappa_1} (\varkappa_1 - \tau)^{(\alpha-1)} \Omega(\tau) d\tau, \quad \varkappa_1 > \eta_1 \quad (3.1)$$

ve

$$I_{\eta_2^-}^\alpha \Omega(\varkappa_1) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\varkappa_1}^{\eta_2} (\tau - \varkappa_1)^{(\alpha-1)} \Omega(\tau) d\tau, \quad \varkappa_1 < \eta_2 \quad (3.2)$$

olarak tanımlanır (Samko et al., 1993).

Burada $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-u} u^{\alpha-1} du$ olarak bilinen Gama fonksiyonudur ve $\alpha = 1$ seçilirse Riemann – Liouville kesirli integrali klasik integrale dönüşür. Riemann – Liouville tanımında $\alpha = 0$ alınırsa,

$$J_{\eta_1^+}^0 \Omega(\varkappa_1) = \Omega(\varkappa_1)$$

ve

$$J_{\eta_2^-}^0 \Omega(\varkappa_1) = \Omega(\varkappa_1)$$

eşitlikleri elde edilir.

Tanım 3.2 (Hadamard Kesirli İntegral Operatör): $\Omega : [\eta_1, \eta_2] \subseteq \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $[\eta_1, \eta_2]$ aralığında integrallenebilir bir fonksiyon $\alpha > 0$ ve $0 < \eta_1 < \eta_2$ için

$${}_H J_{\eta_1^+}^\alpha \Omega(\varkappa_1) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\eta_1}^{\varkappa_1} \frac{\Omega(\tau)}{(In \frac{\varkappa_1}{\tau})^{(1-\alpha)}} \frac{d\tau}{\tau}, \quad \varkappa_1 > \eta_1$$

ve

$${}_H J_{\eta_2^-}^\alpha \Omega(\varkappa_1) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\varkappa_1}^{\eta_2} \frac{\Omega(\tau)}{(In \frac{\varkappa_1}{\tau})^{(1-\alpha)}} \frac{d\tau}{\tau}, \quad \varkappa_1 < \eta_2$$

integrallerine α . mertebeden Hadamard kesirli integrali denir ve burada ${}_H J_{0^+}^\alpha \Omega = {}_H J_0^\alpha \Omega$ ve ${}_H J_{\infty^-}^\alpha \Omega = {}_H J_-^\alpha \Omega$ dir (Samko et al., 1993).

Tanım 3.3 (Katugampola Kesirli İntegrali): $[\eta_1, \eta_2] \subset \mathbb{R}$ sınırlı bir aralık, $\eta_1 < \varkappa_1 < \eta_2$ ve $\rho > 0$ olsun. $(\alpha > 0)$ ve $\Omega \in \chi_c^\rho(\eta_1, \eta_2)$ için sol ve sağ taraflı Katugampola kesirli integralleri

$${}^\rho I_{\eta_1^+}^\alpha \Omega(\varkappa_1) = \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_{\eta_1}^{\varkappa_1} \frac{\tau^{\rho-1}}{(\varkappa_1^\rho - \tau^\rho)^{(1-\alpha)}} \Omega(\tau) d\tau$$

ve

$${}^\rho I_{\eta_2^-}^\alpha \Omega(\varkappa_1) = \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_{\varkappa_1}^{\eta_2} \frac{\tau^{\rho-1}}{(\varkappa_1^\rho - \tau^\rho)^{(1-\alpha)}} \Omega(\tau) d\tau$$

şeklinde dir (Katugampola, 2014).

Tanım 3.4 (Caputo-Fabrizio Kesirli İntegrali): $\Omega \in L(\eta_1, \eta_2)$, $\eta_1 < \varkappa_1 < \eta_2$ olsun. Bu durumda, $\alpha \in [0, 1]$ olmak üzere α . mertebeden sol ve sağ Caputo-Fabrizio kesirli integraleri

$$({}^{CF} I_{\eta_1}^\alpha \Omega)(\varkappa_1) = \frac{1-\alpha}{\eta_2(\alpha)} \Omega(\varkappa_1) + \frac{\alpha}{\eta_2(\alpha)} \int_{\eta_1}^{\varkappa_1} \Omega(\tau) d\tau \quad \varkappa_1 > \eta_1$$

ve

$$({}^{CF} I_{\eta_2}^\alpha \Omega)(\varkappa_1) = \frac{1-\alpha}{\eta_2(\alpha)} \Omega(\varkappa_1) + \frac{\alpha}{\eta_2(\alpha)} \int_{\varkappa_1}^{\eta_2} \Omega(\tau) d\tau \quad \varkappa_1 < \eta_2$$

olarak tanımlanır. Burada $\eta_2(\alpha) > 0$ normalleştirme fonksiyonu olup $\eta_2(0) = \eta_2(1) = 1$ şeklindedir. (Caputo and Fabrizio, 2015).

Tanım 3.5 $h : [\eta_1, \eta_2] \rightarrow \mathbb{R}$ pozitif, monoton ve artan iki fonksiyon ve $h'(\varkappa_1)$ fonksiyonu $[\eta_1, \eta_2]$ üzerinde sürekli türevlenebilir olsun. Bu durumda w fonksiyonunun $[\eta_1, \eta_2]$ kapalı aralığında h fonksiyonuna bağlı $\alpha > 0$ mertebeden $I_{\eta_1^+}^\alpha w(\varkappa_1)$ ve $I_{\eta_2^-}^\alpha w(\varkappa_1)$ kesirli integralleri sırasıyla

$$I_{\eta_1^+}^\alpha w(\varkappa_1) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\eta_1}^{\varkappa_1} \frac{h'(\tau) w(\tau)}{[h(\varkappa_1) - h(\tau)]^{1-\alpha}} d\tau, \quad \varkappa_1 > \eta_1 \quad (3.3)$$

ve

$$I_{\eta_2^-}^\alpha w(\varkappa_1) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\varkappa_1}^{\eta_2} \frac{h'(\tau) w(\tau)}{[h(\tau) - h(\varkappa_1)]^{1-\alpha}} d\tau, \quad \varkappa_1 < \eta_2 \quad (3.4)$$

olarak tanımlanır (Samko et al., 1993).

(3.3) ve (3.4) ifadelerinde $h(\varkappa_1) = \varkappa_1$ yazıldığında (3.1) ve (3.2) ifadelerindeki Riemann-Liouville kesirli integralleri elde edilir. Eğer (3.3) ve (3.4) ifadelerinde $h(\varkappa_1) = \ln \varkappa_1$ yazıldığında Hamadard kesirli integrali elde edilir.

Tanım 3.6 (Riemann–Liouville Kotanjant Kesirli İntegrali) $\beta \in (0, 1]$ ve $\alpha \in \mathbb{C}$ olmak üzere $Re(\alpha) > 0$, koşuluyla, \varkappa_1 'in sol Riemann-Liouville kotanjant kesirli integrali şu şekilde tanımlanır:

$$({}_{\eta_1} I^{\alpha, \beta} \Omega) (\varkappa_1) = \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\beta\right)^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_{\eta_1}^{\varkappa_1} e^{[-\cot\left(\frac{\pi}{2}\beta\right)(\varkappa_1 - \tau)]} (\varkappa_1 - \tau)^{\alpha-1} \Omega(\tau) d\tau, \quad (3.5)$$

ve \varkappa_1 'in sağ Riemann-Liouville kotanjant kesirli integrali ise şu şekilde tanımlanır:

$$(I_{\eta_2}^{\alpha, \beta} \Omega) (\varkappa_1) = \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\beta\right)^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_{\varkappa_1}^{\eta_2} e^{[-\cot\left(\frac{\pi}{2}\beta\right)(\tau - \varkappa_1)]} (\tau - \varkappa_1)^{\alpha-1} \Omega(\tau) d\tau \quad (3.6)$$

(Sadek, 2023).

Not 3.1 Eğer $\beta = 1$ seçilirse, şu sonuçlar elde edilir:

sol dan Riemann-Liouville kotanjant kesirli integrali

$$({}_{\eta_1} I^{\alpha, 1} \Omega) (\varkappa_1) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\eta_1}^{\varkappa_1} (\varkappa_1 - \tau)^{\alpha-1} \Omega(\tau) d\tau$$

sağ dan Riemann-Liouville kotanjant kesirli integrali

$$(I_{\eta_2}^{\alpha, 1} \Omega) (\varkappa_1) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\varkappa_1}^{\eta_2} (\tau - \varkappa_1)^{\alpha-1} \Omega(\tau) d\tau \quad (3.7)$$

dönüşür bu da , iyi bilinen Riemann-Liouville kesirli integral operatörüne karşılık gelir.

4. BULGULAR

4.1. Modifiye Edilmiş Üstel Trigonometrik Konveks Fonksiyon Tanımı, Bazı Özellikleri ve Bu Fonksiyon Yardımıyla Elde Edilen Bazı Eşitsizlikler

Bu kısımda önce üstel trigonometrik konveks fonksiyon sınıfının modifiye edilmiş bir versiyonu ve bu sınıfın bazı özellikleri tanıtılmıştır.

Tanım 4.1 $\Omega : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ fonksiyonu her $\eta_1, \eta_2 \in I$ ve $\tau \in [0, 1]$ için

$$\Omega(\tau\eta_1 + (1 - \tau)\eta_2) \leq \sin \frac{\pi\tau}{2} e^{(1-\tau)} \Omega(\eta_1) + \cos \frac{\pi\tau}{2} e^\tau \Omega(\eta_2). \quad (4.1)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa bu fonksiyona modifiye edilmiş üstel trigonometrik konveks fonksiyon denir. I kümesi üzerinde modifiye edilmiş üstel trigonometrik konveks fonksiyon sınıfını $METC(I)$ ile gösterilir.

Not 4.1

$$h(\tau) = \sin \frac{\pi\tau}{2} e^{(1-\tau)} + \cos \frac{\pi\tau}{2} e^\tau$$

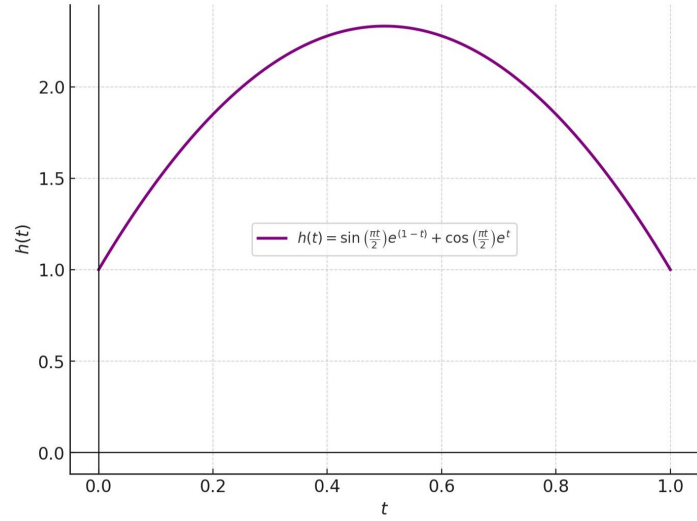
fonsiyonu verilsin. Her $\tau \in [0, 1]$ için $h(\tau) \geq 1$ olduğu açıktır. Modifiye edilmiş üstel trigonometrik konveks fonksiyon

$$\begin{aligned} \Omega(\eta_1) &= \Omega(\tau\eta_1 + (1 - \tau)\eta_1) \\ &\leq \sin \frac{\pi\tau}{2} e^{(1-\tau)} \Omega(\eta_1) + \cos \frac{\pi\tau}{2} e^\tau \Omega(\eta_1) \\ &= \Omega(\eta_1) \left(\sin \frac{\pi\tau}{2} e^{(1-\tau)} + \cos \frac{\pi\tau}{2} e^\tau \right) \\ &= \Omega(\eta_1) h(\tau) \end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla

$$(1 - h(\tau)) \Omega(\eta_1) \leq 0$$

Bu durum Ω fonksiyonunun negatif olmayan fonksiyon olmasını gerektirir.

