



**T.C.
AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**KENMOTSU MANİFOLDLARDAN RIEMANN MANİFOLDLARA
YARI SLANT $\xi^\perp$ – RIEMANN SUBMERSİYONLAR**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SEHER KÜR

ŞUBAT

SEHER KÜR

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ŞUBAT 2025

**KENMOTSU MANİFOLDLARDAN RİEMANN MANİFOLDLARA YARI
SLANT $\xi^\perp$ – RİEMANN SUBMERSİYONLAR**

Seher KÜR

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

Danışman

Doç. Dr. Ramazan SARI

**AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

ŞUBAT 2025

Yüksek Lisans Tezi Kabul ve Onay Sayfası

Seher KÜR tarafından hazırlanan “Kenmotsu Manifoldlardan Riemann Manifoldlara Yarı-Slant $\xi^\perp$ –Riemann Submersiyonlar” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. Ramazan SARI

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Başkan: Prof. Dr. Mehmet Akif AKYOL

Matematik Anabilim Dalı, Uşak Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Üye: Doç. Dr. Zehra ÖZDEMİR

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Tez Savunma Tarihi: 06/02/2025

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Doç. Dr. Ümit YILDIRIM

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
 - Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
 - Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
 - Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
 - Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,
- bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Seher KÜR

06.02.2025

KENMOTSU MANİFOLDLARDAN RİEMANN MANİFOLDLARA YARI-SLANT
 $\xi^\perp$ -RİEMANN SUBMERSİYONLAR
(Yüksek Lisans Tezi)

Seher KÜR

AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Şubat 2025

ÖZET

Bu tez çalışmasında yarı invaryant $\xi^\perp$ -Riemann submersiyonların bir genellemesi olan yarı slant $\xi^\perp$ -Riemann submersiyonlar çalışıldı. Kenmotsu Manifolddar için yarı slant $\xi^\perp$ -Riemann submersiyon tanımlandı ve örneklerle incelendi. Yarı slant $\xi^\perp$ -Riemann submersiyon tanımından ortaya çıkan distribüsyonların ve submersiyon dönüşümünün geometrisi incelendi. Ayrıca Kenmotsu space formun yarı slant $\xi^\perp$ -Riemann submersiyonlar için distribüsyonların eğrilik özellikleri araştırıldı ve bu distribüsyonların Einstein olma şartları elde edildi.

Sayfa Adedi : 55
Anahtar Kelimeler : Riemann submersiyon, Kenmotsu manifold, Yarı-slant submersiyon
Danışman : Doç. Dr. Ramazan SARI

SEMI-SLANT $\xi^\perp$ -RIEMANNIAN SUBMERSIONS FROM KENMOTSU
MANIFOLDS TO RIEMANNIAN MANIFOLDS

(M. Sc. Thesis)

Seher KÜR

AMASYA UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

February 2025

ABSTRACT

In this thesis, semi-slant $\xi^\perp$ -Riemannian submersions, which are a generalization of semi invariant $\xi^\perp$ -Riemannian submersions, were studied. Semi-slant $\xi^\perp$ -Riemannian submersions for Kenmotsu manifolds was defined and examined with examples. The geometry of the distribution and submersion transformations resulting from the semi-slant $\xi^\perp$ -Riemannian submersions definition was examined. In addition the curvature properties of the distributions for the semi-slant $\xi^\perp$ -Riemannian submersions of the Kenmotsu space form were investigated and the Einstein conditions for these distributions were obtained.

Number of pages : 55

Keywords : Riemannian submersion, Kenmotsu manifold, Semi-slant submersion

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Ramazan SARI

ÖN SÖZ VE TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanma aşamasında, çalışmalarım süresince desteklerini esirgemeyen, çalışmalarımda bana yön veren ve tez yazımım sırasında değerli zamanını ayırarak yardım eden tez danışmanım sayın Doç. Dr. Ramazan SARI'ya teşekkürü borç bilirim. Bu dönem boyunca her konuda desteklerini esirgemeyen manevi gücüm eşim Adem KÜR ile çocuklarım İrem ve Eren Şükrü'ye, annem ve babama minnetlerimi belirtmek isterim. Aynı zamanda bu süreçte ve ders dönemim boyunca fikir alışverişlerinde bulunduğum sınıf arkadaşlarım ve arkadaşım Leman KARABIYIK'a teşekkür ederim.



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET.....	iv
ABSTRACT.....	v
ÖN SÖZ VE TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	viii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	3
2.1. Tanımlar	3
2.2. İmmersiyon	5
2.3. Submersiyon	6
2.4. Hemen Hemen Değme Metrik Manifoldlar	10
3. KENMOTSU MANİFOLDLAR İLE $\xi^\perp$ - RİEMANN SUBMERSİYON	13
4. LİFLERİN GEOMETRİSİ	18
5. SUBMERSİYONLARIN GEOMETRİSİ	41
6. KENMOTSU SPACE FORM İLE $\xi^\perp$ -RİEMANN SUBMERSİYON	45
7. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	52
KAYNAKLAR	53
ÖZGEÇMİŞ	56

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, yanda açıklamaları verilmek üzere aşağıda listelenmiştir.

Simgeler	Açıklama
M	Diferensiyellenebilir manifold
g	Riemann metriği
∇	Lineer konneksiyon
ψ_*	Türev dönüşümü
$[,]$	Lie braket operatörü
V	Dikey distribüsyon
$\mathcal{H}$	Yatay distribüsyon
η	1-form
φ	(1,1) tipinde tensör alanı
Φ	2-form

1. GİRİŞ

Bilim ve teknolojiadaki gelişmelerin sonucunda, geometri zamanla çeşitli alanlara ayrılmıştır. Bu alanlardan birisi olan diferansiyel geometri, matematiğin türev işlemini kullanarak geometrik problemleri çözen, diferansiyel hesaplamaların geometriye uygulandığı bir kolu olmuştur. Eğriler, yüzeyler ve manifoldlar, modern matematiğin en aktif kullanım alanlarından biri olan diferansiyel geometrinin incelediği temel konuların başında gelmektedir. Manifoldlar arasında diferansiyellenebilir dönüşümler tanımlanarak, manifoldların geometrik yapılarını incelemek ve karşılaştırmak mümkün olmuştur. Bu sayede manifoldların temel özellikleri ve geometrisi daha anlaşılır hale gelmiştir.

Riemann manifoldların geometrik özelliklerini karşılaştırmak için kullanılan dönüşümlerin çeşitliliğinin az olması önemli bir eksiklik olarak karşımıza çıkmaktadır.

Riemann geometride, izometrik immersiyonlar ve Riemann submersiyon dönüşümleri olmak üzere iki temel dönüşüm vardır. İki manifold arasındaki izometrik immersiyon dönüşümü küçük boyuttan daha yüksek boyuta tanımlanırken, Riemann submersiyon dönüşümü ise yüksek boyutlu manifolddan düşük boyutlu manifolda tanımlanır.

Submersiyon teorisinde İzometrik immersiyonların karşılığı olan Riemann submersiyonlar, O'Neill (O'Neill, 1966) ve Gray (Gray,1967) tarafından 1966 ve 1967 yıllarında ,birbirinden bağımsız olarak çalışılmıştır . Günümüzde ise, O'Neill in teorisi daha çok kullanılmaktadır. Temel amacı negatif eğrilikli manifoldları incelemek olan Riemann submersiyonların, diğer manifoldların özelliklerini de incelemede kullanışlı olduğu görülmüştür. Manifoldların özelliğine göre birçok farklı Riemann submersiyon tanımı yapıldı. Anti invaryant (Lee,2013), yarı invaryant (Akyol, Sarı ve Aksoy, 2017), slant (Erken ve Murathan, 2016), yarı slant (Akyol,2017), quaternionik (Ianus ,Mazzocco and Vilcu,2008), hemi slant (Akyol ve Gündüzalp, 2016), ve pointwise slant (Lee ve Şahin,2014) Riemann submersiyonlar da bulunmaktadır. Riemann submersiyonlar fizikte Kaluza-Klein teoride, süper kütle çekim, sicim ve Yung Mills teorilerde kullanılmaktadır (Ianus ve Visinescu,1987).

Son yıllarda anti invaryant $\xi^\perp$ –Riemann submersiyonların bir genellemesi olarak Akyol

ve arkadaşları hemen hemen kontak metrik manifoldlardan yarı invaryant $\xi^\perp$ –Riemann submersiyon kavramını tanımlayarak bu tür dönüşümlerin geometrisini araştırdılar (Akyol, Sarı ve Aksoy, 2017).

Negatif eğrilikli manifoldları inceleyen Bishop ve O'Neill olup, warped çarpım manifoldları olarak isimlendirdikleri yeni bir çalışma alanını ortaya çıkarttılar. Buradan hareketle S. Tanno ise hemen hemen değme manifoldları sınıflamayı başarmıştır. Bir hemen hemen değme manifold N de ξ karakteristik vektör alanını içeren düzlem kesitinin kesitsel eğriliği sabit ve c olmak üzere,

1. $c > 0$ ise N sabit kesitsel eğrilikli Sasakian manifoldtur,
2. $c = 0$ ise N sabit kesitsel eğrilikli bir Kaehler manifolddur,
3. $c < 0$ ise N reel ile kompleks düzlemin warped çarpımı

olarak yazılır (Tanno, 1969).

Kenmotsu buradaki üçüncü durumu 1972’de incelemiş ve Sasakian olmayan yeni bir yapı tanımlamıştır. Bu yapının, bir Kaehler manifold ile bir açık aralığın warped çarpımı olarak yazılabildiğini göstermiştir. 1981’de, Kenmotsu’nun tanımladığı bu yeni yapı Janssens ve Vanhecke tarafından Kenmotsu manifoldu olarak isimlendirilmiştir.

Bu tez çalışmasında ilk defa Kenmotsu Manifoldlardan Riemann manifoldlara yarı slant $\xi^\perp$ –Riemann submersiyonlar çalışılmıştır.

Tezin ikinci bölümünde temel kavramlar ele alındı. Üçüncü bölümünde bir Kenmotsu Manifolddan bir Riemann manifoldda tanımlı yarı slant $\xi^\perp$ –Riemann submersiyon tanımlandı ve örneklerle açıklandı. Dördüncü bölümde tanımdan ortaya çıkan distribüsyonların geometrik özellikleri incelendi. Beşinci bölümde tanımlanan Submersiyon dönüşümünün Total Umbilikliği ve Total Geodezikliği ele alındı. Son olarak bir Kenmotsu space formun yarı slant $\xi^\perp$ –Riemann submersiyon için eğrilik özellikleri elde edildi ve yarı slant $\xi^\perp$ –Riemann submersiyon tanımından ortaya çıkan distribüsyonların total geodezik olması durumunda Einstein oldukları gösterildi.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölüm beş alt bölümden oluşmaktadır. İlk kısımda Riemann submersiyon ve Kenmotsu manifold tanımları verilmiştir. İkinci bölümde Riemann manifoldların altmanifoldları tanımlanarak immersiyon ve izometrik immersiyon kavramları kısaca açıklanmıştır. Üçüncü bölümde submersiyon ifadesi tanımlanmıştır. Dördüncü bölümde hemen hemen değme metrik manifoldlara yer verilmiştir. Son bölümde ise Kenmotsu manifoldu ve Kenmotsu manifoldlarının altmanifoldları incelenmiştir.

2.1. Tanımlar

2.1.1. Tanım M , diferansiyellenebilir bir manifold ve M de tanımlı C^∞ vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olsun, C^∞ - fonksiyonlarının uzayı ise $C^\infty(M, \mathbb{R})$ olmak üzere,

$$g: \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R}) \quad (2.1)$$

dönüşümü 2-lineer, simetrik ve pozitif tanımlı ise g ye M üzerinde bir Riemann metriği ve (M, g) ikilisine de Riemann manifoldu denir (Hacısalıhoğlu, 1983).

2.1.2. Tanım M ve N iki Riemann manifoldları arasında

$$\psi: M \rightarrow N \quad (2.2)$$

bir C^∞ - dönüşümünün türev dönüşümü

$$\psi_*: \chi(M) \rightarrow \chi(N) \quad (2.3)$$

şeklinde gösterilir. Bu dönüşümün her $u \in M$ noktasında

$$\psi_{*u}: T_u M \rightarrow T_{\psi(u)} N \quad (2.4)$$

lineer dönüşümünü vardır.

$$\psi_{*u}(V)(f) = V(f \circ \psi) \quad (2.5)$$

dönüşümünde, f bir fonksiyon ve V bir vektör alanı olmak üzere, bu dönüşüme ψ nin u noktasındaki türev dönüşümü denir (Yano ve Kon, 1984).

2.1.3. Tanım M bir diferansiyellenebilir manifold üzerinde iki vektör alanı W_1 ve W_2 olsun. $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ fonksiyonu ele alalım.

$$[\cdot] : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M) \quad (2.6)$$

için $[W_1, W_2]f = W_1(W_2f) - W_2(W_1f)$ şeklinde tanımlı $[\cdot]$ fonksiyonuna W_1 ve W_2 nin Lie (parantez) operatörü denir. Lie operatörü aşağıda verilen özellikleri sağlar (Yano ve Kon, 1984). $\forall W_1, W_2, L \in \chi(M)$ ve $\forall f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ olmak üzere,

- i. $[W_1, W_2] = -[W_2, W_1]$
- ii. $[aW_1 + bW_2, L] = a[W_1, L] + b[W_2, L]$
- iii. $[[W_1, W_2], L] + [[W_2, L], W_1] + [[L, W_1], W_2] = 0$
- iv. $[fW_1, gW_2] = f[W_1, W_2] + f(W_1g)W_2 - g(W_2f)W_1$

2.1.4. Tanım M , bir Riemann manifold ve M üzerinde vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olmak üzere,

$$\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M) \quad (2.7)$$

olmak üzere $\nabla(U, V) = \nabla_U V$ şeklinde tanımlı fonksiyon $\forall U, V, Z \in \chi(M)$ ve $\forall f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için

- i. $\nabla_{U+V} Z = \nabla_U Z + \nabla_V Z$
- ii. $\nabla_U (V + Z) = \nabla_U V + \nabla_U Z$
- iii. $\nabla_{fU} V = f \nabla_U V$
- iv. $\nabla_U fV = U[f]V + f \nabla_U V$

$$v. \quad [U, V] = \nabla_U V - \nabla_V U$$

$$vi. \quad Ug(V, Z) = g(\nabla_U V, Z) + g(V, \nabla_U Z)$$

şartları sağlanıyorsa ∇ ya M üzerinde bir Riemann konneksiyonu ∇_U ' ya da U ya göre kovaryant türev operatörü denir (Yano ve Kon, 1984).

2.1.5. Tanım M bir diferansiyellenebilir manifold olsun. $\forall W_1, W_2, W_3 \in \chi(M)$ için

$$R: \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M) \quad (2.8)$$

olmak üzere $R(W_1, W_2, W_3) = R(W_1, W_2)W_3 = \nabla_{W_1} \nabla_{W_2} W_3 - \nabla_{W_2} \nabla_{W_1} W_3 - \nabla_{[W_1, W_2]} W_3$ ye ∇ konneksiyonunun eğrilik tensörü denir (Yano ve Kon, 1984).

2.1.6. Tanım M bir diferansiyellenebilir manifold olsun. $\forall W_1, W_2, W_3, W_4 \in \chi(M)$ için

$$K: \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R}) \quad (2.9)$$

olmak üzere $K(W_1, W_2, W_3, W_4) = g(R(W_1, W_2)W_3, W_4)$ şeklinde verilen eşitliğe M üzerinde Riemann Chiristoffel eğrilik tensörü denir (Yano ve Kon, 1984).

2.1.7. Tanım M bir diferansiyellenebilir manifold ve g de M üzerinde tanımlı Riemann metriği olsun. Bir $p \in M$ için $T_p M$ tanjant uzayın iki boyutlu alt uzayı Π ise $\forall U, V \in \Pi$ tanjant vektörleri için

$$K(\Pi) = \frac{g(R(U, V)U, V)}{g(U, U)g(V, V) - g(U, V)^2} \quad (2.10)$$

eşitliğine Π düzleminin kesitsel eğriliği denir (Yano ve Kon, 1984).

2.2. İmmersiyon

2.2.1. Tanım M ve M' sırasıyla m ve n boyutlu iki Riemann manifoldu olmak üzere

$$f: M \rightarrow M' \quad (2.11)$$

bir C^∞ - dönüşümü için,

$$\text{boy} f_*(T_p M) = m \quad (2.12)$$

ise f nin $p \in M$ noktasındaki rankı m dir denir. Eğer $\text{boy}(M) = \text{rank}(f)$ ise f 'ye immersiyon denir. Burada M, M' nin immersed alt manifoldu olup f birebir ise imbedding denir. Burada M ye M' nün gömülen alt manifoldu ya da sadece altmanifoldu denir (Hacısalıhoğlu,1983).

2.2.2. Tanım (M, g) ve (M', g') iki Riemann manifold ve $f : M \rightarrow M'$ immersiyon olsun. $\forall W_1, W_2 \in \chi(M)$ için

$$g(W_1, W_2) = g'(f_*(W_1), f_*(W_2)) \quad (2.13)$$

eşitliğinde f_* 'ye izometrik immersiyon denir (Hacısalıhoğlu,1983).

