

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

q-LİNEERLİK VE q-LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEMLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Mihriban ÖZDEMİR

Matematik Anabilim Dalı

Uygulamalı Matematik Bilim Dalı

OCAK 2025

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

q-LİNEERLİK VE q-LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEMLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Mihriban ÖZDEMİR

Matematik Anabilim Dalı

Uygulamalı Matematik Bilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Ömer Faruk GÖZÜKIZIL

OCAK 2025

Mihriban ÖZDEMİR tarafından hazırlanan “q-Lineerlik ve q-Lineer Diferansiyel Denklemler” adlı tez çalışması 28.01.2025 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/oy çokluğu ile Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Uygulamalı Matematik Bilim Dalı’nda Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Jürisi

Jüri Başkanı : **Prof. Dr. Metin YAMAN**

Sakarya Üniversitesi

Jüri Üyesi : **Prof. Dr. Ömer Faruk GÖZÜKIZIL (Danışman)**

Sakarya Üniversitesi

Jüri Üyesi : **Prof. Dr. Ali DEMİR**

Kocaeli Üniversitesi



ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Eğitim-Öğretim Yönetmeliğine ve Yükseköğretim Kurumları Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Yönergesine uygun olarak hazırlamış olduğum “q-LİNEERLİK VE q-LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEMLER” başlıklı tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın tüm aşamalarında yukarıda belirtilen yönetmelik ve yönergeye uygun davrandığımı, tezin içerdiği yenilik ve sonuçları başka bir yerden almadığımı, tezde kullandığım eserleri usulüne göre kaynak olarak gösterdiğimi, bu tezi başka bir bilim kuruluna akademik amaç ve unvan almak amacıyla vermediğimi ve 20.04.2016 tarihli Resmi Gazete’de yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince Sakarya Üniversitesi’nin abonesi olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Enstitü tarafından belirlenmiş ölçütlere uygun rapor alındığını, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun ortaya çıkması halinde doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi beyan ederim.

(...../...../20.....).

(imza)

Mihriban ÖZDEMİR





Eşime ve Kerem Ali'ye



TEŐEKKÖR

Yüksek lisans ve tez çalışmalarım süresinde büyük yardım ve desteğini esirgemeyen tez danışmanım Prof. Dr. Ömer Faruk GÖZÜKIZIL'a, hiçbir konuda yardımını esirgemeyen, bu süreç boyunca sevgi, fedakarlık ve anlayıştan dolayı kıymetli eşim Ali ÖZDEMİR'e ve küçük gülüşüyle kocaman enerji veren oğlum Kerem Ali ÖZDEMİR'e en içten duygularıyla teşekkür ederim.

Mihriban ÖZDEMİR



İÇİNDEKİLER

Sayfa

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ	v
TEŞEKKÜR	ix
İÇİNDEKİLER	xi
SİMGELER	xiii
ÖZET	xv
SUMMARY	xvii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	3
2.1. Analiz ve q-Analiz İçin Temel Tanımlar	3
3. q-LİNEERLİK VE q-LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEM	15
3.1. Birinci Mertebeden q-Linear Diferansiyel Denklem.....	16
3.1.1. Sabit Katsayılı Homojen q-Linear Diferansiyel Denklem	16
3.1.2. Değişken Katsayılı Homojen q-Linear Diferansiyel Denklem	17
3.2. Çözüm Yöntemleri	17
3.2.1. Homojen Olan q-Linear Diferansiyel Denklemlerin Çözümleri.....	17
3.2.1.1. q-Kuvvet Serileri İle Çözüm Yöntemi	17
3.2.1.2. q-İntegral Çarpan İle Çözüm Yöntemi.....	25
3.2.1.3. q-Tam Diferansiyel Denklem İle Çözüm Yöntemi.....	26
3.2.2. Homojen Olmayan q-Linear Diferansiyel Denklemlerin Çözümleri.....	35
3.2.2.1. q-Parametrelerin Değişimi Metodu.....	35
4. YÜKSEK MERTEBEDEN q-LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEM	39
4.1. İkinci Mertebeden Sabit Katsayılı Homojen q-Linear Diferansiyel Denklem	39
5. SONUÇ VE ÖNERİLER	45
KAYNAKLAR	47
ÖZGEÇMİŞ	49



SİMGELER

\mathbb{Z}^+	: Pozitif tam sayılar kümesi
\mathbb{R}	: Reel sayılar kümesi
$D_q f(x)$: f fonksiyonun q-türevi
$d_q f(x)$: f fonksiyonun q-diferansiyeli
$[n]_q!$: n'in q-benzeri
e_q^x	: e^x fonksiyonunun q-benzeri
E_q^x	: e^x fonksiyonunun q^{-1} -benzeri
$D_q^2 f(x)$: f fonksiyonunun ikinci mertebeden q-türevi
$D_q^n f(x)$: f fonksiyonunun n. mertebeden q-türevi



q-LİNEERLİK ve q-LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEMLER

ÖZET

Fen bilimleri ve mühendislikte birçok olayın açıklanmasına yardımcı olmak üzere matematiksel formüller veya matematiksel modeller geliştirilir. Bu modeller, bir bilinmeyen fonksiyon ve bu fonksiyonun bazı türevlerini içeren bir denklem olarak ortaya çıkar. Bu tür denklemlere diferansiyel denklemler denmektedir. Diferansiyel denklemler; matematik, doğal bilimler, tıp ve mühendislikte yaygın bir kullanıma sahip analizin temel bir dalıdır. Diferansiyel denklemler vasıtasıyla bu uygulamalar kolayca çözüme kavuşabilmektedir. Ayrıca günümüzde diferansiyel denklemler ve diferansiyel denklem sistemlerinin çözümleri, bilgisayar ortamında, değişik programlar yardımı ile bulunabilmektedir. Burada hedeflenen aslında analitik çözüm ile bilgisayar ortamındaki çözüm arasında karşılaştırma yapma imkanı sunulmaktadır. Diferansiyel denklemlerin en önemli alt kollarından biri olan lineer diferansiyel denklemler, diferansiyel denklemlerin uygulaması ve çözümünde çok önemli bir paya sahiptir. Ayrıca çözümlerin özellikleri, çözümlerin elde edilmesi için gerekli tanım ve teoremler önemli rol oynamaktadır. Lineer diferansiyel denklemlerin çözümlerinin bulunmasında öncelikle sistematik bir düzen şeklinde çözüm aranmalıdır. Verilen lineer diferansiyel denklemde ilk olarak homojen olup olmadığı gözlemlenir. Sonrasında eğer diferansiyel denklem homojen ise homojen kısım çözümü bulunur. Bu aşamada diferansiyel denklemin katsayıları bize yol göstermektedir. Burada diferansiyel denklemin sabit katsayılı ve değişken katsayılı olma durumu göz önüne alınmaktadır. Belirtilen denklemin birinci mertebeden lineer diferansiyel denklem olması halinde çözüm metodları uygulanmaktadır. Değişkenlerine ayrılabilir denklemler, tam diferansiyel denklemler, integral çarpan metodu bu yöntemlerden bazılarıdır. İkinci mertebeden veya daha yüksek mertebeden lineer diferansiyel denklemlerin çözümü ise katsayılar bazında incelendiğinde bize büyük bir kolaylık sağlamaktadır. Verilen denklem sabit katsayılı ve homojen olduğunda pratik çözüm yöntemi olan karakteristik forma dönüştürüp bulunabilmektedir. Fakat değişken katsayılı olduğunda bu durum bize aynı kolaylığı sağlamayabilir. Yani bu denklemler birkaç özel denklem sınıfı dışında, cebirsel yöntemlerle çözülemez ve çözümleri elementer fonksiyonlar cinsinden ifade edilemez. Bu denklemleri çözmek için genel bir yöntem olan kuvvet serileri yöntemi ile çözüm aranmaktadır. Bu yöntem ikinci mertebeden homojen lineer diferansiyel denklemler için verilmektedir. Bu çalışmada buraya kadar olan kısmın kuantum analize benzer notasyonu incelenecektir.

Quantum calculus genellikle limit notasyonu olmaksızın türev olarak bilinmektedir. Quantum calculus'un geçmişi 1400 lü yıllara Leonhard Euler'e kadar uzanmaktadır. Quantum calculus q-benzeri ve h-benzeri olmak üzere iki ana kola sahiptir. Bu çalışmada q-benzer ifadesiyle ilgilenilecektir. Quantum calculus da elde edilen formüller 18.yy'da ortaya çıkmıştır. Modern anlamda q-analizin başlangıcı ise 1910 yılında Jackson tarafından yayımlanmış olan q-Jackson integrali sayılabilir. Sonrasında ise Victor Kac ve Pokmen Cheung tarafından q-gama ve q-beta fonksiyonlarının integral

temsilleri ele alınmıştır. Günümüzde uygulamalı matematiğin özel fonksiyonları q-calculus'un yeni bir uygulama alanıdır. Özellikle Sturm-Liouville problemleri bu alanda pek çok uygulaması olan bir konu olduğu görülmektedir. Analizdeki bazı temel ifadelerin diferansiyel, türev, integral gibi tanımların quantum calculus da q-diferansiyel, q-türev, q-integral olduğu ortaya konmuştur. Benzer şekilde klasik analizde türev tanımından karşıt türev elde edildiği gibi quantum analizde de q-türevden q-antitürev, q-integralden q-belirli integral elde edilmiştir. Ayrıca bu çalışmada sıkça yer verilen exponansiyel fonksiyonun q-benzeri ifadesinin de quantum calculusda pratik çözümler ortaya koyduğu görülmüştür. Bu tezde klasik diferansiyel denklemlerin bir alt kolu olan lineer diferansiyel denklemlerin lineerlik şartı, yeni bir paradigma çerçevesinde q-Analiz bağlamında incelenmiştir.

Öncelikle bu çalışmamız beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde bu tez için gerekli olan analiz, diferansiyel denklemler ve q-analizin tarihçesinden bahsedilmiş, geçmişten günümüze kadar nasıl ilerlediği ve birbirleri arasında nasıl köprüler kurulduğu ele alınmıştır.

İkinci bölümde ise analiz ve q-analiz için gerekli tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Daha sonra üçüncü bölümde q-lineerlik şartları tespit edilmiş; q-lineer diferansiyel denklemlerin n. mertebeden en genel hali;

$$a_0(x)D_q^n y(x) + a_1(x)D_q^{n-1}y(x) + a_n(x)y(x) = Q(x)$$

şeklinde ifade edilmiştir. Burada $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ fonksiyonları denklemin katsayılarını ifade etmektedir.

Yukarıda bahsedilen denklemin önce birinci mertebeden ve $Q(x) = 0$ olması halinde, yani sabit katsayılı ve değişken katsayılı homojen q-lineer diferansiyel denkleminin genel ifadelerinden bahsedilmiştir. Ayrıca çözüm yöntemleri değerlendirilmiş, bu çerçevede hangi yöntemlerin işlevsel olup olmadığı incelenmiştir. Buna göre katsayılar bazında ele aldığımızda; değişken katsayılı homojen q-lineer diferansiyel denklemlerden bazı tiplerin q-tam diferansiyel denklem vasıtasıyla çözümü incelenmiştir. Benzer şekilde klasik lineer diferansiyel denklemin çözüm yöntemlerinden biri olan integral çarpanı yöntemi q-analizde q-integral çarpanı olarak kullanılırken; bu yöntemin q-lineer diferansiyel denklemin çözümünde karşılığının olup olmadığı araştırılmıştır. Üçüncü yöntem olarak diferansiyel denklemlerde kuvvet serileri ile çözüm yönteminin q-Analizde q-kuvvet serileri ile çözüm yöntemi tespit incelenmiştir. Sonrasında $Q(x) \neq 0$ olması durumunda yani homojen olmayan q-lineer diferansiyel denkleminin çözümü, klasik lineer diferansiyel denklemlerin çözüm yöntemlerinden biri olan parametrelerin değişimi metodu yani q-Analizde q-parametrelerin değişimi yöntemi ile incelenmiştir.

