



T. C.

ORDU ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

PARAMETRİK BÜYÜME EĞRİLERİNİN MODELLEMESİ
ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

MUSTAFA ŞİMŞEK

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ORDU 2025

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan ve kullanılan intihal tespit programının sonuçlarına göre; bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

MUSTAFA ŞİMŞEK

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

PARAMETRİK BÜYÜME EĞRİLERİNİN MODELLEMESİ ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

MUSTAFA ŞİMŞEK

ORDU ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ, (58) SAYFA

(TEZ DANIŞMANI: DOÇ. DR. MEHMET KORKMAZ)

Mevcut araştırmada, farklı büyüme modelleri üzerinde durulmuştur. Büyümenin matematiksel bir tanımının verim miktarındaki eksilmeleri açıklamada, büyüme hızlarının kıyaslanmasında, farklı türler ve tür içi karşılaştırmalarda ve gelecekteki artmalar hakkında öngörüde bulunmada nasıl kullanılabileceği ortaya koyulmuştur. Canlı organizmalardaki büyüme stratejilerinin türleri, bu süreçlerin basit eğrilerle açıklanmasını zorlaştırmaktadır. Bundan dolayı farklı büyüme modelleri ayrıntılı olarak ele alınmış ve derinlemesine irdelenmiştir. Araştırmada, büyümenin kendine has kalıpları, deneysel büyüme eğrileri, büyüme kuramları ve mekanistik modellemeleri üzerinde yoğunlaşılmış, uygun büyüme modelinin seçimindeki bazı önemli ölçütler tartışılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Parametrik Büyüme, Deneysel Modelleme, Doğrusal Büyüme

ABSTRACT

A STUDY ON MODELLING PARAMETRIC GROWTH CURVES

MUSTAFA ŞİMŞEK

ORDU UNIVERSITY INSTITUTE OF NATURAL AND SCIENCES

MATHEMATICS

MASTER THESIS, (58) PAGES

(SUPERVISOR: ASSOC. PROF. DR. MEHMET KORKMAZ)

The present study focuses on different growth models. It is demonstrated how a mathematical definition of growth can be used to explain decreases in yield, to compare growth rates, to make comparisons between different species and within species, and to predict future increases. The types of growth strategies in living organisms make it difficult to explain these processes with simple curves. Therefore, different growth models are discussed in detail and examined in depth. The study focuses on the specific patterns of growth, experimental growth curves, growth theories and mechanistic models, and some important criteria in choosing the appropriate growth model are discussed.

Keywords: Parametric Growth, Experimental Modeling, Linear Growth

TEŐEKKÖR

Tüm alıőmalarım boyunca bilgi ve deneyimleriyle bana yol gösteren, hibir zaman desteğini esirgemeyen değerli danıőman hocam Sayın Do.Dr. Mehmet KORKMAZ'a, Ordu Üniversitesi Fen Edebiyat Fakóltesi Matematik Bölümü öğretim üyelerine ve öğretim elemanlarına sonsuz teşekkür ve őükranlarımı sunarım.

Aynı zamanda manevi desteklerini her an üzerimde hissettiğim aile büyüklerim, eőim, kızlarım Ayőe Naz ve Zehra'ya teőekkürü bir borç bilirim.



İÇİNDEKİLER

Sayfa

TEZ BİLDİRİM	I
ÖZET	II
ABSTRACT	III
TEŞEKKÜR	IV
İÇİNDEKİLER	V
ŞEKİLLER LİSTESİ	VI
SİMGELER ve KISALTMALAR LİSTESİ	VII
1. GİRİŞ	1
2. GENEL BİLGİLER	3
2.1 Doğrusal Büyüme Modeli.....	4
2.2 Logaritmik Karşılıklı Model.....	5
2.3 Lojistik Model.....	7
2.4 Gompertz Modeli.....	9
2.5 Weibull Modeli.....	11
2.6 Negatif Üstel Model.....	13
2.7 Von Bertalanffy Modeli.....	14
2.8 Log-Lojistik Model.....	16
2.9 Brody Büyüme Modeli.....	19
2.10 Janoschek Büyüme Modeli.....	19
2.11 Lundqvist-Korf Büyüme Modeli.....	21
2.12 Hossfeld Büyüme Modeli.....	21
2.13 Stannard Büyüme Modeli.....	22
2.14 Schnute Büyüme Modeli.....	23
2.15 Morgan-Mercer-Flodin (M-M-F) Büyüme Modeli.....	25
2.16 McDıl-Amateıs Büyüme Modeli.....	28
2.17 Ek Büyüme Modellerinin Çeşitliliği.....	30
2.17.1 Sloboda Büyüme Modeli.....	31
3. MATERYAL ve YÖNTEM	33
3.1 Büyüme Modellerinin Türetilmişı Halleri.....	33
3.1.1 Türetilen Lojistik Model.....	33
3.1.2 Türetilen Gompertz Model.....	37
3.1.3 Türetilen Negatif Üstel Model.....	39
3.1.4 Türetilen Von Bertalanffy Ve Richards Modeller.....	41
3.1.5 Türetilen Schnute Model.....	47
3.1.6 Türetilen McDıl-Amateıs Model.....	50
3.1.7 Türetilen Sloboda Model.....	52
3.1.8 Genelleştirilmişı Bir Michaelıs-Menten Büyüme Modeli.....	53
4.SONUÇ ve ÖNERİLER	56
5.KAYNAKLAR	57
ÖZGEÇMİŞ	59

ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Şekil 2.1 Doğrusal Modeller.....	4
Şekil 2.2 Logaritmik Karşılıklı Model Eğrisi	6
Şekil 2.3 Lojistik Model Eğrisi	7
Şekil 2.4 Gompertz Model Eğrisi	10
Şekil 2.5 Weibull Model Eğrisi	12
Şekil 2.6 Negatif Üstel Model Eğrisi	13
Şekil 2.7 von Bertalanffy Modeli Eğrisi.....	14
Şekil 2.8 Hormetik Etkinin Varlığı.....	18
Şekil 3.1.1.1 (a) Üstel büyümeye karşı lojistik Büyümü	34
Şekil 3.1.1.1 (b) Geri Bildirim Bağımlılığı	34
Şekil 3.1.3.1 dY_t / dt , Y_t 'nin doğrusal bir fonksiyonudur.....	39

SİMGELER ve KISALTMALAR LİSTESİ

a	: Entegrasyon Sabitidir
α, θ	: Parametrelerdir
β	: Büyüme Oranı Parametresidir
k	: μ_{\max} 'in tersi
η, λ, μ	: Sabitlerdir
t, t', t^*, T	: Zaman

1. GİRİŞ

Büyüme, canlılarda görülen en etkin biyolojik değişimlerden birisidir. Büyümenin farklı zamanlarda birçok muhtelif büyüklük tanımı yapılmıştır. Ancak ortak bir tanıma ulaşılamamakla birlikte, büyüme bir toplumun veya bir organizmanın büyüklüğünde zamanla görülen gelişmedir (Yıldızbakan, 2005). İki şekilde modelleme oluşturulabilir; bunlar büyüme eğrilerinin tanımlanması ve büyüme teorilerine dayalı modeller olarak söylenebilir ki bu yaklaşımlar genelleme yapılırsa terminolojik olarak ayırt edilmesi zordur. Bu sebeple ikisine birden büyüme modelleri adı verilir. Fakat bu iki modelleme arasında farklılıklar bulunmaktadır. (France ve Thornley 1984), bu iki tanımı deneysel modeller olarak tanımlamışlar ve Mekanistik modellerin daha kolay ve anlaşılabilir olmasını sağlamışlardır. Deneysel modeller olarak büyüme eğrileri parametrik fonksiyonlardır. Organizmanın yaşının ölçümleri ve büyüklüğü ile ilgili bazı parametrelere sahiptir. Çoğu büyüme eğrisinin matematiksel fonksiyonu, canlının yaşamsal süreçteki büyümesini tam olarak ifade edemez. Bu modeller oluşturulurken büyüme eğrileri gözlemlenir ve elde edilen parametrelerle tahminde bulunulur. Devamında organizmaların büyümeleriyle ilişkili birçok sorunun çözümüne cevap olabilecek sonuçlara ulaşılabilir. Büyüme eğrilerinin ilerlemesinde karşılaşılan en önemli problemler, insanın yaşam süreci içerisindeki ilk evrelerdeki sıra dışı büyüme ve yaşamı boyunca karşılaştığı hastalıkların sonucundaki ilerlemenin etkisiyle, ekonomik değeri olan çoğalabilen canlılardan (koyun, keçi vb.) elde edilen ürün verimini yükseltmeye dayalı büyümenin karşılaştırılması ve tahminindeki farklılıklardır. Bunun yanı sıra başka bir sorunda popülasyon artışının büyüme ile bağlantısının ve türlerin bir arada bulunmasının ilişkisi bağlamında büyüme modellerinin geliştirilmesine katkı sağlayacaktır. Büyüme eğrilerinin ortak bir uygulaması da asimptotik büyüklüğün oluşturulmasına dayalıdır. Canlı yapılarda gözlemlenen büyüme stratejilerinin çeşitliliği bunların birkaç basit eğri ile tanımlanması açısından zordur. Büyüme faktörlerinin modellenmesine yapısal yaklaşımının hedefleri; büyüme ölçümlerinin bulunması, bir fonksiyona uygun bir büyüme parametrelerinin tahmin edilmesi, uygunluğunun derecesinin değerlendirilmesi ve meydana gelecek büyümenin tahminidir (Karkach, 2006). Mekanik model veya büyüme teorisi ikinci farklı bir yaklaşım sunar. Bu yaklaşım

veriyi modele uygun şekilde uyarlamak için değil de belli bir organizma sistemi içerisinde yer alan büyüme değerlerinin gelişimi için kullanılmasıdır. Büyüme modeli olarak basit ve özet bir şekilde olabilen ve büyüme süreçlerinin yüzeysel ilgisinin ortaya konduğu (Bertalanffy, 1957) organizma yapılarının ve dokularının tahrif olduğu veya inşa edildiği basit tanımları içerir. Veya enerji deposu ve bileşik dengesi, süreçlerin tüketimi, depolanması ve farklı sistemler tarafından enerjinin kullanımı gibi bazı tanımları içerir. Büyüme; ormancılık, tarım, mühendislik, biyoloji, kimya, tıp, ziraat, ekonomi, vb. alanlarda gözlemlenmektedir. Büyümeye daha genel bir yaklaşımla bakılacak olursa boyuttaki değişiklikler, birikme ve bedenin yıkımı arasındaki dinamik dengenin sonucu olarak organizmanın boyutu ile alakalı olabilir.



2. GENEL BİLGİLER

Mekanistik modellerin ve teorilerin hedefi, farklı türler arasındaki büyümedeki benzerlikleri ve farklılıkları anlamak ve bir mekanistik bakış açısıyla farklılıkları ortaya çıkarmaktır. Bir mekanistik modellemede çoğunlukla büyüme oranı (dy/dt) ile ilgili diferansiyel denklemden büyüklük (y) türetilir. Bu matematiksel bağlantı büyüme süreçlerini yöneten mekanizmayı göstermektedir. Bu yaklaşım bedensel büyüme için detay olarak kullanılabilir. Doğrusal veya üstel büyüme bazen uygun olabilirken, çalışmada genellikle sigmoidal (S şeklinde) büyüme eğrilerine değineceğiz. Bu bağlamda, burada ele alınan daha yaygın parametrik büyüme modellerinden bazıları şunlardır: (Panik, M. 2009)

Doğrusal	Janoschek
Logaritmik karşılıklı	Lundqvist–Korf
Lojistik	Hossfeld
Gompertz	Stannard
Weibull	Schnute
Negatif üstel	Morgan–Mercer–Flodin (M–M–F)
von Bertalanffy	McDill–Amateis
Chapman–Richards (C–R)	Levakovic (I, III)
Log Logistik	Yoshida (I)
Brody	Sloboda

Bu liste kesinlikle kapsamlı olmasa da yakın geçmişte popüler hale gelen ana akım büyüme modelleri hakkında çok iyi bir açıklama sunmaktadır.

Yukarıda bahsi geçen büyüme modellerini doğası gereği “parametrik” olarak adlandırdık. Bunun nedeni, bu fonksiyonların (ve özelliklerinin) temel özelliklerini (ayrı ayrı veya bir arada) tanımlayan bir dizi parametre açısından tanımlanmış olmasıdır. Bu tür parametreler, bir asimptotu, Y eksenindeki bir kesişimi, yanıt değişkeni Y'nin başlangıç veya ilk değerinden uç veya son değerine değişme hızını ve

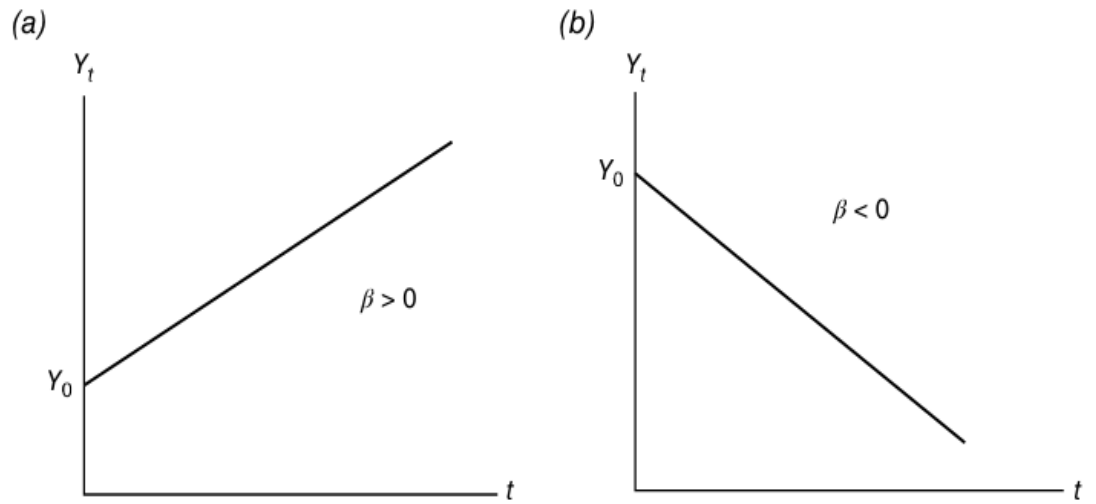
modellemede uygun esneklik için gereken ek parametreleri temsil eder veya bunlarla ilişkilidir.

2.1 Doğrusal Büyüme Modeli

Y değerleri serisinin doğrusal model tarafından üretildiğini varsayalım

$$Y_t = Y_0 + \beta t, t = 1, 2, \dots, n, \quad (2.1)$$

burada Y_0 periyot 1'in başlangıcındaki Y değeri ve β (=sabit) eğimdir (Şekil 2.1). Daha sonra Y_t değerlerinin dizisi ve $t - 1$ ve t periyotları arasındaki Y'deki değişimin göreceli oranları (R_t 'ler) şekil 2.1'de verilmiştir.



Şekil 2.1 Doğrusal modeller: (a) Pozitif eğim; (b) Negatif eğim.