2.2.3. Tanım M , bir Riemann manifold olsun. M nin her noktasındaki teğet uzayına, bir alt uzay karşılık getiren D dönüşümüne manifold üzerinde bir distribüsyon denir. (Duggal ve Bejancu.1996).

2.3. Submersiyon

2.3.1. Tanım (M, g_M) ve (N, g_N) sırasıyla m ve n boyutlu iki Riemann manifold olmak üzere,

$$\psi : (M, g_M) \rightarrow (N, g_N) \quad (2.14)$$

için $\text{rank} \psi_*(x) = \text{boy} N$ ise ψ 'ye $x \in M$ noktasında bir submersiyon denir. $\forall x \in M$ için ψ bir submersiyon ise ψ 'ye M üzerinde bir submersiyon denir.

m ve n pozitif doğal sayılar ve $m > n$ olmak üzere

$$\psi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (2.15)$$

dönüşümü için

$$\psi: (u_1, u_2, \dots, u_m) \rightarrow (u_1, u_2, \dots, u_n) \quad (2.16)$$

ile verilsin. Bir $u \in \mathbb{R}^m$

$$\psi_*(x) (v_1, v_2, \dots, v_m) = (v_1, v_2, \dots, v_n) \quad (2.17)$$

olduğundan ψ_* diferansiyeli örtendir. Dolayısıyla projeksiyon dönüşümü bir submersiyondur.

2.3.1. Örnek

$$\psi: \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (2.18)$$

$$(u_1, u_2, u_3, u_4) \rightarrow \left(\frac{u_1+u_2}{\sqrt{2}}, \frac{u_3+u_4}{\sqrt{2}}, \frac{u_5+u_6}{\sqrt{2}} \right) \quad (2.19)$$

dönüşümünde $\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$, $\mathbb{R}^6$ nın koordinat sistemini göstermektedir. Dönüşümün Jakobiye matrisi ψ_* olmak üzere,

$$\psi_* = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

elde edilir. Dolayısıyla $\text{rank } \psi_* = \text{boy} \mathbb{R}^3 = 3$ dir. Bu da ψ dönüşümünün bir submersiyon olduğunu gösterir.

2.3.2. Tanım M ve N sırasıyla m ve n boyutlu Riemann manifold ve $\psi: M \rightarrow N$ ye bir submersiyon olsun. $\forall u \in N$ için $\psi^{-1}(u)$, $(m - n)$ -boyutlu, M 'nin bir altmanifoldudur. $(m - n)$ -boyutlu altmanifoldda submersiyon dönüşümünün lifleri denir.

2.3.3. Tanım M ve N sırasıyla m ve n boyutlu iki Riemann manifold, $\psi: M \rightarrow N$ ye bir submersiyon olsun. Herhangi bir $u \in M$ için M deki $\mathcal{V}$ ve $\mathcal{H}$ dağılımını

$$\mathcal{V}_u = \mathcal{V}_u(\psi) = \ker \psi_{*u} = \{U \in T_u M : \psi_{*u}(U) = 0\} \subset T_u M \quad (2.21)$$

ve

$$\mathcal{H}_u = \mathcal{H}_u(\psi) = \mathcal{V}_u^\perp \subset T_u M \quad (2.22)$$

verilsin. $\mathcal{V}_u$ uzayına ψ 'nin u noktasındaki dikey uzayı denir. M deki g metriğine göre $\mathcal{V}_u$ dikey uzayının dik tümleyeni olan $\mathcal{H}_u$ uzayına ise ψ 'nin u noktasındaki yatay uzayı denir. Böylece M Riemann manifoldu $\forall u \in M$ için

$$T_u M = \mathcal{V}_u \oplus \mathcal{H}_u = \mathcal{V}_u \oplus \mathcal{V}_u^\perp \quad (2.23)$$

ortogonal ayrışımına sahiptir.

$$\mathcal{V}_u = \ker \psi_{*u} \quad (2.24)$$

ile tanımlanır ve $\mathcal{V}_u$ 'e submersiyonun dikey distrübisyonu denir.

$$\mathcal{H}_u = \mathcal{V}_u^\perp \quad (2.25)$$

şeklinde tanımlanan distrübüsyona ise submersiyonun yatay distrübisyonu denir.

2.3.1. Teorem M ve N sırasıyla m ve n boyutlu iki Riemann manifold, $\psi : M \rightarrow N$ ye bir submersiyon ve M 'nin dikey distrübisyonu $\mathcal{V}$ olsun. Bu durumda $\psi(p) = x$ ve $p \in M$ için her $\mathcal{V}_p$ dikey distrübisyonu $\psi^{-1}(x)$ in tanjant uzayı ile çakışır (Falcitelli ve diğerleri, 2003).

2.3.4. Tanım (M, g_M) ve (N, g_N) sırasıyla m ve n boyutlu iki Riemann manifold olmak üzere, $\psi : (M, g_M) \rightarrow (N, g_N)$ için

- a) $\forall p \in M$ için, ψ_{*p} türev dönüşümü maksimal ranka sahip,
- b) $\forall p \in M$ noktasında ψ_{*p} dönüşümü yatay vektörlerinin uzunluğunu korur.

şartları sağlanır ise ψ dönüşümüne Riemann submersiyon denir.

$\forall p \in M$ için ψ_{*p} türev dönüşümü $\mathcal{H}_p$ yatay uzayından $T_{\psi_{*p}}N$ üzerine bir izometridir, yani $U, V \in \mathcal{H}_p$ için

$$g_M(U, V) = g_N(\psi_{*p}U, \psi_{*p}V) \quad (2.26)$$

dir (O'Neill ve diğerleri 1966, 2004).

2.3.1. Önerme (M, g_M) ve (N, g_N) sırasıyla m ve n boyutlu iki Riemann manifold ve

$$\psi : (M, g_M) \rightarrow (N, g_N) \quad (2.27)$$

bir Riemann submersiyonu olmak üzere ∇ ve ∇' sırasıyla M ve N nin Riemann konneksiyonları ise, M üzerindeki U, V temel vektör alanları U', V' temel vektör alanlarına bağlı olsun. Bu durumda,

- i. $g(U, V) = g'(U', V') \circ \psi$
- ii. $h[U, V]$ temel vektör alanı $h[U', V']$ vektör alanına ψ - bağlıdır.
- iii. $h(\nabla_U V)$ temel vektör alanı ve $h(\nabla'_{U'} V')$ ψ - bağlıdır.
- iv. Herhangi bir $V \in \mathcal{V}_p$ için $[U, V]$ dikey vektör alanıdır (Falcitelli ve diğerleri, 2003).

Riemann submersiyonlar $\mathcal{T}$ ve $\mathcal{A}$ ile gösterilen O'Neill tensörleriyle karakterizedir. $\forall E_1, E_2 \in \Gamma(TM)$ için

$$\mathcal{T}(E_1, E_2) = \mathcal{H}\nabla_{\mathcal{V}E_1}^{M_1} \mathcal{V}E_2 + \mathcal{V}\nabla_{\mathcal{V}E_1}^{M_1} \mathcal{H}E_2 \quad (2.28)$$

$$\mathcal{A}(E_1, E_2) = \mathcal{H}\nabla_{\mathcal{H}E_1}^{M_1} \mathcal{V}E_2 + \mathcal{V}\nabla_{\mathcal{H}E_1}^{M_1} \mathcal{H}E_2 \quad (2.29)$$

eşitlikleri vardır (O'Neill, 1966).

2.3.1. Lemma (M, g_M) ve (N, g_N) iki Riemann manifoldu ve

$$\psi : (M, g_M) \rightarrow (N, g_N) \quad (2.30)$$

bir Riemann submersiyonu olmak üzere $X, Y \in \text{çek}(\psi_*)^\perp$ ve $W, V \in \text{çek}(\psi_*)$ için

$$\nabla_V W = T_V W + \widehat{\nabla}_V W \quad (2.31)$$

$$\nabla_V X = h\nabla_V X + T_V X \quad (2.32)$$

$$\nabla_X V = A_X V + v\nabla_X V \quad (2.33)$$

$$\nabla_X Y = h\nabla_X Y + A_X Y \quad (2.34)$$

dır.

2. 4. Hemen Hemen Değme Metrik Manifoldlar

2.4.1. Tanım M , $(2n + 1)$ –boyutlu diferansiyellenebilir manifoldu için, M üzerinde η 1-form , ξ bir vektör alanı ve φ , (1,1) tipinde tensör alanı olsun. $\forall W \in \chi(M)$ için

$$\eta(\xi) = 1 \quad (2.35)$$

ve

$$\varphi^2 W = -W + \eta(W)\xi \quad (2.36)$$

özellikleri sağlanıyorsa, (φ, ξ, η) ya M üzerinde hemen hemen değme yapı, bu yapı ile birlikte M manifolduna da hemen hemen değme manifold denir (Yano ve Kon, 1984).

2.4.2. Tanım (M, φ, ξ, η) hemen hemen değme manifold olsun. M üzerinde bir g Riemann metriği $\forall W_1, W_2 \in \chi(M)$ için

$$\eta(W_1) = g(W_1, \xi) \quad (2.37)$$

ve

$$g(\varphi W_1, \varphi W_2) = g(W_1, W_2) - \eta(W_1)\eta(W_2) \quad (2.38)$$

eşitliği sağlanıyor ise (φ, ξ, η, g) ye hemen hemen değme metrik yapı, $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ de hemen hemen değme metrik manifold denir (Yano ve Kon, 1984).

2.4.4. Tanım $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen değme metrik manifold olsun. Bu durumda $\forall U, V \in \chi(M)$ için,

$$\Phi(U, V) = g(U, \varphi V) \quad (2.39)$$

olarak tanımlanan φ dönüşümüne hemen hemen değme manifoldun 2-formu denir (Yano ve Kon, 1984).

2.4.5. Tanım $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen değme metrik manifold olsun. φ nin Nijenhuis tensör alanı $[\varphi, \varphi]$ olmak üzere,

$$[\varphi, \varphi] + 2d\eta \wedge \xi = 0 \quad (2.40)$$

ise hemen hemen değme manifolda normal denir. M , hemen hemen değme metrik manifold normal ise M ye değme normal metrik manifold denir (Yano ve Kon, 1984).

2.4.6. Tanım $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen değme manifold olsun. Eğer M hemen hemen değme manifoldu normal η ; 1-form kapalı ($d\eta = 0$) ve

$$d\Phi = 2\eta \wedge \Phi \quad (2.41)$$

ise hemen hemen değme manifolda Kenmotsu manifold denir (Kenmotsu, 1972).

2.4.1. Teorem $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen değme manifold olsun. M hemen hemen değme manifoldunun bir Kenmotsu manifoldu olması için gerek ve yeter şart, $\forall U, V \in \chi(M)$ için

$$(\nabla_U \varphi)V = g(\varphi U, V)\xi - \eta(V)\varphi U \quad (2.42)$$

olmasıdır (Kenmotsu, 1972).

2.4.1 Sonuç $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir Kenmotsu manifoldu olsun. Bu takdirde, $\forall U, V \in \chi(M)$ için

$$\nabla_U \xi = -\varphi^2 U \quad (2.43)$$

dır.



3. KENMOTSU MANİFOLDLAR İLE $\xi^\perp$ -RIEMANN SUBMERSİYON

Bu bölümde Kenmotsu manifoldlardan Riemann manifoldlara yarı slant $\xi^\perp$ -Riemann submersiyon tanımını verildi ve örneklerle açıklandı.

3.1. Tanım $(M, \varphi, \xi, \eta, g_M)$ bir Kenmotsu manifold, (N, g_N) bir Riemann manifold, $\psi : M \rightarrow N$ bir Riemann submersiyon ve ξ , $\text{çek}(\psi_*)$ 'a normal olsun. D_1 ve D_2 iki ortogonal tümleyen distribüsyon olmak üzere,

$$\text{çek}(\psi_*) = D_1 \oplus D_2, \quad \varphi(D_1) = D_1 \quad (3.1)$$

ve $X \in \Gamma(D_2)$ için $\varphi(D_1)$ ile D_2 arasındaki açı θ olup, sabit ise ψ Riemann submersiyonuna yarı slant $\xi^\perp$ -Riemann submersiyon denir. Burada θ 'ya submersiyonun slant açısı denir.

ψ , bir Kenmotsu manifolddan, bir Riemann manifolda tanımlı yarı slant $\xi^\perp$ -Riemann submersiyon olsun. $U \in \Gamma(\text{çek}(\psi_*))$ için

$$U = PU + QU \quad (3.2)$$

yazılabilir. Burada $PU \in \Gamma(D_1)$ ve $QU \in \Gamma(D_2)$ dır. Diğer taraftan, $VZ \in \Gamma(\text{çek}(\psi_*))$, $\mathcal{H}Z \in \Gamma(\text{çek}(\psi_*)^\perp)$ için

$$Z = VZ + \mathcal{H}Z \quad (3.3)$$

eşitliği vardır. Burada $Z \in \Gamma(TM)$ dir. Benzer şekilde $V \in \Gamma(\text{çek}(\psi_*))$ için

$$\varphi V = \phi V + \omega V \quad (3.4)$$

yazabiliriz ki burada ϕV ve ωV sırasıyla, φV nin dikey ve yatay parçalarıdır. Diğer taraftan $X \in \Gamma(\text{çek}(\psi_*)^\perp)$ için

$$\varphi X = BX + CX \quad (3.5)$$

yazılabilir. Burada BX ve CX , φX in dikey ve yatay parçalarıdır. Yatay distribüsyon

$$\zeta ek(\psi_*)^\perp = wD_2 \oplus \mu \quad (3.6)$$

şeklinde yazılabilir. Burada μ , wD_2 'nin ortogonal tümleyenidir. Her iki distribüyon da invaryant distribüsyondur. Diğer taraftan; $U_1, V_1 \in \Gamma(\zeta ek(\psi_*))$ ve $X \in \Gamma(\zeta ek(\psi_*)^\perp)$ için

$$g_1(\omega U_1, X) = -g_1(U_1, BX) \quad (3.7)$$

ve

$$g_1(\phi U_1, V_1) = -g_1(U_1, \phi V_1) \quad (3.8)$$

yazılabilir.

3.1. Örnek Bir Kenmotsu manifolddan Riemann manifolda tanımlı her invariant Riemann submersiyon $\theta = 0$ slant açılı, $D_\theta = 0$ slant distribüsyonu ile yarı slant $\xi^\perp$ -Riemann submersiyondur.

3.2. Örnek Bir Kenmotsu manifolddan Riemann manifolda tanımlı her slant Riemann submersiyon, $D = 0$ invariant distribüsyonu ile yarı slant $\xi^\perp$ -Riemann submersiyondur.

3.3. Örnek $\mathbb{R}^9$ üzerinde Kenmotsu yapıyı

$$\varphi \left(\sum_{i=1}^4 \left(X_i \frac{\partial}{\partial x^i} + Y_i \frac{\partial}{\partial y^i} \right) + Z \frac{\partial}{\partial z} \right) = \sum_{i=1}^4 \left(Y_i \frac{\partial}{\partial x^i} - X_i \frac{\partial}{\partial y^i} \right) + \sum_{i=1}^4 \left(Y_i y^i \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (3.9)$$

$$\eta = dz, \xi = \frac{\partial}{\partial z} \quad (3.10)$$

$$g_{\mathbb{R}^9} = dz \otimes dz + e^{-2z} \sum_{i=1}^4 dx^i \otimes dx^i + dy^i \otimes dy^i \quad (3.11)$$

ile tanımlayalım. Bu yapı için bir φ bazını

$$\{ \varepsilon_1 = e^z \frac{\partial}{\partial x^1}, \varepsilon_2 = e^z \frac{\partial}{\partial x^2}, \varepsilon_3 = e^z \frac{\partial}{\partial x^3}, \varepsilon_4 = e^z \frac{\partial}{\partial x^4}, \varepsilon_5 = e^z \frac{\partial}{\partial y^1}, \varepsilon_6 = e^z \frac{\partial}{\partial y^2}, \varepsilon_7 =$$

$$e^z \frac{\partial}{\partial y^3}, \varepsilon_8 = e^z \frac{\partial}{\partial y^4}, \varepsilon_9 = \frac{\partial}{\partial z} \} \quad (3.12)$$

olarak seçelim. $\mathbb{R}^5$ üzerindeki Kartezyen koordinatlar (u_1, u_2, v_1, v_2, z) olmak üzere $g_{\mathbb{R}^5}$ Riemann metriğini

$$g_{\mathbb{R}^5} = e^{-2z} \sum_{i=1}^2 (du^i \otimes du^i + dv^i \otimes dv^i) + dz \otimes dz \quad (3.13)$$

şeklinde belirleyelim. $F: \mathbb{R}^9 \rightarrow \mathbb{R}^5$ için $F(x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4, z) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, \sin \alpha x_3 - \cos \alpha x_4, y_4, z)$ şeklinde tanımlı bir submersiyon olsun. Burada $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ dir.