Dördüncü bölümde yüksek mertebeden sabit katsayılı homojen q-lineer diferansiyel denklemlerin çözüm yöntemleri araştırılmıştır. Bu yöntemlerden biri ise klasik diferansiyel denklemlerden; yüksek mertebeden sabit katsayılı lineer diferansiyel denklemlerin homojen kısmının çözüm yöntemi olan karakteristik polinoma dönüştürme metodudur. Diğer yöntem ise yukarıda belirtilen en genel n. mertebeden q-lineer diferansiyel denklemin n=2 olması halinde, bir önceki bölümde incelenen q-kuvvet serileri ile çözüm aranmıştır. Son bölüm olan beşinci yani sonuç kısmında ise yapılan araştırmalar ve incelemeler sonucunda hangi yöntemin daha işlevsel olduğu tespit edilmiş ve öneriler sunulmuştur.

q-LINEARTY AND q-LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS

SUMMARY

In science and engineering, mathematical formulas or mathematical models are developed to help explain many events. These models emerge as an equation containing an unknown function and some derivatives of this function. Such equations are called differential equations. Differential equations are a basic branch of analysis that is widely used in mathematics, natural sciences, medicine and engineering. Differential equations are a basic branch of analysis that is widely used in mathematics, natural sciences, medicine and engineering. In addition today, solutions of differential equations and differential equation systems can be found in a computer environment with the help of different programs. The aim here is to make a comparison between the analytical solution and the solution in the computer environment. Linear differential equations, one of the most important sub-branches of differential equations, have a very important share in the application and solution of differential equations. In addition, the properties of the solutions, the definitions and theorems required to obtain the solutions play an important role. In finding the solutions of linear differential equations, a systematic order solution should be sought first. In the given linear differential equation, firstly it is observed whether it is homogeneous or not. Afterwards, if the differential equation is homogeneous, the homogeneous part solution is found. At this stage, the coefficients of the differential equation guide us. Here, the situation of the differential equation being constant coefficient and variable coefficient is taken into consideration. If the specified equation is a first order linear differential equation, solution methods are applied. Separable equations, complete differential equations, integral multiplier method are some of these methods. The solution of linear differential equations of second order or higher order provides us with great convenience when examined on the basis of coefficients. When the given equation is constant coefficient and homogeneous, it can be found by converting it to the characteristic form, which is a practical solution method. However, when there are variable coefficients, this situation may not provide us with the same convenience. That is, these equations cannot be solved by algebraic methods, except for a few special equation classes, and their solutions cannot be expressed in terms of elementary functions. A solution is sought with the power series method, which is a general method for solving these equations. This method is given for second order homogeneous linear differential equations. In this study, the notation similar to quantum analysis will be examined up to this point.

Quantum calculus is generally known as derivative without limit notation. The history of quantum calculus dates back to the 1400s, when Leonhard Euler began his studies. Quantum calculus has two main branches: q-like and h-like. This study will also deal with the q-similar expression. The formulas obtained in quantum calculus emerged in

the 18th century. The beginning of q-analysis in the modern sense can be considered as the q-Jackson integral published by Jackson in 1910. Afterwards, the integral representations of q-gamma and q-beta functions were discussed by Victor Kac and Pokmen Cheung. Nowadays, special functions of applied mathematics are a new application area of q-calculus. Especially Sturm-Liouville problems are seen to be a subject with many applications in this field. It has been shown that some basic expressions in analysis such as differential, derivative, integral are q-differential, q-derivative, q-integral in quantum calculus. Similarly, just as the antiderivative is obtained from the derivative definition in classical analysis, the q-antiderivative is obtained from the q-derivative and the q-definite integral is obtained from the q-integral in quantum analysis. In addition, it has been seen that the q-like expression of the exponential function, which is frequently used in this study, also provides practical solutions in quantum calculus.

In this thesis, the linearity condition of linear differential equations, which is a sub-branch of classical differential equations, is examined within the context of a new paradigm, q-Analysis.

First of all, this study consists of five sections. In the first section, the history of analysis, differential equations and q-analysis required for this thesis is mentioned, how it has progressed from the past to the present and how bridges have been established between them are discussed.

In the second section, the necessary definitions and theorems for analysis and q-analysis are given. Then, in the third section, q-linearity conditions were determined; The most general equation of q-linear differential equations of nth order was expressed as;

$$a_0 D_q^n y + a_1 D_q^{n-1} y + a_n y = Q$$

Here, $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ functions represent the coefficients of the equation.

The general expressions of the equation mentioned above, first of order and $Q(x) = 0$, namely, the homogeneous q-linear differential equation with constant coefficients and variable coefficients, are mentioned. In addition, solution methods were evaluated, and within this framework, it was examined which methods were functional or not. Accordingly, when we consider it based on coefficients; The solution of some types of homogeneous q-linear differential equations with variable coefficients by means of q-exact differential equations has been investigated. Similarly, while the integral multiplier method, which is one of the solution methods of classical linear differential equations, is used as a q-integral multiplier in q-analysis; it has been investigated whether this method has an equivalent in the solution of q-linear differential equations. As the third method, the solution method with power series in differential equations and the solution method with q-power series in q-Analysis were determined. Afterwards, in the case of $Q(x) = 0$, that is, the solution of the non-homogeneous q-linear differential equation was examined with the parameter change method, which is one of the solution methods of classical linear differential equations, namely the q-parameter change method in q-Analysis. In the fourth section, the solution methods of higher order constant coefficient homogeneous q-linear differential equations are investigated. One of these methods is the characteristic polynomial conversion method, which is the solution method of the homogeneous part of the linear differential

equations with constant coefficients of higher order from classical differential equations. The other method is the most general n th order q -linear differential equation mentioned above, in case $n=2$, the solution is sought with the q -power series examined in the previous section. In the fifth section, which is the last section, the conclusion, it is determined which method is more functional as a result of the researches and examinations and suggestions are presented





1. GİRİŞ

Analiz, hesaplamanın esas olduğu matematiğin en önemli kolu olmakla beraber limit kavramı üzerine kurulmuştur. Eğri, yüzey ve fizik problemlerini bünyesine alarak gelişmiştir. Bu tür konular, özel veya farklı değer kümeleriyle meşgul olan cebir ve aritmetiğin dışındaki problemlerdir. Bununla beraber, sonsuz kümelerin limit değerlerini kural haline getirme işlemlerini ihtiva ederler. Analizin temel kavramı bir sonsuz dizinin limitidir. Pratikte bir fonksiyonun limiti, özellikle türev, integral ve diferansiyel denklemlerin çözümü şeklindeki problemlerde görülür.

Modern matematiğin etkin bir alanı olan analiz, matematik kuvvetlerin düşüncesi üzerine kurulmuştur. Temel konularından biri, diferansiyel ve integral hesaptır. Gerçek sayı sistemlerinin en iyi kullanıldığı sonsuz dizi ve seriler, analizin ayrıntılı çalışma formüllerini ihtiva eder.

Modern matematiğin temellerinin Avrupa'da Newton ve Leibniz tarafından inşa edildiği bilinmesine rağmen bilim adamlarına göre analizin (Calculus) ve diferansiyel denklemlerin başlangıcı 12.yy'a kadar dayanmaktadır. Diferansiyel hesabın kurucusu İngiliz matematikçi Newton 1671 yılında bazı birinci mertebeden diferansiyel denklemleri

$$y' = 1 - 3x + y + x^2 + xy;$$

$$3ax + ay + 3x^2 + 3yy' = 0$$

olarak tanımlamıştır. Birçok matematik tarihçesine göre de diferansiyel denklemler 1675'de Gottfried Wilhelm von Leibnitz (1646-1716) yapmış olduğu

$$\int x dx = \frac{1}{2} x^2$$

eşitliğini yazmasıyla başlamıştır. Yaklaşık 5 yıl sonra 1676 da Leibnitz tarafından bağımsız olarak diferansiyel denklem x ve y nin diferansiyelleri dx ve dy yardımıyla tanımlamıştır. 1691 yılında Leibnitz;

$$y \frac{dy}{dx} = X(x)Y(y)$$

formundaki bir diferansiyel denklemi dört aşamalı bir probleme indirgenebileceğini göstermek için değişkenlerine ayrılabilme metodunu kullanmıştır. Bir yıl sonra da homojen birinci mertebeden lineer diferansiyel denklemini kapalı formda vermiştir.

Tarihsel süreçte Quantum Calculus başka bir deyişle q -Analiz, soyut ve uygulamalı matematiğin birçok alanı ile ilişkilendirilen ve temeli Euler'e kadar uzanan oldukça kapsamlı bir konudur.

q - Analiz kısaca limitsiz kalkülüs anlamına gelmektedir.

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, x \neq x_0$$

ifadesi eğer x, x_0 a yaklaşırken ($x \rightarrow x_0$) limit varsa, bu ifade $f(x)$ fonksiyonunun $x = x_0$ noktasındaki

$$\frac{\partial f}{\partial x}$$

türevi şeklinde tanımlanmıştır. Yukarıdaki ifade de $x = qx_0$ alınır. Burada $q \neq 1$ olmalıdır.

Jackson'a göre q -türev;

$$D_q f(x) = \frac{f(qx_0) - f(x_0)}{qx_0 - x_0}$$

elde edilir. Bu ifadeye $f(x)$ in q - türevi veya $f(x)$ in türevinin q - benzeri denir. Dikkat edilecek olursa,

$$\lim_{q \rightarrow 1} D_q f(x) = \lim_{q \rightarrow 1} \frac{f(qx_0) - f(x_0)}{qx_0 - x_0} = \frac{\partial f}{\partial x} = f'(x)$$

yani klasik analizdeki türevin q -analizde de aynı olduğu görülmektedir.

Son zamanlarda q -analizin uygulamalı matematikle ilişkisine olan çalışmalar bir hayli artmaktadır. Uygulamalı matematiğin bir alt dalı olan diferansiyel denklemlerin incelenmesinde de büyük rol oynamaktadır. Dolayısıyla bu tezde özellikle lineer diferansiyel denklemlerin q -benzeri olan q -lineer diferansiyel denklemleri incelenmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Analiz ve q-Analiz İçin Temel Tanımlar

Tanım 2.1. (Diferansiyel):

$$y = f(x)$$

türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Yani;

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) \quad (2.1)$$

olduğuna göre, dy diferansiyeli $dy = f'(x)dx$ olarak tanımlanır. Burada dy daima bağımlı değişkendir ve hem x ve hem de dx 'e bağlıdır; x ve dx bağımsız değişkendir. Eğer $f(x)$ fonksiyonunun tanım aralığında dx e özel bir değer verilirse ve x bir özel sayı ise o zaman dy nin sayısal değeri tayin edilebilir.

Tanım 2.2. (q-Diferansiyel):

$I \subset \mathbb{R}$ aralığı $x \in I$ iken $qx \in I$ koşulunu sağlamak üzere f, I aralığı üzerinde tanımlı bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun q-diferansiyeli

$$d_q f(x) = f(qx) - f(x) \quad (2.2)$$

şeklinde tanımlanır (Kac ve Cheung, 2002).

Örneğin; $I(x) = x$ birim fonksiyonunun diferansiyeli;

$$d_q x = qx - x = (q - 1)x$$

olur.