Tablo 2.1 Y'deki Göreceli Büyüme Oranları

Dönem t	Y_t	R_t
1	$Y_1 = Y_0 + \beta$	$R_1 = \frac{Y_1 - Y_0}{Y_0} = \frac{\beta}{Y_0}$
2	$Y_2 = Y_0 + 2\beta$	$R_2 = \frac{Y_2 - Y_1}{Y_1} = \frac{\beta}{Y_0 + \beta}$
3	$Y_3 = Y_0 + 3\beta$	$R_3 = \frac{Y_3 - Y_2}{Y_2} = \frac{\beta}{Y_0 + 2\beta}$
:	:	:
n	$Y_n = Y_0 + n\beta$	$R_n = \frac{Y_n - Y_{n-1}}{Y_{n-1}} = \frac{\beta}{Y_0 + (n-1)\beta}$

2.2 Logaritmik Karşılıklı Model

Bir değişken olan Y'nin değer serisinin logaritmik karşılıklı model tarafından üretildiğini varsayalım Y'nin

$$Y_t = e^{a-\beta/t}, t \neq 0, \quad (2.2)$$

veya logaritmalara dönüştürüldüğünde,

$$\ln Y_t = a - \frac{\beta}{t}, t \neq 0, \quad (2.2.1)$$

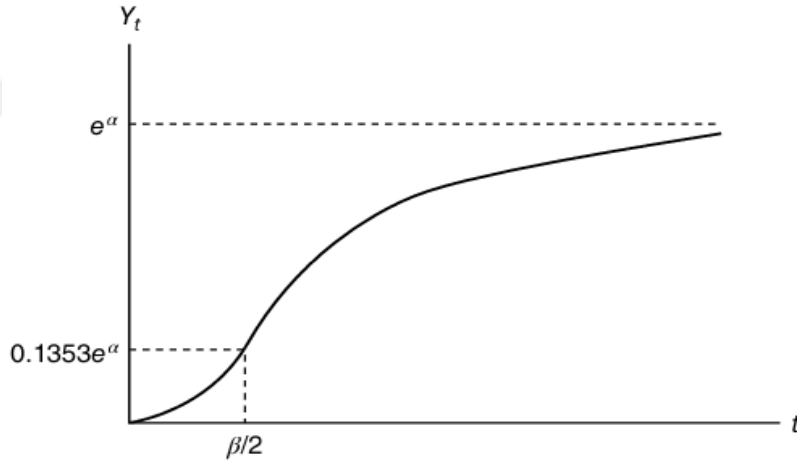
Burada $t \rightarrow +0$, $Y_t \rightarrow 0$ iken Y (yani, bu ifade orijinde sağ-süreklidir) öyle ki bu fonksiyon $t = 0$ için sıfır olarak tanımlanır.

Logaritmik ters fonksiyonun genel şekli hakkında ne düşünüyorsunuz? Denklem 2.2 verildiğinde kolayca gösterilebilir k

$$\frac{dY_t}{dt} = \left(\frac{\beta}{t^2}\right)Y_t, \quad (2.3a)$$

$$\frac{d^2Y_t}{dt^2} = \frac{\beta}{t^3} \left(\frac{\beta}{t} - 2\right)Y_t. \quad (2.3b)$$

$d^2Y_t / dt^2 = 0$, için $t = \beta/2$ olduğundan, (2.2) denkleminde $t_{\text{inf}} = \beta/2$ 'de bir dönüm noktasına sahip olduğu sonucu çıkar (Dönüm noktası, bir eğrinin teğet çizgisini geçtiği ve içbükeyliğinin yönünü yukarıdan aşağıya veya tam tersine değiştirdiği noktadır. Bu bağlamda, $Y = f(t)$ için, eğer $f'(t_0) = 0$ ve $f''(t_0) \neq 0$ ise o zaman f 'nin $t = t_0$ 'da bir dönüm noktası vardır (yeterli bir koşul).). (2.2) denkleminde $t = \beta/2$ 'yi ikame etmek $Y_{\text{inf}} = e^{a-2} = e^a e^{-2} = 0.1353e^a$ (Şekil 2.2) sonucunu verir. Ayrıca, $t < \beta/2$ için, $d^2Y_t / dt^2 < 0$ (eğim t ile artar ve böylece eğri yukarı doğru içbükey olur); ve $t > \beta/2$ için, $d^2Y_t / dt^2 > 0$ (eğim t arttıkça azalır ve böylece eğri aşağı doğru içbükey olur).



Şekil 2.2 Logaritmik karşılıklı model.

Bu nedenle, (2.2) denklemini büyümeye S şeklinde bir desen sağlar. Ek olarak,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{a-\beta/t} = e^a = Y_\infty$$

böylece e^a , Y_t için yatay (üst) bir asimptottur ve Y 'deki büyüme için bir doyma noktasını temsil eder.

Sonra, Y_t 'nin t zamanındaki anlık büyüme oranı

$$\frac{dY_t / dt}{Y_t} = \frac{\beta}{t^2} \quad (2.4)$$

$t-1$ ve t dönemleri arasındaki Y 'deki değişimin göreceli oranı ise

$$R_t = \frac{Y_t}{Y_{t-1}} - 1 = e^{\beta/t(t-1)} - 1 \quad (2.5)$$

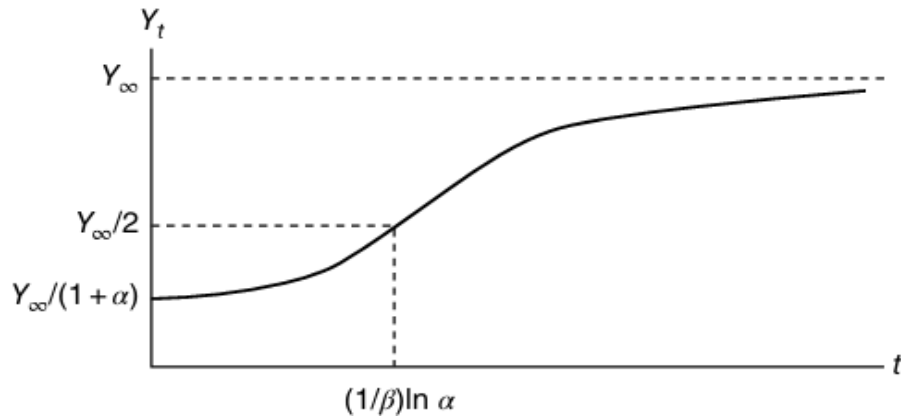
şeklindedir.

(β bu nedenle bir büyüme oranı parametresidir). Bu büyüme oranlarının hiçbirinin sabit olmadığını ve her ikisinin de t arttıkça azaldığını unutmayın. Aslında, her büyüme oranı t 'nin çok küçük değerlerinin ötesinde aniden düşer.

2.3 Lojistik Model

Değişken Y 'nin zaman içindeki değer serisinin lojistik model tarafından belirlendiğini varsayalım (Verhulst, 1838)

$$Y_t = \frac{Y_\infty}{1 + ae^{-\beta t}}, \quad t \geq 0, \quad (2.6)$$



Şekil 2.3 Lojistik model.

burada parametreler α, β (bir büyüme oranı parametresi) ve Y_∞ hepsi pozitiftir. $t = 0$ 'da, bu eğri $Y_0 = Y_\infty / (1 + \alpha)$ ile başlar ve $t \rightarrow \infty$ iken $Y_t \rightarrow Y_\infty$ (Y_∞ lojistik fonksiyonun

(üst) yatay asimptotudur—doygunluk veya büyüme sınırı parametresi olarak adlandırılır.)

Lojistik fonksiyonun şeklini incelemek için öncelikle şunu bulalım:

$$\frac{dY_t}{dt} = \frac{\beta}{Y_\infty} Y_t (Y_\infty - Y_t), \quad (2.7a)$$

$$\frac{d^2Y_t}{dt^2} = \frac{\beta}{Y_\infty} (Y_\infty - 2Y_t) \frac{dY_t}{dt}. \quad (2.7b)$$

Denklem 2.7b'den kolayca görülebileceği gibi $d^2Y_t / dt^2 = 0$ için $Y_t = Y_\infty / 2$ (doygunluk seviyesinin yarısı). Daha sonra bu Y değerinin Denklem 2.6'ya ikame edilmesi $t = \ln a / \beta$ sonucunu verir, burada $\alpha > 1$ olduğu ve $\ln \alpha > 0$ olduğu varsayılır. Dolayısıyla, lojistik fonksiyonun bir dönüm noktası $(t_{\text{inf}}, Y_{\text{inf}}) = (\ln a / \beta, Y_\infty / 2)$ 'dir ve bu nokta etrafında simetrikdir (Şekil 2.3). Ayrıca $t < \ln a / \beta$ için, $d^2Y_t / dt^2 > 0$ (eğri yukarı doğru içbükeydir); ve $t > \ln a / \beta$ için $d^2Y_t / dt^2 < 0$ (eğri aşağı doğru içbükeydir). Burada da Denklem 2.6 büyüme yönelik S şeklinde bir desen sergilemektedir.

Sonra, Denklem 2.7a ve 2.7b'den,

$$\frac{dY_t / dt}{Y_t} = \frac{\beta}{Y_\infty} (Y_\infty - Y_t), \quad (2.8)$$

oluşur. Böylece Y_t 'nin t zamanındaki anlık büyüme oranı, Y_t 'nin Y büyümesine ilişkin doygunluk parametresi tavanının $(Y_\infty - Y_t)$ altında kaldığı miktarla orantılıdır. Ayrıca, $t-1$ ve t dönemleri arasındaki Y 'deki değişimin göreceli oranı

$$R_t = \frac{Y_t}{Y_{t-1}} - 1 = \frac{e^{\beta-1}}{Y_\infty} (Y_\infty - Y_t). \quad (2.9)$$

Burada da bu büyüme oranı $Y_\infty - Y_t$ ile orantılıdır.

Lojistik fonksiyonun daha detaylı bir tartışması (türetilmesi ve üstel veya yarı logaritmik fonksiyonla karşılaştırılması) 3.1.1'de sunulmaktadır.

2.4 Gompertz Modeli

Değişken Y 'nin zaman profilinin Gompertz (1825) modeli tarafından belirlendiğini varsayalım

$$Y_t = Y_\infty e^{-ae^{-\beta t}}, \quad t \geq 0, \quad (2.10)$$

burada α , β (büyüme oranı parametresi) ve Y_∞ parametrelerinin hepsi pozitiftir. (Bu ifadenin elde edilişi 3.1.2'de verilmiştir.) $t = 0$ için Y 'nin başlangıç değeri $Y_0 = Y_\infty e^{-a}$ 'dır ve $t \rightarrow +\infty$ iken $Y_t \rightarrow Y_\infty$ (büyümenin üst sınırı (yatay asimptot)). Lojistik fonksiyonda olduğu gibi Y_∞ büyüme parametresinin sınırı olarak adlandırılır.

Gompertz fonksiyonunun şeklini belirlemeye yardımcı olmak için öncelikle şuna bakıyoruz:

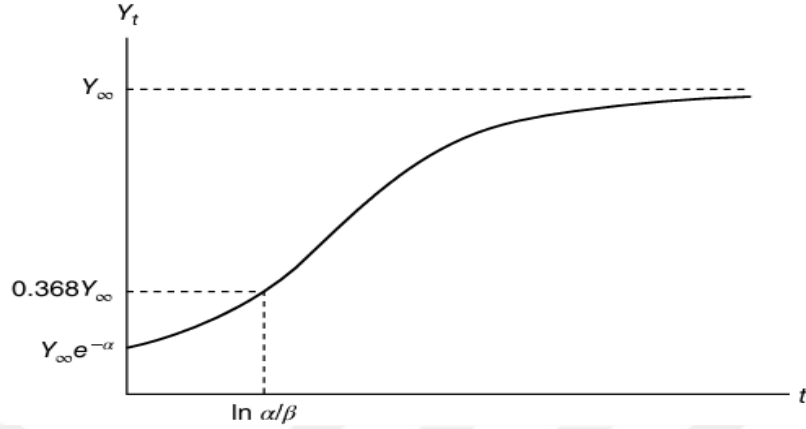
$$\frac{dY_t}{dt} = \alpha \beta e^{-\beta t} Y_t \quad (2.11a)$$

$$\frac{d^2 Y_t}{dt^2} = \alpha \beta^2 e^{-\beta t} (\alpha e^{-\beta t} - 1) Y_t \quad (2.11b)$$

2.11b denkleminde, $d^2 Y_t / dt^2 = 0$ 'ın $t = \ln \alpha / \beta$ olduğu kolayca görülebilir. Daha sonra bu t değerinin 2.10'a denkleminde yerleştirilmesi $Y_t = 0.36788 Y_\infty$ 'yi verir. Bu nedenle, Gompertz fonksiyonunun $(t_{\text{inf}}, Y_{\text{inf}}) = (\ln \alpha / \beta, 0.36788 Y_\infty)$ noktasında bir dönüm noktası vardır (bkz. Şekil 2.4) ve bu nedenle grafik S şeklinde veya sigmoidaldır.

Daha sonra 2.11a denkleminde şu sonuç çıkar:

$$\frac{dY_t / dt}{Y_t} = \alpha \beta e^{-\beta t} \quad (2.12)$$



Şekil 2.4 Gompertz modeli.

Bu nedenle Y_t 'nin t anındaki anlık büyüme oranı, zamanın üssel olarak azalan bir fonksiyonudur. 2.12 denklemi verildiğinde, 2.10 Denklemi aracılığıyla kolayca gösterilebilir ki

$$\frac{dY_t / dt}{Y_t} = \beta (\ln Y_\infty - \ln Y_t) \quad (2.13)$$

(anlık büyüme oranı ile $\ln Y_t$ arasında doğrusal bir ilişkimiz var, söz konusu büyüme oranı $\ln Y_t$ 'nin $\ln Y_\infty$ 'dan ne kadar düşük kaldığına orantılıdır.), burada (yine Denklem 2.12'yi kullanarak)

$$\ln \left(\frac{dY_t / dt}{Y_t} \right) = \ln(\alpha \beta) - \beta t \quad (2.14)$$

(Anlık büyüme oranının logaritması ile t arasında doğrusal bir ilişki vardır). Ayrıca, t ve $t-1$ periyotları arasındaki Y 'deki değişimin bağıl oranı

$$R_t = \frac{Y_t}{Y_{t-1}} - 1 = \left(\frac{Y_t}{Y_\infty} \right)^{e^{\beta} - 1} - 1. \quad (2.15)$$

şeklinde ifade edilir.

2.5 Weibull Modeli

Değişken Y 'nin zaman içindeki değer serilerinin Weibull (1951) modeli tarafından üretildiğini varsayalım

$$Y_t = Y_\infty - ae^{-\beta t^\gamma}, t \geq 0 \quad (2.16)$$

burada Y_∞ , α , β (sabit bir γ için büyüme oranı parametresi) ve γ (bir şekil parametresi) parametrelerinin hepsi pozitiftir. Bu ifadenin kaynağı Weibull kümülatif dağılım fonksiyonunun bir genellemesidir (uzantısı)

$$F(t; \alpha, \theta) = 1 - e^{-(t/\alpha)^\theta},$$

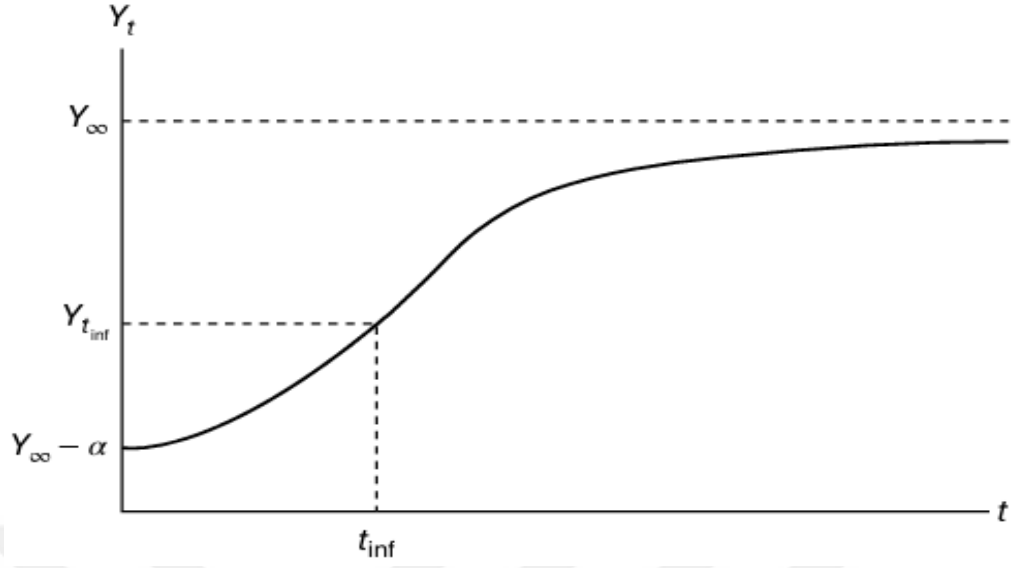
olarak verilir, burada α ve θ parametrelerdir. Ek parametrelerin eklenmesiyle birlikte, "1" büyüme için daha az kısıtlayıcı bir üst sınır olarak Y_∞ ile değiştirilir; yani, $\lim_{t \rightarrow \infty} Y_t = Y_\infty$. Bu nedenle, Y_∞ büyüme parametresinin sınırı olarak adlandırılır. $t = 0$ için, Y 'nin başlangıç değeri $Y_0 = Y_\infty - a$.