Dönüşümün matrisi

$$F_* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin \alpha & -\cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

şeklindedir. Burada

$$\text{çek} F_* = \text{Sp}\{Z_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2, Z_2 = \varepsilon_5 - \varepsilon_6, Z_3 = -\cos \alpha \varepsilon_3 - \sin \alpha \varepsilon_4, Z_4 = \varepsilon_7\} \quad (3.15)$$

dir. Diğer taraftan $\text{çek} F_*^\perp = \text{Sp}\{H_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2, H_2 = \varepsilon_5 + \varepsilon_6, H_3 = \sin \alpha \varepsilon_3 - \cos \alpha \varepsilon_4, H_4 = \varepsilon_8, H_5 = \varepsilon_9\}$ şeklindedir. φ 'nin tanımından $\varphi Z_1 = -Z_2, \varphi Z_2 = Z_1$ şeklindedir. Dolayısıyla $D_1 = \text{span}\{Z_1, Z_2\}$ seçilirse D_1 invaryant distrübüsyon olur. Benzer şekilde, $g_{\mathbb{R}^9}(\varphi Z_3, Z_4) = \cos \alpha$ ve $g_{\mathbb{R}^9}(\varphi Z_4, Z_3) = \cos \alpha$ olduğundan $D_2 = \text{Sp}\{Z_3, Z_4\}$ seçilirse, $D_2, \theta = \alpha$ slant açılı slant distrübüsyon olur. Dolayısıyla F, θ slant açılı bir yarı slant submersiyon olur. Şimdi yatay vektörlerin boyunun korunup korunmadığını inceleyelim. Gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$g_{\mathbb{R}^5}(F^*H_1, F^*H_1) = g_{\mathbb{R}^9}(H_1, H_1), \quad g_{\mathbb{R}^5}(F^*H_2, F^*H_2) = g_{\mathbb{R}^9}(H_2, H_2), \quad (3.16)$$

$$g_{\mathbb{R}^5}(F^*H_3, F^*H_3) = g_{\mathbb{R}^9}(H_3, H_3), \quad g_{\mathbb{R}^5}(F^*H_4, F^*H_4) = g_{\mathbb{R}^9}(H_4, H_4), \quad (3.17)$$

$$g_{\mathbb{R}^5}(F^*H_5, F^*H_5) = g_{\mathbb{R}^9}(H_5, H_5) \quad (3.18)$$

bulunur. Buradan $i = 1, \dots, 5$ olmak üzere

$$g_{\mathbb{R}^5}(F^*H_i, F^*H_i) = g_{\mathbb{R}^9}(H_i, H_i) \quad (3.19)$$

bulunur. Dolayısıyla yatay vektörlerin de boyu korunmuş olur ki F bir yarı slant $\xi^\perp$ –Riemann submersiyondur.

3.1. Lemma $(M, \varphi, \xi, \eta, g_M)$ bir Kenmotsu manifold, (N, g_N) bir Riemann manifold $\psi: M \rightarrow N$ bir yarı slant $\xi^\perp$ – Riemann submersiyon olsun. Bu durumda, $\forall X, Y \in \Gamma(\text{çek}(\psi_*)^\perp)$ ve $U, V \in \Gamma(\text{çek}(\psi_*))$ için

$$B\mathcal{T}_U V + \phi \widehat{\nabla}_U V = \widehat{\nabla}_U \phi V + \mathcal{T}_U \omega V \quad (3.20)$$

$$g_M(U, V)\xi + C\mathcal{T}_U V + \omega \widehat{\nabla}_U V = \mathcal{T}_U \phi V + \mathcal{H}\nabla_U^M \omega V \quad (3.21)$$

$$\phi \mathcal{T}_U X + B\nabla_U^M X - \eta(X)U = \widehat{\nabla}_U BX + \mathcal{T}_U CX \quad (3.22)$$

$$\omega \mathcal{T}_U X + C\nabla_U^M X = \mathcal{T}_U BX + \mathcal{H}\nabla_U^M CX \quad (3.23)$$

$$g_M(U, V)\xi - \omega \mathcal{A}_X Y + C\mathcal{H}\nabla_X^M Y = \mathcal{A}_X BY + \nabla_X^M CY + \eta(Y)X \quad (3.24)$$

$$\phi \mathcal{A}_X Y + B\mathcal{H}\nabla_X^M Y = \mathcal{V}\nabla_X^M BY + \mathcal{A}_X CY \quad (3.25)$$

şeklindedir.

İspat $\forall U, V \in \Gamma(\text{çek}(\psi_*))$ için (2.42) ve (3.4) eşitlikleri kullanılırsa

$$g_M(U, V)\xi - \eta(V)U = \nabla_U^M \phi V + \nabla_U^M \omega V - \phi \nabla_U^M V \quad (3.26)$$

bulunur. Buradan (3.26) da, (2.31), (2.32), (3.4) ve (3.5) denklemleri aynı anda işleme tabi tutulursa

$$g_M(U, V)\xi = \mathcal{T}_U \phi V + \omega \widehat{\nabla}_U \phi V + \mathcal{T}_U \omega V + \mathcal{H}\nabla_U^M \omega V - B\mathcal{T}_U V - C\mathcal{T}_U V$$

$$-\phi \widehat{\nabla}_U V - \omega \widehat{\nabla}_U V \quad (3.27)$$

elde edilir. (3.27) de ki dikey ve yatay parçaları karşılaştırdığımızda (3.20) ve (3.21) eşitliklerini elde ederiz. Diğerleri de benzer şekilde ispatlanabilir.

3.1. Teorem $(M, \varphi, \xi, \eta, g_M)$ bir Kenmotsu manifold, (N, g_N) bir Riemann manifold $\psi: M \rightarrow N$ bir yarı slant $\xi^\perp$ - Riemann submersiyon olsun. O halde, $\forall W \in \Gamma(D_2)$ için

$$\phi^2 W = -\cos^2 \theta W \quad (3.28)$$

eşitliği var olup, θ , D_2 distrübüsyonunun slant açısıdır.

3.1. Sonuç $(M, \varphi, \xi, \eta, g_M)$ bir Kenmotsu manifold, (N, g_N) bir Riemann manifold $\psi: M \rightarrow N$ bir yarı slant $\xi^\perp$ - Riemann submersiyon olsun. Her $W_1, W_2 \in \Gamma(D_2)$ için

$$g_M(\phi W_1, \phi W_2) = \cos^2 \theta g_M(W_1, W_2) \quad (3.29)$$

ve

$$g_M(\omega W_1, \omega W_2) = \sin^2 \theta g_M(W_1, W_2) \quad (3.30)$$

şeklindedir.

4. LİFLERİN GEOMETRİSİ

Bu bölümde distribüsyonların integrallenebilirlik ve total geodeziklikleri ile ilgili teoremler verilmiş ve ispatları yapılmıştır.

4.1. Teorem $(M, \varphi, \xi, \eta, g_M)$ bir Kenmotsu manifold, (N, g_N) bir Riemann manifold ve $\psi: M \rightarrow N$ bir yarı slant $\xi^\perp$ - Riemann submersiyon olsun. D_1 distribüsyonunun integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart $\forall U, V \in \Gamma(D_1)$ için

$$(\nabla \psi_*)(U, \varphi V) - (\nabla \psi_*)(V, \varphi U) \notin \psi_* \mu \quad (4.1)$$

olmasıdır.

İspat $\forall U, V \in \Gamma(D_1), K \in \Gamma(D_2), X \in \Gamma(\text{çek}(\psi_*)^\perp)$ için

$$g_M([U, V], K) = g_M(\nabla_U V, K) - g_M(\nabla_V U, K) \quad (4.2)$$

şeklindedir. Buradan (2.38) eşitliği kullanılırsa

$$g_M([U, V], K) = g_M(\varphi \nabla_U V, \varphi K) + \eta(\nabla_U V)\eta(K) - g_M(\varphi \nabla_V U, \varphi K) - \eta(\nabla_V U)\eta(K) \quad (4.3)$$

bulunur. $\varphi \nabla_U V = \nabla_U \varphi V - (\nabla_U \varphi)V$ olduğundan

$$g_M([U, V], K) = g_M(\nabla_U \varphi V - (\nabla_U \varphi)V, \varphi K) - g_M(\nabla_V \varphi U - (\nabla_V \varphi)U, \varphi K) \quad (4.4)$$

veya

$$\begin{aligned} g_M([U, V], K) &= g_M(\nabla_U \varphi V, \varphi K) - g_M((\nabla_U \varphi)V, \varphi K) \\ &\quad - g_M(\nabla_V \varphi U, \varphi K) + g_M((\nabla_V \varphi)U, \varphi K) \end{aligned} \quad (4.5)$$

yazılabilir. Buradan (2.42) kullanılırsa

$$g_M([U, V], K) = g_M(\nabla_U \varphi V, \varphi K) - g_M(\varphi U, V)g_M(\xi, \varphi K) + \eta(V)g_M(\varphi U, \varphi K) \\ - g_M(\nabla_V \varphi U, \varphi K) + g_M(\varphi V, U)g(\xi, \varphi K) - \eta(U)g_M(\varphi V, \varphi K) \quad (4.6)$$

elde edilir. Diğer taraftan $\eta(V) = 0$ olduğundan

$$g_M([U, V], K) = g_M(\nabla_U \varphi V, \varphi K) - g_M(\nabla_V \varphi U, \varphi K) \quad (4.7)$$

bulunur. (3.4) eşitliği kullanılırsa

$$g_M([U, V], K) = g_M(\nabla_U \varphi V, \phi K) + g_M(\nabla_U \varphi V, \omega K) \\ - g_M(\nabla_V \varphi U, \phi K) - g_M(\nabla_V \varphi U, \omega K) \quad (4.8)$$

yazılabilir. Buradan

$$g_M([U, V], K) = g_M(\varphi \nabla_U V, \phi K) + g_M(\nabla_U \varphi V, \omega K) \\ - g_M(\varphi \nabla_V U, \phi K) - g_M(\nabla_V \varphi U, \omega K) \quad (4.9)$$

olup (3.8) den

$$g_M([U, V], K) = -g_M(\nabla_U V, \varphi \phi K) + g_M(\mathcal{V} \nabla_U \varphi V + \mathcal{H} \nabla_U \varphi V, \omega K) \\ + g_M(\nabla_V U, \varphi \phi K) - g_M(\mathcal{V} \nabla_V \varphi U + \mathcal{H} \nabla_V \varphi U, \omega K) \quad (4.10)$$

yazılır. Yeniden (3.4) kullanılırsa

$$g_M([U, V], K) = -g_M(\nabla_U V, \phi \phi K + \omega \phi K) + g_M(\mathcal{V} \nabla_U \varphi V, \omega K) + g_M(\mathcal{H} \nabla_U \varphi V, \omega K) \\ + g_M(\nabla_V U, \phi \phi K + \omega \phi K) - g_M(\mathcal{V} \nabla_V \varphi U, \omega K) - g_M(\mathcal{H} \nabla_V \varphi U, \omega K) \quad (4.11)$$

olduğundan (3.28) eşitliğinden

$$g_M([U, V], K) = -g_M(\nabla_U V, -\cos^2 \theta K + \omega \phi K) + g_M(\mathcal{V} \nabla_U \varphi V, \omega K) + g_M(\mathcal{H} \nabla_U \varphi V, \omega K) \\ + g_M(\nabla_V U, -\cos^2 \theta K + \omega \phi K) - g_M(\mathcal{V} \nabla_V \varphi U, \omega K) \\ - g_M(\mathcal{H} \nabla_V \varphi U, \omega K) \quad (4.12)$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} g_M([U, V], K) &= \cos^2 \theta g_M([U, V], K) + g_M(\nabla_U V, \omega \phi K) + g_M(\mathcal{H} \nabla_U \varphi V, \omega K) \\ &\quad - g_M(\nabla_V U, \omega \phi K) - g_M(\mathcal{H} \nabla_V \varphi U, \omega K) \end{aligned} \quad (4.13)$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} (1 - \cos^2 \theta) g_M([U, V], K) &= g_M(\nabla_U V, \omega \phi K) + g_M(\mathcal{H} \nabla_U \varphi V, \omega K) \\ &\quad + g_M(\nabla_V U, \omega \phi K) - g_M(\mathcal{H} \nabla_V \varphi U, \omega K) \end{aligned} \quad (4.14)$$

yazılabilir. O halde

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta g_M([U, V], K) &= g_M(\nabla_U V, \omega \phi K) + g_N(\psi_* \nabla_U \varphi V, \psi_* \omega K) \\ &\quad - g_N(\psi_* \nabla_V \varphi U, \psi_* \omega K) \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\sin^2 \theta g_M([U, V], K) = g_N((\nabla \psi_*)(U, \varphi V) - (\nabla \psi_*)(V, \varphi U), \psi_* \omega K) \quad (4.16)$$

elde edilir. $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ olduğundan, sol tarafın sıfır olması için gerek ve yeter şart sağ taraf sıfır olmalıdır ki bu da ispatı tamamlar.

4.2. Teorem $(M, \varphi, \xi, \eta, g_M)$ bir Kenmotsu manifold (N, g_N) bir Riemann manifold ve $\psi: M \rightarrow N$ bir yarı slant $\xi^\perp$ - Riemann submersiyon olsun. D_2 distribüsyonunun integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart $\forall K, L \in \Gamma(D_2)$ ve $\forall U, V \in \Gamma(D_1)$ için

$$\begin{aligned} g_N(\psi_* T_K \phi L + \mathcal{H}(\nabla_L \omega K) - T_L \phi K + \mathcal{H}(\nabla_L \omega K), \psi_* \omega U) &- g_N(\psi_* \omega L, \psi_* T_K \varphi U) \\ &+ g_N(\psi_* \omega K, \psi_* T_L \varphi U) = g_M(\widehat{\nabla}_K \phi L - \widehat{\nabla}_L \phi K, \phi U) \\ &- \eta(\omega U)(g(\phi L, K) - g_M(\phi K, L)) \end{aligned} \quad (4.17)$$

olmasıdır.

İspat $\forall K, L \in \Gamma(D_2)$ ve $\forall U, V \in \Gamma(D_1)$ için $g_M([K, L], U) = 0$ olmalıdır. Buradan

$$g_M([K, L], U) = g_M(\nabla_K L - \nabla_L K, U) = g_M(\nabla_K L, U) - g_M(\nabla_L K, U) \quad (4.18)$$

yazılabilir. (2.38) kullanılırsa,

$$\begin{aligned} g_M([K, L], U) &= g_M(\varphi \nabla_K L, \varphi U) + \eta(\nabla_K L) \eta(U) \\ &\quad - g_M(\varphi \nabla_L K, \varphi U) - \eta(\nabla_L K) \eta(U) \end{aligned} \quad (4.19)$$

olur. Diğer taraftan $\eta(U) = 0$ olduğundan

$$g_M([K, L], U) = g_M(\varphi \nabla_K L, \varphi U) - g_M(\varphi \nabla_L K, \varphi U) \quad (4.20)$$

elde edilir. (3.4) eşitliği kullanılırsa

$$g_M([K, L], U) = g_M(\varphi \nabla_K L, \phi U + \omega U) - g_M(\varphi \nabla_L K, \phi U + \omega U) \quad (4.21)$$

bulunur. O halde (4.21) eşitliği

$$\begin{aligned} g_M([K, L], U) &= g_M(\nabla_K \varphi L - (\nabla_K \varphi) L, \phi U + \omega U) \\ &\quad - g_M(\nabla_K \varphi L - (\nabla_K \varphi) L, \phi U + \omega U) \end{aligned} \quad (4.22)$$