Tanım 2.2.1. (İki Fonksiyonun Çarpımının q-diferansiyeli):

$f(x)$ ve $g(x)$ herhangi iki fonksiyon olmak üzere;

$$d_q(f(x)g(x)) = f(qx)g(qx) - f(x)g(x) \quad (2.3)$$

Burada (2.2) ifadesine $f(x)g(qx)$ ifadesini ekleyip çıkaralım;

$$d_q(f(x)g(x)) = f(qx)g(qx) - f(x)g(x) + f(x)g(qx) - f(x)g(qx)$$

$$\begin{aligned}
d_q(f(x)g(x)) &= f(qx)g(qx) - f(x)g(qx) + f(x)g(x) + f(x)g(qx) \\
d_q(f(x)g(x)) &= [f(qx) - f(x)]g(qx) + f(x)[g(qx) - g(x)] \\
d_q(f(x)g(x)) &= d_q f(x)g(qx) + f(x)d_q g(x) \tag{2.4}
\end{aligned}$$

elde edileceği gibi benzer şekilde (2.2) ifadesine $f(qx)g(x)$ ifadesini ekleyip çıkaralım;

$$\begin{aligned}
d_q(f(x)g(x)) &= f(qx)g(qx) - f(x)g(x) + f(qx)g(x) - f(qx)g(x) \\
d_q(f(x)g(x)) &= f(qx)g(qx) - f(qx)g(x) + f(x)g(x) + f(qx)g(x) \\
d_q(f(x)g(x)) &= [g(qx) - g(x)]f(qx) + g(x)[f(qx) - f(x)] \\
d_q(f(x)g(x)) &= d_q g(x)f(qx) + g(x)d_q f(x) \tag{2.5}
\end{aligned}$$

sonucuna da ulaşabiliriz. Buradan da anlaşılacağı gibi iki fonksiyonun çarpımının q-diferansiyeli klasik analizdeki gibi simetrik değildir.

Tanım 2.3. (Türev):

$A \subset \mathbb{R}$ bir aralık, $a \in A$ ve $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ olarak tanımlanmış bir $y = f(x)$ fonksiyonunu göz önüne alalım. $x = a$ dan itibaren x değişkeninin Δx artmasına karşılık $y = f(x)$ fonksiyonu da $\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$ artmasını alır. Δy ve Δx arasındaki

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

oranının, $\Delta x \rightarrow 0$ için bir limiti varsa, bu limite $y = f(x)$ fonksiyonunun $x = a$ noktasındaki türevi denir. Buna göre

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

olur. Eğer $a + \Delta x = x$ dersek, buradan $\Delta x = x - a$; $\Delta x \rightarrow 0$ iken $x \rightarrow a$ olur.

Böylece $x = a$ noktasındaki türevi;

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \tag{2.6}$$

biçiminde de ifade edilebilir.

Tanım 2.4. (q-Türev):

$I \subset \mathbb{R}$ aralığı $x \in I$ iken $qx \in I$ koşulunu sağlamak üzere f, I aralığı üzerinde tanımlı bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun q-türevi

$$D_q f(x) = \frac{d_q f(x)}{d_q x} = \frac{f(qx) - f(x)}{qx - x}, x \neq 0 \quad (2.7)$$

şeklinde tanımlanır (Kac ve Cheung, 2002).

$f'(0)$ var ise

$$D_q f(0) = f'(0)$$

ile tanımlanır. Eğer $f(x)$ diferansiyellenebilir bir fonksiyon ise

$$\lim_{q \rightarrow 1} D_q f(x) = \frac{df(x)}{dx}$$

olur.

Tanım 2.4.1. (İki fonksiyonun Çarpımının q-Türevi):

$f(x)$ ve $g(x)$ herhangi iki fonksiyon olmak üzere;

$$D_q [f(x)g(x)] = \frac{d_q [f(x)g(x)]}{d_q x}$$

Burada (2.5) eşitliğinden yararlanırsak;

$$D_q [f(x)g(x)] = \frac{d_q f(x)g(qx) + f(x)d_q g(x)}{d_q x}$$

$$D_q [f(x)g(x)] = \frac{d_q f(x)g(qx) + f(x)d_q g(x)}{(q-1)x}$$

$$D_q [f(x)g(x)] = \frac{d_q f(x)g(qx)}{(q-1)x} + \frac{f(x)d_q g(x)}{(q-1)x}$$

$$D_q [f(x)g(x)] = D_q f(x)g(qx) + f(x)D_q g(x) \quad (2.8)$$

elde edilir. Benzer şekilde (2.5) eşitliğinden yararlanılarak;

$$D_q [f(x)g(x)] = \frac{d_q g(x)f(qx) + g(x)d_q f(x)}{d_q x}$$

$$D_q [f(x)g(x)] = \frac{d_q g(x)f(qx) + g(x)d_q f(x)}{(q-1)x}$$

$$D_q[f(x)g(x)] = \frac{d_q g(x)f(qx)}{(q-1)x} + \frac{g(x)d_q f(x)}{(q-1)x}$$

$$D_q[f(x)g(x)] = D_q g(x)f(qx) + g(x)D_q f(x) \quad (2.9)$$

elde edilmiş olur.

Tanım 2.4.2. (İki Fonksiyonun Bölümünün q-Türevi):

$f(x)$ ve $g(x)$ herhangi iki fonksiyon olmak üzere;

$$f(x) = f(x)$$

eşitliğini ele alalım ve sol tarafı $g(x)$ fonksiyonu ile çarpıp bölelim.

$$\frac{g(x)f(x)}{g(x)} = f(x)$$

her iki tarafın q-türevini alalım.

$$D_q\left(\frac{g(x)f(x)}{g(x)}\right) = D_q f(x)$$

(2.5) eşitliğini kullanırsak;

$$D_q g(x) \frac{f(qx)}{g(qx)} + g(x)D_q\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = D_q f(x)$$

bulunur ve buradan;

$$D_q\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{D_q f(x) - \frac{f(qx)}{g(qx)} D_q g(x)}{g(x)}$$

$$D_q\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(qx)D_q f(x) - f(qx)D_q g(x)}{g(x)g(qx)} \quad (2.10)$$

elde edilir. Benzer şekilde (2.9) eşitliğini kullanırsak;

$$D_q\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)g(qx) + \frac{f(x)}{g(x)}D_q g(x) = D_q f(x)$$

bulunur ve buradan;

$$D_q\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{D_q f(x) - \frac{f(x)}{g(x)} D_q g(x)}{g(qx)}$$

$$D_q \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{g(x)D_q f(x) - f(x)D_q g(x)}{g(x)g(qx)} \quad (2.11)$$

elde edilir.

Burada iki fonksiyonun q-diferansiyeli simetrik olmadığından fonksiyonların çarpımı veya bölümünde q-türevleri simetrik değildir. Dolayısıyla hem iki fonksiyonun çarpımının q-türevi hemde bölümünün q-türevi iki farklı şekilde ifade edilir.

Örneğin; $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{Z}^+$ ifadesinin q-türevini bulalım.

$$\begin{aligned} D_q x^\alpha &= \frac{(qx)^\alpha - x^\alpha}{(q-1)x} \\ &= \frac{x^\alpha(q^\alpha - 1)}{(q-1)x} \\ D_q x^\alpha &= \frac{(q^\alpha - 1)}{(q-1)} x^{\alpha-1} \end{aligned}$$

dır. Böylece yukarıda verilen tanıma göre;

$$D_q x^\alpha = \frac{(q^\alpha - 1)}{(q-1)} x^{\alpha-1} = [\alpha] x^{\alpha-1} \quad (2.12)$$

olacaktır.

Dolayısıyla bu ifade x^α nın klasik türevine benzemektedir. Eğer $q \rightarrow 1$ için eşitliğin her iki tarafının limiti alınırsa,

$$\lim_{q \rightarrow 1} D_q x^\alpha = \lim_{q \rightarrow 1} [\alpha] x^{\alpha-1} = \alpha x^{\alpha-1}$$

elde edilir.

$$\lim_{q \rightarrow 1} [\alpha] = \lim_{q \rightarrow 1} [1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^{\alpha-1}] = \alpha$$

olup, yani $[\alpha]$ klasik analizde olduğu gibi q-türevde de aynı rolü oynamaktadır.

Tanım 2.5. : $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere

$$[n] = \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

ifadesine n'nin q-benzeri denir (Kac ve Cheung, 2002). Ayrıca

$$[n] = \frac{q^n - 1}{q - 1} = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n-1} \quad (2.13)$$

şeklinde de ifade edilebilir .

Tanım 2.6. (q-Faktöriyel): $n!$, q- benzeri ise;

$$n! = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ [n]. [n - 1]. [n - 2] \dots [1] & n = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (2.14)$$

şeklindedir(Kac ve Cheung, 2002).

Tanım 2.7. (q-Euler):

e^x eksponansiyel fonksiyonun q-benzeri

$$e_q^x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{[j]_q!} \quad (2.15)$$

biçiminde ifade edilir. Bir başka q-benzeri

$$E_q^x = \sum_{j=0}^{\infty} q^{\frac{j(j-1)}{2}} \frac{x^j}{[j]_q!} \quad (2.16)$$

şeklindedir(Kac ve Cheung, 2002).

Özellik:

$$e_q^x E_q^x = 1 \text{ ve } e_{q^{-1}}^x = E_q^x \quad (2.17)$$

Tanım 2.8. (q-Trigonometrik Fonksiyonlar):

$\sin x$ ve $\cos x$ trigonometrik fonksiyonların q-benzeri

$$\sin_q x = \frac{e_q^{ix} - e_q^{-ix}}{2i} \text{ ve } \cos_q x = \frac{e_q^{ix} + e_q^{-ix}}{2} \quad (2.18)$$

şeklindedir(Kac ve Cheung, 2002). Ayrıca

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{[2n]_q!} = \cos_q x \quad (2.19)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{[2n+1]_q!} = \sin_q x \quad (2.20)$$

biçiminde de ifade edilebilmektedir.

Tanım 2.9. (Lineer Operatör): $(X, \|\cdot\|_x)$ ve $(Y, \|\cdot\|_y)$ normlu lineer uzayları aynı \mathbb{F} cisiminde verilsinler. $T: X \rightarrow Y$ operatörü her $x, y \in X$ ve her $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ için

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y) \quad (2.21)$$

koşulunu sağlıyorsa lineer operatör denir.

Tanım 2.10. (q-Taylor): Mertebesi N olan herhangi bir $f(x)$ polinomu ve c herhangi bir sayı olmak üzere,

$$f(x) = \sum_{j=0}^N (D_q^j f)(c) \frac{(x-c)_q^j}{[j]!} \quad (2.22)$$

q -Taylor formülü denir(Kac ve Cheung, 2002).

$$D_q f(x) = [n]x^{n-1}$$

$$D_q^2 f(x) = [n][n-1]x^{n-2}$$

$$D_q^j f(x) = [n][n-1] \dots [n-j+1]x^{n-j}$$

$$D_q^j f(1) = [n][n-1] \dots [n-j+1]$$

olur. Buna göre $f(x)$ in $x = 1$ noktasına göre q -Taylor formülü

$$f(x) = \sum_{j=0}^n \frac{[n][n-1] \dots [n-j+1]}{[j]!} (x-1)_q^j$$

$$f(x) = \sum_{j=0}^n \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} (x-1)_q^j \quad (2.23)$$

şeklindedir.

Tanım.2.11. (Antitürev):

$f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R}$, $y = f(x)$ fonksiyonu verilsin. Eğer her $x \in A$ için $F'(x) = f(x)$ olacak şekilde bir $F = A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu vars F fonksiyonuna f fonksiyonunun bir antitürevidir denir. Bu tanıma göre f fonksiyonun antitürevi F ise,

$$\int f(x)dx = F(x) + C \quad (2.24)$$

olacaktır.

Tanım 2.12. (q-Antitürev):

$D_q F(x) = f(x)$ ise $F(x)$ 'e $f(x)$ 'in q -antitürevi denir ve

$$F(x) = \int f(x) d_q x \quad (2.25)$$

biçiminde tanımlanır (Kac ve Cheung, 2002).

