

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**$GL_{h,h'}(1|1)$ SÜPER GRUBUNUN DİFERANSİYEL
GEOMETRİSİ**

İlknur TEMLİ

DOKTORA TEZİ
Matematik Anabilim Dalı
Matematik Programı

Danışman
Prof. Dr. Salih ÇELİK

Mart, 2025

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**$GL_{h,h'}(1|1)$ SÜPER GRUBUNUN DİFERANSİYEL
GEOMETRİSİ**

İlknur TEMLİ tarafından hazırlanan tez çalışması 05.03.2025 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Matematik Programı **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Salih ÇELİK
Yıldız Teknik Üniversitesi
Danışman

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Salih ÇELİK , Danışman
Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Eyüp KIZIL, Üye
Yıldız Teknik Üniversitesi

Doç. Dr. Gülsüm Yeliz SAÇLI, Üye
Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Erhan ÇALIŞKAN, Üye
İstanbul Üniversitesi

Doç. Dr. Ayşe PEKER DOBİE, Üye
İstanbul Teknik Üniversitesi

Danışmanım Prof. Dr. Salih ÇELİK sorumluluğunda tarafımda hazırlanan $GL_{h,h}(111)$ Süper Grubunun Diferansiyel Geometrisi başlıklı çalışmada veri toplama ve veri kullanımında gerekli yasal izinleri aldığımı, diğer kaynaklardan aldığım bilgileri ana metin ve referanslarda eksiksiz gösterdiğimi, araştırma verilerine ve sonuçlarına ilişkin çarpıtma ve/veya sahtecilik yapmadığımı, çalışmam süresince bilimsel araştırma ve etik ilkelerine uygun davrandığımı beyan ederim. Beyanımın aksinin ispatı halinde her türlü yasal sonucu kabul ederim.

İlknur TEMLİ

İmza

Bu çalışmamı, bana her zaman destek olan, sabır ve özveriyle yanımda duran, tüm zorluklarımda bana güç veren sevgili aileme ithaf ediyorum.



TEŐEKKÜR

Danışman hocam Sn. Prof. Dr. Salih ÇELİK'e, bu tezin ortaya çıkmasında bilgi ve birikimleriyle hem rehberlik ettiği hem de özveriyle çalışmamı sağladığı için en içten teşekkürlerimi sunarım.

İlknur TEMLİ



İÇİNDEKİLER

SİMGE LİSTESİ	vii
ÖZET	ix
ABSTRACT	xi
1 GİRİŞ	1
1.1 Literatür Özeti	1
1.2 Hipotez ve Tezin Yapısı	3
2 TEMEL KAVRAMLAR	6
2.1 Süper Cebirler	6
2.2 Süper Modül	9
2.3 Hopf Süper Cebiri	10
2.4 Süper Ko-modül Cebiri	11
3 $GL_{h,h'}(111)$ SÜPER GRUBU	12
3.1 $GL(111)$ Genel Lineer Süper Matris Grubu	12
3.2 h -deforme ve h' -deforme Süper Düzlemleri Üzerindeki Fonksiyonların Cebirleri	13
3.3 $GL_{h,h'}(111)$ Kuantum Matris Süper Grubu	14
4 $O(GL_{h,h'}(111))$ HOPF SÜPER CEBİRİ ÜZERİNE İKİLİ- KOVARYANT DİFERANSİYEL HESAP	17
4.1 Giriş	17
4.2 $O(GL_{h,h'}(111))$ Hopf Süper Cebiri Üzerine Birinci Mertebeden Diferansiyel Hesap	19
4.3 $O(GL_{h,h'}(111))$ Hopf Süper Cebiri Üzerine Yüksek Mertebeden Diferansiyel Hesap	30
4.4 Süper Kısmi Türevler	32
4.5 Süper Cartan-Maurer 1-Formları	34
4.5.1 Sağ-İnvaryant Cartan-Maurer 1-Formları	34
4.5.2 Sol-İnvaryant Cartan-Maurer 1-Formları	40

4.6	Vektör Alanlarının Lie Süper Cebiri	43
5	$O(GL_{h,h}, (1 1))$ HOPF SÜPER CEBİRİ ÜZERİNE CARTAN HESAP	48
5.1	Dış Türev	48
5.2	Süper İç Türevler	49
5.3	Süper Lie Türevleri	51
6	SONUÇ	55
	KAYNAKÇA	57
	TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR	60



SİMGE LİSTESİ

id	Birim tasviri
h, h'	Deformasyon parametreleri (Grassmann sayılar)
D	Dış türev operatörü
\mathbf{d}	Diferansiyel operatör
\mathbb{Z}_2	Elemanları 0 ve 1 olan küme
$\mathbb{C}_h^{1 1}$	h -deforme süper düzlem
$\mathcal{O}(\mathbb{C}_h^{1 1})$	h -deforme süper cebir
$\Lambda_{h'}(\mathbb{C}_h^{1 1})$	h' -deforme süper dış cebir
$\text{GL}_{h,h'}(1 1)$	(h, h') -deforme $\text{GL}(1 1)$ süper matris grubu
$\text{M}_{h,h'}(1 1)$	(h, h') -deforme $\text{M}(1 1)$ süper matris uzayı
$\mathcal{O}(\text{GL}_{h,h'}(1 1))$	(h, h') -deforme Hopf süper cebiri
S	Hopf süper cebirin ko-ters tasviri
\mathcal{I}	İdeal
∂	Kısmi türev operatörü
\mathbb{C}	Kompleks sayılar kümesi
\mathbb{K}'	Kompleks sayılar kümesi ile Grassmann sayıların birleşim kümesi
$\mathcal{O}(\text{M}_{h,h'}(1 1))$	$\text{M}_{h,h'}(1 1)$ kuantum matris uzayının koordinat cebiri
$\sigma, \tau, \mu, \tilde{\mu}$	$\mathcal{O}(\text{GL}_{h,h'}(1 1))$ Hopf süper cebirinin temsilleri
ω^R	Sağ-invaryant Cartan-Maurer 1-formu
Δ_R	Sağ ko-çarpma tasviri
δ_R	Sağ-ko-etki
ω^L	Sol-invaryant Cartan-Maurer 1-formu
Δ_L	Sol ko-çarpma tasviri

δ_L	Sol-ko-etki
\mathcal{A}	Süper cebir
η	Süper cebirin birim tasviri
m	Süper cebirin çarpma tasviri
Δ	Süper ko-cebirin ko-çarpma tasviri
ϵ	Süper ko-cebirin ko-birim tasviri
T	Süper matris
$M(1 1)$	Süper matris uzayı
$\text{sdet}(T)$	Süper (kuantum) determinant
$GL(1 1)$	Süper matris grubu
$p(v)$	v elemanın derecesi
$\mathbb{C}\langle X \rangle$	X kümesi üzerindeki serbest cebir
\mathbf{i}_X	X vektör alanı yönünde süper iç türev
\mathcal{L}_X	X vektör alanı yönünde süper Lie türevi
χ	Vektör alanı

$GL_{h,h'}(1|1)$ Süper Grubunun Diferansiyel Geometrisi

İlknur TEMLİ

Matematik Anabilim Dalı

Doktora Tezi

Danışman: Prof. Dr. Salih ÇELİK

Bu çalışmada, iki ranklı ikisi çift ve ikisi tek elemandan oluşan 2×2 süper matrislerin bir grubu olan $GL(1|1)$ matris süper grubunun iki parametrelili standart olmayan deformasyonu üzerine değişmeli olmayan bir geometri kurulacaktır.

Bir cebirsel veya geometrik yapının bir parametreyle sürekli bozulması işlemine yapının deformasyonu denilmektedir. Ortaya çıkan yeni yapılara "kuantum yapılar" diyoruz. Kuantum diferansiyel geometri, klasik diferansiyel geometrideki birçok yapıyı cebirsel olarak değerlendirip onların deforme edilmesini amaçlar. Burada amaç, deformasyon parametresinin bazı özel değer(ler)i için klasiğe dönmektir. Bu bağlamda kuantum yapıların, klasik yapıların bir genelleştirilmesi olduğu düşünülebilir. Dolayısıyla, klasiğe göre çok daha karışık yapılar meydana gelir. Durum, süper yapılar klasik yapılara bazı eklemelerle elde edildiğinden -ki deforme edilmemiş halde bile- şüphesiz daha karmaşık hale gelmektedir.

$GL(1|1)$ matris süper grubunun $GL_{h,h'}(1|1)$ ile gösterilen standart olmayan (h, h') -deformasyonunun koordinat cebiri olan $\mathcal{O}(GL_{h,h'}(1|1))$ cebiri bir Hopf süper cebiridir. Bu tez iki kısımdan oluşmaktadır. İlk kısımda, $\mathcal{O}(GL_{h,h'}(1|1))$ Hopf süper cebiri üzerine bir ikili-kovaryant diferansiyel hesap kurulacaktır. İkinci kısımda ise bu diferansiyel hesaba, süper iç türevler ve süper Lie türevler eklenerek çok daha geniş bir diferansiyel hesap elde edilecektir. Bu hesaba Cartan hesabı denilmektedir.

Standart deformasyonda, birinci mertebeli diferansiyel hesap için cebirin jeneratörlerine etki eden bir σ cebir homomorfizmi mevcuttur. Bu tezde,

standart olmayan (h, h') -deformasyonda da cebirin jeneratörlerine etki eden \mathbb{Z}_2 -dereceli bir $\sigma : \mathcal{O}(\mathrm{GL}_{h,h'}(1|1)) \rightarrow M_4(\mathcal{O}(\mathrm{GL}_{h,h'}(1|1)))$ mevcut olduğu gösterilmektedir. Bu süper cebir homomorfizmi, süper cebirin jeneratörlerinin 4×4 -tipindeki temsillerinin bulunmasını ve ortaya çıkan bütün komutasyon bağıntılarının kompakt formda ifade edilmesini sağlaması açısından oldukça önemlidir. Ayrıca $\mathcal{O}(\mathrm{GL}_{h,h'}(1|1))$ cebiri üzerine yüksek mertebe diferansiyel hesap kurulurken ortaya çıkacak olan Cartan-Maurer 1-formlarını içeren bağıntılarda mevcuttur. Bu bağıntılar ise cebirin jeneratörleri üzerine etki eden bir μ cebir homomorfizmi ile kompakt formda ifade edilebilecektir. Bu μ cebir homomorfizmi de son derece önemli olup, genişletilmiş diferansiyel hesabın bileşenleri ile olan bağıntıları kompakt formda ifade edebilmemize imkan tanıyacaktır.

Anahtar Kelimeler: h -deforme süper uzaylar, ikili-kovaryant diferansiyel hesap, Cartan-Maurer 1-formlar, h -deforme Lie süper cebirleri, süper Cartan hesabı.

The Differential Geometry of The Supergroup $GL_{h,h'}(1|1)$

İlknur TEMLİ

Department of Mathematics

Doctor of Philosophy Thesis

Supervisor: Prof. Dr. Salih CELİK

In this study, a non-commutative geometry will be constructed on the two-parameter non-standard deformation of the matrix supergroup $GL(1|1)$, which is a group of 2×2 supermatrices of rank two, two even and two odd elements.

The process of continuous distorting an algebraic or geometric structure with a parameter is called deformation of the structure. In this case, we call the new structures that emerge "quantum structures". Quantum differential geometry aims to algebraically evaluate and deform many structures from classical differential geometry. The aim here is to return to classical for certain special value(s) of the deformation parameter. In this context, quantum structures can be considered as a generalization of classical structures. Therefore, much more complicated structures are formed compared to classical ones. Since superstructures are formed by adding to classical structures, the situation inevitably becomes much more complex, even in the undeformed state.

The coordinate algebra of the non-standart (h, h') -deformation $GL_{h,h'}(1|1)$ the matrix supergroup $GL(1|1)$, denoted by $\mathcal{O}(GL_{h,h'}(1|1))$, is a Hopf superalgebra. This thesis consists of two parts. In the first part, a bicovariant differential calculus will be constructed on the Hopf superalgebra $\mathcal{O}(GL_{h,h'}(1|1))$. In the second part, super inner derivatives and super Lie derivatives will be added to this differential calculus to obtain a extended differential calculus. This calculus is called the Cartan calculus.

In the standard deformation, there exists an algebra homomorphism σ acting on the generators of the algebra for first-order differential calculus. In this thesis, we show that there exists a \mathbb{Z}_2 -degree $\sigma : \mathcal{O}(\text{GL}_{h,h'}(1|1)) \rightarrow M_4(\mathcal{O}(\text{GL}_{h,h'}(1|1)))$ acting on the generators of the algebra in the non-standard (h, h') -deformation as well. This superalgebra homomorphism is extremely important in that it allows finding 4×4 -type representations of the generators of the superalgebra and expressing all the resulting commutation relations in compact form. There are also relations containing Cartan-Maurer 1-forms that will arise when higher-order differential calculus is constructed on the algebra $\mathcal{O}(\text{GL}_{h,h'}(1|1))$. These relations can be expressed in compact form by an algebra homomorphism μ acting on the generators of the algebra. This algebra homomorphism μ is also extremely important and will allow us to express the relations with the components of the extended differential calculus in compact form.

Keywords: h -deformed superspaces, bicovariant differential calculus, Cartan-Maurer 1-forms, h -deformed Lie superalgebra, super Cartan calculus.

1.1 Literatür Özeti

Deformasyon teori, genellikle değişmeli cebirsel ve geometrik yapıları ele alarak bir parametre yardımıyla değişmeli olmayan hale getirmeyi amaçlamaktadır. Kuantum diferansiyel geometri, klasik diferansiyel geometride ki birçok yapıyı cebirsel olarak yorumlamakta ve o yapıları deforme ederek daha genel geometrik yapılara dönüştürmektedir. Bu gerçek, matematikte ve matematiksel fizikte çok önemli uygulama alanları bulmaktadır. Kuantum süper geometri ise süper manifoldları genelleştirerek, özellikle süper simetri, kuantum süper alan teori ve yüksek süper simetrik cebirsel yapılar gibi birçok sistemler için son derece önemlidir. Ayrıca, süper simetrik genişlemelerin teorisi ve genelleştirilmiş kuantum mekanik gibi alanlarda da kullanışlı olabilir.

Değişmeli olmayan geometriyi şekillendiren temel yapı, bir asosyatif cebir üzerine kurulan diferansiyel hesaptır. Değişmeli olmayan geometri [1], klasik grupların ve değişmeli cebirlerin, değişmeli olmayan geometrisi için somut örnekler teşkil etmektedir.

Klasik yapıların iki türlü deformasyonu mevcuttur: Bulardan birincisi, standart deformasyon veya q -deformasyon, ve ikincisi, standart olmayan deformasyon veya h -deformasyondur. h -deformasyona bazen Jordanian deformasyon denilmektedir. Bu iki deformasyon türü arasında bir bağlılık söz konusudur. Daha da ilginç olanı, genellikle standart deformasyonda $q = 1$ limitinde klasiğe dönülürken, standart olmayan deformasyonda ise, $h = 0$ limitinde klasiğe dönülür. Ancak vurgulanması gereken bir nokta şudur ki, çoğunlukla süper yapıların h -deformasyonunda h nin karesi sıfırdır. Dolayısıyla standart deformasyonda q sıfırdan farklı bir kompleks sayı iken standart olmayan deformasyonda çoğunlukla h , bir Grassmann sayı gibi davrandığından süper yapıların tekabül eden jeneratörleri ile anti-komutasyon ilişkilerine girerek sanki yapının bir elemanıymış gibi davranabilmektedir.

Normal yapılarda (\mathbb{Z}_1 -dereceli yapılarda) jeneratörlerin derecesi sıfır olduğundan, onlara çift jeneratörler denilmektedir ve klasik durumda komutatiftirler. Süper yapılarda ise, iki tür jeneratör bulunmaktadır. Bunlar "tek" ve "çift" jeneratörler olarak adlandırılır (örneğin, fizikte çift jeneratörlere bozonlar ve tek jeneratörlere fermiyonlar denilmektedir).

n -boyutlu bir uzay üzerindeki fonksiyonların cebirinin bir q -deformasyonu ve dolayısıyla bu uzaya etki eden genel lineer grubun q -deformasyonu [2] de ve $(m+n)$ -boyutlu bir süper uzayın q -deformasyonu ve bu süper uzaya etki eden genel lineer süper grubun da q -deformasyonu [3] de Manin tarafından takdim edilmiştir. Bunlar ve daha genel deforme edilmiş cebirsel yapılar için iki tür diferansiyel hesap geliştirilmiştir:

(1) Wess-Zumino yaklaşımı: Matematiksel açıdan kuantum (süper) gruplara, Lie (süper) gruplarının deformasyonu olarak bakılmaktadır. Wess ve Zumino [4], bir kuantum uzay [2] üzerine değişmeli olmayan bir diferansiyel hesap oluştururlarken, uzay üzerine grubun etkisini kullanmışlardır. Daha sonra kuantum (süper) uzaylar üzerine bazı diferansiyel hesaplar, birçok yazar tarafından geliştirilmiştir [5, 6].

(2) Woronowicz yaklaşımı: Woronowicz [7, 8], kuantum matris grupları üzerine değişmeli olmayan bir diferansiyel hesap kurmak için, onun Hopf cebir yapısından faydalanarak, sağ-, sol- ve ikili-kovaryantlık tanımlarını geliştirmiştir. Bu teknik kullanılarak, hem kuantum uzaylar [9] ve onlara etki eden kuantum gruplar [10] ve hem de kuantum süper uzaylar [11–13] ve onlara etki eden kuantum süper gruplar [14, 15] üzerine bir çok çalışma yapılmıştır.

Standart olmayan deformasyonlar (h -deformasyon) üzerine yapılmış çok fazla çalışma bulunmamaktadır. $GL(n)$ nin standart olmayan deformasyonu Demidov ve arkadaşları tarafından verilmiştir [16]. Aghamuhammedi ve arkadaşları [17] q -deforme düzleminden h -deforme düzleme geçmek için $q \rightarrow 1$ limitinde mevcut olmayan bir g matrisi kullanmışlar ve elde ettikleri bu h -deforme düzlem üzerine bir diferansiyel hesabı Wess-Zumino yaklaşımını kullanarak geliştirmişlerdir. Burada ortaya çıkan yeni h -deformasyon parametresi sıfırdan farklı bir kompleks sayıdır.

Süper düzleminin tek parametrelili standart olmayan deformasyonu ve dolayısıyla $GL(1|1)$ süper grubunun tek parametrelili standart olmayan deformasyonu, [17] de verilen büzülme tasvirinin süper versiyonu kullanılarak Dabrowski ve Parashar [18] tarafından yapılmıştır. Burada ortaya çıkan yeni deformasyon parametresi (yani h) bir tek elemandır. Dolayısıyla, bu yeni deformasyon parametresinin hem karesi sıfırdır ve hem de cebirin "tek" jeneratörleriyle anti-komutatiftir. $GL(1|1)$ süper grubunun iki parametrelili standart olmayan deformasyonu, uygun bir

büzülme tasviri tanımlanarak Celik [19] tarafından yapılmıştır. Bu yeni kuantum süper grup $GL_{h,h'}(1|1)$ ile gösterilmiştir. Bu süper grubun $\mathcal{O}(GL_{h,h'}(1|1))$ ile gösterilen koordinat cebiri bir Hopf süper cebiridir. Celik bu çalışmada, standart olmayan kuantum süper düzlem üzerine bir de iki parametrelili diferansiyel hesap geliştirmiştir. Daha sonra, bu çalışmadan bağımsız bir çalışmada, Celik ve arkadaşları [20], h -deforme süper düzlem üzerine bir büzülme kullanarak bir hesap geliştirmiştir. Bu hesabın iki parametrelili versiyonu Celik S. ve Celik S.A [21] tarafından yapılmıştır. $(2 + 1)$ - ve $(1 + 2)$ - boyutlu uzayların iki parametrelili standart olmayan deformasyonları Celik [22] tarafından tanımlanmış ve bu uzayların simetri grupları da bulunmuştur. Çok ilginçtir ki, iki parametrelili standart olmayan deformasyonda da her iki deformasyon parametresi tek elemanlar gibi davranmaktadır.

Kuantum Cartan hesabı üzerine literatürde çok az sayıda çalışma bulunmaktadır. Kuantum Lie cebirleri üzerine Cartan hesap [23] de ve quantum gruplar üzerine Cartan hesap ise [24] de verilmiştir. Bu çalışma kullanılarak kuantum uzay üzerine Cartan hesabı [25] de geliştirilmiştir. Kuantum süper Cartan hesabı ise Celik tarafından [26] da takdim edilmiştir. $\mathbb{C}_q^{2|1}$ cebiri üzerine kurulan Cartan hesabı [27], literatürdeki son çalışmadır. h -deforme yapılar üzerine genişletilmiş diferansiyel hesabın yapıldığı tek çalışma Celik tarafından [28] de verilmiştir. Bu çalışmada gösterilmiştir ki, q -deformasyondan h -deformasyona büzülme yoluyla geçilmesi nedeniyle, h -deformasyonda Lie türevleri ile kısmi türevler çakışmaktadır.

1.2 Hipotez ve Tezin Yapısı

$GL_{h,h'}(1|1)$ kuantum süper grubu üzerindeki fonksiyonların cebiri bir Hopf süper cebir yapısına sahiptir. Dolayısıyla, $\mathcal{O}(GL_{h,h'}(1|1))$ Hopf süper cebiri üzerine, bir genişletilmiş diferansiyel hesap geliştirilebilir. Bu tez, $\mathcal{O}(GL_{h,h'}(1|1))$ Hopf süper cebiri üzerine bir diferansiyel hesap kurduktan sonra, bu diferansiyel hesaba süper iç türevler ve süper Lie türevlerini ekleyerek bir genişletilmiş diferansiyel hesap kurmayı amaçlamaktadır.

Bu tez, altı bölümden oluşmaktadır. Bölüm 2'de konu bütünlüğünü sağlamak adına süper yapılar hakkında temel bilgilerden bahsedilecektir. Bölüm 3'de ise $\mathcal{O}(GL_{h,h'}(1|1))$ Hopf süper cebiri tanıtılacaktır. Tezin orjinal kısımları Bölüm 4'ten başlamaktadır.

Bölüm 4'te, $\mathcal{O}(GL_{h,h'}(1|1))$ Hopf süper cebiri üzerine bir ikili-kovaryant diferansiyel hesap kurulacaktır. Bu, aşağıdaki adımlar ile gerçekleştirilecektir:

- İlk adım olarak, $\mathcal{O}(\mathrm{GL}_{h,h'}(1|1))$ Hopf süper cebiri üzerine birinci mertebeden diferansiyel hesabı kurmakla başlıyoruz. Bu diferansiyel hesap cebirin jeneratörlerinin onların birinci mertebeden diferansiyelleri (1-formları) ile arasındaki komutasyon bağıntılarını bulmayı hedefler. Bunu gerçekleştirmek için $\mathcal{O}(\mathrm{GL}_{h,h'}(1|1))$ Hopf süper cebiri üzerindeki ko-çarpmayı kullanıyoruz.
- İkinci adım olarak, $\mathcal{O}(\mathrm{GL}_{h,h'}(1|1))$ Hopf süper cebirinin jeneratörleri ve onların diferansiyelleri arasındaki komutasyon bağıntılarını kapalı formda ifade edebilmemize imkan veren bir σ lineer tasviri tanımlıyoruz. Ve bu tasvirin bir cebir homomorfizmi olduğunu gösteriyoruz. Bu tasvir, $\mathcal{O}(\mathrm{GL}_{h,h'}(1|1))$ Hopf süper cebirinin jeneratörlerinin 4×4 -tipindeki matris temsillerini bulmamızı sağlar.
- Üçüncü adımda, $\mathcal{O}(\mathrm{GL}_{h,h'}(1|1))$ Hopf süper cebiri üzerine ikinci mertebeden bir diferansiyel hesap kuruyoruz. Bu hesabı birinci adımdan elde ediyoruz.
- Sonraki adım, cebirin jeneratörlerine tekabül eden kısmi türevlerle ilgili bağıntıların bulunmasını talep eder. $\mathcal{O}(\mathrm{GL}_{h,h'}(1|1))$ Hopf süper cebirinin jeneratörleri ile onlara tekabül eden kısmi türevleri arasındaki komutasyon bağıntılarını bulup, daha önce tanımlanan σ lineer tasviri yardımıyla ifade ediyoruz. Sonrasında, kısmi türevlerin kendi arasındaki bağıntılarını da dış türevin karesinin sıfır olması gerçeğiyle elde ediyoruz.
- $\mathcal{O}(\mathrm{GL}_{h,h'}(1|1))$ Hopf süper cebiri üzerinde tanımlanan vektör alanlarının Lie cebir yapısı Cartan-Maurer 1-formlarını talep etmektedir. Bunun için önce, $\Omega(\mathcal{O}(\mathrm{GL}_{h,h'}(1|1)))$ diferansiyel cebiri üzerinde sağ- ve sol-invaryant Cartan-Maurer 1-formlarını tanımlıyoruz ve ilgili komutasyon bağıntılarını elde ediyoruz. Bu bağıntıları $\mathcal{O}(\mathrm{GL}_{h,h'}(1|1))$ Hopf süper cebiri üzerinde tanımlanan bir μ cebir homomorfizmi ile kompakt formda yazıyoruz. Bu tasvir de $\mathcal{O}(\mathrm{GL}_{h,h'}(1|1))$ Hopf süper cebirinin jeneratörlerinin 4×4 -tipindeki matris temsillerini bulmamıza imkan verir.
- Önceki adımda elde edilen bazı yapıları kullanarak, $\mathcal{O}(\mathrm{GL}_{h,h'}(1|1))$ Hopf süper cebirinin Lie süper vektör alanlarının bir Lie cebir yapısına sahip olduğunu gösteriyoruz ve yapı sabitlerini buluyoruz.

Bölüm 5'te, önceki bölümde kurulan diferansiyel hesabı, süper iç türevler ve süper Lie türevleri ekleyerek genişletiyoruz. Bu hesap literatürde Cartan hesabı olarak bilinmektedir. İşlem adımları aşağıda sıralanmıştır:

- İlk olarak, süper dış türev tanıtıyoruz.

- Süper iç türevin tanıtımı yapıldıktan sonra iç türevlerin $\mathcal{O}(GL_{h,h'}(1|1))$ Hopf süper cebriinin jeneratörleri, onların diferansiyelleri ve Cartan-Maurer 1-formları ile arasındaki komutasyon bağıntılarını ve iç türevlerin kendi aralarındaki komutasyon bağıntılarını buluyoruz.
- Süper Lie türevi tanıtımı yapıldıktan sonra Lie türevlerinin $\mathcal{O}(GL_{h,h'}(1|1))$ Hopf süper cebriinin jeneratörleri, onların diferansiyelleri, Cartan-Maurer 1-formları ile arasındaki komutasyon bağıntılarını ve Lie türevlerinin kendi aralarındaki komutasyon bağıntılarını buluyoruz.

Bölüm 6'da, yapılan çalışma sonucunda elde edilen bilgileri kısaca özetleyip, çalışmanın önemi hakkında bir değerlendirme yapıyoruz.



2 TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, ilerleyen bölümler için ihtiyaç duyacağımız temel kavramlardan bahsedeceğiz. Bu ve sonraki bölümlerde, aksini söylemediğimiz sürece cisim olarak \mathbb{C} kompleks sayılar kümesini kullanacağız. Ancak bu çalışmada farklı bir cisme de ihtiyacımız olacak. Göz önüne alacağımız bütün vektör uzaylarının ve cebirlerin \mathbb{C} cismi üzerinde olduğunu kabul edeceğiz. Dolayısıyla, aşağıdaki tanımlar ve bazı teoremlerde vektör uzayı ya da bir cebir söz konusu olduğunda onların cismi ile ilgili ayrıca bir vurgu yapmayacağız.

Bu bölüm temel kavramları içerdiğinden, buradaki bilgiler için birçok farklı kaynaktan yararlanılabilir. Örnek olarak [29, 30] incelenebilir.

2.1 Süper Cebirler

Klasik durumda bir cebirin jeneratörleri derecelendirilmemiştir (aslında hepsinin derecesinin sıfır olduğu kabul edilmektedir). Bu tip cebirlere \mathbb{Z}_1 -dereceli cebirler denilmektedir. Bununla birlikte jeneratörlerinin dereceleri 0 ve 1 olan cebirlerde vardır. Bu tür cebirlere \mathbb{Z}_2 -dereceli (veya süper) cebirler denilmektedir ve üzerinde çalışırken çok daha dikkatli olmak gerekmektedir. Süper yapılar üzerinde çalışılan indeks kümesi $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ dir.