şeklinde yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned} g_M([K, L], U) &= g_M(\nabla_K \varphi L - (\nabla_K \varphi) L, \phi U) + g_M(\nabla_K \varphi L - (\nabla_K \varphi) L, \omega U) \\ &\quad - g_M(\varphi L - (\nabla_K \varphi) L, \phi U) - g_M(\nabla_K \varphi L - (\nabla_K \varphi) L, \omega U) \end{aligned} \quad (4.23)$$

elde edilir. (4.23) eşitliğinde (2.42) kullanılırsa

$$\begin{aligned} g_M([K, L], U) &= g_M(\nabla_K \varphi L, \phi U) - g_M(g_M(\varphi K, L) \xi - \eta(L) \varphi K, \phi U) + g_M(\nabla_K \varphi L, \omega U) \\ &\quad - g_M(g_M(\varphi K, L) \xi - \eta(L) \varphi K, \omega U) - g_M(\nabla_L \varphi K, \phi U) \\ &\quad + g_M(g_M(\varphi L, K) \xi - \eta(K) \varphi L, \phi U) - g_M(\nabla_L \varphi K, \omega U) \\ &\quad + g_M(g(\varphi L, K) \xi - \eta(K) \varphi L, \omega U) \end{aligned} \quad (4.24)$$

yazılır. $\eta(L) = 0$ olduğundan

$$\begin{aligned}
g_M([K, L], U) &= g_M(\nabla_K \phi L, \phi U) + g_M(\nabla_K \phi L, \omega U) - g_M(\phi K, L)g(\xi, \omega U) \\
&\quad - g_M(\nabla_L \phi K, \phi U) - g_M(\nabla_L \phi K, \omega U) - g_M(\phi L, K)g_M(\xi, \omega U) \quad (4.25)
\end{aligned}$$

bulunur. Diğer taraftan (4.25) de (3.4) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
g_M([K, L], U) &= g_M(\nabla_K \phi L, \phi U) + g_M(\nabla_K \omega L, \phi U) + g_M(\nabla_K \phi L, \omega U) \\
&\quad + g_M(\nabla_K \omega L, \omega U) \quad (4.26)
\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi $\omega L \in \mathcal{H}$ ve $\phi U \in \mathcal{V}$ olduğu kullanılırsa, $g(\omega L, \phi U) = 0$ olur. K yönünde türev alınarak elde edilen ifade yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
g_M([K, L], U) &= g_M(\nabla_K \phi L, \phi U) + g_M(\nabla_K \omega L, \phi U) + g_M(\nabla_K \phi L, \omega U) + g_M(\nabla_K \omega L, \omega U) \\
&\quad - g_M(\nabla_L \phi K, \omega U) + g_M(\nabla_L \omega K, \omega U) + g_M(\phi L, K)g_M(\xi, \omega U) \quad (4.27)
\end{aligned}$$

elde edilir. (2.31) ve (2.32) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
g_M([K, L], U) &= g_M(T_K \phi L + \widehat{\nabla}_K \phi L, \phi U) + g_M(\omega L, T_K \phi U + \widehat{\nabla}_K \phi U) \\
&\quad + g_M(T_K \phi L + \widehat{\nabla}_K \phi L, \omega U) + g_M(\omega K, \nabla_L \phi U) \\
&\quad + g_M(T_L \phi K + \widehat{\nabla}_L \phi K, \omega U) + g_M(T_L \omega K + \mathcal{H}(\nabla_L \omega K), \omega U) \\
&\quad + g_M(\phi L, K)g(\xi, \omega U) \quad (4.28)
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned}
g_M([K, L], U) &= g_M(\widehat{\nabla}_K \phi L, \phi U) + g_M(\omega L, T_K \phi U) + g_M(T_K \phi L, \omega U) \\
&\quad + g_M(\mathcal{H}(\nabla_L \omega K), \omega U) - g_M(\phi K, L)\eta(\omega U) - g_M(\widehat{\nabla}_L \phi K, \phi U) \\
&\quad + g_M(\omega K, T_L \phi U) + g_M(T_L \phi K, \omega U) + g_M(\mathcal{H} \nabla_L \omega K, \omega U) \\
&\quad + g_M(\phi L, K)\eta(\omega U) \quad (4.29)
\end{aligned}$$

olup (3.4) ve $\phi L \in V, K \in V$ den

$$\begin{aligned}
g_M([K, L], U) &= g_M(\hat{\nabla}_K \phi L - \hat{\nabla}_L \phi K, \phi U) + g_M(T_K \phi L + \mathcal{H}(\nabla_L \omega K) \\
&\quad - T_L \phi K + \mathcal{H}(\nabla_L \omega K), \omega U) - g_M(\omega L, T_K \phi U) + g_M(\omega K, T_L \phi U) \\
&\quad - \eta(\omega U)(g(\phi L, K) - g_M(\phi K, L))
\end{aligned} \tag{4.30}$$

yazılabilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
g_M([K, L], U) &= g_M(\hat{\nabla}_K \phi L - \hat{\nabla}_L \phi K, \phi U) + g_N(\psi_* T_K \phi L + \mathcal{H}(\nabla_L \omega K) - T_L \phi K \\
&\quad + \mathcal{H}(\nabla_L \omega K, \psi_* \omega U) - g_N(\psi_* \omega L, \psi_* T_K \phi U) + g_N(\psi_* \omega K, \psi_* T_L \phi U) \\
&\quad - \eta(\omega U)(g_M(\phi L, K) - g_M(\phi K, L))
\end{aligned} \tag{4.31}$$

elde edilir ki bu da istenendir.

4.3. Teorem $(M, \varphi, \xi, \eta, g_M)$ bir Kenmotsu manifold (N, g_N) bir Riemann manifold ve $\psi: M \rightarrow N$ bir yarı slant $\xi^\perp$ - Riemann submersiyon olsun. D_1 in total geodezik olması için gerek ve yeter şart $\forall U, V \in \Gamma(D_1), X \in \Gamma(\text{çek}(\psi_*)^\perp)$ ve $K \in \Gamma(D_2)$ için

$$g_M(T_U V, \phi \omega K) = -g_N(\psi_* T_U V, \pi_* \omega \phi K) - g_N(\psi_* T_U V, \psi_* \omega^2 K) \tag{4.32}$$

ve

$$\begin{aligned}
g_N(\psi_* \omega V, \psi_* T_U B X) + g_N(\psi_* \omega V, \psi_* H(\hat{\nabla}_U C X)) &= -g_M(\phi V, \hat{\nabla}_U B X) - g_M(\phi V, T_U C X) \\
&\quad + g_M(V, U) \eta(X)
\end{aligned} \tag{4.33}$$

eşitliklerinin sağlanmasıdır.

İspat Total geodezik olması için her $U, V \in \Gamma(D_1), X \in \Gamma(\text{çek}(\psi_*)^\perp)$ ve $K, L \in \Gamma(D_2)$ için $\nabla_U V \in \Gamma(D_1)$ olmalıdır. O halde $g_M(\nabla_U V, K) = 0$ ve $g_M(\nabla_V U, X) = 0$ sağlanmalıdır. $\varphi \nabla_U V = \nabla_U \varphi V - (\nabla_U \varphi) V$ ve (2.42) kullanılırsa,

$$g_M(\nabla_U V, K) = g_M(\nabla_U \varphi V, \varphi K) - g_M(g_M(\varphi U, V) \xi - \eta(V) \varphi U, \varphi K) \tag{4.34}$$

yazılabilir. Buradan

$$g_M(\nabla_U V, K) = g_M(\nabla_U \varphi V, \varphi K) - g_M(\varphi U, V)g_M(\xi, \varphi K) + g_M(\eta(V)\varphi U, \varphi K) \quad (4.35)$$

olup $g_M(\xi, \varphi K)$ yerine $-g_M(K, \varphi \xi)$ yazılabileceğinden ve bu ifade de sıfır olduğundan $g_M(\nabla_U V, K)$ yerine $g_M(\varphi \nabla_U V, \varphi K)$ yazılır.

Diğer taraftan (3.4) kullanılırsa

$$g_M(\nabla_U V, K) = g_M(\varphi \nabla_U V, \phi K) + g_M(\varphi \nabla_U V, \omega K) \quad (4.36)$$

elde edilir. (4.36) da (3.8) eşitliği kullanılırsa

$$g_M(\nabla_U V, K) = -g_M(\nabla_U V, \varphi \phi K) - g_M(\nabla_U V, \varphi \omega K) \quad (4.37)$$

yazılır. Tekrardan (3.4) eşitliği kullanılırsa

$$g_M(\nabla_U V, K) = -g_M(\nabla_U V, \phi \phi K + \omega \phi K) - g_M(\nabla_U V, \phi \omega K + \omega \omega K) \quad (4.38)$$

bulunur. O halde

$$\begin{aligned} g_M(\nabla_U V, K) &= -g_M(\nabla_U V, \phi^2 K) - g_M(\nabla_U V, \omega \phi K) - g_M(\nabla_U V, \phi \omega K - g_M(\nabla_U V, \omega^2 K) \\ &= -g_M(\nabla_U V, -\cos^2 \theta K) - g_M(\nabla_U V, \omega \phi K) - g_M(\nabla_U V, \phi \omega K) \\ &\quad - g_M(\nabla_U V, \omega^2 K) \end{aligned} \quad (4.39)$$

olup (4.39) da (2.31) kullanılırsa

$$\begin{aligned} g_M(\nabla_U V, K) &= \cos^2 \theta g_M(\nabla_U V, K) - g_M(T_U V + \widehat{\nabla}_U V, \omega \phi K) - g_M(T_U V + \widehat{\nabla}_U V, \phi \omega K) \\ &\quad - g_M(T_U V + \widehat{\nabla}_U V, \omega^2 K) \end{aligned} \quad (4.40)$$

elde edilir. Buradan

$$(1 - \cos^2 \theta)g_M(\nabla_U V, K) = -g_M(T_U V, \omega \phi K) - g_M(T_U V, \phi \omega K) - g_M(T_U V, \omega^2 K) \quad (4.41)$$

veya

$$\sin^2\theta g_M(\nabla_U V, K) = -g_M(T_U V, \omega\phi K) - g_M(T_U V, \phi\omega K) - g_M(T_U V, \omega^2 K) \quad (4.42)$$

bulunur. $\sin^2\theta g_M(\nabla_U V, K) \neq 0$ olduğundan eşitliğin sağ tarafı sıfır olmalıdır.

$$-g_M(T_U V, \omega\phi K) - g_M(T_U V, \phi\omega K) - g_M(T_U V, \omega^2 K) = 0 \quad (4.43)$$

veya

$$g_M(T_U V, \phi\omega K) = -g_N(\psi_* T_U V, \psi_* \omega\phi K) - g_N(\psi_* T_U V, \psi_* \omega^2 K) \quad (4.44)$$

elde edilir. Diğer taraftan $X \in (\text{çek}(\psi_*)^\perp)$ için

$$g_M(\nabla_U V, X) = g_M(\nabla_U \phi V, \phi X) - g_M(\nabla_U \phi) V, \phi X + \eta(\nabla_U V) \eta(X) \quad (4.45)$$

bulunur. (2.42) kullanılırsa

$$\begin{aligned} g_M(\nabla_U V, X) &= g_M(\nabla_U \phi V, \phi X) - g_M(g_M(\phi U, V) \xi - \eta(V) \phi(U), \phi X) \\ &\quad + \eta(\nabla_U V) \eta(X) \end{aligned} \quad (4.46)$$

yazılır. Buradan

$$g_M(\nabla_U V, X) = g_M(\nabla_U \phi V, \phi X) - g_M(\phi U, V) g_M(\xi, \phi X) + \eta(\nabla_U V) \eta(X) \quad (4.47)$$

bulunur. $g_M(\xi, \phi X)$ yerine $-g_M(\phi \xi, X)$ ifadesi yazılıp bu da sıfıra eşit olduğundan

$$g_M(\nabla_U V, X) = g_M(\nabla_U \phi V, \phi X) + \eta(\nabla_U V) \eta(X) \quad (4.48)$$

elde edilir. $\eta(\nabla_U V)$ yerine $g(\nabla_U V, \xi)$ yazılırsa

$$g_M(\nabla_U V, X) = g_M(\nabla_U \phi V, \phi X) + g_M(\nabla_U V, \xi) \eta(X) \quad (4.49)$$

bulunur. (4.49) da (2.43) ve (3.8) kullanılırsa

$$g_M(\nabla_U V, X) = g_M(\nabla_U \varphi V, \varphi X) - g_M(V, \varphi^2 U) \eta(X) = g_M(\nabla_U \varphi V, \varphi X) + g_M(\varphi V, \varphi U) \eta(X) \quad (4.50)$$

yazılır. Buradan Riemann konneksiyon olma şartı kullanılırsa

$$g_M(\nabla_U V, X) = U g_M(\varphi V, \varphi X) + g_M(\varphi V, \nabla_U \varphi X) + g_M(V, U) \eta(X) \quad (4.51)$$

bulunur. (2.38) eşitliği kullanılırsa

$$U g_M(\varphi V, \varphi X) = U(g_M(V, X) - \eta(X) \eta(V)) \quad (4.52)$$

yazılabilir. O halde (3.4) eşitliği kullanılırsa

$$g_M(\nabla_U V, X) = -g_M(\varphi V, \nabla_U (BX + CX)) + g_M(V, U) \eta(X) \quad (4.53)$$

veya

$$g_M(\nabla_U V, X) = -g_M(\varphi V, \nabla_U BX) - g_M(\varphi V, \nabla_U CX) + g_M(V, U) \eta(X) \quad (4.54)$$

elde edilir. Buradan (2.31) denklemini kullanılırsa

$$g_M(\nabla_U V, X) = -g_M(\varphi V, T_U BX + \widehat{\nabla}_U BX) - g_M(\varphi V, T_U CX + \mathcal{H}(\widehat{\nabla}_U CX)) + g_M(V, U) \eta(X) \quad (4.55)$$

bulunur. Buradan (3.4) den

$$g_M(\nabla_U V, X) = -g_M(\phi V + \omega V, T_U BX + \widehat{\nabla}_U BX) - g_M(\phi V + \omega V, T_U CX + \mathcal{H}(\widehat{\nabla}_U CX)) + g_M(V, U) \eta(X) \quad (4.56)$$

veya

$$g_M(\nabla_U V, X) = -g_M(\phi V, \widehat{\nabla}_U BX) - g_M(\omega V, T_U BX) - g_M(\omega V, \mathcal{H}(\widehat{\nabla}_U CX))$$

$$-g_M(\phi V, T_U CX) + g_M(V, U)\eta(X) \quad (4.57)$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} g_N(\psi_*\omega V, \psi_*T_U BX) + g_N(\psi_*\omega V, \psi_*H(\widehat{\nabla}_U CX)) &= -g_M(\phi V, \widehat{\nabla}_U BX) - g_M(\phi V, T_U CX) \\ &\quad + g_M(V, U)\eta(X) \end{aligned} \quad (4.58)$$

bulunur ki bu da bize istenileni verir.

4.4. Teorem $(M, \varphi, \xi, \eta, g_M)$ bir Kenmotsu manifold (N, g_N) bir Riemann manifold ve $\psi: M \rightarrow N$ bir yarı slant $\xi^\perp$ - Riemann submersiyon olsun. D_2 ın total geodezik olması için gerek ve yeter şart $\forall U \in \Gamma(D_1), X \in \Gamma(\text{çek}(\psi_*)^\perp)$ ve $\forall K, L \in \Gamma(D_2)$ için

$$\begin{aligned} g_N(\psi_*T_K L, \psi_*\omega\phi U) + g_N(\psi_*\omega L, \psi_*\mathcal{H}\nabla_K\omega U) &= K g_M(\omega L, \omega U) - g_M(\phi L, T_K\omega U) \\ &\quad + g_M(\phi K, L)\eta(\omega U) \end{aligned} \quad (4.59)$$

ve

$$\begin{aligned} g_N(\psi_*\mathcal{H}\nabla_K\omega\phi L, \psi_*X) - g_N(\psi_*\mathcal{H}\nabla_K\omega L, \psi_*CX) &= g_M(T_K\omega L, BX) \\ &\quad - \eta(\nabla_K L)\eta(X) \end{aligned} \quad (4.60)$$

olmasıdır.

İspat D_2 total geodezik ise $K, L \in \Gamma(D_2)$ için $\nabla_K L \in \Gamma(D_2)$ olmalıdır. Bunun için $U \in \Gamma(D_1)$ ve $X \in \text{çek}(\psi_*)^\perp$ için $g_M(\nabla_K L, U) = 0$ ve $g_M(\nabla_K L, X) = 0$ olduğunu göstermeliyiz. $\forall U \in \Gamma(D_1)$ için (2.38) den

$$g_M(\nabla_K L, U) = g_M(\phi\nabla_K L, \phi U) - \eta(\nabla_K L)\eta(U) \quad (4.61)$$

olup (3.4) kullanılırsa

$$g_M(\nabla_K L, U) = g_M(\phi\nabla_K L, \phi U) + g_M(\phi\nabla_K L, \omega U) \quad (4.62)$$

yazılır. Burada $\phi\nabla_K L$ yerine $\nabla_K\phi L - (\nabla_K\phi)L$ kullanılırsa

$$g_M(\nabla_K L, U) = -g_M(\nabla_K L, \phi\phi U) + g_M(\nabla_K \phi L - (\nabla_K \phi)L, \omega U) \quad (4.63)$$

bulunur. Buradan (3.4) kullanılırsa

$$\begin{aligned} g_M(\nabla_K L, U) &= -g_M(\nabla_K L, \phi^2 U) - g_M(\nabla_K L, \omega\phi U) \\ &\quad + g_M(\nabla_K \phi L, \omega U) - g_M((\nabla_K \phi)L, \omega U) \end{aligned} \quad (4.64)$$

bulunur. (4.64) de $g_M(\phi L, \omega U)$ nun K yönünde türevi alınıp, (3.28) ve (2.48) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} g_M(\nabla_K L, U) &= -g_M(\nabla_K L, -\cos^2 \theta U) - g_M(\nabla_K L, \omega\phi U) + Kg_M(\phi L, \omega U) \\ &\quad - g_M(\phi L, \nabla_K \omega + g_M(\phi K, L)g_M(\xi, \omega U)) \end{aligned} \quad (4.65)$$

bulunur. (2.39) eşitliğinden

$$\begin{aligned} g_M(\nabla_K L, U) &= \cos^2 \theta g_M(\nabla_K L, U) - g_M(T_K L + \widehat{\nabla}_K L, \omega\phi U) + Kg_M(\omega L, \omega U) \\ &\quad - g_M(\phi L, T_K \omega U + \mathcal{H} \nabla_K \omega U) + g_M(\phi K, L)\eta(\omega U) \end{aligned} \quad (4.66)$$

veya

$$\begin{aligned} (1 - \cos^2 \theta)g_M(\nabla_K L, U) &= -g_M(T_K L, \omega\phi U) + Kg_M(\omega L, \omega U) - g_M(\phi L, T_K \omega U) \\ &\quad - g_M(\omega L, \mathcal{H} \nabla_K \omega U) + g_M(\phi K, L)\eta(\omega U) \end{aligned} \quad (4.67)$$

yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta g_M(\nabla_K L, U) &= -g_N(\psi_* T_K L, \psi_* \omega\phi U) + Kg_M(\omega L, \omega U) - g_M(\phi L, T_K \omega U) \\ &\quad - g_N(\psi_* \omega L, \psi_* \mathcal{H} \nabla_K \omega U) + g_M(\phi K, L)\eta(\omega U) \end{aligned} \quad (4.68)$$

bulunur. $\sin^2 \theta \neq 0$ olduğundan eşitliğin sağ tarafı sıfır olmalıdır. O halde

$$\begin{aligned} g_N(\psi_* T_K L, \psi_* \omega\phi U) + g_N(\psi_* \omega L, \psi_* \mathcal{H} \nabla_K \omega U) &= Kg_M(\omega L, \omega U) - g_M(\phi L, T_K \omega U) \\ &\quad + g_M(\phi K, L)\eta(\omega U) \end{aligned} \quad (4.69)$$

elde edilir. Diğer taraftan (2.38) kullanılırsa

$$g_M(\nabla_K L, X) = g_M(\nabla_K \phi L - (\nabla_K \phi)L, \phi X) - \eta(\nabla_K L)\eta(X) \quad (4.70)$$

yazılabilir. Buradan

$$g_M(\nabla_K L, X) = g_M(\nabla_K \phi L, \phi X) - g_M(\nabla_K \phi)L, \phi X) - \eta(\nabla_K L)\eta(X) \quad (4.71)$$

olup (3.4) ve (2.42) kullanılırsa

$$\begin{aligned} g_M(\nabla_K L, X) &= g_M(\nabla_K \phi L, \phi X) + g_M(\nabla_K \omega L, \phi X) - g_M(g_M(\phi K, L)\xi \\ &\quad - \eta(L)\phi K, \phi X)\eta(\nabla_K L)\eta(X) \end{aligned} \quad (4.72)$$

bulunur. Buradan (3.5) kullanılırsa

$$\begin{aligned} g_M(\nabla_K L, X) &= -g_M(\phi \nabla_K \phi L, X) + g_M(\nabla_K \omega L, (BX + CX)) - g_M(\phi K, L)g_M(\xi, \phi X) \\ &\quad + g_M(\eta(L)\phi K, \phi X) - \eta(\nabla_K L)\eta(X) \end{aligned} \quad (4.73)$$

veya

$$\begin{aligned} g_M(\nabla_K L, X) &= -g_M(\nabla_K \phi \phi L, X) + g_M(\nabla_K \omega L, BX + g_M(\nabla_K \omega L, CX) \\ &\quad - \eta(\nabla_K L)\eta(X) \end{aligned} \quad (4.74)$$

yazılır. O halde (3.4) eşitliğinden

$$\begin{aligned} g_M(\nabla_K L, X) &= -g_M(\nabla_K \phi^2 L, X) - g_M(\omega \phi L, X) + g_M(\nabla_K \omega L, BX) \\ &\quad + g_M(\nabla_K \omega L, CX - \eta(\nabla_K L)\eta(X) \end{aligned} \quad (4.75)$$

bulunur. Buradan (4.75) de (2.32) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} g_M(\nabla_K L, X) &= -g_M(\nabla_K \cos^2 \theta L, X) - g_M(T_K \omega \phi L + \mathcal{H} \nabla_K \omega \phi L, X) \\ &\quad + g_M(T_K \omega L + \mathcal{H} \nabla_K \omega L, BX) + g_M(T_K \omega L + \mathcal{H} \nabla_K \omega L, CX) \end{aligned}$$

$$-\eta(\nabla_K L)\eta(X) \quad (4.76)$$

yazılabilir. O halde

$$\begin{aligned} g_M(\nabla_K L, X) &= \cos^2 \theta g_M(\nabla_K L, X) - g_M(T_K \omega \phi L, X) - g_M(\mathcal{H} \nabla_K \omega \phi L, X) \\ &+ g_M(T_K \omega L, BX) + g_M(\mathcal{H} \nabla_K \omega L, BX) + g_M(T_K \omega L, CX) \\ &+ g_M(\mathcal{H} \nabla_K \omega L, CX) - \eta(\nabla_K L)\eta(X) \end{aligned} \quad (4.77)$$

veya

$$\begin{aligned} (1 - \cos^2 \theta) g_M(\nabla_K L, X) &= -g_M(T_K \omega \phi L, X) - g_M(\mathcal{H} \nabla_K \omega \phi L, X) \\ &+ g_M(T_K \omega L, BX) + g_M(\mathcal{H} \nabla_K \omega L, BX) \\ &+ g_M(T_K \omega L, CX) + g_M(\mathcal{H} \nabla_K \omega L, CX) \\ &- \eta(\nabla_K L)\eta(X) \end{aligned} \quad (4.78)$$

bulunur. ψ bir Riemann submersiyon olduğundan

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta g_M(\nabla_K L, X) &= -g_N(\psi_* \mathcal{H} \nabla_K \omega \phi L, \psi_* X) + g_M(T_K \omega L, BX) \\ &+ g_N(\psi_* \mathcal{H} \nabla_K \omega L, \psi_* CX) - \eta(\nabla_K L)\eta(X) \end{aligned} \quad (4.79)$$

yazılabilir. $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ için $\sin^2 \theta \neq 0$ olduğundan, sol tarafın sıfır olması için gerek ve yeter şart sağ tarafın sıfır olmasıdır. O halde

$$g_N(\psi_* \mathcal{H} \nabla_K \omega \phi L, \psi_* X) - g_N(\psi_* \mathcal{H} \nabla_K \omega L, \psi_* CX) = g_M(T_K \omega L, BX) - \eta(\nabla_K L)\eta(X) \quad (4.80)$$

elde edilir. D_2 'nin total geodezik olması için gerek ve yeter şart (4.69) ve (4.80) in sağlanmasıdır.

4.5. Teorem $(M, \varphi, \xi, \eta, g_M)$ bir Kenmotsu manifold (N, g_N) bir Riemann manifold ve $\psi: M \rightarrow N$ bir yarı slant $\xi^\perp$ - Riemann submersiyon olsun. ψ_* in total geodezik olması için gerek ve yeter şart $\forall X, Y \in \Gamma(\psi_*^{-1} D_1), U \in \Gamma(D_1), V \in \Gamma(D_2)$ için

$$g_M(BY, \nabla_X \phi U) + g_M(BY, A_X \omega U) = -g_N(\psi_* CY, \psi_* A_X \phi U) - g_N(\psi_* CY, \psi_* H \nabla_X \omega U) \quad (4.81)$$

ve

$$g_N(\psi_* A_X BY, \psi_* \omega V) - g_N(\psi_* H \nabla_X CY, \psi_* \omega V) = g_M(\nabla_X Y, \omega \phi v) \quad (4.82)$$

olmasıdır.

İspat $\forall X, Y \in \text{çek}(\psi_*)^\perp, U \in \Gamma(D_1), V \in \Gamma(D_2)$ olsun. $\text{çek}(\psi_*)^\perp$ in total geodezik olması için $g_M(\nabla_X Y, U) = 0$ ve $g_M(\nabla_X Y, V) = 0$ olmalıdır. İlk olarak $g_M(\nabla_X Y, U) = 0$ durumunu inceleyelim. (2.38) den

$$g_M(\nabla_X Y, U) = g_M(\phi \nabla_X Y, \phi U) - \eta(\nabla_X Y) \eta(U) \quad (4.83)$$

yazılabilir. $\eta(U) = 0$ ve $\phi \nabla_X Y$ nin eşitliği kullanılırsa

$$g_M(\nabla_X Y, U) = g_M(\nabla_X \phi Y, \phi U) - g_M((\nabla_X \phi)Y, \phi U) \quad (4.84)$$

yazılır. Diğer taraftan $g_M(\phi Y, \phi U) = 0$ olduğundan $X g_M(\phi Y, \phi U) = 0$ olup buradan

$$g_M(\nabla_X \phi Y, \phi U) + g_M(\phi Y, \nabla_X \phi U) = 0 \quad (4.85)$$

veya

$$g_M(\nabla_X \phi Y, \phi U) = -g_M(\phi Y, \nabla_X \phi U) \quad (4.86)$$

bulunur. $g_M(\nabla_X Y, U)$ nin $-g_M(\phi Y, \nabla_X \phi U)$ eşit olduğundan (4.86) da (3.5) kullanılırsa

$$g_M(\nabla_X Y, U) = -g_M(BY + CY, \nabla_X \phi U) \quad (4.87)$$

yazılır. Buradan

$$g_M(\nabla_X Y, U) = -g_M(BY, \nabla_X \phi U) - g_M(CY, \nabla_X \phi U) \quad (4.88)$$

olup (3.4) ten

$$\begin{aligned} g_M(\nabla_X Y, U) &= -g_M(BY, \nabla_X(\phi U + \omega U)) \\ &\quad -g_M(CY, (\nabla_X(\phi U + \omega U))) \end{aligned} \quad (4.89)$$

veya

$$\begin{aligned} g_M(\nabla_X Y, U) &= -g_M(BY, \nabla_X \phi U) - g_M(BY, \nabla_X \omega U) \\ &\quad -g_M(CY, \nabla_X \phi U) - g_M(CY, \nabla_X \omega U) \end{aligned} \quad (4.90)$$

yazılabilir. O halde (2.33) ve (2.34) den

$$\begin{aligned} g_M(\nabla_X Y, U) &= -g_M(BY, \mathcal{V}\nabla_X \phi U + A_X \phi U) - g_M(BY, A_X \omega U + \mathcal{H}\nabla_X \omega U) \\ &\quad -g_M(CY, \mathcal{V}\nabla_X \phi U + A_X \phi U) - g_M(CY, A_X \omega U + \mathcal{H}\nabla_X \omega U) \end{aligned} \quad (4.91)$$

veya

$$\begin{aligned} g_M(\nabla_X Y, U) &= -g_M(BY, \mathcal{V}\nabla_X \phi U) - g_M(BY, A_X \phi U) - g_M(BY, A_X \omega U) \\ &\quad -g_M(BY, \mathcal{H}\nabla_X \omega U) - g_M(CY, \mathcal{V}\nabla_X \phi U) - g_M(CY, A_X \phi U) \\ &\quad -g_M(CY, A_X \omega U) - g_M(CY, \mathcal{H}\nabla_X \omega U) \end{aligned} \quad (4.92)$$

bulunur. $g_M(\nabla_X Y, U) = 0$ olduğundan

$$\begin{aligned} g_M(\nabla_X Y, U) &= -g_M(BY, \mathcal{V}\nabla_X \phi U) - g_M(BY, A_X \omega U) \\ &\quad -g_M(CY, A_X \phi U) - g_M(CY, \mathcal{H}\nabla_X \omega U) \end{aligned} \quad (4.93)$$

ve

$$\begin{aligned} g_M(BY, \mathcal{V}\nabla_X \phi U) + g_M(BY, A_X \omega U) &= -g_N(\psi_* CY, \psi_* A_X \phi U) \\ &\quad -g_N(\psi_* CY, \psi_* \mathcal{H}\nabla_X \omega U) \end{aligned} \quad (4.94)$$

elde edilir. Diğer yandan (2.38) den ve $g(\nabla_X Y, V) = 0$ olduğundan

$$g_M(\nabla_X Y, V) = g_M(\varphi \nabla_X Y, \varphi V) - \eta(\nabla_X Y)\eta(V) \quad (4.95)$$

elde edilir. Buradan (3.4) kullanılırsa

$$g_M(\nabla_X Y, V) = g_M(\nabla_X \varphi Y, \phi V + \omega V) \quad (4.96)$$

veya

$$g_M(\nabla_X Y, U) = -g_M(\varphi \nabla_X Y, \phi V) + g_M(\nabla_X \varphi Y, \omega V) \quad (4.97)$$

bulunur. (4.97) de (3.8) eşitliği kullanılırsa

$$g_M(\nabla_X Y, V) = g_M(\nabla_X Y, \varphi \phi V) + g_M(\nabla_X \varphi Y, \omega V) \quad (4.98)$$

yazılabilir. Buradan (3.4) ve (3.5) kullanılırsa

$$\begin{aligned} g_M(\nabla_X Y, V) &= g_M(\nabla_X Y, \phi^2 V + \omega \phi V) + g_M(\nabla_X (BY + CY), \omega V) \\ &= g_M(\nabla_X Y, \phi^2 V) + g_M(\nabla_X Y, \omega \phi V) + g_M(\nabla_X BY, \omega V) \\ &\quad + g_M(\nabla_X CY, \omega V) \end{aligned} \quad (4.99)$$

elde edilir. (2.34) ve (3.28) den

$$\begin{aligned} g_M(\nabla_X Y, V) &= g_M(\nabla_X Y, \cos^2 \theta V) + g_M(\nabla_X Y, \omega \phi V) \\ &\quad + g_M(A_X BY + \mathcal{H} \nabla_X BY, \omega V) + g_M(A_X CY + \mathcal{H} \nabla_X CY, \omega V) \end{aligned} \quad (4.100)$$

yazılır. Buradan

$$\begin{aligned} (1 - \cos^2 \theta) g_M(\nabla_X Y, V) &= g_M(\nabla_X Y, \omega \phi V) + g_M(A_X BY, \omega V) + g_M(\mathcal{H} \nabla_X BY, \omega V) \\ &\quad + g_M(A_X CY, \omega V) + g_M(\mathcal{H} \nabla_X CY, \omega V) \end{aligned} \quad (4.101)$$

$$\begin{aligned}
(\sin^2 \theta) g_M(\nabla_X Y, V) &= g_M(\nabla_X Y, \omega \phi v) + g_M(A_X B Y, \omega V) \\
&+ g_M(\mathcal{H} \nabla_X C Y, \omega V)
\end{aligned} \tag{4.102}$$

bulunur. $\sin^2 \theta \neq 0$ olduğundan, eşitliğin sağ tarafı sıfır olmalıdır. O halde

$$-g_N(\psi_* A_X B Y, \psi_* \omega V) - g_N(\psi_* \mathcal{H} \nabla_X C Y, \psi_* \omega V) = g_M(\nabla_X Y, \omega \phi v) \tag{4.103}$$

elde edilir. $\text{çek}(\psi_*)^\perp$ in total geodezik olması için gerek ve yeter şart (4.94) ve (4.103) ün sağlanmasıdır.

4.6. Teorem $(M, \varphi, \xi, \eta, g_M)$ bir Kenmotsu manifold (N, g_N) bir Riemann manifold ve $\psi: M \rightarrow N$ bir yarı slant $\xi^\perp$ — Riemann submersiyon olsun. $X, Y \in \text{çek}(\psi_*)^\perp$, $U \in \Gamma(D_1)$, $V \in \Gamma(D_2)$ için $\text{çek}(\psi_*)^\perp$ in integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned}
&g_N(\psi_* C Y, \psi_* A_X \phi U) + g_N(\psi_* C Y, \psi_* \mathcal{H} \nabla_X \omega U) - g_N(\psi_* C X, \psi_* A_Y \phi U) \\
&- g_N(\psi_* C X, \psi_* \mathcal{H} \nabla_Y \omega U) = -g_M(B Y, \nabla_X \phi U) - g_M(B Y, A_X \omega U) \\
&+ g_M(B X, V \nabla_Y \phi U) + g_M(B X, A_Y \omega U)
\end{aligned} \tag{4.104}$$

ve

$$\begin{aligned}
g_M([Y, X], \omega \phi V) &= -g_N(\psi_* A_X B Y, \psi_* \omega V) - g_N(\psi_* \mathcal{H} \nabla_X C Y, \psi_* \omega V) \\
&+ g_N(\psi_* A_Y B X, \psi_* \omega V) + g_N(\psi_* \mathcal{H} \nabla_Y C X, \psi_* \omega V)
\end{aligned} \tag{4.105}$$

olmasıdır.

İspat $\forall X, Y \in \text{çek}(\psi_*)^\perp$, $U \in \Gamma(D_1)$, $V \in \Gamma(D_2)$ için $g_M([X, Y], U) = 0$ ve $g_M([X, Y], V) = 0$ olması durumlarını inceleyelim. (2.38) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
g_M([X, Y], U) &= g_M(\varphi \nabla_X Y, \varphi U) - \eta(\nabla_X Y) \eta(U) \\
&- g_M(\varphi \nabla_Y X, \varphi U) - \eta(\nabla_Y X) \eta(U)
\end{aligned} \tag{4.106}$$

bulunur. Buradan

$$g_M([X, Y], U) = g_M(\nabla_X \varphi Y - (\nabla_X \varphi)Y, \varphi U) - g_M(\nabla_Y \varphi X - (\nabla_Y \varphi)X, \varphi U) \quad (4.107)$$

yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned} g_M([X, Y], U) &= g_M(\nabla_X \varphi Y, \varphi U) - g_M((\nabla_X \varphi)Y, \varphi U) \\ &\quad - g_M(\nabla_Y \varphi X, \varphi U) + g_M((\nabla_Y \varphi)X, \varphi U) \end{aligned} \quad (4.108)$$

bulunur. Buradan (2.42) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} g_M([X, Y], U) &= g_M(\nabla_X \varphi Y, \varphi U) - g_M(g_M(\varphi X, Y)\xi - \eta(X)\varphi Y, \varphi U) \\ &\quad - g_M(\nabla_Y \varphi X, \varphi U) + g_M(g_M(\varphi Y, X)\xi - \eta(Y)\varphi X, \varphi U) \end{aligned} \quad (4.109)$$

elde edilir. $\eta(Y) = 0$ olduğundan

$$\begin{aligned} g_M([X, Y], U) &= g_M(\nabla_X \varphi Y, \varphi U) - g_M(\varphi X, Y)g(\xi, \varphi U) \\ &\quad - g_M(\nabla_Y \varphi X, \varphi U) + g_M(\varphi Y, X)g_M(\xi, \varphi U) \end{aligned} \quad (4.110)$$

veya

$$g_M([X, Y], U) = -g_M(\varphi Y, \nabla_X \varphi U) + g_M(\varphi X, \nabla_Y \varphi U) \quad (4.111)$$

bulunur. O halde (3.5) kullanılırsa

$$\begin{aligned} g_M([X, Y], U) &= -g_M(BY + CY, \nabla_X(\phi U + \omega U)) \\ &\quad + g_M(BX + CX, \nabla_Y(\phi U + \omega U)) \end{aligned} \quad (4.112)$$

yazılır. Buradan (3.4) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} g_M([X, Y], U) &= -g_M(BY, \nabla_X \phi U) - g_M(CY, \nabla_X \phi U) - g_M(BY, \nabla_X \omega U) \\ &\quad - g_M(CY, \nabla_X \omega U) + g_M(BX, \nabla_Y \phi U) + g_M(CX, \nabla_Y \phi U) \\ &\quad + g_M(BX, \nabla_Y \omega U) + g_M(CX, \nabla_Y \omega U) \end{aligned} \quad (4.113)$$

yazılabilir. (2.33) ve (2.34) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}
 g_M([X, Y], U) = & -g_M(BY, \mathcal{V}\nabla_X \phi U + A_X \phi U) - g_M(CY, \mathcal{V}\nabla_X \phi U + A_X \phi U) \\
 & -g_M(BY, A_X \omega U + \mathcal{H}\nabla_X \omega U) - g_M(CY, A_X \omega U + \mathcal{H}\nabla_X \omega U) \\
 & +g_M(BX, \mathcal{V}\nabla_Y \phi U + A_Y \phi U) + g_M(CX, \mathcal{V}\nabla_Y \phi U + A_Y \phi U) \\
 & +g_M(BX, \mathcal{V}\nabla_Y \omega U + A_Y \omega U) + g_M(CX, A_Y \omega U + \mathcal{H}\nabla_Y \omega U) \quad (4.114)
 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
 g_M([X, Y], U) = & -g_M(BY, \mathcal{V}\nabla_X \phi U) - g_M(BY, A_X \omega U) - g_M(CY, A_X \phi U) \\
 & -g_M(CY, \mathcal{H}\nabla_X \omega U) + g_M(BX, \mathcal{V}\nabla_Y \phi U) + g_M(CX, A_Y \phi U) \\
 & +g_M(BX, A_Y \omega U) + g_M(CX, \mathcal{H}\nabla_Y \omega U) \quad (4.115)
 \end{aligned}$$

bulunur ki $g_M([X, Y], U) = 0$ olduğundan gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
 g_N(\psi_* CY, \psi_* A_X \phi U) + g_N(\psi_* CY, \psi_* \mathcal{H}\nabla_X \omega U) - g_N(\psi_* CX, \psi_* A_Y \phi U) \\
 -g_N(\psi_* CX, \psi_* \mathcal{H}\nabla_Y \omega U) = & -g_M(BY, \nabla_X \phi U) - g_M(BY, A_X \omega U) \\
 & +g_M(BX, \mathcal{V}\nabla_Y \phi U) + g_M(BX, A_Y \omega U) \quad (4.116)
 \end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan Lie braket, konneksiyonun metrikle bağdaşma, bilineerlik özellikleri ve (2.38) eşitliği kullanılırsa

$$g_M([X, Y], V) = g_M(\phi \nabla_X Y, \phi V) - \eta(\nabla_X Y)\eta(V) - g_M(\phi \nabla_Y X, \phi V) - \eta(\nabla_Y X)\eta(V) \quad (4.117)$$

bulunur. (2.37) ve (3.4) eşitliklerinden

$$g_M([X, Y], V) = g_M(\phi \nabla_X Y, \phi V + \omega V) - g_M(\phi \nabla_Y X, \phi V + \omega V) \quad (4.118)$$

yazılır. O halde

$$g_M([X, Y], V) = g_M(\phi \nabla_X Y, \phi V) + g_M(\phi \nabla_X Y, \omega V)$$

$$-g_M(\varphi \nabla_Y X, \phi V) - g_M(\varphi \nabla_Y X, \omega V) \quad (4.119)$$

bulunur. (3.4) eşitliğinden

$$\begin{aligned} g_M([X, Y], V) &= -g_M(\nabla_X Y, \varphi \phi V) + g_M(\nabla_X \varphi Y, \omega V) \\ &+ g_M(\nabla_Y X, \varphi \phi V) - g_M(\nabla_Y \varphi X, \omega V) \end{aligned} \quad (4.120)$$

yazılabilir. (4.120) de (3.4) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} g_M([X, Y], V) &= -g_M(\nabla_X Y, \phi \phi V + \omega \phi V) + g_M(\nabla_X \varphi Y, \omega V) \\ &+ g_M(\nabla_Y X, \phi \phi V + \omega \phi V) - g_M(\nabla_Y \varphi X, \omega V) \end{aligned} \quad (4.121)$$

veya

$$\begin{aligned} g_M([X, Y], V) &= g_M(\nabla_X Y, \phi^2 V) - g_M(\nabla_X Y, \omega \phi v) + g_M(\nabla_X \varphi Y, \omega V) \\ &+ g_M(\nabla_Y X, \phi^2 V) + g_M(\nabla_Y X, \omega \phi V) - g_M(\nabla_Y \varphi X, \omega V) \end{aligned} \quad (4.122)$$

bulunur. (3.5) ve (3.28) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} g_M([X, Y], V) &= -g_M(\nabla_X Y, \cos^2 \theta V) - g_M(\nabla_X Y, \omega \phi v) + g_M(\nabla_X (BY + CY), \omega V) \\ &+ g_M(\nabla_Y X, \cos^2 \theta V) + g_M(\nabla_Y X, \omega \phi v) \\ &- g_M(\nabla_Y (BX + CX), \omega V) \end{aligned} \quad (4.123)$$

yazılır. O halde

$$\begin{aligned} g_M([X, Y], V) &= \cos^2 \theta g_M(\nabla_Y X, V) - \cos^2 \theta g_M(\nabla_X Y, V) + g_M(\nabla_Y X, \omega \phi v) \\ &- g_M(\nabla_X Y, \omega \phi v) + g_M(\nabla_X BY, \omega V) + g_M(\nabla_X CY, \omega V) \\ &- g_M(\nabla_Y BX, \omega V) + g_M(\nabla_Y CX, \omega V) \end{aligned} \quad (4.124)$$

elde edilir. (2.33) ve (2.34) den

$$\begin{aligned}
g_M([X, Y], V) &= \cos^2 \theta (g_M(\nabla_Y X - \nabla_X Y, V) + g_M(\nabla_Y X - \nabla_X Y, \omega \phi v) + g_M(\mathcal{V} \nabla_X B Y \\
&\quad + A_X B Y, \omega V) + g_M(A_X C Y + \mathcal{H} \nabla_X C Y, \omega V) - g_M(\mathcal{V} \nabla_Y B X + A_Y B X, \omega V) \\
&\quad - g_M(A_Y C X + \mathcal{H} \nabla_Y C X, \omega V))
\end{aligned} \tag{4.125}$$

bulunur. Buradan lie braket özelliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
g_M([X, Y], V) &= \cos^2 \theta g_M([X, Y], V) + g_M([Y, X], \omega \phi v) + g_M(\mathcal{V} \nabla_X B Y, \omega V) \\
&\quad + g_M(A_X B Y, \omega V) + g_M(A_X C Y, \omega V) + g_M(\mathcal{H} \nabla_X C Y, \omega V) \\
&\quad - g_M(\mathcal{V} \nabla_Y B X, \omega V) - g_M(A_Y B X, \omega V) \\
&\quad - g_M(A_Y C X, \omega V) - g_M(\mathcal{H} \nabla_Y C X, \omega V)
\end{aligned} \tag{4.126}$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
(1 - \cos^2 \theta) g_M([X, Y], V) &= g_M([Y, X], \omega \phi V) + g_M(A_X B Y, \omega V) \\
&\quad + g_M(\mathcal{H} \nabla_X C Y, \omega V) - g_M(A_Y B X, \omega V) \\
&\quad - g_M(\mathcal{H} \nabla_Y C X, \omega V)
\end{aligned} \tag{4.127}$$

veya

$$\begin{aligned}
\sin^2 \theta g_M([X, Y], V) &= g_M([Y, X], \omega \phi V) + g_N(\psi_* A_X B Y, \psi_* \omega V) \\
&\quad + g_N(\psi_* \mathcal{H} \nabla_X C Y, \psi_* \omega V) - g_N(\psi_* A_Y B X, \psi_* \omega V) \\
&\quad - g_N(\psi_* \mathcal{H} \nabla_Y C X, \psi_* \omega V)
\end{aligned} \tag{4.128}$$

elde edilir. $\sin^2 \theta \neq 0$ olduğundan sağ taraf sıfır olmalıdır. O halde

$$\begin{aligned}
g_M([Y, X], \omega \phi V) &= -g_N(\psi_* A_X B Y, \psi_* \omega V) - g_N(\psi_* \mathcal{H} \nabla_X C Y, \psi_* \omega V) \\
&\quad + g_N(\psi_* A_Y B X, \psi_* \omega V) + g_N(\psi_* \mathcal{H} \nabla_Y C X, \psi_* \omega V)
\end{aligned} \tag{4.129}$$

elde edilir. Buradan çek $(\psi_*)^\perp$ ın integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart (4.116) ve (4.129) un sağlanmasıdır.

4.7. Teorem $(M, \varphi, \xi, \eta, g_M)$ bir Kenmotsu manifold (N, g_N) bir Riemann manifold ve $\psi: M \rightarrow N$ bir yarı slant $\xi^\perp$ - Riemann submersiyon olsun. $\forall U, V \in \text{çek}\psi_* X \in \text{çek}(\psi_*)^\perp$ için $\text{çek}(\psi_*)$ in total geodezik olması için gerek ve yeter şart

$$g_M(\omega\phi V, \nabla_U X) = g_N(\psi_*\omega V, \psi_*A_U BX) + g_N(\psi_*\omega V, \psi_*\mathcal{H}\nabla_U CX) \quad (4.130)$$

olmasıdır.

İspat $\forall U, V \in \text{çek}\psi_* X \in \text{çek}(\psi_*)^\perp$ için (3.4) kullanılırsa

$$g_M(\nabla_U V, X) = -g_M(\phi V, \nabla_U \varphi X) - g_M(\omega V, \nabla_U \varphi X) \quad (4.131)$$

bulunur. Buradan

$$g_M(\nabla_U V, X) = g_M(\varphi\phi V, \nabla_U X) - g_M(\omega V, \nabla_U \varphi X) \quad (4.132)$$

olduğundan (3.4) eşitliği kullanılırsa

$$g_M(\nabla_U V, X) = g_M(\phi^2 V, \nabla_U X) + g_M(\omega\phi V, \nabla_U X) - g_M(\omega V, \nabla_U \varphi X) \quad (4.133)$$

olup buradan

$$g_M(\nabla_U V, X) = g_M(-\cos^2\theta V, \nabla_U X) + g_M(\omega\phi V, \nabla_U X) - g_M(\omega V, \nabla_U \varphi X) \quad (4.134)$$

yazılabilir. (4.134) de (3.5) kullanılırsa

$$\begin{aligned} g_M(\nabla_U V, X) &= -\cos^2\theta g_M(V, \nabla_U X) + g_M(\omega\phi V, \nabla_U X) \\ &\quad - g_M(\omega V, \nabla_U (BX + CX)) \end{aligned} \quad (4.135)$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} g_M(\nabla_U V, X) &= \cos^2\theta g_M(\nabla_U X, V) + g_M(\omega\phi V, \nabla_U X) \\ &\quad - g_M(\omega V, \nabla_U BX) - g_M(\omega V, \nabla_U CX) \end{aligned} \quad (4.136)$$

olup (2.32) ve (2.34) den

$$\begin{aligned} g_M(\nabla_U V, X) - \cos^2 \theta g_M(\nabla_U X, V) &= g_M(\omega \phi V, \nabla_U X) - g_M(\omega V, \mathcal{V} \nabla_U BX + A_U BX) \\ &\quad - g_M(\omega V, A_U CX + \mathcal{H} \nabla_U CX) \end{aligned} \quad (4.137)$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} (1 - \cos^2 \theta) g_M(\nabla_U X, V) &= g_M(\omega \phi V, \nabla_U X) - g_M(\omega V, \mathcal{V} \nabla_U BX) - g_M(\omega V, A_U BX) \\ &\quad - g_M(\omega V, A_U CX) - g_M(\omega V, \mathcal{H} \nabla_U CX) \end{aligned} \quad (4.138)$$

yazılabilir. (4.138) Denkleminde gerekli düzenlemeler yapılırsa $\sin^2 \theta g_M(\nabla_U X, V) = g_M(\omega \phi V, \nabla_U X) - g_M(\omega V, A_U BX) - g_M(\omega V, \mathcal{H} \nabla_U CX)$ olup ψ Riemann submersiyon olduğundan

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta g_M(\nabla_U X, V) &= g_M(\omega \phi V, \nabla_U X) - g_N(\psi_* \omega V, \psi_* A_U BX) \\ &\quad - g_N(\psi_* \omega V, \psi_* \mathcal{H} \nabla_U CX) \end{aligned} \quad (4.139)$$

bulunur. $\sin^2 \theta \neq 0$ olduğundan sağ taraf sıfır olmalıdır. O halde;

$$g_M(\omega \phi V, \nabla_U X) = g_N(\psi_* \omega V, \psi_* A_U BX) + g_N(\psi_* \omega V, \psi_* \mathcal{H} \nabla_U CX) \quad (4.140)$$

elde edilir.

5. SUBMERSİYONLARIN GEOMETRİSİ

Bu bölümde bir yarı slant $\xi^\perp$ –Riemann submersiyonun total umbilik liflerini ve total geodeziklik şartlarını inceleyeceğiz. İlk olarak yarı slant $\xi^\perp$ –Riemann submersiyonun total umbilik olması için yeni bir şart verelim:

ψ iki Riemann manifold arasında Riemann submersiyon olsun. $\forall V, W \in \text{çek}(\psi_*)$ için $T_V W = g(V, W)H$ ise ψ Riemann Submersiyonu total umbilik liflere sahiptir denir. Burada H liflerin ortalama eğrilik vektörüdür.

5.1. Teorem $(M, \varphi, \xi, \eta, \hat{g})$ bir Kenmotsu manifold (N, g_N) bir Riemann manifold ve $\psi: M \rightarrow N$ bir total umbilik lifler ile yarı slant $\xi^\perp$ – Riemann submersiyon olsun. Bu taktirde ortalama eğrilik H için $H \in \Gamma(wD_2)$ ' dir.

İspat $W_1, W_2 \in \Gamma(D_1)$ için konneksiyonun özelliğinden $(\nabla_{W_1} \varphi)W_2 - \nabla_{W_1}(\varphi W_2)$ yerine $-\varphi \nabla_{W_1} W_2$ yazılıp (2.42) ve (2.31) kullanılırsa

$$\hat{g}(\varphi W_1, W_2)\xi + \eta(W_2)\varphi W_1 - T_{W_1} \varphi W_2 - \hat{\nabla}_{W_1} \varphi W_2 = -\varphi(T_{W_1} W_2 + \hat{\nabla}_{W_1} W_2) \quad (5.1)$$

elde edilir. (3.4), (3.5) eşitlikleri kullanılırsa

$$\hat{g}(\varphi W_1, W_2)\xi - T_{W_1} \varphi W_2 - \hat{\nabla}_{W_1} \varphi W_2 = -BT_{W_1} W_2 - CT_{W_1} W_2 - \phi \hat{\nabla}_{W_1} W_2 - \omega \hat{\nabla}_{W_1} W_2 \quad (5.2)$$

yazılabilir. $L\epsilon\mu$ alınarak

$$\begin{aligned} \hat{g}(\varphi W_1, W_2)\hat{g}(L, \xi) - \hat{g}(T_{W_1} \varphi W_2, L) - g_M(\hat{\nabla}_{W_1} \varphi W_2, L) \\ = -\hat{g}(BT_{W_1} W_2, L) - \hat{g}(CT_{W_1} W_2, L) \\ -g_M(\phi \hat{\nabla}_{W_1} W_2, L) - g_M(\omega \hat{\nabla}_{W_1} W_2, L) \end{aligned} \quad (5.3)$$

bulunur ve (3.8) kullanılırsa

$$\hat{g}(\varphi W_1, W_2)g(\xi, Z) - \hat{g}(T_{W_1}\varphi W_2, L) = \hat{g}(T_{W_1}W_2, CL) \quad (5.4)$$

yazılır. $T_{W_1}W_2 = \hat{g}(W_1, W_2)H$ olduğundan

$$\hat{g}(\varphi W_1, W_2)\hat{g}(\xi, Z) - \hat{g}(g_M(W_1, \varphi W_2)H, L) = \hat{g}(\hat{g}(W_1, W_2)H, \varphi L) \quad (5.5)$$

elde edilir. Buradan

$$\hat{g}(\varphi W_1, W_2)\hat{g}(\xi, Z) = \hat{g}(W_1, \varphi W_2)\hat{g}(H, L) + \hat{g}(W_1, W_2)\hat{g}(H, \varphi L) \quad (5.6)$$

veya

$$-\hat{g}(\varphi W_2, W_1)\hat{g}(\xi, Z) = -\hat{g}(W_1, \varphi W_2)\hat{g}(H, L) + \hat{g}(W_2, W_1)\hat{g}(H, \varphi L) \quad (5.7)$$

bulunur. W_1 ve W_2 nin yeri değiştirilerek (5.6) ve (5.7) taraf tarafa toplanırsa

$$2\hat{g}(\varphi W_1, W_2) = -2\hat{g}(\varphi W_1, W_2)\hat{g}(H, L) \quad (5.8)$$

bulunur. Buradan $\hat{g}(H, L) = 0$ olmalıdır. Bu da bize gösterir ki $H \in \Gamma(wD_2)$ dır.