Tanım 2.13. (İntegral): $[a, b]$ aralığında bir $f(x)$ fonksiyonu tanımlansın. Verilen her $\varepsilon > 0$ sayısı için $\|P\| < \delta$ koşulunu sağlayan $[a, b]$ 'nin her $P = x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ bölünüşü ve c_k 'nin $[x_{k-1}, x_k]$ aralığındaki her seçimi için

$$\left| \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x_k - J \right| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı mevcuttur. J sayısı f 'nin $[a, b]$ aralığı üzerindeki belirli integrali ve

$$\sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x_k$$

Riemann toplamalarının limitidir.

$$J = \int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x_k \quad (2.26)$$

Tanım 2.14. (Jackson İntegrali): $f(x)$ herhangi bir keyfi fonksiyon olsun. $f(x)$ 'in q -antitürevini elde etmek için $M_q(F(x)) = F(qx)$ şeklinde tanımlanan M_q operatörünü ele alalım.

$$\frac{1}{(q-1)x} (M_q - I)F(x) = \frac{F(qx) - F(x)}{(q-1)x} = f(x)$$

Bu sıra önemlidir. Çünkü operatörler değişmeli değildirler. Buradan q -antitürevi ;

$$\frac{(1 + M_q + M_q^2 + \dots)}{(q-1)x} (M_q - I)F(x) = (1 + M_q + M_q^2 + \dots)f(x)$$

$$\frac{-F(x)}{(q-1)x} = (1 + M_q + M_q^2 + \dots)f(x)$$

$$F(x) = (q-1)x(1 + M_q + M_q^2 + \dots)f(x)$$

biçimindedir. Sonuç olarak,

$$\int f(x) d_q x = F(x) = (1-q)(xf(x) + qxf(qx) + q^2xf(q^2x) + \dots)$$

$$\int f(x)d_q x = (1-q)x \sum_{j=0}^{\infty} q^j f(q^j x) \quad (2.27)$$

bu seriye $f(x)$ 'in Jackson integrali denir (Kac ve Cheung, 2002).

Teorem 2.1. (Analizin Temel Teoremi):

Eğer f fonksiyonuna $[a, b]$ aralığındaki her noktada sürekli ve F , f 'nin $[a, b]$ üzerinde ters türevi ise,

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad (2.28)$$

dir.

Teorem 2.2. (q-Analizin Temel Teoremi):

Eğer $D_q F(x) = f(x)$ ve $F(x)$ fonksiyonu $x = 0$ noktasında sürekli ise,

$$\int_a^b f(x)d_q x = F(b) - F(a) \quad 0 \leq a < b \leq \infty. \quad (2.29)$$

Önerme: Eğer $x = 0$ 'ın bir komşuluğunda $f'(x)$ var ve x sürekli ise ($f'(x), f(x)$ 'in bilinen türevi olmak üzere),

$$\int_a^b f(x)D_q g(x)d_q x = f(b) - f(a)$$

dır.

İspat: L'Hospital kuralından yararlanarak,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} D_q f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(qx) - f(x)}{(q-1)x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{qf'(qx) - f'(x)}{(q-1)} \\ &= \frac{(q-1)}{(q-1)} f'(0) \\ &= f'(0) \end{aligned}$$

dır.

Sonuç olarak , eğer

$$\lim_{x \rightarrow 0} D_q f(x) = f'(0) = D_q f(0)$$

olarak alırsak q-analizin temel teoreminden önermenin doğru olduğu görülür.

q-integral ve klasik integral arasındaki en büyük fark, herhangi bir aralıkta fonksiyonun q-integralini aldığımız zaman, fonksiyonun $x = 0$ noktasındaki durumunu ele almak zorundayız. Çünkü Jackson integrali yakınsaması için $F(x)$ 'in $x = 0$ noktasından sürekli ve

$$D_q F(x) = f(x)$$

olması gerekmektedir.

Tanım 2.15. (Parçalı q-integrasyon):

$f(x)$ ve $g(x)$ herhangi iki fonksiyon ve bilinen türevleri $x = 0$ noktasının komşuluğunda tanımlı ve $x = 0$ noktasında sürekli olsun.

$$D_q(f(x)g(x)) = f(x) (D_q g(x)) + g(qx)(D_q f(x))$$

dir.

Klasik analizde diferansiyellenebilen iki fonksiyonun çarpımı da diferansiyellenebilirdir.

Dolayısıyla

$$D_q(f(x)g(x)), x = 0$$

noktasının komşuluğunda tanımlı ve bu noktada sürekli olacaktır. Yukarıdaki önermeden yararlanarak,

$$\int_a^b D_q(f(x)g(x))d_q x = \int_a^b f(x)D_q g(x)d_q x + \int_a^b g(qx)(D_q f(x))d_q x$$

$$f(b)g(b) - f(a)g(a) = \int_a^b f(x)d_q g(x) + \int_a^b g(qx)d_q f(x)$$

$$\int_a^b f(x)d_q g(x) = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b g(qx)d_q f(x) \quad (2.30)$$

elde edilir. Bu formüle parçalı q-integrasyon denir(Kac ve Cheung, 2002).

Tanım 2.16. (q-Geometrik Küme):

Eğer $A \subset \mathbb{R}$ kümesinde her x için

$$x \in A \Rightarrow qx \in A$$

ise A kümesine q-geometrik küme denir (Mansour, 2001).

Tanım 2.17. (Kuvvet Serileri):

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots + c_n(x-a)^n + \dots \quad (2.31)$$

şeklindeki bir seriye kuvvet serisi denir. Burada c_k sayılarına serinin katsayıları adı verilir.

Tanım 2.18. (Lineer Diferansiyel Denklem):

$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ ve f bir $A \subseteq \mathbb{R}$ kümesinde tanımlı ve sürekli fonksiyonlar , öyle ki $a_0 \neq 0$ olmak üzere n . mertebeden en genel lineer diferansiyel denklem

$$a_0(x)y^n(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_{n-1}(x)y'(x) + a_n(x)y(x) = Q(x) \quad (2.32)$$

biçimindedir.

Tanım 2.19. (Lineer Bağımlılık ve Lineer Bağımsızlık):

$$f_1, f_2, f_3, \dots, f_n$$

fonksiyonları bir A aralığında tanımlı herhangi n tane fonksiyon ve $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$ ler keyfi sabitler olsun. Eğer her $x \in A$ için

$$c_1f_1(x) + c_2f_2(x) + \dots + c_nf_n(x) = 0 \quad (2.31)$$

denklemi keyfi sabitlerin en az biri sıfırdan farklı olduğunda gerçekleşiyorsa $f_1, f_2, f_3, \dots, f_n$ fonksiyonlarına A kümesi üzerinde lineer bağımlıdır denir.

Eğer denklem sadece $c_1 = c_2 = c_3 = \dots = c_n = 0$ olması halinde sağlanıyorsa, $f_1, f_2, f_3, \dots, f_n$ fonksiyonlarına A kümesi üzerinde lineer bağımsızdır denir.

Tanım 2.20. (Wronskian): $f_1, f_2, f_3, \dots, f_n$ fonksiyonları A kümesi üzerinde tanımlı fonksiyonlar olsun.

$$W(f_1, f_2, f_3, \dots, f_n)(x) = \det \begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \dots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \dots & f_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

ile tanımlanan fonksiyona $f_1, f_2, f_3, \dots, f_n$ fonksiyonlarının A kümesi üzerindeki wronskianı denir.

Tanım 2.21. (q-Tam Diferansiyel Denklem):

$$M(x, y)d_q x + N(x, y)d_q y = 0 \quad (2.33)$$

q-diferansiyel denklemi bir $f(x, y) = c$ fonksiyonunun q-tam diferansiyelini ifade ediyorsa bu denkleme q-tam diferansiyel denklem denir (Mısıır, 2020).

3. q-LİNEERLİK VE q-LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEM

$y_q(x)$ bağımlı değişken x bağımsız değişken olmak üzere n . mertebeden en genel q -diferansiyel denklemin kapalı formu

$$F(D_q^n y, D_q^{n-1} y, \dots, D_q^2 y, D_q y, y) = 0 \quad (3.1)$$

biçiminde yazılabilir. Burada $F; y, D_q y, D_q^2 y, \dots, D_q^n y$ argümanlarının bir fonksiyonudur.

$D_q y, D_q^2 y, \dots, D_q^n y$ eşitlikleri;

$$D_q y = \frac{d_q y}{d_q x}, D_q^2 y = \frac{d_q^2 y}{d_q x^2}, \dots, D_q^n y = \frac{d_q^n y}{d_q x^n} \quad (3.2)$$

şeklindedir.

Eğer bir q -diferansiyel denklem bilinmeyen fonksiyon ve bilinmeyen fonksiyonun var olan q -türevlerine göre birinci dereceden ise bu q -diferansiyel denkleme *lineerdir* denir. (2.7) eşitliğinde verilen ifade, başka bir deyişle;

$$D_q f(x) = \frac{d_q f(x)}{d_q x}$$

D_q (q -türev) operatörü lineer bir operatördür.

Yani, keyfi $\alpha, \beta \in R$ sabitleri ve f ve g fonksiyonları için;

$$\begin{aligned} D_q[\alpha f(x) + \beta g(x)] &= \frac{\alpha f(qx) + \beta g(qx) - \alpha f(x) - \beta g(x)}{(q-1)x} \\ &= \frac{\alpha f(qx) - \alpha f(x)}{(q-1)x} + \frac{\beta g(qx) - \beta g(x)}{(q-1)x} \\ &= \alpha \left[\frac{f(qx) - f(x)}{(q-1)x} \right] + \beta \left[\frac{g(qx) - g(x)}{(q-1)x} \right] \\ &= \alpha D_q f(x) + \beta D_q g(x) \end{aligned}$$

biçimindedir. Benzer şekilde;

$$D_q^2 f(x) = D_q(D_q f(x))$$

$$D_q^3 f(x) = D_q(D_q^2 f(x))$$

ve genel olarak

$$D_q^n f(x) = \frac{d_q^n f(x)}{d_q x^n}$$

dir. D_q gibi D_q^2, D_q^3, \dots operatörleri de lineerdir. Yukarıda verilen (3.1) eşitliğinin yani;

$$F(D_q^n y, D_q^{n-1} y, \dots, D_q^2 y, D_q y, y) = 0$$

her bağımlı değişken ve her n. mertebeden türevler birinci dereceden olup aynı zamanda bağımlı değişkenler ve türevler çarpım halinde yer almıyor ise q – lineerlik şartı sağlanmış olur.

Bu bağlamda n. mertebeden en genel q -lineer diferansiyel denklem;

$$a_0(x)D_q^n y(x) + a_1(x)D_q^{n-1} y(x) + \dots + a_n(x)y(x) = Q(x) \quad (3.3)$$

biçimindedir. Görülmektedir ki denklem y ve $D_q y, D_q^2 y, \dots, D_q^{(n)} y$ türevlerine göre birinci derecedendir. (3.3) denkleminde a_i ler ve $Q, J \subseteq R$ (J açık, kapalı, yarı açık olabilir.) aralığında tanımlı reel fonksiyonlardır. $a_i (i = 0, 1, 2, \dots, n)$ fonksiyonlarına (3.3) q -lineer diferansiyel denkleminin katsayıları denir. Bu katsayıların bazıları veya tümü sabit olabilir.

Eğer;

i. $Q(x) = 0$ ise bu q -lineer diferansiyel denkleme homojen

ii. $Q(x) \neq 0$ ise bu q -lineer diferansiyel denkleme homojen olmayan denir.

3.1. Birinci Mertebeden q -Lineer Diferansiyel Denklem

Bu bölümde birinci mertebeden q -lineer diferansiyel denklemlerin sabit katsayılı ve değişken katsayılı olması durumundaki çözümleri incelenecektir.