Denklem 2.16'nın birinci ve ikinci türevlerine baktığımızda, sırasıyla;

$$\frac{dY_t}{dt} = \beta \gamma t^{\gamma-1} (Y_\infty - Y_t), \quad (2.17a)$$

$$\frac{d^2Y_t}{dt^2} = \beta \gamma t^{\gamma-1} \left[(\gamma - 1) t^{-1} (Y_\infty - Y_t) - \frac{dY_t}{dt} \right] \quad (2.17b)$$

elde edilir.



Şekil 2.5 Weibull modeli.

Denklem 1.17b'yi kullanarak $d^2Y_t / dt^2 = 0$ 'ı $t = t_{\text{inf}} = [(\gamma - 1) / \beta\gamma]^{1/\gamma}$ için kolayca belirleyebiliriz. Bu t değerini Denklem 2.16'ya koyduğumuzda $Y_t = Y_{t_{\text{inf}}} = Y_{\infty} - a \exp[-(\gamma - 1) / \gamma]$. Böylece, Weibull büyüme denkleminin $(t_{\text{inf}}, Y_{t_{\text{inf}}})$ noktasında bir dönüm noktası vardır ve dolayısıyla S şeklindedir (Şekil 2.5).

2.17a 'dan şu sonuç çıkar:

$$\frac{dY_t / dt}{Y_t} = \beta\gamma t^{\gamma-1} \left(\frac{Y_{\infty}}{Y_t} - 1 \right). \quad (2.18)$$

Bu nedenle, Y_t 'deki anlık büyüme oranı t zamanında $t \rightarrow +\infty$ (veya $Y_t \rightarrow Y_{\infty}$) sıfıra yaklaşır ve Denklem 2.18'den şunu yazabiliriz:

$$\ln \left(\frac{dY_t / dt}{Y_t} \right) - \ln \left(\frac{Y_{\infty}}{Y_t} - 1 \right) = \ln(\beta\gamma) + (\gamma - 1)t. \quad (2.19)$$

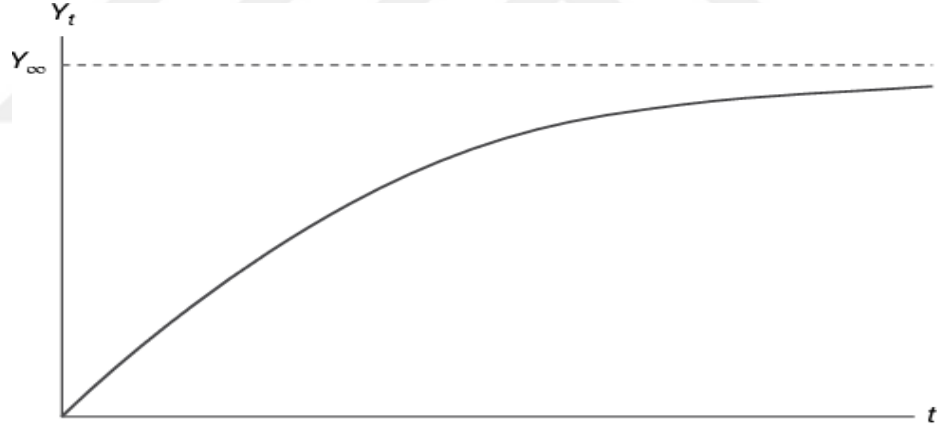
(Anlık büyüme oranının logaritması ile bir tür "geri bildirim teriminin logaritması ($\ln((Y_\infty / Y_t) - 1)$ ve t) arasında doğrusal bir ilişkimiz var). (Geri bildirim teriminin rolü hakkında biraz bilgi edinmek için Denklem 3.1.4'e bakın).

2.6 Negatif Üstel Model

Bir değişkenin Y değerlerinin zaman profilinin negatif üstel modelin işleyişini yansıttığını varsayalım

$$Y_t = Y_\infty (1 - e^{-\beta t}), \quad t \geq 0, \quad (2.20)$$

burada Y_∞ ve β parametrelerinin her ikisi de pozitiftir. (Denklem 2.20'nin türetilmesi 3.1.3'de verilmiştir.) Burada Y_∞ büyüme parametresinin sınırıdır ($\lim_{t \rightarrow \infty} Y_t = Y_\infty$), β ise büyüme oranı parametresidir. $t = 0$ için Y 'nin başlangıç değeri $Y_0 = 0$ 'dır.



Şekil 2.6 Negatif üstel model.

(2.20)'nin birinci ve ikinci türevlerinin hesaplanması

$$\frac{dY_t}{dt} = \beta(Y_\infty - Y_t); \quad (2.21a)$$

$$\frac{d^2Y_t}{dt^2} = -\beta \frac{dY_t}{dt} = -\beta^2(Y_\infty - Y_t). \quad (2.21b)$$

Denklem 2.21a ve 2.21b'nin gösterdiği gibi, $t \rightarrow \infty$ iken negatif üstel fonksiyonun eğimi pozitiftir ve $Y_t \rightarrow Y_\infty$ iken azalır (Şekil 2.6).

Denklem 2.21a'yı kullanarak bunu kolayca görebiliriz

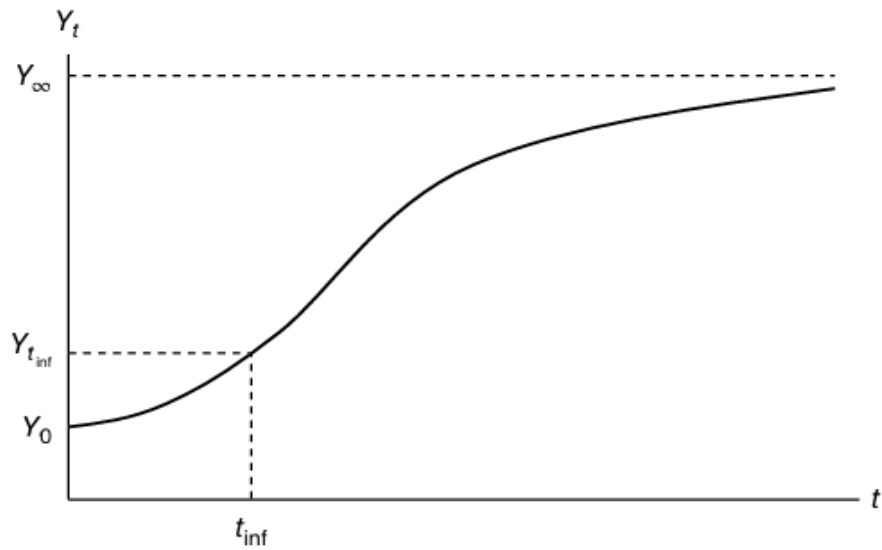
$$\frac{dY_t / dt}{Y_t} = \beta \left(\frac{Y_\infty}{Y_t} - 1 \right). \quad (2.22)$$

Böylece, Y_t 'deki anlık büyüme oranı t anında $t \rightarrow \infty$ (veya $Y_t \rightarrow Y_\infty$) olduğunda sıfıra yaklaşır. Bu büyüme oranının "geri bildirim terimi" Y ile orantılı olduğunu unutmayın

$$\frac{Y_\infty}{Y_t} - 1.$$

2.7 Von Bertalanffy Modeli

Pozitif bir net büyüme sürecini (uzunluk, ağırlık veya boyuta ilişkin) tanımlamak için von Bertalanffy (1957), anabolik oranın katabolik oranı aşması gerektiğini ileri sürmüştür. (Anabolizmayı yapıcı metabolizma (esas olarak organik bileşiklerin oksidasyonundan elde edilen enerjiyi gerektirir) olarak görebiliriz, katabolizmayı ise yıkıcı metabolizmayı yansıtır (canlı doku atık maddeye parçalanır).)



Şekil 2.7 Von Bertalanffy modeli.

Eğer anabolik oran Y_t 'nin k 'inci kuvvetinin bir katı ise ve katabolik oran basitçe Y_t ile orantılıdır, o zaman von Bertalanffy (1957) büyüme yasası şu şekilde yazılabilir

$$\frac{dY_t}{dt} = \eta Y_t^k - \lambda Y_t, \quad (2.23)$$

burada η ve λ sabitlerdir. Bu ifade entegre edildiğinde (bkz. 3.1.4), von Bertalanffy büyüme modeli şu biçimdedir

$$Y_t = Y_\infty \left[1 - \beta e^{-\lambda(1-k)t} \right]^{1/(1-k)}, \quad (2.24)$$

Burada

$$Y_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} Y_t = (\eta / \lambda)^{1/(1-k)}$$

büyüme parametresinin sınırıdır, $\beta = \alpha / \eta$ (α bir entegrasyon sabitidir), λ bir büyüme oranı parametresidir, $1-k$ bir şekil parametresidir ve Y 'nin başlangıç değeri

$$Y_0 = \left(\frac{\eta}{\lambda} - \frac{\alpha}{\lambda} \right)^{1/(1-k)} \text{ dir.}$$

Eğer $k > 1$ ve hem η hem de λ negatifse, Denklem 2.24, alt asimptot Y_0 , üst asimptot Y_∞ ve $d^2Y_t / dt^2 = 0$ (Şekil 2.7) olduğu bir dönüm noktası ile sigmoidaldır. Eğer $k < 1$ ve hem η hem de λ pozitifse, alt asimptot yoktur. (Denklem 2.24'ün önemli bir varyasyonu, 3.1.4'de de ele alınan Chapman-Richards (C-R) büyüme modelidir.) von Bertalanffy, çok çeşitli hayvanlar için $k = 2/3$ olduğunu deneysel olarak belirledi (örneğin, balıkçılık araştırmaları bu sonucu destekleme eğilimindedir). Genel olarak, üstel büyüme olasılığını karşılamak için von Bertalanffy $k \in [2/3, 1]$ değerine izin verdi. Denklem 2.24 verildiğinde,

$$\frac{dY_t}{dt} = \beta \lambda Y_\infty^{1-k} e^{-\lambda(1-k)t} = \lambda Y_t \left[\left(\frac{Y_\infty}{Y_t} \right)^{1-k} - 1 \right]; \quad (2.25a)$$

kolayca bulabiliriz.

$$\frac{d^2Y_t}{dt^2} = \beta\lambda Y_\infty^{1-k} e^{-\lambda(1-k)t} Y_t^k \left[\lambda(k-1) + kY_t^{-1} \frac{dY_t}{dt} \right] = \lambda \frac{dY_t}{dt} \left[k \left(\frac{Y_\infty}{Y_t} \right)^{1-k} - 1 \right]. \quad (2.25b)$$

elde edilir. $d^2Y_t/dt^2 = 0$ alınırsa dönüm noktasının şurada meydana geldiği gösterilebilir:

$$(t_{\text{inf}}, Y_{\text{inf}}) = \left(\frac{1}{\lambda(k-1)} \ln \left(\frac{1-k}{\beta} \right), Y_\infty k^{1/(1-k)} \right).$$

Sonra, Denklem 2.25a'dan, Y_t 'deki anlık büyüme oranı t zamanında şu şekildedir:

$$\frac{dY_t/dt}{Y_t} = \beta\lambda Y_\infty^{1-k} e^{-\lambda(1-k)t} Y_t^{k-1} = \lambda (Y_t^{k-1} Y_\infty^{1-k} - 1) = \lambda \left[\left(\frac{Y_\infty}{Y_t} \right)^{1-k} - 1 \right]; \quad (2.26)$$

yani, bu büyüme oranı "geri bildirim terimi" $(Y_\infty/Y_t)^{1-k} - 1$ ile orantılıdır. İlginçtir ki Y_t 'deki anlık büyüme oranı dönüm noktasında maksimumdur ve bu noktada şuna eşittir

$$\frac{dY_t/dt}{Y_t} = \frac{\lambda(1-k)}{k}.$$

2.8 Log-Lojistik Model

Lojistik fonksiyon Denklem 2.6'da t 'yi $\ln t$ ile değiştirirsek o zaman log lojistik model elde ederiz

$$Y_t = Y_\infty / (1 + \beta e^{-k \ln(t)}), t > 0. \quad (2.27)$$

Denklem 2.27'den

$$\frac{dY_t}{dt} = \frac{\beta k Y_t^2}{Y_\infty t e^{k \ln(t)}} \quad (2.28)$$

böylece t anındaki anlık büyüme oranı şu şekilde yazılabilir:

$$\frac{dY_t / dt}{Y_t} = \frac{\beta k}{t(\beta + e^{k \ln(t)})} \quad (2.29)$$

(k , sabit bir β için bir büyüme oranı parametresidir)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{dY_t / dt}{Y_t} = 0$$

$d^2Y_t / dt^2 = 0$ olarak ayarladığımızda, dönüm noktasının koordinatlarını şu şekilde elde etmemizi sağlar:

$$(t_{\text{inf}}, Y_{\text{inf}}) = \left(\left[\frac{1+k}{\beta(k-1)} \right]^{-1/k}, Y_{\infty} \left(\frac{k-1}{2k} \right) \right).$$

Log-lojistik fonksiyonunun popüler bir uygulaması doz-tepki eğrilerinin uydurulmasıdır. Özellikle, yeni bir “agonistin” (bir tepkiye neden olan bir ilacın) etkinliğini veya bazı toksinlerin (örneğin, bir yabancı ot kontrol maddesi) etkisini belirleyebiliriz. Bu amaçla, sadece küçük dozları küçük artışlarla uygulamak yeterli değildir. Araştırmacılar, örneğin bir toksinin etkisini değerlendirmek istediklerinde, genellikle dozları logaritmik olarak artırır, çünkü bu durumda doz konsantrasyonları log ölçeğinde eşit aralıktır.

Örneğin, doz konsantrasyonu (mg/kg cinsinden) artışları şu şekilde görüntüleniyorsa:

$$X : 1, 3.1623, 10, 31.623, 100, 316.228, 1000, 3162.28, 10000, \dots,$$

daha sonra log (doz) değerleri

$$\log_{10}(X) : 0, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4, \dots$$

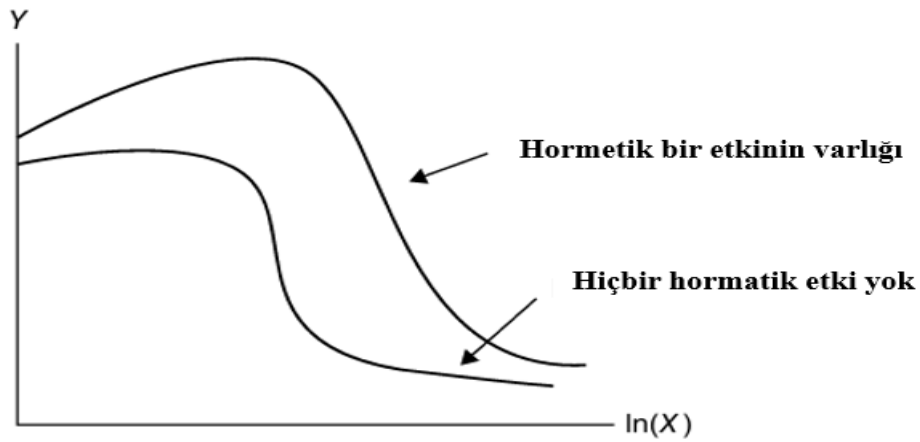
şeklindedir ($X = 0$ dozunun olmadığını unutmayın, gerçek doz 1 mg/kg'dır çünkü $10^0 = 1$ 'dir). Bu nedenle log(doz)-tepki fonksiyonu, tepki yüzdesinin en yüksek oranda arttığı en büyük ilgi alanını vurgulamaya yarar. Aslında, doz tepkisi

$\log(dose) = \log(ED_{50})$ olduğunda %50 seviyesine ulaşacaktır, burada ED_{50} toplam tepkinin %50'sinin elde edildiği "etkili doz" veya $Y_{\infty} / 2$ 'dir.