Şimdi, yarı slant $\xi^\perp$ –Riemann submersiyonun total geodezik olması durumunu inceleyelim. ψ iki Riemann manifold arasında diferansiyellenebilir bir dönüşüm olsun. Eğer $\nabla\psi_* = 0$ ise ψ 'ye total geodezik dönüşüm denir.

5.2. Teorem $(M, \varphi, \xi, \eta, \hat{g})$ bir Kenmotsu manifold $(N, \bar{g})$ bir Riemann manifold ve $\psi: M \rightarrow N$ bir total umbilik lifler ile yarı slant $\xi^\perp$ – Riemann submersiyon olsun. ψ 'nin total geodezik olması için $\forall X \in \Gamma(\text{çek}(\psi_*)^\perp)$, $Z = Z_1 + Z_2$ $Z \in \Gamma(TM)$ $Z_1 \in \Gamma(\text{çek}(\psi_*))$ $Z_2 \in \Gamma(\text{çek}(\psi_*)^\perp)$ için

$$\begin{aligned}
-\nabla_X \psi_* Z_2 &= \nabla_X \psi_* Z_2 + \psi_*(C(A_X \phi Z_1 + \mathcal{H} \nabla_X \omega Z_1 + A_X B Z_2 + \mathcal{H} \nabla_X C Z_2) \\
&\quad + \omega(\mathcal{V} \nabla_X \phi Z_1 + A_X \omega Z_1 + \mathcal{V} \nabla_X B Z_2 + A_X C Z_2 \\
&\quad - \eta(Z_2) C X - \eta(X) \eta(Z_2) - g_M(Z_2, C X) \xi)
\end{aligned} \tag{5.9}$$

olmasıdır.

İspat $X \in \Gamma(\text{çek}(\psi_*)^\perp)$, $Z \in \Gamma(TM)$ için

$$(\nabla_X \varphi)Z - \nabla_X(\varphi Z) = -\varphi \nabla_X Z \tag{5.10}$$

olup, her iki taraf φ ile işleme tabi tutulursa,

$$\varphi(\nabla_X \varphi)Z = \varphi \nabla_X(\varphi Z) - \varphi^2 \nabla_X Z \tag{5.11}$$

elde edilir. Buradan (2.36) eşitliği kullanılırsa

$$\nabla_X Z = \varphi(\nabla_X \varphi)Z - \varphi \nabla_X \varphi Z + \eta(\nabla_X Z) \xi \tag{5.12}$$

olur. O halde

$$\nabla(\psi_*)(X, Z) = \nabla_X \psi_* Z - \psi_*(\varphi(\nabla_X \varphi)Z - \varphi \nabla_X \varphi Z + \eta(\nabla_X Z) \xi) \tag{5.13}$$

veya

$$\nabla(\psi_*)(X, Z) = \nabla_X \psi_* Z - \psi_*(\varphi(g_M(\varphi X, Z) \xi - \eta(Z) \varphi X) - \varphi(\nabla_X \varphi)Z + \eta(\nabla_X Z) \xi) \tag{5.14}$$

yazılabilir. $Z = Z_1 + Z_2$ olup burada Z_1 ve Z_2 dikey ve yatay parçaları göstermektedir.

Buradan

$$\begin{aligned}
\nabla(\psi_*)(X, Z) &= \nabla_X \psi_* Z - \psi_*(\varphi(g_M(\varphi X, Z) \xi - \eta(Z) \varphi X) - \varphi \nabla_X \varphi Z_1 \\
&\quad - \varphi \nabla_X \varphi Z_2 + \eta(\nabla_X Z) \xi)
\end{aligned} \tag{5.15}$$

veya

$$\nabla(\psi_*)(X, Z) = \nabla_X \psi_* Z - \psi_*(\varphi(g_M(\varphi X, Z) \xi - \eta(Z) \varphi X) - \varphi \nabla_X \varphi Z_1$$

$$-\varphi \nabla_X \varphi B Z_2 - \varphi \nabla_X \varphi C Z_2 + \eta(\nabla_X Z) \xi) \quad (5.16)$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} \nabla(\psi_*)(X, Z) &= \nabla_X \psi_* Z - \psi_*(-\eta(Z)\varphi^2 - \varphi \nabla_X \phi Z_1 - \varphi \nabla_X \omega Z_1) \\ &\quad - \varphi \nabla_X B Z_2 - \varphi \nabla_X C Z_2 + \eta(\nabla_X Z) \xi) \end{aligned} \quad (5.17)$$

veya

$$\begin{aligned} \nabla(\psi_*)(X, Z) &= \nabla_X \psi_* Z - \psi_*(-\eta(Z)\varphi^2 - \varphi \mathcal{V} \nabla_X \phi Z_1 - \varphi A_X \phi Z_1 - \varphi \mathcal{H} \nabla_X \omega Z_1 \\ &\quad - \varphi \mathcal{V} \nabla_X B Z_2 - \varphi \nabla_X B Z_2 - \varphi A_X B Z_2 - \varphi A_X C Z_2 \\ &\quad - \varphi \mathcal{H} \nabla_X C Z_2 + \eta(\nabla_X Z) \xi) \end{aligned} \quad (5.18)$$

bulunur. (3.3), (3.4) ve (3.5) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} (\nabla_X \psi_*)Z &= \nabla_X \psi_* Z - \psi_*(-\eta(Z)\varphi^2 - \phi \mathcal{V} \nabla_X \phi Z_1 - \omega \mathcal{V} \nabla_X \phi Z_1 - B A_X \phi Z_1 - C A_X \phi Z_1 \\ &\quad - \phi A_X \omega Z_1 - \omega A_X \omega Z_1 - B \mathcal{H} \nabla_X \omega Z_1 - C \mathcal{H} \nabla_X \omega Z_1 - \varphi \mathcal{V} \nabla_X B Z_2 \\ &\quad + \phi \mathcal{V} \nabla_X B Z_2 - \omega \mathcal{V} \nabla_X B Z_2 - B A_X B Z_2 - C A_X B Z_2 - \phi A_X C Z_2 \\ &\quad - \omega A_X C Z_2 - B \mathcal{H} \nabla_X C Z_2 - C \mathcal{H} \nabla_X C Z_2 + \eta(\nabla_X Z) \xi) \end{aligned} \quad (5.19)$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} (\nabla_X \psi_*)Z &= \nabla_X \psi_* Z - \psi_*(\eta(Z_2) - \eta(Z_2))\eta(X)\xi - \omega \mathcal{V} \nabla_X \phi Z_1 - C A_X \phi Z_1 - \phi A_X \omega Z_1 \\ &\quad - C \mathcal{H} \nabla_X \omega Z_1 - \omega \mathcal{V} \nabla_X B Z_2 - C A_X B Z_2 \\ &\quad - \omega A_X C Z_2 - C \mathcal{H} \nabla_X C Z_2 + \eta(\nabla_X Z) \xi \end{aligned} \quad (5.20)$$

bulunur ki bu da istenendir.

6. KENMOTSU SPACE FORM İLE $\xi^\perp$ -RIEMANN SUBMERSİYON

Bu bölümde semi slant $\xi^\perp$ -Riemann submersiyonun tanımından ortaya çıkan distrübüsyonların eğrilik özelliklerini ve Einstein olma şartlarını inceleyeceğiz. Sabit φ kesitsel eğrilikli Kenmotsu manifolda Kenmotsu Space Form denir. Sabit kesitsel eğrilik c olmak üzere Kenmotsu space formun Riemann eğrilik tensörü

$$\begin{aligned}
 R(U_1, U_2, U_3, U_4) = & \frac{c-3}{4} \{g(U_1, U_2)g_M(U_3, U_4) - g(U_1, U_3)g_M(U_2, U_4)\} \\
 & + \frac{c+1}{4} \{g(U_2, U_4)\eta(U_1)\eta(U_3) - g(U_1, U_4)\eta(U_2)\eta(U_3) \\
 & + g(U_1, U_3)\eta(U_2)\eta(U_4) - g(U_2, U_3)\eta(U_1)\eta(U_4) \\
 & + g(\varphi U_2, U_3)g(\varphi U_1, U_4) - g(\varphi U_1, U_3)g(\varphi U_2, U_4) \\
 & - 2g(\varphi U_1, U_2)g_M(\varphi U_3, U_4) + g(T_{U_1}U_3, T_{U_2}U_4) \\
 & - g(T_{U_2}U_3, T_{U_1}U_4)\}
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

şeklinde tanımlıdır. $\{e_1, \dots, e_{2p}, e_{2p+1}, \dots, e_{2p+2q}, e_{2p+2q+1}\}$ M 'nin bir ortonormal çatısı olsun. O zaman $D = Sp\{e_1, \dots, e_{2p}\}$, $D_\theta = Sp\{e_{2p+1}, \dots, e_{2p+2q}\}$ ve $\xi = sp\{e_{2p+2q+1}\}$ şeklinde seçebiliriz. Burada $\dim D = 2p$, $\dim D_\theta = 2q$ 'dur.

6.1. Teorem $(M, \varphi, \xi, \eta, \hat{g})$ bir Kenmotsu space form ve $(N, \bar{g})$ bir Riemann manifold $\psi: M \rightarrow N$ bir yarı slant $\xi^\perp$ -Riemann submersiyon olsun. O halde, $\forall W_1, W_2, W_3, W_4 \in \Gamma(D)$ için

$$\begin{aligned}
 R(W_1, W_2, W_3, W_4) = & \frac{c-3}{4} \{ \hat{g}(W_3, W_1)V(W_2, W_4) - \hat{g}(W_2, W_1)\hat{g}(W_3, W_4) \} \\
 & + \frac{c+1}{4} \{ \hat{g}(\varphi W_3, W_1)\hat{g}(\varphi W_2, W_4) - \hat{g}(\varphi W_2, W_1)\hat{g}(\varphi W_3, W_4) \\
 & - 2 \hat{g}(\varphi W_2, W_3)\hat{g}(\varphi W_1, W_4) \} + \hat{g}(T_{W_1}W_2, T_{W_3}W_4) \\
 & - \hat{g}(T_{W_3}W_1, T_{W_2}W_4)
 \end{aligned} \tag{6.2}$$

ve

$$\begin{aligned}
K(W_1, W_2) &= \frac{c-3}{4} \{ \hat{g}^2(W_1, W_2) - 1 \} + \frac{c+1}{4} \{ -3 \hat{g}^2(W_2, \varphi W_1) \} \\
&\quad + \hat{g}(T_{W_1} W_1, T_{W_2} W_2) - \hat{g}(T_{W_2} W_1, T_{W_1} W_2)
\end{aligned} \tag{6.3}$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat $W_1 \in \Gamma(D)$ için $\eta(W_1) = 0$ 'dır. (6.1) den

$$\begin{aligned}
R(W_1, W_2, W_3, W_4) &= \frac{c-3}{4} \{ \hat{g}(W_3, W_1) V(W_2, W_4) - \hat{g}(W_2, W_1) \hat{g}(W_3, W_4) \} \\
&\quad + \frac{c+1}{4} \{ \{ \hat{g}(\varphi W_3, W_1) \hat{g}(\varphi W_2, W_4) - \hat{g}(\varphi W_2, W_1) \hat{g}(\varphi W_3, W_4) \\
&\quad - 2 \hat{g}(\varphi W_2, W_3) \hat{g}(\varphi W_1, W_4) \} + \hat{g}(T_{W_1} W_2, T_{W_3} W_4) \\
&\quad - \hat{g}(T_{W_3} W_1, T_{W_2} V)
\end{aligned} \tag{6.4}$$

elde edilir. Diğer taraftan (6.1) de $W_1 = W_2$ ve $W_3 = W_4$ alınırsa

$$\begin{aligned}
K(W_1, W_2) &= \frac{c-3}{4} \{ \hat{g}(W_2, W_1) \hat{g}(W_1, W_2) - \hat{g}(W_1, W_1) \hat{g}(W_2, W_2) \} \\
&\quad + \frac{c+1}{4} \{ \hat{g}(W_2, W_2) \eta(W_1) \eta(W_1) - \hat{g}(W_1, W_2) \eta(W_2) \eta(W_1) \\
&\quad + \hat{g}(W_1, W_1) \eta(W_2) \eta(W_2) - \hat{g}(W_2, W_1) \eta(W_1) \eta(W_2) \\
&\quad + \hat{g}(\varphi W_2, W_1) \hat{g}(\varphi W_1, W_2) - \hat{g}(\varphi W_1, W_1) \hat{g}(\varphi W_2, W_2) \\
&\quad - 2 \hat{g}(\varphi W_1, W_2) \hat{g}(\varphi W_1, W_2) \} + \hat{g}(T_{W_1} W_1, T_{W_2} W_2) \\
&\quad - \hat{g}(T_V W_1, T_{W_1} W_2)
\end{aligned} \tag{6.5}$$

bulunur ve $\eta(W_1) = 0$ olduğundan (6.3) elde edilir.

6.1. Sonuç $(M, \varphi, \xi, \eta, \hat{g})$ bir Kenmotsu space form ve $(N, \bar{g})$ bir Riemann manifold $\psi: M \rightarrow N$ bir yarı slant $\xi^\perp$ -Riemann submersiyon olsun. D total geodezik ise D 'in skaler eğriliği

$$\tau = \frac{c-3}{4}(2p-1) + \frac{3(c+1)}{4} \cdot 2p \quad (6.6)$$

olarak bulunur.

6.2. Teorem $(M, \varphi, \xi, \eta, \hat{g})$ bir Kenmotsu space form ve $(N, \bar{g})$ bir Riemann manifold $\psi: M \rightarrow N$ bir yarı slant $\xi^\perp$ -Riemann submersiyon olsun. $\forall W_1, W_2 \in \Gamma(D)$ için Ricci eğriliği

$$\begin{aligned} S(W_1, W_2) = & \left(\left(\frac{c-3}{4} \right) (2p-1) + \frac{3(c+1)}{4} \right) \hat{g}(W_1, W_2) \\ & + \sum_{i=1}^{2p} (\hat{g}(T_{e_i} W_1, T_{W_2} e_i) - \hat{g}(T_{W_1} W_2, T_{e_i} e_i)) \end{aligned} \quad (6.7)$$

şeklindedir.

İspat Skaler eğriliğin izinin Ricci eğriliği olduğunu biliyoruz. Yani

$$S(W_1, W_2) = \sum_{i=1}^n R(e_i, W_1, W_2, e_i) \quad (6.8)$$

Burada $\{e_1, \dots, e_{2p}\}$ D nin ortonormal bazı, $W_1, W_2 \in \Gamma(D)$ olup

$$\begin{aligned} S(W_1, W_2) = & \sum_{i=1}^{2p} \frac{c-3}{4} \{ \hat{g}(W_1, W_2) \hat{g}(e_i, e_i) - \hat{g}(e_i, W_2) \hat{g}(W_1, e_i) \} \\ & + \frac{c+1}{4} \{ \hat{g}(\varphi W_1, W_2) \hat{g}(\varphi e_i, e_i) - \hat{g}(\varphi e_i, W_2) \hat{g}(\varphi W_1, e_i) \\ & - 2 \hat{g}(\varphi e_i, W_1) \hat{g}(\varphi W_2, e_i) \} + \hat{g}(T_{e_i} W_2, T_{W_1} e_i) - \hat{g}(T_{W_1} W_2, T_{e_i} e_i) \end{aligned} \quad (6.9)$$

yazılır. $g_M(\varphi e_i, e_i) = 0$ dır. Buradan

$$S(W_1, W_2) = \frac{c-3}{4} \{ 2p \hat{g}(W_1, W_2) - \hat{g}(W_2, W_1) \} + \frac{c+1}{4} \{ \hat{g}(\varphi W_1, \varphi W_2) \}$$

$$+2\hat{g}(\varphi W_2, \varphi W_1)\} + \hat{g}(T_{e_i}W_2, T_{W_1}e_i) - \hat{g}(T_{W_1}W_2, T_{e_i}e_i) \quad (6.10)$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} S(W_1, W_2) &= \frac{c-3}{4}\{(2p-1)\hat{g}(W_1, W_2)\} + \frac{c+1}{4}\{3\hat{g}(\varphi W_1, \varphi W_2)\} \\ &\quad + \hat{g}(T_{e_i}W_2, T_{W_1}e_i) - \hat{g}(T_{W_1}W_2, T_{e_i}e_i) \end{aligned} \quad (6.11)$$

bulunur. O halde

$$\begin{aligned} S(W_1, W_2) &= \frac{c-3}{4}\{(2p-1)\hat{g}(W_1, W_2)\} + \frac{c+1}{4}\{3\hat{g}(\varphi W_1, \varphi W_2)\} \\ &\quad + \sum_{i=1}^{2p}(\hat{g}(T_{W_1}W_2, T_{W_1}e_i) - \hat{g}(T_{W_1}W_2, T_{e_i}e_i)) \end{aligned} \quad (6.12)$$

olduğundan Ricci Eğriliği

$$\begin{aligned} S(W_1, W_2) &= \left(\left(\frac{c-3}{4} \right) (2p-1) + \frac{3(c+1)}{4} \right) \hat{g}(W_1, W_2) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{2p}(\hat{g}(T_{e_i}W_2, T_{W_1}e_i) - \hat{g}(T_{W_1}W_2, T_{e_i}e_i)) \end{aligned} \quad (6.13)$$

olarak elde edilir.

6.2. *Sonuç* $(M, \varphi, \xi, \eta, \hat{g})$ bir Kenmotsu space form ve $(N, \bar{g})$ bir Riemann manifold $\psi: M \rightarrow N$ bir yarı slant $\xi^\perp$ - Riemann submersiyon olsun. D total geodezik ise D Einsteindir.

6.3. Teorem $(M, \varphi, \xi, \eta, \hat{g})$ bir Kenmotsu space form ve $(N, \bar{g})$ bir Riemann manifold $\psi: M \rightarrow N$ bir yarı slant $\xi^\perp$ -Riemann submersiyon olsun. $\forall L_1, L_2, L_3, L_4 \in \Gamma(D_\theta)$ için Riemann eğriliği

$$R(L_1, L_2, L_3, L_4) = \frac{c-3}{4}\{\hat{g}(L_1, L_2)\hat{g}(L_3, L_4) - \hat{g}(L_1, L_4)\hat{g}(L_2, L_3)\}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{c+1}{4} \{ \hat{g}(\varphi L_2, L_4) \hat{g}(\varphi L_1, L_3) - \hat{g}(\varphi L_1, L_4) \hat{g}(\varphi L_2, L_3) \\
& - 2 \hat{g}(\varphi L_1, L_2) \hat{g}(\varphi L_4, L_3) \} + \hat{g}(T_{L_1} L_4, T_{L_2} L_3) \\
& - \hat{g}(T_{L_2} L_4, T_{L_1} L_3)
\end{aligned} \tag{6.14}$$

ve kesitsel eğrilik

$$\begin{aligned}
K(L_1, L_2) &= \frac{c-3}{4} \{ \hat{g}^2(L_1, L_2) - 1 \} + \frac{c+1}{4} \{ -3 \hat{g}^2(\varphi L_1, L_2) \} \\
& + \hat{g}(T_{L_1} L_1, T_{L_2} L_2) - \hat{g}(T_{L_2} L_1, T_{L_1} L_2)
\end{aligned} \tag{6.15}$$

şeklinde tanımlıdır.

İspat $L_1, L_2, L_3, L_4 \in \Gamma(D_\theta)$ için (6.1) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
R(L_1, L_2, L_3, L_4) &= \frac{c-3}{4} \{ \hat{g}(L_1, L_2) \hat{g}(L_3, L_4) - \hat{g}(L_1, L_4) \hat{g}(L_2, L_3) \} \\
& + \frac{c+1}{4} \{ \hat{g}(L_2, L_3) \eta(L_1) \eta(L_4) \\
& - \hat{g}(L_1, L_3) \eta(L_2) \eta(L_4) + \hat{g}(L_1, L_4) \eta(L_2) \eta(L_3) \\
& - \hat{g}(L_2, L_4) \eta(L_1) \eta(L_3) + \hat{g}(\varphi L_2, L_4) g_M(\varphi L_1, L_3) \\
& - \hat{g}(\varphi L_1, L_4) \hat{g}(\varphi L_2, L_3) - 2 \hat{g}(\varphi L_2, L_1) \hat{g}(\varphi L_4, L_3) \} \\
& + g_M(T_{L_1} L_4, T_{L_2} L_3) - \hat{g}(T_{L_2} L_4, T_{L_1} L_3)
\end{aligned} \tag{6.16}$$

olarak bulunur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}
K(L_1, L_2) &= \frac{c-3}{4} \{ \hat{g}(L_1, L_2) \hat{g}(L_1, L_2) - \hat{g}(L_1, L_1) \hat{g}(L_2, L_2) \} \\
& + \frac{c+1}{4} \{ \hat{g}(\varphi L_2, L_1) \hat{g}(\varphi L_1, L_2) + 2 \hat{g}(\varphi L_1, L_2) \hat{g}(\varphi L_1, L_2) \} \\
& + \hat{g}(T_{L_1} L_1, T_{L_2} L_2) - \hat{g}(T_{L_2} L_1, T_{L_1} L_2)
\end{aligned} \tag{6.17}$$

veya

$$K(L_1, L_2) = \frac{c-3}{4} \{ \hat{g}^2(L_1, L_2) - 1 \} + \frac{c+1}{4} \{ -\hat{g}^2(L_2, \varphi L_1) \}$$

$$-2\hat{g}^2(\varphi L_1, L_2)\} + \hat{g}(T_{L_1}L_1, T_{L_2}L_2) - \hat{g}(T_{L_2}L_1, T_{L_1}L_2) \quad (6.18)$$

elde edilir.

6.4. Teorem $(M, \varphi, \xi, \eta, \hat{g})$ bir Kenmotsu space form ve $(N, \bar{g})$ bir Riemann manifold $\psi: M \rightarrow N$ bir yarı slant $\xi^\perp$ - Riemann submersiyon olsun. $\forall L_1, L_2 \in \Gamma(D_\theta)$ ve D_θ total geodezik ise Ricci eğriliği

$$S(L_1, L_2) = \left(\frac{c-3}{4}(2q-1) + \frac{3(c+1)}{4}\right)\hat{g}(L_1, L_2) \quad (6.19)$$

şeklindedir.

İspat $\forall L_1, L_2 \in \Gamma(D_\theta)$ için

$$\begin{aligned} S(L_1, L_2) &= \sum_{i=1}^{2q} R(e_i, L_1, L_2, e_i) \\ &= \sum_{i=1}^{2q} \frac{c-3}{4} \{\hat{g}(L_1, L_2)g(e_i, e_i) - \hat{g}(e_i, L_2)g_M(L_1, e_i)\} \\ &\quad + \frac{c+1}{4} \{\hat{g}(\varphi L_1, L_2)\hat{g}(\varphi e_i, e_i) - 2\hat{g}(\varphi e_i, L_1)\hat{g}(\varphi L_2, e_i)\} \\ &\quad + \hat{g}(T_{e_i}L_2, T_{L_1}e_i) - \hat{g}(T_{L_1}L_2, T_{e_i}e_i) \end{aligned} \quad (6.20)$$

yazılabilir. $\hat{g}(\varphi e_i, e_i) = 0$ olduğundan

$$-2\hat{g}(\varphi e_i, L_1)\hat{g}(\varphi L_2, e_i) = 2\hat{g}(e_i, \varphi L_1)\hat{g}(\varphi L_2, e_i) = 2\hat{g}(\varphi L_2, \varphi L_1) \quad (6.21)$$

elde edilir. $\hat{g}(e_i, e_i) = 2q$ olup

$$\begin{aligned} S(L_1, L_2) &= \left(\frac{c-3}{4}\right)(2q-1)\hat{g}(L_1, L_2) + \frac{3(c+1)}{4}.3\hat{g}(\varphi L_1, \varphi L_2) \\ &\quad + \hat{g}(T_{e_i}L_2, T_{L_1}e_i) - \hat{g}(T_{L_1}L_2, T_{e_i}e_i) \end{aligned} \quad (6.22)$$

D_θ total geodezik ise $T_{L_1}L_2 = 0$ dır.

6.3. *Sonuç* $(M, \varphi, \xi, \eta, \hat{g})$ bir Kenmotsu space form ve $(N, \bar{g})$ bir Riemann manifold $\psi: M \rightarrow N$ bir yarı slant $\xi^\perp$ –Riemann submersiyon olsun. D_θ distribüsyonu total geodezik ise D_θ Einstein’dir.



7. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında Kenmotsu manifoldlardan Riemann manifoldlara yarı slant $\xi^\perp$ –Riemann submersiyonlarla ilgili teoremler ispatlandı. Öncelikle temel kavramlar ile Kenmotsu manifoldun alt manifoldlarının tanım ve teoremleri, daha sonra Kenmotsu manifoldun yarı slant alt manifoldunun submersiyonunun tanım ve teoremlerine yer verildi. Daha sonra liflerin geometrisi, Riemann submersiyonun total umbilikliği ve total geodezikliği, son olarak da eğrilik özellikleri incelenip teoremler ispatlandı.

Literatüre ilk defa Türkçe kaynak olarak kazandırılan bu tez çalışmasından hareketle değme manifold tabanlı diğer manifoldların yarı-invaryant, yarı-slant, pseudo (hemi)- slant, bi-slant, generik altmanifoldlarından hemen hemen değme manifoldlara tanımlı submersiyon dönüşümü çalışılabilir.

KAYNAKLAR

- Akyol, M. A. (2017). Conformal semi-slant submersions. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 14(7), 1750114.
- Akyol, M. A. ve Gündüzalp, Y. (2016). Hemi-slant submersions from almost product Riemannian manifolds. *Gulf Journal of Mathematics*, 4(3), 15–27.
- Akyol, M. A., Sarı, R. ve Aksoy, E. (2017). Semi-invariant $\xi^\perp$ – Riemannian submersions from almost contact metric manifolds. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 14(5), 1750074.
- Ali, S. ve Fatima, T. (2013). Anti-invariant Riemannian submersions from nearly Kaehler manifolds. *Filomat*, 27(7), 1219–1235.
- Baird, P. and Wood, J. C. (2003). *Harmonic morphisms between Riemannian manifolds* (London Mathematical Society Monographs, Vol. 29). Oxford University Press.
- Blair, D. E. (1976). *Contact manifolds in Riemannian geometry* (Lecture Notes in Math., Vol. 509). Springer.
- Bourguignon, J. P. and Lawson, H. B. (1981). Stability and isolation phenomena for Yang-Mills fields. *Communications in Mathematical Physics*, 79, 189–230.
- Bourguignon, J. P. and Lawson, H. B. (1989). A mathematician's visit to Kaluza-Klein theory. In *Rendiconti del Seminario Matematico Politecnico di Torino* (Special Issue, pp. 143–163).
- Cabrerizo, J. L., Carriazo, A., Fernández, L. M. and Fernández, M. (1999). Semi-slant submanifolds of a Sasakian manifold. *Geometriae Dedicata*, 78(2), 183–199.
- Chinea, D. (1985). Almost contact metric submersions. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 34(1), 89–104.
- Erken, I. K. ve Murathan, C. (2016). Slant Riemannian submersions from Sasakian manifolds. *Arab Journal of Mathematical Sciences*, 22(2), 250–264.
- Falcitelli, M., Ianus, S. ve Pastore, A. M. (2004). *Riemannian submersions and related topics*. World Scientific.
- Gray, A. (1967). Pseudo-Riemannian almost product manifolds and submersions. *Journal of Mathematics and Mechanics*, 16, 715–737.
- Gündüzalp, Y. (2013a). Slant submersions from almost product Riemannian manifolds. *Turkish Journal of Mathematics*, 37, 863–873.
- Gündüzalp, Y. (2013b). Anti-invariant semi-Riemannian submersions from almost para-Hermitian manifolds. *Journal of Function Spaces and Applications*, Article ID 720623.

- Gündüzalp, Y. (2016). Semi-slant submersions from almost product Riemannian manifolds. *Demonstratio Mathematica*, 49(3), 345–356.
- Ianus, S. and Visinescu, M. (1987). Kaluza-Klein theory with scalar fields and generalized Hopf manifolds. *Classical and Quantum Gravity*, 4, 1317–1325.
- Ianus, S. and Visinescu, M. (1991). Space-time compactification and Riemannian submersions. In G. Rassias (Ed.), *The mathematical heritage of C. F. Gauss* (pp. 358–371). World Scientific.
- Ianus, S., Mazzocco, R. and Vilcu, G. E. (2008). Riemannian submersions from quaternionic manifolds. *Acta Applicandae Mathematicae*, 104(1), 83–89.
- Lee, J. W. (2013). Anti-invariant $\xi^\perp$ – Riemannian submersions from almost contact manifolds. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 42(3), 231–241.
- Lee, J. W. and Şahin, B. (2014). Pointwise slant submersions. *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, 51(4), 1115–1126.
- Mustafa, M. T. (2000). Applications of harmonic morphisms to gravity. *Journal of Mathematics and Physics*, 41, 6918–6929.
- O'Neill, B. (1966). The fundamental equations of a submersion. *Michigan Mathematical Journal*, 13, 458–469.
- Park, K. S. (2012a). h-slant submersions. *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, 49(2), 329–338.
- Park, K. S. (2012b). h-semi-invariant submersions. *Taiwanese Journal of Mathematics*, 16(5), 1865–1878.
- Park, K. S. and Prasad, R. (2013). Semi-slant submersions. *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, 50(3), 951–962.
- Park, K. S. (2016). H-V-semi-slant submersions from almost quaternionic Hermitian manifolds. *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, 53(2), 441–460.
- Ponge, R. (1993). H. Reckziegel., Twisted products in pseudo-Riemannian geometry. *Geometriae Dedicata*, 48(1), 15–25.
- Sasaki, S. and Hatakeyama, Y. (1961). On differentiable manifolds with contact metric structure. *Journal of the Mathematical Society of Japan*, 14, 249–271.
- Sepet, S. A. ve Ergut, M. (2016). Pointwise slant submersions from cosymplectic manifolds. *Turkish Journal of Mathematics*, 40, 582–593.
- Şahin, B. (2010). Anti-invariant Riemannian submersions from almost Hermitian manifolds. *Central European Journal of Mathematics*, 3, 437–447.

- Şahin, B. (2011a). Slant submersions from almost Hermitian manifolds. *Bulletin Mathematique de la Societe des Sciences Mathematiques de Roumanie*, 1, 93–105.
- Şahin, B. (2011b). Semi-invariant Riemannian submersions from almost Hermitian manifolds. *Canadian Mathematical Bulletin*, 56, 173–183.
- Şahin, B. (2013). Riemannian submersions from almost Hermitian manifolds. *Taiwanese Journal of Mathematics*, 17(2), 629–659.
- Şahin, B. (2017). *Riemannian submersions, Riemannian maps in Hermitian geometry, and their applications*. Elsevier.
- Taştan, H. M. (2014). Lagrangian submersions. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 43(6), 993–1000.
- Taştan, H. M. (2017). Lagrangian submersions from normal almost contact manifolds. *Filomat*, 31(12), 3885–3895.
- Taştan, H. M., Şahin, B. ve Yanan, S. (2016). Hemi-slant submersions. *Mediterranean Journal of Mathematics*, 13(4), 2171–2184.
- Vilcu, G. E. (2013). Mixed paraquaternionic 3-submersions. *Indagationes Mathematicae*, 24(2), 474–488.
- Vilcu, A. D. and Vilcu, G. E. (2015). Statistical manifolds with almost quaternionic structures and quaternionic Kähler-like statistical submersions. *Entropy*, 17(9), 6213–6228.
- Watson, B. (1976). Almost Hermitian submersions. *Journal of Differential Geometry*, 11(1), 147–165.
- Watson, B. (1983). G, G' -Riemannian submersions and nonlinear gauge field equations of general relativity. In T. Rassias (Ed.), *Global analysis—Analysis on manifolds, dedicated to Marston Morse* (Vol. 57, pp. 324). Teubner-Texte Mathematics.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı soyadı : Seher KÜR
 Eğitim Derecesi : Lisans
 Okul/Program : Gazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi/ Matematik
 Mezuniyet Yılı : 1997

İş Deneyimi

Çalıştığı Yer	Görevi
Kayabaşı Ortaokulu	Öğretmen
75. Yıl İ.M.K.B. Bayezit İ.Ö.O	Öğretmen
Cumhuriyet Ortaokulu	Öğretmen

Yabancı Dili:

İngilizce, Fransızca

Bilimsel Faaliyetler (Yayınlar, Bildiriler, Katıldığı Projeler)

1-) Kür,S. and Sarı,R.(2024).On the geometry of semi slant $\xi^\perp$ – Riemannian submersions.
 PCFM 2024 7th International Conference on Physical Chemistry & Functional Materials 16-
 17 May 2024 Malatya Turgut Özal University MALATYA / TÜRKİYE