3.1.1. Sabit Katsayılı Homojen q -Lineer Diferansiyel Denklem

$$a_0(x)D_q^n y(x) + a_1(x)D_q^{n-1} y(x) + \dots + a_n(x)y(x) = Q(x)$$

q -lineer diferansiyel denklemini ele alalım. Burada a_0, a_1, \dots, a_n reel sabit ve $Q(x) = 0$ olarak alınırsa n.mertebeden homojen sabit katsayılı q -lineer diferansiyel denklem

$$a_0 D_q^n y(x) + a_1 D_q^{n-1} y(x) + \dots + a_n y(x) = 0 \quad (3.4)$$

biçimindedir.

Birinci mertebeden homojen sabit katsayılı q-lineer diferansiyel denklem ise

$$a_0 D_q y(x) + a_1 y(x) = 0 \quad (3.5)$$

biçimindedir.

3.1.2. Değişken Katsayılı Homojen q-Linear Diferansiyel Denklem

$$a_0(x) D_q^n y(x) + a_1(x) D_q^{n-1} y(x) + \dots + a_n(x) y(x) = Q(x)$$

q-lineer diferansiyel denklemini ele alalım. Burada a_0, a_1, \dots, a_n lerden en az biri x 'e bağlı değişken ve $Q(x) = 0$ olarak alınırsa n.mertebeden homojen değişken katsayılı q-lineer diferansiyel denklem

$$a_0(x) D_q^n y(x) + a_1(x) D_q^{n-1} y(x) + \dots + a_n(x) y(x) = 0 \quad (3.6)$$

biçimindedir. Birinci mertebeden homojen değişken katsayılı q-lineer diferansiyel denklem;

$$a_0(x) D_q y(x) + a_1(x) y(x) = 0 \quad (3.7)$$

biçimindedir.

3.2. Çözüm Yöntemleri

3.2.1. Homojen Olan q-Linear Diferansiyel Denklemlerin Çözümleri

3.2.1.1. q-Kuvvet Serileri İle Çözüm Yöntemi

Birinci mertebeden q-lineer diferansiyel denklemini standart formda yazalım. Yani ;

$$D_q y(x) + P(x) y(x) = Q(x) \quad (3.8)$$

şeklinde de ifade edilebilir. Bu q-lineer diferansiyel denkleminin çözümünü inceleyelim.

$D_q y(x)$ türev operatörü yerine;

$$\frac{y(qx) - y(x)}{(q-1)x}$$

ifadesi yazılırsa;

$$\frac{y(qx) - y(x)}{(q-1)x} + P(x)y(x) = 0$$

gerekli düzenlemeler yapıp,

$$y(qx) - y(x) + P(x)y(x)(q-1)x = 0$$

bulunur. Buradan

$$y(qx) = y(x)[1 - p(q-1)x]$$

eşitliği elde edilir.

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

Kuvvet serisini ele alalım. Benzer şekilde q-kuvvet serisi;

$$y(qx) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (qx)^n$$

elde edilir.

$$y(x) \text{ ve } y(qx)$$

Bu iki ifade (3.8) q-lineer diferansiyel denklemde yerine yazılırsa;

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (qx)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n [1 - p(q-1)x]$$

elde edilir.

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

ifadesi dağıtılsa;

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (qx)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n - p(q-1) \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1}$$

elde edilmiş olur.

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n q^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n - p(q-1) \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1}$$

x^{n+1} ifadesi x^n yapılmak istenirse;

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n q^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n - p(q-1) \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} x^n$$

olup, ifadeyi bir terim açtığımız zaman;

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n q^n x^n = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n - p(q-1) \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} x^n$$

bulunup gerekli düzenlemeler yapılarak;

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n q^n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} x^n [c_n - c_{n-1} p(q-1)]$$

elde edilir. Genel terimleri eşit olup ifadeler eşitlenirse;

$$c_n q^n = c_n - c_{n-1} p(q-1)$$

buradan

$$c_n = -\frac{p(q-1)}{q^n - 1} c_{n-1}$$

elde edilir.

Burada n için değerler verirsek;

$$c_n = -\frac{p(q-1)}{q^n - 1} c_{n-1}$$

n = 1 için,

$$c_1 = -\frac{p(q-1)}{q-1} c_0$$

$$c_1 = -p \frac{1}{[1]_q} c_0$$

$$c_1 = (-p)^1 \frac{1}{[1]_q} c_0$$

n = 2 için,

$$c_2 = -\frac{p(q-1)}{q^2-1} c_1$$

$$c_2 = \frac{p(q-1)}{q^2-1} \frac{p(q-1)}{q-1} c_0$$

$$c_2 = p^2 \frac{(q-1)^2}{(q-1)(q^2-1)} c_0$$

$$c_2 = p^2 \frac{(q-1)(q-1)}{(q-1)q^2-1} c_0$$

$$c_2 = (-p)^2 \frac{1}{[1]_q} \frac{1}{[2]_q} c_0$$

$n = 3$ için,

$$c_3 = -\frac{p(q-1)}{q^3-1} c_2$$

$$c_3 = -\frac{p(q-1)}{(q^3-1)} \frac{p^2(q-1)^2}{(q-1)(q^2-1)} c_0$$

$$c_3 = (-p)^3 \frac{(q-1)^3}{(q-1)(q^2-1)(q^3-1)} c_0$$

$$c_3 = (-p)^3 \frac{(q-1)(q-1)(q-1)}{(q-1)q^2-1)(q^3-1)} c_0$$

$$c_3 = (-p)^3 \frac{1}{[1]_q} \frac{1}{[2]_q} \frac{1}{[3]_q} c_0$$

$n = 4$ için,

$$c_4 = -\frac{p(q-1)}{q^4-1} c_3$$

$$c_4 = -\frac{p(q-1)}{(q^4-1)} \frac{p(q-1)}{(q^3-1)} \frac{p^2(q-1)^2}{(q-1)(q^2-1)} c_0$$

$$c_4 = (-p)^4 \frac{(q-1)^4}{(q-1)(q^2-1)(q^3-1)(q^4-1)} c_0$$

$$c_4 = (-p)^4 \frac{(q-1)(q-1)(q-1)(q-1)}{(q-1)(q^2-1)(q^3-1)(q^4-1)} c_0$$

$$c_4 = (-p)^4 \frac{1}{[1]_q} \frac{1}{[2]_q} \frac{1}{[3]_q} \frac{1}{[4]_q} c_0$$

$n = 5$ için,

$$c_5 = -\frac{p(q-1)}{q^5-1} c_4$$

$$c_5 = -\frac{p(q-1)}{q^5-1} \frac{p(q-1)}{(q^4-1)} \frac{p(q-1)}{(q^3-1)} \frac{p^2(q-1)^2}{(q-1)(q^2-1)} c_0$$

$$c_5 = (-p)^5 \frac{(q-1)^5}{(q-1)(q^2-1)(q^3-1)(q^4-1)} c_0$$

$$c_5 = (-p)^5 \frac{(q-1)}{(q-1)} \frac{(q-1)}{(q^2-1)} \frac{(q-1)}{(q^3-1)} \frac{(q-1)}{(q^4-1)} \frac{(q-1)}{(q^5-1)} c_0$$

$$c_5 = (-p)^5 \frac{1}{[1]_q} \frac{1}{[2]_q} \frac{1}{[3]_q} \frac{1}{[4]_q} \frac{1}{[5]_q} c_0$$

$$c_5 = (-p)^5 \frac{1}{[1]_q} \frac{1}{[2]_q} \frac{1}{[3]_q} \frac{1}{[4]_q} \frac{1}{[5]_q} c_0$$

elde edilir. Devam edilip genişletirsek,

$$c_n = (-p)^n \frac{1}{[1]_q} \frac{1}{[2]_q} \frac{1}{[3]_q} \frac{1}{[4]_q} \frac{1}{[5]_q} \cdots \frac{1}{[n]_q} c_0$$

$$c_n = (-p)^n \frac{1}{[n]_q!} c_0$$

olur.

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

çözümünde c_n yerine yazılırsa;

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_0 (-p)^n \frac{1}{[n]_q!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_0 \frac{1}{[n]_q!} (-px)^n$$

olup, buradan çözüm

$$y_q(x) = c_0 e_q^{-px}$$

şeklinde elde edilir.

Örnek 3.1.

$$D_q y(x) + 3y(x) = 0$$

Sabit katsayılı homojen q-linear diferansiyel denkleminde q-türev operatörü yerine yazılırsa ;

$$\frac{y(qx) - y(x)}{(q-1)x} + 3y(x) = 0$$

$$y(qx) - y(x) + 3y(x)(q-1)x = 0$$

bulunur. Buradan

$$y(qx) = y(x)[1 - 3(q-1)x]$$

eşitliği elde edilir.

$y(x)$ yerine

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

şeklinde kuvvet serisini ele alalım. Benzer şekilde $y(qx)$ yerine de

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (qx)^n$$

q -kuvvet serisini alalım.

$$y(x) \text{ ve } y(qx)$$

Bu iki ifade q -diferansiyel denklemde yerine yazılırsa;

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (qx)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n [1 - 3(q-1)x]$$

elde edilir.

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

ifadesi dağıtılsa;

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (qx)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n - 3(q-1) \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1}$$

elde edilmiş olur.

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n q^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n - 3(q-1) \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1}$$

x^{n+1} ifadesi x^n yapılmak istenirse;

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n q^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n - 3(q-1) \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} x^n$$

olup, ifadeyi bir terim açtığımız zaman;

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n q^n x^n = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n - 3(q-1) \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} x^n$$

bulunup gerekli düzenlemeler yapılarak;

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n q^n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} x^n [c_n - c_{n-1} 3(q-1)]$$

elde edilir.

Genel terimleri eşit olup ifadeler eşitlenirse;

$$c_n q^n = c_n - c_{n-1} 3(q-1)$$

buradan

$$c_n = -\frac{3(q-1)}{q^n - 1} c_{n-1}$$

elde edilir. Burada n için değerler verirsek;

$$c_n = -\frac{3(q-1)}{q^n - 1} c_{n-1}$$

n = 1 için,

$$c_1 = -\frac{3(q-1)}{q-1} c_0$$

$$c_1 = -3 \frac{1}{[1]_q} c_0$$

$$c_1 = (-3)^1 \frac{1}{[1]_q} c_0$$

n = 2 için,

$$c_2 = -\frac{3(q-1)}{q^2-1} c_1$$

$$c_2 = \frac{3(q-1)}{q^2-1} \frac{3(q-1)}{q-1} c_0$$

$$c_2 = 3^2 \frac{(q-1)^2}{(q-1)(q^2-1)} c_0$$

$$c_2 = 3^2 \frac{(q-1)(q-1)}{(q-1)q^2-1} c_0$$

$$c_2 = (-3)^2 \frac{1}{[1]_q} \frac{1}{[2]_q} c_0$$

$n = 3$ için,

$$c_3 = -\frac{3(q-1)}{q^3-1} c_2$$

$$c_3 = -\frac{3(q-1)}{(q^3-1)} \frac{3^2(q-1)^2}{(q-1)(q^2-1)} c_0$$

$$c_3 = (-3)^3 \frac{(q-1)^3}{(q-1)(q^2-1)(q^3-1)} c_0$$

$$c_3 = (-3)^3 \frac{(q-1)(q-1)(q-1)}{(q-1)q^2-1)(q^3-1)} c_0$$

$$c_3 = (-3)^3 \frac{1}{[1]_q} \frac{1}{[2]_q} \frac{1}{[3]_q} c_0$$

$n = 4$ için,

$$c_4 = -\frac{3(q-1)}{q^4-1} c_3$$

$$c_4 = -\frac{3(q-1)}{(q^4-1)} \frac{3(q-1)}{(q^3-1)} \frac{3^2(q-1)^2}{(q-1)(q^2-1)} c_0$$

$$c_4 = (-3)^4 \frac{(q-1)^4}{(q-1)(q^2-1)(q^3-1)(q^4-1)} c_0$$

$$c_4 = (-3)^4 \frac{(q-1)(q-1)(q-1)(q-1)}{(q-1)(q^2-1)(q^3-1)(q^4-1)} c_0$$

$$c_4 = (-3)^4 \frac{1}{[1]_q} \frac{1}{[2]_q} \frac{1}{[3]_q} \frac{1}{[4]_q} c_0$$