Tanım 2.1. Eğer V_0 ve V_1 bir V vektör uzayının iki alt uzayı olmak üzere

$$V = V_0 \oplus V_1$$

yazılabiliyorsa, V vektör uzayına \mathbb{Z}_2 -dereceli vektör uzayı veya süper vektör uzayı denir.

Tanım 2.2. Bir V süper vektör uzayının elemanlarına homojen elemanlar olarak adlandırılır. Bir $v \in V$ için $v \in V_0$ ise v elemanının bir çift eleman, $v \in V_1$ ise v elemanının bir tek eleman olduğu söylenir.

V süper vektör uzayındaki bir eleman dereceye sahip olup, bu elemanın derecesini $v \in V_i$ için $p(v) = i \in \mathbb{Z}_2$ ile gösteririz.

Örnek 1.1 $V := \mathbb{C}^{1|1}$ bir süper vektör uzayı olmak üzere

$$\begin{pmatrix} x \\ \theta \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{1|1} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \theta \end{pmatrix}$$

yazarız.

Tanım 2.3. V ve W süper vektör uzayları için $L : V_i \rightarrow W_{i+k}$, $i, k \in \mathbb{Z}_2$, tasviri bir dereceli lineer tasvir olarak adlandırılır ve L tasvirinin derecesi $p(L) = k$ ile gösterilir. Bu durumda $L(v) \in W$ elemanının derecesi

$$p(L(v)) = p(L) + p(v) = k + i \pmod{2} \quad (2.1)$$

eşitliği ile elde edilir.

Süper vektör uzaylarının tensör çarpımı mümkündür. Eğer V ve W , iki süper vektör uzayı ise $V \otimes W$ çarpımı

$$\begin{aligned} (V \otimes W)_0 &= (V_0 \otimes W_0) \oplus (V_1 \otimes W_1), \\ (V \otimes W)_1 &= (V_0 \otimes W_1) \oplus (V_1 \otimes W_0) \end{aligned}$$

şeklindeki doğal \mathbb{Z}_2 -derecelendirmeye sahip bir süper vektör uzayıdır:

$$(V \otimes W) = (V \otimes W)_0 \oplus (V \otimes W)_1.$$

Tanım 2.4. Bir \mathcal{A} vektör uzayına, $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ çarpma tasviri mevcut ise bir süper cebir denir. Bu durumda \mathcal{A}_0 ve \mathcal{A}_1 , \mathcal{A} nın alt cebirleri olmak üzere

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1$$

yazarız.

Sonuç 2.1. Yukarıda $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1$ şeklinde ifade edilen \mathcal{A} süper cebiri derecelendirme ile şu şekilde de ifade edilebilir: Her $i, k = 0, 1$ için $\mathcal{A}_i \cdot \mathcal{A}_k \subseteq \mathcal{A}_{i+k}$ ve her $a, b \in \mathcal{A}$ için

$$p(a \cdot b) = p(a) + p(b)$$

dir.

Süper cebirlerin süper tensör çarpımı üzerindeki çarpım kuralını da aşağıdaki tanım ile verelim:

Tanım 2.5. \mathcal{A} ve \mathcal{A}' , iki süper cebir, a, b ve a', b' sırasıyla \mathcal{A} ve \mathcal{A}' süper cebirlerinin homojen elemanları olsun. $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}'$ uzayı

$$(a \otimes a') \cdot (b \otimes b') = (-1)^{p(a')p(b)} a \cdot b \otimes a' \cdot b' \quad (2.2)$$

çarpım kuralı ile bir süper cebirdir.

Tanım 2.6. \mathcal{A} , bir süper cebir olmak üzere \mathcal{A} üzerinde bir çarpma tasviri olarak adlandırılan $m : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ ve bir birim tasviri olarak adlandırılan $\eta : K \rightarrow \mathcal{A}$ lineer tasvirleri

$$m \circ (\text{id} \otimes m) = m \circ (m \otimes \text{id}) \quad (\text{Asosyatiflik Aksiyomu})$$

$$m \circ (\text{id} \otimes \eta) = \text{id} = m \circ (\eta \otimes \text{id}) \quad (\text{Birim Aksiyomu})$$

aksiyomlarını sağlayacak şekilde mevcut ise (\mathcal{A}, m, η) üçlüsüne bir birim elemanlı asosyatif süper cebir denir.

Tanım 2.7. \mathcal{A} süper cebiri,

$$m(a \otimes b) := a \cdot b, \quad \forall a, b \in \mathcal{A}$$

ile tanımlı $m : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ lineer tasvirine sahiptir. Bu tasvire bir çarpma tasviri denir.

Tanım 2.8. Bir \mathcal{A} süper cebirinin a ve b homojen elemanlarının çarpımı

$$a \cdot b = (-1)^{p(a)p(b)} b \cdot a \quad (2.3)$$

kuralını gerçekliyorsaa \mathcal{A} süper cebirinin süper komutatatif olduğu söylenir.

Yukarıdaki tanım gereği, bir \mathbb{Z}_2 -dereceli \mathcal{A} cebirinin bir **tek** elemanının karesi sıfırdır. Yani, $\theta \in \mathcal{A}_1$ ise

$$\theta \cdot \theta = -\theta \cdot \theta \Rightarrow \theta^2 = 0.$$

olur.

Tanım 2.9. Bir $L : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ süper cebirlerin dereceli lineer tasviri her $a, b \in \mathcal{A}$ için

$$L(a \cdot b) = (-1)^{p(a)p(L(b))} L(a) \cdot L(b) \quad (2.4)$$

kuralını gerçekliyorsaa, L tasvirine bir süper cebir homomorfizmi denir.

2.2 Süper Modül

Bir süper cebir üzerindeki bir modül, cebirin etkisiyle uyuşabilen dereceli bir vektör uzayıdır.

Tanım 2.10. \mathcal{A} , bir süper cebir ve V , bir süper vektör uzayı olsun.

1. Bir $\varphi_L : \mathcal{A} \otimes V \rightarrow V$ lineer tasviri, $\varphi(a \otimes v) = a \cdot v$ çarpımıyla

$$\varphi_L \circ (\text{id} \otimes \varphi_L) = \varphi_L \circ (m \otimes \text{id}) \quad \text{ve} \quad \varphi_L \circ (\eta \otimes \text{id}) = \text{id}$$

özdeşliklerini gerçekleyecek şekilde mevcut ise φ_L tasvirine \mathcal{A} cebirinin V üzerine sol-etkisi denir. Bu durumda V vektör uzayına bir sol \mathcal{A} -modül diyoruz.

2. Bir $\varphi_R : V \otimes \mathcal{A} \rightarrow V$ cebir homomorfizmi, $\varphi(v \otimes a) = v \cdot a$ çarpımıyla

$$\varphi_R \circ (\varphi_R \otimes \text{id}) = \varphi_R \circ (\text{id} \otimes m) \quad \text{ve} \quad \varphi_R \circ (\text{id} \otimes \eta) = \text{id}$$

özdeşliklerini gerçekleyecek şekilde mevcut ise φ_R tasvirine \mathcal{A} cebirinin V üzerine sağ-etkisi denir. Bu durumda V vektör uzayına bir sağ \mathcal{A} -modül diyoruz.

3. Eğer $v \in V$ ve $a, b \in \mathcal{A}$ için,

$$a \cdot (v \cdot b) = (a \cdot v) \cdot b$$

uyuşabilirlik şartı ile V , hem bir sol \mathcal{A} -modül ve hem de bir sağ \mathcal{A} -modül ise V süper vektör uzayına bir \mathcal{A} -ikili-modül denir.

Tanım 2.11. $X = \{x_i : i \in I\}$, jeneratörlerin indekslenmiş bir kümesi olsun. I^0, I kümesinde bulunmayan sadece bir elemandan oluşan bir küme olmak üzere $I^\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} I^n$ diyelim. $\mathbb{C}\langle X \rangle$ vektör uzayı $k, n \in \mathbb{N}_0$ için $i = (i_1, i_2, \dots, i_k) \in I^k$, $j = (j_1, j_2, \dots, j_n) \in I^n$ iken $(i, j) = (i_1, i_2, \dots, i_k, j_1, j_2, \dots, j_n)$ ve $o \in I^0$ olmak üzere

$$x_i := x_{i_1} \cdot x_{i_2} \cdots x_{i_k}, \quad x_i \cdot x_j := x_{(i,j)}, \quad \text{ve} \quad x_o := 1, \quad x_{(i,o)} = x_{(o,i)} := x_i$$

çarpımları ile bir cebir yapısına sahip olur. Tabanı $X = \{x_i : i \in I^\infty\}$ olan $\mathbb{C}\langle X \rangle$ vektör uzayı, $x_i \cdot x_j := x_{(i,j)}$ çarpımıyla bir serbest cebir olarak adlandırılır.

Tanım 2.12. \mathcal{A} , bir süper cebir ve \mathcal{I} , \mathcal{A} nın bir alt süper cebiri olsun. Eğer her $a \in \mathcal{A}$ ve $x \in \mathcal{I}$ olmak üzere $a \cdot x \in \mathcal{I}$ oluyorsa \mathcal{I} ya bir sol ideal $x \cdot a \in \mathcal{I}$ oluyorsa \mathcal{I} ya bir sağ ideal denir. Eğer \mathcal{I} , \mathcal{A} nın hem sol ve hem de sağ ideali ise \mathcal{I} ya \mathcal{A} cebirinin bir iki-yanlı ideali denir.

Herhangi bir \mathcal{A} süper cebiri, bir cebirsel yapının elemanlarının bazı denklik bağıntıları kullanılarak bölünmesi sonucunda elde edilebilir:

Tanım 2.13. $\mathbb{C}\langle X \rangle$ bir serbest cebir ve \mathcal{I} , bu serbest cebirin bir iki-yanlı ideal olsun. $\mathbb{C}\langle X \rangle$ cebirinin \mathcal{I} ideali ile bölümüyle elde edilen $\mathcal{A} := \mathbb{C}\langle X \rangle / \mathcal{I}$ cebirine bölüm cebiri denir.

2.3 Hopf Süper Cebiri

Bir süper cebir, çarpma ve özdeşlik tasvirlerine sahiptir. Bu iki tasvire dual olan tasvirlerin eklenmesiyle yeni bir süper cebir tanımlanabilir. İlginç olan şu ki, yeni tasvirler cebirin çarpmasını koruyan lineer tasvirleridir. Bu yeni cebire Hopf süper cebir denilmektedir:

Tanım 2.14. Bir \mathcal{A} süper vektör uzayı üzerindeki bir ko-çarpma tasviri denilen $\Delta : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ ve bir ko-birim tasviri denilen $\epsilon : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ lineer tasvirleri

$$\begin{aligned} (\Delta \otimes \text{id}) \circ \Delta &= (\text{id} \otimes \Delta) \circ \Delta, \\ m \circ (\epsilon \otimes \text{id}) \circ \Delta &= \text{id} = m \circ (\text{id} \otimes \epsilon) \circ \Delta \end{aligned}$$

aksiyomlarını sağlayacak şekilde mevcut ise, $(\mathcal{A}, \Delta, \epsilon)$ üçlüsüne bir süper ko-cebir denir.

Tanım 2.15. Eğer \mathcal{A} , hem bir süper cebir ve hem de bir süper ko-cebir ise $(\mathcal{A}, m, \eta, \Delta, \epsilon)$ beşlisine bir süper ikili-cebir denir.

Teorem 2.1. Eğer \mathcal{A} , bir süper ikili-cebiri ise aşağıdaki aksiyomlar denktir:

1. Δ ve ϵ birer cebir homomorfizmidir.
2. m ve η birer ko-cebir homomorfizmidir.

Tanım 2.16. \mathcal{H} , bir süper ikili-cebir ve $S : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, bir lineer anti-homomorfizm olsun. Eğer S

$$m \circ (S \otimes \text{id}) \circ \Delta = \eta \circ \epsilon = m \circ (\text{id} \otimes S) \circ \Delta$$

özdeşliklerini gerçeklerse, $(\mathcal{A}, m, \eta, \Delta, \epsilon, S)$ altılısına bir Hopf süper cebir denir.

Burada S tasviri, "antipot" veya "ko-ters" olarak adlandırılır. Δ, ϵ ve S tasvirlerinin $\mathbf{1} \in \mathcal{H}$ birim elemanına etkisi

$$\Delta(\mathbf{1}) = \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}, \quad \epsilon(\mathbf{1}) = 1 \quad \text{ve} \quad S(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$$

dir.

Bir Hopf süper cebirinin bir jeneratörü, cebirin jeneratörlerinin bir çarpımı olarak ifade edilebilir. Bu çarpımın ko-tersi, cebir anti-homomorfizmi olma özelliği ile

$$S(a \cdot b) = (-1)^{p(a)p(b)} S(b) \cdot S(a), \quad \forall a, b \in \mathcal{H}. \quad (2.5)$$

olarak verilir.

2.4 Süper Ko-modül Cebiri

Yukarıda ifade edildiği gibi bir Hopf süper cebiri içinde modül tanımı verilebilir:

Tanım 2.17. \mathcal{X} , bir süper cebir ve \mathcal{H} , bir Hopf süper cebir olsun.

1. Bir $\varphi_L : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{H} \otimes \mathcal{X}$ cebir homomorfizmi

$$(\text{id} \otimes \varphi_L) \circ \varphi_L = (\Delta \otimes \text{id}) \circ \varphi_L \quad \text{ve} \quad (\epsilon \otimes \text{id}) \circ \varphi_L = \text{id}$$

özdeşliklerini gerçekleyecek şekilde mevcut ise φ_L tasvirine \mathcal{H} cebirinin \mathcal{X} üzerine sol-ko-etkisi denir. Bu durumda \mathcal{X} süper cebirine bir sol \mathcal{H} -ko-modül cebiri (veya *sol kuantum uzayı*) denir.

2. Bir $\varphi_R : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X} \otimes \mathcal{H}$ cebir homomorfizmi

$$(\varphi_R \otimes \text{id}) \circ \varphi_R = (\text{id} \otimes \Delta) \circ \varphi_R \quad \text{ve} \quad (\text{id} \otimes \epsilon) \circ \varphi_R = \text{id}$$

özdeşliklerini gerçekleyecek şekilde mevcut ise φ_R tasvirine \mathcal{H} cebirinin \mathcal{X} üzerine sağ-ko-etkisi denir. Bu durumda \mathcal{X} süper cebirine bir sağ \mathcal{H} -ko-modül cebiri (veya *sağ kuantum uzayı*) denir.

3. \mathcal{X} süper cebiri hem sağ \mathcal{H} -ko-modül cebiri hem de sol \mathcal{H} -ko-modül cebiri ise bir \mathcal{H} -ko-ikili-modül cebiri olarak adlandırılır.

Tanım 2.18. \mathcal{H} , bir Hopf süper cebiri olsun.

1. Eğer \mathcal{X} bir sol kuantum uzay olmak üzere, bir $f \in \mathcal{H}$ için

$$\varphi_L(f) = \mathbf{1} \otimes f$$

oluyorsa f nin bir sol invaryant olduğu söylenir.

2. Eğer \mathcal{X} bir sağ kuantum uzay olmak üzere, bir $f \in \mathcal{H}$ için

$$\varphi_R(f) = f \otimes \mathbf{1}$$

oluyorsa f nin bir sağ invaryant olduğu söylenir.

Bu çalışmada, GL(1|1) süper matris grubunun iki parametrelili standart olmayan deformasyonu üzerine genişletilmiş bir diferansiyel hesap kurulacaktır.

Bu bölümde ise, orjinal kısımda kullanacağımız $\mathcal{O}(\text{GL}_{h,h'}(1|1))$ Hopf süper cebirini kısaca tanımlayacağız. İlk önce, GL(1|1) süper matris grubundan bahsedeceğiz. Sonrasında, bu süper grubun (h, h') -deformasyonunun etki ettiği süper uzayların tanımlarını vererek, (h, h') -deforme GL_{*h,h'*}(1|1) süper grubunu elde edeceğiz ve $\mathcal{O}(\text{GL}_{h,h'}(1|1))$ süper cebirinin Hopf süper cebir olduğunu göstereceğiz.

3.1 GL(1|1) Genel Lineer Süper Matris Grubu

$\mathcal{A} = \mathbb{C}\langle a, \beta, \gamma, d \rangle$, bir serbest süper cebir olsun. Bu süper cebirin jeneratörlerinden, a ve d elemanlarının çift yani $p(a) = 0$ ve $p(d) = 0$, β ve γ elemanlarının tek yani $p(\beta) = 1$ ve $p(\gamma) = 1$ olduklarını kabul edelim. $\mathbb{C}\langle a, \beta, \gamma, d \rangle$ süper cebirinin bir (a, β, γ, d) noktasını matris formunda

$$T := \begin{pmatrix} a & \beta \\ \gamma & d \end{pmatrix} = (t_{ij}) \quad (3.1)$$

şeklinde yazalım. Böyle matrislere süper matrisler denir. Elemanları bu şekildeki matrislerden oluşan uzayı $M(1|1) := M(1|1, \mathcal{A})$ ile gösterelim. $M(1|1)$ süper matris uzayının grup yapısına sahip bir alt uzayını belirlemek için T matrisindeki a ve d elemanlarının formal terslerinin mevcut olduğunu kabul edelim. Bu durumda T süper matrisinin süper determinanı

$$\text{sdet}(T) = a \cdot d^{-1} - \beta \cdot d^{-1} \cdot \gamma \cdot d^{-1} \quad (3.2)$$

olarak tanımlanır. Böyle matrisler, $\text{sdet}(T) \neq 0$ olduğunda bir süper grup oluşturur. Bu süper grup literatürde GL(1|1) ile gösterilmektedir [31].

3.2 h -deforme ve h' -deforme Süper Düzlemleri Üzerindeki Fonksiyonların Cebirleri

Bu kısımda Örnek 1 de tanıtilan $\mathbb{C}^{1|1}$ süper düzlemi üzerindeki fonksiyonların süper cebirinin standart olmayan deformasyonu tanıtılacaktır [21] Ayrıca bu süper düzlemin "dış" süper düzleminin tanımı da burada verilecektir [21].

Tanım 3.1. [21] $\mathbb{C}\langle x, \theta \rangle$, birim elemana sahip bir asosyatif serbest cebir ve \mathcal{I}_h , bu serbest cebirin $x \cdot \theta - \theta \cdot x - hx^2$ ve $\theta^2 + h\theta \cdot x$ elemanları ile oluşturulmuş iki yanlı ideali olsun.

$$\mathcal{O}(\mathbb{C}_h^{1|1}) := \mathbb{C}\langle x, \theta \rangle / \mathcal{I}_h$$

bölüm cebiri ile $\mathbb{C}_h^{1|1}$ uzayına h -deforme \mathbb{Z}_2 -dereceli düzlem veya kuantum süper düzlem denir.

Bu tanıma göre, $\mathbb{C}_h^{1|1}$ kuantum süper uzayı üzerindeki fonksiyonların cebiri olan $\mathcal{O}(\mathbb{C}_h^{1|1})$ süper cebirinin jeneratörleri arasındaki kuadratik komutasyon bağıntıları

$$x \cdot \theta = \theta \cdot x + hx^2, \quad \theta^2 = -h\theta \cdot x, \quad h^2 = 0. \quad (3.3)$$

ile verilir. h ve θ nın özelliklerinden

$$\theta^3 = 0$$

kübik bağıntısını elde etmek kolaydır.

Tanım 3.2. [21] Jeneratörleri φ ve y olan ve

$$\varphi^2 = h'\varphi \cdot y, \quad \varphi \cdot y = y \cdot \varphi + h'y^2, \quad (h')^2 = 0 \quad (3.4)$$

bağıntılarını sağlayan cebiri $\Lambda_{h'}(\mathbb{C}_h^{1|1})$ ile gösterelim. Bu cebire $\mathcal{O}(\mathbb{C}_h^{1|1})$ süper cebirinin h -deforme düzleminin dış cebiri olarak adlandırılır.

Yukarıdaki tanıma göre, h' ve φ nın özelliklerinden

$$\varphi^3 = 0$$

olduğu da kolayca görülebilir.

Yorum 3.1. Yukarıda sözü edilen h ve h' deformasyon parametrelerinin her ikisi de *tektir*. Üstelik bunlar cebirin çift elemanları ile değişmeli ancak tek elemanları ile $(-)$ işareti ile değişmelidir. Bu durum bu iki parametrenin kendi arasındaki komutasyonu için de geçerlidir. Dolayısıyla bu parametreler Grassmann sayıları

olarak adlandırılmaktadır. Yani, $X \in \{x, y\}$, $\Theta \in \{\theta, \varphi\}$ ve $h'' \in \{h, h'\}$ olmak üzere çeşitli komutasyon bağıntıları

$$Xh'' = h''X, \quad \Theta h'' = -h''\Theta, \quad hh' + h'h = 0$$

şeklindedir.

Gösterim. Yukarıda verilen h ve h' deformasyon parametreleri $\mathcal{O}(\mathbb{C}_h^{1|1})$ ve $\Lambda_{h'}(\mathbb{C}_h^{1|1})$ süper cebirlerinin jeneratörleriyle etkileşime girmektedir. Dolayısıyla biz, çalıştığımız cismi Grassmann sayılar ve \mathbb{C} kompleks sayıların birleşimi olarak ele alıyoruz. Bu cismi \mathbb{K}' ile göstereceğiz ve buradan sonra \mathbb{K}' üzerinde çalışacağız.

3.3 $GL_{h,h'}(1|1)$ Kuantum Matris Süper Grubu

Genel süper gruplarda olduğu gibi süper gruplarda da bir lineer transformasyon süper uzaya etki eder. Her lineer transformasyon bir matris temsiline sahip olduğundan klasik süper gruplarda olduğu gibi kuantum süper gruplarında da düzleme etki eden 2×2 -tipindeki matrisler mevcuttur.

Kabul edelim ki, T süper matrisinin matris elemanları ile $\mathcal{O}(\mathbb{C}_h^{1|1})$ ve $\Lambda_{h'}(\mathbb{C}_h^{1|1})$ süper cebirlerinin jeneratörleri süper komutatiftir. Bu durumda, $x_i \in \mathcal{O}(\mathbb{C}_h^{1|1})$ ve $y_i \in \Lambda_{h'}(\mathbb{C}_h^{1|1})$ için $x_1 = x, x_2 = \theta$ ve $y_1 = \varphi, y_2 = y$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \delta_L : \mathcal{O}(\mathbb{C}_h^{1|1}) &\rightarrow \mathcal{O}(M(1|1)) \otimes \mathcal{O}(\mathbb{C}_h^{1|1}), & \delta_L(x_i) &= \sum_{k=1}^2 t_{ik} \otimes x_k, \\ \delta'_L : \Lambda_{h'}(\mathbb{C}_h^{1|1}) &\rightarrow \mathcal{O}(M(1|1)) \otimes \Lambda_{h'}(\mathbb{C}_h^{1|1}), & \delta'_L(y_i) &= \sum_{k=1}^2 t_{ik} \otimes y_k \end{aligned}$$

cebir homomorfizmleri, $M(1|1)$ süper matris uzayının (h, h') -deformasyonunu verir. Bu (h, h') -deforme yapıyı $M_{h,h'}(1|1)$ ile göstereceğiz:

Teorem 3.1. [19] $T \in M_{h,h'}(1|1)$ süper matrisinin matris elemanları arasındaki (h, h') -deforme komutasyon bağıntıları

$$\begin{aligned} a \cdot \beta &= \beta \cdot a - h'(a^2 - \beta \cdot \gamma - a \cdot d), & d \cdot \beta &= \beta \cdot d + h'(d^2 + \beta \cdot \gamma - d \cdot a), \\ a \cdot \gamma &= \gamma \cdot a + h(a^2 + \gamma \cdot \beta - a \cdot d), & d \cdot \gamma &= \gamma \cdot d - h(d^2 - \gamma \cdot \beta - d \cdot a), \\ a \cdot d &= d \cdot a + h\beta \cdot (a - d) + h'(a - d) \cdot \gamma, & \beta^2 &= h'\beta \cdot (a - d), \\ \beta \cdot \gamma &= -\gamma \cdot \beta + (h\beta - h'\gamma) \cdot (d - a), & \gamma^2 &= h\gamma \cdot (d - a). \end{aligned} \quad (3.5)$$

şeklindedir.

Tanım 3.3. [19] $\mathbb{C}\langle a, \beta, \gamma, d \rangle$ süper serbest cebir olmak üzere $\mathcal{J}_{h,h'}$, bu süper cebirin (3.5) komutasyon bağıntılarıyla oluşturulmuş iki yanlı ideali olsun.

$$\mathcal{O}(M_{h,h'}(1|1)) := \mathbb{C}\langle a, \beta, \gamma, d \rangle / \mathcal{J}_{h,h'}$$

bölüm cebirine $M_{h,h'}(1|1)$ kuantum matris uzayının koordinat cebiri denir.

Teorem 3.2. [19] $\mathcal{O}(M_{h,h'}(1|1))$ süper cebiri, aşağıda verilen ko-tasvirler ile bir süper ikili-cebirdir:

(i) $\Delta : \mathcal{O}(M_{h,h'}(1|1)) \rightarrow \mathcal{O}(M_{h,h'}(1|1)) \otimes \mathcal{O}(M_{h,h'}(1|1))$ ko-çarpma tasviri

$$\Delta(t_{ij}) = \sum_k t_{ik} \otimes t_{kj}$$

ile veilir.

(ii) $\epsilon : \mathcal{O}(M_{h,h'}(1|1)) \rightarrow \mathbb{C}$ ko-birim tasviri

$$\epsilon(t_{ij}) = \delta_{ij}$$

ile verilir.

Biliyoruz ki, determinanı sıfırdan farklı olan matrislerin tersi mevcut olup, bu matrisler bir grup oluşturur. (h, h') -deforme $GL_{h,h'}(1|1)$ süper grubunu tanımlamak için, $T \in M_{h,h'}(1|1)$ süper matrisinin süper determinantına ve tersine ihtiyaç vardır.

$T \in M_{h,h'}(1|1)$ süper matrisinin (h, h') -deforme süper determinanı, a ve d matris elemanlarının formal terslerinin mevcut olması durumunda

$$\text{sdet}(T) = a \cdot d^{-1} - \beta \cdot d^{-1} \cdot \gamma \cdot d^{-1} \quad (3.6)$$

olarak bulunur. Buna göre, $\text{sdet}(T)$ süper determinanı hakkında aşağıdaki bilgiler verilebilir [19]:

(i) $\text{sdet}(T)$, h ve h' deformasyon parametrelerini içermez.

(ii) $\text{sdet}(T)$, $\mathcal{O}(M_{h,h'}(1|1))$ süper cebirinin merkezi elemanıdır, yani cebirin bütün jeneratörleriyle komutatiftir.

(iii) $\text{sdet}(T) \neq 0$ ise T süper matrisinin tersi T^{-1} ile gösterilmek üzere

$$\begin{aligned} T^{-1} &= \begin{pmatrix} a^{-1} + a^{-1} \cdot \beta \cdot d^{-1} \cdot \gamma a^{-1} & -a^{-1} \cdot \beta \cdot d^{-1} \\ -d^{-1} \cdot \gamma \cdot a^{-1} & d^{-1} + d^{-1} \cdot \gamma \cdot a^{-1} \cdot \beta \cdot d^{-1} \end{pmatrix} \\ &:= \begin{pmatrix} A & B \\ C & E \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.7)$$

olarak bulunur. Burada, sonraki bölümlerde kullanılmak üzere yazım kolaylığı açısından T^{-1} matrisi kapalı bir şekilde ifade edilmiştir .

Tanım 3.4. Kuantum süper determinantı sıfırdan farklı olan $T \in M_{h,h'}(1|1)$ süper matrisi bir (h, h') - deforme süper grup oluşturur, bu süper grubu $GL_{h,h'}(1|1)$ ile gösteriyoruz.

Tanım 3.5. [19] $T \in M_{h,h'}(1|1)$ süper matrisinin $\text{sdet}(T)$ süper determinantı kullanılarak tanımlanan

$$\mathcal{O}(GL_{h,h'}(1|1)) := \mathcal{O}(M_{h,h'}(1|1)) / \langle t \cdot \text{sdet}(T) - 1 \rangle$$

bölüm cebirine, $GL_{h,h'}(1|1)$ süper grubunun koordinat cebiri denir. Bu koordinat cebiri $\mathcal{O}(GL_{h,h'}(1|1))$ ile gösterilir.

$\mathcal{O}(GL_{h,h'}(1|1))$ süper cebiri, bir ikili-cebir olup bu cebir üzerinde tanımlanacak olan S ko-ters tasviri ile birlikte bir Hopf süper cebir yapısına sahip olacaktır. Bu durum daha açık bir şekilde aşağıdaki teorem ile ifade edilebilir:

Teorem 3.3. [19] $\mathcal{O}(GL_{h,h'}(1|1))$ süper cebiri, aşağıda verilen ko-tasvirler ile bir Hopf süper cebirdir:

(i) $\Delta : \mathcal{O}(GL_{h,h'}(1|1)) \rightarrow \mathcal{O}(GL_{h,h'}(1|1)) \otimes \mathcal{O}(GL_{h,h'}(1|1))$ ko-çarpma tasviri

$$\Delta(t_{ij}) = \sum_k t_{ik} \otimes t_{kj}, \quad (3.8)$$

ile verilir.

(ii) $\epsilon : \mathcal{O}(GL_{h,h'}(1|1)) \rightarrow \mathbb{C}$ ko-birim tasviri

$$\epsilon(t_{ij}) = \delta_{ij} \quad (3.9)$$

ile verilir.

(iii) $S : \mathcal{O}(GL_{h,h'}(1|1)) \rightarrow \mathcal{O}(GL_{-h,-h'}(1|1))$ ko-ters tasviri

$$S(t_{ij}) = (t_{ij})^{-1} \quad (3.10)$$

ile verilir.

4

$\mathcal{O}(\mathrm{GL}_{h,h'}(1|1))$ HOPF SÜPER CEBİRİ ÜZERİNE İKİLİ-KOVARYANT DİFERANSİYEL HESAP

Bu bölümde, $\mathrm{GL}(1|1)$ süper grubunun iki parametrelili standart olmayan (Jordanian) deformasyonu üzerine bir diferansiyel hesap kurulacaktır.

$\mathcal{O}(\mathrm{GL}_{h,h'}(1|1))$ Hopf süper cebiri üzerine kurulacak hesap için öncelikle, birinci mertebeden ve yüksek mertebeden diferansiyel hesap kurulacaktır. Sonrasında, Cartan-Maurer 1-formları ve ilgili vektör alanlarını içeren hesap yapılacaktır.

Birinci mertebeden bir diferansiyel hesabın bileşenleri, cebirin jeneratörleri ve onların birinci mertebeden diferansiyelleridir. Cebir komutatif bile olsa, jeneratörler ile onların diferansiyelleri komutatif olmak zorunda değildir. Yüksek mertebeden diferansiyel hesapta ise, cebirin jeneratörleri, onların birinci ve daha yüksek mertebeden diferansiyelleri ve bu bütün bileşenler arasındaki bağıntıları bulmayı gerektirir.

Genel olarak, bir uzay üzerindeki fonksiyonların cebiri üzerine birinci mertebeden bir diferansiyel hesap, ilgili bir Hopf cebirine ihtiyaç duyar öyle ki, ortaya çıkacak hesabın bu Hopf cebirine göre sol- ve/veya sağ-kovaryant olması gerekir.

Şüphesiz, üzerine birinci mertebeden diferansiyel hesap kurulacak cebir bir Hopf cebiri ise, netice diferansiyel hesap otomatik olarak sol- ve/veya sağ-kovaryant olacaktır.

4.1 Giriş

$\mathcal{O}(\mathrm{GL}_{h,h'}(1|1))$ Hopf süper cebiri üzerine değişmeli olmayan birinci mertebeden bir diferansiyel hesap kurarken, cebire etki eden bir d diferansiyel operatörüne ihtiyaç duyulur. Bu d diferansiyel operatörü ile birlikte $\mathcal{O}(\mathrm{GL}_{h,h'}(1|1))$ Hopf süper cebirinin jeneratörlerine etki eden Δ ko-çarpması kullanılarak sağ- ve sol-kovaryantlık tanımlanmaktadır.

Aşağıda, genel bir asosyatif süper cebir üzerine birinci mertebeden bir \mathbb{Z}_2 -dereceli diferansiyel hesabın tanımı verilmiştir:

Tanım 4.1. \mathcal{A} , birim elemanlı asosyatif bir süper cebir ve Ω^1 , bir \mathcal{A} -ikili-modül olsun. Eğer bir $\mathbf{d} : \mathcal{A} \rightarrow \Omega^1$ lineer tasviri, $f_1, f_2 \in \mathcal{A}$ için

$$\mathbf{d}(f_1 \cdot f_2) = (\mathbf{d}f_1) \cdot f_2 + (-1)^{p(f_1)} f_1 \cdot (\mathbf{d}f_2) \quad (4.1)$$

şeklindeki \mathbb{Z}_2 -dereceli Leibniz kuralını sağlıyor ve

$$\Omega^1 = \text{Lin}\{f_1 \cdot \mathbf{d}f_2 \cdot f_3 : f_1, f_2, f_3 \in \mathcal{A}\}$$

ise, (\mathbf{d}, Ω^1) çiftine \mathcal{A} üzerine birinci mertebeden bir \mathbb{Z}_2 -dereceli diferansiyel hesap denir.

Bu durumda, \mathcal{A} süper cebirinin jeneratörlerine 0-form ve Ω^1 süper cebirinin jeneratörlerine de diferansiyel 1-form denilmektedir.

Bir cebirin jeneratörleri ile onların diferansiyelleri arasındaki deforme komutasyon bağıntılarını elde etmenin iki yolu vardır:

- Wess ve Zumino'nun yaptığı gibi uzaya, grubun sol etkisini kullanmak. Bu durumda grubun özelliklerinden faydalanılarak, jeneratörler ile onların diferansiyelleri arasındaki bağıntılar, diferansiyel hesabın tutarlılığı da göz önüne alınarak elde edilmektedir.
- Woronowicz tarafından takdim edilen sağ- ve sol-kovaryantlığı kullanmak.

Aşağıda verilen tanım, Woronowicz [7] tarafından verilen tanımın \mathbb{Z}_2 -dereceli versiyonudur:

Tanım 4.2. \mathcal{H} , bir Hopf süper cebiri ve (Ω^1, \mathbf{d}) , \mathcal{H} üzerine bir birinci mertebede \mathbb{Z}_2 -dereceli diferansiyel hesap olsun.

1. Eğer $u, v \in \mathcal{H}$ için $\Delta_L : \Omega^1 \rightarrow \mathcal{H} \otimes \Omega^1$ cebir homomorfizmi

$$\Delta_L(u \cdot \mathbf{d}v) = \Delta(u)(\rho \otimes \mathbf{d})\Delta(v) \quad (4.2)$$

olacak şekilde mevcut ise, (Ω^1, \mathbf{d}) birinci mertebeden diferansiyel hesabının \mathcal{H} ye göre sol-kovaryant olduğu söylenir. Burada ρ tasviri aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$\rho : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}, \quad \rho(a) = (-1)^{p(a)} a.$$

2. Eğer $u, v \in \mathcal{H}$ için $\Delta_R : \Omega^1 \rightarrow \Omega^1 \otimes \mathcal{H}$ cebir homomorfizmi

$$\Delta_R(u \cdot \mathbf{d}v) = \Delta(u)(\mathbf{d} \otimes \text{id})\Delta(v) \quad (4.3)$$

olacak şekilde mevcut ise, (Ω^1, \mathbf{d}) birinci mertebeden diferansiyel hesabının \mathcal{H} ye göre sağ-kovaryant olduğu söylenir.

3. Eğer birinci mertebeden (Ω^1, \mathbf{d}) diferansiyel hesabı \mathcal{H} ya göre hem sağ- hem de sol-kovaryant ise, onun ikili-kovaryant olduğu söylenir.

Bu tanımdaki Δ_L ve Δ_R operatörlerine, sırasıyla, \mathcal{H} Hopf cebirinin Ω^1 üzerine sol-ko-etkisi ve sağ-ko-etkisi denir.

4.2 $\mathcal{O}(\text{GL}_{h,h'}(1|1))$ Hopf Süper Cebiri Üzerine Birinci Mertebeden Diferansiyel Hesap

Bu kısım, $\mathcal{O}(\text{GL}_{h,h'}(1|1))$ Hopf süper cebiri üzerine bir ikili-kovaryant diferansiyel hesap kurulacaktır.

Kısım 3.3 de ifade edildiği üzere $\mathcal{O}(\text{GL}_{h,h'}(1|1))$ Hopf süper cebirinin jeneratörleri a, β, γ, d idi. Şimdi bu jeneratörlerin birinci mertebeden diferansiyellerini, sırasıyla, $\mathbf{d}a, \mathbf{d}\beta, \mathbf{d}\gamma, \mathbf{d}d$ ile gösterelim. Ω^1 , bir $\mathcal{O}(\text{GL}_{h,h'}(1|1))$ -ikili-modül olsun. Ω^1 diferansiyel süper cebirinin serbest sağ $\mathcal{O}(\text{GL}_{h,h'}(1|1))$ -modül yapısını düşünerek, jeneratörler ve onların birinci mertebeden diferansiyelleri arasında sağlanması muhtemel (h, h') -deforme komutasyon bağıntılarını, $f_1 = a, f_2 = \beta, f_3 = \gamma$ ve $f_4 = d$ olmak üzere

$$f_i \cdot \mathbf{d}f_j = \sum_{k,l=1}^4 B_{ij}^{kl} \mathbf{d}f_k \cdot f_l \quad (4.4)$$

şeklinde ifade edebiliriz. Burada toplamda 256 tane bulunması gereken B_{ij}^{kl} sabiti vardır. Bu sabitler bulunduğunda $\mathcal{O}(\text{GL}_{h,h'}(1|1))$ Hopf süper cebiri üzerine birinci mertebeden diferansiyel hesap kurulmuş olacaktır.

Kısım 3.3 Teorem 3.1 de $\mathcal{O}(\text{GL}_{h,h'}(1|1))$ cebirinin jeneratörleri arasında sağlanan (h, h') -deforme bağıntıları verilmişti. Netice itibarıyla, $\mathcal{O}(\text{GL}_{h,h'}(1|1))$ süper cebiri üzerine diferansiyel hesap kurulacağından, şüphesiz B_{ij}^{kl} sabitlerinin bazıları h, h' ve hh' parametrelerine bağlı olacaktır.

Ayrıca not edelim ki, bu parametrelerin her ikisi de Grassmann parametreler olduğu için hem cebirin "tek" jeneratörleri ve hem de onların diferansiyellerinden "tek" olanlarla anti-komutatif olacaktır.

Şimdi, Tanım 4.2 de verilen Δ_L ve Δ_R operatörlerini (4.4) bağıntılarının her iki tarafına uygulayarak B_{ij}^{kl} sabitlerini belirleyebiliriz. Bu, aşağıda sol- ve sağ-kovaryantlık için iki lemmada verilmiştir.

Lemma 4.1. (Ω^1, \mathbf{d}) diferansiyel hesabı sol-kovaryanttır.

İspat Birinci mertebeden \mathbb{Z}_2 -dereceli (Ω^1, \mathbf{d}) diferansiyel hesabının sol kovaryant olduğunu göstermek, $\mathcal{O}(\mathrm{GL}_{h,h'}(1|1))$ Hopf süper cebirinin jeneratörleri ve onların birinci mertebeden diferansiyelleri arasında sağlanan (h, h') -deforme komutasyon bağıntılarının bir sol-ko-etki altında invariant olduğunu göstermektir. Bunun için Tanım 4.2 verilen Δ_L cebir homomorfizmini (4.4) ile verilen muhtemel komutasyon bağıntılarına soldan etki ettireceğiz. Öyleyse önce Δ_L nin diferansiyellere etkisini bulmalıyız. Bu ise Tanım 4.2 den kolayca elde edilebilir:

$$\begin{aligned}\Delta_L(\mathbf{d}a) &= a \otimes \mathbf{d}a - \beta \otimes \mathbf{d}\gamma, & \Delta_L(\mathbf{d}\beta) &= a \otimes \mathbf{d}\beta - \beta \otimes \mathbf{d}d, \\ \Delta_L(\mathbf{d}\gamma) &= -\gamma \otimes \mathbf{d}a + d \otimes \mathbf{d}\gamma, & \Delta_L(\mathbf{d}d) &= -\gamma \otimes \mathbf{d}\beta + d \otimes \mathbf{d}d.\end{aligned}$$

Yukarıda (4.4) ile verilen muhtemel komutasyon bağıntıları 16 adettir. Dolayısıyla her birine Δ_L yi etki ettirerek B_{ij}^{kl} sabitlerini bulmaya çalışacağız. Şimdi, bir örnek olması bakımından

$$\gamma \cdot \mathbf{d}a = \sum_{k,l=1}^4 B_{31}^{kl} \mathbf{d}f_k \cdot f_l$$

bağıntısını ele alalım. Bu bağıntıya soldan Δ_L tasviri uygulandığında eşitliğin sol tarafı

$$\begin{aligned}\Delta_L(\gamma \cdot \mathbf{d}a) &= \Delta(\gamma) \cdot \Delta_L(\mathbf{d}a) = (\gamma \otimes a + d \otimes \gamma) \cdot (a \otimes \mathbf{d}a - \beta \otimes \mathbf{d}\gamma) \\ &= \gamma \cdot a \otimes a \cdot \mathbf{d}a - \gamma \cdot \beta \otimes a \cdot \mathbf{d}\gamma + d \cdot a \otimes \gamma \cdot \mathbf{d}a + d \cdot \beta \otimes \gamma \cdot \mathbf{d}\gamma \\ &= \gamma \cdot a \otimes \sum_{k,l=1}^4 B_{11}^{kl} \mathbf{d}f_k \cdot f_l - \gamma \cdot \beta \otimes \sum_{k,l=1}^4 B_{13}^{kl} \mathbf{d}f_k \cdot f_l \\ &\quad + d \cdot a \otimes \sum_{k,l=1}^4 B_{31}^{kl} \mathbf{d}f_k \cdot f_l + d \cdot \beta \otimes \sum_{k,l=1}^4 B_{33}^{kl} \mathbf{d}f_k \cdot f_l \\ &= \sum_{k,l=1}^4 (\gamma \cdot a \otimes B_{11}^{kl} - \gamma \cdot \beta \otimes B_{13}^{kl} + d \cdot a \otimes B_{31}^{kl} + d \cdot \beta \otimes B_{33}^{kl}) \mathbf{d}f_k \cdot f_l\end{aligned}$$

şeklinde ifade edilebilir. Eşitliğin sağ tarafı için 16 adet $\mathbf{d}f_k \cdot f_l$ çarpımlarına Δ_L

tasviri uygulanarak

$$\begin{aligned}
\Delta_L(\mathbf{da} \cdot a) &= a \cdot a \otimes \mathbf{da} \cdot a - a \cdot \beta \otimes \mathbf{da} \cdot \gamma - \beta \cdot a \otimes \mathbf{d}\gamma \cdot a - \beta \cdot \beta \otimes \mathbf{d}\gamma \cdot \gamma, \\
\Delta_L(\mathbf{da} \cdot \beta) &= a \cdot a \otimes \mathbf{da} \cdot \beta - a \cdot \beta \otimes \mathbf{da} \cdot d - \beta \cdot a \otimes \mathbf{d}\gamma \cdot \beta - \beta \cdot \beta \otimes \mathbf{d}\gamma \cdot d, \\
&\vdots \\
\Delta_L(\mathbf{dd} \cdot \gamma) &= -\gamma \cdot \gamma \otimes \mathbf{d}\beta \cdot a - \gamma \cdot d \otimes \mathbf{d}\beta \cdot \gamma - d \cdot \gamma \otimes \mathbf{dd} \cdot a + d \cdot d \otimes \mathbf{dd} \cdot \gamma, \\
\Delta_L(\mathbf{dd} \cdot d) &= -\gamma \cdot \gamma \otimes \mathbf{d}\beta \cdot \beta - \gamma \cdot d \otimes \mathbf{d}\beta \cdot d - d \cdot \gamma \otimes \mathbf{dd} \cdot \beta + d \cdot d \otimes \mathbf{dd} \cdot d
\end{aligned}$$

ifadeleri elde edilir. Bu eşitlikler gerektiği şekilde B_{31}^{kl} bilinmeyen katsayılarıyla çarpılıp toplanarak eşitliğin sol tarafı ile eşlenir. Bu durumda eşitliğin sol tarafında bulunan B_{11}^{kl} , B_{13}^{kl} , B_{31}^{kl} , B_{33}^{kl} bilinmeyen katsayıları B_{31}^{kl} katsayıları cinsinden çözülür. Örnek olarak eşitliğin sol tarafında görünen da ifadesi için eşitliğin sağ tarafını oluşturalım:

$$\begin{aligned}
da \otimes \sum_{k,l=1}^4 B_{13}^{kl} \mathbf{d}f_k \cdot f_l &= da \otimes [B_{31}^{31} \mathbf{d}\gamma \cdot a + B_{31}^{32} \mathbf{d}\gamma \cdot \beta + B_{31}^{41} \mathbf{dd} \cdot a + B_{31}^{42} \mathbf{dd} \cdot \beta] \\
&\quad + ad \otimes [B_{31}^{13} \mathbf{da} \cdot \gamma + B_{31}^{14} \mathbf{da} \cdot d + B_{31}^{23} \mathbf{d}\beta \cdot \gamma + B_{31}^{24} \mathbf{d}\beta \cdot d] \\
&\quad + a\beta \otimes [B_{31}^{11} \mathbf{da} \cdot \gamma - B_{31}^{12} \mathbf{da} \cdot d + B_{31}^{21} \mathbf{d}\beta \cdot \gamma - B_{31}^{22} \mathbf{d}\beta \cdot d] \\
&\quad + a\gamma \otimes [B_{31}^{13} \mathbf{da} \cdot a - B_{31}^{14} \mathbf{da} \cdot \beta + B_{31}^{23} \mathbf{d}\beta \cdot a - B_{31}^{24} \mathbf{d}\beta \cdot \beta] \\
&\quad - \beta d \otimes [B_{31}^{13} \mathbf{d}\gamma \cdot \gamma - B_{31}^{14} \mathbf{d}\gamma \cdot d - B_{31}^{23} \mathbf{dd} \cdot \gamma + B_{31}^{24} \mathbf{dd} \cdot d] \\
&\quad - \gamma d \otimes [B_{31}^{33} \mathbf{da} \cdot \gamma - B_{31}^{34} \mathbf{da} \cdot d - B_{31}^{43} \mathbf{d}\beta \cdot \gamma + B_{31}^{44} \mathbf{d}\beta \cdot d]
\end{aligned}$$

olup, eşitliğin sağ tarafında kapalı şekilde bulunan da ifadesini açık hale getirmek için (3.5) komutasyon bağıntıları kullanılarak

$$\begin{aligned}
da \otimes \sum_{k,l=1}^4 \mathbf{d}f_k \cdot f_l &= da \otimes [B_{31}^{31} \mathbf{d}\gamma \cdot a + B_{31}^{32} \mathbf{d}\gamma \cdot \beta + B_{31}^{41} \mathbf{dd} \cdot a + B_{31}^{42} \mathbf{dd} \cdot \beta] \\
&\quad + [da + \dots] \otimes [B_{31}^{13} \mathbf{da} \cdot \gamma + B_{31}^{14} \mathbf{da} \cdot d + B_{31}^{23} \mathbf{d}\beta \cdot \gamma + B_{31}^{24} \mathbf{d}\beta \cdot d] \\
&\quad + [\beta a + h'(da + \dots)] \otimes [B_{31}^{11} \mathbf{da} \cdot \gamma - B_{31}^{12} \mathbf{da} \cdot d + B_{31}^{21} \mathbf{d}\beta \cdot \gamma - B_{31}^{22} \mathbf{d}\beta \cdot d] \\
&\quad + [\gamma a + h(-da + \dots)] \otimes [B_{31}^{13} \mathbf{da} \cdot a - B_{31}^{14} \mathbf{da} \cdot \beta + B_{31}^{23} \mathbf{d}\beta \cdot a - B_{31}^{24} \mathbf{d}\beta \cdot \beta] \\
&\quad + [d\beta + h'(da + \dots)] \otimes [-B_{31}^{13} \mathbf{d}\gamma \cdot \gamma + B_{31}^{14} \mathbf{d}\gamma \cdot d + B_{31}^{23} \mathbf{dd} \cdot \gamma - B_{31}^{24} \mathbf{dd} \cdot d] \\
&\quad + [d\gamma + h(-da + \dots)] \otimes [-B_{31}^{33} \mathbf{da} \cdot \gamma + B_{31}^{34} \mathbf{da} \cdot d + B_{31}^{43} \mathbf{d}\beta \cdot \gamma - B_{31}^{44} \mathbf{d}\beta \cdot d]
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikten B_{31}^{kl} sabitleri ile ilgili bir takım bilgilere ulaşabiliriz. Örneğin, $h'B_{31}^{11} = -hB_{31}^{33}$ gibi. Ancak buradan ne B_{31}^{11} ne de B_{31}^{33} sabitini

çözemeyiz. Daha kesin sonuç veren ifadelere odaklanacağız:

$$\begin{aligned} B_{31}^{11} &= hB_{31}^{13}, & B_{31}^{12} &= -hB_{31}^{14}, & B_{31}^{21} &= hB_{31}^{23}, & B_{31}^{22} &= -hB_{31}^{24}, \\ B_{31}^{33} &= -h'B_{31}^{13}, & B_{31}^{34} &= h'B_{31}^{14}, & B_{31}^{43} &= h'B_{31}^{23}, & B_{31}^{44} &= -h'B_{31}^{24}. \end{aligned}$$

Aynı şekilde, $\gamma a, \gamma\beta, d\beta$ ifadeleri ele alarak devam edildiğinde, $B_{11}^{kl}, B_{13}^{kl}, B_{33}^{kl}$ bilinmeyen sabitleri B_{31}^{kl} sabitleri cinsinden ifade edilir. Böylece 56 adet B_{ij}^{kl} bilinmeyen sabiti bulunmuş olur.

Sonra, benzer işlemleri

$$\gamma \cdot d\beta = \sum_{k,l=1}^4 B_{32}^{kl} df_k \cdot f_l, \quad d \cdot da = \sum_{k,l=1}^4 B_{41}^{kl} df_k \cdot f_l, \quad d \cdot d\beta = \sum_{k,l=1}^4 B_{42}^{kl} df_k \cdot f_l$$

bağıntıları için yaparız. Yani, bu bağıntılara da soldan Δ_L operatörü uygulanır:

$$\begin{aligned} \Delta_L(\gamma \cdot d\beta) &= \gamma a \otimes a \cdot d\beta - \gamma\beta \otimes a \cdot dd + da \otimes \gamma \cdot d\beta + d\beta \otimes \gamma \cdot dd \\ &= \sum_{k,l=1}^4 (\gamma a \otimes B_{12}^{kl} - \gamma\beta \otimes B_{14}^{kl} + da \otimes B_{32}^{kl} + d\beta \otimes B_{34}^{kl}) df_k \cdot f_l \\ &= \sum_{k,l=1}^4 B_{32}^{kl} \Delta_L(df_k \cdot f_l), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_L(d \cdot da) &= \gamma a \otimes \beta \cdot da + \gamma\beta \otimes \beta \cdot d\gamma + da \otimes d \cdot da - d\beta \otimes d \cdot d\gamma \\ &= \sum_{k,l=1}^4 (\gamma a \otimes B_{21}^{kl} + \gamma\beta \otimes B_{23}^{kl} + da \otimes B_{41}^{kl} - d\beta \otimes B_{43}^{kl}) df_k \cdot f_l \\ &= \sum_{k,l=1}^4 B_{41}^{kl} \Delta_L(df_k \cdot f_l), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_L(d \cdot d\beta) &= \gamma a \otimes \beta \cdot d\beta + \gamma\beta \otimes \beta \cdot dd + da \otimes d \cdot d\beta - d\beta \otimes d \cdot dd \\ &= \sum_{k,l=1}^4 (\gamma a \otimes B_{22}^{kl} + \gamma\beta \otimes B_{24}^{kl} + da \otimes B_{42}^{kl} - d\beta \otimes B_{44}^{kl}) df_k \cdot f_l \\ &= \sum_{k,l=1}^4 B_{42}^{kl} \Delta_L(df_k \cdot f_l). \end{aligned}$$

Buradaki eşitlikler sonucunda $B_{12}^{kl}, B_{14}^{kl}, B_{32}^{kl}, B_{34}^{kl}$ sabitleri B_{32}^{kl} sabitleri cinsinden, $B_{21}^{kl}, B_{23}^{kl}, B_{41}^{kl}, B_{43}^{kl}$ sabitleri B_{41}^{kl} sabitleri cinsinden, $B_{22}^{kl}, B_{24}^{kl}, B_{42}^{kl}, B_{44}^{kl}$ sabitleri de B_{42}^{kl} sabitleri cinsinden yazılabilir. Bu işlemlerin sonucunda (4.4) bağıntılarında 32 adet B_{ij}^{kl} bilinmeyen sabiti kalır. Geri kalan 12 bağıntıya Δ_L tasviri etki ettirildiğinde, yeni bir şey gelmez. \square