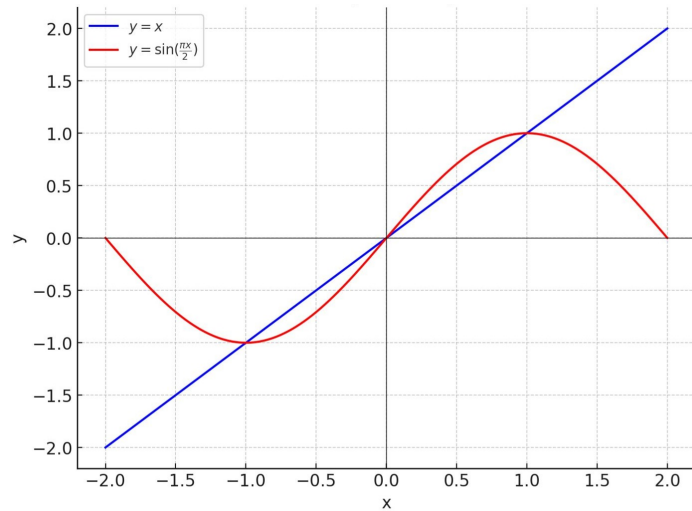


Şekil 4.1. Modifiye edilmiş üstel trigonometrik konveks fonksiyonun katsayılar toplamı

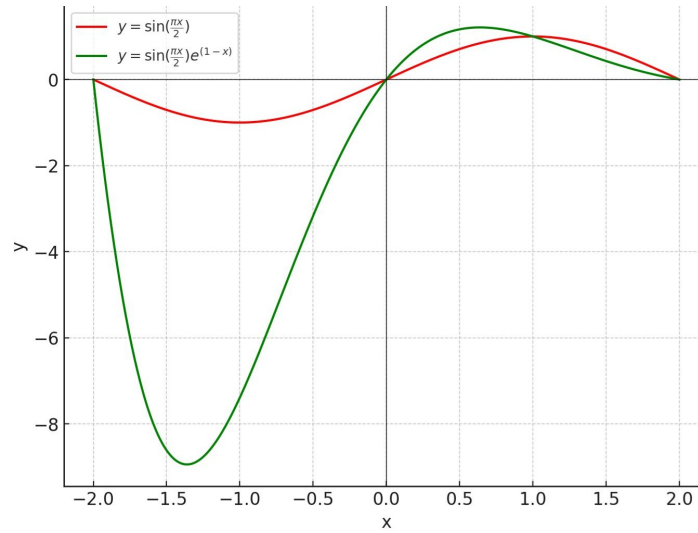
Önerme 4.1 *Reel sayıların bir I alt kümesinde tanımlı, negatif olmayan her konveks fonksiyon trigonometrik konveks fonksiyondur. Ayrıca her trigonometrik konveks fonksiyon da modifiye edilmiş üstel trigonometrik konveks fonksiyondur. Çünkü*

$$\begin{aligned}
 \Omega(\tau\eta_1 + (1-\tau)\eta_2) &\leq \tau\Omega(\eta_1) + (1-\tau)\Omega(\eta_2) \\
 &\leq \sin\frac{\pi\tau}{2}\Omega(\eta_1) + \cos\frac{\pi\tau}{2}\Omega(\eta_2) \\
 &\leq \sin\frac{\pi\tau}{2}e^{(1-\tau)}\Omega(\eta_1) + \cos\frac{\pi\tau}{2}e^\tau\Omega(\eta_2)
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

eşitsizliği geçerlidir.



Şekil 4.2. Konveks ve trigonometrik konveks fonksiyon sınıflarının katsayılarının karşılaştırılması



Şekil 4.3. Trigonometrik ve modifiye edilmiş trigonometrik konveks fonksiyon sınıflarının katsayılarının karşılaştırılması

Teorem 4.1 $\Omega, \varrho : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ fonksiyonları verilsin. $\Omega, \varrho \in \text{METC}(I)$ ise:

- (i) $c \in \mathbb{R}$ ($c \geq 0$) için $c\Omega$ fonksiyonu $\text{METC}(I)$ sınıfının elemanıdır,
- (ii) $\Omega + \varrho$ onksiyonu $\text{METC}(I)$ sınıfının elemanıdır.

İspat (i) $\Omega \in \text{METC}(I)$ ve $c \in \mathbb{R}$ ($c \geq 0$) olduğundan

$$\begin{aligned} (c\Omega)(\tau\eta_1 + (1-\tau)\eta_2) &\leq c \left[\sin \frac{\pi\tau}{2} e^{(1-\tau)} \Omega(\eta_1) + \cos \frac{\pi\tau}{2} e^\tau \Omega(\eta_2) \right] \\ &= \sin \frac{\pi\tau}{2} e^{(1-\tau)} (c\Omega)(\eta_1) + \cos \frac{\pi\tau}{2} e^\tau (c\Omega)(\eta_2) \end{aligned} \quad (4.3)$$

yazılabilir. Bu durum $c\Omega \in \text{METC}(I)$ olduğunu gösterir.

(ii) $\Omega, \varrho \in \text{METC}(I)$ olduğundan

$$\begin{aligned} (\Omega + \varrho)(\tau\eta_1 + (1-\tau)\eta_2) &= \Omega(\tau\eta_1 + (1-\tau)\eta_2) + \varrho(\tau\eta_1 + (1-\tau)\eta_2) \\ &\leq \sin \frac{\pi\tau}{2} e^{(1-\tau)} \Omega(\eta_1) + \cos \frac{\pi\tau}{2} e^\tau \Omega(\eta_2) \\ &\quad + \sin \frac{\pi\tau}{2} e^{(1-\tau)} \varrho(\eta_1) + \cos \frac{\pi\tau}{2} e^\tau \varrho(\eta_2) \\ &= \sin \frac{\pi\tau}{2} e^{(1-\tau)} (\Omega + \varrho)(\eta_1) + \cos \frac{\pi\tau}{2} e^\tau (\Omega + \varrho)(\eta_2) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durum $\Omega + \varrho \in \text{METC}(I)$ olduğunu gösterir.

Teorem 4.2 $\Omega : I \subset \mathbb{R} \rightarrow J$ konveks fonksiyonu ve $\varrho : J \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ azalmayan, modifiye edilmiş üstel trigonometrik konveks fonksiyonu verilsin. Bu durumda $\varrho \circ \Omega : I \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ bileşke fonksiyonu da modifiye edilmiş üstel trigonometrik konveks fonksiyon olur.

İspat $\eta_1, \eta_2 \in I$ ve $\tau \in [0, 1]$ için

$$\begin{aligned}
 (\varrho \circ \Omega)(\tau\eta_1 + (1 - \tau)\eta_2) &= \varrho(\Omega(\tau\eta_1 + (1 - \tau)\eta_2)) \\
 &\leq \varrho(\tau\Omega(\eta_1) + (1 - \tau)\Omega(\eta_2)) \\
 &\leq \sin \frac{\pi\tau}{2} e^{(1-\tau)} \varrho(\Omega(\eta_1)) + \cos \frac{\pi\tau}{2} e^\tau \varrho(\Omega(\eta_2))
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

yazılabilir. Bu durum $\varrho \circ \Omega \in \text{METC}(I)$ olduğunu gösterir.

Teorem 4.3 $\Omega : [\eta_1, \eta_2] \rightarrow \mathbb{R}$ modifiye edilmiş üstel trigonometrik konveks fonksiyon olsun. $\eta_1 < \eta_2$ ve $\Omega' \in L[\eta_1, \eta_2]$ olmak üzere aşağıdaki Hermite-Hadamard tipli eşitsizlik geçerlidir:

$$\sqrt{2e}\Omega\left(\frac{\eta_1 + \eta_2}{2}\right) \leq \frac{1}{\eta_2 - \eta_1} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \Omega(x_1) dx_1 \leq \frac{2\pi e - 4}{\pi^2 + 4} [\Omega(\eta_1) + \Omega(\eta_2)].$$

İspat İlk olarak Ω fonksiyonunun modifiye edilmiş üstel trigonometrik konveks fonksiyon oluşu yardımıyla,

$$\begin{aligned}
 \Omega\left(\frac{\eta_1 + \eta_2}{2}\right) &= \Omega\left(\frac{1}{2}[\tau\eta_1 + (1 - \tau)\eta_2] + \frac{1}{2}[(1 - \tau)\eta_1 + \tau\eta_2]\right) \\
 &\leq \frac{\sqrt{2e}}{2}\Omega(\tau\eta_1 + (1 - \tau)\eta_2) + \frac{\sqrt{2e}}{2}\Omega((1 - \tau)\eta_1 + \tau\eta_2)
 \end{aligned}$$

yazılabilir. Son eşitsizliğin $\tau \in [0, 1]$ üzerinden integrali alınırsa

$$\begin{aligned}
 \Omega\left(\frac{\eta_1 + \eta_2}{2}\right) &\leq \frac{\sqrt{2e}}{2} \int_0^1 \Omega(\tau\eta_1 + (1 - \tau)\eta_2) d\tau + \frac{\sqrt{2e}}{2} \int_0^1 \Omega((1 - \tau)\eta_1 + \tau\eta_2) d\tau \\
 &= \sqrt{2e} \frac{1}{\eta_2 - \eta_1} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \Omega(x_1) dx_1
 \end{aligned}$$

bulunur. Ardından $u = \tau\eta_1 + (1 - \tau)\eta_2$ değişken değişimi ve tekrar Ω fonksiyonunun modifiye edilmiş üstel trigonometrik konveks fonksiyon oluşu kullanılarak

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\eta_2 - \eta_1} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \Omega(u) du &= \int_0^1 \Omega(\tau\eta_1 + (1 - \tau)\eta_2) d\tau \\
 &\leq \int_0^1 \left[\sin \frac{\pi\tau}{2} e^{(1-\tau)} \Omega(\eta_1) + \cos \frac{\pi\tau}{2} e^\tau \Omega(\eta_2) \right] d\tau \\
 &= \frac{2\pi e - 4}{\pi^2 + 4} [\Omega(\eta_1) + \Omega(\eta_2)].
 \end{aligned}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.4 $\Omega : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ fonksiyonu I° üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $\eta_1, \eta_2 \in I^\circ$ ve $\eta_1 < \eta_2$ için $\Omega' \in L[\eta_1, \eta_2]$ ve $|\Omega'| \in METC(I)$ ise

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\Omega(\eta_1) + \Omega(\eta_2)}{2} - \frac{1}{\eta_2 - \eta_1} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \Omega(x_1) dx_1 \right| \\ & \leq (\eta_2 - \eta_1) \left[\frac{2\pi e(\pi^2 - 12) + 4(-12 + 8\sqrt{2e} + 8\sqrt{2e}\pi + (1 - 2\sqrt{2e})\pi^2)}{\pi^4 + 8\pi^2 + 16} \right] \\ & \quad \times \eta_1 (|\Omega'(\eta_1)|, |\Omega'(\eta_2)|), \end{aligned} \quad (4.5)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $\eta_1(,)$ aritmetik ortalamadır.

İspat Lemma 2.1, mutlak değer fonksiyonu özellikleri ve $|\Omega'|$ fonksiyonunun modifiye edilmiş üstel trigonometrik konveks fonksiyon oluşu kullanılırsa

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\Omega(\eta_1) + \Omega(\eta_2)}{2} - \frac{1}{\eta_2 - \eta_1} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \Omega(x_1) dx_1 \right| \\ & \leq \frac{\eta_2 - \eta_1}{2} \int_0^1 |1 - 2\tau| |\Omega'(\tau\eta_1 + (1 - \tau)\eta_2)| d\tau \\ & \leq \frac{\eta_2 - \eta_1}{2} \int_0^1 |1 - 2\tau| \left(\sin \frac{\pi\tau}{2} e^{(1-\tau)} |\Omega'(\eta_1)| + \cos \frac{\pi\tau}{2} e^\tau |\Omega'(\eta_2)| \right) d\tau \\ & = \frac{\eta_2 - \eta_1}{2} \left[|\Omega'(\eta_1)| \int_0^1 |1 - 2\tau| \left(\sin \frac{\pi\tau}{2} e^{(1-\tau)} \right) d\tau + |\Omega'(\eta_2)| \int_0^1 |1 - 2\tau| \cos \frac{\pi\tau}{2} e^\tau d\tau \right] \\ & = (\eta_2 - \eta_1) \left[\frac{2\pi^3 e + 32\sqrt{2}e^{\frac{1}{2}} - 24\pi e + 4\pi^2 + 32\sqrt{2}\pi e^{\frac{1}{2}} - 8\sqrt{2}\pi^2 e^{\frac{1}{2}} - 48}{\pi^4 + 8\pi^2 + 16} \right] \\ & \quad \times \eta_1 (|\Omega'(\eta_1)|, |\Omega'(\eta_2)|) \end{aligned} \quad (4.6)$$

bulunur. Burada

$$\begin{aligned} \int_0^1 |1 - 2\tau| \sin \frac{\pi\tau}{2} e^{(1-\tau)} d\tau & = \int_0^1 |1 - 2\tau| \cos \frac{\pi\tau}{2} e^\tau d\tau \\ & = \frac{2\pi^3 e + 32\sqrt{2}e^{\frac{1}{2}} - 24\pi e + 4\pi^2 + 32\sqrt{2}\pi e^{\frac{1}{2}} - 8\sqrt{2}\pi^2 e^{\frac{1}{2}} - 48}{(\pi^2 + 4)^2} \end{aligned}$$

sonucundan yararlanır. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.5 $\Omega : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ fonksiyonu I° üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $\eta_1, \eta_2 \in I^\circ$ ve $\eta_1 < \eta_2$ için $\Omega' \in L[\eta_1, \eta_2]$ ve $|\Omega'|^q \in \text{METC}(I)$ ise $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ için

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\Omega(\eta_1) + \Omega(\eta_2)}{2} - \frac{1}{\eta_2 - \eta_1} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \Omega(x_1) dx_1 \right| \\ & \leq \frac{\eta_2 - \eta_1}{2} \left(\frac{1}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} 2^{\frac{1}{q}} \left(\frac{2\pi e - 4}{\pi^2 + 4} \right)^{\frac{1}{q}} \eta_1^{\frac{1}{q}} (|\Omega'(\eta_1)|^q, |\Omega'(\eta_2)|^q) \end{aligned} \quad (4.7)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat Lemma 2.1, mutlak değer fonksiyonu özellikleri ve Hölder eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\Omega(\eta_1) + \Omega(\eta_2)}{2} - \frac{1}{\eta_2 - \eta_1} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \Omega(x_1) dx_1 \right| \\ & \leq \frac{\eta_2 - \eta_1}{2} \int_0^1 |1 - 2\tau| |\Omega'(\tau\eta_1 + (1-\tau)\eta_2)| d\tau \\ & \leq \frac{\eta_2 - \eta_1}{2} \left(\int_0^1 |1 - 2\tau|^p d\tau \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |\Omega'(\tau\eta_1 + (1-\tau)\eta_2)|^q d\tau \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned} \quad (4.8)$$

bulunur. $|\Omega'|^q \in \text{METC}(I)$ oluşu yardımıyla

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\Omega(\eta_1) + \Omega(\eta_2)}{2} - \frac{1}{\eta_2 - \eta_1} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \Omega(x_1) dx_1 \right| \\ & \leq \frac{\eta_2 - \eta_1}{2} \left(\frac{1}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left(\sin \frac{\pi\tau}{2} e^{(1-\tau)} |\Omega'(\eta_1)|^q + \cos \frac{\pi\tau}{2} e^\tau |\Omega'(\eta_2)|^q \right) d\tau \right)^{\frac{1}{q}} \\ & = \frac{\eta_2 - \eta_1}{2} \left(\frac{1}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} 2^{\frac{1}{q}} \left(\frac{2\pi e - 4}{\pi^2 + 4} \right)^{\frac{1}{q}} \eta_1^{\frac{1}{q}} (|\Omega'(\eta_1)|^q, |\Omega'(\eta_2)|^q) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$\int_0^1 |1 - 2\tau|^p d\tau = \frac{1}{p+1}$$

ve

$$\int_0^1 \sin \frac{\pi\tau}{2} e^{(1-\tau)} d\tau = \int_0^1 \cos \frac{\pi\tau}{2} e^\tau d\tau = \frac{2\pi e - 4}{\pi^2 + 4}$$

sonuçlarından yararlanılır. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.6 $\Omega : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ fonksiyonu I° üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $\eta_1, \eta_2 \in I^\circ$ ve $\eta_1 < \eta_2$ için $\Omega' \in L[\eta_1, \eta_2]$ ve $|\Omega'|^q \in \text{METC}(I)$ ise $q \geq 1$ için

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\Omega(\eta_1) + \Omega(\eta_2)}{2} - \frac{1}{\eta_2 - \eta_1} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \Omega(x_1) dx_1 \right| \tag{4.9} \\ & \leq \frac{\eta_2 - \eta_1}{2^{2-\frac{2}{q}}} \left[\frac{2\pi e(\pi^2 - 12) + 4(-12 + 8\sqrt{2e} + 8\sqrt{2e}\pi + (1 - 2\sqrt{2e})\pi^2)}{\pi^4 + 8\pi^2 + 16} \right]^{\frac{1}{q}} \\ & \quad \times \eta_1^{\frac{1}{q}} (|\Omega'(\eta_1)|^q, |\Omega'(\eta_2)|^q) \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat Lemma 2.1, mutlak değer fonksiyonu özellikleri ve power mean eşitsizliği yardımıyla

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\Omega(\eta_1) + \Omega(\eta_2)}{2} - \frac{1}{\eta_2 - \eta_1} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \Omega(x_1) dx_1 \right| \tag{4.10} \\ & \leq \frac{\eta_2 - \eta_1}{2} \int_0^1 |1 - 2\tau| |\Omega'(\tau\eta_1 + (1 - \tau)\eta_2)| d\tau \\ & \leq \frac{\eta_2 - \eta_1}{2} \left(\int_0^1 |1 - 2\tau| d\tau \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 |1 - 2\tau| |\Omega'(\tau\eta_1 + (1 - \tau)\eta_2)|^q d\tau \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

elde edilir. $|\Omega'|^q \in \text{METC}(I)$ olduğundan

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\Omega(\eta_1) + \Omega(\eta_2)}{2} - \frac{1}{\eta_2 - \eta_1} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \Omega(x_1) dx_1 \right| \\ & \leq \frac{\eta_2 - \eta_1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 |1 - 2\tau| \left(\sin \frac{\pi\tau}{2} e^{(1-\tau)} |\Omega'(\eta_1)|^q + \cos \frac{\pi\tau}{2} e^\tau |\Omega'(\eta_2)|^q \right)^{\frac{1}{q}} d\tau \right)^{\frac{1}{q}} \\ & = \frac{\eta_2 - \eta_1}{2^{2-\frac{2}{q}}} \left[\frac{2\pi^3 e + 32\sqrt{2}e^{\frac{1}{2}} - 24\pi e + 4\pi^2 + 32\sqrt{2}\pi e^{\frac{1}{2}} - 8\sqrt{2}\pi^2 e^{\frac{1}{2}} - 48}{\pi^4 + 8\pi^2 + 16} \right]^{\frac{1}{q}} \\ & \quad \times \eta_1^{\frac{1}{q}} (|\Omega'(\eta_1)|^q, |\Omega'(\eta_2)|^q) \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu sonuç ile ispat tamamlanır.

Teorem 4.7 $\Omega : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ fonksiyonu I° üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $\eta_1, \eta_2 \in I^\circ$ ve $\eta_1 < \eta_2$ için $\Omega' \in L[\eta_1, \eta_2]$ ve $|\Omega'|^q \in \text{METC}(I)$ ise $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

için

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\Omega(\eta_1) + \Omega(\eta_2)}{2} - \frac{1}{\eta_2 - \eta_1} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \Omega(x_1) dx_1 \right| \tag{4.11} \\
& \leq \frac{\eta_2 - \eta_1}{2} \left(\frac{1}{2(p+1)} \right)^{\frac{1}{p}} 2^{\frac{1}{q}} \\
& \quad \times \left[\left(\frac{\pi^3 e - 4\pi e - 2\pi^2 + 8}{\pi^4 + 8\pi^2 + 16} |\Omega'(\eta_1)|^q + \frac{8\pi e - 16}{\pi^4 + 8\pi^2 + 16} |\Omega'(\eta_2)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{8e(\pi - 2e^{-1})}{\pi^4 + 8\pi^2 + 16} |\Omega'(\eta_1)|^q + \frac{\pi^3 e - 4\pi e - 2\pi^2 + 8}{\pi^4 + 8\pi^2 + 16} |\Omega'(\eta_2)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat Lemma 2.1, mutlak değer fonksiyonu özellikleri ve Hölder-İşcan eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\Omega(\eta_1) + \Omega(\eta_2)}{2} - \frac{1}{\eta_2 - \eta_1} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \Omega(x_1) dx_1 \right| \tag{4.12} \\
& \leq \frac{\eta_2 - \eta_1}{2} \int_0^1 |1 - 2\tau| |\Omega'(\tau\eta_1 + (1 - \tau)\eta_2)| d\tau \\
& \leq \frac{\eta_2 - \eta_1}{2} \left(\int_0^1 (1 - \tau) |1 - 2\tau|^p d\tau \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 (1 - \tau) |\Omega'(\tau\eta_1 + (1 - \tau)\eta_2)|^q d\tau \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \quad + \frac{\eta_2 - \eta_1}{2} \left(\int_0^1 \tau |1 - 2\tau|^p d\tau \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \tau |\Omega'(\tau\eta_1 + (1 - \tau)\eta_2)|^q d\tau \right)^{\frac{1}{q}} \\
& = \frac{\eta_2 - \eta_1}{2} \left(\frac{1}{2(p+1)} \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \quad \times \left[\left(\int_0^1 (1 - \tau) |\Omega'(\tau\eta_1 + (1 - \tau)\eta_2)|^q d\tau \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + \left(\int_0^1 \tau |\Omega'(\tau\eta_1 + (1 - \tau)\eta_2)|^q d\tau \right)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned}$$

bulunur. $|\Omega'| \in \text{METC}(I)$ olduğundan

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\Omega(\eta_1) + \Omega(\eta_2)}{2} - \frac{1}{\eta_2 - \eta_1} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \Omega(x_1) dx_1 \right| \tag{4.13} \\
& \leq \frac{\eta_2 - \eta_1}{2} \left(\frac{1}{2(p+1)} \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \quad \times \left[\left(\int_0^1 (1-\tau) \left(\sin \frac{\pi\tau}{2} e^{(1-\tau)} |\Omega'(\eta_1)|^q + \cos \frac{\pi\tau}{2} e^\tau |\Omega'(\eta_2)|^q \right) d\tau \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + \left(\int_0^1 \tau \left(\sin \frac{\pi\tau}{2} e^{(1-\tau)} |\Omega'(\eta_1)|^q + \cos \frac{\pi\tau}{2} e^\tau |\Omega'(\eta_2)|^q \right) d\tau \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\
& = \frac{\eta_2 - \eta_1}{2} \left(\frac{1}{2(p+1)} \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \quad \times \left[\left(2(\pi e - 2) \frac{\pi^2 - 4}{(\pi^2 + 4)^2} |\Omega'(\eta_1)|^q + 16 \frac{\pi e - 2}{(\pi^2 + 4)^2} |\Omega'(\eta_2)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + \left(16 \frac{\pi e - 2}{(\pi^2 + 4)^2} |\Omega'(\eta_1)|^q + 2(\pi e - 2) \frac{\pi^2 - 4}{(\pi^2 + 4)^2} |\Omega'(\eta_2)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned}$$

bulunur ki burada

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (1-\tau) \sin \frac{\pi\tau}{2} e^{(1-\tau)} d\tau &= \int_0^1 \tau \cos \frac{\pi\tau}{2} e^\tau d\tau = 2(\pi e - 2) \frac{\pi^2 - 4}{(\pi^2 + 4)^2} \\
\int_0^1 \tau \sin \frac{\pi\tau}{2} e^{(1-\tau)} d\tau &= \int_0^1 (1-\tau) \cos \frac{\pi\tau}{2} e^\tau d\tau = 16 \frac{\pi e - 2}{(\pi^2 + 4)^2}
\end{aligned}$$

işlemlerinden yararlanır. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.8 $\Omega : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ fonksiyonu I° üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $\eta_1, \eta_2 \in I^\circ$ ve $\eta_1 < \eta_2$ için $\Omega' \in L[\eta_1, \eta_2]$ ve $|\Omega'|^q \in METC(I)$ ise $q \geq 1$ için

$$\left| \frac{\Omega(\eta_1) + \Omega(\eta_2)}{2} - \frac{1}{\eta_2 - \eta_1} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \Omega(x_1) dx_1 \right| \quad (4.14)$$

$$\leq \frac{\eta_2 - \eta_1}{2^{3-\frac{3}{q}}} \left(\frac{e}{(\pi^2 + 4)^3} \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\times \left[\begin{array}{l} \left(\begin{array}{l} 160e^{-1} - 96\pi^2 e^{-1} + 112\pi - \pi^4 e^{-1} \\ -96\sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}} - \pi^5 - 32\pi^3 - 160\sqrt{2}\pi e^{-\frac{1}{2}} \\ +96\sqrt{2}\pi^2 e^{-\frac{1}{2}} - 24\sqrt{2}\pi^3 e^{-\frac{1}{2}} - 2\sqrt{2}\pi^4 e^{-\frac{1}{2}} \end{array} \right) \\ \times |\Omega'(\eta_1)|^q \\ +2 \left(\begin{array}{l} 40\pi^2 e^{-1} - 128e^{-1} - 80\pi + 2\pi^4 e^{-1} \\ +80\sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}} + 12\pi^3 + 112\sqrt{2}\pi e^{-\frac{1}{2}} \\ -48\sqrt{2}\pi^2 e^{-\frac{1}{2}} - 4\sqrt{2}\pi^3 e^{-\frac{1}{2}} - \sqrt{2}\pi^4 e^{-\frac{1}{2}} \end{array} \right) \\ \times |\Omega'(\eta_2)|^q \end{array} \right]^{\frac{1}{q}}$$

$$+ \left[\begin{array}{l} 2 \left(\begin{array}{l} 40\pi^2 e^{-1} - 128e^{-1} - 80\pi + 2\pi^4 e^{-1} \\ +80\sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}} + 12\pi^3 + 112\sqrt{2}\pi e^{-\frac{1}{2}} \\ -48\sqrt{2}\pi^2 e^{-\frac{1}{2}} - 4\sqrt{2}\pi^3 e^{-\frac{1}{2}} - \sqrt{2}\pi^4 e^{-\frac{1}{2}} \end{array} \right) \\ \times |\Omega'(\eta_1)|^q \\ + \left(\begin{array}{l} 160e^{-1} - 96\pi^2 e^{-1} + 112\pi - \pi^4 e^{-1} \\ -96\sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}} - \pi^5 - 32\pi^3 - 160\sqrt{2}\pi e^{-\frac{1}{2}} \\ +96\sqrt{2}\pi^2 e^{-\frac{1}{2}} - 24\sqrt{2}\pi^3 e^{-\frac{1}{2}} - 2\sqrt{2}\pi^4 e^{-\frac{1}{2}} \end{array} \right) \\ \times |\Omega'(\eta_2)|^q \end{array} \right]^{\frac{1}{q}}$$

İspat Lemma 2.1, mutlak değer fonksiyonu özellikleri ve genelleştirilmiş power-mean eşit-

sizliği yardımıyla

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\Omega(\eta_1) + \Omega(\eta_2)}{2} - \frac{1}{\eta_2 - \eta_1} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \Omega(\varkappa_1) d\varkappa_1 \right| \tag{4.15} \\
& \leq \frac{\eta_2 - \eta_1}{2} \int_0^1 |1 - 2\tau| |\Omega'(\tau\eta_1 + (1 - \tau)\eta_2)| d\tau \\
& \leq \frac{\eta_2 - \eta_1}{2} \left\{ \left(\int_0^1 (1 - \tau) |1 - 2\tau| d\tau \right)^{1 - \frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \times \left(\int_0^1 (1 - \tau) |1 - 2\tau| |\Omega'(\tau\eta_1 + (1 - \tau)\eta_2)|^q d\tau \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \quad + \left(\int_0^1 \tau |1 - 2\tau| d\tau \right)^{1 - \frac{1}{q}} \\
& \quad \left. \times \left(\int_0^1 \tau |1 - 2\tau| |\Omega'(\tau\eta_1 + (1 - \tau)\eta_2)|^q d\tau \right)^{\frac{1}{q}} \right\}
\end{aligned}$$

bulunur. $|\Omega'| \in \text{METC}(I)$ olduğundan

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\Omega(\eta_1) + \Omega(\eta_2)}{2} - \frac{1}{\eta_2 - \eta_1} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \Omega(\varkappa_1) d\varkappa_1 \right| \\
& \leq \frac{\eta_2 - \eta_1}{2} \left\{ \left(\int_0^1 (1 - \tau) |1 - 2\tau| d\tau \right)^{1 - \frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \times \left(\int_0^1 (1 - \tau) |1 - 2\tau| \left(\sin \frac{\pi\tau}{2} e^{(1-\tau)} |\Omega'(\eta_1)|^q + \cos \frac{\pi\tau}{2} e^\tau |\Omega'(\eta_2)|^q \right) d\tau \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \quad + \left(\int_0^1 \tau |1 - 2\tau| d\tau \right)^{1 - \frac{1}{q}} \\
& \quad \left. \times \left(\int_0^1 \tau |1 - 2\tau| \left(\sin \frac{\pi\tau}{2} e^{(1-\tau)} |\Omega'(\eta_1)|^q + \cos \frac{\pi\tau}{2} e^\tau |\Omega'(\eta_2)|^q \right) d\tau \right)^{\frac{1}{q}} \right\}
\end{aligned}$$

yazılabilir. Basit hesaplamalarla

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\Omega(\eta_1) + \Omega(\eta_2)}{2} - \frac{1}{\eta_2 - \eta_1} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \Omega(\varkappa_1) d\varkappa_1 \right| \\
& \leq \frac{\eta_2 - \eta_1}{2} \left(\frac{1}{4} \right)^{1 - \frac{1}{q}} \left(\frac{2e}{(\pi^2 + 4)^3} \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[\begin{aligned} & \left(\begin{aligned} & 160e^{-1} - 96\pi^2e^{-1} + 112\pi - \pi^4e^{-1} \\ & -96\sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}} - \pi^5 - 32\pi^3 - 160\sqrt{2}\pi e^{-\frac{1}{2}} \\ & +96\sqrt{2}\pi^2e^{-\frac{1}{2}} - 24\sqrt{2}\pi^3e^{-\frac{1}{2}} - 2\sqrt{2}\pi^4e^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \right) \\ & \times |\Omega'(\eta_1)|^q \\ & +2 \left(\begin{aligned} & 40\pi^2e^{-1} - 128e^{-1} - 80\pi + 2\pi^4e^{-1} \\ & +80\sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}} + 12\pi^3 + 112\sqrt{2}\pi e^{-\frac{1}{2}} \\ & -48\sqrt{2}\pi^2e^{-\frac{1}{2}} - 4\sqrt{2}\pi^3e^{-\frac{1}{2}} - \sqrt{2}\pi^4e^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \right) \\ & \times |\Omega'(\eta_2)|^q \end{aligned} \right]^{\frac{1}{q}} \\
& + \frac{\eta_2 - \eta_1}{2} \left(\frac{1}{4} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\frac{2e}{(\pi^2 + 4)^3} \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \times \left[\begin{aligned} & 2 \left(\begin{aligned} & 40\pi^2e^{-1} - 128e^{-1} - 80\pi + 2\pi^4e^{-1} \\ & +80\sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}} + 12\pi^3 + 112\sqrt{2}\pi e^{-\frac{1}{2}} \\ & -48\sqrt{2}\pi^2e^{-\frac{1}{2}} - 4\sqrt{2}\pi^3e^{-\frac{1}{2}} - \sqrt{2}\pi^4e^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \right) \\ & \times |\Omega'(\eta_1)|^q \\ & + \left(\begin{aligned} & 160e^{-1} - 96\pi^2e^{-1} + 112\pi - \pi^4e^{-1} \\ & -96\sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}} - \pi^5 - 32\pi^3 - 160\sqrt{2}\pi e^{-\frac{1}{2}} \\ & +96\sqrt{2}\pi^2e^{-\frac{1}{2}} - 24\sqrt{2}\pi^3e^{-\frac{1}{2}} - 2\sqrt{2}\pi^4e^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \right) \\ & \times |\Omega'(\eta_2)|^q \end{aligned} \right]^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$\int_0^1 (1-\tau) |1-2\tau| d\tau = \int_0^1 \tau |1-2\tau| d\tau = \frac{1}{4},$$

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (1-\tau) |1-2\tau| \sin \frac{\pi\tau}{2} e^{(1-\tau)} d\tau \\ &= \int_0^1 \tau |1-2\tau| \cos \frac{\pi\tau}{2} e^\tau d\tau \\ &= -2 \frac{e}{(\pi^2+4)^3} \\ & \quad \times \left(\begin{array}{l} 96\pi^2 e^{-1} - 160e^{-1} - 112\pi + \pi^4 e^{-1} + 96\sqrt{2} e^{-\frac{1}{2}} + \\ 32\pi^3 - \pi^5 + 160\sqrt{2}\pi e^{-\frac{1}{2}} - 96\sqrt{2}\pi^2 e^{-\frac{1}{2}} \\ -24\sqrt{2}\pi^3 e^{-\frac{1}{2}} + 2\sqrt{2}\pi^4 e^{-\frac{1}{2}} \end{array} \right) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \tau |1-2\tau| \sin \frac{\pi\tau}{2} e^{(1-\tau)} d\tau \\ &= \int_0^1 (1-\tau) |1-2\tau| \cos \frac{\pi\tau}{2} e^\tau d\tau \\ &= 4 \frac{e}{(\pi^2+4)^3} \\ & \quad \times \left(\begin{array}{l} 40\pi^2 e^{-1} - 128e^{-1} - 80\pi + 2\pi^4 e^{-1} + 80\sqrt{2} e^{-\frac{1}{2}} + \\ 12\pi^3 + 112\sqrt{2}\pi e^{-\frac{1}{2}} - 48\sqrt{2}\pi^2 e^{-\frac{1}{2}} \\ -4\sqrt{2}\pi^3 e^{-\frac{1}{2}} - \sqrt{2}\pi^4 e^{-\frac{1}{2}} \end{array} \right) \end{aligned}$$

işlemlerinden faydalanılır. Böylece ispat tamamlanır.

Not 4.2 $h : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x_1) = x_1^s$ fonksiyonu $0 < s \leq 1$ için konkav olduğundan her $u, v \geq 0$ için

$$h\left(\frac{u+v}{2}\right) = \left(\frac{u+v}{2}\right)^s \geq \frac{h(u) + h(v)}{2} = \frac{u^s + v^s}{2}$$

yazılabilir. Bu eşitsizlik yardımıyla

$$\begin{aligned}
& \frac{\eta_2 - \eta_1}{2} \left(\frac{1}{2(p+1)} \right)^{\frac{1}{p}} 2^{\frac{1}{q}} \\
& \times \left[\left(\frac{\pi^3 e - 4\pi e - 2\pi^2 + 8}{\pi^4 + 8\pi^2 + 16} |\Omega'(\eta_1)|^q + \frac{8\pi e - 16}{\pi^4 + 8\pi^2 + 16} |\Omega'(\eta_2)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \left. + \left(\frac{8e(\pi - 2e^{-1})}{\pi^4 + 8\pi^2 + 16} |\Omega'(\eta_1)|^q + \frac{\pi^3 e - 4\pi e - 2\pi^2 + 8}{\pi^4 + 8\pi^2 + 16} |\Omega'(\eta_2)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\
& \leq \frac{\eta_2 - \eta_1}{2} \left(\frac{1}{2(p+1)} \right)^{\frac{1}{p}} 2 \left[2 \frac{\pi e - 2}{\pi^2 + 4} \left(\frac{|\Omega'(\eta_1)|^q + |\Omega'(\eta_2)|^q}{2} \right) \right]^{\frac{1}{q}} \\
& = \frac{\eta_2 - \eta_1}{2} 2^{\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left[\frac{\pi e - 2}{\pi^2 + 4} \right]^{\frac{1}{q}} \eta_1^{\frac{1}{q}} (|\Omega'(\eta_1)|^q, |\Omega'(\eta_2)|^q).
\end{aligned} \tag{4.16}$$

bulunur. Bu eşitsizlik, (4.11) eşitsizliğinin (4.7) eşitsizliğinden daha iyi bir yaklaşım sergilediğini göstermektedir.

Not 4.3 (4.14) eşitsizliği, (4.9) eşitsizliğinden daha iyi bir yaklaşım sunar.

İspat İspat nümerik olarak yapılacaktır.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (1-\tau) |1-2\tau| \sin \frac{\pi\tau}{2} e^{(1-\tau)} d\tau &= \int_0^1 \tau |1-2\tau| \cos \frac{\pi\tau}{2} e^\tau d\tau \cong 0,152, \\
\int_0^1 \tau |1-2\tau| \sin \frac{\pi\tau}{2} e^{(1-\tau)} d\tau &= \int_0^1 (1-\tau) |1-2\tau| \cos \frac{\pi\tau}{2} e^\tau d\tau \cong 0,263
\end{aligned}$$

olduğundan (4.14) eşitsizliği

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\Omega(\eta_1) + \Omega(\eta_2)}{2} - \frac{1}{\eta_2 - \eta_1} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \Omega(x_1) dx_1 \right| \\
& \leq \frac{\eta_2 - \eta_1}{2} \left(\frac{1}{4} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left[(0,152 |\Omega'(\eta_1)|^q + 0,263 |\Omega'(\eta_2)|^q)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + (0,263 |\Omega'(\eta_1)|^q + 0,152 |\Omega'(\eta_2)|^q)^{\frac{1}{q}} \right].
\end{aligned} \tag{4.17}$$

olarak yazılabilir. Benzer şekilde

$$\int_0^1 |1-2\tau| \sin \frac{\pi\tau}{2} e^{(1-\tau)} d\tau = \int_0^1 |1-2\tau| \cos \frac{\pi\tau}{2} e^\tau d\tau \cong 0,415$$

olduğundan (4.9) eşitsizliği

$$\left| \frac{\Omega(\eta_1) + \Omega(\eta_2)}{2} - \frac{1}{\eta_2 - \eta_1} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \Omega(x_1) dx_1 \right| \leq \frac{\eta_2 - \eta_1}{2^{2-\frac{2}{q}}} (0,415)^{\frac{1}{q}} \eta_1^{\frac{1}{q}} (|\Omega'(\eta_1)|^q, |\Omega'(\eta_2)|^q) \tag{4.18}$$

olarak yazılabilir. (4.37) ve (4.18) eşitsizliklerinden (4.16) eşitsizliğinin elde edilmişindeki methoda benzer yolla

$$\begin{aligned}
& \frac{\eta_2 - \eta_1}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^{1-\frac{1}{q}} \left[(0, 152 |\Omega'(\eta_1)|^q + 0, 263 |\Omega'(\eta_2)|^q)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + (0, 263 |\Omega'(\eta_1)|^q + 0, 152 |\Omega'(\eta_2)|^q)^{\frac{1}{q}} \right] \\
& \leq \frac{\eta_2 - \eta_1}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^{1-\frac{1}{q}} 2 (0, 415)^{\frac{1}{q}} \eta_1^{\frac{1}{q}} (|\Omega'(\eta_1)|^q, |\Omega'(\eta_2)|^q) \\
& = \frac{\eta_2 - \eta_1}{2^{2-\frac{2}{q}}} (0, 415)^{\frac{1}{q}} \eta_1^{\frac{1}{q}} (|\Omega'(\eta_1)|^q, |\Omega'(\eta_2)|^q)
\end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitsizlik (4.14) eşitsizliğinin (4.9) eşitsizliğinden daha iyi bir yaklaşım sunduğunu gösterir.

4.2. Riemann-Liouville Kotanjant Kesirli İntegralleri için Chebyshev Tipli Eşitsizlikler

Teorem 4.9 $\Omega : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bir modifiye edilmiş üstel trigonometrik fonksiyon olsun. $\eta_1, \eta_2 \in I$, $\beta \in (0, 1]$ ve $Re(\alpha) > 0$ olacak şekilde $\alpha \in \mathbb{C}$ olsun. Bu durumda her $\tau \in [0, 1]$ için

$$\begin{aligned}
& ({}_{\eta_1} I^{\alpha, \beta} \Omega)(\eta_2) \\
& \leq \frac{(\eta_2 - \eta_1)^\alpha}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\beta\right)^\alpha \Gamma(\alpha)} \\
& \quad \times \int_0^1 e^{[-\cot\left(\frac{\pi}{2}\beta\right)(\eta_2 - \eta_1)(1-\tau)]} (1-\tau)^{\alpha-1} \left[\sin\frac{\pi\tau}{2} e^{1-\tau} \Omega(\eta_1) + \cos\frac{\pi\tau}{2} e^\tau \Omega(\eta_2) \right] d\tau
\end{aligned} \tag{4.19}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat $({}_{\eta_1} I^{\alpha, \beta} \Omega)(\eta_2) = \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\beta\right)^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_{\eta_1}^{\eta_2} e^{[-\cot\left(\frac{\pi}{2}\beta\right)(\eta_2 - u)]} (\eta_2 - u)^{\alpha-1} \Omega(u) du$ olarak bilinen

kesirli integral operatöründe $u = \tau\eta_2 + (1 - \tau)\eta_1$ değişken değişikliği yapılırsa

$$\begin{aligned} & (\eta_1 I^{\alpha, \beta} \Omega) (\eta_2) \\ &= \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\beta\right)^\alpha \Gamma(\alpha)} \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} & \times \left[\int_0^1 e^{-\cot\left(\frac{\pi}{2}\beta\right)(\eta_2 - \eta_1)(1 - \tau)} [(\eta_2 - \eta_1)(1 - \tau)]^{\alpha - 1} \Omega(\tau\eta_2 + (1 - \tau)\eta_1) (\eta_2 - \eta_1) d\tau \right] \\ &= \frac{(\eta_2 - \eta_1)^\alpha}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\beta\right)^\alpha \Gamma(\alpha)} \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$\times \left[\int_0^1 e^{-\cot\left(\frac{\pi}{2}\beta\right)(\eta_2 - \eta_1)(1 - \tau)} (1 - \tau)^{\alpha - 1} \Omega(\tau\eta_2 + (1 - \tau)\eta_1) d\tau \right]$$

elde edilir. Ω fonksiyonu modifiye edilmiş üstel trigonometrik konveks olduğundan

$$\begin{aligned} & (\eta_1 I^{\alpha, \beta} \Omega) (\eta_2) \\ & \leq \frac{(\eta_2 - \eta_1)^\alpha}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\beta\right)^\alpha \Gamma(\alpha)} \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$\times \int_0^1 e^{-\cot\left(\frac{\pi}{2}\beta\right)(\eta_2 - \eta_1)(1 - \tau)} (1 - \tau)^{\alpha - 1} \left[\sin \frac{\pi\tau}{2} e^{1 - \tau} \Omega(\eta_1) + \cos \frac{\pi\tau}{2} e^\tau \Omega(\eta_2) \right] d\tau$$

yazılabilir. Böylece ispat tamamlanır.

Lemma 4.1 Ω ve ϱ , $I = [\eta_1, \eta_2] \subseteq \mathbb{R}$ aralığında integrallenebilir ve senkronize iki fonksiyon olsun. Ayrıca $u, v : I \rightarrow [0, \infty)$ iki fonksiyon olmak üzere $\varkappa_1 \in I$, $\eta_1 > 0$ ve $\beta \in (0, 1]$ için

$$\begin{aligned} & (\eta_1 I^{\alpha, \beta} (u\Omega\varrho)) (\varkappa_1) (\eta_1 I^{\alpha, \beta} v) (\varkappa_1) \\ & + (\eta_1 I^{\alpha, \beta} u) (\varkappa_1) (\eta_1 I^{\alpha, \beta} (v\Omega\varrho)) (\varkappa_1) \\ & \geq (\eta_1 I^{\alpha, \beta} (u\Omega)) (\varkappa_1) (\eta_1 I^{\alpha, \beta} (v\varrho)) (\varkappa_1) \\ & + (\eta_1 I^{\alpha, \beta} (u\varrho)) (\varkappa_1) (\eta_1 I^{\alpha, \beta} (v\Omega)) (\varkappa_1) \end{aligned} \quad (4.23)$$

eşitsizliği yazılabilir. Burada $v\Omega\varrho(\varkappa_1) = v(\varkappa_1)\Omega(\varkappa_1)\varrho(\varkappa_1)$ ifadesi geçerlidir.

İspat Ω ve ϱ , $I = [\eta_1, \eta_2] \subseteq \mathbb{R}$ aralığında senkronize iki fonksiyon olduğundan her τ , $\varkappa_2 \in I$ için

$$(\Omega(\tau) - \Omega(\varkappa_2)) (\varrho(\tau) - \varrho(\varkappa_2)) \geq 0 \quad (4.24)$$

eşitsizliği sağlanır. Buradan

$$\Omega(\tau)\varrho(\tau) + \Omega(\varkappa_2)\varrho(\varkappa_2) \geq \Omega(\tau)\varrho(\varkappa_2) + \Omega(\varkappa_2)\varrho(\tau). \quad (4.25)$$

eşitsizliği yazılabilir.

$$z(\varkappa_1, \tau) = \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\beta\right)^\alpha \Gamma(\alpha)} e^{[-\cot\left(\frac{\pi}{2}\beta\right)(\varkappa_1-\tau)]} (\varkappa_1 - \tau)^{\alpha-1} \quad (4.26)$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. Her $\tau \in I$, $\varkappa_1 > \tau$, $\alpha > 0$, $\beta \in (0, 1]$ için $z(\varkappa_1, \tau)u(\tau)$ fonksiyonu pozitif olduğundan (4.25) eşitliğinin her yanı (4.26) ve $u(\tau)$ ile çarpılır ve daha sonra elde edilen eşitsizliğin τ 'ye göre η_1 'dan \varkappa_1 'e integrali alınırsa,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\beta\right)^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_{\eta_1}^{\varkappa_1} e^{[-\cot\left(\frac{\pi}{2}\beta\right)(\varkappa_1-\tau)]} (\varkappa_1 - \tau)^{\alpha-1} \Omega(\tau) \varrho(\tau) u(\tau) d\tau \\ & + \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\beta\right)^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_{\eta_1}^{\varkappa_1} e^{[-\cot\left(\frac{\pi}{2}\beta\right)(\varkappa_1-\tau)]} (\varkappa_1 - \tau)^{\alpha-1} \Omega(\varkappa_2) \varrho(\varkappa_2) u(\tau) d\tau \\ \geq & \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\beta\right)^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_{\eta_1}^{\varkappa_1} e^{[-\cot\left(\frac{\pi}{2}\beta\right)(\varkappa_1-\tau)]} (\varkappa_1 - \tau)^{\alpha-1} \Omega(\tau) \varrho(\varkappa_2) u(\tau) d\tau \quad (4.27) \\ & + \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\beta\right)^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_{\eta_1}^{\varkappa_1} e^{[-\cot\left(\frac{\pi}{2}\beta\right)(\varkappa_1-\tau)]} (\varkappa_1 - \tau)^{\alpha-1} \Omega(\varkappa_2) \varrho(\tau) u(\tau) d\tau \end{aligned}$$

bulunur. Sonuç olarak,

$$\begin{aligned} & \left({}_{\eta_1} I^{\alpha, \beta} (u\Omega\varrho) \right) (\varkappa_1) + \Omega(\varkappa_2) \varrho(\varkappa_2) \left({}_{\eta_1} I^{\alpha, \beta} u \right) (\varkappa_1) \\ & \geq \varrho(\varkappa_2) \left({}_{\eta_1} I^{\alpha, \beta} (u\Omega) \right) (\varkappa_1) + \Omega(\varkappa_2) \left({}_{\eta_1} I^{\alpha, \beta} (u\varrho) \right) (\varkappa_1) \end{aligned} \quad (4.28)$$

elde edilir. Diğer yandan

$$z(\varkappa_1, \varkappa_2) = \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\beta\right)^\alpha \Gamma(\alpha)} e^{[-\cot\left(\frac{\pi}{2}\beta\right)(\varkappa_1-\varkappa_2)]} (\varkappa_1 - \varkappa_2)^{\alpha-1}$$

fonksiyonu da her $\varkappa_2 \in I$, $\varkappa_1 > \tau$, $\alpha > 0$, $\beta \in (0, 1]$ için pozitiftir. (4.28) eşitsizliğin iki tarafı $z(\varkappa_1, \varkappa_2)v(\varkappa_2)$ çarpılır ve daha sonra elde edilen eşitliğin \varkappa_2 'ye göre η_1 'dan \varkappa_1 'e

integrali alınırsa

$$\begin{aligned}
& \left({}_{\eta_1} I^{\alpha, \beta} (u \Omega \varrho) \right) (\varkappa_1) \\
& \times \frac{1}{\sin \left(\frac{\pi}{2} \beta \right)^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_{\eta_1}^{\varkappa_1} e^{[-\cot \left(\frac{\pi}{2} \beta \right) (\varkappa_1 - \varkappa_2)]} (\varkappa_1 - \varkappa_2)^{\alpha-1} v(\varkappa_2) d\varkappa_2 \\
& + \left({}_{\eta_1} I^{\alpha, \beta} u \right) (\varkappa_1) \\
& \times \frac{1}{\sin \left(\frac{\pi}{2} \beta \right)^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_{\eta_1}^{\varkappa_1} e^{[-\cot \left(\frac{\pi}{2} \beta \right) (\varkappa_1 - \varkappa_2)]} (\varkappa_1 - \varkappa_2)^{\alpha-1} \Omega(\varkappa_2) \varrho(\varkappa_2) v(\varkappa_2) d\varkappa_2 \\
\geq & \left({}_{\eta_1} I^{\alpha, \beta} (u \Omega) \right) (\varkappa_1) \\
& \times \frac{1}{\sin \left(\frac{\pi}{2} \beta \right)^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_{\eta_1}^{\varkappa_1} e^{[-\cot \left(\frac{\pi}{2} \beta \right) (\varkappa_1 - \varkappa_2)]} (\varkappa_1 - \varkappa_2)^{\alpha-1} \varrho(\varkappa_2) v(\varkappa_2) d\varkappa_2 \\
& + \left({}_{\eta_1} I^{\alpha, \beta} (u \varrho) \right) (\varkappa_1) \\
& \times \frac{1}{\sin \left(\frac{\pi}{2} \beta \right)^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_{\eta_1}^{\varkappa_1} e^{[-\cot \left(\frac{\pi}{2} \beta \right) (\varkappa_1 - \varkappa_2)]} (\varkappa_1 - \varkappa_2)^{\alpha-1} \Omega(\varkappa_2) v(\varkappa_2) d\varkappa_2
\end{aligned} \tag{4.29}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.10 Ω ve $\varrho, I = [\eta_1, \eta_2] \subseteq \mathbb{R}$ aralığında integrallenebilir ve senkronize iki fonksiyon olsun. Ayrıca $r, p, q : I \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonları verilsin. Her $\varkappa_1 > 1, \alpha > 0$ ve $\beta \in (0, 1]$ için

$$\begin{aligned}
& 2 \left({}_{\eta_1} I^{\alpha, \beta} r \right) (\varkappa_1) \left[\begin{aligned} & \left({}_{\eta_1} I^{\alpha, \beta} p \right) (\varkappa_1) \left({}_{\eta_1} I^{\alpha, \beta} (q \Omega \varrho) \right) (\varkappa_1) \\ & + \left({}_{\eta_1} I^{\alpha, \beta} q \right) (\varkappa_1) \left({}_{\eta_1} I^{\alpha, \beta} (p \Omega \varrho) \right) (\varkappa_1) \end{aligned} \right] \\
& + 2 \left({}_{\eta_1} I^{\alpha, \beta} p \right) (\varkappa_1) \left({}_{\eta_1} I^{\alpha, \beta} q \right) (\varkappa_1) \left({}_{\eta_1} I^{\alpha, \beta} (r \Omega \varrho) \right) (\varkappa_1) \\
\geq & \left({}_{\eta_1} I^{\alpha, \beta} r \right) (\varkappa_1) \left[\left({}_{\eta_1} I^{\alpha, \beta} (p \Omega) \right) (\varkappa_1) \left({}_{\eta_1} I^{\alpha, \beta} (q \varrho) \right) (\varkappa_1) \right. \\
& + \left. \left({}_{\eta_1} I^{\alpha, \beta} (q \Omega) \right) (\varkappa_1) \left({}_{\eta_1} I^{\alpha, \beta} (p \varrho) \right) (\varkappa_1) \right] \\
& + \left({}_{\eta_1} I^{\alpha, \beta} p \right) (\varkappa_1) \left[\left({}_{\eta_1} I^{\alpha, \beta} (r \Omega) \right) (\varkappa_1) \left({}_{\eta_1} I^{\alpha, \beta} (q \varrho) \right) (\varkappa_1) \right. \\
& + \left. \left({}_{\eta_1} I^{\alpha, \beta} (q \Omega) \right) (\varkappa_1) \left({}_{\eta_1} I^{\alpha, \beta} (r \varrho) \right) (\varkappa_1) \right] \\
& + \left({}_{\eta_1} I^{\alpha, \beta} q \right) (\varkappa_1) \left[\left({}_{\eta_1} I^{\alpha, \beta} (r \Omega) \right) (\varkappa_1) \left({}_{\eta_1} I^{\alpha, \beta} (p \varrho) \right) (\varkappa_1) \right. \\
& + \left. \left({}_{\eta_1} I^{\alpha, \beta} (p \Omega) \right) (\varkappa_1) \left({}_{\eta_1} I^{\alpha, \beta} (r \varrho) \right) (\varkappa_1) \right]
\end{aligned} \tag{4.30}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat Lemma 4.1 denkleminde $u = p$ ve $v = q$ değişken değişimini yapılırsa

$$\begin{aligned}
& ({}_{\eta_1} I^{\alpha, \beta} p) (\varkappa_1) ({}_{\eta_1} I^{\alpha, \beta} (q\Omega\varrho)) (\varkappa_1) \\
& + ({}_{\eta_1} I^{\alpha, \beta} q) (\varkappa_1) ({}_{\eta_1} I^{\alpha, \beta} (p\Omega\varrho)) (\varkappa_1) \\
\geq & ({}_{\eta_1} I^{\alpha, \beta} (p\Omega)) (\varkappa_1) ({}_{\eta_1} I^{\alpha, \beta} (q\varrho)) (\varkappa_1) \\
& + ({}_{\eta_1} I^{\alpha, \beta} (q\Omega)) (\varkappa_1) ({}_{\eta_1} I^{\alpha, \beta} (p\varrho)) (\varkappa_1).
\end{aligned} \tag{4.31}$$

bulunur. Şimdi denklem (4.31) eşitsizliğinin her iki tarafı $({}_{\eta_1} I^{\alpha, \beta} r) (\varkappa_1)$ ile çarpılırsa,

$$\begin{aligned}
& ({}_{\eta_1} I^{\alpha, \beta} r) (\varkappa_1) [({}_{\eta_1} I^{\alpha, \beta} p) (\varkappa_1) ({}_{\eta_1} I^{\alpha, \beta} (q\Omega\varrho)) (\varkappa_1) \\
& + ({}_{\eta_1} I^{\alpha, \beta} q) (\varkappa_1) ({}_{\eta_1} I^{\alpha, \beta} (p\Omega\varrho)) (\varkappa_1)] \\
\geq & ({}_{\eta_1} I^{\alpha, \beta} r) (\varkappa_1) [({}_{\eta_1} I^{\alpha, \beta} (p\Omega)) (\varkappa_1) ({}_{\eta_1} I^{\alpha, \beta} (q\varrho)) (\varkappa_1) \\
& + ({}_{\eta_1} I^{\alpha, \beta} (q\Omega)) (\varkappa_1) ({}_{\eta_1} I^{\alpha, \beta} (p\varrho)) (\varkappa_1)].
\end{aligned} \tag{4.32}$$

elde edilir. Tekrar (4.23) denkleminde $u = r$ ve $v = q$ değişken değişimi yapılırsa,

$$\begin{aligned}
& ({}_{\eta_1} I^{\alpha, \beta} r) (\varkappa_1) ({}_{\eta_1} I^{\alpha, \beta} (q\Omega\varrho)) (\varkappa_1) + ({}_{\eta_1} I^{\alpha, \beta} q) (\varkappa_1) ({}_{\eta_1} I^{\alpha, \beta} (r\Omega\varrho)) (\varkappa_1) \\
\geq & ({}_{\eta_1} I^{\alpha, \beta} (r\Omega)) (\varkappa_1) ({}_{\eta_1} I^{\alpha, \beta} (q\varrho)) (\varkappa_1) + ({}_{\eta_1} I^{\alpha, \beta} (q\Omega)) (\varkappa_1) ({}_{\eta_1} I^{\alpha, \beta} (r\varrho)) (\varkappa_1)
\end{aligned} \tag{4.33}$$

bulunur. (4.33) eşitsizliğinin her iki yanını $({}_{\eta_1} I^{\alpha, \beta} p) (\varkappa_1)$ ile çarpılırsa,

$$\begin{aligned}
& ({}_{\eta_1} I^{\alpha, \beta} p) (\varkappa_1) [({}_{\eta_1} I^{\alpha, \beta} r) (\varkappa_1) ({}_{\eta_1} I^{\alpha, \beta} (q\Omega\varrho)) (\varkappa_1) \\
& + ({}_{\eta_1} I^{\alpha, \beta} q) (\varkappa_1) ({}_{\eta_1} I^{\alpha, \beta} (r\Omega\varrho)) (\varkappa_1)] \\
\geq & ({}_{\eta_1} I^{\alpha, \beta} p) (\varkappa_1) [({}_{\eta_1} I^{\alpha, \beta} (r\Omega)) (\varkappa_1) ({}_{\eta_1} I^{\alpha, \beta} (q\varrho)) (\varkappa_1) \\
& + ({}_{\eta_1} I^{\alpha, \beta} (q\Omega)) (\varkappa_1) ({}_{\eta_1} I^{\alpha, \beta} (r\varrho)) (\varkappa_1)].
\end{aligned} \tag{4.34}$$

elde edilir. (4.34) ifadesinde yapılacak değişken değişikliği ile

$$\begin{aligned}
& ({}_{\eta_1} I^{\alpha, \beta} q) (\varkappa_1) \left[\begin{array}{l} ({}_{\eta_1} I^{\alpha, \beta} r) (\varkappa_1) ({}_{\eta_1} I^{\alpha, \beta} (p\Omega\varrho)) (\varkappa_1) \\ + ({}_{\eta_1} I^{\alpha, \beta} p) (\varkappa_1) ({}_{\eta_1} I^{\alpha, \beta} (r\Omega\varrho)) (\varkappa_1) \end{array} \right] \\
\geq & ({}_{\eta_1} I^{\alpha, \beta} q) (\varkappa_1) \left[\begin{array}{l} ({}_{\eta_1} I^{\alpha, \beta} (r\Omega)) (\varkappa_1) ({}_{\eta_1} I^{\alpha, \beta} (p\varrho)) (\varkappa_1) \\ + ({}_{\eta_1} I^{\alpha, \beta} (p\Omega)) (\varkappa_1) ({}_{\eta_1} I^{\alpha, \beta} (r\varrho)) (\varkappa_1) \end{array} \right].
\end{aligned} \tag{4.35}$$

elde edilir. (4.32), (4.34) ve (4.35) eşitsizlikleri taraf tarafa toplanarak ispat tamamlanır.

Lemma 4.2 Ω ve ϱ , $I = [\eta_1, \eta_2] \subseteq \mathbb{R}$ aralığında integrallenebilir ve senkronize iki fonksiyon olsun. $u, v : [\eta_1, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonları verilsin. Her $\varkappa_1 > \eta_1$, $\alpha, \beta \in (0, 1]$ ve $\alpha, \beta > 0$ için

$$\begin{aligned} & \left({}_{\eta_1} I^{\alpha, \beta} u \right) (\varkappa_1) \left({}_{\eta_1} I^{\delta, \varphi} (v \Omega \varrho) \right) (\varkappa_1) \\ & + \left({}_{\eta_1} I^{\delta, \varphi} v \right) (\varkappa_1) \left({}_{\eta_1} I^{\alpha, \beta} (u \Omega \varrho) \right) (\varkappa_1) \\ \geq & \left({}_{\eta_1} I^{\alpha, \beta} (u \Omega) \right) (\varkappa_1) \left({}_{\eta_1} I^{\delta, \varphi} (v \varrho) \right) (\varkappa_1) \\ & + \left({}_{\eta_1} I^{\delta, \varphi} (v \Omega) \right) (\varkappa_1) \left({}_{\eta_1} I^{\alpha, \beta} (u \varrho) \right) (\varkappa_1). \end{aligned} \quad (4.36)$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat

$$\tau (\varkappa_1, \varkappa_2) = \frac{1}{\sin \left(\frac{\pi}{2} \delta \right)^\varphi \Gamma (\varphi)} e^{[-\cot \left(\frac{\pi}{2} \delta \right) (\varkappa_1 - \varkappa_2)]} (\varkappa_1 - \varkappa_2)^{\varphi-1} \quad (4.37)$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. $\varkappa_1 > \eta_1$ ve $\varkappa_2 \in (\eta_1, \varkappa_1)$ için $\delta, \varphi > 0$ olmak üzere $\tau (\varkappa_1, \varkappa_2) v (\varkappa_2)$ ifadesi pozitiftir. (4.28) ifadesinin her iki yanını $\tau (\varkappa_1, \varkappa_2) v (\varkappa_2)$ ile çarpılır ve elde edilen eşitsizliğin \varkappa_2 'ye göre η_1 'dan \varkappa_1 'e integrali alınırsa,

$$\begin{aligned} & \frac{\left({}_{\eta_1} I^{\alpha, \beta} u \right) (\varkappa_1)}{\sin \left(\frac{\pi}{2} \delta \right)^\varphi \Gamma (\varphi)} \int_{\eta_1}^{\varkappa_1} e^{[-\cot \left(\frac{\pi}{2} \delta \right) (\varkappa_1 - \varkappa_2)]} (\varkappa_1 - \varkappa_2)^{\varphi-1} \Omega (\varkappa_2) \varrho (\varkappa_2) v (\varkappa_2) d\varkappa_2 \\ & + \frac{\left({}_{\eta_1} I^{\alpha, \beta} (u \Omega \varrho) \right) (\varkappa_1)}{\sin \left(\frac{\pi}{2} \delta \right)^\varphi \Gamma (\varphi)} \int_{\eta_1}^{\varkappa_1} e^{[-\cot \left(\frac{\pi}{2} \delta \right) (\varkappa_1 - \varkappa_2)]} (\varkappa_1 - \varkappa_2)^{\varphi-1} v (\varkappa_2) d\varkappa_2 \\ \geq & \frac{\left({}_{\eta_1} I^{\alpha, \beta} (u \Omega) \right) (\varkappa_1)}{\sin \left(\frac{\pi}{2} \delta \right)^\varphi \Gamma (\varphi)} \int_{\eta_1}^{\varkappa_1} e^{[-\cot \left(\frac{\pi}{2} \delta \right) (\varkappa_1 - \varkappa_2)]} (\varkappa_1 - \varkappa_2)^{\varphi-1} \varrho (\varkappa_2) v (\varkappa_2) d\varkappa_2 \\ & + \frac{\left({}_{\eta_1} I^{\alpha, \beta} (u \varrho) \right) (\varkappa_1)}{\sin \left(\frac{\pi}{2} \delta \right)^\varphi \Gamma (\varphi)} \int_{\eta_1}^{\varkappa_1} e^{[-\cot \left(\frac{\pi}{2} \delta \right) (\varkappa_1 - \varkappa_2)]} (\varkappa_1 - \varkappa_2)^{\varphi-1} \Omega (\varkappa_2) v (\varkappa_2) d\varkappa_2. \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu durumda ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.11 Ω , ϱ , ve h fonksiyonları $[\eta_1, \infty)$ aralığında pozitif ve sürekli fonksiyonlar olsun. Öte yandan bu fonksiyonlar,

$$(\varrho(\tau) - \varrho(\varkappa_2)) \left(\frac{\Omega(\varkappa_2)}{h(\varkappa_2)} - \frac{\Omega(\tau)}{h(\tau)} \right) \geq 0 \quad (4.38)$$

şartını sağlasın. Bu durumda her $\varkappa_1 > \eta_1$, $\eta_1 > 0$ ve $\beta \in (0, 1]$ için

$$\frac{\left({}_{\eta_1} I^{\alpha, \beta} \Omega \right) (\varkappa_1)}{\left({}_{\eta_1} I^{\alpha, \beta} h \right) (\varkappa_1)} \geq \frac{\left({}_{\eta_1} I^{\alpha, \beta} (\varrho \Omega) \right) (\varkappa_1)}{\left({}_{\eta_1} I^{\alpha, \beta} (\varrho h) \right) (\varkappa_1)} \quad (4.39)$$

eşitsizliğini elde ederiz.

İspat Ω , ϱ , ve h fonksiyonları $[\eta_1, \infty)$ aralığında pozitif ve sürekli fonksiyonlar olduğundan, (4.38) yardımıyla

$$\varrho(\tau) \frac{\Omega(\varkappa_2)}{h(\varkappa_2)} + \varrho(\varkappa_2) \frac{\Omega(\tau)}{h(\tau)} - \varrho(\varkappa_2) \frac{\Omega(\varkappa_2)}{h(\varkappa_2)} - \varrho(\tau) \frac{\Omega(\tau)}{h(\tau)} \geq 0 \quad (4.40)$$

eşitsizliğini elde ederiz. (4.38) eşitsizliğinin her iki tarafı $h(\varkappa_2)h(\tau)$ ile çarpılırsa,

$$\varrho(\tau)\Omega(\varkappa_2)h(\tau) - \varrho(\tau)\Omega(\tau)h(\varkappa_2) - \varrho(\varkappa_2)\Omega(\varkappa_2)h(\tau) + \varrho(\varkappa_2)\Omega(\tau)h(\varkappa_2) \geq 0 \quad (4.41)$$

ifadesini elde ederiz. (4.41) eşitsizliği (4.26) ile tanımlanan $z(\varkappa_1, \tau)$ ile çarpılır ve elde edilen eşitsizliğin τ 'ye göre η_1 'dan \varkappa_1 'e integrali alınırsa

$$\begin{aligned} & \frac{\Omega(\varkappa_2)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\beta\right)^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_{\eta_1}^{\varkappa_1} e^{[-\cot\left(\frac{\pi}{2}\beta\right)(\varkappa_1-\tau)]} (\varkappa_1 - \tau)^{\alpha-1} \varrho(\tau)h(\tau)d\tau \\ & - \frac{h(\varkappa_2)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\beta\right)^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_{\eta_1}^{\varkappa_1} e^{[-\cot\left(\frac{\pi}{2}\beta\right)(\varkappa_1-\tau)]} (\varkappa_1 - \tau)^{\alpha-1} \varrho(\tau)\Omega(\tau)d\tau \\ & - \frac{\varrho(\varkappa_2)\Omega(\varkappa_2)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\beta\right)^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_{\eta_1}^{\varkappa_1} e^{[-\cot\left(\frac{\pi}{2}\beta\right)(\varkappa_1-\tau)]} (\varkappa_1 - \tau)^{\alpha-1} h(\tau)d\tau \\ & + \frac{\varrho(\varkappa_2)h(\varkappa_2)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\beta\right)^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_{\eta_1}^{\varkappa_1} e^{[-\cot\left(\frac{\pi}{2}\beta\right)(\varkappa_1-\tau)]} (\varkappa_1 - \tau)^{\alpha-1} \Omega(\tau)d\tau \\ & \geq 0 \end{aligned} \quad (4.42)$$

bulunur. (4.42) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} & \Omega(\varkappa_2) \left({}_{\eta_1}I^{\alpha,\beta}(\varrho h) \right) (\varkappa_1) - h(\varkappa_2) \left({}_{\eta_1}I^{\alpha,\beta}(\varrho\Omega) \right) (\varkappa_1) \\ & - \varrho(\varkappa_2)\Omega(\varkappa_2) \left({}_{\eta_1}I^{\alpha,\beta}h \right) (\varkappa_1) + \varrho(\varkappa_2)h(\varkappa_2) \left({}_{\eta_1}I^{\alpha,\beta}\Omega \right) (\varkappa_1) \\ & \geq 0 \end{aligned} \quad (4.43)$$

yazılabilir. (4.43) eşitsizliğinin iki tarafı, her $\varkappa_2 \in (\eta_1, \varkappa_1)$, $(\varkappa_1 > 1)$, $\alpha, \beta > 0$ için pozitif olan $z(\varkappa_1, \varkappa_2)$ ifadesi ile çarpılır ve elde edilen eşitliğin \varkappa_2 'ye göre η_1 'den \varkappa_1 'e integrali alınırsa

$$\begin{aligned} & \left({}_{\eta_1}I^{\alpha,\beta}\Omega \right) (\varkappa_1) \left({}_{\eta_1}I^{\alpha,\beta}(\varrho h) \right) (\varkappa_1) - \left({}_{\eta_1}I^{\alpha,\beta}h \right) (\varkappa_1) \left({}_{\eta_1}I^{\alpha,\beta}(\varrho\Omega) \right) (\varkappa_1) \\ & - \left({}_{\eta_1}I^{\alpha,\beta}(\varrho\Omega) \right) (\varkappa_1) \left({}_{\eta_1}I^{\alpha,\beta}h \right) (\varkappa_1) + \left({}_{\eta_1}I^{\alpha,\beta}(\varrho h) \right) (\varkappa_1) \left({}_{\eta_1}I^{\alpha,\beta}\Omega \right) (\varkappa_1) \\ & \geq 0 \end{aligned} \quad (4.44)$$

elde edilir. Son eşitsizlik yeniden düzenlenirse

$$\left({}_{\eta_1}I^{\alpha,\beta}\Omega \right) (\varkappa_1) \left({}_{\eta_1}I^{\alpha,\beta}(\varrho h) \right) (\varkappa_1) \geq \left({}_{\eta_1}I^{\alpha,\beta}h \right) (\varkappa_1) \left({}_{\eta_1}I^{\alpha,\beta}(\varrho\Omega) \right) (\varkappa_1). \quad (4.45)$$

bulunur. Bu, teoremin ispatını tamamlar.

Teorem 4.12 Ω , ϱ , ve h fonksiyonları $[1, \infty)$ aralığında pozitif ve sürekli fonksiyonlar olsun.

Bunula birlikte

$$(\varrho(\tau) - \varrho(\varkappa_2)) \left(\frac{\Omega(\varkappa_2)}{h(\varkappa_2)} - \frac{\Omega(\tau)}{h(\tau)} \right) \geq 0 \quad (4.46)$$

şartı sağlansın. Bu durumda her $\varkappa_1 > \eta_1$, $\alpha, \beta \in (0, 1]$, ve $\delta, \varphi > 0$ için aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz

$$\frac{({}_{\eta_1} I^{\alpha, \beta} \Omega) (\varkappa_1) ({}_{\eta_1} I^{\delta, \varphi} (\Omega \varrho)) (\varkappa_1) + ({}_{\eta_1} I^{\delta, \varphi} \Omega) (\varkappa_1) ({}_{\eta_1} I^{\alpha, \beta} (\varrho h)) (\varkappa_1)}{({}_{\eta_1} I^{\alpha, \beta} h) (\varkappa_1) ({}_{\eta_1} I^{\delta, \varphi} (\Omega \varrho)) (\varkappa_1) + ({}_{\eta_1} I^{\delta, \varphi} h) (\varkappa_1) ({}_{\eta_1} I^{\alpha, \beta} (\varrho \Omega)) (\varkappa_1)} \geq 1. \quad (4.47)$$

İspat $\varkappa_2 \in (\eta_1, \varkappa_1)$ ve $\delta, \varphi > 0$ için $\tau (\varkappa_1, \varkappa_2)$ her zaman pozitiftir. (4.43) ifadesinin her iki yanını (4.37) ile çarpılır ve sonra elde edilen eşitliğin \varkappa_2 'ye göre η_1 'dan \varkappa_1 'e integrali alınırsa aşağıdaki ifade elde edilir

$$\begin{aligned} & \frac{({}_{\eta_1} I^{\alpha, \beta} (\varrho h)) (\varkappa_1)}{\sin \left(\frac{\pi}{2} \delta \right)^\varphi \Gamma (\varphi)} \int_{\eta_1}^{\varkappa_1} e^{[-\cot \left(\frac{\pi}{2} \delta \right) (\varkappa_1 - \varkappa_2)]} (\varkappa_1 - \varkappa_2)^{\varphi-1} \Omega (\varkappa_2) d\varkappa_2 \\ & - \frac{({}_{\eta_1} I^{\alpha, \beta} (\Omega \varrho)) (\varkappa_1)}{\sin \left(\frac{\pi}{2} \delta \right)^\varphi \Gamma (\varphi)} \int_{\eta_1}^{\varkappa_1} e^{[-\cot \left(\frac{\pi}{2} \delta \right) (\varkappa_1 - \varkappa_2)]} (\varkappa_1 - \varkappa_2)^{\varphi-1} h (\varkappa_2) d\varkappa_2 \\ & - \frac{({}_{\eta_1} I^{\alpha, \beta} h) (\varkappa_1)}{\sin \left(\frac{\pi}{2} \delta \right)^\varphi \Gamma (\varphi)} \int_{\eta_1}^{\varkappa_1} e^{[-\cot \left(\frac{\pi}{2} \delta \right) (\varkappa_1 - \varkappa_2)]} (\varkappa_1 - \varkappa_2)^{\varphi-1} \Omega (\varkappa_2) \varrho (\varkappa_2) d\varkappa_2 \\ & + \frac{({}_{\eta_1} I^{\alpha, \beta} \Omega) (\varkappa_1)}{\sin \left(\frac{\pi}{2} \delta \right)^\varphi \Gamma (\varphi)} \int_{\eta_1}^{\varkappa_1} e^{[-\cot \left(\frac{\pi}{2} \delta \right) (\varkappa_1 - \varkappa_2)]} (\varkappa_1 - \varkappa_2)^{\varphi-1} h (\varkappa_2) \varrho (\varkappa_2) d\varkappa_2 \\ & \geq 0. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Bu ifade şu eşitsizliği otaya koyar:

$$\begin{aligned} & ({}_{\eta_1} I^{\alpha, \beta} (\varrho h)) (\varkappa_1) ({}_{\eta_1} I^{\delta, \varphi} \Omega) (\varkappa_1) \\ & - ({}_{\eta_1} I^{\alpha, \beta} (\Omega \varrho)) (\varkappa_1) ({}_{\eta_1} I^{\delta, \varphi} h) (\varkappa_1) \\ & - ({}_{\eta_1} I^{\alpha, \beta} h) (\varkappa_1) ({}_{\eta_1} I^{\delta, \varphi} (\Omega \varrho)) (\varkappa_1) \\ & + ({}_{\eta_1} I^{\alpha, \beta} \Omega) (\varkappa_1) ({}_{\eta_1} I^{\delta, \varphi} (\varrho h)) (\varkappa_1) \\ & \geq 0. \end{aligned} \quad (4.49)$$

(4.49) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} & ({}_{\eta_1} I^{\alpha, \beta} (\varrho h)) (\varkappa_1) ({}_{\eta_1} I^{\delta, \varphi} \Omega) (\varkappa_1) + ({}_{\eta_1} I^{\alpha, \beta} \Omega) (\varkappa_1) ({}_{\eta_1} I^{\delta, \varphi} (\varrho h)) (\varkappa_1) \\ & \geq ({}_{\eta_1} I^{\alpha, \beta} (\Omega \varrho)) (\varkappa_1) ({}_{\eta_1} I^{\delta, \varphi} h) (\varkappa_1) + ({}_{\eta_1} I^{\alpha, \beta} h) (\varkappa_1) ({}_{\eta_1} I^{\delta, \varphi} (\Omega \varrho)) (\varkappa_1). \end{aligned} \quad (4.50)$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.13 Ω ve h fonksiyonları $[\eta_1, \infty)$ aralığında $\Omega \leq h$ şartını sağlayan iki pozitif sürekli fonksiyon olsun. $[\eta_1, \infty)$ üzerinde $\frac{\Omega}{h}$ azalan ve Ω artan fonksiyonlar olsun. Bu durumda, herhangi bir $p \geq 1$, $\varkappa_1 > \eta_1$, $\alpha > 0$ ve $\beta \in (0, 1]$ için aşağıdaki eşitsizliği elde edilir

$$\frac{({}_{\eta_1}I^{\alpha, \beta} \Omega)(\varkappa_1)}{({}_{\eta_1}I^{\alpha, \beta} h)(\varkappa_1)} \geq \frac{({}_{\eta_1}I^{\alpha, \beta} \Omega^p)(\varkappa_1)}{({}_{\eta_1}I^{\alpha, \beta} h^p)(\varkappa_1)}. \quad (4.51)$$

İspat (4.39) eşitsizliğinde $\varrho = \Omega^{p-1}$ olarak aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz

$$\frac{({}_{\eta_1}I^{\alpha, \beta} \Omega)(\varkappa_1)}{({}_{\eta_1}I^{\alpha, \beta} h)(\varkappa_1)} \geq \frac{({}_{\eta_1}I^{\alpha, \beta} \Omega \Omega^{p-1})(\varkappa_1)}{({}_{\eta_1}I^{\alpha, \beta} h \Omega^{p-1})(\varkappa_1)}. \quad (4.52)$$

$[\eta_1, \infty)$ aralığında $\Omega \leq h$ olduğunda

$$\Omega^{p-1} \leq h^{p-1} \quad (4.53)$$

$$h \Omega^{p-1} \leq h^p.$$

yazılabilir. (4.53) eşitsizliğini (4.26) tanımlanan $z(\varkappa_1, \tau)$ ifadesi ile çarpılır ve sonra elde edilen eşitiğin τ 'ye göre η_1 'dan \varkappa_1 'e integrali alınır aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sin(\frac{\pi}{2}\beta)^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_{\eta_1}^{\varkappa_1} e^{[-\cot(\frac{\pi}{2}\beta)(\varkappa_1 - \tau)]} (\varkappa_1 - \tau)^{\alpha-1} \Omega^{p-1} h(\tau) d\tau \\ & \leq \frac{1}{\sin(\frac{\pi}{2}\beta)^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_{\eta_1}^{\varkappa_1} e^{[-\cot(\frac{\pi}{2}\beta)(\varkappa_1 - \tau)]} (\varkappa_1 - \tau)^{\alpha-1} h^p(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (4.54)$$

ki bu eşitsizlik

$$({}_{\eta_1}I^{\alpha, \beta} h \Omega^{p-1})(\varkappa_1) \leq ({}_{\eta_1}I^{\alpha, \beta} h^p)(\varkappa_1) \quad (4.55)$$

eşitsizliğini verir. Buradan

$$\frac{1}{({}_{\eta_1}I^{\alpha, \beta} h \Omega^{p-1})(\varkappa_1)} \geq \frac{1}{({}_{\eta_1}I^{\alpha, \beta} h^p)(\varkappa_1)} \quad (4.56)$$

yazılabilir. (4.56) eşitsizliği $({}_{\eta_1}I^{\alpha, \beta} \Omega^p)(\varkappa_1)$ ifadesiyle çarpılırsa

$$\frac{({}_{\eta_1}I^{\alpha, \beta} \Omega \Omega^{p-1})(\varkappa_1)}{({}_{\eta_1}I^{\alpha, \beta} h \Omega^{p-1})(\varkappa_1)} \geq \frac{({}_{\eta_1}I^{\alpha, \beta} \Omega^p)(\varkappa_1)}{({}_{\eta_1}I^{\alpha, \beta} h^p)(\varkappa_1)} \quad (4.57)$$

sonucu elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.14 Ω ve h fonksiyonları $[\eta_1, \infty)$ aralığında $\Omega \leq h$ şartını sağlayan iki pozitif sürekli fonksiyon olsun. $[\eta_1, \infty)$ üzerinde $\frac{\Omega}{h}$ azalan ve Ω artan fonksiyonlar olsun. Bu durumda, herhangi bir $p \geq 1$, $\varkappa_1 > \eta_1$, $\beta, \varphi \in (0, 1]$, $\alpha, \delta > 0$ için aşağıdaki eşitsizliği elde edilir

$$\frac{({}_{\eta_1}I^{\alpha, \beta} \Omega)(\varkappa_1) ({}_{\eta_1}I^{\delta, \varphi} h^p)(\varkappa_1) + ({}_{\eta_1}I^{\delta, \varphi} \Omega)(\varkappa_1) ({}_{\eta_1}I^{\alpha, \beta} h^p)(\varkappa_1)}{({}_{\eta_1}I^{\alpha, \beta} h)(\varkappa_1) ({}_{\eta_1}I^{\delta, \varphi} \Omega^p)(\varkappa_1) + ({}_{\eta_1}I^{\delta, \varphi} h)(\varkappa_1) ({}_{\eta_1}I^{\alpha, \beta} \Omega^p)(\varkappa_1)} \geq 1. \quad (4.58)$$

İspat (4.47) eşitsizliğinde $\varrho = \Omega^{p-1}$ dönüşümü yapılarak aşağıdaki ifadeyi elde edilir

$$\frac{({}_{\eta_1}I^{\alpha, \beta} \Omega)(\varkappa_1) ({}_{\eta_1}I^{\delta, \varphi} h \Omega^{p-1})(\varkappa_1) + ({}_{\eta_1}I^{\delta, \varphi} \Omega)(\varkappa_1) ({}_{\eta_1}I^{\alpha, \beta} \Omega^p)(\varkappa_1)}{({}_{\eta_1}I^{\alpha, \beta} h)(\varkappa_1) ({}_{\eta_1}I^{\delta, \varphi} \Omega^p)(\varkappa_1) + ({}_{\eta_1}I^{\delta, \varphi} h)(\varkappa_1) ({}_{\eta_1}I^{\alpha, \beta} \Omega^p)(\varkappa_1)} \geq 1. \quad (4.59)$$

$[\eta_1, \infty)$ aralığında $\Omega \leq h$ olduğundan (4.53) eşitsizliği yazılabilir. Pozitif olduğu bilinen (4.37) ifadesi (4.53) ile çarpılır ve elde edilen eşitliğin \varkappa_2 'ye göre η_1 'den \varkappa_1 'e integrali alınır

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\delta\right)^\varphi \Gamma(\varphi)} \int_{\eta_1}^{\varkappa_1} e^{[-\cot\left(\frac{\pi}{2}\delta\right)(\varkappa_1 - \varkappa_2)]} (\varkappa_1 - \varkappa_2)^{\varphi-1} h \Omega^{p-1}(\varkappa_2) d\varkappa_2 \\ & \leq \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\delta\right)^\varphi \Gamma(\varphi)} \int_{\eta_1}^{\varkappa_1} e^{[-\cot\left(\frac{\pi}{2}\delta\right)(\varkappa_1 - \varkappa_2)]} (\varkappa_1 - \varkappa_2)^{\varphi-1} h^p(\varkappa_2) d\varkappa_2 \end{aligned} \quad (4.60)$$

ki bu ifade aşağıdaki eşitsizliği verir.

$$({}_{\eta_1}I^{\delta, \varphi} h \Omega^{p-1})(\varkappa_1) \leq ({}_{\eta_1}I^{\delta, \varphi} h^p)(\varkappa_1). \quad (4.61)$$

(4.61) eşitsizliğinin her iki yanını $({}_{\eta_1}I^{\alpha, \beta} \Omega)(\varkappa_1)$ çarpılırsa

$$({}_{\eta_1}I^{\alpha, \beta} \Omega)(\varkappa_1) ({}_{\eta_1}I^{\delta, \varphi} h \Omega^{p-1})(\varkappa_1) \leq ({}_{\eta_1}I^{\alpha, \beta} \Omega)(\varkappa_1) ({}_{\eta_1}I^{\delta, \varphi} h^p)(\varkappa_1) \quad (4.62)$$

elde edilir. (4.55) eşitsizliğinin her iki yanını $({}_{\eta_1}I^{\delta, \varphi} \Omega)(\varkappa_1)$ çarpılırsa

$$({}_{\eta_1}I^{\delta, \varphi} \Omega)(\varkappa_1) ({}_{\eta_1}I^{\alpha, \beta} h \Omega^{p-1})(\varkappa_1) \leq ({}_{\eta_1}I^{\delta, \varphi} \Omega)(\varkappa_1) ({}_{\eta_1}I^{\alpha, \beta} h^p)(\varkappa_1) \quad (4.63)$$

bulunur. (4.62) ve (4.63) ifadeleri taraf tarafa toplanırsa

$$\begin{aligned} & ({}_{\eta_1}I^{\alpha, \beta} \Omega)(\varkappa_1) ({}_{\eta_1}I^{\delta, \varphi} h \Omega^{p-1})(\varkappa_1) + ({}_{\eta_1}I^{\delta, \varphi} \Omega)(\varkappa_1) ({}_{\eta_1}I^{\alpha, \beta} h \Omega^{p-1})(\varkappa_1) \\ & \leq ({}_{\eta_1}I^{\alpha, \beta} \Omega)(\varkappa_1) ({}_{\eta_1}I^{\delta, \varphi} h^p)(\varkappa_1) + ({}_{\eta_1}I^{\delta, \varphi} \Omega)(\varkappa_1) ({}_{\eta_1}I^{\alpha, \beta} h^p)(\varkappa_1) \end{aligned} \quad (4.64)$$

elde edilir. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

5. SONUÇ

Bu çalışmada, modifiye edilmiş yeni bir konveks fonksiyonlar sınıfı tanımlanmış ve bu sınıf üzerinden kesirli integral operatörleri kullanılarak Hadamard tipi bazı integral eşitsizlikleri elde edilmiştir. Tanımlanan bu konveks fonksiyon sınıfı, belirli şartlar altında çeşitli kesirli integral operatörlerine dönüştürülebilir bir yapıya sahiptir. Bu dönüşüm özelliği, elde edilen eşitsizliklerin kapsamını ve geçerliliğini önemli ölçüde artırmakta, dolayısıyla daha geniş bir araştırma alanı için temel oluşturma potansiyeline sahip olmaktadır.

Modifiye edilmiş yeni konveks fonksiyon sınıfının özellikleri, özellikle matematiksel analiz ve optimizasyon alanında önemli sonuçlar doğurabilir. Elde edilen Hadamard tipi integral eşitsizlikleri, daha önceki çalışmalarla kıyaslandığında, mevcut literatürdeki benzerlerinden farklılık göstererek yeni perspektifler sunmaktadır. Bu eşitsizlikler, konveks fonksiyonların analizinde yeni yöntemler geliştirilmesine olanak tanıdığı gibi, mevcut teorilere de katkıda bulunmaktadır.

Araştırmacılar, tezde sunulan bulguları kullanarak farklı tipte eşitsizlikler ile yeni sonuçlar elde edebilirler. Bu, sadece mevcut eşitsizliklerin genişletilmesiyle kalmayıp, aynı zamanda farklı matematiksel yaklaşımlar ve tekniklerin geliştirilmesine de kapı aralayacaktır. Ayrıca, elde edilen sonuçlar ışığında, çeşitli alanlarda yeni genelleştirmeler yapma fırsatı doğacaktır. Ayrıca tezin ikinci kısmında ise modifiye edilmiş konveks fonksiyonlar sınıfıyla Riemann–Liouville cotangent kesirli integrali yardımıyla Chebyshev tipli eşitsizlikler elde edilmiştir.

Sonuç olarak , bu tez çalışmasında ortaya konan modifiye edilmiş yeni konveks fonksiyon sınıfı ve Riemann–Liouville cotangent kesirli integraliyle elde edilen Chebyshev tipli eşitsizlikler bilim dünyasına katkı sağlamaktadır. Araştırmacıların bu yeni sınıfı kullanmalarikonveks analiz , matematiksel optimizasyon ve ilgili alanlarda daha önce keşfedilmemiş bağlantıların ve sonuçların ortaya çıkmasına yardımcı olabilir. Bu bağlamda , konveks fonksiyonlar ve kesirli integral operatörleri arasındaki ilişkiler üzerine daha fazla çalışma yapılması, matematiksel tezinin derinliğini ve uygulama alanlarını genişletebilir. Böylece, yeni bir araştırma alanı oluşabilir ve matematiksel literatürde önemli bir yer edinebilir.

KAYNAKLAR

- Awan, M., Noor, M., and Noor, K. (2018). Hermite-hadamard inequalities for exponentially convex functions. *Appl. Math. Inform Sci.*, 2:405–409.
- Baloch, I. A. and İşcan. (2015). Some ostrowski type inequalities for harmonically-convex functions in second sense. *International Journal of Analysis*.
- Bayraktar, M. (2000). *Fonksiyonel Analiz*. Gazi Kitabevi.
- Beckenbach, E. F. and Bellman, R. (1961). *Inequalities*. Springer-Verlag.
- Caputo, M. and Fabrizio, M. (2015). A new definition of fractional derivative without singular kernel. *Progress in Fractional Differentiation & Applications*, 1(2):1–13.
- Chebyshev, P. (1882). Sur les expressions approximatives des integrales definies par les autres prises entre les mêmes limites. *Proc. Math. Soc. Charkov*, 2:93–98.
- Chebyshev, P. L. (1867). Des valeurs moyennes. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 12:177–184.
- Dragomir, S. S., Agarwal, R., and Cerone, P. (1999). On simpson’s inequality and applications. *RGMA research report collection*, 2(3).
- Dragomir, S. S. and Agarwal, R. P. (1998). Two inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and to trapezoidal formula. *Applied Mathematics Letters*, 11(5):91–95.
- Dragomir, S. S. and Agarwal, R. P. (2000). *Recent Advances in Inequalities on Fractional Calculus*. Springer-Verlag.
- Hardy, G. H., Littlewood, J. E., and Pólya, G. (1952). *Inequalities*. Cambridge University Press.
- Heath, T. L. (2002). *The Works of Archimedes*. Dover Publications.

- Ion, D. A. (2007). Some estimates on the hermite-hadamard inequality through quasi-convex functions. *Analele Universitatii din Craiova, Seria Matematica si Informatica*, 34:82–87.
- Jensen, J. L. W. V. (1906). Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes. *Acta Mathematica*, 30:175–193.
- Kadakal, H. (2018). Hermite-hadamard type inequalities for trigonometrically convex functions. *Sci. Stud. Res. Ser. Math. Inform*, 28(2):19–28.
- Kadakal, M., İşcan, ., Agarwal, P., and Jleli, M. (2021a). Exponential trigonometric convex functions and hermite-hadamard type inequalities. *Mathematica Slovaca*, 71(1):43–56.
- Kadakal, M., İşcan., Kadakal, H., and Bekar, K. (2021b). On improvements of some integral inequalities. *Honam Math. J.*, 43(3):441–452.
- Kannappan, P. (2009). *Functional equations and inequalities with applications*. Springer Science & Business Media.
- Katugampola, U. N. (2014). A new approach to generalized fractional derivatives. *Bulletin of Mathematical Analysis and Applications*, 6(4):1–15.
- Lakshmikantham, V. and Trigiante, D. (2002). *Theory of Fractional Dynamic Systems*. Elsevier.
- Latif, M. and Alomari, M. (2009). Hadamard-type inequalities for product two convex functions on the co-ordinates. *Inter. Math. Forum.*, 4:2327–2338.
- Mitrinovic, D. S., Pecaric, J., and Fink, A. M. (1993). *Classical and new inequalities in analysis*. Kluwer Academic Publishers, UK.
- Mitrinovic, D. S. and Vasic, P. M. (1970). *Analytic inequalities*, volume 1. Springer.
- Niculescu, C. and Persson, L.-E. (2006). *Convex functions and their applications*, volume 23. Springer.

- Numan, S. and İşcan, I. (2021). On trigonometrically quasi-convex functions. *Honam Mathematical Journal*, 43(1):130–140.
- Oldhamand, K. and Spanier, J. (1974). *The fractional calculus: Theory and application of differentiation and integration to arbitrary order*. Academic Press, New York, NY, USA.
- Ostrowski, A. (1937). Über die absolutabweichung einer differentiierebaren funktion von ihrem integralmittelwert. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 10(1):226–227.
- Pearce, C. E., Pecari č, J., and Šimic, V. (1998). Stolarsky means and hadamard’s inequality. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 220(1):99–109.
- Roberts, A. W. and Varberg, D. E. (1973). *Convex Functions*. Academic Press.
- Sadek, L. (2023). A cotangent fractional derivative with the application. *Fractal and fractional*, 7(444):1–21.
- Samko, S. G., Kilbas, A. A., Marichev, O. I., et al. (1993). *Fractional integrals and derivatives*, volume 1. Gordon and Breach Science Publishers, Yverdon-les-Bains, Switzerland.
- Young, W. H. (1912a). On classes of summable functions and their fourier series. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, 87(594):225–229.
- Young, W. H. (1912b). On classes of summable functions and their fourier series. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A*, 87:225–229.
- İşcan. (2019). New refinements for integral and sum forms of hölder inequality. *J. Inequal. Appl.*, 2019:Art. ID 304.