$n = 5$ için,

$$c_5 = -\frac{3(q-1)}{q^5-1} c_4$$

$$c_5 = -\frac{3(q-1)}{q^5-1} \frac{3(q-1)}{(q^4-1)} \frac{3(q-1)}{(q^3-1)} \frac{3^2(q-1)^2}{(q-1)(q^2-1)} c_0$$

$$c_5 = (-3)^5 \frac{(q-1)^5}{(q-1)(q^2-1)(q^3-1)(q^4-1)} c_0$$

$$c_5 = (-3)^5 \frac{(q-1)}{(q-1)} \frac{(q-1)}{(q^2-1)} \frac{(q-1)}{(q^3-1)} \frac{(q-1)}{(q^4-1)} \frac{(q-1)}{(q^5-1)} c_0$$

$$c_5 = (-3)^5 \frac{1}{[1]_q} \frac{1}{[2]_q} \frac{1}{[3]_q} \frac{1}{[4]_q} \frac{1}{[5]_q} c_0$$

$$c_5 = (-3)^5 \frac{1}{[1]_q} \frac{1}{[2]_q} \frac{1}{[3]_q} \frac{1}{[4]_q} \frac{1}{[5]_q} c_0$$

elde edilir.

$$c_n = (-3)^n \frac{1}{[1]_q} \frac{1}{[2]_q} \frac{1}{[3]_q} \frac{1}{[4]_q} \frac{1}{[5]_q} \cdots \frac{1}{[n]_q} c_0$$

$$c_n = \sum_{n=0}^{\infty} (-3x)^n \frac{1}{[n]_q!}$$

$$y_q(x) = c_0 e_q^{-3x}$$

bulunur.

3.2.1.2. q-İntegral Çarpan İle Çözüm Yöntemi

Birinci mertebeden q-lineer diferansiyel denklemini (3.8) eşitliğini yani;

$$D_q y(x) + P(x)y(x) = Q(x)$$

biçiminde ifade etmiştik. Bu q-lineer diferansiyel denklemini

$$e_q^{\int p(x)d_q x}$$

q-integral çarpanı metodu ile incelemek istersek öncelikle

$$\int p(x)d_q x$$

integralini hesaplayıp (3.8) eşitliğinde yerine yazılıp integral çarpanı hesaplanır.

Örnek 3.2

$$D_q y + \frac{1}{x} y = 0$$

Değişken katsayılı homojen q-linear diferansiyel denklemini ele alalım.

$$D_q y + \frac{1}{x} y = 0$$

biçimindeki q-linear diferansiyel denklemi verilsin.

$$e_q^{\int \frac{1}{x} d_q x}$$

biçiminde integral çarpanı ifade edilir.

Buradan;

$$\int \frac{1}{x} d_q x$$

ifadesinin q-jackson integralini alırsak;

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x} d_q x &= (1-q)x \sum_{i=0}^{\infty} q^i f(q^i x) \\ &= (1-q)x \sum_{i=0}^{\infty} q^i \frac{1}{q^i x} \\ &= (1-q) \sum_{i=0}^{\infty} 1 = \infty \end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{x} d_q x = \infty$$

olduğu görülmektedir ve bize herhangi bir sonuç sunmamaktadır.

3.2.1.3. q-Tam Diferansiyel Denklem İle Çözüm Yöntemi

2.Bölümde (2.33) eşitliğiyle verilen q-tam diferansiyel denklemi

$$M(x, y)d_q x + N(x, y)d_q y = 0$$

q-diferansiyel denklemi bir $f(x, y) = c$ fonksiyonunun q-tam diferansiyelini ifade etmeliydi.

O halde f fonksiyonunun q-tam diferansiyeli:

$$d_q f(x, y) = M(x, y)d_q x + N(x, y)d_q y$$

şeklinde olmalıdır.

Buradan;

$$M(x, y) = \frac{d_q f(x, y)}{d_q x}$$

$$N(x, y) = \frac{d_q f(x, y)}{d_q y}$$

eşitlikleri ortaya çıkmaktadır.

q-tam diferansiyel olması için

$$\frac{d_q^2 f}{d_q x d_q y} = \frac{d_q^2 f}{d_q y d_q x}$$

yani;

$$M_{q_y}(x, y) = N_{q_x}(x, y)$$

şartlarının gerçekleşmesi gerekir. Şartlar sağlandığı takdirde genel çözümü bulmak için

$$d_q f(x, y) = M(x, y) d_q x$$

eşitliğinin her iki tarafının x'e göre q-jackson integrali

$$\int d_q f(x, y) = \int M(x, y) d_q x = c$$

ve benzer şekilde

$$d_q f(x, y) = N(x, y) d_q y$$

ifadesinin de her iki tarafının y'ye göre q-jackson integrali

$$\int d_q f(x, y) = \int N(x, y) d_q y = c$$

alınmalıdır.

Bir önceki örnek 3.2 yi ele alalım. q-tam diferansiyel denklem ile çözümü inceleyelim.

Verilen q-lineer diferansiyel denklemi;

$$\frac{d_q y}{d_q x} + \frac{1}{x} y = 0$$

biçiminde de ifade edilebilir.

Buradan denklem;

$$y d_q x + x d_q y = 0$$

şeklinde yazılabilmektedir. Bu denklemin q-tam diferansiyel olup olmadığını kontrol edelim. q-tam diferansiyel denklemini;

$$M(x, y) = y$$

$$N(x, y) = x$$

olup, buradan;

$$\begin{aligned} M_{q_y}(x, y) &= \frac{M(x, qy) - M(x, y)}{(q-1)y} \\ &= \frac{qy - y}{(q-1)y} \\ &= \frac{(q-1)y}{(q-1)y} \\ &= \frac{1}{[1]_q} \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde;

$$\begin{aligned} N_{q_x}(x, y) &= \frac{N(qx, y) - N(x, y)}{(q-1)x} \\ &= \frac{qx - x}{(q-1)x} \\ &= \frac{(q-1)x}{(q-1)x} = \frac{1}{[1]_q} \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla eşitliklerinden;

$$M_{q_y}(x, y) = N_{q_x}(x, y) = \frac{1}{[1]_q}$$

bulunur. Böylelikle q- tam diferansiyel denklem şartı sağlanmaktadır. Şimdi ise

$$y d_q x + x d_q y = 0$$

q-lineer diferansiyel denkleminin çözümü q-tam diferansiyel çözüm yönteminden elde edilecektir.

$$M(x, y) = \frac{d_q f}{d_q x}$$

şeklinde ifade edilsin. Burada $f(x, y) = c$ biçiminde çözüm araştırılacaktır.

$$d_q f(x, y) = M(x, y) d_q x$$

Her iki tarafın x 'e göre q -integrali alınır ;

$$\int d_q f(x, y) = \int M(x, y) d_q x = c$$

$$f(x, y) = \int y d_q x = c$$

Jackson integral tanımından;

$$f(x, y) = (1 - q)x \sum_{i=0}^{\infty} q^i (q^i y)$$

$$f(x, y) = (1 - q)x \sum_{i=0}^{\infty} q^{2i} y$$

$$f(x, y) = (1 - q)xy \sum_{i=0}^{\infty} q^{2i}$$

$$f(x, y) = (1 - q)xy(q^0 + q^2 + q^4 + \dots)$$

$$f(x, y) = (1 - q)xy \left[\frac{1}{1 - q^2} \right]$$

$$f(x, y) = xy \left[\frac{(1 - q)}{1 - q^2} \right]$$

$$f(x, y) = xy \frac{1}{[2]_q} = c$$

elde edilir. Benzer şekilde;

$$d_q f(x, y) = N(x, y) d_q y$$

Her iki tarafın y 'e göre q -integrali alınır ;

$$\int d_q f(x, y) = \int N(x, y) d_q y = c$$

$$f(x, y) = \int x d_q y = c$$

Jackson integral tanımından;

$$f(x, y) = (1 - q)y \sum_{i=0}^{\infty} q^i (q^i x)$$

$$f(x, y) = (1 - q)y \sum_{i=0}^{\infty} q^{2i} x$$

$$f(x, y) = (1 - q)xy \sum_{i=0}^{\infty} q^{2i}$$

$$f(x, y) = (1 - q)xy(q^0 + q^2 + q^4 + \dots)$$

$$f(x, y) = (1 - q)xy \left[\frac{1}{1 - q^2} \right]$$

$$f(x, y) = xy \left[\frac{(1 - q)}{1 - q^2} \right]$$

$$f(x, y) = xy \frac{1}{[2]_q} = c$$

bulunur. Böylece q-lineer diferansiyel denklemin çözümü:

$$f(x, y) = xy \frac{1}{[2]_q} = c$$

şeklinde tespit edilmektedir.

Örnek 3.3

$$D_q y(x) - 2xy(x) = 0$$

Değişken katsayılı q-lineer diferansiyel denklemini q-kuvvet serisi ile çözelim.

$$\frac{y(qx) - y(x)}{(q - 1)x} - 2xy(x) = 0$$

$$y(qx) - y(x) - 2xy(x)(q - 1)x = 0$$

bulunur. Buradan

$$y(qx) = y(x)[1 + 2(q - 1)x^2]$$

eşitliği elde edilir.

Kuvvet serisini ele alalım.

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

Benzer şekilde;

$$y(qx) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (qx)^n$$

yazılırsa

$$y(qx) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (qx)^n$$

elde edilir.

$y(x)$ ve $y(qx)$

Bu iki ifade denklemde yerine yazılırsa;

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (qx)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n [1 + 2(q-1)x^2]$$

elde edilir.

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

İfadesi dağıtılsa;

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (qx)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n + 2(q-1) \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+2}$$

elde edilmiş olur.

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n q^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n + 2(q-1) \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+2}$$

x^{n+2} ifadesi x^n yapılmak istenirse;

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n q^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n + 2(q-1) \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2} x^n$$

olup, ifadeyi bir terim açtığımız zaman;

$$c_0 + c_1qx + \sum_{n=2}^{\infty} c_n q^n x^n = c_0 + c_1x + \sum_{n=2}^{\infty} c_n x^n + 2(q-1) \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2} x^n$$

$$0 < q < 1$$

olup $c_1 = 0$ dir.

Gerekli düzenlemeler yapılarak;

$$\sum_{n=2}^{\infty} c_n q^n x^n = \sum_{n=2}^{\infty} x^n [c_n + 2c_{n-2}(q-1)]$$

elde edilir.

Genel terimleri eşit olup ifadeler eşitlenirse;

$$c_n q^n = c_n + 2c_{n-2}(q-1)$$

buradan

$$c_n = \frac{2(q-1)}{q^n - 1} c_{n-2}$$

elde edilir.

Burada n için değerler verirsek;

$n = 2$ için,

$$c_2 = \frac{2(q-1)}{q^2 - 1} c_0$$

$$c_2 = 2 \frac{1}{[2]_q} c_0$$

$$c_2 = (2)^1 \frac{1}{[2]_q} c_0$$

$n = 3$ için,

$$c_3 = \frac{2(q-1)}{q^3 - 1} c_1$$

$$c_1 = 0$$

olduğundan $c_3 = 0$ dir.

$n = 4$ için,

$$c_4 = 2 \frac{(q-1)}{q^4-1} c_2$$

$$c_4 = \frac{2(q-1)}{(q^4-1)} \frac{2(q-1)}{q^2-1} c_0$$

$$c_4 = (2)^2 \frac{(q-1)^2}{(q^4-1)(q^2-1)} c_0$$

$$c_4 = (2)^2 \frac{(q-1)}{(q^4-1)} \frac{(q-1)}{(q^2-1)} c_0$$

$$c_4 = (2)^2 \frac{1}{[2]_q} \frac{1}{[4]_q} c_0$$

$n = 5$ için,

$$c_5 = \frac{2(q-1)}{q^5-1} c_3$$

$$c_1 = 0$$

olduğundan

$$c_5 = 0$$

olur.