Şimdi, bir sonraki lemmada Δ_R operatörünü kullanmak üzere yukarıda sözü edilen henüz belirlenememiş 32 adet B_{ij}^{kl} sabitini kullanarak, (4.4) komutasyon bağıntılarının düzenlenmiş halini vereceğiz. Bunlar, (Ω^1, \mathbf{d}) birinci mertebeden diferansiyel hesabının $\mathcal{O}(\text{GL}_{h,h'}(1|1))$ Hopf süper cebirine göre sol-kovaryant olması neticesi ortaya çıkmıştır:

$$\begin{aligned}
a \cdot \mathbf{d}a &= -(B_{31}^{13} + B_{31}^{31})\mathbf{d}a \cdot a + (B_{31}^{14} + B_{31}^{32})\mathbf{d}a \cdot \beta + (B_{31}^{41} - B_{31}^{23})\mathbf{d}\beta \cdot a \quad (4.5) \\
&\quad + (B_{31}^{24} - B_{31}^{42})\mathbf{d}\beta \cdot \beta + h'B_{31}^{13}(\mathbf{d}\gamma \cdot a - \mathbf{d}a \cdot \gamma) + h'B_{31}^{14}(\mathbf{d}\gamma \cdot \beta - \mathbf{d}a \cdot d) \\
&\quad - h'B_{31}^{23}(\mathbf{d}\beta \cdot \gamma + \mathbf{d}d \cdot a) - h'B_{31}^{24}(\mathbf{d}\beta \cdot d + \mathbf{d}d \cdot \beta), \\
a \cdot \mathbf{d}\beta &= (B_{32}^{23} - B_{32}^{41})\mathbf{d}\beta \cdot a - (B_{32}^{14} + B_{32}^{32})\mathbf{d}a \cdot \beta + (B_{32}^{13} + B_{32}^{31})\mathbf{d}a \cdot a \\
&\quad + (B_{32}^{42} - B_{32}^{24})\mathbf{d}\beta \cdot \beta + h'B_{32}^{13}(\mathbf{d}\gamma \cdot a - \mathbf{d}a \cdot \gamma) + h'B_{32}^{14}(\mathbf{d}\gamma \cdot \beta - \mathbf{d}a \cdot d) \\
&\quad - h'B_{32}^{23}(\mathbf{d}\beta \cdot \gamma + \mathbf{d}d \cdot a) - h'B_{32}^{24}(\mathbf{d}\beta \cdot d + \mathbf{d}d \cdot \beta), \\
a \cdot \mathbf{d}\gamma &= -B_{31}^{13}\mathbf{d}\gamma \cdot a - B_{31}^{31}\mathbf{d}a \cdot \gamma - B_{31}^{14}\mathbf{d}\gamma \cdot \beta + B_{31}^{23}\mathbf{d}d \cdot a \\
&\quad + B_{31}^{24}\mathbf{d}d \cdot \beta + B_{31}^{41}\mathbf{d}\beta \cdot \gamma + B_{31}^{42}\mathbf{d}\beta \cdot d - B_{31}^{32}\mathbf{d}a \cdot d \\
&\quad + h(B_{31}^{13}\mathbf{d}a \cdot a - B_{31}^{14}\mathbf{d}a \cdot \beta + B_{31}^{23}\mathbf{d}\beta \cdot a - B_{31}^{24}\mathbf{d}\beta \cdot \beta) \\
&\quad + h'(B_{31}^{13}\mathbf{d}\gamma \cdot \gamma - B_{31}^{14}\mathbf{d}\gamma \cdot d - B_{31}^{23}\mathbf{d}d \cdot \gamma + B_{31}^{24}\mathbf{d}d \cdot d), \\
a \cdot \mathbf{d}d &= B_{32}^{23}\mathbf{d}d \cdot a - B_{32}^{32}\mathbf{d}a \cdot d - B_{32}^{31}\mathbf{d}a \cdot \gamma + B_{32}^{41}\mathbf{d}\beta \cdot \gamma \\
&\quad + B_{32}^{42}\mathbf{d}\beta \cdot d - B_{32}^{13}\mathbf{d}\gamma \cdot a + B_{32}^{24}\mathbf{d}d \cdot \beta - B_{32}^{14}\mathbf{d}\gamma \cdot \beta \\
&\quad + h(-B_{32}^{13}\mathbf{d}a \cdot a + B_{32}^{14}\mathbf{d}a \cdot \beta - B_{32}^{23}\mathbf{d}\beta \cdot a + B_{32}^{24}\mathbf{d}\beta \cdot \beta) \\
&\quad + h'(-B_{32}^{13}\mathbf{d}\gamma \cdot \gamma + B_{32}^{14}\mathbf{d}\gamma \cdot d + B_{32}^{23}\mathbf{d}d \cdot \gamma - B_{32}^{24}\mathbf{d}d \cdot d), \\
\beta \cdot \mathbf{d}a &= -(B_{41}^{14} + B_{41}^{32})\mathbf{d}a \cdot \beta + (B_{41}^{23} - B_{41}^{41})\mathbf{d}\beta \cdot a + (B_{41}^{13} + B_{41}^{31})\mathbf{d}a \cdot a \\
&\quad + (B_{41}^{42} - B_{41}^{24})\mathbf{d}\beta \cdot \beta + h'B_{41}^{13}(\mathbf{d}\gamma \cdot a - \mathbf{d}a \cdot \gamma) + h'B_{41}^{14}(\mathbf{d}\gamma \cdot \beta - \mathbf{d}a \cdot d) \\
&\quad - h'B_{41}^{23}(\mathbf{d}\beta \cdot \gamma + \mathbf{d}d \cdot a) - h'B_{41}^{24}(\mathbf{d}\beta \cdot d + \mathbf{d}d \cdot \beta), \\
\beta \cdot \mathbf{d}\beta &= (B_{42}^{24} - B_{42}^{42})\mathbf{d}\beta \cdot \beta - (B_{42}^{13} + B_{42}^{31})\mathbf{d}a \cdot a + (B_{42}^{14} + B_{42}^{32})\mathbf{d}a \cdot \beta \\
&\quad + (B_{42}^{41} - B_{42}^{23})\mathbf{d}\beta \cdot a + h'B_{42}^{13}(\mathbf{d}\gamma \cdot a - \mathbf{d}a \cdot \gamma) + h'B_{42}^{14}(\mathbf{d}\gamma \cdot \beta - \mathbf{d}a \cdot d) \\
&\quad - h'B_{42}^{23}(\mathbf{d}\beta \cdot \gamma + \mathbf{d}d \cdot a) - h'B_{42}^{24}(\mathbf{d}\beta \cdot d + \mathbf{d}d \cdot \beta), \\
\beta \cdot \mathbf{d}\gamma &= B_{41}^{14}\mathbf{d}\gamma \cdot \beta - B_{41}^{41}\mathbf{d}\beta \cdot \gamma - B_{41}^{31}\mathbf{d}a \cdot \gamma + B_{41}^{32}\mathbf{d}a \cdot d \\
&\quad - B_{41}^{42}\mathbf{d}\beta \cdot d + B_{41}^{13}\mathbf{d}\gamma \cdot a - B_{41}^{24}\mathbf{d}d \cdot \beta - B_{41}^{23}\mathbf{d}d \cdot a \\
&\quad + h(B_{41}^{13}\mathbf{d}a \cdot a - B_{41}^{14}\mathbf{d}a \cdot \beta + B_{41}^{23}\mathbf{d}\beta \cdot a - B_{41}^{24}\mathbf{d}\beta \cdot \beta) \\
&\quad + h'(B_{41}^{13}\mathbf{d}\gamma \cdot \gamma - B_{41}^{14}\mathbf{d}\gamma \cdot d - B_{41}^{23}\mathbf{d}d \cdot \gamma + B_{41}^{24}\mathbf{d}d \cdot d), \\
\beta \cdot \mathbf{d}d &= -B_{42}^{24}\mathbf{d}d \cdot \beta - B_{42}^{42}\mathbf{d}\beta \cdot d + B_{42}^{31}\mathbf{d}a \cdot \gamma + B_{42}^{32}\mathbf{d}a \cdot d \\
&\quad - B_{42}^{41}\mathbf{d}\beta \cdot \gamma + B_{42}^{13}\mathbf{d}\gamma \cdot a - B_{42}^{23}\mathbf{d}d \cdot a + B_{42}^{14}\mathbf{d}\gamma \cdot \beta \\
&\quad + h(-B_{42}^{13}\mathbf{d}a \cdot a + B_{42}^{14}\mathbf{d}a \cdot \beta - B_{42}^{23}\mathbf{d}\beta \cdot a + B_{42}^{24}\mathbf{d}\beta \cdot \beta) \\
&\quad + h'(-B_{42}^{13}\mathbf{d}\gamma \cdot \gamma + B_{42}^{14}\mathbf{d}\gamma \cdot d + B_{42}^{23}\mathbf{d}d \cdot \gamma - B_{42}^{24}\mathbf{d}d \cdot d),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma \cdot \mathbf{d}a &= B_{31}^{13} \mathbf{d}a \cdot \gamma + B_{31}^{31} \mathbf{d}\gamma \cdot a + B_{31}^{14} \mathbf{d}a \cdot d + B_{31}^{23} \mathbf{d}\beta \cdot \gamma \\
&\quad + B_{31}^{24} \mathbf{d}\beta \cdot d + B_{31}^{32} \mathbf{d}\gamma \cdot \beta + B_{31}^{42} \mathbf{d}d \cdot \beta + B_{31}^{41} \mathbf{d}d \cdot a \\
&\quad + h(B_{31}^{13} \mathbf{d}a \cdot a - B_{31}^{14} \mathbf{d}a \cdot \beta + B_{31}^{23} \mathbf{d}\beta \cdot a - B_{31}^{24} \mathbf{d}\beta \cdot \beta) \\
&\quad + h'(-B_{31}^{13} \mathbf{d}\gamma \cdot \gamma + B_{31}^{14} \mathbf{d}\gamma \cdot d + B_{31}^{23} \mathbf{d}d \cdot \gamma - B_{31}^{24} \mathbf{d}d \cdot d), \\
\gamma \cdot \mathbf{d}\beta &= B_{32}^{23} \mathbf{d}\beta \cdot \gamma + B_{32}^{32} \mathbf{d}\gamma \cdot \beta + B_{32}^{13} \mathbf{d}a \cdot \gamma + B_{32}^{14} \mathbf{d}a \cdot d \\
&\quad + B_{32}^{24} \mathbf{d}\beta \cdot d + B_{32}^{31} \mathbf{d}\gamma \cdot a + B_{32}^{42} \mathbf{d}d \cdot \beta + B_{32}^{41} \mathbf{d}d \cdot a \\
&\quad + h(-B_{32}^{13} \mathbf{d}a \cdot a + B_{32}^{14} \mathbf{d}a \cdot \beta - B_{32}^{23} \mathbf{d}\beta \cdot a + B_{32}^{24} \mathbf{d}\beta \cdot \beta) \\
&\quad + h'(B_{32}^{13} \mathbf{d}\gamma \cdot \gamma - B_{32}^{14} \mathbf{d}\gamma \cdot d - B_{32}^{23} \mathbf{d}d \cdot \gamma + B_{32}^{24} \mathbf{d}d \cdot d), \\
\gamma \cdot \mathbf{d}\gamma &= (B_{31}^{31} - B_{31}^{13}) \mathbf{d}\gamma \cdot \gamma + (B_{31}^{14} - B_{31}^{32}) \mathbf{d}\gamma \cdot d + (B_{31}^{23} + B_{31}^{41}) \mathbf{d}d \cdot \gamma \\
&\quad - (B_{31}^{24} + B_{31}^{42}) \mathbf{d}d \cdot d + hB_{31}^{13} (\mathbf{d}a \cdot \gamma + \mathbf{d}\gamma \cdot a) + hB_{31}^{14} (\mathbf{d}a \cdot d + \mathbf{d}\gamma \cdot \beta) \\
&\quad + hB_{31}^{23} (\mathbf{d}\beta \cdot \gamma - \mathbf{d}d \cdot a) + hB_{31}^{24} (\mathbf{d}\beta \cdot d - \mathbf{d}d \cdot \beta), \\
\gamma \cdot \mathbf{d}d &= -(B_{32}^{23} + B_{32}^{41}) \mathbf{d}d \cdot \gamma + (B_{32}^{24} + B_{32}^{42}) \mathbf{d}d \cdot d + (B_{32}^{13} - B_{32}^{31}) \mathbf{d}\gamma \cdot \gamma \\
&\quad + (B_{32}^{32} - B_{32}^{14}) \mathbf{d}\gamma \cdot d + hB_{32}^{13} (\mathbf{d}a \cdot \gamma + \mathbf{d}\gamma \cdot a) + hB_{32}^{14} (\mathbf{d}a \cdot d + \mathbf{d}\gamma \cdot \beta) \\
&\quad + hB_{32}^{23} (\mathbf{d}\beta \cdot \gamma - \mathbf{d}d \cdot a) + hB_{32}^{24} (\mathbf{d}\beta \cdot d - \mathbf{d}d \cdot \beta), \\
d \cdot \mathbf{d}a &= B_{41}^{14} \mathbf{d}a \cdot d + B_{41}^{41} \mathbf{d}d \cdot a + B_{41}^{13} \mathbf{d}a \cdot \gamma + B_{41}^{23} \mathbf{d}\beta \cdot \gamma \\
&\quad + B_{41}^{24} \mathbf{d}\beta \cdot d + B_{41}^{31} \mathbf{d}\gamma \cdot a + B_{41}^{42} \mathbf{d}d \cdot \beta + B_{41}^{32} \mathbf{d}\gamma \cdot \beta \\
&\quad + h(-B_{41}^{13} \mathbf{d}a \cdot a + B_{41}^{14} \mathbf{d}a \cdot \beta - B_{41}^{23} \mathbf{d}\beta \cdot a + B_{41}^{24} \mathbf{d}\beta \cdot \beta) \\
&\quad + h'(B_{41}^{13} \mathbf{d}\gamma \cdot \gamma - B_{41}^{14} \mathbf{d}\gamma \cdot d - B_{41}^{23} \mathbf{d}d \cdot \gamma + B_{41}^{24} \mathbf{d}d \cdot d), \\
d \cdot \mathbf{d}\beta &= B_{42}^{24} \mathbf{d}\beta \cdot d + B_{42}^{42} \mathbf{d}d \cdot \beta + B_{42}^{13} \mathbf{d}a \cdot \gamma + B_{42}^{14} \mathbf{d}a \cdot d \\
&\quad + B_{42}^{23} \mathbf{d}\beta \cdot \gamma + B_{42}^{31} \mathbf{d}\gamma \cdot a + B_{42}^{41} \mathbf{d}d \cdot a + B_{42}^{32} \mathbf{d}\gamma \cdot \beta \\
&\quad + h(B_{42}^{13} \mathbf{d}a \cdot a - B_{42}^{14} \mathbf{d}a \cdot \beta + B_{42}^{23} \mathbf{d}\beta \cdot a - B_{42}^{24} \mathbf{d}\beta \cdot \beta) \\
&\quad + h'(-B_{42}^{13} \mathbf{d}\gamma \cdot \gamma + B_{42}^{14} \mathbf{d}\gamma \cdot d + B_{42}^{23} \mathbf{d}d \cdot \gamma - B_{42}^{24} \mathbf{d}d \cdot d), \\
d \cdot \mathbf{d}\gamma &= (B_{41}^{14} - B_{41}^{32}) \mathbf{d}\gamma \cdot d + (B_{41}^{23} + B_{41}^{41}) \mathbf{d}d \cdot \gamma + (B_{41}^{31} - B_{41}^{13}) \mathbf{d}\gamma \cdot \gamma \\
&\quad - (B_{41}^{24} + B_{41}^{42}) \mathbf{d}d \cdot d - hB_{41}^{13} (\mathbf{d}a \cdot \gamma + \mathbf{d}\gamma \cdot a) - hB_{41}^{14} (\mathbf{d}a \cdot d + \mathbf{d}\gamma \cdot \beta) \\
&\quad + hB_{41}^{23} (\mathbf{d}d \cdot a - \mathbf{d}\beta \cdot \gamma) + hB_{41}^{24} (\mathbf{d}d \cdot \beta - \mathbf{d}\beta \cdot d), \\
d \cdot \mathbf{d}d &= (B_{42}^{24} + B_{42}^{42}) \mathbf{d}d \cdot d + (B_{42}^{13} - B_{42}^{31}) \mathbf{d}\gamma \cdot \gamma + (B_{42}^{32} - B_{42}^{14}) \mathbf{d}\gamma \cdot d \\
&\quad - (B_{42}^{23} + B_{42}^{41}) \mathbf{d}d \cdot \gamma - hB_{42}^{13} (\mathbf{d}a \cdot \gamma + \mathbf{d}\gamma \cdot a) - hB_{42}^{14} (\mathbf{d}a \cdot d + \mathbf{d}\gamma \cdot \beta) \\
&\quad + hB_{42}^{23} (\mathbf{d}d \cdot a - \mathbf{d}\beta \cdot \gamma) + hB_{42}^{24} (\mathbf{d}d \cdot \beta - \mathbf{d}\beta \cdot d).
\end{aligned}$$

Lemma 4.2. (Ω^1, \mathbf{d}) diferansiyel hesabı sağ-kovaryanttır.

İspat Birinci mertebeden \mathbb{Z}_2 -dereceli (Ω^1, \mathbf{d}) diferansiyel hesabının sağ-kovaryant olduğunu göstermek, $\mathcal{O}(\mathrm{GL}_{h,h'}(1|1))$ Hopf süper cebirinin jeneratörleri ve onların birinci mertebeden diferansiyelleri arasında sağlanan (h, h') -deforme komutasyon bağıntılarının bir sağ-ko-etki altında invariant olduğunu göstermektir. Bunun

için, Tanım 4.2 verilen Δ_R cebir homomorfizmini (4.5) ile verilen komutasyon bağıntılarına soldan etki ettiririz. Öyleyse önce Δ_R nin diferansiyellere etkisini bulmalıyız. Bu ise Tanım 4.2 den kolayca elde edilebilir:

$$\begin{aligned}\Delta_R(\mathbf{d}a) &= \mathbf{d}a \otimes a + \mathbf{d}\beta \otimes \gamma, & \Delta_R(\mathbf{d}\beta) &= \mathbf{d}a \otimes \beta + \mathbf{d}\beta \otimes d, \\ \Delta_R(\mathbf{d}\gamma) &= \mathbf{d}\gamma \otimes a + \mathbf{d}d \otimes \gamma, & \Delta_R(\mathbf{d}d) &= \mathbf{d}\gamma \otimes \beta + \mathbf{d}d \otimes d.\end{aligned}$$

Δ_R tasvirini etki ettirmek için bir örnek olarak, (4.5) deki

$$\begin{aligned}\beta \cdot \mathbf{d}\gamma &= B_{41}^{14} \mathbf{d}\gamma \cdot \beta - B_{41}^{41} \mathbf{d}\beta \cdot \gamma - B_{41}^{31} \mathbf{d}a \cdot \gamma + B_{41}^{32} \mathbf{d}a \cdot d \\ &\quad - B_{41}^{42} \mathbf{d}\beta \cdot d + B_{41}^{13} \mathbf{d}\gamma \cdot a - B_{41}^{23} \mathbf{d}d \cdot a - B_{41}^{24} \mathbf{d}d \cdot \beta \\ &\quad + h(B_{41}^{13} \mathbf{d}a \cdot a - B_{41}^{14} \mathbf{d}a \cdot \beta + B_{41}^{23} \mathbf{d}\beta \cdot a - B_{41}^{24} \mathbf{d}\beta \cdot \beta) \\ &\quad + h'(B_{41}^{13} \mathbf{d}\gamma \cdot \gamma - B_{41}^{14} \mathbf{d}\gamma \cdot d - B_{41}^{23} \mathbf{d}d \cdot \gamma + B_{41}^{24} \mathbf{d}d \cdot d)\end{aligned}$$

bağıntısını ele alalım. Bu bağıntıya soldan Δ_R operatörünü uyguladığımızda ve (3.5) bağıntılarını kullandığımızda, eşitliğin sol tarafı

$$\begin{aligned}\Delta_R(\beta \cdot \mathbf{d}\gamma) &= a \cdot \mathbf{d}\gamma \otimes \beta a - a \cdot \mathbf{d}d \otimes \beta \gamma + \beta \cdot \mathbf{d}\gamma \otimes da + \beta \cdot \mathbf{d}d \otimes d\gamma \\ &= a \cdot \mathbf{d}\gamma \otimes \beta a - a \cdot \mathbf{d}d \otimes [-\gamma\beta + h(d\beta - \beta a) + h'(\gamma a - d\gamma)] \\ &\quad + \beta \cdot \mathbf{d}\gamma \otimes da + \beta \cdot \mathbf{d}d \otimes d\gamma\end{aligned}$$

şeklinde ve sağ tarafı

$$\begin{aligned}hB_{41}^{13} \Delta_R(\mathbf{d}a \cdot a) &= \mathbf{d}a \cdot a \otimes a^2 + \mathbf{d}a \cdot \beta \otimes a\gamma + \mathbf{d}\beta \cdot a \otimes \gamma a - \mathbf{d}\beta \cdot \beta \otimes \gamma^2, \\ -hB_{41}^{14} \Delta_R(\mathbf{d}a \cdot \beta) &= \mathbf{d}a \cdot a \otimes a\beta + \mathbf{d}a \cdot \beta \otimes ad + \mathbf{d}\beta \cdot a \otimes \gamma\beta - \mathbf{d}\beta \cdot \beta \otimes \gamma d, \\ &\quad \vdots \\ -h'B_{41}^{23} \Delta_R(\mathbf{d}d \cdot \gamma) &= -\mathbf{d}\gamma \cdot \gamma \otimes \beta a + \mathbf{d}\gamma \cdot d \otimes \beta \gamma + \mathbf{d}d \cdot \gamma \otimes da + \mathbf{d}d \cdot d \otimes d\gamma, \\ h'B_{41}^{24} \Delta_R(\mathbf{d}d \cdot d) &= -\mathbf{d}\gamma \cdot \gamma \otimes \beta^2 + \mathbf{d}\gamma \cdot d \otimes \beta d + \mathbf{d}d \cdot d \otimes d\beta + \mathbf{d}d \cdot d \otimes d^2\end{aligned}$$

şeklindeki ifadeler toplanarak elde edilir. Sol ve sağ tarafta ortaya çıkan ifadeler eşitlendiğinde, sol tarafında bulunan $B_{31}^{kl}, B_{32}^{kl}, B_{41}^{kl}, B_{42}^{kl}$ bilinmeyen sabitleri B_{41}^{kl} sabitleri cinsinden çözülür. Örneğin, her iki taraftaki da ifadesi dikkate alındığında,

$$B_{41}^{13} = h'B_{41}^{14}, \quad -B_{41}^{24} = hB_{41}^{14}, \quad B_{41}^{31} = h'B_{41}^{32}, \quad B_{41}^{42} = hB_{41}^{32}$$

olarak elde edilir. Bu şekilde devam edilerek, (4.5) komutasyon bağıntılarındaki bilinmeyen diğer B_{ij}^{kl} sabitleri $B_{41}^{14}, B_{41}^{23}, B_{41}^{32}, B_{41}^{41}$ sabitleri cinsinden çözülür. Sonuç

olarak

$$\begin{aligned}
a \cdot \mathbf{d}a &= (B_{41}^{14} - B_{41}^{23} + B_{41}^{32} + B_{41}^{41})\mathbf{d}a \cdot a + h(\mathbf{d}a \cdot \beta - \mathbf{d}\beta \cdot a) & (4.6) \\
&\quad + h'(\mathbf{d}a \cdot \gamma - \mathbf{d}\gamma \cdot a) + hh'(\mathbf{d}a \cdot d + \mathbf{d}d \cdot a + \mathbf{d}\beta \cdot \gamma - \mathbf{d}\gamma \cdot \beta), \\
a \cdot \mathbf{d}\beta &= (B_{41}^{14} + B_{41}^{32})\mathbf{d}\beta \cdot a + (B_{41}^{41} - B_{41}^{23})\mathbf{d}a \cdot \beta - h\mathbf{d}\beta \cdot \beta \\
&\quad + h'(\mathbf{d}a \cdot a - \mathbf{d}\beta \cdot \gamma - \mathbf{d}d \cdot a) + hh'(\mathbf{d}d \cdot \beta + \mathbf{d}\beta \cdot d), \\
a \cdot \mathbf{d}\gamma &= (B_{41}^{14} - B_{41}^{23})\mathbf{d}\gamma \cdot a + (B_{41}^{32} + B_{41}^{41})\mathbf{d}a \cdot \gamma + h(\mathbf{d}d \cdot a - \mathbf{d}a \cdot a - \mathbf{d}\gamma \cdot \beta) \\
&\quad - h'\mathbf{d}\gamma \cdot \gamma + hh'(\mathbf{d}d \cdot \gamma + \mathbf{d}\gamma \cdot d), \\
a \cdot \mathbf{d}d &= B_{41}^{14}\mathbf{d}d \cdot a - B_{41}^{41}\mathbf{d}a \cdot d - B_{41}^{23}\mathbf{d}\gamma \cdot \beta - B_{41}^{32}\mathbf{d}\beta \cdot \gamma + h(\mathbf{d}d \cdot \beta - \mathbf{d}\beta \cdot a) \\
&\quad + h'(\mathbf{d}d \cdot \gamma - \mathbf{d}\gamma \cdot a) + hh'(\mathbf{d}d \cdot d - \mathbf{d}a \cdot a), \\
\beta \cdot \mathbf{d}a &= -(B_{41}^{14} + B_{41}^{32})\mathbf{d}a \cdot \beta + (B_{41}^{23} - B_{41}^{41})\mathbf{d}\beta \cdot a + h\mathbf{d}\beta \cdot \beta \\
&\quad + h'(\mathbf{d}a \cdot a - \mathbf{d}a \cdot d + \mathbf{d}\gamma \cdot \beta) - hh'(\mathbf{d}\beta \cdot d + \mathbf{d}d \cdot \beta), \\
\beta \cdot \mathbf{d}\beta &= (B_{41}^{14} + B_{41}^{23} + B_{41}^{32} - B_{41}^{41})\mathbf{d}\beta \cdot \beta + h[\mathbf{d}a \cdot \beta + \mathbf{d}\beta \cdot (a - d) - \mathbf{d}d \cdot \beta], \\
\beta \cdot \mathbf{d}\gamma &= B_{41}^{14}\mathbf{d}\gamma \cdot \beta - B_{41}^{41}\mathbf{d}\beta \cdot \gamma - B_{41}^{23}\mathbf{d}d \cdot a + B_{41}^{32}\mathbf{d}a \cdot d + h(\mathbf{d}d \cdot \beta - \mathbf{d}a \cdot \beta) \\
&\quad + h'(\mathbf{d}\gamma \cdot a - \mathbf{d}\gamma \cdot d) + hh'(\mathbf{d}a \cdot a + \mathbf{d}d \cdot d), \\
\beta \cdot \mathbf{d}d &= -(B_{41}^{14} + B_{41}^{23})\mathbf{d}d \cdot \beta + (B_{41}^{32} - B_{41}^{41})\mathbf{d}\beta \cdot d + h\mathbf{d}\beta \cdot \beta \\
&\quad + h'(\mathbf{d}d \cdot a + \mathbf{d}\gamma \cdot \beta - \mathbf{d}d \cdot d) + hh'(\mathbf{d}a \cdot \beta + \mathbf{d}\beta \cdot a), \\
\gamma \cdot \mathbf{d}a &= -(B_{41}^{14} + B_{41}^{23})\mathbf{d}a \cdot \gamma + (B_{41}^{32} + B_{41}^{41})\mathbf{d}\gamma \cdot a + h(\mathbf{d}a \cdot d + \mathbf{d}\beta \cdot \gamma - \mathbf{d}a \cdot a) \\
&\quad + h'\mathbf{d}\gamma \cdot \gamma - hh'(\mathbf{d}\gamma \cdot d + \mathbf{d}d \cdot \gamma), \\
\gamma \cdot \mathbf{d}\beta &= B_{41}^{14}\mathbf{d}\beta \cdot \gamma - B_{41}^{41}\mathbf{d}\gamma \cdot \beta + B_{41}^{23}\mathbf{d}a \cdot d - B_{41}^{32}\mathbf{d}d \cdot a + h(\mathbf{d}\beta \cdot d - \mathbf{d}\beta \cdot a) \\
&\quad + h'(\mathbf{d}a \cdot \gamma - \mathbf{d}d \cdot \gamma) - hh'(\mathbf{d}a \cdot a + \mathbf{d}d \cdot d), \\
\gamma \cdot \mathbf{d}\gamma &= (B_{41}^{14} - B_{41}^{23} - B_{41}^{32} - B_{41}^{41})\mathbf{d}\gamma \cdot \gamma + h[-\mathbf{d}a \cdot \gamma + \mathbf{d}\gamma \cdot (d - a) + \mathbf{d}d \cdot \gamma], \\
\gamma \cdot \mathbf{d}d &= -(B_{41}^{14} - B_{41}^{32})\mathbf{d}d \cdot \gamma - (B_{41}^{23} + B_{41}^{41})\mathbf{d}\gamma \cdot d \\
&\quad + h(\mathbf{d}\beta \cdot \gamma - \mathbf{d}d \cdot a + \mathbf{d}d \cdot d) + h'\mathbf{d}\gamma \cdot \gamma + hh'(\mathbf{d}a \cdot \gamma + \mathbf{d}\gamma \cdot a), \\
d \cdot \mathbf{d}a &= B_{41}^{14}\mathbf{d}a \cdot d + B_{41}^{41}\mathbf{d}d \cdot a + B_{41}^{23}\mathbf{d}\beta \cdot \gamma + B_{41}^{32}\mathbf{d}\gamma \cdot \beta + h(\mathbf{d}a \cdot \beta - \mathbf{d}\beta \cdot d) \\
&\quad + h'(\mathbf{d}a \cdot \gamma - \mathbf{d}\gamma \cdot d) + hh'(\mathbf{d}d \cdot d - \mathbf{d}a \cdot a), \\
d \cdot \mathbf{d}\beta &= (B_{41}^{14} + B_{41}^{23})\mathbf{d}\beta \cdot d + (B_{41}^{41} - B_{41}^{32})\mathbf{d}d \cdot \beta - h\mathbf{d}\beta \cdot \beta \\
&\quad + h'(\mathbf{d}a \cdot d - \mathbf{d}\beta \cdot \gamma - \mathbf{d}d \cdot d) - hh'(\mathbf{d}\beta \cdot a + \mathbf{d}a \cdot \beta), \\
d \cdot \mathbf{d}\gamma &= (B_{41}^{14} - B_{41}^{32})\mathbf{d}\gamma \cdot d + (B_{41}^{23} + B_{41}^{41})\mathbf{d}d \cdot \gamma + h(\mathbf{d}d \cdot d - \mathbf{d}a \cdot d - \mathbf{d}\gamma \cdot \beta) \\
&\quad - h'\mathbf{d}\gamma \cdot \gamma - hh'(\mathbf{d}\gamma \cdot a + \mathbf{d}a \cdot \gamma), \\
d \cdot \mathbf{d}d &= (B_{41}^{14} + B_{41}^{23} - B_{41}^{32} + B_{41}^{41})\mathbf{d}d \cdot d + h(\mathbf{d}d \cdot \beta - \mathbf{d}\beta \cdot d) \\
&\quad + h'(\mathbf{d}d \cdot \gamma - \mathbf{d}\gamma \cdot d) + hh'(\mathbf{d}\beta \cdot \gamma - \mathbf{d}\gamma \cdot \beta - \mathbf{d}a \cdot d - \mathbf{d}d \cdot a)
\end{aligned}$$

komutasyon bağıntılarına sahibiz. □

Şimdi, Lemma 4.2 sonucunda bulunması gereken 4 adet B_{41}^{14} , B_{41}^{23} , B_{41}^{32} , B_{41}^{41} bilinmeyen sabitlerinin uygun bir seçimi ile aşağıdaki teoremi verebiliriz:

Teorem 4.1. *Kendisine göre ikili-kovaryant olan $\mathcal{O}(\mathrm{GL}_{h,h'}(1|1))$ Hopf süper cebiri üzerine bir tek birinci mertebeden diferansiyel hesap mevcuttur. $\{\mathbf{d}a, \mathbf{d}\beta, \mathbf{d}\gamma, \mathbf{d}d\}$ kümesi $\Omega^1(\mathrm{GL}_{h,h'}(1|1))$ için bir serbest $\mathcal{O}(\mathrm{GL}_{h,h'}(1|1))$ -modül tabanıdır ve ikili-modül yapısı*

$$\begin{aligned}
a \cdot \mathbf{d}a &= (1 - 2hh')\mathbf{d}a \cdot a + h(\mathbf{d}a \cdot \beta - \mathbf{d}\beta \cdot a) + h'(\mathbf{d}a \cdot \gamma - \mathbf{d}\gamma \cdot a) \quad (4.7) \\
&\quad + hh'(\mathbf{d}a \cdot d + \mathbf{d}d \cdot a + \mathbf{d}\beta \cdot \gamma - \mathbf{d}\gamma \cdot \beta), \\
a \cdot \mathbf{d}\beta &= (1 - hh')\mathbf{d}\beta \cdot a - h\mathbf{d}\beta \cdot \beta + h'(\mathbf{d}a \cdot a - \mathbf{d}\beta \cdot \gamma - \mathbf{d}d \cdot a) \\
&\quad + hh'(\mathbf{d}d \cdot \beta + \mathbf{d}\beta \cdot d - \mathbf{d}a \cdot \beta), \\
a \cdot \mathbf{d}\gamma &= (1 - hh')\mathbf{d}\gamma \cdot a + h(\mathbf{d}d \cdot a - \mathbf{d}a \cdot a - \mathbf{d}\gamma \cdot \beta) - h'\mathbf{d}\gamma \cdot \gamma \\
&\quad + hh'(\mathbf{d}d \cdot \gamma + \mathbf{d}\gamma \cdot d - \mathbf{d}a \cdot \gamma), \\
a \cdot \mathbf{d}d &= \mathbf{d}d \cdot a + h(\mathbf{d}d \cdot \beta - \mathbf{d}\beta \cdot a) + h'(\mathbf{d}d \cdot \gamma - \mathbf{d}\gamma \cdot a) \\
&\quad + hh'(\mathbf{d}d \cdot d - \mathbf{d}a \cdot a + \mathbf{d}\beta \cdot \gamma - \mathbf{d}\gamma \cdot \beta) \\
\beta \cdot \mathbf{d}a &= (-1 + hh')\mathbf{d}a \cdot \beta + h\mathbf{d}\beta \cdot \beta + h'(\mathbf{d}a \cdot a - \mathbf{d}a \cdot d + \mathbf{d}\gamma \cdot \beta) \\
&\quad + hh'(\mathbf{d}\beta \cdot a - \mathbf{d}\beta \cdot d - \mathbf{d}d \cdot \beta), \\
\beta \cdot \mathbf{d}\beta &= \mathbf{d}\beta \cdot \beta + h'(\mathbf{d}a \cdot \beta + \mathbf{d}\beta \cdot a - \mathbf{d}\beta \cdot d - \mathbf{d}d \cdot \beta), \\
\beta \cdot \mathbf{d}\gamma &= \mathbf{d}\gamma \cdot \beta + h(\mathbf{d}d \cdot \beta - \mathbf{d}a \cdot \beta) + h'(\mathbf{d}\gamma \cdot a - \mathbf{d}\gamma \cdot d) \\
&\quad + hh'(\mathbf{d}a \cdot a - \mathbf{d}a \cdot d - \mathbf{d}d \cdot a + \mathbf{d}d \cdot d), \\
\beta \cdot \mathbf{d}d &= -(1 + hh')\mathbf{d}d \cdot \beta + h\mathbf{d}\beta \cdot \beta + h'(\mathbf{d}d \cdot a + \mathbf{d}\gamma \cdot \beta - \mathbf{d}d \cdot d) \\
&\quad + hh'(\mathbf{d}a \cdot \beta + \mathbf{d}\beta \cdot a - \mathbf{d}\beta \cdot d) \\
\gamma \cdot \mathbf{d}a &= (-1 + hh')\mathbf{d}a \cdot \gamma + h(\mathbf{d}a \cdot d + \mathbf{d}\beta \cdot \gamma - \mathbf{d}a \cdot a) + h'\mathbf{d}\gamma \cdot \gamma \\
&\quad + hh'(\mathbf{d}\gamma \cdot a - \mathbf{d}\gamma \cdot d - \mathbf{d}d \cdot \gamma), \\
\gamma \cdot \mathbf{d}\beta &= \mathbf{d}\beta \cdot \gamma + h(\mathbf{d}\beta \cdot d - \mathbf{d}\beta \cdot a) + h'(\mathbf{d}a \cdot \gamma - \mathbf{d}d \cdot \gamma) \\
&\quad + hh'(\mathbf{d}a \cdot d + \mathbf{d}d \cdot a - \mathbf{d}a \cdot a - \mathbf{d}d \cdot d), \\
\gamma \cdot \mathbf{d}\gamma &= \mathbf{d}\gamma \cdot \gamma + h(\mathbf{d}\gamma \cdot d + \mathbf{d}d \cdot \gamma - \mathbf{d}a \cdot \gamma - \mathbf{d}\gamma \cdot a), \\
\gamma \cdot \mathbf{d}d &= -(1 + hh')\mathbf{d}d \cdot \gamma + h(\mathbf{d}\beta \cdot \gamma - \mathbf{d}d \cdot a + \mathbf{d}d \cdot d) + h'\mathbf{d}\gamma \cdot \gamma \\
&\quad + hh'(\mathbf{d}a \cdot \gamma + \mathbf{d}\gamma \cdot a - \mathbf{d}\gamma \cdot d), \\
d \cdot \mathbf{d}a &= \mathbf{d}a \cdot d + h(\mathbf{d}a \cdot \beta - \mathbf{d}\beta \cdot d) + h'(\mathbf{d}a \cdot \gamma - \mathbf{d}\gamma \cdot d) \\
&\quad + hh'(\mathbf{d}d \cdot d - \mathbf{d}a \cdot a + \mathbf{d}\beta \cdot \gamma - \mathbf{d}\gamma \cdot \beta), \\
d \cdot \mathbf{d}\beta &= (1 + hh')\mathbf{d}\beta \cdot d - h\mathbf{d}\beta \cdot \beta + h'(\mathbf{d}a \cdot d - \mathbf{d}\beta \cdot \gamma - \mathbf{d}d \cdot d) \\
&\quad + hh'(\mathbf{d}d \cdot \beta - \mathbf{d}\beta \cdot a - \mathbf{d}a \cdot \beta), \\
d \cdot \mathbf{d}\gamma &= (1 + hh')\mathbf{d}\gamma \cdot d + h(\mathbf{d}d \cdot d - \mathbf{d}a \cdot d - \mathbf{d}\gamma \cdot \beta) - h'\mathbf{d}\gamma \cdot \gamma
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + hh'(\mathbf{d}d \cdot \gamma + \mathbf{d}\gamma \cdot a - \mathbf{d}a \cdot \gamma), \\
d \cdot \mathbf{d}d & = (1 + 2hh')\mathbf{d}d \cdot d + h(\mathbf{d}d \cdot \beta - \mathbf{d}\beta \cdot d) + h'(\mathbf{d}d \cdot \gamma - \mathbf{d}\gamma \cdot d) \\
& + hh'(\mathbf{d}\beta \cdot \gamma - \mathbf{d}\gamma \cdot \beta - \mathbf{d}a \cdot d - \mathbf{d}d \cdot a).
\end{aligned}$$

bağıntıları ile belirlenmiştir

İspat Cebirin süper yapısından dolayı (4.6) bağıntılarında görünen B_{ij}^{kl} sabitlerinden bazılarının tek ve bazılarının da çift olması gerekiyor. Dolayısı ile bu 4 bilinmeyen sabit için şu yorumu yapabiliriz:

$$B_{41}^{14} = \{1, 1 \pm hh'\}, \quad B_{41}^{23}, B_{41}^{32}, B_{41}^{41} = \{0, \pm hh'\}.$$

Bu sabitler için uygun seçimler, $B_{41}^{14} = 1$ ve $B_{41}^{23} = hh'$ ile $B_{41}^{32} = -hh'$, $B_{41}^{41} = 0$ dir. Bu yapılırken, bir sonraki başlıkta ortaya konulacak olan yüksek mertebeden diferansiyel hesabın tutarlılığı göz önüne alınmıştır. Yani, (4.6) bağıntılarının yüksek mertebeden diferansiyel hesabı sağlanması beklenerek, bulunması gereken bilinmeyen sabitler uygun işlemler sonucunda elde edilmiştir. Dolayısıyla (4.7) bağıntılarına sahibiz. \square

Değişmeli olmayan diferansiyel hesapta, jeneratörler ile onların birinci mertebeden diferansiyelleri arasındaki komutasyon bağıntıları bir σ operatörü ile kompakt biçimde yazılabilir [32, 33]. Teorem 4.1 gereğince, $\{\mathbf{d}a, \mathbf{d}\beta, \mathbf{d}\gamma, \mathbf{d}d\}$ kümesi $\Omega^1(\mathrm{GL}_{h,h'}(1|1))$ in bir serbest sağ $\mathcal{O}(\mathrm{GL}_{h,h'}(1|1))$ -modül tabanı idi. Aynı zamanda, $\Omega^1(\mathrm{GL}_{h,h'}(1|1))$ diferansiyel hesabı bir $\mathcal{O}(\mathrm{GL}_{h,h'}(1|1))$ -ikili-modül olduğundan sol modül yapısını da düşünebiliriz. Sol $\mathbf{d}v \rightarrow u \cdot \mathbf{d}v$ çarpımı, $\Omega^1(\mathrm{GL}_{h,h'}(1|1))$ sağ modülünün bir endomorfizmidir. Rankı 4 olan herhangi bir sağ modülün tüm endomorfizmlerinin halkası, bütün 4×4 -tipindeki matrislerin halkasına izomorftur. Dolayısıyla, $\{\mathbf{d}a, \mathbf{d}\beta, \mathbf{d}\gamma, \mathbf{d}d\}$ kümesi $\Omega^1(\mathrm{GL}_{h,h'}(1|1))$ uzayının homojen bir tabanı olduğundan, bir σ tasviri mevcuttur. Bu durumda, (4.7) komutasyon bağıntılarını aşağıdaki teoremlerle yeniden ifade edebiliriz:

Teorem 4.2. $\mathcal{O}(\mathrm{GL}_{h,h'}(1|1))$ Hopf süper cebirinin jeneratörleri ile onların diferansiyelleri arasındaki (h, h') -deforme komutasyon bağıntıları

$$f \cdot \mathbf{d}f_j = (-1)^{p(f)p(\mathbf{d}f_j)} \sum_{i=1}^4 \mathbf{d}f_i \cdot \sigma_{ij}(f), \quad f \in \mathcal{O}(\mathrm{GL}_{h,h'}(1|1)) \quad (4.8)$$

formülleri ile tanımlı $\sigma : \mathcal{O}(\mathrm{GL}_{h,h'}(1|1)) \rightarrow M_4(\mathcal{O}(\mathrm{GL}_{h,h'}(1|1)))$ tasviri ile ifade edilebilir. Burada $A_1 = -h\beta - h'\gamma + hh'd$, $A_2 = d - a$ ve $A_3 = -h\beta - h'\gamma - hh'a$

olmak üzere $\sigma(\cdot)$ matrisleri aşağıdaki gibidir:

$$\sigma(a) = \begin{pmatrix} (1-2H)a + A_1 & -h'a - hh'\beta & ha - hh'\gamma & -hh'a \\ -ha + hh'\gamma & (1-H)a + A_1 & 0 & -h(a+h'\gamma) \\ -h'a - hh'\beta & 0 & (1-H)a + A_1 & -h'(a+h\beta) \\ hh'a & h'a + hh'\beta & -ha + hh'\gamma & a + A_1 \end{pmatrix},$$

$$\sigma(\beta) = \begin{pmatrix} (1-hh')\beta - h'A_2 & -h'\beta & h\beta - hh'A_2 & -hh'\beta \\ -h\beta + hh'A_2 & \beta - h'A_2 & 0 & -h\beta + hh'A_2 \\ -h'\beta & 0 & \beta - h'A_2 & -h'\beta \\ hh'\beta & h'\beta & -h\beta + hh'A_2 & (1+hh')\beta - h'A_2 \end{pmatrix}, \quad (4.9)$$

$$\sigma(\gamma) = \begin{pmatrix} (1-hh')\gamma + hA_2 & -h'\gamma + hh'A_2 & h\gamma & -hh'\gamma \\ -h\gamma & \gamma + hA_2 & 0 & -h\gamma \\ -h'\gamma + hh'A_2 & 0 & \gamma + hA_2 & -h'\gamma + hh'A_2 \\ hh'\gamma & h'\gamma - hh'A_2 & -h\gamma & (1+hh')\gamma + hA_2 \end{pmatrix},$$

$$\sigma(d) = \begin{pmatrix} d + A_3 & -h'd - hh'\beta & hd - hh'\gamma & -hh'd \\ -hd + hh'\gamma & (1+H)d + A_3 & 0 & -hd + hh'\gamma \\ -h'd - hh'\gamma & 0 & (1+H)d + A_3 & -h'd - hh'\beta \\ hh'd & h'd + hh'\beta & -hd + hh'\gamma & (1+2H)d + A_3 \end{pmatrix}.$$

(Burada diğer kısaltma ifadelerine ek olarak, sayfa düzeni için bazı matris girdilerinde $hh' := H$ olarak ifade edilmiştir.)

$\sigma(\cdot)$ matrisleri, $\mathcal{O}(\mathrm{GL}_{h,h'}(1|1))$ Hopf süper cebirinin jeneratörlerinin matris temsilleridir. Bu, aşağıdaki teoremle ifade edilmiştir:

Teorem 4.3. σ tasviri, her $f, g \in \mathcal{O}(\mathrm{GL}_{h,h'}(1|1))$ için

$$\sigma_{ij}(f \cdot g) = \sum_{k=1}^4 (-1)^{p(f)[p(f_j)+p(f_k)]} \sigma_{ik}(f) \cdot \sigma_{kj}(g) \quad (4.10)$$

ile bir \mathbb{K}' -lineer \mathbb{Z}_2 -dereceli homomorfizmdir ve σ tasviri (3.5) bağıntılarını korur.

Ayrıca, (4.7) bağıntılarını başka bir τ operatörü ile de ifade edebiliriz:

Teorem 4.4. $\mathcal{O}(\mathrm{GL}_{h,h'}(1|1))$ Hopf süper cebirinin jeneratörleri ile onların diferansiyelleri arasındaki (h, h') -deforme komutasyon bağıntıları

$$\mathbf{d}f_i \cdot f = \sum_{k,l=1}^4 (-1)^{p(f)p(\mathbf{d}f_j)} \tau_{ij}(f) \cdot \mathbf{d}f_j, \quad f \in \mathcal{O}(\mathrm{GL}_{h,h'}(1|1)) \quad (4.11)$$

formülleri ile tanımlı $\tau : \mathcal{O}(\mathrm{GL}_{h,h'}(1|1)) \rightarrow M_4(\mathcal{O}(\mathrm{GL}_{h,h'}(1|1)))$ tasviri ile ifade edilebilir. Burada $B_1 = h\beta + h'\gamma + hh'd$, $A_2 = d - a$ ve $B_3 = h\beta + h'\gamma - hh'a$ olmak üzere $\tau(\cdot)$ matrisleri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} \tau(a) &= \begin{pmatrix} (1 - 2H)a + B_1 & ha + hh'\gamma & h'a - hh'\beta & hh'a \\ -h'a + hh'\beta & (1 - H)a + B_1 & 0 & h'a - hh'\beta \\ ha + hh'\gamma & 0 & (1 - H)a + B_1 & -ha - hh'\gamma \\ -hh'a & ha + hh'\gamma & h'a - hh'\beta & a + B_1 \end{pmatrix}, \\ \tau(\beta) &= \begin{pmatrix} (1 - hh')\beta + h'A_2 & h\beta + hh'A_2 & h'\beta & +hh'\beta \\ -h'\beta & \beta + h'A_2 & 0 & h'\beta \\ h\beta + hh'A_2 & 0 & \beta + h'A_2 & -h\beta - hh'A_2 \\ -hh'\beta & h\beta + hh'A_2 & h'\beta & (1 + hh')\beta + h'A_2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} \tau(\gamma) &= \begin{pmatrix} (1 - hh')\gamma - hA_2 & h\gamma & h'\gamma + hh'A_2 & hh'\gamma \\ -h'\gamma - hh'A_2 & \gamma - hA_2 & 0 & h'\gamma + hh'A_2 \\ h\gamma & 0 & \gamma - hA_2 & -h\gamma \\ -hh'\gamma & h\gamma & h'\gamma + hh'A_2 & (1 + hh')\gamma + hA_2 \end{pmatrix}, \\ \tau(d) &= \begin{pmatrix} d + B_3 & hd + hh'\gamma & h'd - hh'\beta & hh'd \\ -h'd + hh'\beta & (1 + H)d + B_3 & 0 & h'd - hh'\beta \\ hd + hh'\gamma & 0 & (1 + H)d + B_3 & -hd - hh'\gamma \\ -hh'd & hd + hh'\gamma & h'd - hh'\beta & (1 + 2H)d + B_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(Burada diğer kısaltma ifadelerine ek olarak, sayfa düzeni için bazı matris girdilerinde $hh' := H$ olarak ifade edilmiştir.)

Teorem 4.5. τ tasviri, her $f, g \in \mathcal{O}(\mathrm{GL}_{h,h'}(1|1))$ için

$$\tau_{ij}(f \cdot g) = \sum_{k=1}^4 (-1)^{p(f)[p(f_j)+p(f_k)]} \tau_{ik}(f) \cdot \tau_{kj}(g) \quad (4.13)$$

ile bir \mathbb{K}' -lineer \mathbb{Z}_2 -dereceli homomorfizimdir ve τ tasviri (3.5) bağıntılarını korur.

4.3 $\mathcal{O}(\mathrm{GL}_{h,h'}(1|1))$ Hopf Süper Cebiri Üzerine Yüksek Mertebeden Diferansiyel Hesap

Birinci mertebeden diferansiyel hesap jeneratörler ile onların birinci mertebeden diferansiyelleri arasındaki komutasyon bağıntılarını içerir. Birinci mertebeden diferansiyeller arasındaki komutasyon bağıntıları ise ikinci mertebeden diferansiyel hesapta yer alır ve böyle devam eder. Aşağıda yüksek mertebeden diferansiyel hesabın tanımı verilmiştir:

Tanım 4.3. \mathcal{H} , bir Hopf süper cebiri ve $\Omega^{<0} = 0$, $\Omega^0 := \mathcal{H}$ olmak üzere $\Omega = \bigoplus_{n \geq 0} \Omega^{\wedge n}$, bir süper cebir olsun. Eğer bir derecesi 1 olan $d : \Omega \rightarrow \Omega$ lineer tasviri \mathbb{Z}_2 -dereceli Leibniz kuralını sağlıyor ve her $f \in \mathcal{H}$ için $d^2 f = 0$ ise, (Ω, d) çiftine \mathcal{H} Hopf süper cebiri üzerine bir \mathbb{Z}_2 -dereceli diferansiyel hesap denir. Burada $\Omega^{\wedge n} = \text{Lin}\{a_0 \cdot da_1 \wedge \cdots \wedge da_n : a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N}\}$ dir.

Woronowicz'in öncü çalışması [7] gereğince biliyoruz ki, her birinci mertebeden diferansiyel hesap yüksek mertebeye genişletilebilmelidir. Dolayısıyla Teorem 4.1 deki bağıntıların sol ve sağ taraflarına d diferansiyel operatörünü uyguladığımızda tutarlı sonuçların ortaya çıkması gerekir.

$\mathcal{O}(\text{GL}_{h,h'}(1|1))$ süper cebiri üzerinde tanımlanan σ tasvirini bütün diferansiyel cebir üzerine genişletmek mümkündür: $\sigma^\Omega : \Omega \rightarrow M_4(\Omega)$ tasvirini, her $f \in \mathcal{O}(\text{GL}_{h,h'}(1|1))$ için $\sigma_{ij}^\Omega(f) := \sigma_{ij}(f)$ olmak üzere

$$\sigma_{ij}^\Omega(df) = d\sigma_{ij}(f) \quad (4.14)$$

şeklinde tanımlarız.

Teorem 4.6. $\mathcal{O}(\text{GL}_{h,h'}(1|1))$ Hopf süper cebirinin jeneratörlerinin diferansiyelleri arasındaki (h, h') -deforme komutasyon bağıntıları

$$\begin{aligned} da \wedge da &= (hd\beta + h'd\gamma - hh'dd) \wedge da \\ da \wedge d\beta &= d\beta \wedge [(1 - hh')da - hd\beta + h'd\gamma] - h'dd \wedge da \\ da \wedge d\gamma &= d\gamma \wedge [(1 - hh')da + hd\beta + h'd\gamma] + h'dd \wedge da \\ da \wedge dd &= -dd \wedge (da + hd\beta + h'd\gamma) + (hd\beta + h'd\gamma) \wedge da \\ d\beta \wedge d\gamma &= d\gamma \wedge [d\beta + h'(dd - da)] + h(dd - da) \wedge d\beta \\ d\beta \wedge dd &= dd \wedge [(1 + hh')d\beta - h'da] - (hd\beta + h'd\gamma) \wedge d\beta \\ d\gamma \wedge dd &= dd \wedge [(1 + hh')d\gamma + hda] - (hd\beta + h'd\gamma) \wedge d\gamma \\ dd \wedge dd &= (hd\beta + h'd\gamma + hh'da) \wedge dd. \end{aligned} \quad (4.15)$$

şeklindedir. Bu bağıntılar kapalı formda $f \in \mathcal{O}(\text{GL}_{h,h'}(1|1))$ için

$$df \wedge df_j = (-1)^{p(f)p(df_j)} \sum_{i=1}^4 (-1)^{p(df_i)} df_i \wedge \sigma_{ij}^\Omega(df), \quad (4.16)$$

formülüyle ifade edilir.

İspat $\mathcal{O}(\text{GL}_{h,h'}(1|1))$ Hopf süper cebiri üzerine oluşturduğumuz (Ω, d) diferansiyel hesabının, yüksek mertebeli diferansiyel hesabı sağlaması gerekmektedir. d lineer

tasvirini (4.7) komutasyon bağıntılarına etki ettiririz. Elde ettiğimiz bağıntılar arasında karşılaştırma yaparak düzenlediğimizde, istenilen bağıntılara ulaşırız. \square

Teorem 4.7. [28] σ^Ω tasviri, her $f, g \in \mathcal{O}(\mathrm{GL}_{h,h'}(1|1))$ için

$$\sigma_{ij}^\Omega(\mathbf{d}f \wedge \mathbf{d}g) = \sum_{k=1}^4 (-1)^{p(\mathbf{d}f)[p(\mathbf{d}f_j)+p(\mathbf{d}f_k)]} \sigma_{ik}^\Omega(\mathbf{d}f) \wedge \sigma_{kj}^\Omega(\mathbf{d}g) \quad (4.17)$$

ile bir \mathbb{K}' -lineer \mathbb{Z}_2 -dereceli homomorfizimdir ve σ tasviri (4.15) bağıntılarını korur.

σ^Ω tasvirinin süper cebirin jeneratörleri ve onların diferansiyellerinin çarpımları üzerine etkisi

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^\Omega(f \cdot \mathbf{d}g) &= \sum_{k=1}^4 (-1)^{p(f_i)+p(f_k)+p(f)[p(f_j)+p(f_k)]} \sigma_{ik}^\Omega(f) \wedge \sigma_{kj}^\Omega(\mathbf{d}g), \\ \sigma_{ij}^\Omega(\mathbf{d}f \cdot g) &= \sum_{k=1}^4 (-1)^{[1+p(\mathbf{d}f)][p(f_j)+p(f_k)]} \sigma_{ik}^\Omega(\mathbf{d}f) \wedge \sigma_{kj}^\Omega(g) \end{aligned}$$

özellikleriyle verilir [28].

4.4 Süper Kısmi Türevler

Bu kısımda, $\mathcal{O}(\mathrm{GL}_{h,h'}(1|1))$ Hopf süper cebirinin jeneratörleri ile tekabül eden kısmi türevler arasındaki bağıntıların yanı sıra, kısmi türevlerin kendi aralarındaki (h, h') -deforme komutasyon bağıntılarını elde edeceğiz. Bunun için önce cebirin jeneratörlerinin kısmi türevlerini tanıtalım.

(Ω, \mathbf{d}) bir ikili-kovaryant diferansiyel hesap olduğundan, her $f \in \mathcal{O}(\mathrm{GL}_{h,h'}(1|1))$ için

$$\mathbf{d}f = \mathbf{d}a \cdot \partial_a(f) + \mathbf{d}\beta \cdot \partial_\beta(f) + \mathbf{d}\gamma \cdot \partial_\gamma(f) + \mathbf{d}d \cdot \partial_d(f) \quad (4.18)$$

eşitliği ile tek olarak belirlenmiş $\partial_{f_i}(f) \in \mathcal{O}(\mathrm{GL}_{h,h'}(1|1))$ elemanları mevcuttur. Burada $\partial_f = \partial/\partial f$ sembolü kullanılmıştır. Tutarlılık gereği

$$p(\partial_a) = p(\partial_d) = 0 \quad \text{ve} \quad p(\partial_\beta) = p(\partial_\gamma) = 1$$

olmalıdır. Buna göre aşağıdaki tanımları verebiliriz:

Tanım 4.4. Her $f \in \mathcal{O}(\mathrm{GL}_{h,h'}(1|1))$ için (4.18) ile tanımlı

$$\partial_a, \partial_\beta, \partial_\gamma, \partial_d : \mathcal{O}(\mathrm{GL}_{h,h'}(1|1)) \rightarrow \mathcal{O}(\mathrm{GL}_{h,h'}(1|1))$$

vektör alanlarına $(\Omega^\wedge, \mathbf{d})$ diferansiyel hesabının kısmi türevleri denir.

Teorem 4.8. $\mathcal{O}(\text{GL}_{h,h'}(1|1))$ Hopf süper cebirinin jeneratörleri ile kısmi türevleri arasındaki (h, h') -deforme komutasyon bağıntıları $\forall f_j \in \mathcal{O}(\text{GL}_{h,h'}(1|1))$

$$\partial_{f_i} \cdot f_j = \delta_{ij} + \sum_{k=1}^4 (-1)^{p(f_j)p(\partial_{f_k})} \sigma_{ik}(f_j) \cdot \partial_{f_k} \quad (4.19)$$

formülü ile ifade edilir.

İspat İstenilen bağıntıları elde etmek için (4.18) gerçeği kullanılarak, her $f_i \in \mathcal{O}(\text{GL}_{h,h'}(1|1))$ için \mathbf{d} lineer tasviri $f_i \cdot f$ çarpımına etki ettirilir ve eşitliğin sol tarafı için (4.18) göz önüne alınır. Örneğin $i = 1$ iken $f_1 = a$ olup,

$$\begin{aligned} \mathbf{d}(a \cdot f) &= \mathbf{d}a \cdot f + a \cdot \mathbf{d}f \\ &= \mathbf{d}a \cdot f + a \cdot (\mathbf{d}a \cdot \partial_a + \mathbf{d}\beta \cdot \partial_\beta + \mathbf{d}\gamma \cdot \partial_\gamma + \mathbf{d}d \cdot \partial_d)f \\ &= \mathbf{d}a \cdot f + \{(1 - 2hh')\mathbf{d}a \cdot a + \dots\} \cdot \partial_a + (\dots + h' \dots \mathbf{d}a \cdot a + \dots) \partial_\beta \\ &\quad + (\dots - h\mathbf{d}a \cdot a + \dots) \partial_\gamma + (\dots - hh' \mathbf{d}a \cdot a + \dots) \partial_d \} f \end{aligned}$$

$$\mathbf{d}(a \cdot f) = (\mathbf{d}a \cdot \partial_a + \mathbf{d}\beta \cdot \partial_\beta + \mathbf{d}\gamma \cdot \partial_\gamma + \mathbf{d}d \cdot \partial_d)(a \cdot f)$$

yazılır. Yukarıdaki iki eşitlik sonucunda, 4 adet

$$\partial_{f_i} \cdot a = \dots$$

şeklindeki komutasyon bağıntıları elde edilir. İşlem, $i = 2, 3, 4$ için tekrarlanır. Elde edilen bütün komutasyon bağıntıları $\sigma(\cdot)$ matrisleri kullanılarak, kompakt formda (4.19) formülü ile ifade edilebilir. \square

Teorem 4.9. Kısmi türevlerin arasındaki (h, h') -deforme komutasyon bağıntıları aşağıdaki şekildedir:

$$\begin{aligned} \partial_a \cdot \partial_\beta &= \partial_\beta \cdot \partial_a - h(\partial_a \cdot \partial_a + \partial_d \cdot \partial_a + \partial_\gamma \cdot \partial_\beta), \\ \partial_a \cdot \partial_\gamma &= (1 - hh')\partial_\gamma \cdot \partial_a - h'(\partial_a \cdot \partial_a + \partial_d \cdot \partial_a + \partial_\gamma \cdot \partial_\beta) - hh'\partial_d \cdot \partial_\gamma, \\ \partial_a \cdot \partial_d &= \partial_d \cdot \partial_a - h(\partial_d \cdot \partial_\gamma + \partial_\gamma \cdot \partial_a) + h'(\partial_\beta \cdot \partial_a + \partial_d \cdot \partial_\beta) \\ &\quad + hh'(\partial_a \cdot \partial_a - \partial_d \cdot \partial_d + 2\partial_\gamma \cdot \partial_\beta), \\ \partial_\beta \cdot \partial_\gamma &= -\partial_\gamma \cdot \partial_\beta + h(\partial_\gamma \cdot \partial_a + \partial_d \cdot \partial_\gamma) + h'(\partial_\beta \cdot \partial_a + \partial_d \cdot \partial_\beta), \\ \partial_\beta \cdot \partial_d &= (1 + hh')\partial_d \cdot \partial_\beta + h(\partial_d \cdot \partial_d + \partial_d \cdot \partial_a - \partial_\gamma \cdot \partial_\beta) + hh'\partial_\beta \cdot \partial_a, \\ \partial_\gamma \cdot \partial_d &= \partial_d \cdot \partial_\gamma + h'(\partial_d \cdot \partial_d + \partial_d \cdot \partial_a - \partial_\gamma \cdot \partial_\beta), \\ \partial_\beta \cdot \partial_\beta &= h(\partial_\beta \cdot \partial_a + \partial_d \cdot \partial_\beta), \quad \partial_\gamma \cdot \partial_\gamma = h'(\partial_\gamma \cdot \partial_a + \partial_d \cdot \partial_\gamma). \end{aligned} \quad (4.20)$$

İspat Diferansiyellenebilen bir f fonksiyonu için, (4.18) eşitliği göz önünde bulundurarak $d^2f = 0$ olması gerçeği kullanılır:

$$\begin{aligned}
d^2f &= (-\mathbf{d}a \wedge \mathbf{d}\partial_a + \mathbf{d}\beta \wedge \mathbf{d}\partial_\beta + \mathbf{d}\gamma \wedge \mathbf{d}\partial_\gamma - \mathbf{d}d \wedge \mathbf{d}\partial_d)f \\
&= [-\mathbf{d}a \wedge (\mathbf{d}a \cdot \partial_a + \mathbf{d}\beta \cdot \partial_\beta + \mathbf{d}\gamma \cdot \partial_\gamma + \mathbf{d}d \cdot \partial_d)\partial_a \\
&\quad + \mathbf{d}\beta \wedge (\mathbf{d}a \cdot \partial_a + \mathbf{d}\beta \cdot \partial_\beta + \mathbf{d}\gamma \cdot \partial_\gamma + \mathbf{d}d \cdot \partial_d)\partial_\beta \\
&\quad + \mathbf{d}\gamma \wedge (\mathbf{d}a \cdot \partial_a + \mathbf{d}\beta \cdot \partial_\beta + \mathbf{d}\gamma \cdot \partial_\gamma + \mathbf{d}d \cdot \partial_d)\partial_\gamma \\
&\quad - \mathbf{d}d \wedge (\mathbf{d}a \cdot \partial_a + \mathbf{d}\beta \cdot \partial_\beta + \mathbf{d}\gamma \cdot \partial_\gamma + \mathbf{d}d \cdot \partial_d)\partial_d]f
\end{aligned}$$

olup, burada (4.15) bağıntıları kullanılarak

$$\begin{aligned}
0 &= [(-\mathbf{d}a \wedge \mathbf{d}a \cdot \partial_a - \mathbf{d}a \wedge \mathbf{d}\beta \cdot \partial_\beta - \mathbf{d}a \wedge \mathbf{d}\gamma \cdot \partial_\gamma - \mathbf{d}a \wedge \mathbf{d}d \cdot \partial_d) \cdot \partial_a + \dots]f \\
&= \{-[h\mathbf{d}\beta \wedge \mathbf{d}a + h'\mathbf{d}\gamma \wedge \mathbf{d}a - hh'\mathbf{d}d \wedge \mathbf{d}a]\} \cdot \partial_a \\
&\quad - [(1 - hh')\mathbf{d}\beta \wedge \mathbf{d}a + h\mathbf{d}\beta \wedge \mathbf{d}\beta + h'(\mathbf{d}\beta \wedge \mathbf{d}\gamma - \mathbf{d}d \wedge \mathbf{d}a)] \cdot \partial_\beta \\
&\quad - [(1 - hh')\mathbf{d}\gamma \wedge \mathbf{d}a + h(\mathbf{d}d \wedge \mathbf{d}a + \mathbf{d}\gamma \wedge \mathbf{d}\beta) + h'\mathbf{d}\gamma \wedge \mathbf{d}\gamma] \cdot \partial_\gamma \\
&\quad + [\mathbf{d}d \wedge \mathbf{d}a - h(\mathbf{d}d \wedge \mathbf{d}\beta + \mathbf{d}\beta \wedge \mathbf{d}a) - h'(\mathbf{d}d \wedge \mathbf{d}\gamma + \mathbf{d}\gamma \wedge \mathbf{d}a)]\partial_d\} \partial_a f + \dots \\
&= \mathbf{d}\beta \wedge \mathbf{d}a \cdot [\partial_a \cdot \partial_\beta - \partial_\beta \cdot \partial_a + h\partial_a \cdot \partial_a + h\partial_d \cdot \partial_a + h\partial_\gamma \cdot \partial_\beta] + \dots
\end{aligned}$$

yazılır. Son eşitlikteki parantez içinden,

$$\partial_a \cdot \partial_\beta = \partial_\beta \cdot \partial_a - h(\partial_a \cdot \partial_a + \partial_d \cdot \partial_a + \partial_\gamma \cdot \partial_\beta)$$

olarak bulunur. İşlem açık bir şekilde yapıldığında diğer komutasyon bağıntıları da elde edilir. \square

4.5 Süper Cartan-Maurer 1-Formları

Cartan-Maurer 1-formları, $\mathcal{O}(\mathrm{GL}_{h,h'}(1|1))$ Hopf süper cebirinin jeneratörlerinin ve 1-formların belirli bir kombinasyonundan oluşur. Bu bölümde, $\mathcal{O}(\mathrm{GL}_{h,h'}(1|1))$ Hopf süper cebirinin jeneratörleri ve onların diferansiyelleri ile Cartan-Maurer 1-formları arasındaki, Cartan-Maurer 1-formlarının kendi aralarındaki komutasyon bağıntılarını bulacağız.

4.5.1 Sağ-İnvariant Cartan-Maurer 1-Formları

Bu kısımda, $\mathcal{O}(\mathrm{GL}_{h,h'}(1|1))$ Hopf süper cebirine göre $(\Omega^\wedge, \mathbf{d})$ sağ-kovaryant diferansiyel hesabı göz önüne alarak sağ-invariant Cartan-Maurer 1-formlarıyla çalışacağız.

Tanım 4.5. Bir ω Cartan-Maurer 1-formu

$$\Delta_R(\omega) = \omega \otimes \mathbf{1}$$

özelliğine sahip ise ω ya sağ-invaryant Cartan-Maurer 1-formu denir.

$\mathcal{O}(\mathrm{GL}_{h,h'}(1|1))$ cebirinin jeneratörlerine tekabül eden sağ-invaryant Cartan-Maurer 1-formları her $f_k \in \mathcal{O}(\mathrm{GL}_{h,h'}(1|1))$ için

$$\omega_{f_k}^R := \omega^R(f_k) := \omega_k^R = m \circ (\mathbf{d} \otimes S)\Delta(f_k). \quad (4.21)$$

formülleri ile $\omega_k^R : \mathcal{O}(\mathrm{GL}_{h,h'}(1|1)) \rightarrow \Omega_R$ şeklindeki lineer tasvirlerdir. Bunlar açık olarak

$$\begin{aligned} \omega_1^R &= \mathbf{d}a \cdot A + \mathbf{d}\beta \cdot C, \\ \omega_2^R &= \mathbf{d}a \cdot B + \mathbf{d}\beta \cdot E, \\ \omega_3^R &= \mathbf{d}\gamma \cdot A + \mathbf{d}d \cdot C, \\ \omega_4^R &= \mathbf{d}\gamma \cdot B + \mathbf{d}d \cdot E, \end{aligned} \quad (4.22)$$

şeklinde yazılabilir.

Yukarıda verilen 1-formların sağ invaryant olduğunu göstermek zor değildir. Bir örnek olarak ω_1^R nin sağ-invaryant olduğunu Tanım 4.5 i kullanarak şu şekilde gösterebiliriz:

$$\begin{aligned} \Delta_R(\omega_1^R) &= \Delta_R(\mathbf{d}a \cdot A + \mathbf{d}\beta \cdot C) \\ &= \Delta_R(\mathbf{d}a) \cdot \Delta(A) + \Delta_R(\mathbf{d}\beta) \cdot \Delta(C) \\ &= (\mathbf{d}a \otimes a + \mathbf{d}\beta \otimes \gamma) \cdot (A \otimes A - C \otimes B) \\ &\quad + (\mathbf{d}a \otimes \beta + \mathbf{d}\beta \otimes d) \cdot (A \otimes C + C \otimes E) \\ &= \mathbf{d}a \cdot A \otimes (a \cdot A + \beta \cdot C) + \mathbf{d}a \cdot C(-a \cdot B - \beta \cdot E) \\ &\quad + \mathbf{d}\beta \cdot a \otimes (\gamma \cdot A + d \cdot C) + \mathbf{d}\beta \cdot C \otimes (\gamma \cdot B + d \cdot E) \\ &= \mathbf{d}a \cdot A \otimes \mathbf{1} + \mathbf{d}\beta \cdot C \otimes \mathbf{1} \\ &= (\mathbf{d}a \cdot A + \mathbf{d}\beta \cdot C) \otimes \mathbf{1} \\ &= \omega_1^R \otimes \mathbf{1}. \end{aligned}$$

Şimdi, $\mathcal{O}(\mathrm{GL}_{h,h'}(1|1))$ süper cebirinin jeneratörleri ile sağ-invaryant Cartan-Maurer 1-formları arasındaki (h, h') -deforme komutasyon bağıntılarını bulmak istiyoruz. Bu nedenle, önce aşağıdaki lemmaya ihtiyacımız olacak:

Lemma 4.3. T ve T^{-1} matrislerinin elemanları arasındaki (h, h') -deforme komutasyon bağıntıları

$$\begin{aligned}
A \cdot a &= a \cdot A + (d - a) \cdot (hB + h'C) + hh'[(D_{h,h'} - 1) + (D_{h,h'}^{-1} - 1)], & (4.23) \\
B \cdot a &= a \cdot B + h'(1 - D_{h,h'}), & C \cdot a &= a \cdot C + h(D_{h,h'} - 1), & E \cdot a &= a \cdot E, \\
A \cdot \beta &= \beta \cdot A + h'(1 - D_{h,h'}^{-1}), & B \cdot \beta &= -\beta \cdot B, & E \cdot \beta &= \beta \cdot E + h'(D_{h,h'} - 1), \\
C \cdot \beta &= -\beta \cdot C + (d - a) \cdot (hB + h'C) + hh'[(D_{h,h'} - 1) + (D_{h,h'}^{-1} - 1)], \\
A \cdot \gamma &= \gamma \cdot A + h(D_{h,h'}^{-1} - 1), & C \cdot \gamma &= -\gamma \cdot C, & E \cdot \gamma &= \gamma \cdot E + h(1 - D_{h,h'}), \\
B \cdot \gamma &= -\gamma \cdot B + (a - d)(hB + h'C) + hh'[(1 - D_{h,h'}) + (1 - D_{h,h'}^{-1})], \\
A \cdot d &= d \cdot A, & B \cdot d &= d \cdot B + h'(D_{h,h'}^{-1} - 1), & C \cdot d &= d \cdot C + h(1 - D_{h,h'}^{-1}), \\
E \cdot d &= d \cdot E + (a - d)(hB + h'C) + hh'[(1 - D_{h,h'}) + (1 - D_{h,h'}^{-1})]
\end{aligned}$$

şeklindedir. Burada $D_{h,h'} := \text{sdet}(T)$ dir.

İspat İstenilen bağıntılar, T^{-1} matrisinin elemanlarının açık ifadeleri yazılarak T matrisinin elemanlarıyla çarpımında (3.5) bağıntıları kullanılarak komutasyon işlemi uygulanmasıyla elde edilir. \square

Teorem 4.10. *Kabul edelim ki (Ω, Δ_R) , $\mathcal{O}(\text{GL}_{h,h'}(1|1))$ Hopf süper cebiri üzerinde sağ-kovaryant ikili-modülü ve $\{\omega_k^R\}_{k=1}^4$, Ω nın bütün sağ-invaryant elemanlarından oluşan vektör uzayının bir tabanıdır.*

Bu takdirde bir $\tilde{\mu} : \mathcal{O}(\text{GL}_{h,h'}(1|1)) \rightarrow M_4(\mathcal{O}(\text{GL}_{h,h'}(1|1)))$ lineer tasviri ile

$$\omega_i^R \cdot f_k = (-1)^{p(f_k)p(\omega_i^R)} \sum_{j=1}^4 \tilde{\mu}_{ij}(f_k) \cdot \omega_j^R, \quad k = 1, 2, 3, 4 \quad (4.24)$$

bağıntıları belirlenir. Burada $\tilde{\mu}$ tasvirinin $\mathcal{O}(\text{GL}_{h,h'}(1|1))$ cebirinin jeneratörlerine etkisi $f_1 = a, f_2 = \beta, f_3 = \gamma, f_4 = d \in \mathcal{O}(\text{GL}_{h,h'}(1|1))$ olmak üzere aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
\tilde{\mu}(f_{1,4}) &= \begin{pmatrix} 1 - hh' & h & h' & hh' \\ -h' & 1 & 0 & h' \\ h & 0 & 1 & -h \\ -hh' & h & h' & 1 + hh' \end{pmatrix} f_{1,4}, & (4.25) \\
\tilde{\mu}(f_{2,3}) &= \begin{pmatrix} 1 - hh' & -h & -h' & hh' \\ h' & 1 & 0 & -h' \\ -h & 0 & 1 & -h \\ -hh' & -h & -h' & 1 + hh' \end{pmatrix} f_{2,3}
\end{aligned}$$

İspat Sağ-invaryant Cartan-Maurer 1-formları ile $\mathcal{O}(\mathrm{GL}_{h,h'}(1|1))$ süper cebirinin jeneratörleri arasındaki komutasyon bağıntılarını (3.5), (4.7) ve (4.23) bağıntılarını kullanarak, uzun işlemler sonucunda buluruz. Bu şekilde elde edilen komutasyon bağıntılarını, $\tilde{\mu}(\cdot)$ matrisleriyle (4.24) de olduğu gibi ifade ediyoruz. \square

Teorem 4.11. (i) $\tilde{\mu}$ tasviri her $f, g \in \mathcal{O}(\mathrm{GL}_{h,h'}(1|1))$ için

$$\tilde{\mu}_{ij}(f \cdot g) = \sum_{k=1}^4 (-1)^{p(g)[p(f_i)+p(f_k)]} \tilde{\mu}_{ik}(f) \cdot \tilde{\mu}_{kj}(g) \quad (4.26)$$

ile \mathbb{Z}_2 -dereceli \mathbb{K}' -lineer homomorfizmidir

(ii) $\tilde{\mu}$ tasviri, $\mathcal{O}(\mathrm{GL}_{h,h'}(1|1))$ cebirinin bir temsilidir.

Lemma 4.4. T^{-1} matrisinin elemanları ile $\mathcal{O}(\mathrm{GL}_{h,h'}(1|1))$ cebirinin jeneratörlerinin diferansiyelleri arasındaki komutasyon bağıntıları, her $G \in T^{-1}$ için

$$G \cdot \mathbf{d}f_j = (-1)^{p(G)p(\mathbf{d}f_j)} \sum_{i=1}^4 \mathbf{d}f_i \cdot \sigma_{ij}(G), \quad f_j \in \mathcal{O}(\mathrm{GL}_{h,h'}(1|1)) \quad (4.27)$$

formülleri ile tanımlı σ tasviri ile $A_4 = -hB - h'C + hh'E$, $A_5 = E - A$ ve $A_6 = -hB - h'B - hh'A$ olmak üzere aşağıdaki $\sigma(\cdot)$ matrisleri ile ifade edilebilir:

$$\sigma(A) = \begin{pmatrix} (1-2H)A + A_3 & h'A + hh'B & -hA - hh'C & -hh'A \\ hA + hh'C & (1-H)A + A_3 & 0 & hA - hh'C \\ h'a + hh'B & 0 & (1-H)A + A_3 & h'A + hB \\ hh'A & -h'a - hh'B & hA + hh'C & a + A_3 \end{pmatrix},$$

$$\sigma(B) = \begin{pmatrix} (1-H)B - h'A_5 & h'B & -hB - hh'A_5 & hh'B \\ hB - hh'A_5 & B + h'A_5 & 0 & hB - hh'A_5 \\ +h'B & 0 & B + h'A_5 & h'B \\ hh'B & -h'B & hB + hh'A_5 & (1+H)B - h'A_5 \end{pmatrix}, \quad (4.28)$$

$$\sigma(C) = \begin{pmatrix} (1+H)C - hA_5 & h'C + hh'A_5 & -hC & hh'C \\ hC & C + hA_5 & 0 & -hC \\ h'C - hh'A_5 & 0 & C + hA_5 & -h'C - hh'A_5 \\ hh'\gamma & -h'\gamma + hh'A_2 & h\gamma & (1-H)C - hA_5 \end{pmatrix},$$

$$\sigma(E) = \begin{pmatrix} E + A_6 & h'E + hh'B & -hE + hh'C & -hh'E \\ hE - hh'C & (1+H)E + A_6 & 0 & hE - hh'C \\ h'E + hh'C & 0 & (1+H)E + A_6 & h'E + hh'B \\ hh'E & -h'E - hh'B & hE - hh'C & (1+2H)E + A_6 \end{pmatrix}.$$

Sayfa düzeni için bazı matris girdilerinde $hh' := H$ olarak ifade edilmiştir.

İspat İstenilen bağıntıları elde etmek için $G \cdot \mathbf{d}f_j$ ifadesinde, her $G \in T^{-1}$ elemanının açık ifadesi yazılarak komutasyon işlemi yapılır. Örneğin,

$$A \cdot \mathbf{d}a = (a^{-1} + a^{-1}\beta d^{-1}\gamma^{-1}) \cdot \mathbf{d}a$$

ifadesinin komutasyon işlemi (4.7) ve (3.5) bağıntıları kullanılır. Elde edilen bağıntılar $\sigma(G)$ matrisleri ile ifade edilebilir. Ayrıca $\sigma(G)$ matrisleri, (4.9) ile verilen $\sigma(f_j)$ matrislerinin kullanılmasıyla da elde edilebilir. \square

Sağ-invaryant Cartan-Maurer formları ile $\mathcal{O}(\mathrm{GL}_{h,h'}(1|1))$ Hopf süper cebirinin jeneratörlerinin arasındaki komutasyon bağıntılarını bir $\tilde{\mu}$ lineer tasvirini kullanarak (4.24) formülü ile kompakt bir şekilde ifade ettik. Şimdi, $\mathcal{O}(\mathrm{GL}_{h,h'}(1|1))$ cebirinin jeneratörlerinin diferansiyelleri ile ilgili komutasyon bağıntılarını da bu şekilde ifade etmek istediğimizde aşağıdaki şekilde düşünürüz:

$\mathcal{O}(\mathrm{GL}_{h,h'}(1|1))$ süper cebiri üzerinde tanımlanan $\tilde{\mu}$ tasvirini bütün diferansiyel cebir üzerine genişletmek mümkündür: $\tilde{\mu}^\Omega : \Omega \longrightarrow M_4(\Omega)$ tasvirini, her $f \in \mathcal{O}(\mathrm{GL}_{h,h'}(1|1))$ için $\tilde{\mu}_{ij}^\Omega(f) := \tilde{\mu}_{ij}(f)$ olmak üzere

$$\tilde{\mu}_{ij}^\Omega(\mathbf{d}f) = \mathbf{d}\tilde{\mu}_{ij}(f) \quad (4.29)$$

şeklinde tanımlarız.

Teorem 4.12. $\mathcal{O}(\mathrm{GL}_{h,h'}(1|1))$ süper cebirinin jeneratörlerinin diferansiyelleri ve sağ-invaryant Cartan-Maurer 1-formları arasındaki komutasyon bağıntıları

$$\omega_i^R \wedge \mathbf{d}f = (-1)^{p(\omega_i^R)p(\mathbf{d}f)} \sum_{j=1}^4 \tilde{\mu}_{ji}^\Omega(\mathbf{d}f) \wedge \omega_j. \quad (4.30)$$

formülleriyle verilir.

İspat Sağ-invaryant Cartan-Maurer 1-formları ile $\mathcal{O}(\mathrm{GL}_{h,h'}(1|1))$ süper cebirinin jeneratörlerinin diferansiyelleri arasındaki bağıntılar komutasyon işlemi ile elde edilir. Örneğin,

$$\omega_1^R \cdot \mathbf{d}a = (\mathbf{d}a \cdot A + \mathbf{d}\beta \cdot C) \cdot \mathbf{d}a$$

ifadesinde, elemanların komutasyon işlemi için (4.27) ve (4.15) bağıntılarına ihtiyaç olduğu görülmektedir. Uzun işlemler sonucunda elde edilen komutasyon bağıntıları, $\mathcal{O}(\mathrm{GL}_{h,h'}(1|1))$ süper cebirinin jeneratörlerinin temsilleri olan (4.25) ile verilen $\tilde{\mu}$ matrislerine d tasvirinin uygulanmasıyla elde edilen matrisler kullanılarak (4.30) formülü ile ifade edilebilir. \square

Lemma 4.5. *Cartan-Maurer 1-formları ile T^{-1} matrisinin matris elemanları arasındaki komutasyon bağıntıları*

$$\omega_i^R \cdot G_k = (-1)^{p(G_k)p(\omega_i^R)} \sum_{j=1}^4 \tilde{\mu}_{ij}(G_k) \cdot \omega_j^R, \quad k = 1, 2, 3, 4 \quad (4.31)$$

bağıntıları ile belirlenir. Burada $\tilde{\mu}$ tasvirinin $\mathcal{O}(\mathrm{GL}_{h,h'}(1|1))$ cebirinin jeneratörlerine etkisi $G_1 = A, G_2 = B, G_3 = C, G_4 = E \in \mathcal{O}(\mathrm{GL}_{h,h'}(1|1))$ olmak üzere aşağıdaki gibidir:

$$\tilde{\mu}(G_{1,4}) = \begin{pmatrix} 1 - hh' & h & h' & hh' \\ -h' & 1 & 0 & h' \\ h & 0 & 1 & -h \\ -hh' & h & h' & 1 + hh' \end{pmatrix} G_{1,4}, \quad (4.32)$$

$$\tilde{\mu}(G_{2,3}) = \begin{pmatrix} 1 - hh' & -h & -h' & -hh' \\ -h' & 1 & 0 & h' \\ h & 0 & 1 & -h \\ -hh' & -h & -h' & -1 - hh' \end{pmatrix} G_{2,3}$$

İspat İstenilen bağıntıları elde etmek için komutasyon işlemi uygulanır. Örneğin

$$\omega_1^R \cdot A = \omega_1^R \cdot (a^{-1} + a^{-1}\beta d^{-1}\gamma a^{-1})$$

eşitliğinde (4.24) ve (3.5) bağıntıları kullanılarak istenilen bağıntılar elde edilir. Elde edilen bağıntılar (4.31) formülü ile ifade edilebilir. \square

Teorem 4.13. *Sağ-invaryant Cartan-Maurer 1-formları arasındaki komutasyon bağıntıları aşağıdaki gibidir:*

$$\omega_i^R \wedge \omega_j^R = (-1)^{p(\omega_i^R)p(\omega_j^R)} \omega_j^R \wedge \omega_i^R, \quad (1 \leq i, j \leq 4). \quad (4.33)$$

İspat Sağ-invaryant Cartan-Maurer 1-formlarının kendi aralarındaki komutasyon bağıntılarını bulmak için, örneğin

$$\omega_1^R \cdot \omega_2^R = \omega_1^R \cdot (\mathbf{d}a \cdot B + \mathbf{d}\beta \cdot E)$$

şeklinde yazarız. Burada ifade edilen eşitlikteki elemanların komutasyon işlemi için (4.30) ve (4.31) bağıntılarını kullanırız. \square

4.5.2 Sol-invaryant Cartan-Maurer 1-Formları

Bu kısımda, $\mathcal{O}(\mathrm{GL}_{h,h'}(1|1))$ Hopf süper cebirine göre $(\Omega^\wedge, \mathbf{d})$ sol-kovaryant diferansiyel hesabı göz önüne alarak sol-invaryant Cartan-Maurer 1-formlarıyla çalışacağız.

Tanım 4.6. Bir Cartan-Maurer ω 1-formu

$$\Delta_L(\omega) = \mathbf{1} \otimes \omega.$$

özelliğine sahip ise ω ya sol-invaryant Cartan-Maurer 1-form denir.

$\mathcal{O}(\mathrm{GL}_{h,h'}(1|1))$ Hopf süper cebirinin jeneratörlerine tekabül eden sol-invaryant Cartan-Maurer 1-formları her $f_k \in \mathcal{O}(\mathrm{GL}_{h,h'}(1|1))$ için $S'(f_k) = (-1)^{p(f_k)} S(f_k)$ olmak üzere

$$\omega_{f_k}^L := \omega^L(f_k) := \omega_k^L = m \circ (S' \otimes \mathbf{d})\Delta(f_k), \quad (4.34)$$

formülleri ile $\omega_k^L : \mathcal{O}(\mathrm{GL}_{h,h'}(1|1)) \rightarrow \Omega_L$ şeklindeki lineer tasvirlerdir. Bunlar açık olarak,

$$\begin{aligned} \omega_1^L &= A \cdot \mathbf{d}a - B \cdot \mathbf{d}\gamma, & \omega_2^L &= A \cdot \mathbf{d}\beta - B \cdot \mathbf{d}d, \\ \omega_3^L &= E \cdot \mathbf{d}\gamma - C \cdot \mathbf{d}a, & \omega_4^L &= E \cdot \mathbf{d}d - C \cdot \mathbf{d}\beta, \end{aligned} \quad (4.35)$$

şeklinde yazılabilir.

$\mathcal{O}(\mathrm{GL}_{h,h'}(1|1))$ Hopf süper cebirini temsil eden bir matris elde etmek mümkündür: [7] den biliyoruz ki, \mathcal{A} bir Hopf cebiri ise

$$\Delta_R(\omega_j^L) = \sum_i \omega_i^L \otimes M_{ji}$$

olacak şekilde bir M adjoint temsili vardır. Ve bu M adjoint temsili

$$\Delta(M_{ji}) = \sum_k M_{jk} \otimes M_{ki}, \quad \epsilon(M_{ji}) = \delta_{ji}$$

özelliklerine sahiptir. Bu durum, $\mathcal{O}(\mathrm{GL}_{h,h'}(1|1))$ Hopf süper cebiri için de doğrudur. Bu taktirde, $\mathcal{O}(\mathrm{GL}_{h,h'}(1|1))$ Hopf süper cebirinin adjoint temsili

$$M = \begin{pmatrix} Aa & A\beta & Ca & C\beta \\ A\gamma & Ad & 0 & -Cd \\ -Ba & 0 & Ea & E\beta \\ B\gamma & Bd & E\gamma & Ed \end{pmatrix} \quad (4.36)$$

şeklindedir.

Ayrıca, önceki kısımda olduğu gibi $\mathcal{O}(\mathrm{GL}_{h,h'}(1|1))$ süper cebirinin jeneratörlerinin ve onların diferansiyellerinin matris temsilleri elde edilebilir. Bu matris temsilleri aşağıda verilmiştir.

Sol-invaryant Cartan-Maurer 1-formları ile $\mathcal{O}(\mathrm{GL}_{h,h'}(1|1))$ Hopf süper cebirinin jeneratörleri ve onların diferansiyelleri arasındaki komutasyon bağıntıları, önceki kısımdakine benzer şekilde elde edileceğinden benzer ispata yer vermeyeceğiz.

Bu kısımda, sonraki bölümde sol yapılardan ilerleyeceğimiz için μ lineer tasviri ve onun tanımlı olduğu kümenin genişletilmesine odaklanacağız. Buna, μ lineer tasvirini ifade ederek başlayalım:

Teorem 4.14. *Kabul edelim ki (Ω, Δ_L) , $\mathcal{O}(\mathrm{GL}_{h,h'}(1|1))$ Hopf süper cebiri üzerinde sol-kovaryant ikili-modül ve $\{\omega_k^L\}_{k=1}^4$, Ω nun bütün sol-invaryant elemanlarından oluşan vektör uzayının bir tabanıdır. Bu taktirde bir $\mu : \mathcal{O}(\mathrm{GL}_{h,h'}(1|1)) \rightarrow M_4(\mathcal{O}(\mathrm{GL}_{h,h'}(1|1)))$ lineer tasviri ile*

$$f \cdot \omega_i^L = \sum_{j=1}^4 (-1)^{p(f)p(\omega_j^L)} \omega_j^L \cdot \mu_{ij}(f) \quad (4.37)$$

bağıntıları belirlenir. Burada μ tasvirinin $\mathcal{O}(\mathrm{GL}_{h,h'}(1|1))$ cebirinin jeneratörlerine etkisi $f_1 = a, f_2 = \beta, f_3 = \gamma, f_4 = d \in \mathcal{O}(\mathrm{GL}_{h,h'}(1|1))$ için

$$\mu(f_i) = f_i \begin{pmatrix} 1 - hh' & -h' & h & -hh' \\ -h & 1 & 0 & -h \\ -h' & 0 & 1 & -h' \\ hh' & h' & -h & 1 + hh' \end{pmatrix}. \quad (4.38)$$

şeklindedir.

Tanım 4.7. [34] Bir $\mu(f)$ süper matrisinin sıfırdan farklı her bir elemanının derecesi

$$p(\mu_{ij}(f)) = p(f) - p(f_i) + p(f_j)$$

dir.

Teorem 4.15. (i) $\mu : \mathcal{O}(\mathrm{GL}_{h,h'}(1|1)) \rightarrow M_4(\mathcal{O}(\mathrm{GL}_{h,h'}(1|1)))$ tasviri her $f, g \in \mathcal{O}(\mathrm{GL}_{h,h'}(1|1))$ için

$$\mu(f \cdot g) = \sum_{k=1}^4 (-1)^{p(g)[p(f_k) - p(f_i)]} \mu_{ik}(f) \mu_{kj}(g), \quad (4.39)$$

ile \mathbb{Z}_2 -dereceli \mathbb{K}' -lineer homomorfizmidir.

(ii) μ tasviri, $\mathcal{O}(\mathrm{GL}_{h,h'}(1|1))$ cebirinin bir temsilidir.

$\mathcal{O}(\mathrm{GL}_{h,h'}(1|1))$ süper cebiri üzerinde tanımlanan μ tasvirini bütün diferansiyel cebir üzerine genişletmek mümkündür: $\mu^\Omega : \Omega \longrightarrow M_4(\Omega)$ tasvirini, her $f \in \mathcal{O}(\mathrm{GL}_{h,h'}(1|1))$ için $\mu_{ij}^\Omega(f) := \mu_{ij}(f)$ olmak üzere

$$\mu_{ij}^\Omega(\mathbf{d}f) = \mathbf{d}\mu_{ij}(f) \quad (4.40)$$

şeklinde tanımlarız.

Teorem 4.16. $\mathcal{O}(\mathrm{GL}_{h,h'}(1|1))$ süper cebirinin jeneratörlerinin diferansiyelleri ve sol-invariant Cartan-Maurer 1-formları arasındaki komutasyon bağıntıları

$$\mathbf{d}f \wedge \omega_j^L = \sum_{i=1}^4 (-1)^{p(\mathbf{d}f)p(\omega_i^L)} \omega_i^L \wedge \mu_{ij}^\Omega(\mathbf{d}f) \quad (4.41)$$

formülleriyle verilir.

Teorem 4.17. (i) μ^Ω tasviri her $f, g \in \mathcal{O}(\mathrm{GL}_{h,h'}(1|1))$ için

1. $\mu_{ij}^\Omega(\mathbf{d}f \wedge \mathbf{d}g) = \sum_{k=1}^4 (-1)^{p(\mathbf{d}g)[p(\mathbf{d}f_k) - p(\mathbf{d}f_i)]} \mu_{ik}^\Omega(\mathbf{d}f) \wedge \mu_{kj}^\Omega(\mathbf{d}g),$
2. $\mu_{ij}^\Omega(f \cdot \mathbf{d}g) = \sum_{k=1}^4 (-1)^{p(\mathbf{d}g)[p(f_k) - p(f_i)]} \mu_{ik}(f) \cdot \mu_{kj}^\Omega(\mathbf{d}g),$
3. $\mu_{ij}^\Omega(\mathbf{d}f \cdot g) = \sum_{k=1}^4 (-1)^{p(g)[p(f_k) - p(f_i)]} \mu_{ik}^\Omega(\mathbf{d}f) \cdot \mu_{kj}(g)$

ile \mathbb{Z}_2 -dereceli \mathbb{K}^l -lineer homomorfizmidir.

(ii) μ^Ω tasviri $\Omega(\mathcal{O}(\mathrm{GL}_{h,h'}(1|1)))$ cebirinin bir temsilidir.

İspat (i1) $\Omega(\mathcal{O}(\mathrm{GL}_{h,h'}(1|1)))$ diferansiyel cebirinin asosyatif olması gereği

$$(\mathbf{d}f \wedge \mathbf{d}g) \wedge \omega_j^L = \mathbf{d}f \wedge (\mathbf{d}g \wedge \omega_j^L)$$

eşitliğin gerçekleşmelidir. Burada (4.41) kullanılarak, eşitliğin sol tarafı ve sağ tarafı, sırasıyla

$$\begin{aligned} (\mathbf{d}f \wedge \mathbf{d}g) \wedge \omega_j^L &= \sum_{i=1}^4 (-1)^{p(\mathbf{d}f \wedge \mathbf{d}g)p(\omega_i^L)} \omega_i^L \wedge \mu_{ij}^\Omega(\mathbf{d}f \wedge \mathbf{d}g) \\ \mathbf{d}f \wedge (\mathbf{d}g \wedge \omega_j^L) &= \mathbf{d}f \wedge \left[\sum_{k=1}^4 (-1)^{p(\mathbf{d}g)p(\omega_k^L)} \omega_k^L \wedge \mu_{kj}^\Omega(\mathbf{d}g) \right] \\ &= \sum_{k,i=1}^4 (-1)^{p(\mathbf{d}g)p(\omega_k^L) + p(\mathbf{d}f)p(\omega_i^L)} \omega_i^L \wedge \mu_{ik}^\Omega(\mathbf{d}f) \wedge \mu_{kj}^\Omega(\mathbf{d}g) \end{aligned}$$

şeklinde yazılır. İki tarafın eşitlenmesi durumunda istenilen sonuca ulaşılır.

Diğer özellikler de benzer düşünce yapısı ile gösterilir.

ii) $\mu^\Omega(\mathbf{d}f_i)$ matrisler, (4.15) bağıntılarını korur. \square

Ayrıca, $f, g \in \mathcal{O}(\mathrm{GL}_{h,h'}(1|1))$ için başka bir matris temsil kümesi bulmak da mümkündür. Öyle ki, \mathcal{A} bir Hopf cebiri ise [7] den biliyoruz ki, $\mu(T) = T \cdot F(T)$ olacak şekilde bir $F : \mathcal{A} \rightarrow M_n(\mathbb{C})$ tasviri mevcuttur. Bu durum Hopf süper cebiri için de doğrudur:

$\mathcal{O}(\mathrm{GL}_{h,h'}(1|1))$ Hopf süper cebiri için $\mu(T) = (-1)^{p(T)}T \cdot F(T)$ olacak şekilde bir $F : \mathcal{O}(\mathrm{GL}_{h,h'}(1|1)) \rightarrow M_4(\mathbb{K}')$ lineer tasviri mevcuttur. Burada, $\mathcal{O}(\mathrm{GL}_{h,h'}(1|1))$ cebirinin jeneratörlerine etkisi

$$F(a) = \begin{pmatrix} 1 - hh' & -h' & h & -hh' \\ -h & 1 & 0 & h \\ -h' & 0 & 1 & -h' \\ hh' & h' & -h & 1 + hh' \end{pmatrix} = F(d), \quad F(\beta) = [0]_{4 \times 4} = F(\gamma).$$

şeklindeki matrislerle belirlenen bu F lineer tasviri

$$F_{ij}(f \cdot g) = (-1)^{p(f)p(g)} \sum_{k=1}^4 F_{ik}(f) \cdot F_{kj}(g)$$

çarpımı ile (3.5) bağıntılarını sağlar.

4.6 Vektör Alanlarının Lie Süper Cebiri

Klasik diferansiyel geometride bir Lie grubu, hem bir grup yapısına ve hem de bir manifold yapısına sahiptir. Bu durum Lie süper grupları için ise, süper grup ve süper manifold yapısıyla gerçekleşir.

Lie grubunun teğet uzayı, bir Lie süper parantezi ile bir Lie süper cebiridir. Durum, komutatif olmayan geometri de çok farklı değildir.

Bu bölümde, $\mathrm{GL}_{h,h'}(1|1)$ süper grubunun Lie süper cebirini elde edeceğiz.

$\mathrm{GL}_{h,h'}(1|1)$ süper grubunun $\Omega(\mathcal{T}\mathrm{GL}_{h,h'}(1|1))$ ile gösterilen teğet uzayı, süper grubun özdeşlikteki teğet vektörlerinden oluşan bir süper vektör uzayıdır. Bu süper vektör uzayının tabanı $\{\partial_a, \partial_\beta, \partial_\gamma, \partial_d\}$ kümesidir. $\Omega(\mathcal{T}\mathrm{GL}_{h,h'}(1|1))$ uzayı, (4.20) bağıntılarıyla bu taban ile gerilen $\mathcal{O}(\mathrm{GL}_{h,h'}(1|1))$ -ikili-modüldür. Aynı şekilde, $\Omega(\mathcal{T}^*\mathrm{GL}_{h,h'}(1|1))$ kotanjant uzayı (ki bu teğet uzaya dualdir), (4.15) bağıntılarıyla $\{\mathbf{d}a, \mathbf{d}\beta, \mathbf{d}\gamma, \mathbf{d}d\}$ tabanı ile gerilen bir $\mathcal{O}(\mathrm{GL}_{h,h'}(1|1))$ -ikili-modüldür. Dolayısı ile

adi manifoldlar teorisinin tekabül eden nesnelere benzer şekilde bir iç çarpım tanımlayabiliriz: $\Omega(\mathcal{T}GL_{h,h'}(1|1))$ ve $\Omega(\mathcal{T}^*GL_{h,h'}(1|1))$ arasındaki genel iç çarpım

$$\partial_i(\mathbf{d}f_j) := \langle \partial_i, \mathbf{d}f_j \rangle = \delta_{ij}. \quad (4.42)$$

şeklindedir.

Ayrıca sol-invaryant Cartan-Maurer 1-formlarını,

$$\omega = \sum_i (-1)^{p(f_i)} S(f_i) \cdot \mathbf{d}f_i, \quad f_i \in \mathcal{O}(GL_{h,h'}(1|1))$$

şeklinde yazabiliriz.

$T \in GL_{h,h'}(1|1)$ için kısım (3.3) de verilen Δ tasvirinin etkisini Sweedler gösterimi ile bir $f_i \in \mathcal{O}(GL_{h,h'}(1|1))$ için

$$\Delta(f) = \sum f_{(1)} \otimes f_{(2)}$$

şeklinde ifade edebiliriz. Bu mükemmel gösterimi aşağıdaki teoremin ispatında kullanacağız.

Teorem 4.18. (4.18) ifadesine denk olarak, $\mathcal{O}(GL_{h,h'}(1|1))$ Hopf süper cebirinin jeneratörlerinin diferansiyellerini vektör alanları cinsinden, $\chi_i(f_j) = \delta_{ij}$ olmak üzere

$$\mathbf{d}f = \sum_{i=1}^4 (-1)^{p(\chi_i)p(f_{(1)})} \omega_i [m \circ (\text{id} \otimes \chi_i) \Delta(f)] \quad (4.43)$$

şeklinde ifade edilebilen $\chi_i : \mathcal{O}(GL_{h,h'}(1|1)) \rightarrow \mathbb{K}'$ lineer fonksiyonelleri vardır.

İspat İstenileni iki adımda gerçekleştireceğiz:

İlk adımda, χ_i lerin $\mathcal{O}(GL_{h,h'}(1|1))$ deki jeneratörlerindeki değerini buluyoruz.

Örneğin, (4.43) formülünü $f = a$ için

$$\begin{aligned} \mathbf{d}a &= \sum_{i=1}^4 (-1)^{p(\chi_i)p(f_{(1)})} \omega_i [m \circ (\text{id} \otimes \chi_i) \Delta(a)] \\ &= \omega_1 [a\chi_1(a) + \beta\chi_1(\gamma)] + \omega_2 [a\chi_2(a) - \beta\chi_2(\gamma)] \\ &\quad + \omega_3 [a\chi_3(a) - \beta\chi_3(\gamma)] + \omega_4 [a\chi_4(a) + \beta\chi_4(\gamma)] \\ &= a[(1 - hh')\omega_1 + h\omega_2 + h'\omega_3 + hh'\omega_4]\chi_1(a) \\ &\quad + \beta[(hh' - 1)\omega_1 - h\omega_2 - h'\omega_3 - hh'\omega_4]\chi_1(\gamma) \\ &\quad + a[\omega_2 + h'(\omega_4 - \omega_1)]\chi_2(a) - \beta[\omega_2 + h'(\omega_4 - \omega_1)]\chi_2(\gamma) \\ &\quad + a[\omega_3 + h(\omega_1 - \omega_4)]\chi_3(a) - \beta[\omega_3 + h(\omega_1 - \omega_4)]\chi_3(\gamma) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + a[(1 + hh')\omega_4 + h\omega_2 + h'\omega_3 - hh'\omega_1]\chi_4(a) \\
& + \beta[-(1 + hh')\omega_4 - h\omega_2 - h'\omega_3 + hh'\omega_1]\chi_4(\gamma) \\
& = a \cdot \omega_1[(1 - hh')\chi_1(a) + h'\chi_2(a) - h\chi_3(a) - hh'\chi_4(a)] \\
& + \beta \cdot \omega_1[(hh' - 1)\chi_1(\gamma) - h'\chi_2(\gamma) + h\chi_3(\gamma) - hh'\chi_4(\gamma)] \\
& + a \cdot \omega_2[\chi_2(a) + h(\chi_1(a) + \chi_4(a))]\beta \cdot \omega_2[-\chi_2(\gamma) - h(\chi_1(\gamma) + \chi_4(\gamma))] \\
& + a \cdot \omega_3[\chi_3(a) + h'(\chi_1(a) + \chi_4(a))]\beta \cdot \omega_3[-\chi_3(\gamma) - h'(\chi_1(\gamma) + \chi_4(\gamma))] \\
& + a \cdot \omega_4[hh'\chi_1(a) - h'\chi_2(a) + h\chi_3(a) - (1 + hh')\chi_4(a)] \\
& + \beta \cdot \omega_4[-hh'\chi_1(\gamma) + h'\chi_2(\gamma) - h\chi_3(\gamma) - (1 + hh')\chi_4(\gamma)]
\end{aligned}$$

şeklinde açabiliriz. Aynı zamanda (4.34) eşitliğinden biliyoruz ki

$$\mathbf{d}a = a \cdot \omega_1 - \beta \cdot \omega_3$$

şeklinde yazılabilir. Bu iki eşitlik karşılaştırıldığında $\chi_i(a)$ ve $\chi_i(\gamma)$ değerleri bulunur.

Aynı işlem, $\mathcal{O}(GL_{h,h'}(1|1))$ cebirinin diğer jeneratörleri için de yapıldığında χ_i fonksiyonlarının jeneratörlere etkisini

$$\begin{aligned}
\chi_1(a) &= 1 - hh', & \chi_1(\beta) &= -h', & \chi_1(\gamma) &= h, & \chi_1(d) &= -hh', \\
\chi_2(a) &= -h, & \chi_2(\beta) &= 1, & \chi_2(\gamma) &= 0, & \chi_2(d) &= -h, \\
\chi_3(a) &= -h', & \chi_3(\beta) &= 0, & \chi_3(\gamma) &= 1, & \chi_3(d) &= -h', \\
\chi_4(a) &= hh', & \chi_4(\beta) &= h', & \chi_4(\gamma) &= -h, & \chi_4(d) &= 1 + hh'.
\end{aligned} \tag{4.44}$$

olarak elde ederiz.

İkinci adım olarak χ_i lineer fonksiyonlarının, $\mathcal{O}(GL_{h,h'}(1|1))$ cebirinin temsilleri olduğunu gösteriyoruz. Bunun için her $f, g \in \mathcal{O}(GL_{h,h'}(1|1))$ için

$$\chi_i(f \cdot g) = \chi_i(f)\epsilon(g) + (-1)^{p(f)p(\chi_i)} \sum_j F_{ij}(f)\chi_j(g) \tag{4.45}$$

eşitliğinin kullanırız [35]. Örneğin, $f = a$ ve $g = \beta$ için

$$\begin{aligned}
\chi_1(a \cdot \beta) &= \chi_1(a)\epsilon(\beta) + (-1)^{p(a)p(\chi_1)} \sum_j F_{1j}(a)\chi_j(\beta) \\
&= (1 - hh') \cdot 0 + (1 - hh') \cdot (-h') + (-h') \cdot (1) + (h) \cdot (0) + (hh')(h') \\
&= -2h'
\end{aligned}$$

olarak bulunur. □

Yukarıdaki teorem sonucunda, $\{\omega_k\}$ nın dual tabanı $\{\chi_j\}$ olmak üzere (4.42) ile verilen iç çarpımı

$$\chi_j(\omega_k) := \langle \chi_j, \omega_k \rangle = \delta_{jk}. \quad (4.46)$$

şeklinde ifade edebiliriz.

Klasik durumda, eğer χ_i ler birer Lie cebir jeneratörü ise, onların Lie parantezleri

$$[\chi_i, \chi_j] = \chi_i \chi_j - \chi_j \chi_i$$

olmak üzere

$$[\chi_i, \chi_j] = \sum_k C_{ij}^k \chi_k, \quad (4.47)$$

ile verilir. Buradaki C_{ij}^k lar Lie yapı sabitleridir.

Değişmeli olmayan süper geometrideki durum, aşağıdaki teorem ile verilmiştir:

Teorem 4.19. *Yukarıda tanımlanan χ_i ler bir Lie süper cebiri oluşturur.*

İspat Klasik süper geometriden χ_i jeneratörlerinin Lie süper parantezinin

$$[\chi_i, \chi_j] = \chi_i \chi_j - (-1)^{p(\chi_i)p(\chi_j)} \chi_j \chi_i$$

şeklinde olduğunu biliyoruz. Değişmeli olmayan süper geometride ise, deforme edilmiş Lie süper parantezi

$$[\chi_i, \chi_j]_\Lambda = \chi_i \chi_j - (-1)^{p(\chi_i)p(\chi_j)} \sum_{m,n} \Lambda_{ij}^{mn} \chi_m \chi_n$$

olmak üzere

$$[\chi_i, \chi_j]_\Lambda = (-1)^{p(\chi_i)p(\chi_j)} \sum_k C_{ij}^k \chi_k,$$

şeklinde tanımlarız. Buradaki Λ matrisi ve C_{ij}^k yapı sabitlerini

$$C_{ij}^k = \chi_i(S(M_{jk})) \quad \text{and} \quad \Lambda_{ij}^{mn} = F_{in}(S(M_{jm})) \quad (4.48)$$

formüllerinden bulabiliriz. Gerçekten, (4.36) ile verilen $M = (M_{ij})$ adjoint temsilini kullanarak C_{ij}^k yapı sabitlerinden sıfır olmayanları

$$C_{23}^1 = -1, \quad C_{12}^2 = 1, \quad C_{24}^2 = 1, \quad C_{13}^3 = -1, \quad C_{34}^3 = -1, \quad C_{23}^4 = -1, \quad (4.49)$$

$$C_{32}^1 = -1, \quad C_{21}^1 = -1, \quad C_{42}^2 = -1, \quad C_{31}^3 = 1, \quad C_{43}^3 = 11, \quad C_{32}^4 = -1,$$

ve Λ matrisinin sıfır olmayan elemanlarını

$$\Lambda_{ij}^{ji} = 1, \quad i, j = 1, 2, 3, 4 \quad (4.50)$$

şeklinde buluruz. □

Teorem 4.20. (i) χ_i Lie süper cebir jeneratörlerinin $\mathcal{O}(\mathrm{GL}_{h,h'}(1|1))$ süper cebirinin jeneratörlerine etkisi

$$\chi_i * f = (-1)^{p(\chi_i)p(f)} m(\mathrm{id} \otimes \chi_i) \Delta(f). \quad (4.51)$$

formülü ile verilir.

(ii) Lie süper cebir jeneratörlerinin $\mathcal{O}(\mathrm{GL}_{h,h'}(1|1))$ cebirinin jeneratörleri ile olan (h, h') -deforme komutasyon bağıntıları her $f \in \mathcal{O}(\mathrm{GL}_{h,h'}(1|1))$ için

$$\chi_i \cdot f = \chi_i * f + (-1)^{p(f)p(\chi_i)} \sum_j \mu_{ij}(f) \cdot \chi_j \quad (4.52)$$

şeklindedir.

5

$O(\mathrm{GL}_{h,h'}(1|1))$ HOPF SÜPER CEBİRİ ÜZERİNE CARTAN HESAP

Bu bölümde, iç türevler ve Lie türevleriyle ilgili komutasyon bağıntılarını elde ederek diferansiyel hesabı genişleteceğiz. Bu nedenle önce, süper geometrideki iç türevler ve Lie türevleri kavramını kısaca tanıtalım. İkili-kovaryant ikili-modül yapısına sahip olan $\Omega(\mathcal{TGL}_{h,h'}(1|1))$ diferansiyel cebirinin sol etkisini kullanmayı tercih ettiğimizden, sol-invaryant Cartan-Maurer 1-formları ve bu 1-formların duali olan vektör alanlarıyla çalışacağız.

5.1 Dış Türev

$\Omega(\mathcal{A})$, bir diferansiyel cebir olsun. Bir \mathbb{Z}_2 -dereceli dış türev, ki onu D ile göstereceğiz, k -formu $(k+1)$ formuna dönüştüren bir lineer tasvir olarak tanımlanır. Yani, $\Omega(\mathcal{A})$ diferansiyel cebiri $f_0 \cdot Df_1 \wedge Df_2 \wedge \cdots \wedge Df_k$ şeklindeki elemanlarla gerilir. $D : \Omega(\mathcal{A}) \rightarrow \Omega(\mathcal{A})$ lineer tasviri $\Omega^0(\mathcal{A}) := \mathcal{A}$ olmak üzere $\forall f, g \in \mathcal{A}$ ve $u, v \in \Omega(\mathcal{A})$ için

$$\begin{aligned} D(\mathbf{1}_{\mathcal{A}}) &= 0, \\ D(f \cdot g) &= (Df) \cdot g + (-1)^{p(f)} f \cdot Dg, \quad (\text{Leibniz kural}) \\ D(u \wedge v) &= (Du) \wedge v + (-1)^{p(u)} u \wedge (Dv) \\ &\equiv \mathbf{d}u \wedge v + (-1)^{p(u)} u \wedge (\mathbf{d}v) \end{aligned}$$

şartlarını sağlar (Genelde olduğu gibi, burada da $Du = \mathbf{d}u$ olduğu kabul edilmiştir). Dolayısıyla,

$$Du = \sum_i \mathbf{d}a_j \partial_{a_j}(u), \quad , \quad u, a_j \in \mathcal{A}$$

yazabiliriz. Bir u diferansiyel formu ve $f \in \mathcal{A}$ için aşağıdaki kurallar yazılır:

$$Du = \mathbf{d}u + (-1)^{p(u)} uD, \quad Df = \mathbf{d}f + (-1)^{p(f)} fD.$$

5.2 Süper İç Türevler

X , bir M süper manifold üzerinde süper vektör alanı olsun. Bir süper iç türev, bir süper vektör alanının bir diferansiyel form ile daraltılması olarak tanımlanır ve \mathbf{i}_X ile gösterilir. Yani \mathbf{i}_X , dış cebir üzerinde $(k-1)$ formunu k -formunu götüren -1 dereceli bir ters-türevdir ve α_1 ile α_2 birer diferansiyel form olmak üzere Leibniz kuralı

$$\mathbf{i}_X(\alpha_1 \wedge \alpha_2) = (\mathbf{i}_X \alpha_1) \wedge \alpha_2 + (-1)^{p(\alpha_1)p(\mathbf{i}_X)} \alpha_1 \wedge (\mathbf{i}_X \alpha_2)$$

şeklindedir. Ayrıca süper iç türevin, diferansiyel cebirinin elemanlarına etkisi

$$\mathbf{i}_X(f) = 0, \quad \mathbf{i}_X(\mathbf{d}f) = X(f) \quad \text{and} \quad \mathbf{i}_{X_i}(\omega_j) = \delta_{ij}.$$

şeklindedir (Burada f , bir 0-formdur).

Bu bölümde, süper iç türevler ile $\mathcal{O}(\text{GL}_{h,h'}(1|1))$ Hopf süper cebirin jeneratörleri, bunların diferansiyelleri ve Cartan-Maurer 1-formları arasındaki (h, h') -deforme komutasyon bağıntılarını elde edeceğiz.

Tutarlılığın gereği olarak, $\mathbf{i}_{\chi_{1,4}}$ ve $\mathbf{i}_{\chi_{2,3}}$ iç türevlerinin derecelerinin sırasıyla 1 ve 0 olması gerekmektedir.

Teorem 5.1. $\mathcal{O}(\text{GL}_{h,h'}(1|1))$ cebirinin jeneratörleri ile süper iç türevler arasındaki komutasyon bağıntıları, her $f \in \mathcal{O}(\text{GL}_{h,h'}(1|1))$ için

$$\mathbf{i}_{\chi_i} \cdot f = (-1)^{p(f)p(\mathbf{i}_{\chi_i})} \sum_{j=1}^4 \mu_{ij}(f) \cdot \mathbf{i}_{\chi_j}, \quad (5.1)$$

formülü ile verilir.

İspat $\mathcal{O}(\text{GL}_{h,h'}(1|1))$ Hopf süper cebirinin jeneratörleri ile iç türevler arasındaki muhtemel komutasyon bağıntılarını

$$\mathbf{i}_{\chi_i} \cdot f = \sum_k^4 \widehat{\mu}_{ik}(f) \cdot \mathbf{i}_{\chi_k}$$

şeklinde ifade edebiliriz. Dolayısıyla amacımız, $\widehat{\mu}_{ik}(f)$ ile μ_{ik} tasvirleri arasındaki ilişkiyi bulmaktır. Bunun için, $\mathbf{i}_{X_i}(\omega_j) = \delta_{ij}$ gerçeğini de dikkate alarak, iç türevleri (4.37) bağıntılarının her iki tarafına uyguluyoruz:

$$0 = \mathbf{i}_{\chi_i} \cdot [f \cdot \omega_j - \sum_k^4 (-1)^{p(f)p(\omega_k)} \omega_k \cdot \mu_{kj}(f)]$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_k^4 \widehat{\mu}_{ik}(f) \cdot \mathbf{i}_{\chi_k}(\omega_j) - \sum_k^4 (-1)^{p(f)p(\omega_k)} \mathbf{i}_{\chi_i}(\omega_k) \cdot \mu_{kj}(f) \\
&= \widehat{\mu}_{ij}(f) - (-1)^{p(f)p(\omega_i)} \mu_{ij}(f).
\end{aligned}$$

Son eşitlik istenileni verir. \square

Teorem 5.2. $\mathcal{O}(\mathrm{GL}_{h,h'}(1|1))$ süper cebirinin jeneratörlerinin diferansiyelleri ile iç türevler arasındaki komutasyon bağıntıları her $f \in \mathcal{O}(\mathrm{GL}_{h,h'}(1|1))$ için

$$\mathbf{i}_{\chi_i} * \mathbf{d}f = \chi_i * f \quad (5.2)$$

olmak üzere

$$\mathbf{i}_{\chi_i} \cdot \mathbf{d}f = \mathbf{i}_{\chi_i} * \mathbf{d}f + (-1)^{p(\mathbf{d}f)p(\mathbf{i}_{\chi_i})} \sum_{j=1}^4 \mu_{ij}^\Omega(\mathbf{d}f) \cdot \mathbf{i}_{\chi_j}, \quad (5.3)$$

şeklinde ifade edilir.

İspat (4.52) ile verilen

$$\chi_i \cdot f = \chi_i * f + (-1)^{p(f)p(\chi_i)} \sum_j^4 \mu_{ij}(f) \cdot \chi_j$$

bağıntılarını

$$\chi_i = \mathbf{i}_{\chi_i} D - (-1)^{p(\mathbf{i}_{\chi_i})} D \mathbf{i}_{\chi_i}$$

eşitliğini göz önünde bulundurarak ele alalım:

$$\begin{aligned}
\chi_i \cdot f &= [\mathbf{i}_{\chi_i} D - (-1)^{p(\mathbf{i}_{\chi_i})} D \mathbf{i}_{\chi_i}] \cdot f \\
&= \mathbf{i}_{\chi_i} \cdot [\mathbf{d}f + (-1)^{p(f)} f D] - (-1)^{p(\mathbf{i}_{\chi_i})} D [(-1)^{p(f)p(\mathbf{i}_{\chi_i})} \sum_j^4 \mu_{ij}(f) \cdot \mathbf{i}_{\chi_j}] \\
&= \mathbf{i}_{\chi_i} \cdot \mathbf{d}f + (-1)^{p(f)+p(f)p(\mathbf{i}_{\chi_i})} \sum_j^4 \mu_{ij}(f) \cdot \mathbf{i}_{\chi_j} D \\
&\quad - (-1)^{p(\mathbf{i}_{\chi_i})+p(f)p(\mathbf{i}_{\chi_i})} \sum_j^4 [\mu_{ji}^\Omega(\mathbf{d}f) \cdot \mathbf{i}_{\chi_j} + (-1)^{p(\mu_{ij}(f))} \mu_{ij}(f) \cdot D \mathbf{i}_{\chi_j}] \\
&= (-1)^{p(f)[1+p(\mathbf{i}_{\chi_i})]} \sum_j^4 \mu_{ij}(f) [\mathbf{i}_{\chi_j} D - (-1)^{p(\mathbf{i}_{\chi_j})} D \mathbf{i}_{\chi_j}] \\
&\quad + [\mathbf{i}_{\chi_i} \cdot \mathbf{d}f - (-1)^{[1+p(f)]p(\mathbf{i}_{\chi_i})} \sum_j^4 \mu_{ij}^\Omega(\mathbf{d}f) \cdot \mathbf{i}_{\chi_j}] + K_{ij}
\end{aligned}$$

şeklinde ifade edebiliriz. Burada, mod 2 ye göre $p(\mathbf{i}_{\chi_i}) = 1 + p(f_i)$ olduğundan

$$K_{ij} = [(-1)^{p(f)[1+p(\mathbf{i}_{\chi_i})+p(\mathbf{i}_{\chi_j})]} - (-1)^{p(\mathbf{i}_{\chi_i})[1+p(f)]+p(\mu_{ij}(f))}] D\mathbf{i}_{\chi_j} = 0$$

çıkar. Dolayısı ile $\chi_i * f = \mathbf{i}_{\chi_i} * \mathbf{d}f$ gerçeği ile (5.3) komutasyon bağıntıları elde edilir. \square

İç türevler ile sol invaryant Cartan-Maurer 1-formları arasındaki komutasyon bağıntıları komutasyon işlemi yapılarak elde edilir. Bunun için ω_i 'lerin (4.35) ile verilen eşitlikleriyle (5.1) ve (5.3) bağıntılarını birlikte kullanırız. Elde edilen sonuçlar aşağıdaki teorem ile ifade edilmiştir:

Teorem 5.3. *İç türevler ile Cartan-Maurer 1-formları arasındaki komutasyon bağıntıları $i, j = 1, 2, 3, 4$ için*

$$\mathbf{i}_{\chi_i} \cdot \omega_j = \delta_{ij} + (-1)^{p(\omega_j)p(\mathbf{i}_{\chi_i})} \omega_j \cdot \mathbf{i}_{\chi_i} \quad (5.4)$$

şeklinindedir.

İç türevlerin kendi aralarındaki muhtemel komutasyon bağıntılarını yazarak, bu bağıntılara D dış türev operatörü uygulanır:

Teorem 5.4. *İç türevler arasındaki komutasyon bağıntıları aşağıdaki gibidir:*

$$\mathbf{i}_{\chi_i} \cdot \mathbf{i}_{\chi_j} = (-1)^{p(\mathbf{i}_{\chi_i})p(\mathbf{i}_{\chi_j})} \mathbf{i}_{\chi_j} \cdot \mathbf{i}_{\chi_i} \quad (5.5)$$

5.3 Süper Lie Türevleri

\mathcal{A} , bir süper cebir ve X bir süper vektör alanı olsun. Süper Lie türevi bir vektör alanı boyunca türetme işlemidir ve \mathcal{L}_X ile gösterilir. Bir süper Lie türevi, uygulandığı formun derecesini korur. Yani, $\Omega(\mathcal{A})$ diferansiyel cebiri üzerinde \mathcal{L}_X Lie türevi k -formunu k -formuna götüren olan bir lineer tasvirdir. α_1 ve α_2 , diferansiyel cebir üzerinde iki diferansiyel form olmak üzere, Lie türevinin formlar üzerine etkisi süper Leibniz kuralı ile aşağıdaki gibi verilir:

$$\mathcal{L}_X(\alpha_1 \wedge \alpha_2) = (\mathcal{L}_X \alpha_1) \wedge \alpha_2 + (-1)^{p(\mathcal{L}_X)p(\alpha_1)} \alpha_1 \wedge (\mathcal{L}_X \alpha_2).$$

Ayrıca, \mathcal{L}_X tasvirinin 0- and 1-formlar üzerine etkisi sırasıyla, bir f skaler fonksiyonu için

$$\mathcal{L}_X f = X(f), \quad \mathcal{L}_X Df = DX(f),$$

şeklinde verilir. Ayrıca, süper iç türevler ve süper Lie türevleri aşağıdaki özellik ile birbirine bağlıdır [26]:

$$\mathcal{L}_X = \mathbf{i}_X D - (-1)^{p(\mathbf{i}_X)} D \mathbf{i}_X, \quad (5.6)$$

Bu eşitlik, süper Cartan formülü olarak bilinir.

Bölüm 4'de (4.20) ile verilen eşitliği Cartan-Maurer 1-formuları ve Lie türevlerini kullanarak,

$$\mathbf{d}f = \sum_{i=1}^4 \omega_i \mathcal{L}_{\chi_i}(f), \quad (5.7)$$

şeklinde ifade edebiliriz. Burada f nin diferansiyellenebilir bir fonksiyon olduğu kabul edilmiştir. Tutarlılık gereği Lie türevleri $p(\mathcal{L}_{\chi_{1,4}}) = 0$ ve $p(\mathcal{L}_{\chi_{2,3}}) = 1$ olmalıdır.

Şimdi, süper Lie türevleri ile bağlantılı (h, h') -deforme komutasyon bağıntılarını bulacağız. Lie türevleri ile $\mathcal{O}(\mathrm{GL}_{h,h'}(1|1))$ süper cebirin jeneratörleri arasındaki komutasyon bağıntıları ile başlayalım.

Teorem 5.5. $\mathcal{O}(\mathrm{GL}_{h,h'}(1|1))$ süper cebirinin jeneratörleri ile Lie türevleri arasındaki (h, h') -deforme komutasyon bağıntıları aşağıdaki gibidir:

$$\mathcal{L}_{\chi_i} \cdot f = \mathcal{L}_{\chi_i} * f + (-1)^{p(f)p(\mathcal{L}_{\chi_i})} \sum_{j=1}^4 \mu_{ij}(f) \mathcal{L}_{\chi_j}. \quad (5.8)$$

İspat Bu teoremin ispatı için (5.6) özdeşliğini göz önüne alırız:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\chi_i} \cdot f &= [\mathbf{i}_{\chi_i} D - (-1)^{p(\mathbf{i}_{\chi_i})} D \mathbf{i}_{\chi_i}] \cdot f \\ &= \mathbf{i}_{\chi_i} \cdot [\mathbf{d}f + (-1)^{p(f)} f D] - (-1)^{p(\mathbf{i}_{\chi_i})} D [(-1)^{p(f)p(\mathbf{i}_{\chi_i})} \sum_{j=1}^4 \mu_{ij}(f) \cdot \mathbf{i}_{\chi_j}] \\ &= [\mathbf{i}_{\chi_i} * \mathbf{d}f + (-1)^{p(\mathbf{d}f)p(\mathbf{i}_{\chi_i})} \sum_{j=1}^4 \mu_{ij}^{\Omega}(\mathbf{d}f) \cdot \mathbf{i}_{\chi_j}] \\ &\quad + (-1)^{p(f)[1+p(\mathbf{i}_{\chi_i})]} \sum_{j=1}^4 \mu_{ij}(f) \cdot \mathbf{i}_{\chi_j} D \\ &\quad - (-1)^{p(\mathbf{i}_{\chi_i})[1+p(f)]} \sum_j^4 [\mu_{ij}^{\Omega}(\mathbf{d}f) \cdot \mathbf{i}_{\chi_j} + (-1)^{p(\mu_{ij}(f))} \mu_{ij}(f) \cdot D \mathbf{i}_{\chi_j}] \\ &= \mathbf{i}_{\chi_i} * \mathbf{d}f + (-1)^{p(f)[1+p(\mathbf{i}_{\chi_i})]} \sum_j^4 \mu_{ij}(f) [\mathbf{i}_{\chi_j} D - (-1)^{p(\mathbf{i}_{\chi_j})} D \mathbf{i}_{\chi_j}] + K_{ij}. \end{aligned}$$

Son eşitlikte ortaya çıkan $K_{ij} = 0$ olduğunu yukarıda görmüştük. Burada, $p(\mathcal{L}_{\chi_i}) = 1 + p(\mathbf{i}_{\chi_i})$ ve (5.6) eşitlikleri kullanıldığında ve $\mathcal{L}_{\chi_i} * f = \chi_i * f$ gerçeği göz önüne alındığında, (5.8) komutasyon bağıntıları elde edilir. \square

Teorem 5.6. *Lie türevleri ile $\mathcal{O}(\text{GL}_{h,h'}(1|1))$ cebirinin jeneratörlerinin diferansiyelleri arasındaki komutasyon bağıntıları*

$$\mathcal{L}_{\chi_i} \cdot \mathbf{d}f = \mathcal{L}_{\chi_i} * \mathbf{d}f + (-1)^{p(\mathbf{d}f)p(\mathcal{L}_{\chi_i})} \sum_{j=1}^4 \mu_{ij}^{\Omega}(\mathbf{d}f) \cdot \mathcal{L}_{\chi_j}. \quad (5.9)$$

formülüyle verilir.

İspat Önceki teoremden olduğu gibi, (5.6) eşitliğini kullanırız:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\chi_i} \cdot \mathbf{d}f &= [\mathbf{i}_{\chi_i} D - (-1)^{p(\mathbf{i}_{\chi_i})} D \mathbf{i}_{\chi_i}] \cdot \mathbf{d}f \\ &= (-1)^{p(\mathbf{d}f)} [\mathbf{i}_{\chi_i} * \mathbf{d}f + (-1)^{p(\mathbf{d}f)p(\mathbf{i}_{\chi_i})} \sum_{j=1}^4 \mu_{ij}^{\Omega}(\mathbf{d}f) \cdot \mathbf{i}_{\chi_j}] D \\ &\quad - (-1)^{p(\mathbf{i}_{\chi_i})} D [\mathbf{i}_{\chi_i} * \mathbf{d}f + (-1)^{p(\mathbf{d}f)p(\mathbf{i}_{\chi_i})} \sum_{j=1}^4 \mu_{ij}^{\Omega}(\mathbf{d}f) \cdot \mathbf{i}_{\chi_j}] \\ &= [\mathbf{i}_{\chi_i} D - (-1)^{p(\mathbf{i}_{\chi_i})} D \mathbf{i}_{\chi_i}] * \mathbf{d}f \\ &\quad + (-1)^{p(\mathbf{d}f)[1+p(\mathbf{i}_{\chi_i})]} \sum_j^4 \mu_{ij}^{\Omega}(\mathbf{d}f) \cdot [\mathbf{i}_{\chi_j} D - (-1)^{p(\mathbf{i}_{\chi_j})} D \mathbf{i}_{\chi_j}] + L_{ij}. \end{aligned}$$

Burada, $p(\mathbf{i}_{\chi_i}) = 1 + p(f_i) \pmod{2}$ olduğundan

$$L_{ij} = [(-1)^{p(\mathbf{d}f)[1+p(\mathbf{i}_{\chi_i})+p(\mathbf{i}_{\chi_j})} - (-1)^{p(\mathbf{i}_{\chi_i})[1+p(\mathbf{d}f)]+p(\mu_{ij}^{\Omega}(\mathbf{d}f))}] D \mathbf{i}_{\chi_j} = 0$$

çıkar. (5.6) gerçeği göz önüne alındığında, (5.9) formülü elde edilir.

Lie türevleri ile Cartan-Maurer 1-formları arasındaki komutasyon bağıntılarını bulmak için (5.8) ve (5.9) bağıntılarını kullanırız. İstenen komutasyon ilişkileri aşağıdaki teoremden olduğu gibi ifade edilebilir:

Teorem 5.7. *Lie türevleri ile Cartan-Maurer 1-formları arasındaki komutasyon bağıntıları*

$$\mathcal{L}_{\chi_i} * \omega_j = \sum_{k=1}^4 (-1)^{p(\chi_i)p(\omega_k)} \omega_k \cdot \chi_i(M_{kj}). \quad (5.10)$$

olmak üzere şeklinde ifade edilir:

$$\mathcal{L}_{\chi_i} \cdot \omega_j = \mathcal{L}_{\chi_i} * \omega_j + (-1)^{p(\omega_j)p(\mathcal{L}_{\chi_i})} \sum_{k=1}^4 \mu_{ik}^{\Omega}(\omega_j) \cdot \mathcal{L}_{\chi_k} \quad (5.11)$$

Klasik geometride, Lie türevinin bazı özellikleri $[\chi_i, \chi_j]$ bir Lie parantezi olmak üzere

$$[\mathcal{L}_{\chi_i}, \mathcal{L}_{\chi_j}] = \mathcal{L}_{[\chi_i, \chi_j]}, \quad [\mathcal{L}_{\chi_i}, \mathbf{i}_{\chi_j}] = \mathbf{i}_{[\chi_i, \chi_j]}, \quad (5.12)$$

şeklinde verilir. Bu eşitlikler ve (4.47) eşitliği dikkate alındığında aşağıdaki iki teorem ifade edilebilir.

Teorem 5.8. \mathcal{L}_{χ_i} and \mathbf{i}_{χ_j} arasındaki komutasyon bağıntıları aşağıdaki gibidir:

$$[\mathcal{L}_{\chi_i}, \mathbf{i}_{\chi_j}]_{\Lambda} = \sum_k C_{ij}^k \mathbf{i}_{\chi_k}. \quad (5.13)$$

Teorem 5.9. Lie türevlerinin arasındaki komutasyon bağıntıları aşağıdaki gibidir:

$$[\mathcal{L}_{\chi_i}, \mathcal{L}_{\chi_j}]_{\Lambda} = \sum_k C_{ij}^k \mathcal{L}_{\chi_k}. \quad (5.14)$$

Bu çalışmada, $GL(1|1)$ matris süper grubunun iki parametrelili standart olmayan deformasyonu, ki o $GL_{h,h'}(1|1)$ ile gösterilmiştir, gözönüne alınarak bu grup üzerine değişmeli olmayan bir diferansiyel hesap kurulmuştur. Elde edilen sonuçlar aşağıda özetlenmiştir:

İlk olarak, $GL_{h,h'}(1|1)$ süper grubunun koordinat cebiri olan $\mathcal{O}(GL_{h,h'}(1|1))$ Hopf süper cebiri üzerine bir ikili-kovaryant diferansiyel hesap kurulmuştur. Bu hesap, $\mathcal{O}(GL_{h,h'}(1|1))$ Hopf süper cebiri üzerine birinci mertebeden diferansiyel hesabı içermektedir. Elde edilen sonuçlar $\sigma(\cdot)$ ve $\tau(\cdot)$ matrisleriyle ifade edilmiştir. Ve σ ve τ tasvirlerinin her ikisinin de birer cebir homomorfizmi olduğu görülmüştür. Bu homomorfizmler aracılığı ile $\mathcal{O}(GL_{h,h'}(1|1))$ Hopf süper cebirinin jeneratörlerinin ikişer adet matris temsilleri elde edilmiştir. $\mathcal{O}(GL_{h,h'}(1|1))$ süper cebiri üzerine ikinci mertebe diferansiyel hesaba ulaşmak için σ tasviri $\mathcal{O}(GL_{h,h'}(1|1))$ süper cebirinin jeneratörlerinin diferansiyellerine genişletilmiştir. Ayrıca bu σ tasviri ile $\mathcal{O}(GL_{h,h'}(1|1))$ süper cebirin jeneratörleri ve onlara karşılık gelen kısmi türevler arasındaki komutasyon bağıntıları ifade edilmiştir.

Sonraki adımda Cartan-Maurer 1-formları tanımlanmış ve $\mathcal{O}(GL_{h,h'}(1|1))$ Hopf süper cebirinin jeneratörleri ve Cartan-Maurer 1-formları arasındaki komutasyon bağıntıları elde edilerek onlar, $\tilde{\mu}$ ve μ homomorfizmleri ile kapalı bir formda yazılmıştır. Bu cebir homomorfizmleri aracılığıyla cebirin jeneratörlerinin ikişer adet matris temsilleri elde edilmiştir. Değişmeli olmayan diferansiyel hesabın, süper Cartan hesabına genişletilebilmesi amacıyla, sol-invaryant Cartan-Maurer 1-formları ele alınıp bunlara karşılık gelen genel vektör alanları tanımlanmıştır. Adjoint matris temsili bulunmuş ve yapı sabitleri elde edilmiştir.

Son olarak, diferansiyel hesaba süper iç türevleri ve Lie türevleri eklenerek süper Cartan hesabı elde edilmiştir. Bu yapılırken, genel vektör alanları göz önüne alınmıştır. İç türevleri ve Lie türevlerini içeren komutasyon bağıntılarının da μ tasviri ile ifade edilebildiği gösterilmiştir.

Bu çalışmada, standart olmayan deforme bir süper grup üzerine süper Cartan hesabının kurulduğu literetürdeki ilk çalışmadır. Çalışmanın daha yüksek ranklı süper gruplara genişletilebileceği beklenmektedir. Çalışmada bir çok diferansiyel hesap ve matris temsillerinin elde edilmesinin yanı sıra, σ ve μ tasvirlerinin tanım kümelerinin yüksek mertebeye genişletilerek bulunan bir takım hesapları ifade etmesi, ayrıca μ tasvirinin iç türevler ve Lie türevlerini içeren komutasyon bağıntılarını da ifade etmesi sağlamıştır. Bu çalışmanın, benzer çalışmaların hem standart deforme yapılar hem de farklı gruplar üzerinde yapılabilmesine ve daha yüksek mertebeden diferansiyel hesaplara da genişletilebilmesine olanak sağlaması öngörülmektedir.

Ayrıca bu çalışmada Woronowicz'in ortaya attığı ikili-kovaryant diferansiyel hesap, $\mathcal{O}(GL_{h,h'}(1|1))$ Hopf süper cebiri için geliştirilmiştir. Sonrasında, hesaba süper iç-türevler ve süper Lie türevleri eklenerek, süper Cartan hesaba genişletilmiştir. Bu çalışmada elde edilen sonuçları bir büzülme tasviri kullanılmasıyla, $\mathcal{O}(GL_{p,q}(1|1))$ Hopf süper cebirinden p ve q deformasyon parametrelerinin her ikisinin de $p, q \rightarrow 1$ limet hallerinde elde etmek mümkündür.

Tezin orjinal kısımlarında yapılan çalışmaları teyit etmek amacıyla, mümkün ise, farklı yöntemler kullanmak bilimsel çalışma yapmanın doğasında olmakla beraber, burada kullanılacak yöntemler, başlı başına bir çalışma alanıdır. Yapılacak yeni çalışmada mevcut tezde elde ettiğimiz hesapları teyit etmek şüphesiz literatüre katkı sağlayacaktır.

- [1] A. Connes, “Non-commutative differential geometry,” *Publications Mathématiques de l’IHES*, c. 62, ss. 41–144, 1985.
- [2] Y. I. Manin, “Quantum groups and non-commutative geometry,” *Preprint CRM-1561, Montréal*, 1988.
- [3] Y. I. Manin, “Multiparametric quantum deformation of the general linear supergroup,” *Communications in Mathematical Physics*, c. 123, ss. 163–175, 1989.
- [4] J. Wess B. Zumino, “Covariant differential calculus on the quantum hyperplane,” *Nuclear Physics B-Proceedings Supplements*, c. 18, no. 2, ss. 302–312, 1991.
- [5] T. Kobayashi T. Uematsu, “Differential calculus on the quantum superspace and deformation of phase space,” *Zeitschrift für Physik C Particles and Fields*, c. 56, no. 2, ss. 193–199, 1992.
- [6] S. Celik, “Covariant differential calculi of the quantum symplectic superspace $SP_q^{1|2}$,” *Journal of Mathematical Physics*, c. 58, no. 2, 023508:1–15, 2017.
- [7] S. L. Woronowicz, “Twisted $SU(2)$ group. An example of a non-commutative differential calculus,” *Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences*, c. 23, no. 1, ss. 117–181, 1987.
- [8] S. L. Woronowicz, “Differential calculus on kompakt matric pseudogroups(quantum groups),” *Communacitions in Mathematical Physics*, c. 122, ss. 125–170, 1989.
- [9] S. A. Celik S. Celik, “Differential geometry of the q -plane,” *International Journal of Modern Physics A*, c. 15, no. 20, ss. 3237–3243, 2000.
- [10] F. Muller-Hoisen, “Differential calculi on the quantum group $GL_{p,q}(2)$,” *Journal of Physics A: Mathematical and General*, c. 25, s. 1703, 1992.
- [11] S. Celik, “Differential geometry of the q -superplane,” *Journal of Physics A: Mathematical and General*, c. 31, no. 48, s. 9695, 1998.
- [12] S. Celik, “Bicovariant differential calculus on the quantum superspace $\mathbb{R}_q(1|2)$,” *Journal of Algebra and Its Applications*, c. 15, no. 9, s. 1 650 172, 2016.
- [13] S. A. Celik, “Differential calculi on super-Hopf algebra $\mathcal{F}(\mathbb{R}_q(1|2))$,” *Advances in Applied Clifford Algebras*, c. 28, 5:1–16, 2018.
- [14] S. Celik S. A. Celik, “On the differential geometry of $GL_q(1|1)$,” *Journal of Physics A: Mathematical and General*, c. 31, s. 9685, 1998.

- [15] S. Celik, “Differential geometry of the $GL_{p,q}(1|1)$,” *Journal of Mathematical Physics*, c. 41, ss. 6976–6994, 2000.
- [16] E. E. Demidov, Y. I. Manin, E. E. Mukhin D. V. Zhdanovich, “Nonstandard quantum deformations of $GL(n)$ and constant solutions of the Yang-Baxter equation,” *Progress of Theoretical Physics Supplement*, c. 102, ss. 203–218, 1990.
- [17] A. Aghamohammadi, M. Khorrami A. Shariati, “Jordanian deformation of $SL(2)$ as a contraction of its Drinfeld-Jimbo deformation,” *Journal of Physics A: Mathematical and General*, c. 28, s. L225, 1995.
- [18] L. Dabrowski P. Parashar, “ h -deformation of $GL(1|1)$,” *Letters in Mathematical Physics*, c. 38, ss. 331–336, 1996.
- [19] S. Celik, “Two-parametric extension of h -deformation $GL(1|1)$,” *Letters in Mathematical Physics*, c. 42, ss. 299–308, 1997.
- [20] S. Celik, S. A. Celik M. Arik, “Differential calculus on the h -superplane,” *Journal of Mathematical Physics*, c. 39, ss. 3426–3436, 1998.
- [21] S. Celik S. A. Celik, “Two parameter differential calculus on h -superplane,” *Journal of Mathematical Physics*, c. 40, ss. 5998–6008, 1999.
- [22] S. Celik, “On q - and h -deformations of 3d-superspace,” *Turkish Journal of Mathematics*, c. 45, ss. 346–359, 2021.
- [23] P. Schupp, P. Watts B. Zumino, “Cartan calculus on quantum Lie algebras,” *arXiv preprint hep-th/9312073*, 1993.
- [24] P. Schupp, “Cartan calculus: Differential geometry for quantum groups,” içinde *Quantum groups and their applications in physics*, IOS Press, 1996, ss. 507–524.
- [25] C. Chryssomalakos, P. Schupp B. Zumino, “Induced extended calculus on the quantum plane,” *St. Petersburg Mathematical Journal*, c. 6, no. 3, ss. 685–696, 1995.
- [26] S. Celik, “Cartan calculi on the quantum superplane,” *Journal of Mathematical Physics*, c. 47, no. 8, 083501:1–16, 2006.
- [27] S. Celik, “Cartan calculus on the superalgebra $\mathcal{O}(\mathbb{C}_q^{2|1})$,” *Mathematical Communications*, c. 28, no. 2, ss. 213–234, 2023.
- [28] S. Celik, “Extended calculus on the superalgebra $\mathcal{O}(\mathbb{C}_h^{1|1})$,” *Turkish Journal of Mathematics*, c. 47, no. 6, ss. 1674–1693, 2023.
- [29] C. Kassel, *Quantum groups*. Springer Science & Business Media, 2012, c. 155.
- [30] A. Klimyk K. Schmüdgen, *Quantum groups and their representations*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [31] F. A. Berezin F. A. Berezin, *Lie supergroups*. Springer, 1987.
- [32] Y. İ. Manin, “Notes on quantum groups and quantum de Rham complexes,” *Theoretical and Mathematical Physics*, c. 92, no. 3, ss. 997–1019, 1992.
- [33] A. Borowiec V. Kharchenko, “Algebraic approach to calculus with partial derivatives,” *Siberian advances in Mathematics*, c. 5, no. 2, ss. 10–37, 1995.

- [34] S. Celik, “ \mathbb{Z}_N -Graded Calculus,” *Değerlendirme aşamasında*, 2025.
- [35] S. Celik, S. A. Celik İ. Temli, “Cartan calculus on the Hopf superalgebra $\mathcal{F}(GL_{p,q}(1|1))$,” *Değerlendirme aşamasında*, 2024.



TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR

Makale

1. S. Celik, İ. Temli, " Differential geometry of the quantum supergroup $GL_{H,H'}(1|1)$ ", Reports on Mathematical Physic, c.93, no. 3, ss.371-391, 2024.

Konferans Bildirisi

1. S. Celik, İ. Temli, "Bicovariant differential calculus on the superalgebra $\mathcal{O}(GL_{h,h'}(1|1))$ ", 19th International Geometry Symposium, Edirne, TURKEY, 27-30 Haziran 2022, ss. 115.
2. S. Celik, İ. Temli, "An extended calculus on the Hopf superalgebra $\mathcal{O}(GL_{h,h'}(1|1))$ ", 2nd International E-Conference on Mathematical and Statistical Science: A Selcuk Meeting (ICOMSS'23), Konya, TURKEY, 5-7 Haziran 2023, ss. 206.