Daha düşük bir asimptot veya temel tepki seviyesi (Y_L) garanti altına alınırsa o zaman Denklem 2.27

$$Y = Y_L + \frac{Y_{\infty} - Y_L}{1 + \beta e^{-k \ln(X)}}, \quad X > 0, \quad (2.30)$$

şeklinde parametrelendirilebilir. Şimdi toplam etkinin %50'sinin elde edildiği etkili dozaj $(Y_{\infty} - Y_L) / 2$ 'dir.



Şekil 2.8 Hormetik etkinin varlığı.

Denklem 2.30, düşük dozajlarla ilişkili "hormetik etkileri" (Şekil 2.8) (Southman ve Ehrlich (1943) (ayrıca bkz. Schultz (1988) ve Thimann (1956)) bir toksinin subinhibitör seviyelerinin organizmalarda uyarıcı etkiler üretebileceğini gözlemledi (örneğin, yabancı otlarda artan büyüme, bir herbisitinin subinhibitör dozları için meydana gelebilir). "Hormesis" in varlığı, düşük dozajlar için ortalama tepkiyi bazı kontrol değerlerinin üzerine çıkarabilir, yakalamak için daha da değiştirilebilir. (Brain ve Cousens, 1989)

$$Y = Y_L + \frac{Y_\infty - Y_L + \gamma X}{1 + \beta e^{-k \ln(X)}}, \quad X > 0, \quad (2.31)$$

Burada γ parametresi düşük dozajlarda başlangıç artış hızını ölçmeye yarar.

2.9 Brody Büyüme Modeli

Brody (1945), sigmoidal süreci iki ayrı faza ayırır:

Faz I. Geçici olarak sınırlı bir büyüme dönemine uygulanan genişleme aşaması. Bu faz için Y_t üssel olarak artıyor veya

$$Y_t = \alpha e^{kt}. \quad (2.32)$$

şeklinde tanımlanır.

Bu faz I büyüme denkleminin açıkça sonsuz bir asimptotu vardır. Sonraki adım şu şekildedir: Faz II. Y_t 'nin üssel büyümenin sona erdiği noktadan sonra üssel olarak azaldığı bir azalan faz. Bu faz için

$$Y_t = Y_\infty (1 - \beta e^{-kt}). \quad (2.33)$$

Y_t Denklem 2.32'ye göre üssel olarak arttığından veya üssel olarak azaldığından (Denklem 2.33'e göre), Brody modeli herhangi bir dönüm noktasından yoksundur.

2.10 Janoschek Büyüme Modeli

Richards büyüme fonksiyonu kadar esnek bir büyüme denklemi (3.1.4) Janoschek sigmoidal fonksiyonudur (Janoschek, 1957)

$$Y_t = Y_\infty (1 - \beta e^{-bt^c}), \quad c > 1, \quad (2.34)$$

burada b sabit bir c için bir büyüme parametresidir ve c bir şekil parametresidir. Bu ifade verildiğinde,

$$\frac{dY_t}{dt} = -bct^{c-1}e^{-bt^c} \quad (2.35)$$

ve böylece, t anındaki anlık büyüme oranı

$$\frac{dY_t / dt}{Y_t} = bct^{c-1} \left(\frac{Y_\infty - 1}{Y_t} - 1 \right), \quad (2.36)$$

burada $\left[(Y_\infty - 1) / Y_t - 1 \right]$ bir tür "geri bildirim terimi" olarak hizmet eder. $d^2Y_t / dt^2 = 0$ olarak ayarlandığında, dönüm noktasının koordinatlarını bulmamızı sağlar

$$(t_{\text{inf}}, Y_{\text{inf}}) = \left(\left(\frac{c-1}{cb} \right)^{1/c}, Y_\infty - \left(1 - e^{-(c-1)/c} \right) \right), \quad c > 1.$$

Denklem 2.34'ün (Sager, 1984) sıfırdan büyük bir başlangıç değeri Y_0 için bir modifikasyonu şu şekilde yazılabilir:

$$Y_t = Y_\infty - (Y_\infty - Y_0)e^{-kt^p}. \quad (2.37)$$

$p < 1$ için, bu fonksiyon basit üstel büyüme gösterir; ve $p > 1$ için, sigmoidal büyüme meydana gelir. Denklem 2.37 verildiğinde,

$$\frac{dY_t}{dt} = kp(Y_\infty - Y_0)t^{p-1}e^{-kt^p} \quad (2.38)$$

t zamanındaki anlık büyüme oranı şu şekilde görünür:

$$\frac{dY_t dt}{Y_t} = kpt^{p-1} \left(\frac{Y_\infty}{Y_t} - 1 \right). \quad (2.39)$$

Burada da $(Y_\infty / Y_t - 1)$ bir "geri bildirim terimi"ni temsil eder. Bu değiştirilmiş Janoschek büyüme modeli, bir dönüm noktasına (isteğe bağlı) sahiptir

$$(t_{\text{inf}}, Y_{\text{inf}}) = \left(\left(\frac{p-1}{kp} \right)^{1/p}, Y_{\infty} - (Y_{\infty} - Y_0) e^{-\left(\frac{p-1}{p}\right)} \right), p > 1.$$

2.11 Lundqvist–Korf Büyüme Modeli

Lundqvist-Korf denklemini ele alalım (Korf, 1939; Lundqvist, 1957)

$$Y_t = Y_{\infty} e^{-kt^{-d}}, \quad (2.40)$$

burada d şekil parametresini ve k bir ölçek parametresini belirtir. O zaman kolayca gösterilebilir ki

$$\frac{dY_t / dt}{Y_t} = kdt^{-d-1} Y_t \quad (2.41)$$

böylece anlık büyüme oranı zamanı t olur

$$\frac{dY_t / dt}{Y_t} = kdt^{-d-1}. \quad (2.42)$$

Ve $d^2Y_t / dt^2 = 0$ olduğunda, dönüm noktasının koordinatlarını şu şekilde çözebiliriz:

$$(t_{\text{inf}}, Y_{\text{inf}}) = \left(\left(\frac{d+1}{kd} \right)^{-1/d}, Y_{\infty} e^{-(d+1)/d} \right).$$

Denklem 2.40 aslında Schumacher (1939) büyüme modelinin genelleştirilmiş halidir

$$Y_t = Y_{\infty} e^{bt^{-c}}. \quad (2.43)$$

2.12 Hossfeld Büyüme Modeli

Hossfeld büyüme fonksiyonu (Hossfeld, 1822) şu forma sahiptir:

$$Y_t = Y_{\infty} (1 + b_1 t^{-b_2})^{-1}, \quad b_1 > 1, \quad (2.44)$$

Buradan

$$\frac{dY_t}{dt} = b_1 b_2 Y_t t^{-b_2-1} (1 + b_1 t^{-b_2})^{-1}. \quad (2.45)$$

elde edilir. Bu son ifade verildiğinde, t anındaki anlık büyüme oranı şu şekildedir:

$$\frac{dY_t / dt}{Y_t} = b_1 b_2 \left(\frac{Y_t}{Y_\infty} \right) t^{-b_2-1}, \quad (2.46)$$

burada b_2 sabit bir parametreyi, b_1 ise bir büyüme oranı parametresini gösterir.

Ek olarak, $d^2 Y_t / dt^2 = 0$ olarak ayarlandığında, Denklem 2.44'ün bir dönüm noktasına sahip olduğunu nihai olarak belirlememizi sağlar

$$(t_{\text{inf}}, Y_{t_{\text{inf}}}) = \left(\left(\frac{1 + b_2}{b_1 (b_2 - 1)} \right)^{-1/b_2}, Y_\infty \left(\frac{b_2 - 1}{2b_2} \right) \right).$$

2.13 Stannard Büyüme Modeli

Stannard büyüme fonksiyonu (Stannard vd., 1985) şu biçimdedir:

$$Y_t = Y_\infty \left\{ 1 + e^{-[(a+kt)/p]} \right\}^{-p}. \quad (2.47)$$

Verilen bu aşağıdaki denklemlerle

$$\frac{dY_t}{dt} = k Y_t \left\{ 1 + e^{-[(a+kt)/p]} \right\} e^{-[(a+kt)/p]}, \quad (2.48)$$

t anındaki anlık büyüme oranı

$$\frac{dY_t / dt}{Y_t} = k \left[1 - \left(\frac{Y_t}{Y_\infty} \right)^{\frac{1}{p}} \right] \quad (2.49)$$

şeklinde ifade edilir. Burada k , p verildiğinde büyüme oranı parametresi olarak hizmet eder ve $\left[1 - (Y_t / Y_\infty)^{1/p}\right]$ bir “geri bildirim terimi” oluşturur. Ve $d^2Y_t / dt^2 = 0$ olarak ayarlanması, dönüm noktasının koordinatlarını şu şekilde belirlememizi sağlar:

$$(t_{\text{inf}}, Y_{t_{\text{inf}}}) = \left(\frac{p \ln p - a}{k}, Y_\infty \left(\frac{p}{p+1} \right)^p \right).$$

2.14 Schnute Büyüme Modeli

Schnute (1981) çalışması, bir (balık) popülasyonunun hızlandırılmış büyümesini, nispi büyüme oranının nispi büyüme oranını dikkate alarak modellemektedir. Bu amaçla Schnute şu varsayımlardan yola çıkar:

1. Bir nüfusun Y_t 'nin göreceli büyüme oranı şu şekildedir:

$$k = \frac{d \ln Y_t}{dt} = \frac{dY_t / dt}{Y_t}. \quad (2.50)$$

2. Göreceli büyüme oranı k ile doğrusal olarak değişir ve şu şekilde görünür:

$$\frac{d \ln k}{dt} = \frac{dk / dt}{k} = -(a + bk) \quad (2.51)$$

Burada a sabit bir büyüme oranıdır ve b büyümenin başlangıçtaki ivmesinin daha yavaş bir büyüme hızına geçiş noktasını belirleyen bir şekil parametresidir.

Şimdi Schnute büyüme denkleminin iki biçimini ele alacağız.

Birincisi:

$$Y_t = Y_\infty (1 - \delta e^{-at})^{1/b}, \quad (2.52)$$

a büyüme oranı parametresini ve b şekil parametresini temsil eder.

Sonra:

$$\frac{dY_t}{dt} = \left(\frac{a\delta}{b} \right) Y_t e^{-at} (1 - \delta e^{-at})^{-1} \quad (2.53)$$

ve böylece, t anındaki anlık büyüme oranı

$$\frac{dY_t / dt}{Y_t} = \left(\frac{a\delta}{b} \right) (e^{at} - \delta)^{-1} \quad (2.54)$$

şeklindedir. Ayrıca, $d^2Y_t / dt^2 = 0$ olarak ayarlandığında, dönüm noktasının koordinatlarını şu şekilde çözmemizi sağlar:

$$(t_{\text{inf}}, Y_{t_{\text{inf}}}) = \left(\frac{1}{a} \ln(\delta / b), Y_{\infty} (1 - b)^{1/b} \right) .$$

Denklem 2.52'ye alternatif, evrimsel hesaplamalar için yararlı olan Denklem 2.50 ve 2.51'i başlangıç ve son koşullarla birleştirerek elde edilir:

$$Y_1 = Y(t_1) \quad \text{ve} \quad Y_2 = Y(t_2) ,$$

burada t_1 ve t_2 sırasıyla başlangıç ve son zamanlar ve Y_1 ve Y_2 sırasıyla başlangıç ve son popülasyon yoğunluklarıdır. Daha sonra sistemin

$$\frac{dY_t}{dt} = kY_t \quad , \quad \frac{dk}{dt} = -k(a + bk) ,$$

$$Y_1 = Y(t_1) \quad , \quad Y_2 = Y(t_2)$$

çözümü vardır ve

$$Y_t = \left[Y_1^b + (Y_2^b - Y_1^b) \frac{1 - e^{-a(t-t_1)}}{1 - e^{-a(t_2-t_1)}} \right]^{1/b} . \quad (2.55)$$

şeklindedir. $t \rightarrow +\infty$ iken, Denklem 2.55, $a > 0$ olduğunda üst asimptota yaklaşır. (Denklem 2.52 ve 2.55'in türetilmesiyle ilgili ayrıntılar için 3.1.5'e bakınız.)

Denklem 2.55 için t anındaki anlık büyüme oranı şudur:

$$\frac{dY_t / dt}{Y_t} = \frac{a}{b} \left[1 - \left(\frac{Y_1}{Y_2} \right)^b \right] \left(e^{a(t-t_1)} - 1 \right)^{-1} \quad (2.56)$$

ve $d^2Y_t / dt^2 = 0$ olarak ayarlandığında, bir dönüm noktasının şu noktada meydana geldiğini belirleyebiliriz:

$$\left(t_{\text{inf}}, Y_{\text{inf}} \right) = \left(t_1 - \frac{1}{a} \ln \left[b \left(\frac{Y_2^b - Y_1^b e^{-a(t_2-t_1)}}{Y_2^b - Y_1^b} \right) \right], (1-b)^{1/b} \left(\frac{Y_2^b - Y_1^b e^{-a(t_2-t_1)}}{1 - e^{-a(t_2-t_1)}} \right)^{1/b} \right),$$

burada, $a > 0, b > 1$ 'dir.

Denklem 2.52 ve 2.55 oldukça geneldir ve yapılarında bazı diğer iyi bilinen büyüme modelleri bulunur. Örneğin, a ve b parametrelerinin seçili değerleri için aşağıdaki özel durumlar ortaya çıkar:

von Bertalanffy ($a > 0, b = 1$)

Richards ($a > 0, b < 0$)

Lojistik ($a > 0, b = -1$)

Gompertz ($a > 0, b = 0$)

Üstel ($a < 0, b = 1$)

Bu alt vakaların ilk dördünün sigmoidal olduğu unutulmamalıdır çünkü $a > 0$ dir.

2.15 Morgan–Mercer–Flodin (M–M–F) Büyüme Modeli

Biyolojik kinetikle ilgili iki eski model Michaelis ve Menten (1913) ve Hill (1910, 1913) tarafından geliştirilmiştir. Enzim katalizli bir kimyasal reaksiyonda

reaksiyon hızını (Y) substrat konsantrasyonuna (X) bağlayan Michaelis-Menten denklemini şu şekildedir:

$$Y = -\frac{dX}{dt} = \frac{Y_{\infty}X}{k + X}, k > 0. \quad (2.57)$$

Burada Denklem 2.57, vücudun bir ilacı işleme hızını yöneten bir yasayı açıklar ve yapısal olarak hiperbolik bir doygunluk eğrisini temsil eder, çünkü

$$\frac{dY}{dX} = \frac{kY_{\infty}}{(K + X)^2} > 0$$

Ve

$$\frac{d^2Y}{dX^2} = \frac{-2kY_{\infty}}{(k + X)^3} < 0 \text{ dir.}$$

(Michaelis-Menten denkleminin genelleştirilmiş hali 3.1.8'de sunulmaktadır.)

Solunum fiziolojisinde oksijenin hemoglobine bağlanmasının kinetiğini tanımlamak için kullanılan Hill denklemini şu şekilde görür:

$$Y = \frac{Y_{\infty}X^n}{k + X^n}, k > 0 \quad (2.58)$$

ve $k, X = k^{1/n}$ olduğunda $Y = Y_{\infty} / 2$ özelliğine sahip bir sabit olan ve n (Hill katsayısı) şeklini tanımlayan doyma fonksiyonunun kinetik mertebesi olan bir sigmoidal doyma fonksiyonunu tasvir eder.

Denklemler 2.57 ve 2.58 başlangıçta bir büyüme bağlamında uygulanmamış olsa da birkaç çalışma (Mercer ve diğerleri, 1978; Morgan ve diğerleri, 1975) bu denklemleri, biyolojik verimliliği modellemek veya bir besinin insanlarda veya hayvanlarda bir tepki üretme yeteneğini tanımlamak için yararlı olan genel bir doygunluk denklemini türetmenin temeli olarak kullanmıştır. Denklem 2.57 ve 2.58'in önemli bir özelliği orijinden geçmeleridir. Ancak, tahmin edilen besin-tepki eğrilerinin çoğunun bu özelliği göstermediği (bu tür eğriler yüksek besin alım seviyelerinde üst asimptota eğilim gösterir ve asimptota yaklaşıldığında hiperbolik veya sigmoidal

davranışı yansıtan bir eğrilik gösterir) için, M–M–F besin tepkilerini modellemek için genel bir doyumluk fonksiyonu tarafından karşılanması gereken iki kriteri benimsemiştir: (i) denklem hem hiperbolik hem de sigmoidal davranışı gösterebilmelidir ve (ii) denklem, verilerin belirlediği herhangi bir noktada ordinat eksenini kesebilecek şekilde serbest olmalıdır. Açıkça sigmoidal Hill denklemi (2.58) ilk gereksinimi karşılar, çünkü $n=1$ için Michaelis-Menten hiperbolik denkleminde (2.57) indirgenir. Ancak ikinci kriter karşılanmaz.

Morgan-Mercer-Flodin, Denklem 2.58'i, koordinat ekseninin basit bir çevirisiyle değiştirir, yani genel doyumluk fonksiyonları (ki artık yukarıda belirtilen kriterlerin her ikisini de karşılar) şu formu alır:

$$Y = \frac{ab + Y_{\infty} X^n}{b + X^n}, \quad (2.59)$$

burada a , $X = 0$ olduğunda ordinat kesişimidir, n bir şekil parametresidir ($n=1$ için, Denklem 2.59 dikdörtgen bir hiperboldür; $a = 0$ olduğunda Hill denklemini (2.58) elde ederiz; ve $a = 0$ ve $n=1$ için Michaelis-Menten denklemi (2.57) elde edilir) ve $b = (X_{0.50})^n$, burada $X_{0.50}$ Y maksimum tepkinin yarısı olduğundaki X değeridir, yani $(Y_{\infty} + a) / 2$ 'ye eşit bir besin tepki seviyesidir.

Büyüme süreci modellemesi amaçları için, Denklem 2.59' un uygun bir alternatif biçimi şudur:

$$Y_t = Y_{\infty} - \frac{Y_{\infty} - \beta}{[1 + (kt)^{\delta}]}, \quad (2.60)$$

Denklem 2.60'ı şu şekilde yeniden yazabiliriz:

$$Y_t = \frac{Y_{\infty} [1 + (kt)^{\delta}] - (Y_{\infty} - \beta)}{[1 + (kt)^{\delta}]} = \frac{\beta k^{-\delta} + Y_{\infty} t^{\delta}}{k^{-\delta} + t^{\delta}} = \frac{\alpha \beta + Y_{\infty} t^{\delta}}{\alpha + t^{\delta}},$$

burada $\alpha = k^{-\delta}$ dır. Açıkça bu ifade Denklem 2.59 ile örtüşmektedir.)

Burada β , $t=0$ 'daki boyutu veya verimi tasvir eder, k büyüme oranıdır ve δ dönüm noktasını kontrol eden bir parametredir. Denklem 2.60 verildiğinde,

$$\frac{dY_t}{dt} = (Y_\infty - Y_t) \frac{\delta k^\delta t^{\delta-1}}{[1 + (kt)^\delta]} \quad (2.61)$$

elde edilir ve t zamanındaki anlık büyüme oranı şu şekilde belirlenir:

$$\frac{dY_t / dt}{Y_t} = \left(\frac{Y_\infty}{Y_t} - 1 \right) \frac{\delta k^\delta t^{\delta-1}}{[1 + (kt)^\delta]}, \quad (2.62)$$

burada $(Y_\infty / Y_t - 1)$ bir "geri bildirim terimi" oluşturur. $d^2Y_t / dt^2 = 0$ olarak ayarlandığında, dönüm noktasını çözmemizi sağlar:

$$\left(t_{\text{inf}}, Y_{t_{\text{inf}}} \right) = \left(k^{-1} \left(\frac{\delta + 1}{\delta - 1} \right)^{1/\delta}, \left(\frac{(\delta - 1)Y_\infty + (\delta + 1)\beta}{2\delta} \right) \right).$$

2.16 McDill-Amateis Büyüme Modeli

McDill ve Amateis (1992), bir (çam) ormanı, alan kalitesinin büyüme modelini geliştirir; bu model, alan kalitesinin bir ölçüsü olarak bir stand yüksekliği-büyüme denkleminin alana özgü parametrelerinin değerlerini kullanır; burada gözlenen “en yüksek büyüme”, “alan kalitesini” değerlendirmek için seçilen belirli bir stand bileşeninin yükseklik büyümesini ifade eder. Görünüşte yükseklik artışı, saha kalitesinin iyi bir göstergesidir; saha kalitesi ise bir sahanın odun lifi/ürünleri üretme potansiyelini yansıtır.

McDill-Amateis boy-büyüme fonksiyonu biyolojik olarak anlamlı iki parametre içerir: bir hız parametresi ve bir maksimum boy parametresi. Üstelik, bu ifade ayrıca başlangıç koşullarını (yani, önceden belirlenmiş bir başlangıç yaşındaki başlangıç yüksekliği) da içerir; bunlar ya tahmin edilecek ek (üçüncü) bir parametre olarak ele alınabilir ya da verilerden belirlenebilir. Boy uzaması denkleminde görünen temel değişkenler boy (H), yaş (A), boy uzaması (dH / dA) ve belirli bir alandaki

ağaçların ulaşabileceği asimptotik maksimum boydur (H_∞). Bu bağlamda, McDill-Amateis stand-yükseklik-büyüme fonksiyonu şu şekildedir:

$$H = \frac{H_\infty}{1 - \left(1 - \frac{H_\infty}{H_0}\right) \left(\frac{A_0}{A}\right)^a}, \quad (2.63)$$

burada H_0 ve A_0 başlangıç koşulları olarak hizmet eder. (Bu ifadenin türetilmesiyle ilgili ayrıntılar 3.1.6'da yer almaktadır.) Ağaç büyüme tahmini için $H_\infty > H_0 > 0$ ve $a > 0$ 'ı gerektirir. Burada yaş $A \rightarrow 0$, boy $H \rightarrow 0$ iken, $A \rightarrow +\infty$ ve $H \rightarrow H_\infty$ 'dur.

Denklem 2.63'ten,

$$\frac{dH}{dA} = \alpha \left(\frac{H}{A}\right) \left(1 - \frac{H}{H_\infty}\right) \quad (2.64)$$

elde edilir. A yaşındaki anlık büyüme oranı ise aşağıdaki gibidir.

$$\frac{dH/dA}{h} = \frac{\alpha}{A} \left(1 - \frac{H}{H_\infty}\right) \quad (2.65)$$

$1 - H/H_\infty$ 'un bir "geri bildirim terimi" olarak hizmet ettiği bir durumda $d^2H/dA^2 = 0$ 'ı olarak ayarlandığında, dönüm noktasının koordinatlarını aşağıdaki gibi elde etmemizi sağlar:

$$\left(A_{\text{inf}}, H_{A_{\text{inf}}}\right) = \left(A_0 \left(1 - \frac{H_\infty}{H_0}\right)^{1/a} \left(\frac{1-a}{a+1}\right)^{1/a}, \frac{H_\infty}{2} \left(1 - \frac{1}{a}\right)\right), a > 1 .$$

$a \leq 1$ için büyüme denklemi içbükeydir. McDill ve Amateis, modellerinin kalıcı grafiklerden alınan yeniden ölçüm verileri veya genel olarak oldukça uzun bir zaman dilimini kapsayan veriler için iyi çalıştığını ileri sürüyorlar. Başlangıç koşulları söz konusu olduğunda, yazarlar başlangıç koşullarını belirlemek için verilerin kullanılmasını ve ölçüm aralıklarının gözlemler olarak ele alınmasını önermektedir

(yani her gözlem bir başlangıç ölçümünden (A_0, H_0) ve bir son ölçümden (A, H) oluşmaktadır). Dolayısıyla ilk ve sonuncusu hariç tüm ölçümler iki gözleme aittir: Bir gözlemden başlangıç ölçümü, diğerinde ise bitiş ölçümü mevcuttur.

2.17 Ek Büyüme Modellerinin Çeşitliliği

Aşağıdaki üç büyüme fonksiyonunun (2.44 Hossfeld denkleminin tüm değişiklikleri) pratikte oldukça doğru olduğu bulunmuştur:

1. Levakovic I büyüme modeli: Levakovic'in I büyüme denklemi (1935) şu formu alır:

$$Y_t = Y_\infty (1 + bt^{-d})^{-c}. \quad (2.66)$$

Daha sonra

$$\frac{dY_t}{dt} = cbdY_\infty (1 + bt^{-d})^{-c-1} t^{-d-1} \quad (2.67)$$

elde edilir ve böylece, Y_t 'deki anlık değişim oranı t zamanında aşağıdaki gibidir:

$$\frac{dY_t / dt}{Y_t} = cbd t^{-d-1} (Y_t / Y_\infty)^{1/c}. \quad (2.68)$$

$d^2 Y_t / dt^2 = 0$ olarak ayarlandığında, dönüm noktası aşağıdaki gibi bulunur.

$$\left(t_{\text{inf}}, Y_{t_{\text{inf}}} \right) = \left(\left(\frac{b(cd-1)}{d+1} \right)^{1/d}, Y_\infty \left(\frac{cd-1}{d(c+1)} \right)^c \right).$$

2. Levakovic III büyüme modeli: Levakovic III büyüme denklemi (1935), Denklem 2.66'nın özel bir durumudur ve şu şekilde görünür:

$$Y_t = Y_\infty (1 + bt^{-2})^{-c}. \quad (2.69)$$

Daha sonra dY_t / dt , $(dY_t / dt) / Y_t$, ve dönüm noktası için ifadeler, sırasıyla Denklem 2.66'da, Denklem 2.67'de ve $(t_{\text{inf}}, Y_{t_{\text{inf}}})$ 'de $d = 2$ olarak ayarlanarak elde edilebilir.

3. Yoshida I büyüme modeli: Yoshida'nın I büyüme denklemi (1981) şu şekilde yapılandırılmıştır:

$$Y_t = Y_\infty (1 + bt^{-c})^{-1} + c \quad (2.70)$$

burada c başlangıç boyutunu gösteren bir parametredir. Burada t zamanındaki büyüme oranı aşağıdaki gibidir.

$$\frac{dY_t}{dt} = bdY_\infty (1 + bt^{-d})^{-2} t^{-d-1} = \frac{bd(Y_t - c)}{(1 + bt^{-d})} t^{-d-1}, \quad (2.71)$$

t zamanındaki anlık büyüme oranı ise aşağıdaki gibidir.

$$\frac{dY / dt_t}{Y_t} = bd \left(1 - \frac{c}{Y_t}\right) (1 + bt^{-d}) t^{-d-1}. \quad (2.72)$$

Denklem 2.70'in bir dönüm noktası vardır:

$$(t_{\text{inf}}, Y_{t_{\text{inf}}}) = \left(\left(\frac{b(d-1)}{d+1} \right)^{1/d}, Y_\infty \left(\frac{2d}{d-1} \right) + c \right).$$

2.17.1 Sloboda Büyüme Modeli

Gompertz denkleminde (2.10) benzer bir büyüme fonksiyonu Sloboda büyüme fonksiyonudur (1971a, b)

$$Y_t = Y_\infty e^{-\alpha e^{-\beta t}}, t \geq 0 \quad (2.73)$$

(bu ifadenin Gompertz denkleminde ek parametre γ 'nin varlığıyla farklı olduğu unutulmamalı). Sonra t zamanındaki büyümenin değişim oranı aşağıdaki gibidir.

$$\frac{dY_t}{dt} = \alpha\beta\gamma Y_t^{\gamma-1} e^{-\beta t^\gamma} \quad (2.74)$$

ve böylece, t zamanında Y_t 'deki anlık değişim oranı aşağıdaki gibi olur.

$$\frac{dY_t / dt}{Y_t} = \alpha\beta\gamma t^{\gamma-1} e^{-\beta t^\gamma}. \quad (2.75)$$



3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1 Büyüme Modellerinin Türetilmiş Halleri

3.1.1 Türetilen Lojistik Model

Basit üstel büyüme modeli için, değişken Y 'nin anlık büyüme oranının sabit bir β olduğu varsayılır,

$$\frac{dY_t / dt}{Y_t} = \beta, \text{ ve } \frac{dY_t}{dt} = \beta Y_t; \quad (3.1.1.1)$$

yani Y 'deki değişim oranı, t zamanındaki Y 'nin mevcut büyüklüğüne, yani Y_t 'ye orantılıdır. Daha sonra

$$\int \frac{dY_t}{Y_t} = \int \beta dt$$

veya

$$\ln Y_t = \beta t + \ln C \quad (\ln C \text{ sabiti})$$

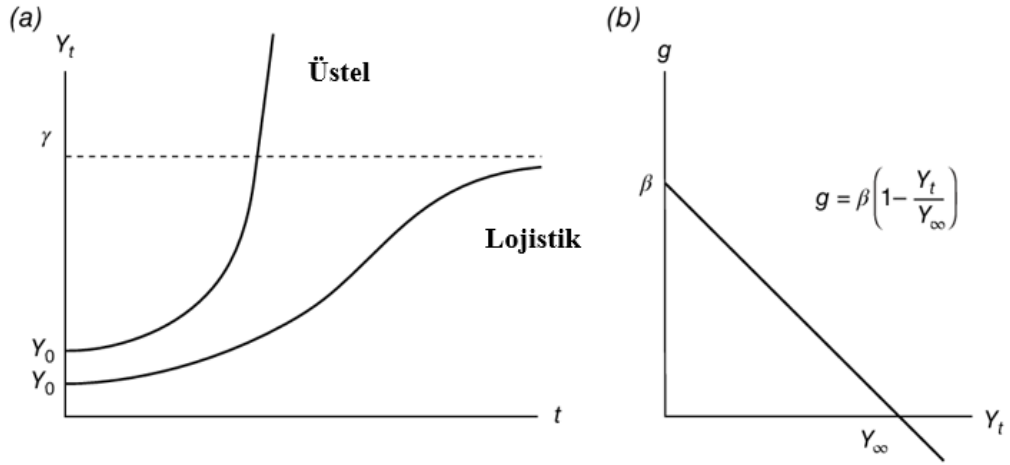
ve böylece

$$Y_t = C e^{\beta t}. \quad (3.1.1.2)$$

$t = 0$ için, $Y_0 = C$ olduğundan Denklem 3.1.1.2 şu şekilde yeniden yazılabilir:

$$Y_t = Y_0 e^{\beta t}. \quad (3.1.1.3)$$

Denklem 3.1.3'ün gösterdiği gibi, büyümenin bir sınırı yoktur; $t \rightarrow +\infty$ olduğundan $Y_t \rightarrow +\infty$ (Şekil 3.1.1.1a) çıkar. Büyümenin lojistik yasası olarak adlandırılan yasa, esasen bir sistem veya nüfus Y 'deki büyüme oranının sınırlı olabileceğini belirtir. Daha spesifik olarak Y şu şekilde üssel olarak büyür:



Şekil 3.1.1.1(a) Üstel büyümeye karşı lojistik büyüme; **(b)** Geri bildirim bağımlılığı.

diyelim ki sistemin büyüme kapasitesinin üst sınırına (doygunluk parametresi Y_∞) yaklaşılan kadar g oranı, bu noktada büyüme hızı yavaşlar ve karakteristik S şeklinde veya sigmoidal eğri ortaya çıkar. Bu bağlamda, büyüme oranı g' nin t zamanındaki Y yoğunluğuna bağlı olduğunu varsayalım (Y_t / Y_∞) veya

$$g = \beta \left(1 - \frac{Y_t}{Y_\infty} \right), \quad (3.1.1.4)$$

burada $1 - (Y_t / Y_\infty)$ bir geri besleme terimi olarak adlandırılır ve bu terimin rolü, $Y_t \rightarrow Y_\infty$ olduğunda büyüme oranının sıfıra düşmesini hesaba katmaktır. Yani düşük yoğunluklarda (Y_t, Y_∞ 'dan çok daha küçüktür), g maksimumdur ve β 'ye yakındır (Şekil 3.1.1.1b) ve bu nedenle lojistik eğrinin davranışı üstel bir büyüme eğrisinin davranışına benzer; ancak yüksek yoğunluklarda (Y_t, Y_∞ 'ya yakındır) geri besleme terimi doyumluğa ulaşılan kadar büyümeyi yavaşlatır ($Y_t = Y_\infty$), bu noktada büyüme oranı $g = 0$ olur. (Eğer $Y_t > Y_\infty$ ise, Y 'deki büyüme oranı negatife döner.)

Bunu söyledikten sonra, lojistik fonksiyonu şu şekilde türetebiliriz. Üstel büyüme denklemiyle başlayalım:

$$\frac{dY_t}{dt} = gY_t .$$

Daha sonra Denklem 3.1.4' ten Y büyümesinin dinamikleri artık lojistik diferansiyel denklemlerle karakterize edilir

$$\frac{dY_t}{dt} = \beta Y_t \left(1 - \frac{Y_t}{Y_\infty} \right). \quad (3.1.1.5)$$

$x = Y_t / Y_\infty$ olarak ayarlayalım. O zaman

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{Y_\infty} \frac{dY_t}{dt}$$

ve böylece Denklem 3.1.1.5 şu şekilde yeniden yazılabilir:

$$\frac{dY_t / dt}{Y_\infty} = \beta \frac{Y_t}{Y_\infty} \left(1 - \frac{Y_t}{Y_\infty} \right)$$

veya

$$\frac{dx}{dt} = \beta x(1-x) \quad (3.1.1.6)$$

olur. O zaman Denklem 3.1.1.6'yı çözmek için adımların sırası şu şekildedir:

$$\int \frac{dx}{x(1-x)} = \int \beta dt,$$

$$-\ln \frac{1-x}{x} = \beta t + \ln C, \quad (\ln C \text{ sabiti})$$

$$\ln \frac{1-x}{x} = -\beta t - \ln C,$$

$$\frac{1-x}{x} = \alpha e^{-\beta t}, \quad (\alpha = C^{-1}).$$

Daha sonra x için çözüm elde edilir

$$x = \frac{1}{1 + \alpha e^{-\beta t}}$$

Ve $x = Y_t / Y_\infty$ olduğundan sonuçta şunu elde ederiz:

$$Y_t = \frac{Y_\infty}{1 + \alpha e^{-\beta t}}, t \geq 0 \quad (3.1.1.7)$$

(veya Denklem 2.6). $t=0$ için, $Y_0 = Y_\infty / (1 + \alpha)$ böylece $\alpha = (Y_\infty / Y_0) - 1$. (Denklem 3.1.1.7'nin ayrık bir versiyonunun şu şekilde olduğunu unutmayın:

$$Y_t = \frac{Y_\infty}{1 + \alpha \beta^t} \quad (3.1.1.8)$$

Büyüme süresini (Δt olarak gösterilir) Y 'nin kapasite sınırı Y_∞ 'nin %10'undan %90'ına ilerlediği zaman aralığının uzunluğu olarak tanımlayalım. Δt 'yi bulmak için önce şunu belirleyelim:

$$(Y_t =) 0.90 Y_\infty = \frac{Y_\infty}{1 + \alpha e^{-\beta t}}$$

Daha sonra t için çözüm elde edilir

$$(t =) t_{0.90} = \frac{2.19723}{\beta} + \frac{\ln \alpha}{\beta}$$

Sonra biz

$$0.10 Y_\infty = \frac{Y_\infty}{1 + \alpha e^{-\beta t}}$$

$$t_{0.10} = -\frac{2.19722}{\beta} + \frac{\ln \alpha}{\beta}$$

olarak buluruz. Buradan,

$$\Delta t = t_{0.90} - t_{0.10} = \frac{4.39445}{\beta} + \frac{\ln(81)}{\beta}$$

olur. Ek olarak, orta nokta t_m zamanıdır burada $Y_{t_m} = Y_\infty / 2$ — Y 'deki en hızlı artışın zamanıdır ve $t_m = \ln \alpha / \beta$ olacak şekilde dönüm noktasında meydana gelir (bkz. Şekil 2.3).

Lojistik model değişken değişikliği ile doğrusallaştırılabilir. Bu amaçla, tekrar $x = Y_t / Y_\infty$. olarak ayarlayalım. Daha sonra Denklem 3.1.7'den,

$$x = \frac{1}{1 + \alpha e^{-\beta t}}, 1 - x = \frac{\alpha e^{-\beta t}}{1 + \alpha e^{-\beta t}},$$

ulaşırız ve böylece

$$\frac{x}{1-x} = \alpha^{-1} e^{\beta t}$$

olur. Buradan,

$$\begin{aligned} \ln \frac{x}{1-x} &= \ln(\alpha^{-1}) + \beta t \\ &= \alpha + \beta t. \end{aligned} \tag{3.1.1.9}$$

olarak buluruz.

3.1.2 Türetilen Gompertz Model

Gompertz diferansiyel denklemi

$$\frac{dY_t}{dt} = \beta Y_t \ln \left(\frac{Y_\infty}{Y_t} \right) \tag{3.1.2.1}$$

şeklinde ifade edilir.

(Denklem 2.13 ve yorumlanmasına bakınız). Burada Y 'deki anlık büyüme oranı $\ln Y_\infty - \ln Y_t$ ile orantılıdır. Eğer $x = Y_t / Y_\infty$ olarak ayarlarsak, o zaman

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{Y_\infty} \frac{dY_t}{dt}$$

olur ve böylece Denklem 3.1.2.1 şu şekilde yeniden yazılabilir:

$$\frac{dY_t / dt}{Y_\infty} = \beta \frac{Y_t}{Y_\infty} \ln \left(\frac{Y_\infty}{Y_t} \right)$$

veya

$$\frac{dx}{dt} = \beta x \ln \left(\frac{1}{x} \right). \quad (3.1.2.2)$$

olur. Daha sonra Denklem (3.1.2.2)'nin çözümü şu şekilde ilerler:

$$\int \frac{dx}{x \ln(1/x)} = \int \beta dt,$$

$$-\ln \left(\ln \frac{1}{x} \right) = \beta t + \ln C, \quad (\ln C \text{ sabiti})$$

$$\ln \left(\ln \frac{1}{x} \right) = -\beta t - \ln C,$$

$$\ln \left(\frac{1}{x} \right) = \alpha e^{-\beta t}, \quad (\alpha = C^{-1})$$

$$\ln x = -\alpha e^{-\beta t}.$$

x 'i çözmek şunu verir:

$$x = e^{-\alpha e^{-\beta t}}.$$

Ancak $x = Y_t / Y_\infty$ olduğundan sonuçta şunu elde ederiz

$$Y_t = Y_\infty e^{-\alpha e^{-\beta t}}, \quad t \geq 0 \quad (3.1.2.3)$$

(veya Denklem 2.10). $t=0$ için, $Y_0 = Y_\infty e^{-\alpha}$ böylece $\alpha = \ln(Y_\infty / Y_0)$. (Denklem

3.1.2.3'ün ayrık versiyonu şudur:

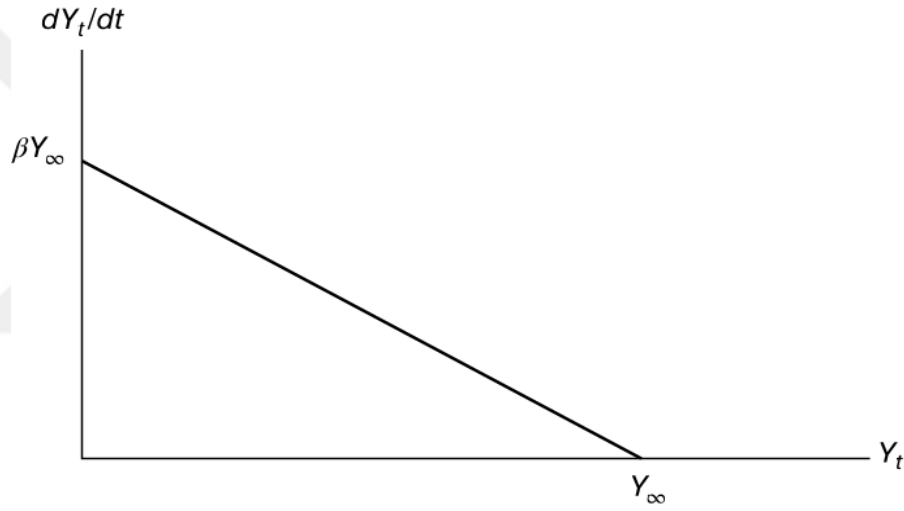
$$Y_t = Y_\infty \alpha^{\beta t}. \quad (3.1.2.4)$$

3.1.3 Türetilen Negatif Üstel Model

Diyelim ki dY_t/dt , Y_t 'nin doğrusal bir fonksiyonudur veya

$$\frac{dY_t}{dt} = \beta(Y_\infty - Y_t), \quad (3.1.3.1)$$

burada β sabittir ve Y_∞ , Y_t için değeridir $dY_t/dt = 0$ için, yani $t \rightarrow \infty$ iken $Y_t \rightarrow Y_\infty$, $dY_t/dt \rightarrow 0$. Yani örneğin, dY_t/dt 'yi Y_t 'ye göre çizersek o zaman Denklem 3.1.3.1



Şekil 3.1.3.1 dY_t/dt , Y_t 'nin doğrusal bir fonksiyonudur.

ortaya koyar ki, eğimi $-\beta$ olan doğrusal bir fonksiyonumuz var; bu fonksiyon Y_t - eksenini Y_∞ noktasında keser ve Y 'nin bu noktadan sonra büyümeyeceği anlamına gelir. Bu nedenle, Y_∞ , $t \rightarrow \infty$ iken Y_t 'nin asimptotudur (Şekil 3.1.3.1).

Denklem 3.1.3.1'i şu şekilde yeniden yazalım:

$$\frac{dY_t}{Y_\infty - Y_t} = \beta dt$$

Buradan

$$\int \frac{dY_t}{Y_\infty - Y_t} = \int \beta dt,$$

$$-\ln(Y_\infty - Y_t) = \beta t - \ln C, \quad (\ln C \text{ sabiti})$$

$$\ln(Y_\infty - Y_t) = -\beta t - \ln C,$$

$$Y_\infty - Y_t = \alpha e^{-\beta t}, \quad (\alpha = C^{-1})$$

olur ve böylece :

$$Y_t = Y_\infty - \alpha e^{-\beta t}. \quad (3.1.3.2)$$

$t = 0$ için, $Y_0 = Y_\infty - \alpha = 0$ veya $\alpha = Y_\infty$. Bu nedenle, Denklem 3.1.3.2 şu hale gelir:

$$Y_t = Y_\infty (1 - e^{-\beta t}). \quad (3.1.3.3)$$

$Y_0 = Y_\infty - \alpha$ olarak ayarladığımızda, $\alpha = Y_\infty - Y_0$. Bu değeri α için denklem 3.1.3.2'ye koyduğumuzda şunu elde ederiz:

$$Y_t = Y_\infty - (Y_t - Y_0) e^{-\beta t} = Y_\infty \left[1 - \left(1 - \frac{Y_0}{Y_\infty} \right) e^{-\beta t} \right] = Y_\infty (1 - \theta e^{-\beta t}), t \geq 0, \quad (3.1.3.4)$$

monomoleküler büyüme fonksiyonudur. Bu büyüme denklemi için,

$$\frac{dY_t}{dt} = Y_\infty \beta \theta e^{-\beta t} = \frac{Y_\infty \beta \theta}{e^{\beta t}}$$

$\lim_{t \rightarrow \infty} dY_t / dt = 0$ olduğundan monomoleküler fonksiyon sürekli olarak azalmaktadır;

$d^2Y_t / dt^2 = -Y_\infty \beta^2 \theta e^{-\beta t} < 0$ olduğundan tüm t için bir dönüm noktası yoktur. Ayrıca anlık büyüme oranı

$$\frac{dY_t / dt}{Y_t} = \frac{\beta\theta}{e^{\beta t} - \theta}$$

ile

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{dY_t / dt}{Y_t} = 0 \text{ dır.}$$

3.1.4 Türetilen Von Bertalanffy Ve Richards Modeller

Von Bertalanffy büyüme yasası göz önüne alındığında

$$\frac{dY_t}{dt} + \lambda Y_t = \eta Y_t^k \quad (3.1.4.1)$$

(bkz. Denklem 2.23), (Denklem 3.1.4.1, (Jakob) Bernoulli diferansiyel denklemi $y' + p(t)y = q(t)y^n$, n sabittir (mutlaka tam sayı değildir), p ve q 'nin t 'nin fonksiyonları verildiği bir özel durumdur. Eğer $n \neq 0$ veya 1 ise, $x = y^{1-n}$ ikamesi (Leibniz'in 1696'daki önerisi) Bernoulli denklemini doğrusallaştırır.) $x = Y_t^{1-k}$ olarak ayarlayalım böylece

$$\frac{dx}{dt} = (1-k)Y_t^{-k} \frac{dY_t}{dt}$$

veya

$$\frac{1}{1-k} Y_t^k \frac{dx}{dt} = \frac{dY_t}{dt} \quad (3.1.4.2)$$

olur. Denklem 3.1.4.1'in Denklem 3.1.4.2'ye ikame edilmesi şunu verir:

$$\frac{1}{1-k} \frac{dx}{dt} = \eta - \lambda x,$$

$$\int \frac{dx}{\eta - \lambda x} = \int (1-k) dt,$$

$$-\lambda^{-1} \ln(\eta - \lambda x) = (1-k)t + \ln C, \text{ (ln C sabiti)}$$

$$\ln(\eta - \lambda x) = -\lambda(1-k)t - \lambda \ln C,$$

$$\eta - \lambda x = \alpha e^{-\lambda(1-k)t}, (\alpha = C^{-\lambda})$$

$$x = \frac{\eta}{\lambda} - \frac{\alpha}{\lambda} e^{-\lambda(1-k)t}. \quad (3.1.4.3)$$

Daha sonra Denklem 3.1.4.3'te x yerine Y_t^{1-k} 'i ikame etmek, şunu yazmamızı sağlar:

$$Y_t = \left[\frac{\eta}{\lambda} - \frac{\alpha}{\lambda} e^{-\lambda(1-k)t} \right]^{1/(1-k)}. \quad (3.1.4.4)$$

$t = 0$ için,

$$Y_0 = \left[\frac{\eta}{\lambda} - \frac{\alpha}{\lambda} \right]^{1/(1-k)}$$

olur. Böylece

$$\frac{\alpha}{\lambda} = \frac{\eta}{\lambda} - Y_0^{1-k}$$

olur. Bu nedenle, Denklem 3.1.4.4 şu hale gelir, von Bertalanffy büyüme denklemi:

$$Y_t = \left[\frac{\eta}{\lambda} - \left(\frac{\eta}{\lambda} - Y_0^{1-k} \right) e^{-\lambda(1-k)t} \right]^{1/(1-k)} \quad (3.1.4.5)$$

ve

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Y_t = Y_\infty = \left(\frac{\eta}{\lambda} \right)^{1/(1-k)},$$

olduğundan denklem 3.1.4.5 şu şekilde yeniden yazılabilir:

$$\begin{aligned}
Y_t &= \left[Y_\infty^{1-k} - (Y_\infty^{1-k} - Y_0^{1-k}) e^{-\lambda(1-k)t} \right]^{1/(1-k)} \\
&= Y_\infty \left[1 - \alpha e^{-\lambda t} \right]^m, t \geq 0,
\end{aligned} \tag{3.1.4.6}$$

Bu fonksiyonun bir modifiyesi Chapman (1961) ve Richards (1959) (C–R) tarafından önerilmiştir. Özellikle, C–R dört parametrelili C-R fonksiyonu olarak Denklem 3.1.4.6'yı şu şekilde yeniden yazılabilir:

$$Y_t = Y_\infty \left[1 - \alpha e^{-\lambda t} \right]^m, t \geq 0, \tag{3.1.4.7}$$

Burada:

Y_∞ bir üst asimptottur ($t \rightarrow \infty$ olduğundaki doygunluk seviyesi).

α esasen bir konum parametresidir (eğriyi t ekseninde konumlandırır).

λ , sabit bir m değeri için büyüme oranını düzenler. Olgunluk endeksi görevi görür- daha küçük (daha büyük) λ , geç (erken) olgunlaşmayı gösterir.

m eğri şekliyle ilgilidir— Y_∞ 'nin "sabit" bir oranı olmayan değişken veya isteğe bağlı bir dönüm noktasına izin verir. $m > 0$ için büyüme eğrisi S şeklindedir ve dönüm noktası $(t_{\text{inf}}, Y_{t_{\text{inf}}}) = \left(\lambda^{-1} \ln(am), Y_\infty \left(\frac{m-1}{m} \right)^m \right)$. Eğer $m > 1$ ise başlangıç büyüme fazı üsteldir. Ek olarak (3.1.4.7)'den şu gösterilebilir:

$$\frac{dY_t}{dt} = m\lambda Y_t \left[\left(\frac{Y_\infty}{Y_t} \right)^{1/m} - 1 \right]; \tag{3.1.4.8a}$$

$$\frac{dY_t / dt}{Y_t} = m\lambda \left[\left(\frac{Y_\infty}{Y_t} \right)^{1/m} - 1 \right]. \tag{3.1.4.8b}$$

Denklem 3.1.4.8b'nin gösterdiği gibi, t zamanında Y_t 'deki anlık büyüme oranı "geri bildirim terimi" $(Y_\infty / Y_t)^{1/m} - 1$. ile orantılıdır.

C–R büyüme fonksiyonunun aslında bazı iyi bilinen büyüme eğrilerinin bir genellemesi olduğunu belirtmek ilginçtir, örneğin $m = -1$ için lojistik fonksiyonu elde ederiz; $m \pm \infty$ 'a yakınsa Gompertz fonksiyonu ortaya çıkar, $m = 3$ için von Bertalanffy denklemini sonuçlanır (bkz. von Bertalanffy (1957)); ve $m = 1$ için (ikinci) Brody fonksiyonu elde edilir.

Orijinal Richards (1959) büyüme denkleminin lojistik büyüme fonksiyonunun (Denklem 3.1.1.7) bir genellemesini temsil ettiğini belirtmek önemlidir. Yani Richards, değiştirilmiş büyüme denklemini (yasasını) dikkate alarak lojistik büyüme yasasını (Denklem 3.1.5)

$$\frac{dY_t}{dt} = \beta Y_t \left[1 - \left(\frac{Y_t}{Y_\infty} \right)^r \right] \quad (3.1.4.9)$$

genelleştirmiştir. (Büyüme oranı Y_t ile orantılıdır bir "geri bildirim terimi" ile çarpılır) veya

$$\frac{dY_t}{dt} = \beta Y_t + \eta Y_t^{r+1} . \quad (3.1.4.10)$$

Denklem 3.1.4.10 bir Bernoulli diferansiyel denklemi olduğundan, Richards büyüme fonksiyonuna (veya genelleştirilmiş lojistik denkleme) entegre olur

$$Y_t = \frac{Y_\infty}{(1 + \alpha e^{\beta r t})^{1/r}}, t \geq 0, \quad (3.1.4.11)$$

burada $\alpha = (Y_\infty / Y_0)^r - 1$ ve her ikisi de $\beta, r > 0$.

Lojistik denklem 3.1.1.7 ile ilgili olarak Denklem 3.1.4.11'in sigmoidal şeklinin değiştirilmesine izin veren ek bir şekil parametresi r' ye sahip olduğunu

unutmayın. Aslında r' yi değiştirmek, eğrinin dönüm noktasının alt ve üst asimptotlar arasındaki herhangi bir değerde bulunmasına olanak tanır. Burada da diğer büyüme eğrileri Denklem 3.1.4.11 altında, örneğin $r = 1$ olduğunda standart lojistik modelini elde ederiz; $r \rightarrow 0$ olduğunda Richards eğrisi Gompertz eğrisine doğru eğilim gösterir; $r = -1$ olduğunda monomoleküler (veya ikinci Brody) durum ortaya çıkar ve $r = -1/3$ olduğunda von Bertalanffy fonksiyonu elde edilir.

Von Bertalanffy büyüme denkleminin önceki türetilmesi tamamen mekanik bir biçimde gerçekleştirilmiştir. Bu yaklaşıma bir alternatif olarak bu büyüme modelinin fizyolojik kavramlara dayalı bir türevini sunmak öğretici olacaktır (Beverton ve Holt, 1957; von Bertalanffy, 1957). Bu amaçla, von Bertalanffy bireysel bir organizmayı kütle eylem yasasına uyan tepkime veren bir kimyasal sisteme benzetir (Bu yasa (kinetik hakkında bir iddia), belirli bir kimyasal reaksiyonun hızının, tepkimeye giren maddelerin aktivitelerinin (veya moleküler konsantrasyonlarının) arpımına orantılı olduğunu belirtir. (Guldberg ve Waage, 1879)) ve sonuç olarak bir organizmanın t zamanındaki kütlesinden sorumlu fizyolojik süreçleri anabolizma (veya sentez) ve katabolizma (parçalanma) olarak sınıflandırır; yani bir organizmanın vücut ağırlığındaki (w) değişim oranı şu şekilde yazılabilir

$$\frac{dw}{dt} = hw^n - kw^m, \quad (3.1.4.12)$$

burada h ve k sırasıyla anabolizma ve katabolizma katsayılarıdır ve n ve m üsleri fizyolojik bir temele sahiptir. Bu bağlamda bu parametreler nasıl seçilmelidir? Anabolizma hızının besinlerin emilim hızına (bir "yapının" yeniden şekillendiği hız) veya emilen yüzeylerin büyüklüğüne orantılı olarak alındığını ve katabolizma hızının parçalanan toplam kütleye orantılı olarak belirlendiğini ve birim zaman başına vücut materyalinin sabit bir yüzdesinin atık maddeye dnştrldğn varsayalım. Bu hususlar göz önüne alındığında, Denklem 3.1.4.12

$$\frac{dw}{dt} = hs - kw, \quad (3.1.4.13)$$

şekilde yeniden yazılabilir. Burada:

h = emilen yüzey birimi başına kütle sentez oranı

s = organizmanın etkili emilen yüzeyi

k = birim kütle başına kütle parçalanma oranı olarak ifade edilir.

Organizmanın izometrik olarak büyüdüğü ve sabit bir özgül ağırlığa sahip olduğu varsayılırsa s ve w 'yi organizmanın doğrusal boyutu l açısından $s = pl^2$ ve $w = ql^3$ (p ve q sabitlerdir) olarak ifade edebiliriz. Bundan dolayı, şu sonuç çıkar:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{d}{dt}(ql^3) = 3ql^2 \frac{dl}{dt}$$

ve böylece, Denklem 3.1.4.12'den,

$$\frac{dl}{dt} = \frac{hpl^2}{3ql^2} - \frac{kql^3}{3ql} = \frac{hp}{3q} - \frac{kl}{3} \quad (3.1.4.14)$$

olur. Buradan; $hp/3q = E$ ve $k/3 = K$ olarak ayarlandığında, Denklem 3.1.4.14 şu hale gelir:

$$\frac{dl}{dt} = E - Kl$$

veya

$$\frac{dl}{E - Kl} = dt$$

olur. Denklem 3.1.4.15 'i çözümleyelim

$$l_t = \frac{E}{K} - \left(\frac{E}{K} l_0 \right) e^{-Kt}, \quad (3.1.4.15)$$

burada l_0 organizmanın $t=0$ anındaki uzunluğudur. $t \rightarrow +\infty, l_t \rightarrow E/K = L_\infty$ organizmanın (normal koşullar altında) mümkün olan maksimum uzunluğuna dikkat

edin. Yani organizma yaşlandıkça uzunluğu asimptotik olarak L_∞ 'a kadar artar. Bu tartışma altında Denklem 3.1.4.15 şu hale gelir

$$l_t = L_\infty - (L_\infty - L_0)e^{-Kt}. \quad (3.1.4.16)$$

Denklem 3.1.4.16 verildiğinde, ağırlık (w) için ilişkili denklem, $w = ql^3$ 'ten şu şekilde olur:

$$w_t = \left\{ W_\infty^{1/3} - (W_\infty^{1/3} - W_0^{1/3})e^{-Kt} \right\}^3, \quad (3.1.4.17)$$

burada W_∞ ve W_0 sırasıyla L_∞ ve L_0 'a karşılık gelen ağırlıklardır. Şimdi Denklem 3.1.4.17' de $W_t = 0$ olarak belirlersek ve $t = t_0$ kabul edersek, şu sonuç çıkar:

$$W_0 = W_\infty (1 - e^{Kt_0})^3.$$

Daha sonra bu ifadenin Denklem 3.1.4.17' ye ikame edilmesiyle şu elde edilir:

$$w_t = W_\infty (1 - e^{-K(t-t_0)})^3.$$

3.1.5 Türetilen Schnute Model

Sırasıyla Denklemler 2.50 ve 2.51 veya

$$k = \frac{1}{Y_t} \frac{dY_t}{dt} \quad \text{ve} \quad \frac{1}{k} \frac{dk}{dt} = -(\alpha + bk),$$

verilsin, $dY_t / dt = kY_t$ 'yi t 'ye göre farklılaştırılalım ve böylece

$$\begin{aligned} \frac{d^2 Y_t}{dt^2} &= Y_t \frac{dk}{dt} + k \frac{dY_t}{dt} \\ &= Y_t [-k(\alpha + bk)] + \frac{1}{Y_t} \left(\frac{dY_t}{dt} \right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= Y_t \left[-\frac{1}{Y_t} \frac{dY_t}{dt} \left(a + b \frac{1}{Y_t} \frac{dY_t}{dt} \right) \right] + \frac{1}{Y_t} \left(\frac{dY_t}{dt} \right)^2 \\
&= -\frac{dY_t}{dt} \left(a + b \frac{1}{Y_t} \frac{dY_t}{dt} \right) + \frac{1}{Y_t} \left(\frac{dY_t}{dt} \right)^2 \\
&= \left[-a + (1-b) \frac{1}{Y_t} \frac{dY_t}{dt} \right] \frac{dY_t}{dt}. \tag{3.1.5.1}
\end{aligned}$$

elde ederiz. Denklem 3.1.5.1'i şu şekilde yeniden yazalım:

$$\frac{1}{dY_t / dt} \frac{d^2 Y_t}{dt^2} = \left[-\alpha + (1-b) \frac{1}{Y_t} \frac{dY_t}{dt} \right]. \tag{3.1.5.2}$$

Daha sonra bu ifadenin entegre edilmesi şunu verir:

$$\ln \left(\frac{dY_t}{dt} \right) = -\alpha t + (1-b) \ln Y_t + \ln C_0, \text{ (ln C sabiti)}$$

$$\frac{dY_t}{dt} = C_0 e^{-\alpha t} Y_t^{1-b},$$

$$Y_t^{b-1} dY_t = C_0 e^{-\alpha t} dt,$$

$$\frac{1}{b} Y_t^b = C_0 \left(-\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha t} \right) + C_1 \quad (C_1 \text{ sabit})$$

veya

$$\begin{aligned}
Y_t^b &= -\frac{\alpha}{b} C_0 e^{-\alpha t} + b C_1 \\
&= b C_1 \left(1 - \frac{C_0}{\alpha C_1} e^{-\alpha t} \right) \tag{3.1.5.3}
\end{aligned}$$

olur ve daha sonra

$$Y_t = (bC_1)^{\frac{1}{b}} \left(1 - \frac{C_0}{\alpha C_1} e^{-\alpha t} \right)^{1/b} \quad (3.1.5.4)$$

elde edilir. O zamandan sonra

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Y_t = (bC_1)^{1/b} = Y_\infty,$$

Denklem 3.1.5.4 şu şekilde yeniden yazılabilir:

$$Y_t = Y_\infty (1 - \delta e^{-\alpha t})^{1/b}, \quad (3.1.5.5)$$

ve burada $\delta = C_0 / \alpha C_1$ dır.

Schnute'yi (Denklem 2.55) elde etmek için Denklem 3.1.5.3'ü kullanarak şunu elde edelim:

$$Y_1^b = bC_1 - \frac{b}{\alpha} C_0 e^{-\alpha t_1},$$

$$Y_2^b = bC_1 - \frac{b}{\alpha} C_0 e^{-\alpha t_2}$$

Böylece

$$Y_2^b - Y_1^b = -\frac{b}{\alpha} C_0 (e^{-\alpha t_2} - e^{-\alpha t_1})$$

olur. Daha sonra

$$(Y_2^b - Y_1^b) e^{\alpha t_1} = \frac{b}{\alpha} C_0 (1 - e^{-\alpha(t_2 - t_1)})$$

ve Denklem 3.1.5.3 aracılığıyla,

$$(Y_t^b - Y_1^b) e^{\alpha t_1} = \frac{b}{\alpha} C_0 (1 - e^{-\alpha(t - t_1)})$$

olur. Son iki denklemden $\frac{b}{a} C_0$ 'ı ortadan kaldırmak, şunu elde etmemizi sağlar:

$$Y_t^b - Y_1^b + (Y_2^b - Y_1^b) \frac{1 - e^{-\alpha(t-t_1)}}{1 - e^{-\alpha(t_2-t_1)}}$$

veya

$$Y_t = \left[Y_1^b + (Y_2^b - Y_1^b) \frac{1 - e^{-\alpha(t-t_1)}}{1 - e^{-\alpha(t_2-t_1)}} \right]^{1/b} \quad (3.1.5.6)$$

dır.

3.1.6 Türetilen McDill-Amateis Model

McDill ve Amateis, boyutsal olarak uyumlu bir denklemin her iki tarafındaki argümanlarla ilişkili boyutların birbirini iptal etmesini sağlayan boyut analizini kullanarak büyüme denklemlerini türetirler. Süreç ilk önce modele dahil edilecek ilgili değişkenleri belirler.

Tablo 3.1.6.1 Değişkenler ve Boyutlar

Değişken	H	A	dH / dA	H_∞
Boyut	l	t	l/t	l

Daha sonra bu değişkenler boyutsuz ürünler $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_k$, olarak gruplandırılır ve örtük fonksiyon $f(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_k) = 0$, ilgili değişkenler kümesini içeren tüm boyutsal olarak uyumlu denklemleri tasvir eder.

İlgili değişkenlerin kümesi ve bunlarla ilişkili boyutlar Tablo 3.6.1'de görülmektedir. Burada $l =$ uzunluk ve $t =$ zamandır. Daha sonra ikinci adım, iki boyutsuz ürün oluşturmamızı sağlar:

$$\Pi_1 = \frac{dH}{dA} \frac{A}{H}, \Pi_2 = \frac{H}{H_\infty};$$

ve bu iki boyutsuz ürünün genel fonksiyonu

$$f(\Pi_1, \Pi_2) = f\left(\frac{dH}{dA} \frac{A}{H}, \frac{H}{H_\infty}\right) = 0.$$

şeklindedir. Kapalı fonksiyon teoreminin altında yatan koşullar gereği, şu şekilde bir ϕ fonksiyon vardır:

$$\frac{dH}{dA} \frac{A}{H} = \phi\left(\frac{H}{H_\infty}\right). \quad (3.1.6.1)$$

ϕ nasıl belirtilmelidir? Büyüme denkleminde H_∞ değişkeninin dahil edilmesi, ağaçların tahmini boy büyümesinin ağaç yüksekliği H, H_∞ 'a ulaştığında sifira yaklaşmasını zorunlu kılar. Bu özelliği gösteren ϕ 'nin en basit fonksiyonel biçimi şudur:

$$\phi\left(\frac{H}{H_\infty}\right) = \left(1 - \frac{H}{H_\infty}\right); \quad (3.1.6.2)$$

yani, $\phi \rightarrow 0$ çünkü $H / H_\infty \rightarrow 1$. Denklem 3.1.6.2'yi Denklem 3.1.6.2'ye ikame etmek bize şunu elde etmemizi sağlar

$$\frac{dH}{dA} = \alpha \left(\frac{H}{A}\right) \left(1 - \frac{H}{H_\infty}\right). \quad (3.1.6.3)$$

Açıkça $H \rightarrow H_\infty$ olduğunda yükseklik artışı sifira gider. Denklem 3.1.6.3'ü şu şekilde yeniden yazılırsa;

$$\frac{dH}{H(H_\infty - H)} = \left(\frac{\alpha}{H_\infty}\right) \frac{dA}{A}$$

elde edilir. Daha sonra

$$-\frac{1}{H_\infty} \ln \left(\frac{H_\infty - H}{H} \right) = \left(\frac{\alpha}{H_\infty} \right) \ln A + \ln C, \text{ (lnC sabiti)}$$

$$\left(\frac{H_\infty - H}{H} \right) = C^{-H_\infty} A^{-\alpha},$$

$$H = \frac{H_\infty}{1 + C^{-H_\infty} A^{-\alpha}} \quad (3.1.6.4)$$

olur. Denklem 3.1.6.4'ün (A_0, H_0) 'da değerlendirilmesi

$$H_0 = \frac{H_\infty}{1 + C^{-H_\infty} A_0^{-\alpha}},$$

olur. Buradan

$$C^{-H_\infty} = \left(\frac{H_\infty}{H_0} - 1 \right) A_0^\alpha$$

elde edilir. Daha sonra bu ifadenin Denklem 3.1.6.4'e ikame edilmesi McDill–Amateis boy-büyüme denkleminin son biçimini verir veya

$$H = \frac{H_\infty}{1 - \left(1 - \frac{H_\infty}{H_0} \right) \left(\frac{A_0}{A} \right)^\alpha}$$

olur.

3.1.7 Türetilen Sloboda Model

Aşağıdaki diferansiyel denklemden başlayarak

$$\frac{dY_t}{dt} = \ln \left(\frac{Y_\infty}{Y_t} \right) b_1 Y_t t^{-b_2}, \quad (3.1.7.1)$$

Denklem 3.1.7.1'i şu şekilde yeniden yazılırsa;

$$\frac{dY_t}{\ln(Y_t / Y_\infty) Y_t} = -b_1 t^{-b_2} dt \quad (3.1.7.2)$$

olur.

Daha sonra

$$\ln\left(\ln\left(\frac{Y_t}{Y_\infty}\right)\right) = \frac{-b_1}{-b_2+1} t^{-b_2+1} + \ln C \quad (\ln C \text{ sabiti})$$

olur ve böylece,

$$\ln\left(\frac{Y_t}{Y_\infty}\right) = C e^{(b_1/(b_2-1))t^{-b_2+1}},$$

$$\frac{Y_t}{Y_\infty} = e^{C e^{(b_1/(b_2-1))t^{-b_2+1}}},$$

veya

$$Y_t = Y_\infty e^{C e^{(b_1/(b_2-1))t^{-b_2+1}}}$$

$$= Y_\infty e^{-\alpha e^{-\beta t^\gamma}}, \quad (3.1.7.3)$$

burada $-\alpha = C$, $-\beta = b_1 / (b_2 - 1)$ ve $\gamma = -b_2 + 1$ ulaşılır.

3.1.8 Genelleştirilmiş Bir Michaelis–Menten Büyüme Denklemi

Bu bölümde, (hayvan) büyümesini tanımlamak için esnek bir fonksiyonel form sergileyen ve değişken bir dönüm noktasına sahip olması nedeniyle sigmoidal ve azalan getiri davranışı üretebilen genelleştirilmiş bir Michaelis-Menten tipi denklemi ele alıyoruz (Lopez ve diğerleri, 2000). Kapalı bir sistem (girdi veya çıktı yok) varsayıldığında, birim zaman başına (örneğin hafta cinsinden) biyokütledeki (Y , kg) artış, orantı faktörü μ (hafta⁻¹) ile substrat seviyesi S (kg) ile orantılıdır veya

$$\frac{dY}{dt} = \mu S \quad (3.1.8.1)$$

şeklindedir. μ 'nin zamanla aşağıdakilere göre değiştiği varsayılırsa:

$$\mu = \frac{ct^{c-1}}{k^c + t^c}, \quad (3.1.8.2)$$

ve burada c (boyutsuz) ve k (wk) pozitif sabitlerdir. ($c > 0$ ve $k > 0$ koşulları, k 'nin yarı-maksimum büyümenin elde edildiği zamanı temsil ettiği $\mu > 0$ 'ı garanti eder.)

Denklem 3.1.8.2'de, μ $c \leq 1$ için sürekli olarak azalabilir; $c > 1$ olduğunda maksimuma ulaşmak için artabilir ve sonra tekrar azalabilir.

Denklem 3.1.8.2'nin Denklem 3.1.8.1'e ikamesi şunu verir:

$$\frac{dY}{dt} = \mu S = \left(\frac{ct^{c-1}}{k^c + t^c} \right) (Y_\infty - Y),$$

burada $S = Y_\infty - Y$. O zaman bu ifadeden,

$$\int_{Y_0}^Y \frac{dY}{Y_\infty - Y} = \int_0^t \left(\frac{ct^{c-1}}{k^c + t^c} \right) dt$$

ve entegre edildiğinde,

$$-\ln(Y_\infty - Y) \Big|_{Y_0}^Y = \ln(k^c + t^c) \Big|_0^t,$$

$$-\ln(Y_\infty - Y) + \ln(Y_\infty - Y_0) = \ln(k^c + t^c) - \ln k^c,$$

$$\frac{Y_\infty - Y_0}{Y_\infty - Y} = \frac{k^c + t^c}{k^c},$$

$$Y = \frac{Y_0 k^c + Y_\infty t^c}{k^c + t^c} \quad (3.1.8.3)$$

genelleştirilmiş Michaelis-Menten büyüme fonksiyonu elde edilir. Bu fonksiyonun bir dönüm noktası (t^*, Y^*) vardır ve bu nokta $d^2Y/dt^2 = 0$ olduğunda meydana gelir

($d^3Y/dt^3 \neq 0$ olması koşuluyla)

$$t^* = k \left(\frac{c-1}{c+1} \right)^{1/c}, c > 1, \quad (3.1.8.4)$$

ve

$$Y^* = \left[\left(1 + \frac{1}{c} \right) \right] Y_0 + \left(1 - \frac{1}{c} \right) Y_\infty / 2 \quad (3.1.8.5)$$

olur. Ek olarak:

1. $c=1$ olduğunda, $\mu = 1/(t+k)$ elde ederiz, burada k , μ_{\max} 'ın tersidir. Sonra

$$Y = \frac{Y_0 k + Y_\infty t}{k + t} \quad (3.1.8.6)$$

elde edilir. Burada Denklem 3.1.8.6 dikdörtgen bir hiperboldür ve Denklem 3.1.8.6'da $Y_0 = 0$ ise Denklem 2.57 biçiminde bir ifade elde ederiz; Michaelis-Menten denklemi, sübstrat konsantrasyonunun zamanla değiştirilmesiyle büyüme hızı sürekli azalıyor ve denklemde bir dönüm noktası yoktur.

2. Eğer $\mu = \text{sabit}$ ise o zaman Denklem (1.H.1) ($S = Y_\infty - Y$ ile) şu şekilde entegre olur:

$$Y = Y_\infty - (Y_\infty - Y) e^{-\mu t},$$

mono moleküler büyüme fonksiyonu sürekli olarak azalan ve dönüm noktası olmayan bir fonksiyondur.

4. SONUÇ ve ÖNERİLER

Büyüme fonksiyonlarının matematiksel bir limiti vardır. Bu çalışmamızda büyüme eğrilerinin tanıtımına ve bunların nerelerde kullanılabileceği hakkında bilgiler vermeye çalıştık. Eğrilerin bazılarının nasıl türedikleri ile ilgili bazı eksiklikler olabilir. Bu çalışmada matematiksel eşitliklerden çok bu eğrilerin nerelerde kullanılabileceğini araştırmak temel noktamızdı. Uygun bir büyüme modeli seçebilmek için bu modelleri tanımak önemlidir. Hangi veriler hangi modellerde kullanılabilir? Hangi büyüme tipi hangi canlı ile ilgilidir? Bunların bilinmesi ve belirlenen denklemler yardımı ile uygulanması önemlidir. Yorum yapabilmek bir matematikçi için problem çözebilmek kadar önemlidir. Belli bir büyüme eğrisi bazen basit bir şekilde verilerin uyumuna bakılarak da seçilir. Bazen bu seçim için rasgele tercih yapılabilir ya da başka bir model de kullanılabilir. Böylelikle farklı disiplinlerde farklı sonuçların çıktığı da gözlenebilir. Farklı bilimlerde hiç kullanılmamış modelleri denemek ayrı bir çalışma konusu olabilir, bu daha sonraki çalışmalar için yol gösterici olabilir. Büyüme modellemelerinde anlamlı parametreler vardır. Bu fonksiyonel ilişki büyüme modelinde büyüme oranındaki farklı denklemlerden gelen bilgidir. En uygun model seçimi esneklik ve karmaşıklık arasında bir ilişkidir; buna, Lojistik model ve Gompertz eğrileri kısa serilerde karmaşık yapıdadır ve birçok parametresi örnek verilebilir. Bazı deneylerde anlamsız parametre tahminleri üretmenin ortak bir sonuca varmada mümkün olmadığı düşüncesi oluşabilir. En düşük düzeyde parametreler ile parametrik fonksiyonlar oluşturmaya çalışmak kesintisiz bir süreçtir. Ve büyüme bilgilerine en uygun olan organizma ve büyüme periyodudur. Bu çalışma, bazı büyüme modellerinin özellikle kendine has konularda işleminin belki de temel nedenin sırf yapılan çalışmalarını rahatlatmak amacıyla türetildiğini gösterdi bize. Mesela canlı ağırlığında sınırlı büyümenin sık sık Bertalanffy büyüme eğrisine uyması gibidir. Bunun yanı sıra en çok kullanılan büyüme eğrisi Gompertz (1825)'in sigmoidal lojistik eğrisinin bilimsel çalışmalardaki eğri tiplerine uyduğu da gözlemlenebilir. Genellikle Brody'nin üslü büyüme eğrisi kullanılır. Büyüme eğrisi olarak üslü eğri dışındaki büyüme eğrilerine bakarsak tek düze bir gidiş olması, büyüme modeli seçimi yaparken bizi net sonuçlara ulaştırmayabilir.

5. KAYNAKLAR

- Bertalanffy, L.V. (1941). Untersuchungen über die Gesetzmässigkeit des Wachstums. VII. *Stoffwechselformen und Wachstumstypen.*, 61.
- Bertalanffy, L.V. (1942). Theoretische Biologie. vol. II: Stoffwechsel, Wachstum. Berlin: Gebrüder Borntraeger.
- Bertalanffy, L. V. (1951). Metabolic Types and Growth Types. *Am Nat*, 85(821): 111-117.
- Bertalanffy, L. V. (1957). Quantitative Laws in Metabolism and Growth. *Quarterly Review of Biology*, 32: 217–231.
- Bottazzi, G. & Brody, S., (1945). Bioenergetics and Growth. New York: Reinhold Publishing Corp.
- France, J. & Thornley, J. (1984). Mathematical Models in Agriculture. Butterworths, London
- Gompertz, B. (1825). On the Nature of the Function Expressive of Human Mortality, and on a New Mode to Determining the Value of Life Contingencies. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 115: 513–585.
- Guldberg, C.M. & Waage, P. (1879). Concerning Chemical Affinity. *Erdmann's Journal für Practisch Chemie* 127: 69–114.
- Hill, A.V. (1910). The Possible Effects of the Aggregation of the Molecules of Haemoglobin on its Dissociation Curves. *Journal of Physiology* 40 (Suppl.): 1–22.
- Hill, A.V. (1913). The Combinations of Haemoglobin with Oxygen and with Carbon Monoxide. *Biochemical Journal* 7: 472–480.
- Hossfeld, J.W. (1822). Mathematik für Forstmänner, Ökonomen und Cameralisten. Gotha, 4. Bd. 5. 310.
- Janoschek, A. (1957). Das Reaktionskinetische Grundgesetz und seine Beziehungen zum Wachstums und Ertragsgesetz. *Statistische Vierteljahresschrift*. 10: 25–37.
- Johnson, N.L. & Kotz, S. (1970). Continuous Univariate Distributions – 1. New York: John Wiley & Sons, Inc.
- Johnson, P.C., Conway, C. & Kattuman, P. (1999). Small Business Growth in the Short Run. *Small Business Economics* 12 (2): 103–112.
- Levakovic, A. (1935). Analytical Form of Growth Laws. *Glasnik za Sumarske Poslove (Zagreb)* 4: 189–282.
- Lundqvist, B. (1957). On the Height Growth in Cultivated Stands of Pine and Spruce in Northern Sweden. *Meddelanden från Statens Skogsforskningsinstitut* 47: 1–64.

- McDill, M.E. & Amateis, R.L. (1992). Measuring Forest Site Quality Using the Parameters of a Dimensionally Compatible Height Growth Function. *Forest Science* 38 (2): 409–429.
- Michaelis, M. & Menten, M.L. (1913). Die Kinetik der Invertinwirkung. *Biochemistry Zeitung*. 49: 333.
- Morgan, P.H., Mercer, L.P. & Flodin, N.W. (1975). Gerecht Model for Nutritional Responses of Higher Organisms. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 72: 4327–4331.
- Panik, M. (2009). Regression Modeling: Methods, Theory, and Computations with SAS. Boca Raton: CRC Press.
- Richards, L. (1931). Capillary Conduction of Liquids Through *Porous Mediums*. *Physics* 1: 318–333.
- Richards, F.J. (1959). A Flexible Growth Function for Empirical Use. *Journal of Experimental Botany* 10: 290–300.
- Schnute, J.C. (1981). A Versatile Growth Model with Statistically Stable Parameters. *Canadian Journal of Fisheries and Aquatic Sciences* 38: 1128–1140.
- Schultz, J.C. (1988). Plant Responses Induced by Herbivores. *Trends in Ecology and Evolution* 3: 45–49.
- Schumacher, F.X. (1939). A New Growth Curve and its Application to Timber Yield Studies. *Journal of Forestry* 37: 819–820.
- Sloboda, B. (1971a). [Investigation of Growth Processes Using First-Order Differential Equations.] *Mitteilungen der Baden-Württembergischen Forstlichen Versuchs und Forschungsanstalt*. Heft 32.
- Sloboda, B. (1971b). Zur Darstellung von Wachstumprozessen mit Hilfe von Differentialgleichungen erster Ordnung. *Mitteilungen der Baden-Württembergischen Forstlichen Versuchs und Forschungsanstalt*. Baden-Württemberg: Baden-Württembergische Forstliche Versuchs- und Forschungsanstalt.
- Southman, C.M. & Ehrlich, J. (1943). Effects of Extract of Western Red-Cedar Heartwood on Certain Wood-Decaying Fungi in Culture. *Phytopathology* 33: 517–524.
- Stannard, C.J., Williams, A.P. & Gibbs, P.A. (1985). Temperature/Growth Relationship for Psychotropic Food-Spoilage Bacteria. *Food Microbiology* 2: 115–122.
- Thimann, K.V. (1956). Promotion and Inhibition: Twin Themes in Physiology. *American Naturalist*. 90: 145–162.
- Weibull, W. (1951). A Statistical Distribution Function of Wide Applicability. *Journal of Applied Mechanics* 18: 291–297.
- Yoshida, S. (1981). *Fundamentals of Rice Crop Science*. Los Banos: International Rice Research Institute.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	Mustafa ŞİMŞEK
Doğum Yeri	
Doğum Tarihi	
Uyruğu	<input checked="" type="checkbox"/> T.C. <input type="checkbox"/> Diğer:
Telefon	
E-Posta Adresi	
Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	Karadeniz Teknik Üniversitesi
Fakülte	Fatih Eğitim Fakültesi
Bölümü	İlköğretim Matematik Öğretmenliği
Mezuniyet Yılı	28.09.2007