$n = 6$ için,

$$c_6 = \frac{2(q-1)}{q^6-1} c_4$$

$$c_6 = \frac{2(q-1)}{q^6-1} \frac{2(q-1)}{(q^4-1)} \frac{2(q-1)}{q^2-1} c_0$$

$$c_6 = (2)^3 \frac{(q-1)^3}{(q^6-1)(q^4-1)(q^2-1)} c_0$$

$$c_6 = (2)^3 \frac{(q-1)}{(q^6-1)} \frac{(q-1)}{(q^4-1)} \frac{(q-1)}{(q^2-1)} c_0$$

$$c_6 = (2)^3 \frac{1}{[2]_q} \frac{1}{[4]_q} \frac{1}{[6]_q} c_0$$

$$c_{2n} = (2)^n \frac{1}{[2]_q} \frac{1}{[4]_q} \frac{1}{[6]_q} \cdots \frac{1}{[2n]_q} c_0$$

$$[2]_q = \frac{(1 - q^2)}{(1 - q)}$$

$$[4]_q = \frac{(1 - q^4)}{(1 - q)} = \frac{(1 - q^2)}{(1 - q)}(1 + q^2)$$

$$[4]_q = [2]_q(1 + q^2)$$

$$[6]_q = \frac{(1 - q^6)}{(1 - q)} = \frac{(1 - q^2)}{(1 - q)}(1 + q^2 + q^4)$$

$$[6]_q = [2]_q(1 + q^2 + q^4)$$

olup,

$$[2]_q[4]_q[6]_q \cdots [2n]_q = [2]_q[2]_q(1 + q^2)[2]_q(1 + q^2 + q^4)$$

şeklinde bulunur.

$$[n]_q! = (1 + q)(1 + q + q^2) \cdots (1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1})$$

q-faktöriyel ifadesi olup q^2 ifadesinin q-benzer faktöriyeli de

$$[n]_{q^2}! = (1 + q^2)(1 + q^2 + q^4) \cdots (1 + q^2 + q^4 + q^{2n-2})$$

şeklinde elde edilir. Buradan,

$$[2]_q[4]_q[6]_q \cdots [2n]_q = [2]_q^n [n]_{q^2}!$$

bulunur. O halde çözümde yerine yazıldığında

$$\begin{aligned} y_q(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_0 \frac{2^n}{[2]_q[4]_q[6]_q \cdots [2n]_q} x^{2n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_0 \frac{2^n}{[2]_q^n [n]_{q^2}!} x^{2n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_0 \left(\frac{2x^2}{[2]_q} \right)^n \frac{1}{[n]_{q^2}!} \end{aligned}$$

elde edilir. (Diaz ve Teruel, 2005; akt. Aktürk, 2019)'e göre;

$$e_{q,k}^x = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \frac{1}{[n]_{q^k}!}$$

olup $y_q(x)$ çözümü

$$y_q(x) = c_0 e_{q,2}^{\frac{2}{[2]_q} x^2}$$

şeklinde bulunur.

3.2.2. Homojen Olmayan q-Linear Diferansiyel Denklemlerin Çözümleri

Şimdiye kadar birinci mertebeden homojen q-linear diferansiyel denklemi yani;

$$a_0(x)D_q y(x) + a_1(x)y(x) = 0$$

ifadesini ele almıştık. Şimdi ise homojen olmayan q-linear diferansiyel denkleminin yani;

$$a_0(x)D_q y(x) + a_1(x)y(x) = b(x)$$

ifadesinin çözüm yöntemini ele alacağız.

3.2.2.1. q-Parametrelerin Değişimi Metodu

Birinci mertebeden homojen olmayan

$$D_q y(x) + p y(x) = b(x)$$

q-linear diferansiyel denklemini ele alalım. Bu q-linear diferansiyel denklemin homojen kısmın çözümünü bir önceki kısımda çeşitli çözüm yöntemleri ile ele almıştık. Burada ise homojen kısmın çözümünden yararlanarak özel çözüm bulmaya çalışacağız. Öncelikle bir önceki yöntemlerden biliyoruz ki verilen q-linear diferansiyel denklemin homojen kısmının çözümü;

$$y_{q_h}(x) = c e_q^{-px}$$

şeklinde elde edilmişti. Burada

$$y_{q_h}(x)$$

homojen kısmın çözümünü ifade etmektedir. Homojen olmayan kısmın çözümünü yani özel çözümü ise

$$y_{q_0}(x)$$

şeklinde ifade edilecektir.

$$y_{q_0}(x) = c(x) e_q^{-px}$$

şeklinde çözüm arayalım.

$$D_q y(x) + p y(x) = b(x)$$

Sabit katsayılı homojen olmayan q-lineer diferansiyel denkleminde

$$y_{q_0}(x) = c(x) e_q^{-px}$$

ifadesi yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} D_q(c(x) e_q^{-px}) + p(c(x) e_q^{-px}) &= b(x) \\ c(x) D_q e_q^{-px} + e_q^{-pqx} D_q c(x) + p c(x) e_q^{-px} &= b(x) \\ -p c(x) D_q e_q^{-px} + e_q^{-pqx} D_q c(x) + p c(x) e_q^{-px} &= b(x) \\ e_q^{-pqx} D_q c(x) &= b(x) \end{aligned}$$

olarak bulunur. Burada (2.17) eşitliği kullanılırsa yani:

$$e_q^x E_q^x = 1 \text{ ve } e_q^{-x} = E_q^x$$

Yani $e_q^x e_q^{-x} = 1$ eşitliği elde edilir.

$$D_q c(x) = b e_q^{pqx}$$

buradan her iki tarafın 0 dan x'e q-integrali alınır;

$$\int_0^x D_q c(u) d_q u = \int_0^x b e_q^{pqu} d_q u$$

şeklinde olup

$$\begin{aligned} c(x) - c(0) &= b \int_0^x e_q^{pqu} d_q u \\ c(x) - c(0) &= b \left(\frac{1}{p} e_q^{px} - \frac{1}{p} e_q^0 \right) \\ c(x) &= c(0) + b \left(\frac{1}{p} e_q^{px} - \frac{1}{p} \right) \end{aligned}$$

verilen eşitliği

$$y_{q_0}(x) = c(x) e_q^{-px}$$

yerine yazarsak;

$$y_{q_0}(x) = \left[c(0) + b \left(\frac{1}{p} e_q^{px} - \frac{1}{p} \right) \right] e_q^{-px}$$

$$y_{q_0}(x) = c(0)e_q^{-px} + \frac{b}{p} - \frac{1}{p} e_q^{-px}$$

şeklinde çözüm bulunmuş olur.

Örnek 3.4:

$$D_q y - 4y = 8$$

Homojen olmayan q-lineer diferansiyel denklemin çözümünü araştıralım.

Burada öncelikle homojen kısmın çözümünü;

$$D_q y - 4y = 0$$

$$y_q(x) = c_0 e_q^{4x}$$

Şeklinde olduğu bir önceki eşitlikteki çözüm yönteminden kolayca görülür. Şimdi homojen olmayan kısmın çözümünü bulalım. q-Parametrelerin değişimi metodu kullanılırsa;

$$D_q(c_0(x)e_q^{4x}) - 4c_0(x)e_q^{4x} = 8$$

$$c_0(x)D_q e_q^{4x} + e_q^{4qx} D_q c_0(x) - 4c_0(x)e_q^{4x} = 8$$

$$4c_0(x)e_q^{4x} - 4c_0(x)e_q^{4x} + e_q^{4qx} D_q c_0(x) = 8$$

$$e_q^{4qx} D_q c_0(x) = 8$$

$$D_q c_0(x) = 8e_q^{-4qx}$$

0 dan x'e integral alalım.

$$\int_0^x D_q c_0(u) d_q u = 8 \int_0^x e_q^{-4qu} d_q u$$

$$c_0(x) = c_0(0) + 8 \int_0^x e_q^{-4qu} d_q t$$

$$c_0(x) = c_0(0) + 8 \left(-\frac{1}{4} e_q^{-4qu} \Big|_0^x \right)$$

$$c_0(x) = c_0(0) - 2(e_q^{-4qx} - e_q^0)$$

$$y_q(x) = c_0(x)e_q^{4x}$$

denkleme tekrar yerine yazarsak;

$$y_q(x) = c_0(0)e_q^{4x} - 2e_q^{4x}e_q^{-4qx} + 2e_q^{4x}$$

$$y_q(x) = c_0(0)e_q^{4x} + 2e_q^{4x} - 2$$

şeklinde çözüm bulunur.



4. YÜKSEK MERTEBEDEN q-LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEM

Bu bölümde sabit katsayılı homojen q-lineer diferansiyel denklemlerin genel teorisi ve uygulamaları incelenecektir.

4.1. İkinci Mertebeden Sabit Katsayılı Homojen q-Linear Diferansiyel Denklem

$$a_0 D_q^n y(x) + a_1 D_q^{n-1} y(x) + \dots + a_n y(x) = Q(x)$$

Sabit katsayılı n.mertebeden q-lineer diferansiyel denklemini ele alalım.

Buradan $n = 2$ için

2.mertebeden sabit katsayılı homojen q-lineer diferansiyel denklem;

$$a_0 D_q^2 y + a_1 D_q y + a_2 y = 0 \quad (4.1)$$

biçimindedir. Benzer şekilde $n = 3$ için

3. mertebeden sabit katsayılı homojen q-lineer diferansiyel denklem;

$$a_0 D_q^3 y + a_1 D_q^2 y + a_2 D_q y + a_3 y = 0$$

şeklinde ifade edilebilmektedir.

Burada öncelikle bazı tanım ve teoremlere yer vereceğiz.

Tanım 4.1. (q-Wronskian): $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ fonksiyonları A q-geometrik kümesi üzerinde tanımlı fonksiyonlar olsun.

$$W_q(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)(x) = \det \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ D_q y_1(x) & D_q y_2(x) & \dots & D_q y_n(x) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ D_q^{(n-1)} y_1(x) & D_q^{(n-1)} y_2(x) & \dots & D_q^{(n-1)} y_n(x) \end{pmatrix}$$

ile tanımlanan fonksiyona $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ fonksiyonlarının A q-geometrik kümesi üzerindeki q-wronskianı denir.

Teorem 4.1: $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ fonksiyonları homojen q-lineer diferansiyel denkleminin n tane çözümü olsun. Bu durumda $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ fonksiyonlarının lineer bağımsız olması için gerek ve yeter koşul her x için

$$W_q(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) \neq 0 \quad (4.3)$$

olmasıdır.

Teorem 4.2: $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ fonksiyonları homojen q-lineer diferansiyel denkleminin lineer bağımsız n tane çözümleri olsun. Bu durumda $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$ keyfi sabitler olmak üzere

$$y_q(x) = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 + \dots + c_n y_n \quad (4.4)$$

fonksiyonu n. mertebeden q-lineer diferansiyel denklemin genel çözümüdür.

$n = 2$ ve daha yüksek mertebeli sabit katsayılı homojen q-lineer diferansiyel denklemlerin çözümünü klasik diferansiyel denklemlerde olduğu gibi arayalım.

Yani λ bir parametre olmak üzere $y_q(x) = e_q(\lambda x)$ olacak şekilde bir çözüm önerirsek;

$$D_q y(x) = \lambda e_q(\lambda x)$$

$$D_q^2 y(x) = \lambda^2 e_q(\lambda x)$$

$$D_q^n y(x) = \lambda^n e_q(\lambda x)$$

elde edilir. Burada $e_q^{\lambda x} = e_q(\lambda x)$. Bu değerler denkleme yerlerine yazılırsa;

$$a_0 \lambda^n e_q(\lambda x) + \dots + a_{n-1} \lambda e_q(\lambda x) + a_n e_q(\lambda x) = 0$$

Dolayısıyla

$$e_q(\lambda x) [a_0 \lambda^n + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n] = 0$$

elde ederiz. $e_q(\lambda x) \neq 0$ olduğundan

$$[a_0 + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n] = 0$$

olmalıdır. Bunun anlamı denklemin bir kökü λ ise $y_q(x) = e_q(\lambda x)$ fonksiyonu denkleminin bir çözümüdür.

Tanım 4.2:

$$[a_0 \lambda^n + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n] = 0 \quad (4.5)$$

λ bilinmeyenli n. dereceden cebirsel denkleme karşılık gelen *karakteristik denklem* denir.

Sonuç olarak;

$$a_0 D_q^n y(x) + a_1 D_q^{n-1} y(x) + \dots + a_n y(x) = 0$$

n.mertebeden sabit katsayılı homojen q-lineer diferansiyel denkleminin karakteristik denklemini;

$$[a_0 \lambda^n + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n] = 0$$

biçiminde ifade edilir.

Eğer

$$a_0 D_q^n y(x) + a_1 D_q^{n-1} y(x) + \dots + a_n y(x) = 0$$

denklemin genel çözümüne ulaşmak istiyorsak, n tane lineer bağımsız çözümüne ulaşmalıyız.

Bunun için aşağıda verilen karakteristik denklemin kökleri incelenmelidir.

$$[a_0 \lambda^n + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n] = 0$$

Bu denklemin kökleri için aşağıdakiler söylenebilir.

- i. Köklerin hepsi birbirinden farklı olabilir.
- ii. Köklerin bir kısmı ya da tamamı karmaşık olabilir.
- iii. Köklerin bir kısmı ya da tamamı eşit olabilir.

Bu çalışmada i. ve ii. durumları incelenecektir. Öncelikle köklerin hepsinin birbirinden farklı olması durumunda;

$$a_0 D_q^n y(x) + a_1 D_q^{n-1} y(x) + \dots + a_n y(x) = 0$$

c_1, c_2, \dots, c_n keyfi sabitler olmak üzere denkleminin genel çözümü;

$$y_q(x) = c_1 e_q(\lambda x) + c_2 e_q(\lambda x) + \dots + c_n e_q(\lambda x)$$

şeklindedir.

Örnek 4.1:

$$D_q^2 y - 4D_q y + 3y = 0$$

2.mertebeden homojen sabit katsayılı q-lineer diferansiyel denkleminin çözümünü bulalım.

Verilen denklemin karakteristik denklemini $y = e_q(\lambda x)$ olacak şekilde ;

$$e_q(\lambda x)[\lambda^2 - 4\lambda + 3] = 0$$

$$[\lambda^2 - 4\lambda + 3] = 0$$

bulunur. Buradan köklerin; $\lambda_1 = 1$ ve $\lambda_2 = 3$ olduğu kolayca görülmektedir.

denkleminin çözümleri ise; $y_{q,1}(x) = e_q(x)$ ve $y_{q,2}(x) = e_q(3x)$ şeklindedir. Bu çözümler;

$$W_q = \begin{vmatrix} e_q(x) & e_q(3x) \\ e_q(x) & 3e_q(x) \end{vmatrix} = e_q(x)3e_q(x) - e_q(x)e_q(3x) \neq 0$$

olup lineer bağımsızdır.

O halde genel çözüm

$$y_q(x) = c_1 e_q(x) + c_2 e_q(3x)$$

dir.

Örnek 4.2:

$$D_q^2 y + y = 0$$

2.mertebeden homojen sabit katsayılı q-lineer diferansiyel denkleminin çözümünü bulalım.

Burada verilen denklemin çözümünü bir önceki bölüm olan birinci mertebeden q-lineer diferansiyel denklemlerin çözüm yöntemlerinden biri olan kuvvet serilerinden yararlanarak çözelim. Öncelikle q-türev operatöründen yararlanarak $D_q^2 y$ nin eşitliğini bulalım.

$$D_q^2 y = \frac{y(q^2 x) + qy(x) - (1 + q)y(qx)}{q(q - 1)^2 x^2}$$

şeklindedir. Denkleme yerine yazılırsa;

$$\frac{y(q^2 x) + qy(x) - (1 + q)y(qx)}{q(q - 1)^2 x^2} + y(x) = 0$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$y(q^2 x) + qy(x) - (1 + q)y(qx) + q(q - 1)^2 x^2 y(x) = 0$$

dır.

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, y(qx) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (qx)^n, y(q^2 x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (q^2 x)^n$$

ifadeleri denklemde yerine yazılırsa

$$\sum_{n=2}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2} x^n \frac{(q-1)^2}{(q^n-1)(q^{n-1}-1)}$$

$$c_n = c_{n-2} \frac{q-1}{q^n-1} \cdot \frac{q-1}{q^{n-1}-1}$$

eşitlikleri elde edilir. Burada $c_0 \neq 0$ ve $c_1 \neq 0$ olmak üzere $n \geq 2$ değerleri verildiğinde görülecektir ki

$$c_{2n} = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{[2n]_q!}$$

ve

$$c_{2n+1} = c_1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{[2n+1]_q!}$$

eşitlikleri bulunur. q-trigonometrik fonksiyonlardan da bildiğimiz üzere bu ifadeler

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{[2n]_q!} = \cos_q x$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{[2n+1]_q!} = \sin_q x$$

eşittir. Buradan verilen denklemin lineer bağımsız çözümleri $\cos_q x$ ve $\sin_q x$ şeklinde olup genel çözüm

$$y_q(x) = c_0 \cos_q x + c_1 \sin_q x$$

biçimindedir. Aynı örneği başka yöntem olan karakteristik denklem ile çözersek eğer;

$$D_q^2 y + y = 0$$

denkleminin karakteristik polinomu

$$[\lambda^2 + 1] = 0$$

bulunur. Buradan köklerin; $\lambda_1 = i$ ve $\lambda_2 = -i$ olduğu kolayca görülmektedir.

Denkleminin çözümleri ise; $y_{q,1}(x) = \cos_q(x)$ ve $y_{q,2}(x) = \sin_q(x)$ şeklindedir.

Örnek 4.3:

$$D_q^3 y + D_q^2 y - 4D_q y - 4y = 0$$

3.mertebeden homojen sabit katsayılı q-lineer diferansiyel denkleminin çözümünü bulalım.

Verilen denklemin karakteristik denklemini $y = e_q(\lambda x)$ olacak şekilde ;

$$e_q(\lambda x)[\lambda^3 + \lambda^2 - 4\lambda - 4] = 0$$

$$[\lambda^3 + \lambda^2 - 4\lambda - 4] = 0$$

bulunur. Buradan köklerin; $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -2$ olduğu kolayca görülmektedir.

Denkleminin çözümleri ise;

$$y_{q,1}(x) = e_q(-x) \text{ ve } y_{q,2}(x) = e_q(2x) \text{ } y_{q,3}(x) = e_q(-2x) \text{ eklindedir.}$$

Bu çözümler;

$$W_q \neq 0$$

olup lineer bağımsızdır.

O halde genel çözüm

$$y_q(x) = c_1 e_q(-x) + c_2 e_q(2x) + c_3 e_q(-2x)$$

dir.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmamızda lineer diferansiyel denklemleri q -analiz bağlamında q -lineer diferansiyel denklemler şeklinde ele aldık. Burada q -lineerlik şartları belirlenmiş ve sağlanmış olup q -lineer diferansiyel denklemin genel ifadesi tanımlanmıştır.

Öncelikle birinci mertebeden sabit katsayılı ve değişken katsayılı homojen q -lineer diferansiyel denklemler incelenmiştir. Verilen örneklerde de görüldüğü üzere klasik diferansiyel denklemlerin alt başlığı olan birinci mertebeden lineer diferansiyel denklemlerin bir çözüm yöntemi olan integral çarpanı metodu bize pratik çözüm sunduğu görülmüştür. Ancak bu metodu birinci mertebeden q -lineer diferansiyel denklemlerde q -integral çarpanı yöntemi ile uyguladığımızda bize sonuç vermediği görülmüştür. Fakat bir başka yöntem olan q -tam diferansiyel denklem ile çözüm arandığında ve gerekli başlangıç değer koşulları verildiğinde istenilen çözüm elde edilmiştir.

Yine aynı şekilde 3.yöntem olan ve genel çözüm yöntemi olan q -kuvvet serileri ile çözüm yapıldığında klasik lineer diferansiyel denklem ile çözümün örtüştüğü görülmüştür.

Benzer şekilde iki ve daha yüksek mertebeden sabit katsayılı q -lineer diferansiyel denklemlerin çözümü incelenmiş olup normal lineer diferansiyel denklemlerin çözümünde uygulanan karakteristik polinoma dönüştürülüp bulunan çözümlerin q -lineer diferansiyel denklemlerde de incelenmiş ve sağlandığı görülmüştür.

Bu yöntemin sabit katsayılı q -lineer diferansiyel denklemin yüksek mertebeden homojen kısmının çözümünün bulunmasında pratik bir yöntem olduğu aşikardır.



KAYNAKLAR

- Abu Risha,M.H.,Annaby,M.H.,Ismail,M.E.H. ve Mansour,Z.S.(2007),*Linear q-Difference Equations*.
- Aktürk,Ç.(2019). *Birinci Mertebeden q-Diferansiyel Denklemler*[Yüksek Lisans Tezi],Hitit Üniversitesi.
- Balcı,M. (2009).*Analiz*(7.Baskı).Ankara.
- Bangerezako G., (2007), *An Intoruduction to q-Difference Equations*, Bujumbura: University of Burundi, Faculty of Sciences Department of Mathematics.
- Çağlayan,M., Çelik, N. ve Doğan,S.(2012) *Adi Diferansiyel Denklemler*,Dora.
- Díaz, R., Teruel, C., (2005). q,k-Generalized Gamma and Beta Functions. Journal of Nonlinear Mathematical Physics.
- Ernst, T., (2012). A Comprehensive Treatment of q-Calculus. Springer, Basel, 490 p.
- Kac,V., Cheung, P. (2002), *Quantum Calculus*. New York: Springer-Verlag.
- Mansour, Z.S., (2001). *q-Difference Equations*. Master's Thesis, Faculty of Science, Cairo University.
- Mısır, A. (2016). *Teori Teknik ve Uygulamalı Diferansiyel Denklemler*,Gazi Kitabevi.
- Mısır, Z.(2020), Kuantum Tam Diferansiyel ve Uygulaması, *BŞEÜ Fen Bilimleri Dergisi*, 7 Cilt, *Milli Mücadele ve TBMM'nin Açılışının 100. Yılı anısına-100.Yıl Özel*, 344-354.
- Thomas, G.B., Weir, M.D., Hass, J., Heil, C., 2013. Thomas' Calculus: Early Transcendentals (13th Edition). Pearson, Boston.
- Ross,S. L. (1984). *Differential Equations*,Wiley.
- Sezer,M. ve Baykuş, N. S.(2015)..cilt 1,Dora,142-186.
- Yıldız,A. ve Eröz, M. (2009).*Fonksiyonel Analiz*, Sakarya, 281.



ÖZGEÇMİŞ

Ad-Soyad : Mihriban ÖZDEMİR

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans** :2017, Gazi Üniversitesi, Fen Fakültesi,Matematik Bölümü
- **Yükseklisans** :Sakarya Üniversitesi,Matematik Anabilim Dalı, Uygulamalı Matematik Programı

MESLEKİ DENEYİM VE ÖDÜLLER:

TEZDEN TÜRETİLEN ESERLER: