ŞUBAT 2025 YüksekLisans Tezi - Matematik ELİF AKAY

TÜRKİYE CUMHURİYETİ

GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

NORMLU LİNEER UZAYLAR ÜZERİNDE BAZI NÖTROSOFİK YAPILAR

MATEMATİK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ELİF AKAY

ŞUBAT 2025

NORMLU LİNEER UZAYLAR ÜZERİNDE BAZI NÖTROSOFİK YAPILAR

Gaziantep Üniversitesi

Matematik

Yüksek Lisans Tezi

Danışman

Dr. Öğr. Üyesi Sabri BİRLİK

Elif AKAY

Şubat 2025

NORMLU LİNEER UZAYLAR ÜZERİNDE BAZI NÖTROSOFİK YAPILAR

başlıklı bu çalışma, **Elif AKAY** tarafından hazırlanmış ve yapılan savunma sınavı sonucunda başarılı bulunarak jürimiz tarafından **Gaziantep Üniversitesi Matematik Bölümü'nde** Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Çiğdem AYKAÇ
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü ………….............

Prof. Dr. Memet ŞAHİN
Matematik Bölüm Başkanı ………….............

Dr. Öğr. Üyesi Sabri BİRLİK
Danışman, Matematik
Gaziantep Üniversitesi ………….............

Sınav Tarihi: 14 Şubat 2025

Jüri Üyeleri:

Dr. Öğr. Üyesi Sabri BİRLİK
Gaziantep Üniversitesi ………….............

Prof. Dr. Mehmet ŞAHİN
Gaziantep Üniversitesi ………….............

Doç. Dr. Vakkas ULUÇAY
Kilis 7 Aralık Üniversitesi ………….............

İlgili tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilmek suretiyle tezde yer aldığını beyan ederim.

Elif AKAY

ABSTRACT

SOME NEUTROSOPHIC STRUCTURES ON NORMED LINEAR SPACE

AKAY, Elif
M.Sc. in Mathematics
Supervisor: Asst. Prof. Sabri BİRLİK
February 2025
61 pages

This master's thesis consists of four sections. In the first section, the concept of uncertainty is mentioned and the transition phase from classical logic theory to neutrosophic logic theory is briefly explained and examined through examples. In the second section, the definitions of linear space, normed linear space; t-norm, t-co-norm; fuzzy set, interval-valued fuzzy set, fuzzy normed linear space; intuitionistic fuzzy set, interval-valued intuitionistic fuzzy set and intuitionistic fuzzy normed linear space are given. In addition, the definitions of neutrosophic set, single-valued neutrosophic set, multi-valued neutrosophic set, multi-valued neutrosophic empty set and multi-valued neutrosophic universal set are given. In the third section, some neutrosophic structures on normed linear space are examined. The definition of neutrosophic normed linear space is given. The definitions of convergent sequence, boundedness and Cauchy sequence in neutrosophic normed linear spaces are given and the proofs of theorems given on this topic are examined. Completeness of the linear spaces with neutrosophic norms is given, the theorems related to this subject are given and their proofs are reviewed. In the last section, the results obtained from the thesis are given.

Key Words: Neutrosophic Set, Fuzzy Set, Linear Space, Neutrosophic Norm, Neutrosophic Normed Linear Space

ÖZET

NORMLU LİNEER UZAYLAR ÜZERİNDE BAZI NÖTROSOFİK YAPILAR

AKAY, Elif
Yüksek Lisans Tezi, Matematik
Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Sabri BİRLİK
Şubat 2025
61 sayfa

Bu yüksek lisans tezi dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde belirsizlik kavramından bahsedildi ve klasik mantık teorisinden nötrosofik mantık teorisine geçiş evresi kısaca açıklanarak örnekler üzerinden incelendi. İkinci bölümde lineer uzay, normlu lineer uzay; t-norm, t-co-norm; bulanık küme, aralık değerli bulanık küme, bulanık normlu lineer uzay; sezgisel bulanık küme, aralık değerli sezgisel bulanık küme ve sezgisel bulanık normlu lineer uzay tanımları verildi. Ayrıca nötrosofik küme, tek değerli nötrosofik küme, çok değerli nötrosofik küme, çok değerli nötrosofik boş küme ve çok değerli nötrosofik evrensel küme tanımları verildi. Üçüncü bölümde normlu lineer uzay üzerinde bazı nötrosofik yapılar incelendi. Nötrosofik normlu lineer uzay tanımı verildi. Nötrosofik normlu lineer uzaylarda yakınsak dizi, sınırlılık ve Cauchy dizisi tanımları verildi ve bu konuyla ilgili verilen teoremlerin ispatı incelendi. Nötrosofik normlu lineer uzaylarda tamlık tanımı verildi, bu konuyla ilgili teoremler verilip ispatı gözden geçirildi. Son bölümde ise tezden elde edilen sonuçlara yer verildi.

Anahtar Kelimeler: Nötrosofik Küme, Bulanık Küme, Lineer Uzay, Nötrosofik Norm, Nötrosofik Normlu Lineer Uzay

‘’Canım aileme’’

TEŞEKKÜR

Bu çalışma süresince tüm bilgilerini benimle paylaşmaktan kaçınmayan, her türlü konuda desteğini benden esirgemeyen ve tezimde büyük emeği olan, Gaziantep Üniversitesi öğretim üyelerinden danışman hocam, sayın Dr. Öğr. Üyesi Sabri BİRLİK´e sonsuz minnet ve teşekkürlerimi sunarım.

Örneklerin toplanmasında, izlenecek yol ve yöntemlerin belirlenmesinde desteklerini benden esirgemeyen Kilis 7 Aralık Üniversitesi öğretim üyelerinden değerli hocam Doç. Dr. Vakkas ULUÇAY'a ve Gaziantep Üniversitesi öğretim üyelerinden değerli hocam Dr. Öğr. Üyesi Abdullah KARGIN'a, çok teşekkür ederim.

Bu çalışmada maddi destek sağlayan TÜBİTAK'a (2247 no'lu BİÇABA- Birlikte Çalışıp Birlikte Başaracağız proje) teşekkürlerimi sunarım.

Çalışma süresince beni hep destekleyen ve güvenen çok sevdiğim biricik annem ve tüm aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SEMBOLLER LİSTESİ

$\rho_A(x)$	x'in A kümesinde doğruluk üyelik fonksiyonu
$\xi_A(x)$	x'in A kümesinde belirsizlik üyelik fonksiyonu
$\eta_A(x)$	x'in A kümesinde yanlışlık üyelik fonksiyonu
$[0,1]$	0 ile 1 kapalı aralığı- Köşeli parantez
$]^{-}0, 1^{+}[$	0 ile 1 açık aralığı – Açık köşeli parantez
A^C	A'nın tümleyeni
$=$	Eşittir
$\neq$	Eşit değildir
$<$	Küçüktür
$\leq$	Küçük Eşittir
$>$	Büyüktür
$\geq$	Büyük Eşittir
$\in$	Elemanıdır
$\boldsymbol{\varepsilon}$	Epsilon
$\forall$	Her – Tümü için
$\exists$	En az bir
$\circ$	Derece
$\cup$	Birleşim işlemi
$\cap$	Kesişim işlemi
$\backslash$	Fark işlemi
$\subseteq$	Alt küme
$\supseteq$	Kapsar
$+$	Toplama işlemi
$.$	Çarpma işlemi
$\times$	Kartezyen çarpım
$\boldsymbol{\lambda. A}$	A'nın λ gibi bir skaler ile çarpımı
$\boldsymbol{A^{\lambda}}$	A'nın λ skaler kuvveti
$\wp$	B çok değerli nötrosofik kümesinin kardinalitesi

$\emptyset$	Boş küme
$(\mathbf{V}, +, .)$	Lineer uzay
$\|.\|$	Norm
$(\mathbf{V}, \|.\|)$	Normlu lineer uzay
$\mathbb{R}$	Reel (Gerçel) sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks (Karmaşık) sayılar kümesi
$\boldsymbol{\mu}_A\ (\mathbf{x})$	x'in A kümesine üye olma derecesi
$\boldsymbol{\vartheta}_A\ (\mathbf{x})$	x'in A kümesine üye olmama derecesi
$\boldsymbol{\pi}_A\ (\mathbf{x})$	x'in belirsizlik derecesi
$\mathbf{M}_{\mathbf{AL}}(\mathbf{x})$	x'in üye olma derecesinin alt sınırı
$\mathbf{M}_{\mathbf{AU}}(\mathbf{x})$	x'in üye olma derecesinin üst sınırı
$\mathbf{N}_{\mathbf{AL}}(\mathbf{x})$	x'in üye olmama derecesinin alt sınırı
$\mathbf{N}_{\mathbf{AU}}(\mathbf{x})$	x'in üye olmama derecesinin üst sınırı
$\star$	İkili işlem
$\diamond$	İkili işlem
$(\mathbf{X}, \mathbf{N}, \star)$	N kümesi X üzerinde bir bulanık normlu lineer uzay
$(\mathbf{V}, \mathbf{A}, \star, \diamond)$	A kümesi V üzerinde bir sezgisel bulanık normlu lineer uzay
$(\mathbf{V}, \mathbf{N}, \star, \diamond)$	N kümesi V üzerinde bir nötrosofik normlu lineer uzay
$(\mathbf{x}_\mathbf{n})$	dizi
$\boldsymbol{\Delta}_V$	V üzerindeki tüm noktaların koleksiyonu
$\left(\boldsymbol{x}_{n_k}\right)$	(x_n) dizisinin yakınsak alt dizisi
$\sum$	Toplam sembolü
$(\boldsymbol{x}_n) \to \mathbf{x}$	(x_n) dizisi x noktasına yakınsar
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi

KISALTMALAR LİSTESİ

sup	Üst sınırlarının en küçüğü
min	Minimum
max	Maksimum
lim	Limit
NNLU	Nötrosofik Normlu Lineer Uzay

BÖLÜM 1
GİRİŞ

Yaşantımız her zaman monoton değildir. Yaşantımızı bir yola benzettiğimizde kimi zaman dümdüz kimi zaman kavisli kimi zaman inişli kimi zaman yokuşludur yani her zaman net ve kesin çizgiler üzerinden yol alamayız. Bu net olmayan çizgiler bize bir nevi belirsizliği ifade eder ve hayat sahnesinde belirsizlikle ister istemez karşı karşıya geldiğimiz durumlar mutlaka olmuştur. Ancak belirsizlikleri açıklamada klasik küme teorisi yetersiz kalmıştır. Bundan dolayı klasik kümenin açıklayamadığı durumlarda bulanık kümeye, sezgisel bulanık kümeye ve nötrosofik kümeye ihtiyaç duyulmuştur.

Klasik mantık teorisinde klasik küme yaklaşımı ele alınır. Klasik mantık belirsizliği kabul etmemekle beraber "olmak ya da olmamak" prensibine dayanan 1 (doğru) ve 0 (yanlış) gibi net ve kesin ifadelerini kapsar. Yani, klasik küme teorisinde, "ya bir şey vardır ya da yoktur ve bunun ortası olamaz (hem var olup hem yok olamaz)" ifadesi geçerlidir. Örneğin; Bir dondurmacı dükkanında vanilyalı, çikolatalı, çilekli dondurmalar satılsın ve limonlu dondurmalar satılmasın. Klasik kümeye göre, bu dükkânda vanilyalı, çikolatalı ve çilekli dondurmaların satılması "1" ve limonlu dondurmaların satılmaması "0" olur. Burada, her durum net olup belirsizlik kavramı söz konusu olmayıp bu kavrama hiç değinilmemiştir. Bu nedenle, klasik kümenin belirsizlikleri açıklama konusunda geri planda olduğu bu durumda, bulanık mantık teorisi ortaya atılmıştır.

Bulanık mantık teorisinde bulanık küme yaklaşımı ele alınır. Zadeh 1965'te [1], bulanık küme teorisi fikrinin öncüsüdür. Bulanık küme klasik kümeden daha kapsamlı bir yapıya sahiptir. Örneğin; Gökyüzü her zaman masmavi, duru ve berrak olmamaktadır. Hava yağışlı olduğunda klasik mantığa göre hava ya yağmurludur ya da değildir. Ama bulanık mantığa göre hava yağmurlu olduğu zaman az yağmurlu, çok yağmurlu, hafif yağmurlu veya kuvvetli yağmurlu diye yağmurun yağışını derecelendirebiliyoruz. Ayrıca bir $\mathcal{K}$ bulanık kümesini ele alalım ve E evrensel kümesi üzerinde, $\mu_{\mathcal{K}}(\mathrm{x})$, E üzerinde tanımlı olan ve $\mathrm{I} = [0, 1]$ birim aralığı ile eşleşen x in üyelik fonksiyonu olarak adlandırılır ve burada $\mu_{\mathcal{K}}$ (x), x ∈ E nin $\mathcal{K}$ kümesine üye olma derecesini ifade eder [1]. Tüm bunlara rağmen bulanık kümeler üye olmamayı ve belirsizlikleri incelemez.

Sezgisel bulanık mantık teorisinde sezgisel bulanık küme yaklaşımı ele alınır. Atanassov 1986'da [2] sezgisel bulanık küme teorisi fikrinin öncüsüdür ve bu alanda temel çalışmalar yapmıştır [3−4]. Sezgisel bulanık mantık teorisi, bulanık mantık teorisinin daha genel ve genişletilmiş hali olmakla beraber sezgisel bulanık kümelerde hem üye olma derecesi hem de üye olmama derecesi kullanılır. Bu ifadeden de anlaşıldığı üzere sezgisel bulanık kümelerin bulanık kümelerden farkı ise üye olma derecesine ilaveten üye olmama derecesini barındırmasıdır. Örneğin; Hava güneşli olduğunda %50 sıcak ve %30 soğuk olabilir. Diğer %20 ise belirsizlik olarak adlandırılır. Bundan dolayı üye olma, üye olmama ve belirsizlik derecelerinin toplamları 1 olmak zorundadır. Ayrıca bir A sezgisel bulanık kümesini ele alalım ve her x ∈ E için, E evrensel kümesi üzerinde, μ_A (x) ve ϑ_A (x) E üzerinde tanımlı olan ve sırasıyla üye olma derecesi ve üye olmama derecesini temsil eder ve burada, μ_A (x), x ∈ E nin A kümesine üye olma derecesini ifade ederken ϑ_A (x) de x ∈ E nin A kümesine üye olmama derecesini ifade eder [2]. Tüm bunlara rağmen sezgisel bulanık kümelerde üye olma, üye olmama ve belirsizlik değerleri birbirlerine bağımlı tanımlandığından nötrosofik küme teorisine ihtiyaç duyulmuştur.

Nötrosofik mantık teorisinde nötrosofik küme yaklaşımı ele alınır. Samarandache 1998'de [5] nötrosofik küme teorisi fikrinin öncüsüdür. Ayrıca 2019'da nötrosofik alanında araştırmalar yapmıştır [6 − 7]. Nötrosofik küme teorisi, sezgisel bulanık küme teorisinin daha genel ve genişletilmiş hali olmakla beraber nötrosofik kümelerde doğruluk, belirsizlik ve yanlışlık üyelik fonksiyonları birbirlerinden bağımsız olarak tanımlanmıştır. Örneğin; Hava güneşli olduğunda %60 sıcak ve %40 soğuk ve %30 ılık olabilir. Bundan dolayı doğruluk, belirsizlik ve yanlışlık derecelerinin toplamları 1'den fazla olabilir. Ayrıca bir A nötrosofik kümesini ele alalım ve her x ∈ E için, E evrensel kümesi üzerinde $\rho_A(x)$, $\xi_A(x)$ ve $\eta_A(x)$ üyelik fonksiyonları E üzerinde tanımlı olsun. Bu üyelik fonksiyonları sırasıyla doğruluk, belirsizlik ve yanlışlık derecelerini temsil eder.

Normlu lineer uzay kavramı, Fonksiyonel Analiz'de çok önemli bir yere sahiptir ve burada önemli bir rol oynamaktadır. Normlu lineer uzayda boyut kavramı, araştırmacıların büyük ölçüde ilgisini çekmeyi başarmıştır. Gähler 1965'te [8] 2-normlu lineer uzayın ve n-normlu lineer uzayın yapısını geliştirdi. Son yıllarda, araştırmacıların çoğu, n-normlu lineer uzay teorisine çalıştı. Maji 2013'te [9] nötrosofik kavramını ele alarak bu konuyu inceledi. Felbin 1992'de [10] lineer uzayın her bir öğesine bir bulanık reel sayı atamış ve dikkate değer başka bir fikir olarak lineer uzay üzerinde bir bulanık norm kavramını tanıtmış ve bununla beraber sonlu boyutlu bir bulanık normlu lineer uzayın bulanık eşdeğerliliğe kadar tek bir bulanık norma sahip olduğunu ispat etmiştir. Daha sonra, 1993'te [11] bulanık normlu lineer uzayların tamamlanması konusunda tartışmıştır ve 1999'da [12] herhangi bir sonlu boyutlu bulanık normlu lineer uzayın mutlaka tam olduğunu ispatlamıştır.

Bag ve Samanta 2003'te [13] bir lineer uzay üzerinde bulanık norm tanımını ortaya koymuşlardır. Ayrıca, bulanık normların krisp (crisp) bir normlar ailesine ayrıştırılabileceği teoremini sağlamışlardır [14−15] ve sonlu boyutlu bulanık normlu lineer uzayların özelliklerini araştırıp incelediler [16]. Santhosh ve Ramakrishnan 2011'de [17] bulanık alanlar üzerinde bulanık lineer uzaylarda norm ve iç çarpım kavramlarını tanıtmışlardır. Vijayabalaji ve ark. 2007'de [18] aralık değerli bulanık n-normlu lineer uzaylar fikrini incelemiştir. Ayrıca Vijayabalaji ve ark. 2007'de [19], Samanta ve ark. 2009'da [20], Isaac ve ark. 2012'de [21] sezgisel bulanık ayarlarla beraber normlu lineer uzay kavramlarını ele almıştır. Son zamanlarda, Sandeep Kumar 2018'de [22] aralık değerli sezgisel bulanık n -normlu lineer uzaylar üzerine bazı sonuçları tartışmıştır.

Bu tezin birinci bölümünde yani giriş kısmında, belirsizlik kavramından bahsedildi ve klasik mantık teorisinden nötrosofik mantık teorisine geçiş kısaca açıklandı. Klasik küme, bulanık küme [1] ve sezgisel bulanık küme [2] hakkında açıklayıcı örnekler verildi. Ayrıca, normlu lineer uzaylarda nötrosofik yaklaşımı ile ilgili genel ve yüzeysel bir bilgi akışı verilerek bu konuyu ele alan araştırmacıları ve onların araştırmalarında nereye kadar ulaştıkları bilgisi verildi. İkinci bölümde ise, lineer uzay (vektör uzay) [13] ve normlu lineer uzay [13] tanımları verildi. T-norm [21] ve t-co-norm [23] tanımları verildi. Bulanık küme [1] tanımı verildi ve bulanık kümesinin kapsamasının, birleşiminin, kesişiminin, tümleyeninin, toplama işleminin, çarpma işleminin tanımları verildi ve bu tanımlara örnekler verildi. Aralık değerli bulanık küme [23] ve bulanık normlu lineer uzay [13] tanımları verildi. Sezgisel bulanık küme [2] ve aralık değerli sezgisel bulanık küme [23] tanımları verildi. Sezgisel bulanık normlu lineer uzay [23] tanımı verildi. Nötrosofik küme [5] tanımı verildi. Tek değerli nötrosofik küme [24] tanımı verildi. Tek değerli nötrosofik kümelerin tümleyeninin, kapsamasının, eşitliliğinin, birleşiminin, kesişiminin, toplama işleminin, çarpma işleminin, λ gibi bir skalerle çarpımının ve kuvvetinin tanımları verildi ve bu tanımlara örnekler verildi. Çok değerli nötrosofik küme [25] tanımı verildi. Çok değerli nötrosofik kümelerin tümleyeninin, kapsamasının, eşitliliğinin, birleşiminin, kesişiminin, toplama işleminin, çarpma işleminin tanımları verildi ve bu tanımlara örnekler verildi. Ayrıca çok değerli nötrosofik boş küme [25] ve çok değerli nötrosofik evrensel kümenin [25] tanımları verildi. Üçüncü bölümde ise nötrosofik norm [23] ve nötrosofik normlu lineer uzay [23] tanımları verildi. Nötrosofik normlu lineer uzayda yakınsak dizi [23] tanımı verildi ve bu konuyla ilgili teoremler verilip ispatı gözden geçirildi. Nötrosofik normlu lineer uzayda sınırlılık [23] ve Cauchy dizisi [23] tanımları verildi ve bu konuyla ilgili örnekler verilip teoremlerin ispatı gözden geçirildi. Nötrosofik normlu lineer uzayda tam [23] tanımı verildi ve bu konuyla ilgili teoremler verilip ispatı incelendi. Son bölümde ise bu tezde elde edilen sonuçlara yer verildi.

BÖLÜM 2
GENEL BİLGİLER

Bu bölümde; lineer uzay (vektör uzay) tanımı verildi. Normlu lineer uzay tanımı verildi. T-norm ve t-co-norm tanımları verildi. Bulanık kümesinin tanımı incelendi ve bulanık kümesinin kapsamasının, birleşiminin, kesişiminin, tümleyeninin, toplama işleminin, çarpma işleminin tanımları verildi ve bu tanımlara örnekler verildi. Aralık değerli bulanık küme ve bulanık normlu lineer uzay tanımları gözden geçirildi. Sezgisel bulanık küme, aralık değerli sezgisel bulanık küme ve sezgisel bulanık normlu lineer uzay tanımları verildi. Nötrosofik kümenin tanımı incelendi. Tek değerli nötrosofik kümenin tanımı verildi. Tek değerli nötrosofik kümelerin tümleyeninin, kapsamasının, eşitliliğinin, birleşiminin, kesişiminin, toplama işleminin, çarpma işleminin, λ gibi bir skalerle çarpımının ve kuvvetinin tanımları incelendi ve bu tanımlara örnekler verildi. Çok değerli nötrosofik kümenin tanımı gözden geçirildi. Çok değerli nötrosofik kümelerin tümleyeninin, kapsamasının, eşitliliğinin, birleşiminin, kesişiminin, toplama işleminin, çarpma işleminin tanımları verildi ve bu tanımlara örnekler verildi. Ayrıca çok değerli nötrosofik boş küme ve çok değerli nötrosofik evrensel kümenin tanımları incelendi.

2.1 Lineer Uzay (Doğrusal Uzay – Vektör Uzay)

Tanım 2.1.1: [13] V boş olmayan herhangi bir küme ve F bir cisim olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanırsa V'ye F cismi üzerinde lineer uzaydır (veya vektör uzaydır) denir.

$$+ : V \times V \to V \qquad \text{ve} \qquad . : F \times V \to V$$

şeklinde tanımlansın.

i. $\forall$ u, $\nu \in$ V için u + $\nu \in$ V (Kapalılık Özelliği)

ii. Toplama işlemine göre değişmelidir.

$\forall$ u, $\nu \in$ V için u + ν = ν + u (Değişme Özelliği)

iii. Toplama işlemine göre birleşmelidir.

$\forall$ u, ν, w $\in$ V için u + (ν + w) = (u + ν) + w (Birleşme Özelliği)

iv. $\forall$ u $\in$ V için u + 0 = u olacak şekilde sıfır vektörü olarak adlandırılan tek bir vektör vardır. $\forall$ u $\in$ V için u + 0 = u (Etkisiz Eleman Özelliği)

v. $\forall$ u $\in$ V vektörü için, u + ($-u$)=0 olacak şekilde tek bir vektör −u $\in$ V vardır. u + (−u) = 0 (Ters, Negatif Eleman Özelliği)

vi. $\forall$ $\alpha \in$ F ve $\forall$ u $\in$ V olmak üzere α.u $\in$ V (Kapalılık Özelliği)

vii. $\forall$ u $\in$ V ve 1$\in$ F olmak üzere 1.u = u (Etkisiz Eleman Özelliği)

viii. $\forall$ α, b $\in$ F ve $\forall$ u $\in$ V olmak üzere αb.(u) = α.(bu) (Birleşme Özelliği)

ix. $\forall$ $\alpha \in$ F ve $\forall$ u, $\nu \in$ V olmak üzere $\alpha.$ (u + v) = $\alpha.u + \alpha.v$ (Sağdan Dağılma Özelliği)

x. $\forall$ α, b $\in$ F ve $\forall$ u $\in$ V olmak üzere (α + b). u = u. α + u. b (Soldan Dağılma Özelliği)

Yukarıda ifade edilen (V, + , .) bir lineer uzaydır.

Tanım 2.1.2: [13] F cisim (reel ($\mathbb{R}$) veya kompleks ($\mathbb{C}$)) olmak üzere V, F cismi üzerinde bir lineer vektör uzayı ve $\|.\|$: V → $\mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanırsa

$\|.\|$: V → [0, ∞) fonksiyonuna norm denir.

i. $\forall$ x $\in$ V için $\|x\| \geq 0$

ii. Eğer x = 0 ancak ve ancak $\|x\| = 0$ ($\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$)

iii. $\forall$ x, y $\in$ V için $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Üçgen Eşitsizliği)

iv. $\forall$ x $\in$ V ve $\alpha \in$ F için $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$

Ayrıca, V bir lineer vektör uzay olmak üzere, bir norm $\|.\|_V$ üzerinde (V, $\|.\|$) ikilisine bir normlu lineer uzay denir.

Tanım 2.1.3: [21] $\star$: [0,1] × [0,1] → [0,1] ikili işlemi (dönüşümü) aşağıdaki koşulları sağlarsa $\star$ işlemi sürekli t – norm olarak adlandırılır.

i. $\star$ işlemi birleşme ve değişmeli özelliklerini sağlar.
ii. $\star$ işlemi süreklidir.
iii. Her bir $e \in [0,1]$ için $e \star 1 = e$ dir.
iv. $a, b, c, d \in [0,1]$ olmak üzere $a \leq c$ ve $b \leq d$ olduğunda $a \star b \leq c \star d$ dir.

Tanım 2.1.4: [23] $\diamond : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ ikili işlemi (dönüşümü) aşağıdaki özellikleri sağlarsa $\diamond$ işlemi sürekli t - co – norm olarak adlandırılır.

i. $\diamond$ işlemi birleşme ve değişmeli özelliklerini sağlar.
ii. $\diamond$ işlemi süreklidir.
iii. Her bir $e \in [0,1]$ için, $e \diamond 0 = e$ dir.
iv. $a, b, c, d \in [0,1]$ olmak üzere $a \leq c$ ve $b \leq d$ olduğunda $a \diamond b \leq c \diamond d$ dir.

2.2 Bulanık Küme

Tanım 2.2.1: [1] E boş olmayan sonlu bir küme olsun. $\mathcal{K}$ bulanık kümesi E evrensel kümesi üzerinde, $\mathcal{K} = \{(x,\ \mu_{\mathcal{K}}(x)) : x \in E\}$ şeklinde tanımlansın, burada, $\mu_{\mathcal{K}}(x)$, E üzerinde tanımlı olan ve $I = [0,\ 1]$ birim aralığı ile eşleşen x in üyelik fonksiyonu olarak adlandırılır.

Dolayısıyla, burada $\mu_{\mathcal{K}}(x)$, $x \in E$ nin $\mathcal{K}$ kümesine üye olma derecesini ifade eder.

Bulanık kümeler,

$$E \neq \emptyset \text{ ve } E \text{ sonlu bir küme olmak üzere,}$$

$\forall\, x \in E$ için,

$$0 \leq \mu_{\mathcal{K}}(x) \leq 1$$

ile ifade edilir ve aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$\mu_{\mathcal{K}} : E \rightarrow [0,\ 1]$ $\qquad \mathcal{K} = \{(x,\ \mu_{\mathcal{K}}(x)) : x \in E\}$ ($\mu_{\mathcal{K}}(x)$: üye olma derecesi)

Örneğin; E evrensel kümesi üzerinde bir $\mathcal{K}$ bulanık kümesi verilsin. Bu $\mathcal{K}$ kümesinde üye olma derecesi 0,8 olsun ve bu ifadeyi aşağıdaki şekilde gösterelim.

E evrensel kümesi üzerinde $\mathcal{K}$ bulanık kümesi $\mathcal{K} = \{(x,\ \mu_{\mathcal{K}}(x)) : x \in E\}$ ifade edilir.

Sonuç olarak,

$$\mathcal{K} = \{\langle x, 0{,}8\rangle : \mathrm{x} \in \mathrm{E}\}$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 2.2.2: [1] E evrensel kümesi üzerinde $\mathcal{K}_1 = \{(x,\ \mu_{\mathcal{K}_1}(\mathrm{x})) : \mathrm{x} \in E\}$ ve $\mathcal{K}_2 = \{(x,\ \mu_{\mathcal{K}_2}(\mathrm{x})) : \mathrm{x} \in E\}$ bulanık kümelerinin üyelik fonksiyonları, sırasıyla, $\mu_{\mathcal{K}_1}$ ve $\mu_{\mathcal{K}_2}$ olsun. $\forall$ x $\in$ E için;

$\mathcal{K}_1$ ile $\mathcal{K}_2$ nin $\mathcal{K}_1 \subseteq \mathcal{K}_2$ ($\mathcal{K}_2 \supseteq \mathcal{K}_1$) ile gösterilen kapsama işlemi ve $\mathcal{K}_1 = \mathcal{K}_2$ ile gösterilen eşitliği;

$$\mathcal{K}_1 \subseteq \mathcal{K}_2 \Leftrightarrow \mu_{\mathcal{K}_1}(\mathrm{x}) \leq \mu_{\mathcal{K}_2}(\mathrm{x})$$

$$\mathcal{K}_1 = \mathcal{K}_2 \Leftrightarrow \mathcal{K}_1 \subseteq \mathcal{K}_2 \text{ ve } \mathcal{K}_2 \subseteq \mathcal{K}_1$$

şeklinde ifade edilir.

Örnek 2.2.3: E bir evrensel küme olmak üzere $\mathcal{K}_1 = \{\langle x, 0{,}7\rangle : \mathrm{x} \in \mathrm{E}\}$ ve $\mathcal{K}_2 = \{\langle x, 0{,}9\rangle : \mathrm{x} \in \mathrm{E}\}$ bulanık kümelerinin üyelik fonksiyonları, sırasıyla, $\mu_{\mathcal{K}_1}$ ve $\mu_{\mathcal{K}_2}$ olsun. $\forall$ x $\in$ E için;

$$\mu_{\mathcal{K}_1}(\mathrm{x}) = 0{,}7 \text{ ve } \mu_{\mathcal{K}_2}(\mathrm{x}) = 0{,}9$$

$$0{,}7 \leq 0{,}9 \text{ olduğundan } \mathcal{K}_1 \subseteq \mathcal{K}_2 \text{ dir.}$$

Tanım 2.2.4: [1] E bir evrensel küme olmak üzere $\mathcal{K}_1 = \{(x,\ \mu_{\mathcal{K}_1}(\mathrm{x})) : \mathrm{x} \in E\}$ ve $\mathcal{K}_2 = \{(x,\ \mu_{\mathcal{K}_2}(\mathrm{x})) : \mathrm{x} \in E\}$ birer bulanık küme olsun. $\forall$ x $\in$ E için; $\mu_{\mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2} = \max\{\mu_{\mathcal{K}_1}(\mathrm{x}), \mu_{\mathcal{K}_2}(\mathrm{x})\}$ olmak üzere $\mathcal{K}_1$ ile $\mathcal{K}_2$ nin birleşimi:

$$\mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2 = \{\langle x, \mu_{\mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2}(x)\rangle : \mathrm{x} \in \mathrm{E}\}$$

şeklinde gösterilir.

Örnek 2.2.5: E bir evrensel küme olmak üzere $\mathcal{K}_1 = \{\langle x, 0{,}3\rangle : \mathrm{x} \in \mathrm{E}\}$ ve $\mathcal{K}_2 = \{\langle x, 0{,}4\rangle : \mathrm{x} \in \mathrm{E}\}$ bulanık kümelerinin üyelik fonksiyonları, sırasıyla, $\mu_{\mathcal{K}_1}$ ve $\mu_{\mathcal{K}_2}$ olsun. $\forall$ x $\in$ E için;

$$\mu_{\mathcal{K}_1}(\mathrm{x}) = 0{,}3 \qquad \mu_{\mathcal{K}_2}(\mathrm{x}) = 0{,}4$$

ve

$$\mu_{\mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2}(x) = \max(0{,}3, 0{,}4) = 0{,}4$$

olduğundan

$$\mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2 = \{\langle x, 0{,}4\rangle : \mathrm{x} \in \mathrm{E}\}$$

olduğu elde edilir.

Tanım 2.2.6: [1] E bir evrensel küme olmak üzere $\mathcal{K}_1 = \{(x,\ \mu_{\mathcal{K}_1}(\mathrm{x})) : \mathrm{x} \in E\}$ ve $\mathcal{K}_2 = \{(x,\ \mu_{\mathcal{K}_2}(\mathrm{x})) : \mathrm{x} \in E\}$ birer bulanık küme olsun. $\forall$ x $\in$ E için; $\mu_{\mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2} = \min\{\mu_{\mathcal{K}_1}(\mathrm{x}),\ \mu_{\mathcal{K}_2}(\mathrm{x})\}$ olmak üzere $\mathcal{K}_1$ ile $\mathcal{K}_2$ nin kesişimi:

$$\mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2 = \{\langle x, \mu_{\mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2}(x)\rangle : \mathrm{x} \in \mathrm{E}\}$$

şeklinde gösterilir.

Örnek 2.2.7: E bir evrensel küme olmak üzere $\mathcal{K}_1 = \{\langle x, 0{,}3\rangle : \mathrm{x} \in \mathrm{E}\}$ ve $\mathcal{K}_2 = \{\langle x, 0{,}4\rangle : \mathrm{x} \in \mathrm{E}\}$ bulanık kümelerinin üyelik fonksiyonları, sırasıyla, $\mu_{\mathcal{K}_1}$ ve $\mu_{\mathcal{K}_2}$ olsun. $\forall$ x $\in$ E için;

$$\mu_{\mathcal{K}_1}(\mathrm{x}) = 0{,}3 \qquad \mu_{\mathcal{K}_2}(\mathrm{x}) = 0{,}4$$

ve

$$\mu_{\mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2}(x) = \min(0{,}3, 0{,}4) = 0{,}3$$

olduğundan

$$\mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2 = \{\langle x, 0{,}3\rangle : \mathrm{x} \in \mathrm{E}\}$$

olduğu elde edilir.

Tanım 2.2.8: [1] E evrensel kümesi üzerinde $\mathcal{K} = \{(x,\ \mu_{\mathcal{K}}(\mathrm{x})) : \mathrm{x} \in E\}$ şeklinde tanımlansın. $\forall$ x $\in$ E için; $\mu_{\mathcal{K}^C}(\mathrm{x}) = 1 - \mu_{\mathcal{K}}(\mathrm{x})$ olmak üzere $\mathcal{K}$ nın $\mathcal{K}^C$ ile gösterilen tümleyeni:

$$\mathcal{K}^C = \{\langle x, \mu_{\mathcal{K}^C}(\mathrm{x})\rangle : \mathrm{x} \in \mathrm{E}\}$$

şeklinde gösterilir.

Örnek 2.2.9: E evrensel kümesi üzerinde $\mathcal{K} = \{\langle x, 0{,}4\rangle : \text{x} \in \text{E}\}$ olmak üzere $\mathcal{K}$ bulanık kümesi verilsin. ∀ x ∈ E için; $\mathcal{K}^C$ kümesini gösterelim:

$$\mu_{\mathcal{K}}\,(\text{x}) = 0{,}4 \qquad \mu_{\mathcal{K}^C}\,(\text{x}) = 1 - \mu_{\mathcal{K}}\,(\text{x})$$

ve

$$\mu_{\mathcal{K}^C}\,(\text{x}) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$$

olduğundan

$$\mathcal{K}^C = \{\langle x, 0{,}6\rangle : \text{x} \in \text{E}\}$$

olduğu elde edilir.

Tanım 2.2.10: [1] E bir evrensel küme olmak üzere $\mathcal{K}_1 = \{(x,\ \mu_{\mathcal{K}_1}\,(\text{x})) : \text{x} \in E\}$ ve $\mathcal{K}_2 = \{(x,\ \mu_{\mathcal{K}_2}\,(\text{x})) : \text{x} \in E\}$ birer bulanık küme olsun. ∀ x ∈ E için; $\mu_{\mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2}(x) = \mu_{\mathcal{K}_1}\,(\text{x}) + \mu_{\mathcal{K}_2}\,(\text{x}) - \mu_{\mathcal{K}_1}\,(\text{x}) \,.\, \mu_{\mathcal{K}_2}\,(\text{x})$ olmak üzere $\mathcal{K}_1$ ile $\mathcal{K}_2$ nin $\mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2$ toplama işlemi:

$$\mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2 = \left\{ \langle x, \mu_{\mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2}(x)\rangle : \text{x} \in \text{E} \right\}$$

şeklinde gösterilir.

Örnek 2.2.11: E bir evrensel küme olmak üzere $\mathcal{K}_1 = \{\langle x, 0{,}5\rangle : \text{x} \in \text{E}\}$ ve $\mathcal{K}_2 = \{\langle x, 0{,}7\rangle : \text{x} \in \text{E}\}$ bulanık kümelerinin üyelik fonksiyonları, sırasıyla, $\mu_{\mathcal{K}_1}$ ve $\mu_{\mathcal{K}_2}$ olsun. ∀ x ∈ E için;

$$\mu_{\mathcal{K}_1}\,(\text{x}) = 0{,}5 \qquad \mu_{\mathcal{K}_2}\,(\text{x}) = 0{,}7$$

ve

$$\mu_{\mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2}(x) = 0{,}5 + 0{,}7 - 0{,}5 \,.0{,}7$$

olduğundan

$$\mu_{\mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2}(x) = \frac{5}{10} + \frac{7}{10} - \frac{5}{10} \,.\, \frac{7}{10} = \frac{5}{10} + \frac{7}{10} - \frac{35}{100} = \frac{120}{100} - \frac{35}{100} = \frac{85}{100} = 0{,}85$$

$$\mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2 = \{ \langle x, 0{,}85\rangle : \text{x} \in \text{E} \}$$

olduğu elde edilir.

Tanım 2.2.12: [1] E bir evrensel küme olmak üzere $\mathcal{K}_1 = \{(x,\ \mu_{\mathcal{K}_1}(\mathrm{x})) : \mathrm{x} \in E\}$ ve $\mathcal{K}_2 = \{(x,\ \mu_{\mathcal{K}_2}(\mathrm{x})) : \mathrm{x} \in E\}$ birer bulanık küme olsun. $\forall$ x $\in$ E için; $\mu_{\mathcal{K}_1 \,.\, \mathcal{K}_2}(x) = \mu_{\mathcal{K}_1}(\mathrm{x}) \,.\, \mu_{\mathcal{K}_2}(\mathrm{x})$ olmak üzere $\mathcal{K}_1$ ile $\mathcal{K}_2$ nin çarpma işlemi:

$$\mathcal{K}_1 \,.\, \mathcal{K}_2 = \{ \langle x, \mu_{\mathcal{K}_1 \,.\, \mathcal{K}_2}(x) \rangle : \mathrm{x} \in \mathrm{E} \}$$

şeklinde gösterilir.

Örnek 2.2.13: E bir evrensel küme olmak üzere $\mathcal{K}_1 = \{\langle x, 0{,}7 \rangle : \mathrm{x} \in \mathrm{E}\}$ ve $\mathcal{K}_2 = \{\langle x, 0{,}9 \rangle : \mathrm{x} \in \mathrm{E}\}$ bulanık kümelerinin üyelik fonksiyonları, sırasıyla, $\mu_{\mathcal{K}_1}$ ve $\mu_{\mathcal{K}_2}$ olsun. ∀ x ∈ E için;

$$\mu_{\mathcal{K}_1}(\mathrm{x}) = 0{,}7 \qquad \mu_{\mathcal{K}_2}(\mathrm{x}) = 0{,}9$$

ve

$$\mu_{\mathcal{K}_1 \,.\, \mathcal{K}_2}(x) = 0{,}7 \,.\, 0{,}9 = \frac{7}{10} \,.\, \frac{9}{10} = \frac{63}{100} = 0{,}63$$

olduğundan

$$\mathcal{K}_1 \,.\, \mathcal{K}_2 = \{ \langle x, 0{,}63 \rangle : \mathrm{x} \in \mathrm{E} \}$$

olduğu elde edilir.

Tanım 2.2.14: [23] $[\,\mathrm{I}\,]$, $[\,0, 1\,]$ aralığının tüm kapalı alt aralıklarının kümesi olsun. $\mathrm{M} = [\,\mathrm{M_L}, \mathrm{M_U}] \in [\,\mathrm{I}\,]$ olacak şekilde, sırasıyla, $\mathrm{M_L}$ ve $\mathrm{M_U}$ alt sınır ve üst sınırlardır. Bir E evrensel kümesi için, E üzerinde bir aralık değerli bulanık küme olan

$$\mathrm{A} = \{ \langle x, \mathrm{M_A}(x) \rangle : x \in E \}$$

kümesi için $\mathrm{M_A} : \mathrm{E} \to [\,0, 1\,]$ fonksiyonu E üzerinde bir x elemanının üyelik derecesini tanımlar ve $\mathrm{M_A}(\mathrm{x}) = [\,\mathrm{M_{AL}}(\mathrm{x}), \mathrm{M_{AU}}(\mathrm{x})]$ olarak gösterilen bu ifadeye aralık değerli bulanık sayı denir. Burada,

$\mathrm{M_{AL}}(\mathrm{x})$ = x ∈ E nin üye olma derecesinin alt sınırı

$\mathrm{M_{AU}}(\mathrm{x})$ = x ∈ E nin üye olma derecesinin üst sınırı

şeklinde ifade edilir.

Örneğin; $A = \{\langle x, 0{,}5\rangle : x \in E\}$ ise 0,5 değerinin alt sınırı 0,4 ve üst sınırı 0,6 olur sonuç olarak $M_A(x) = [M_{AL}(x), M_{AU}(x)]$ şeklinde gösterilen bu ifade de $M_A(x) = [0{,}4, 0{,}6]$ olarak gösterilir.

Tanım 2.2.15: [13] X, F (reel veya compleks) cismi üzerinde bir lineer uzay ve $\star$ bir sürekli t-norm olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanırsa $X \times \mathbb{R}$ üzerinde bir bulanık N kümesine bir bulanık norm denir. $\forall\, x, y \in X$ ve $c \in F$ için,

(N_1) $\forall\, t \in \mathbb{R}$ $t \leq 0$ ise $N(x,t) = 0$

(N_2) $\forall\, t \in \mathbb{R}$ $x = 0$ ve $t > 0$ ise $N(x,t) = 1$

(N_3) $\forall\, t \in \mathbb{R}$ için, $c \neq 0$ ve $t > 0$ ise

$$N(cx,t) = N\left(x, \frac{t}{|c|}\right).$$

(N_4) $\forall\, s, t \in \mathbb{R}$ ve $\forall\, x, y \in X$ için,

$$N(x + y, t + s) \geq N(x,t) \star N(y,s)$$

(N_5) $\lim\limits_{t \to \infty} N(x, t) = 1$

Ayrıca $(X, N, \star)$ üçlüsüne bir bulanık normlu lineer uzay denir.

2.3 Sezgisel Bulanık Küme

Tanım 2.3.1: [2] $E \neq \emptyset$ olsun. $\forall\, x \in E$ için $0 \leq \mu_A(x) + \vartheta_A(x) \leq 1$ olacak şekilde,

$$\mu_A : E \to [0,1] \text{ ve } \vartheta_A : E \to [0,1]$$

fonksiyonları ile bir A sezgisel bulanık kümesi,

$$A = \{(x, \mu_A(x), \vartheta_A(x)) : x \in E\}$$

şeklinde ifade edilir. Burada $x \in E$'nin elemanları, sırasıyla, μ_A ve ϑ_A üye olma derecesi ve üye olmama derecesidir.

E üzerinde sıradan bir A bulanık kümesinde, üye olmama fonksiyonu $\vartheta_A(x) = 1 - \mu_A(x)$ şeklinde gösterilip özel olarak sezgisel bulanık küme olarak ifade edilebilir.

Ayrıca, tüm bunların yanında π_A ile gösterilen belirsizlik derecesi,

$$\pi_A\ (\mathrm{x}) = 1 - \mu_A\ (\mathrm{x}) - \vartheta_A\ (\mathrm{x})$$

şeklinde ifade edilir. Dolayısıyla, burada,

$$\mu_A\ (\mathrm{x}) = \mathrm{x} \in \mathrm{E} \text{ nin üye olma derecesi}$$

$$\vartheta_A\ (\mathrm{x}) = \mathrm{x} \in \mathrm{E} \text{ nin üye olmama derecesi}$$

$$\pi_A\ (\mathrm{x}) = \mathrm{x} \in \mathrm{E} \text{ nin belirsizlik derecesi}$$

şeklinde olur.

Örneğin; $\mathrm{A} = \{\langle x, (0{,}7), (0{,}2) : \mathrm{x} \in \mathrm{E}\rangle\}$ olsun. $\mu_A\ (\mathrm{x}) = 0{,}7$ ve $\vartheta_A\ (\mathrm{x}) = 0{,}2$ olduğundan $\pi_A\ (\mathrm{x}) = 1 - 0{,}7 - 0{,}2 = 0{,}1$ belirsizlik derecesi elde edilir.

Tanım 2.3.2: [23] Bir E kümesi üzerinde bir aralık değerli sezgisel bulanık küme olan A, $\forall$ x $\in$ E için,

$$\mathrm{A} = \{ \langle x, \mathrm{M_A}(x), \mathrm{N_A}(x)\rangle : x \in E \}$$

şeklinde tanımlansın.

Burada, $\mathrm{M_A} : \mathrm{E} \rightarrow [\,\mathrm{I}\,]$ ve $\mathrm{N_A} : \mathrm{E} \rightarrow [\,\mathrm{I}\,]$ ifadeleri sırasıyla üye olma ve üye olmama derecelerini temsil eder.

$$0 \leq \sup\ (\ \mathrm{M_A}(x)\ ) + \sup\ (\ \mathrm{N_A}(x)\ ) \leq 1$$

$$\mathrm{M_A}(\mathrm{x}) = [\ \mathrm{M_{AL}}(\mathrm{x}),\ \mathrm{M_{AU}}(\mathrm{x})] \text{ ve } \mathrm{N_A}(\mathrm{x}) = [\ \mathrm{N_{AL}}(\mathrm{x}),\ \mathrm{N_{AU}}(\mathrm{x})]$$

dir ve dolayısıyla,

$$\mathrm{A} = \{\ [\ \mathrm{M_{AL}}(\mathrm{x}),\ \mathrm{M_{AU}}(\mathrm{x})], [\ \mathrm{N_{AL}}(\mathrm{x}),\ \mathrm{N_{AU}}(\mathrm{x})]\ \}$$

kümesine aralık değerli sezgisel bulanık küme denir.

Ayrıca, burada

$$\mathrm{M_{AL}}(\mathrm{x}) = \mathrm{x} \in \mathrm{E} \text{ nin üye olma derecesinin alt sınırı}$$

$$\mathrm{M_{AU}}(\mathrm{x}) = \mathrm{x} \in \mathrm{E} \text{ nin üye olma derecesinin üst sınırı}$$

$$\mathrm{N_{AL}}(\mathrm{x}) = \mathrm{x} \in \mathrm{E} \text{ nin üye olmama derecesinin alt sınırı}$$

$$\mathrm{N_{AU}}(\mathrm{x}) = \mathrm{x} \in \mathrm{E} \text{ nin üye olmama derecesinin üst sınırı}$$

şeklinde ifade edilir.

Örneğin; A $= \{\langle x, (0,2), (0,5)\rangle : x \in E\}$ olsun. Burada,

$$M_A(x) = 0,2 \text{ ise } \quad M_{AL}(x) = 0,1 \text{ ve } M_{AU}(x) = 0,3$$

$$N_A(x) = 0,5 \text{ ise } \quad N_{AL}(x) = 0,4 \text{ ve } N_{AU}(x) = 0,6$$

şeklinde olur.

Tanım 2.3.3: [23] $\star$ bir sürekli t – norm, $\diamond$ bir sürekli t - co – norm ve V, F (reel ($\mathbb{R}$) veya compleks ($\mathbb{C}$)) cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. V üzerinde bir sezgisel bulanık A kümesi,

$$A = \{ ((x,t),\ N(x,t),\ M(x,t)) : (x,t) \in V \times \mathbb{R}^+\}$$

şeklinde verilsin. Burada, N ve M, $V \times \mathbb{R}^+$ üzerinde bulanık kümeler olup, sırasıyla, N üye olma derecesini ve M de üye olmama derecesini temsil ederek $(x,t) \in V \times \mathbb{R}^+$ olmak üzere aşağıdaki koşullar sağlanırsa A bir sezgisel bulanık normdur. $\forall$ x, y $\in$ V ve c $\in$ F için,

i. $N(x,t) + M(x,t) \leq 1$
ii. $N(x,t) > 0$
iii. $N(x,t) = 1$ ancak ve ancak $x = 0$
iv. $c \neq 0$ ise $N(cx,t) = N\left(x, \frac{t}{|c|}\right)$.
v. $\forall s, t \in \mathbb{R}^+$ ve $\forall$ x, y $\in$ V için,
$$N(x,s) \star N(y,t) \leq N(x + y,\ s + t)$$
vi. $N(x,.)$ $\mathbb{R}^+$ nın azalmayan fonksiyonudur ve $\lim_{t \to \infty} N(x,t) = 1$.
vii. $M(x,t) > 0$
viii. $M(x,t) = 0$ ancak ve ancak $x = 0$
ix. $c \neq 0$ ise $M(cx,t) = M\left(x, \frac{t}{|c|}\right)$.
x. $\forall s, t \in \mathbb{R}^+$ ve $\forall$ x, y $\in$ V için,
$$M(x,s) \diamond M(y,t) \geq M(x + y,\ s + t)$$
xi. $M(x,.)$ $\mathbb{R}^+$ nın artmayan fonksiyonudur ve $\lim_{t \to \infty} M(x,t) = 0$.

O halde (V, A, $\star$, $\diamond$) dörtlüsüne bir sezgisel bulanık normlu lineer uzay denir.

2.4 Nötrosofik Küme

Tanım 2.4.1: [5] E bir evrensel küme olsun.

$\rho_A(x)$**:** Doğruluk üyelik fonksiyonu

$\xi_A(x)$: Belirsizlik üyelik fonksiyonu

$\eta_A(x)$**:** Yanlışlık üyelik fonksiyonu

olmak üzere ve $\rho_A(x)$, $\xi_A(x)$ ve $\eta_A(x)$ fonksiyonları $]^{-}0, 1^{+}[$ nın gerçel standart olan ve gerçel standart olmayan alt kümesi olmak üzere aşağıdaki şekilde gösterilir:

$$\rho_A(x): E \longrightarrow]^{-}0, 1^{+}[$$

$$\xi_A(x): E \longrightarrow]^{-}0, 1^{+}[$$

$$\eta_A(x): E \longrightarrow]^{-}0, 1^{+}[$$

Böylece, A nötrosofik kümesi E üzerinde aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$A = \{\langle x, (\rho_A(x), \xi_A(x), \eta_A(x))\rangle : x \in E\}$$

ve $\forall x \in E$ için,

$$^{-}0 \leq \rho_A(x) + \xi_A(x) + \eta_A(x) \leq 3^{+}$$

ifadesi geçerlidir. Burada, $1^{+} = 1 + \in$ olmak üzere "1" onun standart kısmı ve "$\in$" ise onun standart olmayan kısmıdır. Ayrıca $^{-}0 = 0 - \in$ olmak üzere "0" onun standart kısmı ve "$\in$" ise onun standart olmayan kısmıdır.

Örnek 2.4.2: Büyük bir sanayi fabrikasında son moda teknolojik aletlerden cep telefonu üretimi yapılsın ve bu üretimde insanlar yerine yapay zekaya sahip insansı robotlar çalıştırılsın. İş sahibinin insansı robotların üretimlerine karşı doğruluk, belirsizlik ve yanlışlık derecelerini değerlendirelim.

Doğruluk ($\rho(x)$): İş sahibin insansı robotlardan "faydalanma" derecesi.

Yanlışlık ($\eta(x)$): İş sahibin insansı robotlardan "faydalanmama" derecesi.

Belirsizlik ($\xi(x)$): İş sahibinin insansı robotlardan faydalanma ile faydalanmama arasında kararsız kaldığı durumdaki belirsizlik derecesi.

Burada, evrensel kümemiz E olsun ve E: İş sahibinin insansı robotlardan faydalanma puanlaması. Bu puanlama 0 ile 100 arasında olsun, yani

$$E = [0,\ 100]$$

- 0 puan: Hiç faydalı değil
- 100 puan: Tamamen faydalı

şeklinde tanımlansın.

Nötrosofik kümemiz A olsun ve A: "İnsansı robotlardan faydalanma, faydalanmama ve belirsizlik değerlendirmesi" şeklinde tanımlansın.

Nötrosofik kümesinde, ∀ x ∈ E için,

$\rho(x)$: Faydalanma puanlaması

$\eta(x)$: Faydalanmama puanlaması

$\xi(x)$: Belirsizlik puanlaması

aşağıda verilen değerler üzerinden puanlansın.

Faydalanma $(\rho(x))$ için,

$$\rho(x) = \begin{cases} 0 & eğer\ \mathrm{x}\ \leq 30 \\ \frac{x-30}{70} & eğer\ 30 < x < 100 \\ 1 & eğer\ \mathrm{x}\ = 100 \end{cases}$$

ve

Fyadalanmama $(\eta(x))$ için,

$$\eta(x) = \begin{cases} 1 & eğer\ \mathrm{x}\ \leq 30 \\ \frac{100-x}{70} & eğer\ 30 < x < 100 \\ 0 & eğer\ \mathrm{x}\ = 100 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.

Belirsizlik $(\xi(x))$ için,

Belirsizlik fonksiyonunun sabit olduğunu kabul edelim ve $\xi(x)$ sabit bir değer alsın.

$$\xi(x) = 0{,}1$$

şeklinde tanımlansın.

- Eğer x = 20 ise,

$\rho(20) = 0$ (Hiç faydalı değil)

$$\eta(20) = 1 \text{ (Tamamen faydasız)}$$

$$\xi(20) = 0{,}1 \text{ (Belirsizlik)}$$

elde edilir.

- Eğer $x = 60$ ise,

$$\rho(60) = 0{,}43 \text{ (Az faydalı)}$$

$$\rho(60) = \frac{x-30}{70} = \frac{60-30}{70} = \frac{30}{70} = \frac{3}{7} = 0{,}43$$

elde edilir.

$$\eta(60) = 0{,}57 \text{ (Daha çok faydasız)}$$

$$\eta(60) = \frac{100-x}{70} = \frac{100-60}{70} = \frac{40}{70} = \frac{4}{7} = 0{,}57$$

elde edilir.

$$\xi(60) = 0{,}1 \text{ (Belirsizlik)}$$

- Eğer $x = 100$ ise,

$$\rho(100) = 1 \text{ (Tamamen faydalı)}$$

$$\eta(100) = 0 \text{ (Az faydasız)}$$

$$\xi(100) = 0{,}1 \text{ (Belirsizlik)}$$

elde edilir.

Yukarıdaki ifadelerden görüldüğü üzere, insansı robotlardan faydalanma puanlamasında kesin sınırlar bulunmamakla beraber faydalanma (doğruluk), faydalanmama (yanlışlık) ve belirsizlik puanlamalarına değinilmiştir. İş sahibinin düşüncesi ve karşılaştığı faydalanma seviyesi farklı olduğundan belirsizlik puanlamasını sabit tutmak koşuluyla farklı farklı faydalanma ve faydalanmama puanlaması olduğu görülmektedir. Bu puanlama sistemi hep böyle farklılaşma gösterir.

2.5 Tek Değerli Nötrosofik Küme

Tanım 2.5.1: [24] E bir evrensel küme olsun.

$\rho_A(x)$**:** Doğruluk üyelik fonksiyonu

$\xi_A(x)$**:** Belirsizlik üyelik fonksiyonu

$$\eta_A(x)\text{: Yanlışlık üyelik fonksiyonu}$$

olmak üzere $\rho_A(x)$, $\xi_A(x)$ ve $\eta_A(x)$ üyelik fonksiyonları değerleri yalnızca $[0,1]$ aralığında tanımlanır ve aşağıdaki şekilde gösterilir:

$$\rho_A(x)\colon E \longrightarrow [0,1]$$

$$\xi_A(x)\colon E \longrightarrow [0,1]$$

$$\eta_A(x)\colon E \longrightarrow [0,1]$$

Böylece, A tek değerli nötrosofik kümesi E üzerinde aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$A = \{\langle x, \rho_A(x), \xi_A(x), \eta_A(x)\rangle : x \in E\}$$

ve $\forall\, x \in E$ için,

$$0 \leq \sup\rho(x) + \sup\xi(x) + \sup\eta(x) \leq 3$$

şeklinde ifade edilir.

Tanım 2.5.2: [24] E evrensel kümesi üzerinde $A = \{\langle x, \rho_A(x), \xi_A(x), \eta_A(x)\rangle : x \in E\}$ bir tek değerli nötrosofik küme olsun. A nın tümleyeni A^C ile gösterilir ve her $x \in E$ için;

$$\rho_{A^C}(x) = \eta_A(x)$$

$$\xi_{A^C}(x) = 1 - \xi_A(x)$$

$$\eta_{A^C}(x) = \rho_A(x)$$

olmak üzere

$$A^c = \{\langle x, \eta_A(x), 1 - \xi_A(x), \rho_A(x)\rangle : x \in E\}$$

şeklinde gösterilir.

Örnek 2.5.3: E evrensel küme olmak üzere $A = \left\{ \langle x, \frac{4}{10}, \frac{7}{10}, \frac{5}{10}\rangle : x \in E \right\}$ bir tek değerli nötrosofik küme olsun. Her $x \in E$ için; A nın A^C ile gösterilen tümleyeni:

Bu A kümesinde,

$$\rho_A(x) = \frac{4}{10} \qquad \xi_A(x) = \frac{7}{10} \qquad \text{ve} \qquad \eta_A(x) = \frac{5}{10}$$

$$\rho_{A^C}(x) = \eta_A(x)$$

$$\xi_{A^C}(x) = 1 - \xi_A(x)$$

$$\eta_{A^C}(x) = \rho_A(x)$$

olduğundan

$$A^C = \left\{ \langle x, \tfrac{5}{10}, \left(1 - \tfrac{7}{10}\right), \tfrac{4}{10} \rangle : x \in E \right\}$$

$$A^C = \left\{ \langle x, \tfrac{5}{10}, \tfrac{3}{10}, \tfrac{4}{10} \rangle : x \in E \right\}$$

olduğu elde edilir.

Tanım 2.5.4: [24] E evrensel bir küme olsun. $A_1 = \{\langle x, \rho_{A_1}(x), \xi_{A_1}(x), \eta_{A_1}(x)\rangle\}$ ve $A_2 = \{\langle x, \rho_{A_2}(x), \xi_{A_2}(x), \eta_{A_2}(x)\rangle\}$ birer nötrosofik küme olmak üzere her $x \in E$ için,

$$\rho_{A_1}(x) \le \rho_{A_2}(x)$$

$$\xi_{A_1}(x) \ge \xi_{A_2}(x)$$

$$\eta_{A_1}(x) \ge \eta_{A_2}(x)$$

ise A_2, A_1 i kapsar denir ve $A_1 \subseteq A_2$ şeklinde gösterilir.

Örnek 2.5.5: E bir evrensel küme olmak üzere, $A_1 = \left\{\langle x, \frac{4}{10}, \frac{6}{10}, \frac{8}{10}\rangle : x \in E\right\}$ ve $A_2 = \left\{\langle x, \frac{7}{10}, \frac{2}{10}, \frac{4}{10}\rangle : x \in E\right\}$ birer nötrosofik küme olsun. $A_1 \subseteq A_2$ olduğunu gösterelim. A_1 ve A_2 kümelerinde sırasıyla,

$$\rho_{A_1}(x) \le \rho_{A_2}(x), \quad \xi_{A_1}(x) \ge \xi_{A_2}(x) \quad \text{ve} \quad \eta_{A_1}(x) \ge \eta_{A_2}(x)$$

olduğundan $A_1 \subseteq A_2$ olur.

Tanım 2.5.6: [24] E evrensel bir küme olsun. $A_1 = \{\langle x, \rho_{A_1}(x), \xi_{A_1}(x), \eta_{A_1}(x)\rangle\}$ ve $A_2 = \{\langle x, \rho_{A_2}(x), \xi_{A_2}(x), \eta_{A_2}(x)\rangle\}$ birer nötrosofik küme olmak üzere $\forall\, x \in E$ için, A_1 ve A_2 kümelerinin eşitliği $A_1 = A_2$ ile gösterilir. Ayrıca

$$A_1 \subseteq A_2 \quad \text{ve} \quad A_2 \subseteq A_1 \Rightarrow A_1 = A_2$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 2.5.7: [24] E evrensel kümesi üzerinde $A_1 = \{\langle x, \rho_{A_1}(x), \xi_{A_1}(x), \eta_{A_1}(x)\rangle\}$ ve $A_2 = \{\langle x, \rho_{A_2}(x), \xi_{A_2}(x), \eta_{A_2}(x)\rangle\}$ birer nötrosofik küme olsun. $\forall\, x \in$ E için,

$$\rho_{A_1 \cup A_2}(x) = \max\{\rho_{A_1}(x), \rho_{A_2}(x)\}$$

$$\xi_{A_1 \cup A_2}(x) = \min\{\xi_{A_1}(x), \xi_{A_2}(x)\}$$

$$\eta_{A_1 \cup A_2}(x) = \min\{\eta_{A_1}(x), \eta_{A_2}(x)\}$$

olmak üzere A_1 ile A_2 nin birleşimi:

$$A_1 \cup A_2 = \{\langle x, \rho_{A_1 \cup A_2}(x), \xi_{A_1 \cup A_2}(x), \eta_{A_1 \cup A_2}(x)\rangle : x \in E\}$$

şeklinde gösterilir.

Örnek 2.5.8: E bir evrensel küme olmak üzere $A_1 = \{\langle x, \frac{1}{10}, \frac{6}{10}, \frac{7}{10}\rangle : x \in E\}$ ve $A_2 = \{\langle x, \frac{5}{10}, \frac{2}{10}, \frac{4}{10}\rangle : x \in E\}$ birer nötrosofik küme olsun. $\forall\, x \in$ E için;

$$\max\left\{\frac{1}{10}, \frac{5}{10}\right\} = \frac{5}{10} \qquad \min\left\{\frac{6}{10}, \frac{2}{10}\right\} = \frac{2}{10} \qquad \min\left\{\frac{7}{10}, \frac{4}{10}\right\} = \frac{4}{10}$$

olduğundan

$$A_1 \cup A_2 = \left\{\langle x, \frac{5}{10}, \frac{2}{10}, \frac{4}{10}\rangle : x \in E\right\}$$

olduğu elde edilir.

Tanım 2.5.9:[24] E evrensel kümesi üzerinde $A_1 = \{\langle x, \rho_{A_1}(x), \xi_{A_1}(x), \eta_{A_1}(x)\rangle\}$ ve $A_2 = \{\langle x, \rho_{A_2}(x), \xi_{A_2}(x), \eta_{A_2}(x)\rangle\}$ birer nötrosofik küme olsun. $\forall\, x \in$ E için;

$$\rho_{A_1 \cap A_2}(x) = \min\{\rho_{A_1}(x), \rho_{A_2}(x)\}$$

$$\xi_{A_1 \cap A_2}(x) = \max\{\xi_{A_1}(x), \xi_{A_2}(x)\}$$

$$\eta_{A_1 \cap A_2}(x) = \max\{\eta_{A_1}(x), \eta_{A_2}(x)\}$$

olmak üzere A_1 ile A_2 nin kesişimi:

$$\mathrm{A}_1 \cap \mathrm{A}_2 = \left\{\langle x, \rho_{\mathrm{A}_1 \cap \mathrm{A}_2}(x), \xi_{\mathrm{A}_1 \cap \mathrm{A}_2}(x), \eta_{\mathrm{A}_1 \cap \mathrm{A}_2}(x)\rangle : x \in E\right\}$$

şeklinde gösterilir.

Örnek 2.5.10: E bir evrensel küme olmak üzere $\mathrm{A}_1 = \left\{\langle x, \frac{3}{10}, \frac{7}{10}, \frac{9}{10}\rangle : x \in E\right\}$ ve $\mathrm{A}_2 = \left\{\langle x, \frac{4}{10}, \frac{6}{10}, \frac{7}{10}\rangle : x \in E\right\}$ birer nötrosofik küme olsun. $\forall\, x \in$ E için;

$$\min\left\{\frac{3}{10}, \frac{4}{10}\right\} = \frac{3}{10} \qquad \max\left\{\frac{7}{10}, \frac{6}{10}\right\} = \frac{7}{10} \qquad \max\left\{\frac{9}{10}, \frac{7}{10}\right\} = \frac{9}{10}$$

olduğundan

$$\mathrm{A}_1 \cap \mathrm{A}_2 = \left\{\langle x, \frac{3}{10}, \frac{7}{10}, \frac{9}{10}\rangle : x \in E\right\}$$

olduğu elde edilir.

Tanım 2.5.11: [24] E evrensel kümesi üzerinde $A_1 = \left\{\langle \mathrm{x}, \rho_{A_1}(x), \xi_{A_1}(x), \eta_{\mathrm{A}_1}(x)\rangle\right\}$ ve $A_2 = \left\{\langle \mathrm{x}, \rho_{A_2}(x), \xi_{A_2}(x), \eta_{\mathrm{A}_2}(x)\rangle\right\}$ birer nötrosofik küme olsun. $\forall\, x \in$ E için;

$$\rho_{\mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2}(x) = \rho_{\mathrm{A}_1}(x) + \rho_{\mathrm{A}_2}(x) - \rho_{\mathrm{A}_1}(x).\ \rho_{\mathrm{A}_2}(x)$$

$$\xi_{\mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2}(x) = \xi_{\mathrm{A}_1}(x).\ \xi_{\mathrm{A}_2}(x)$$

$$\eta_{\mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2}(x) = \eta_{\mathrm{A}_1}(x).\ \eta_{\mathrm{A}_2}(x)$$

olmak üzere, A_1 ile A_2 nin toplama işlemi;

$$\mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2 = \left\{\langle x, \rho_{\mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2}(x), \xi_{\mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2}(x), \eta_{\mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2}(x)\rangle : x \in \mathrm{E}\right\}$$

şeklinde gösterilir.

Örnek 2.5.12: E evrensel kümesi üzerinde $\mathrm{A}_1 = \left\{\langle x, \frac{4}{10}, \frac{3}{10}, \frac{7}{10}\rangle : x \in E\right\}$ ve $\mathrm{A}_2 = \left\{\langle x, \frac{5}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10}\rangle : x \in E\right\}$ birer nötrosofik küme olsun. $\forall\, x \in$ E için;

$$\rho_{\mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2}(x) = \frac{4}{10} + \frac{5}{10} - \frac{4}{10} . \frac{5}{10} = \frac{70}{100}$$

$$\xi_{\mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2}(x) = \frac{3}{10} . \frac{2}{10} = \frac{6}{100}$$

$$\eta_{\mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2}(x) = \frac{7}{10} . \frac{3}{10} = \frac{21}{100}$$

olduğundan

$$A_1 + A_2 = \left\{\langle x, \frac{70}{100}, \frac{6}{100}, \frac{21}{100} \rangle : x \in E\right\}$$

olduğu elde edilir.

Tanım 2.5.13: [24] E evrensel kümesi üzerinde $A_1 = \{\langle x, \rho_{A_1}(x), \xi_{A_1}(x), \eta_{A_1}(x)\rangle\}$ ve $A_2 = \{\langle x, \rho_{A_2}(x), \xi_{A_2}(x), \eta_{A_2}(x)\rangle\}$ birer nötrosofik küme olsun. $\forall\, x \in$ E için;

$$\rho_{A_1 . A_2}(x) = \rho_{A_1}(x) . \rho_{A_2}(x)$$

$$\xi_{A_1 . A_2}(x) = \xi_{A_1}(x) + \xi_{A_2}(x) - \xi_{A_1}(x) . \xi_{A_2}(x)$$

$$\eta_{A_1 . A_2}(x) = \eta_{A_1}(x) + \eta_{A_2}(x) - \eta_{A_1}(x) . \eta_{A_2}(x)$$

olmak üzere A_1 ile A_2 nin çarpma işlemi:

$$A_1 . A_2 = \left\{\langle x, \rho_{A_1 . A_2}(x), \xi_{A_1 . A_2}(x), \eta_{A_1 . A_2}(x) \rangle : x \in E\right\}$$

şeklinde gösterilir.

Örnek 2.5.14: E bir evrensel küme olmak üzere $A_1 = \left\{ \langle x, \frac{2}{10}, \frac{5}{10}, \frac{8}{10} \rangle : x \in E \right\}$ ve $A_2 = \left\{\langle x, \frac{6}{10}, \frac{3}{10}, \frac{4}{10}\rangle : x \in E\right\}$ birer nötrosofik küme olsun. $\forall\, x \in$ E için;

$$\rho_{A_1 . A_2}(x) = \frac{2}{10} . \frac{6}{10} = \frac{12}{100}$$

$$\xi_{A_1 . A_2}(x) = \frac{5}{10} + \frac{3}{10} - \frac{5}{10} . \frac{3}{10} = \frac{65}{100}$$

$$\eta_{A_1 . A_2}(x) = \frac{8}{10} + \frac{4}{10} - \frac{8}{10} . \frac{4}{10} = \frac{88}{100}$$

olduğundan

$$A_1 . A_2 = \left\{\langle x, \frac{12}{100}, \frac{65}{100}, \frac{88}{100} \rangle : x \in E\right\}$$

olduğu elde edilir.

Tanım 2.5.15: [24] E evrensel kümesi üzerinde A bir tek değerli nötrosofik küme olmak üzere $A = \{\langle x, \rho_A(x), \xi_A(x), \eta_A(x)\rangle : x \in E\}$ şeklinde tanımlansın. $\forall\, x \in$ E için, A nın λ gibi bir skaler ile λA ile gösterilen çarpımı:

$\lambda > 0$ için,

$$\lambda A = \langle 1 - (1 - \rho_A)^{\lambda}, (\xi_A)^{\lambda}, (\eta_A)^{\lambda} \rangle$$

şeklinde gösterilir.

Örnek 2.5.16: E bir evrensel küme olmak üzere $A = \left\{ \langle x, \frac{4}{10}, \frac{7}{10}, \frac{9}{10} \rangle : x \in E \right\}$ bir tek değerli nötrosofik küme v e $\lambda = 2$ olsun. $\forall\, x \in$ E için;

$$\lambda A = 2A = \left\{ \langle x, \left(1 - \left(1 - \frac{4}{10}\right)^2\right), \left(\frac{7}{10}\right)^2, \left(\frac{9}{10}\right)^2 \rangle : x \in E \right\}$$

$$= \left\{ \langle x, \left(1 - \frac{36}{100}, \frac{49}{100}, \frac{81}{100}\right) \rangle : x \in E \right\}$$

olduğundan

$$= \left\{ \langle x, \frac{64}{100}, \frac{49}{100}, \frac{81}{100} \rangle : x \in E \right\}$$

olduğu elde edilir.

Tanım 2.5.17: [**24**] E evrensel kümesi üzerinde A bir tek değerli nötrosofik küme olmak üzere $A = \{\langle x, \rho_A(x), \xi_A(x), \eta_A(x) \rangle : x \in E\}$ şeklinde tanımlansın. A nın λ kuvveti A^λ ile gösterilir ve $\lambda > 0$ için,

$$A^\lambda = \langle (\rho_A)^\lambda, 1 - (1 - \xi_A)^\lambda, 1 - (1 - \eta_A)^\lambda \rangle$$

şeklinde gösterilir.

Örnek 2.5.18: E bir evrensel küme olmak üzere $A = \left\{ \langle x, \frac{5}{10}, \frac{7}{10}, \frac{9}{10} \rangle : x \in E \right\}$ bir tek değerli nötrosofik küme v e $\lambda = 2$ olsun. $\forall\, x \in$ E için;

A^λ nın gösterimi:

$$A^\lambda = A^2 = \left\{ \langle \left(\frac{5}{10}\right)^2, \left(1 - \left(1 - \frac{7}{10}\right)^2\right), \left(1 - \left(1 - \frac{9}{10}\right)^2\right) \rangle : x \in E \right\}$$

$$= \left\{ \langle \frac{25}{100}, 1 - \frac{9}{100}, 1 - \frac{1}{100} \rangle : x \in E \right\}$$

olduğundan

$$= \left\{ \langle \frac{25}{100}, \frac{91}{100}, \frac{99}{100} \rangle : x \in E \right\}$$

olduğu elde edilir.

2.6 Çok Değerli Nötrosofik Küme

Tanım 2.6.1: [25] E evrensel bir küme olmak üzere, E kümesi üzerinde B çok değerli nötrosofik kümesi:

$\forall$ x $\in E$ ve $i = 1,2,\ldots,\wp$ için;

B =

$$\left\{\langle x, \left(\rho_B^1(x), \rho_B^2(x), \ldots, \rho_B^{\wp}(x)\right), \left(\xi_B^1(x), \xi_B^2(x), \ldots, \xi_B^{\wp}(x)\right), \left(\eta_B^1(x), \eta_B^2(x), \ldots, \eta_B^{\wp}(x)\right)\rangle : x \in \mathrm{E}\right\}$$

şeklinde gösterilir. $\forall$ x $\in E$ için;

$$\rho_B^1, \rho_B^2, \ldots, \rho_B^{\wp} : \mathrm{E} \longrightarrow [0,1]$$

$$\xi_B^1, \xi_B^2, \ldots, \xi_B^{\wp} : \mathrm{E} \longrightarrow [0,1]$$

$$\eta_B^1, \eta_B^2, \ldots, \eta_B^{\wp} : \mathrm{E} \longrightarrow [0,1]$$

Öyle ki,

$$0 \leq \rho_B^i(x) + \xi_B^i(x) + \eta_B^i(x) \leq 3$$

ifadesi geçerlidir. Burada,

$$\left(\rho_B^1(x), \rho_B^2(x), \ldots, \rho_B^{\wp}(x)\right), \left(\xi_B^1(x), \xi_B^2(x), \ldots, \xi_B^{\wp}(x)\right) \; ve \; \left(\eta_B^1(x), \eta_B^2(x), \ldots, \eta_B^{\wp}(x)\right)$$

fonksiyonları sırasıyla doğruluk derecesi, belirsizlik derecesi ve yanlışlık dereceleridir. Ayrıca, $\wp$ ifadesi B çok değerli nötrosofik kümesinin kardinalitesidir.

Tanım 2.6.2: [25] E evrensel kümesi üzerinde

$B_1 =$

$$\left\{\langle x, \left(\rho_{B_1}^1(x), \rho_{B_1}^2(x), \rho_{B_1}^3(x)\right), \left(\xi_{B_1}^1(x), \xi_{B_1}^2(x), \xi_{B_1}^3(x)\right), \left(\eta_{B_1}^1(x), \eta_{B_1}^2(x), \eta_{B_1}^3(x)\right)\rangle : x \in \mathrm{E}\right\}$$

ve

$B_2 =$

$$\left\{\langle x, \left(\rho_{B_2}^1(x), \rho_{B_2}^2(x), \rho_{B_2}^3(x)\right), \left(\xi_{B_2}^1(x), \xi_{B_2}^2(x), \xi_{B_2}^3(x)\right), \left(\eta_{B_2}^1(x), \eta_{B_2}^2(x), \eta_{B_2}^3(x)\right)\rangle : x \in \mathrm{E}\right\}$$

iki çok değerli nötrosofik kümeler olsun. $\forall$ x $\in$ E için,

$$\rho^i{}_{B_1}(x) \leq \rho^i{}_{B_2}(x)$$

$$\xi^{i}{}_{B_1}(x) \geq \xi^{i}{}_{B_2}(x)$$

$$\eta^{i}{}_{B_1}(x) \geq \eta^{i}{}_{B_2}(x)$$

ise B_2 , B_1 i kapsar denir ve $B_1 \subseteq B_2$ şeklinde gösterilir.

Örnek 2.6.3: E bir evrensel küme olmak üzere

$$B_1 = \left\{\langle x, \left(\frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \frac{4}{10}\right), \left(\frac{4}{10}, \frac{5}{10}, \frac{6}{10}\right), \left(\frac{3}{10}, \frac{7}{10}, \frac{8}{10}\right) \rangle : x \in E\right\}$$

ve

$$B_2 = \left\{\langle x, \left(\frac{3}{10}, \frac{5}{10}, \frac{6}{10}\right), \left(\frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \frac{4}{10}\right), \left(\frac{1}{10}, \frac{4}{10}, \frac{5}{10}\right) \rangle : x \in E\right\}$$

çok değerli nötrosofik kümeler olsun. $B_1 \subseteq B_2$ olduğunu gösterelim. $\forall$ x $\in$ E için,

$$\frac{2}{10} \leq \frac{3}{10} \qquad \frac{4}{10} \geq \frac{2}{10} \qquad \frac{3}{10} \geq \frac{1}{10}$$

$$\frac{3}{10} \leq \frac{5}{10} \qquad \frac{5}{10} \geq \frac{3}{10} \qquad \frac{7}{10} \geq \frac{4}{10}$$

$$\frac{4}{10} \leq \frac{6}{10} \qquad \frac{6}{10} \geq \frac{4}{10} \qquad \frac{8}{10} \geq \frac{5}{10}$$

olduğundan $B_1 \subseteq B_2$ dir.

Tanım 2.6.4: [25] E evrensel kümesi üzerinde

$B_1 =$

$$\left\{\langle x, \left(\rho^1_{B_1}(x), \rho^2_{B_1}(x), \rho^3_{B_1}(x)\right), \left(\xi^1_{B_1}(x), \xi^2_{B_1}(x), \xi^3_{B_1}(x)\right), \left(\eta^1_{B_1}(x), \eta^2_{B_1}(x), \eta^3_{B_1}(x)\right)\rangle : x \in E\right\}$$

ve

$B_2 =$

$$\left\{\langle x, \left(\rho^1_{B_2}(x), \rho^2_{B_2}(x), \rho^3_{B_2}(x)\right), \left(\xi^1_{B_2}(x), \xi^2_{B_2}(x), \xi^3_{B_2}(x)\right), \left(\eta^1_{B_2}(x), \eta^2_{B_2}(x), \eta^3_{B_2}(x)\right)\rangle : x \in E\right\}$$

şeklinde tanımlansın. $\forall$ x $\in$ E için,

$$\rho^{i}{}_{B_1}(x) = \rho^{i}{}_{B_2}(x)$$

$$\xi^{i}{}_{B_1}(x) = \xi^{i}{}_{B_2}(x)$$

$$\eta^{i}{}_{B_1}(x) = \eta^{i}{}_{B_2}(x)$$

ise B_1 ile B_2 nin eşitliği $\mathrm{B}_1 = \mathrm{B}_2$ ile gösterilir. Ayrıca $B_1 = B_2$ ise $B_1 \subseteq B_2$ ve $B_2 \subseteq B_1$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.6.5: [25] E evrensel kümesi üzerinde

$$B = \left\{\langle x, \left(\rho_B^1(x), \rho_B^2(x), \ldots, \rho_B^{\wp}(x)\right), \left(\xi_B^1(x), \xi_B^2(x), \ldots, \xi_B^{\wp}(x)\right), \left(\eta_B^1(x), \eta_B^2(x), \ldots, \eta_B^{\wp}(x)\right)\rangle : x \in \mathrm{E}\right\}$$

şeklinde tanımlansın. B kümesinin tümleyeni B^C ile gösterilir. $\forall$ x $\in$ E için,

$$B^C = \left\{\left\langle \begin{matrix} x, \left(\rho^1{}_{B^C}(\mathrm{x}), \rho^2{}_{B^C}(\mathrm{x}), \ldots, \rho^{\wp}{}_{B^C}(\mathrm{x})\right), \left(\xi^1{}_{B^C}(\mathrm{x}), \xi^2{}_{B^C}(\mathrm{x}), \ldots, \xi^{\wp}{}_{B^C}(\mathrm{x})\right), \\ \left(\eta^1{}_{B^C}(\mathrm{x}), \eta^2{}_{B^C}(\mathrm{x}), \ldots, \eta^{\wp}{}_{B^C}(\mathrm{x})\right) : x \in E \end{matrix} \right\rangle\right\}$$

$$\rho_{A^C}(x) = \eta_A(\mathrm{x})$$

$$\xi_{A^C}(x) = 1 - \xi_{\mathrm{A}}(\mathrm{x})$$

$$\eta_{A^C}(x) = \rho_{\mathrm{A}}(\mathrm{x})$$

olduğundan,

$$B^C = \{\langle x, (\eta^1(x), \eta^2(x), \ldots, \eta^{\wp}(x)), (1 - \xi^1(x), 1 - \xi^2(x), \ldots, 1 - \xi^{\wp}(x)), (\rho^1(x), \rho^2(x), \ldots, \rho^{\wp}(x))\rangle\}$$

şeklinde gösterilir.

Örnek 2.6.6: E bir evrensel küme olmak üzere B çok değerli nötrosofik küme

$$B = \left\{\langle \mathrm{x}, \left(\frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \frac{4}{10}\right), \left(\frac{4}{10}, \frac{5}{10}, \frac{6}{10}\right), \left(\frac{3}{10}, \frac{7}{10}, \frac{8}{10}\right) \rangle : \mathrm{x} \in \mathrm{E}\right\}$$

şeklinde verilsin. $\forall$ x $\in$ E için,

$$B^C = \left\{\langle \mathrm{x}, \left(\frac{3}{10}, \frac{7}{10}, \frac{8}{10}\right), \left(1 - \frac{4}{10}, 1 - \frac{5}{10}, 1 - \frac{6}{10}\right), \left(\frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \frac{4}{10}\right) \rangle : \mathrm{x} \in \mathrm{E}\right\}$$

olduğundan

$$B^C = \left\{\langle \mathrm{x}, \left(\frac{3}{10}, \frac{7}{10}, \frac{8}{10}\right), \left(\frac{6}{10}, \frac{5}{10}, \frac{4}{10}\right), \left(\frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \frac{4}{10}\right) \rangle : \mathrm{x} \in \mathrm{E}\right\}$$

olduğu elde edilir.

Tanım 2.6.7: [25] Eğer $\forall$ x $\in$ E ve $i = 1,2,\ldots,p$ için,

$\rho^{i}{}_{B}(\mathrm{x}) = 0$ ve $\xi^{i}{}_{B}(\mathrm{x}) = \eta^{i}{}_{B}(\mathrm{x}) = 1$ oluyorsa B kümesine çok değerli nötrosofik boş küme denir ve $\emptyset$ şeklinde gösterilir. Ayrıca herhangi bir x $\in$ E için, $\rho^{i}{}_{B}(\mathrm{x}) = 0$ ve $\xi^{i}{}_{B}(\mathrm{x}) = \eta^{i}{}_{B}(\mathrm{x}) = 1$ oluyorsa eleman bu kümeye ait değildir denir ve kümeye eleman olarak yazılmaz.

Eğer $\forall$ x $\in$ E ve $i = 1,2,\ldots,p$ için,

$\rho^{i}{}_{B}(\mathrm{x}) = 1$ ve $\xi^{i}{}_{B}(\mathrm{x}) = \eta^{i}{}_{B}(\mathrm{x}) = 0$ oluyorsa B kümesine çok değerli nötrosofik evrensel küme denir ve E şeklinde gösterilir.

Örnek 2.6.8: E evrensel kümesi üzerinde E = $\{x_1, x_2\}$ olmak üzere

$$\mathrm{B}_1 = \{\langle \mathrm{x}_1, (0,0,0), (1,1,1), (1,1,1), \mathrm{x}_2, (0,0,0), (1,1,1), (1,1,1)\rangle : \mathrm{x} \in \mathrm{E}\}$$

ve

$$\mathrm{B}_2 = \left\{\langle \mathrm{x}_1, (0,0,0), (1,1,1), (1,1,1), \mathrm{x}_2, \left(\frac{3}{10}, \frac{8}{10}, \frac{6}{10}\right), \left(\frac{1}{10}, \frac{4}{10}, \frac{6}{10}\right), \left(\frac{5}{10}, \frac{7}{10}, \frac{9}{10}\right)\rangle \right. \\ \left. : \mathrm{x} \in \mathrm{E}\right\}$$

çok değerli nötrosofik kümeler olsun. Bu kümelerde hem boş küme hem de evrensel küme gösterimi:

$$B_2 = \left\{\langle x_2, \left(\frac{3}{10}, \frac{8}{10}, \frac{6}{10}\right), \left(\frac{1}{10}, \frac{4}{10}, \frac{6}{10}\right), \left(\frac{5}{10}, \frac{7}{10}, \frac{9}{10}\right)\rangle : \mathrm{x} \in \mathrm{E}\right\}$$

şeklindedir.

Tanım 2.6.9: [24] E evrensel kümesi üzerinde

$$B_1 = \\ \left\{\langle x, \left(\rho_{B_1}^{1}(x), \rho_{B_1}^{2}(x), \rho_{B_1}^{3}(x)\right), \left(\xi_{B_1}^{1}(x), \xi_{B_1}^{2}(x), \xi_{B_1}^{3}(x)\right), \left(\eta_{B_1}^{1}(x), \eta_{B_1}^{2}(x), \eta_{B_1}^{3}(x)\right)\rangle : x \right. \\ \left. \in \mathrm{E}\right\}$$

ve

$B_2 =$

$\{\langle x, \left(\rho^1_{B_2}(x), \rho^2_{B_2}(x), \rho^3_{B_2}(x)\right), \left(\xi^1_{B_2}(x), \xi^2_{B_2}(x), \xi^3_{B_2}(x)\right), \left(\eta^1_{B_2}(x), \eta^2_{B_2}(x), \eta^3_{B_2}(x)\right)\rangle : x$
$\in \mathrm{E}\}$

şeklinde tanımlansın.

B_1 ve B_2 kümelerinin birleşimi $B_1 \cup B_2 = \mathrm{C}$ şeklinde gösterilir.

Burada, $i = 1,2,\ldots,p$ ve $\forall$ x ∈ E için,

$$\rho^i_C(x) = \max\left(\rho^i_{B_1}(x), \rho^i_{B_2}(x)\right)$$

$$\xi^i_C(x) = \min\left(\xi^i_{B_1}(x), \xi^i_{B_2}(x)\right)$$

$$\eta^i_C(x) = \min\left(\eta^i_{B_1}(x), \eta^i_{B_2}(x)\right)$$

olmak üzere C nin gösterimi:

C =

$\{\langle x, \left(\rho^1_C(x), \rho^2_C(x), \ldots, \rho^p_C(x)\right), \left(\xi^1_C(x), \xi^2_C(x), \ldots, \xi^p_C(x)\right), \left(\eta^1_C(x), \eta^2_C(x), \ldots, \eta^p_C(x)\right)\rangle :$ x
$\in \mathrm{E}\}$

şeklindedir.

Örnek 2.6.10: E evrensel kümesi üzerinde

$$B_1 = \left\{\langle x, \left(\frac{3}{10}, \frac{4}{10}, \frac{2}{10}\right), \left(\frac{1}{10}, \frac{4}{10}, \frac{2}{10}\right), \left(\frac{2}{10}, \frac{6}{10}, \frac{9}{10}\right)\rangle : \mathrm{x} \in \mathrm{E}\right\}$$

ve

$$B_2 = \left\{\langle x, \left(\frac{5}{10}, \frac{7}{10}, \frac{8}{10}\right), \left(\frac{3}{10}, \frac{5}{10}, \frac{6}{10}\right), \left(\frac{3}{10}, \frac{5}{10}, \frac{7}{10}\right)\rangle : \mathrm{x} \in \mathrm{E}\right\}$$

çok değerli nötrosofik kümeler olduğundan $B_1 \cup B_2 = \mathrm{C}$ gösterimi:

$$\rho^1_C(x) = \max\left(\frac{3}{10}, \frac{5}{10}\right) = \frac{5}{10} \qquad \xi^1_C(x) = \min\left(\frac{1}{10}, \frac{3}{10}\right) = \frac{1}{10}$$

$$\rho^2_C(x) = \max\left(\frac{4}{10}, \frac{7}{10}\right) = \frac{7}{10} \qquad \xi^2_C(x) = \min\left(\frac{4}{10}, \frac{5}{10}\right) = \frac{4}{10}$$

$$\rho^3_C(x) = \max\left(\frac{2}{10}, \frac{8}{10}\right) = \frac{8}{10} \qquad \xi^3_C(x) = \min\left(\frac{2}{10}, \frac{6}{10}\right) = \frac{2}{10}$$

$$\eta_C^1(x) \ = \min\left(\frac{2}{10}, \frac{3}{10}\right) = \frac{2}{10}$$

$$\eta_C^2(x) \ = \min\left(\frac{6}{10}, \frac{5}{10}\right) = \frac{5}{10}$$

$$\eta_C^3(x) \ = \min\left(\frac{9}{10}, \frac{7}{10}\right) = \frac{7}{10}$$

olduğundan

$$\mathrm{C} = \left\{ \langle x, \left(\frac{5}{10}, \frac{7}{10}, \frac{8}{10}\right), \left(\frac{1}{10}, \frac{4}{10}, \frac{2}{10}\right), \left(\frac{2}{10}, \frac{5}{10}, \frac{7}{10}\right) \rangle : \mathrm{x} \in \mathrm{E} \right\}$$

olduğu elde edilir.

Tanım 2.6.11: [24] E evrensel kümesi üzerinde

$$B_1 = \left\{ \langle x, \left(\rho_{B_1}^1(x), \rho_{B_1}^2(x), \rho_{B_1}^3(x)\right), \left(\xi_{B_1}^1(x), \xi_{B_1}^2(x), \xi_{B_1}^3(x)\right), \left(\eta_{B_1}^1(x), \eta_{B_1}^2(x), \eta_{B_1}^3(x)\right) \rangle : x \in \mathrm{E} \right\}$$

ve

$$B_2 = \left\{ \langle x, \left(\rho_{B_2}^1(x), \rho_{B_2}^2(x), \rho_{B_2}^3(x)\right), \left(\xi_{B_2}^1(x), \xi_{B_2}^2(x), \xi_{B_2}^3(x)\right), \left(\eta_{B_2}^1(x), \eta_{B_2}^2(x), \eta_{B_2}^3(x)\right) \rangle : x \in \mathrm{E} \right\}$$

şeklinde tanımlansın.

B_1 ve B_2 kümelerinin kesişimi $B_1 \cap B_2 = \mathrm{D}$ şeklinde gösterilir.

Burada, $i = 1,2,\ldots,p$ ve ve $\forall$ x ∈ E için,

$$\rho_D^i(x) \ = \min\left(\rho_{B_1}^i(x), \rho_{B_2}^i(x)\right)$$

$$\xi_D^i(x) \ = \max\left(\xi_{B_1}^i(x), \xi_{B_2}^i(x)\right)$$

$$\eta_D^i(x) \ = \max\left(\eta_{B_1}^i(x), \eta_{B_2}^i(x)\right)$$

olmak üzere D nin gösterimi:

D =

$\left\{\langle x, \left(\rho_D^1(x), \rho_D^2(x), \dots, \rho_D^{\wp}(x)\right), \left(\xi_D^1(x), \xi_D^2(x), \dots, \xi_D^{\wp}(x)\right), \left(\eta_D^1(x), \eta_D^2(x), \dots, \eta_D^{\wp}(x)\right)\rangle : x \in E\right\}$

şeklindedir.

Örnek 2.6.12: E bir evrensel küme olmak üzere

$$B_1 = \left\{ \langle x, \left(\frac{5}{10}, \frac{4}{10}, \frac{2}{10}\right), \left(\frac{6}{10}, \frac{7}{10}, \frac{2}{10}\right), \left(\frac{3}{10}, \frac{4}{10}, \frac{9}{10}\right)\rangle : x \in E\right\}$$

ve

$$B_2 = \left\{ \langle x, \left(\frac{3}{10}, \frac{7}{10}, \frac{9}{10}\right), \left(\frac{3}{10}, \frac{5}{10}, \frac{8}{10}\right), \left(\frac{6}{10}, \frac{5}{10}, \frac{2}{10}\right)\rangle : x \in E\right\}$$

çok değerli nötrosofik kümeler olsun. ∀ x ∈ E için $B_1 \cap B_2$ =D gösterimi:

$$\rho_D^1(x) = \min\left(\frac{5}{10}, \frac{3}{10}\right) = \frac{3}{10} \qquad \xi_D^1(x) = \max\left(\frac{6}{10}, \frac{3}{10}\right) = \frac{6}{10}$$

$$\rho_D^2(x) = \min\left(\frac{4}{10}, \frac{7}{10}\right) = \frac{4}{10} \qquad \xi_D^2(x) = \max\left(\frac{7}{10}, \frac{5}{10}\right) = \frac{7}{10}$$

$$\rho_D^3(x) = \min\left(\frac{2}{10}, \frac{9}{10}\right) = \frac{2}{10} \qquad \xi_D^3(x) = \max\left(\frac{2}{10}, \frac{8}{10}\right) = \frac{8}{10}$$

$$\eta_D^1(x) = \max\left(\frac{3}{10}, \frac{6}{10}\right) = \frac{6}{10}$$

$$\eta_D^2(x) = \max\left(\frac{4}{10}, \frac{5}{10}\right) = \frac{5}{10}$$

$$\eta_D^3(x) = \max\left(\frac{9}{10}, \frac{2}{10}\right) = \frac{9}{10}$$

olduğundan

$$D = \left\{ \langle x, \left(\frac{3}{10}, \frac{4}{10}, \frac{2}{10}\right), \left(\frac{6}{10}, \frac{7}{10}, \frac{8}{10}\right), \left(\frac{6}{10}, \frac{5}{10}, \frac{9}{10}\right)\rangle : x \in E\right\}$$

olduğu elde edilir.

Tanım 2.6.13: [24] E evrensel kümesi üzerinde

$B_1 =$

$\Big\{\langle x, \Big(\rho_{B_1}^1(x), \rho_{B_1}^2(x), \rho_{B_1}^3(x)\Big), \Big(\xi_{B_1}^1(x), \xi_{B_1}^2(x), \xi_{B_1}^3(x)\Big), \Big(\eta_{B_1}^1(x), \eta_{B_1}^2(x), \eta_{B_1}^3(x)\Big)\rangle : x \in \mathrm{E}\Big\}$

ve

$B_2 =$

$\Big\{\langle x, \Big(\rho_{B_2}^1(x), \rho_{B_2}^2(x), \rho_{B_2}^3(x)\Big), \Big(\xi_{B_2}^1(x), \xi_{B_2}^2(x), \xi_{B_2}^3(x)\Big), \Big(\eta_{B_2}^1(x), \eta_{B_2}^2(x), \eta_{B_2}^3(x)\Big)\rangle : x \in \mathrm{E}\Big\}$

şeklinde tanımlansın.

B_1 ve B_2 kümelerinin toplamı $B_1 + B_2 = \mathrm{F}$ şeklinde gösterilir.

Burada, $i = 1,2,\ldots,p$ ve $\forall$ x ∈ E için,

$$\rho_F^i(x) = \rho_{B_1}^i(x) + \rho_{B_2}^i(x) - \rho_{B_1}^i(x) \,.\, \rho_{B_2}^i(x)$$

$$\xi_F^i(x) = \xi_{B_1}^i(x) \,.\, \xi_{B_2}^i(x)$$

$$\eta_F^i(x) = \eta_{B_1}^i(x) \,.\, \eta_{B_2}^i(x)$$

olmak üzere F nin gösterimi:

F =

$\Big\{\langle x, \Big(\rho_F^1(x), \rho_F^2(x), \ldots, \rho_F^p(x)\Big), \Big(\xi_F^1(x), \xi_F^2(x), \ldots, \xi_F^p(x)\Big), \Big(\eta_F^1(x), \eta_F^2(x), \ldots, \eta_F^p(x)\Big)\rangle : \mathrm{x} \in \mathrm{E}\Big\}$

şeklindedir.

Örnek 2.6.14: E bir evrensel küme olmak üzere

$$B_1 = \Big\{ \langle x, \Big(\frac{4}{10}, \frac{3}{10}, \frac{2}{10}\Big), \Big(\frac{7}{10}, \frac{6}{10}, \frac{2}{10}\Big), \Big(\frac{3}{10}, \frac{4}{10}, \frac{9}{10}\Big)\rangle : \mathrm{x} \in \mathrm{E}\Big\}$$

ve

$$B_2 = \Big\{ \langle x, \Big(\frac{6}{10}, \frac{7}{10}, \frac{9}{10}\Big), \Big(\frac{2}{10}, \frac{5}{10}, \frac{8}{10}\Big), \Big(\frac{4}{10}, \frac{5}{10}, \frac{2}{10}\Big)\rangle : \mathrm{x} \in \mathrm{E}\Big\}$$

çok değerli nötrosofik kümeler olduğundan $B_1 + B_2 =$ F gösterimi:

$$\rho_F^1(x) = \frac{4}{10} + \frac{6}{10} - \frac{4}{10}.\frac{6}{10} = \frac{76}{100} \qquad \xi_F^1(x) = \frac{7}{10}.\frac{2}{10} = \frac{14}{100}$$

$$\rho_F^2(x) = \frac{3}{10} + \frac{7}{10} - \frac{3}{10}.\frac{7}{10} = \frac{79}{100} \qquad \xi_F^2(x) = \frac{6}{10}.\frac{5}{10} = \frac{30}{100}$$

$$\rho_F^3(x) = \frac{2}{10} + \frac{9}{10} - \frac{2}{10}.\frac{9}{10} = \frac{92}{100} \qquad \xi_F^3(x) = \frac{2}{10}.\frac{8}{10} = \frac{16}{100}$$

$$\eta_F^1(x) = \frac{3}{10}.\frac{4}{10} = \frac{12}{100}$$

$$\eta_F^2(x) = \frac{4}{10}.\frac{5}{10} = \frac{20}{100}$$

$$\eta_F^3(x) = \frac{9}{10}.\frac{2}{10} = \frac{18}{100}$$

olduğundan

$$F = B_1 + B_2 = \left\{ \langle x, \left(\frac{76}{100}, \frac{79}{100}, \frac{92}{100}\right), \left(\frac{14}{100}, \frac{30}{100}, \frac{16}{100}\right), \left(\frac{12}{100}, \frac{20}{100}, \frac{18}{100}\right) \rangle : x \in E \right\}$$

olduğu elde edilir.

Tanım 2.6.15: [24] E evrensel kümesi üzerinde

$$B_1 = \left\{ \langle x, \left(\rho_{B_1}^1(x), \rho_{B_1}^2(x), \rho_{B_1}^3(x)\right), \left(\xi_{B_1}^1(x), \xi_{B_1}^2(x), \xi_{B_1}^3(x)\right), \left(\eta_{B_1}^1(x), \eta_{B_1}^2(x), \eta_{B_1}^3(x)\right) \rangle : x \in E \right\}$$

ve

$$B_2 = \left\{ \langle x, \left(\rho_{B_2}^1(x), \rho_{B_2}^2(x), \rho_{B_2}^3(x)\right), \left(\xi_{B_2}^1(x), \xi_{B_2}^2(x), \xi_{B_2}^3(x)\right), \left(\eta_{B_2}^1(x), \eta_{B_2}^2(x), \eta_{B_2}^3(x)\right) \rangle : x \in E \right\}$$

şeklinde tanımlansın.

B_1 ve B_2 kümelerinin çarpımı $B_1 \,.\, B_2 =$ G şeklinde gösterilir.

Burada, $i = 1,2,\ldots,p$ ve $\forall$ x ∈ E için,

$$\rho_G^i(x) = \rho_{B_1}^i(x) \,.\, \rho_{B_2}^i(x)$$

$$\xi_G^i(x) = \xi_{B_1}^i(x) + \xi_{B_2}^i(x) - \xi_{B_1}^i(x) \,.\, \xi_{B_2}^i(x)$$

$$\eta_G^i(x) = \eta_{B_1}^i(x) + \eta_{B_2}^i(x) - \eta_{B_1}^i(x) \,.\, \eta_{B_2}^i(x)$$

olmak üzere G nin gösterimi:

G =

$$\left\{\langle x, \left(\rho_G^1(x), \rho_G^2(x), \dots, \rho_G^{\wp}(x)\right), \left(\xi_G^1(x), \xi_G^2(x), \dots, \xi_G^{\wp}(x)\right), \left(\eta_G^1(x), \eta_G^2(x), \dots, \eta_G^{\wp}(x)\right)\rangle : x \in E\right\}$$

şeklindedir.

Örnek 2.6.16: E bir evrensel küme olmak üzere

$$B_1 = \left\{ \langle x, \left(\frac{4}{10}, \frac{3}{10}, \frac{2}{10}\right), \left(\frac{7}{10}, \frac{6}{10}, \frac{4}{10}\right), \left(\frac{3}{10}, \frac{4}{10}, \frac{7}{10}\right)\rangle : x \in E\right\}$$

ve

$$B_2 = \left\{ \langle x, \left(\frac{6}{10}, \frac{7}{10}, \frac{8}{10}\right), \left(\frac{2}{10}, \frac{5}{10}, \frac{8}{10}\right), \left(\frac{6}{10}, \frac{5}{10}, \frac{2}{10}\right)\rangle : x \in E\right\}$$

çok değerli nötrosofik kümeler olduğundan $B_1 \,.\, B_2 = G$ gösterimi:

$$\rho_G^1(x) = \frac{4}{10}.\frac{6}{10} = \frac{24}{100}$$

$$\rho_G^2(x) = \frac{3}{10}.\frac{7}{10} = \frac{21}{100}$$

$$\rho_G^3(x) = \frac{2}{10}.\frac{8}{10} = \frac{16}{100}$$

$$\xi_G^1(x) = \frac{7}{10} + \frac{2}{10} - \frac{7}{10}.\frac{2}{10} = \frac{76}{100} \qquad \eta_G^1(x) = \frac{3}{10} + \frac{6}{10} - \frac{3}{10}.\frac{6}{10} = \frac{72}{100}$$

$$\xi_G^2(x) = \frac{6}{10} + \frac{5}{10} - \frac{6}{10}.\frac{5}{10} = \frac{80}{100} \qquad \eta_G^2(x) = \frac{4}{10} + \frac{5}{10} - \frac{4}{10}.\frac{5}{10} = \frac{70}{100}$$

$$\xi_G^3(x) = \frac{4}{10} + \frac{8}{10} - \frac{4}{10}.\frac{8}{10} = \frac{88}{100} \qquad \eta_G^3(x) = \frac{7}{10} + \frac{2}{10} - \frac{7}{10}.\frac{2}{10} = \frac{76}{100}$$

olduğundan

$$G = B_1 \,.\, B_2 = \left\{ \langle x, \left(\frac{24}{100}, \frac{21}{100}, \frac{16}{100}\right), \left(\frac{76}{100}, \frac{80}{100}, \frac{88}{100}\right), \left(\frac{72}{100}, \frac{70}{100}, \frac{76}{100}\right)\rangle : x \in E \right\}$$

olduğu elde edilir.

BÖLÜM 3
NORMLU LİNEER UZAYLARDA NÖTROSOFİK YAKLAŞIM

Bu bölümde, nötrosofik norm ve nötrosofik normlu lineer uzay tanımı verildi. Nötrosofik normlu lineer uzayda yakınsak dizi tanımı verildi ve bu konuyla ilgili teoremler verilip ispatları gözden geçirildi. Nötrosofik normlu lineer uzayda sınırlılık ve Cauchy dizisi tanımları verildi ve bu konyula ilgili örnekler verildi. Bu konuyla ilgili verilen teoremlerin ispatı gözden geçirildi. Nötrosofik normlu lineer uzayda tam tanımı verildi ve bu konuyla ilgili teoremlerin ispatı gözden geçirildi.

3.1 Nötrosofik Norm ve Nötrosofik Normlu Lineer Uzay

Tanım 3.1.1: **[23]** V, F $(= \mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$) cismi üzerinde bir lineer uzay olsun ve sırasıyla $\star$ bir sürekli t – norm ve $\diamond$ bir sürekli t – co – norm olsun. O halde, $V \times F$ üzerinde N : $\langle \rho, \ \xi, \ \eta \rangle$ bir nötrosofik küme olmak üzere eğer $x, y \in V$ ve $c \in F$ için (c skaler olmak üzere) aşağıdaki koşullar sağlanırsa N bir nötrosofik norm olarak adlandırılır.

1. $\forall\, t \in \mathbb{R}$ için $0 \leq \rho\,(x, t) \leq 1, \ \ 0 \leq \xi\,(x, t) \leq 1, \ \ 0 \leq \eta\,(x, t) \leq 1$
2. $\forall\, t \in \mathbb{R}$ için $0 \leq \rho\,(x, t) + \xi\,(x, t) + \eta\,(x, t) \leq 3$
3. $t \leq 0$ ise $\rho\,(x, t) = 0$
4. $t > 0$ ve $x = 0$ (sıfır vektörü) ise $\rho\,(x, t) = 1$
5. $\forall\, t \in \mathbb{R}$ için $t > 0$ ve $\forall\, c \neq 0$ ise $\rho\,(cx, t) = \rho\left(x, \frac{t}{|c|}\right)$
6. $\forall\, s, t \in \mathbb{R}$ ve $\forall\, x, y \in V$ için, $\rho\,(x, s) \star \rho\,(y, t) \leq \rho\,(x + y, \ s + t)$
7. $\rho\,(x, .)$ sürekli azalan olmayan bir fonksiyon için $t > 0$ ise $\lim\limits_{t \to \infty} \rho\,(x, t) = 1$
8. $t \leq 0$ ise $\xi\,(x, t) = 1$

9. $t > 0$ ve $x = 0$ (sıfır vektörü) ise $\xi\,(x, t) = 0$

10. $\forall\, t \in \mathbb{R}$ için $t > 0$ ve $\forall\, c \neq 0$ ise $\xi\,(cx, t) = \xi\left(x, \frac{t}{|c|}\right)$

11. $\forall\, s, t \in \mathbb{R}$ ve $\forall\, x, y \in V$ için, $\xi\,(x, s) \diamond \xi\,(y, t) \geq \xi\,(x + y,\ s + t)$

12. $\xi\,(x, .)$ sürekli artan olmayan bir fonksiyon için $t > 0$ ise $\lim_{t \to \infty} \xi\,(x, t) = 0$

13. $t \leq 0$ ise $\eta\,(x, t) = 1$

14. $t > 0$ ve $x = 0$ (sıfır vektörü) ise $\eta\,(x, t) = 0$

15. $\forall\, t \in \mathbb{R}$ için $t > 0$ ve $\forall\, c \neq 0$ ise $\eta\,(cx, t) = \eta\left(x, \frac{t}{|c|}\right)$

16. $\forall\, s, t \in \mathbb{R}$ ve $\forall\, x, y \in V$ için, $\eta\,(x, s) \diamond \eta\,(y, t) \geq \eta\,(x + y,\ s + t)$

17. $\eta\,(x, .)$ sürekli artan olmayan bir fonksiyon için $t > 0$ ise $\lim_{t \to \infty} \eta\,(x, t) = 0$

O halde $(V, N, \star, \diamond)$ dörtlüsüne nötrosofik normlu lineer uzay denir.

Teorem 3.1.2: [23] $(V, \|.\|)$ bir normlu lineer uzay olsun. $a \star b = ab$ ve $a \diamond b = a + b - ab$ verilsin.

$\rho\,(x, t)$, $\xi\,(x, t)$, $\eta\,(x, t)$ aşağıda verilecek şekilde tanımlansın.

$$\rho\,(x, t) = \begin{cases} \frac{t}{t + \|x\|} & \text{eğer } t > \|x\| \\ 0 & diğer\ türlü \end{cases}$$

$$\xi\,(x, t) = \begin{cases} \frac{x}{t + \|x\|} & \text{eğer } t > \|x\| \\ 1 & diğer\ türlü \end{cases}$$

$$\eta\,(x, t) = \begin{cases} \frac{\|x\|}{t} & \text{eğer } t > \|x\| \\ 1 & diğer\ türlü \end{cases}$$

O halde $(V, N, \star, \diamond)$ bir NNLU olur.

İspat: Tanım 3.1.1 deki NNLU olma koşullarından (6), (11) ve (16) dışındaki şartların tümünü sağlıyor ve bunların hepsi açık ve aşikardır. Çünkü $s, t \leq 0$ olduğunda bunlar açık bir şekilde $s, t > 0$ için de doğru olur. Bu nedenle, sırasıyla, (6), (11) ve (16) şartlarını sağladığı incelensin.

Şimdi,

$$\rho\,(x + y,\ s + t) - \rho\,(x, s) \star \rho\,(y, t)$$

$$= \frac{s + t}{s + t + \|x + y\|} - \frac{st}{(s+\|x\|)\,(t + \|y\|)}$$

$$\geq \frac{s + t}{s + t + \|x + y\|} - \frac{st}{(s+\|x\|)\,(t + \|y\|)}$$

$$= \{(s + t)\,(s + \|x\|)\,(t + \|y\|) - st\,(s + t + \|x\| + \|y\|)\} / \aleph$$

$$\aleph = (s + t + \|x\| + \|y\|)\,(s + \|x\|)\,(t + \|y\|)$$

$$= \{t^2\,\|x\|\,s^2\,\|y\| + (s + t)\,\|xy\|\} / \aleph \geq 0$$

Dolayısıyla, $\forall\, s, t \in R$ *için* $\rho\,(x, s) \star \rho\,(y, t) \leq \rho\,(x + y,\ s + t)$ olur. Burada (6) numaralı koşul sağladı.

Ayrıca,

$$\xi\,(x, s) \diamond \xi\,(y, t) - \xi\,(x + y,\ s + t)$$

$$= \frac{\|x\|}{s + \|x\|} + \frac{\|y\|}{t + \|y\|} - \frac{\|xy\|}{(s+ \|x\|)\,(t + \|y\|)} - \frac{x + y}{\|x + y\| + s + t}$$

$$= \frac{\|xy\| + t\,\|x\| + s\,\|y\|}{(s + \|x\|)\,(t + \|y\|)} - \frac{\|x + y\|}{\|x + y\| + s + t}$$

$$= \{(\|x + y\| + s + t)\,(t\,\|x\| + s\,\|x\| + \|xy\|) - \|x + y\|\,(s + \|x\|)\,(t + \|y\|)\} / D$$

$$D = (s + t + \|x + y\|)\,(s + \|x\|)\,(t + \|y\|)$$

$$= \{(s + t)\,(t\,\|x\| + s\,\|y\| + \|xy\|) - st\,\|x + y\|\} / D$$

$$\geq \{(s + t)\,(t\,\|x\| + s\,\|y\| + \|xy\|) - st\,(\|x\| + \|y\|)\} / D$$

$$= \{t^2\,\|x\| + s\,\|y\| + (s + t)\,\|xy\|\} / D \geq 0$$

Dolayısıyla, $\forall\, s, t \in R$ *için* $\xi\,(x, s) \diamond \xi\,(y, t) \geq \xi\,(x + y,\ s + t)$ olur. Burada (11) numaralı koşul sağladı.

Son olarak, benzer bir şekilde,

$$\eta\,(x, s) \diamond \eta\,(y, t) \geq \eta\,(x + y,\ s + t)$$

$$= \frac{\|x\|}{s} + \frac{\|y\|}{t} - \frac{\|xy\|}{st} - \frac{\|x + y\|}{s + t}$$

$$= \frac{t\,\|x\| + s\,\|y\| - \|xy\|}{st} - \frac{\|x + y\|}{s + t}$$

$$\geq \{s^2\,\|y\| + t^2\|x\| - (s + t)\,\|xy\|\} / st\,(s + t)$$

$$= \{s\,\|y\|\,(s - \|x\|) + t\|x\|\,(t - \|y\|)\} / st\,(s + t) \geq 0,$$

($s > \|x\|,\ t > \|y\|$ gibi).

Dolayısıyla, $\forall\, s, t \in R$ *için* $\eta\,(x, s) \diamond \eta\,(y, t) \geq \eta\,(x + y,\ s + t)$. Burada (16) numaralı koşul sağladı. Böylelikle (6), (11) ve (16) koşulları sağlanarak (V, N, ⋆, ⋄) nin bir NNLU olduğu elde edilir.

3.2 Nötrosofik Normlu Lineer Uzaylar üzerinde Yakınsaklık

Tanım 3.2.1: [23] (x_n) dizisi bir (V, N, ⋆, ⋄) Nötrosofik normlu lineer uzayında bir noktasal dizi olsun. O halde, (x_n) dizisi $x \in V$ deki x noktasına yakınsar ancak ve ancak $r \in (0, 1)$ olmak üzere

$0 < r < 1$, $t > 0$ ve $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır, öyle ki,

$$\forall\, n \geq n_0 \text{ için } \rho\,(x_n - x, t) > 1 - r,$$

$$\forall\, n \geq n_0 \text{ için } \xi\,(x_n - x, t) < r,$$

$$\forall\, n \geq n_0 \text{ için } \eta\,(x_n - x, t) < r.$$

veya

$$t \to \infty \ \lim_{n \to \infty} \rho\,(x_n - x, t) = 1,$$

$$t \to \infty \ \lim_{n \to \infty} \xi\,(x_n - x, t) = 0,$$

$$t \to \infty \ \lim_{n \to \infty} \eta\,(x_n - x, t) = 0.$$

O halde (x_n) dizisine (V, N, ⋆, ⋄) nötrosofik normlu lineer uzayında bir yakınsak dizi denir.

Teorem 3.2.2: [23] Eğer (x_n) dizisi bir (V, N, ⋆, ⋄) NNLU da yakınsak ise o halde yakınsaklık noktası tektir.

İspat:

$x \neq y$ olmak üzere $\lim_{n \to \infty} x_n = x$ ve $\lim_{n \to \infty} x_n = y$ olsun.

O halde $s, t > 0$ için,

$$s \to \infty \ \lim_{n \to \infty} \rho\,(x_n - x, s) = 1,$$

$$s \to \infty \quad \lim_{n \to \infty} \xi\,(x_n - x, s) = 0,$$

$$s \to \infty \quad \lim_{n \to \infty} \eta\,(x_n - x, s) = 0.$$

ve

$$t \to \infty \quad \lim_{n \to \infty} \rho\,(x_n - x, t) = 1,$$

$$t \to \infty \quad \lim_{n \to \infty} \xi\,(x_n - x, t) = 0,$$

$$t \to \infty \quad \lim_{n \to \infty} \eta\,(x_n - x, t) = 0.$$

Şimdi,

$\rho\,(x - y,\ s + t) = \rho\,(x - x_n + x_n - y, s + t\,) \leq \rho\,(x_n - x, s) \star \rho(x_n - y, t)$

$n \to \infty$ ve s, t için $n \to \infty$ limiti için

$$\rho\,(x - y,\ s + t) \geq 1 \star 1 = 1$$

olduğundan

$$\rho\,(x - y,\ s + t) = 1$$

olur. Ayrıca,

$\xi\,(x - y,\ s + t) = \xi\,(x - x_n + x_n - y,\ s + t\,) \leq \xi\,(x_n - x, s) \diamond \xi\,(x_n - y, t)$

$n \to \infty$ ve s, t için $n \to \infty$ limiti için

$$\xi\,(x - y,\ s + t) \leq 0 \diamond 0 = 0$$

olduğundan

$$\xi\,(x - y,\ s + t) = 0$$

olur. Son olarak benzer şekilde,

$\eta\,(x - y,\ s + t) = \eta(x - x_n + x_n - y,\ s + t\,) \leq \eta(x_n - x, s) \diamond \eta(x_n - y, t)$

$n \to \infty$ ve s, t için $n \to \infty$ limiti için

$$\eta\,(x - y,\ s + t) \leq 0 \diamond 0 = 0$$

olduğundan

$$\eta\,(x - y,\ s + t) = 0$$

olur.

Sonuç olarak $x = y$ bulunur. Dolayısıyla, (x_n) dizisi bir $(V, N, \star, \diamond)$ NNLU da yakınsak ise o halde yakınsaklık noktası tektir elde edilir.

Teorem 3.2.3: [23] Bir (V, N, ⋆, ⋄) NNLU da

$$\lim_{n \to \infty} (x_n) = x \ \text{ ve } \lim_{n \to \infty} (y_n) = y \ \text{ ise } \lim_{n \to \infty} (x_n + y_n) = x + y.$$

İspat:

Burada, $s, t > 0$ için

$$s \to \infty \quad \lim_{n \to \infty} \rho\,(x_n - x, s) = 1$$

$$s \to \infty \quad \lim_{n \to \infty} \xi\,(x_n - x, s) = 0$$

$$s \to \infty \quad \lim_{n \to \infty} \eta\,(x_n - x, s) = 0$$

ve

$$t \to \infty \quad \lim_{n \to \infty} \rho\,(y_n - y, t) = 1$$

$$t \to \infty \quad \lim_{n \to \infty} \xi\,(y_n - y, t) = 0$$

$$t \to \infty \quad \lim_{n \to \infty} \eta\,(y_n - y, t) = 0$$

Şimdi,

$$\lim_{n \to \infty} \rho\left[\left((x_n + y_n) - (x + y), s + t\right)\right]$$

$$= \lim_{n \to \infty} \rho\left[\left((x_n - x) + (y_n - y), s + t\right)\right]$$

$$\leq \lim_{n \to \infty} \rho\,(x_n - x, s) \star \lim_{n \to \infty} \rho\,(y_n - y, t)$$

Tanım 3.1.1 deki (6) nolu koşuldan dolayı

$s, t \to \infty$ limiti için

$$1 \star 1 = 1$$

Bundan dolayı,

$$s, t \to \infty \quad \lim_{n \to \infty} \rho\left[\left((x_n - y_n) - (x + y), s + t\right)\right] = 1.$$

Ayrıca,

$$\lim_{n\to\infty} \xi\left[\left((x_n + y_n) - (\mathrm{x} + \mathrm{y}), s + t\right)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \xi\left[\left((x_n - x) + (y_n - y), s + t\right)\right]$$

$$\geq \lim_{n\to\infty} \xi\,(x_n - x, s) \diamond \lim_{n\to\infty} \xi\,(y_n - y, t)$$

Tanım 3.1.1 deki (11) nolu koşuldan dolayı

s, t → ∞ limiti için

$$0 \diamond 0 = 0$$

Dolayısıyla,

$$\mathrm{s, t} \to \infty \quad \lim_{n\to\infty} \xi\left[\left((x_n + y_n) - (\mathrm{x} + \mathrm{y}), s + t\right)\right] = 0.$$

Son olarak benzer şekilde,

$$\lim_{n\to\infty} \eta\left[\left((x_n + y_n) - (\mathrm{x} + \mathrm{y}), s + t\right)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \eta\left[\left((x_n - x) + (y_n - y), s + t\right)\right]$$

$$\geq \lim_{n\to\infty} \eta\,(x_n - x, s) \diamond \lim_{n\to\infty} \eta\,(y_n - y, t)$$

Tanım 3.1.1 deki (16) nolu koşuldan dolayı

s, t → ∞ limiti için

$$0 \diamond 0 = 0$$

Bunun üzerine,

$$\mathrm{s, t} \to \infty \quad \lim_{n\to\infty} \eta\left[\left((x_n + y_n) - (\mathrm{x} + \mathrm{y}), s + t\right)\right] = 0.$$

olduğundan $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \mathrm{x} + \mathrm{y}$ elde edilir.

Teorem 3.2.4: [23] Bir (V, N, ⋆, ⋄) NNLU da

$$\lim_{n\to\infty}(x_n) = \mathrm{x} \text{ ve } 0 \neq \mathrm{c} \in \mathrm{F} \text{ ise } \lim_{n\to\infty} cx_n = cx.$$

İspat:

Burada,

$$\frac{\mathrm{t}}{|\mathrm{c}|} \to \infty \quad \lim_{n\to\infty} \rho\,(\mathrm{cx_n} - \mathrm{cx}, \mathrm{t}) = \lim_{n\to\infty} \rho\left(\mathrm{x_n} - \mathrm{x}, \frac{\mathrm{t}}{|\mathrm{c}|}\right) = 1$$

$$\frac{t}{|c|} \to \infty \quad \lim_{n \to \infty} \xi\,(cx_n - cx, t) = \lim_{n \to \infty} \xi\left(x_n - x, \frac{t}{|c|}\right) = 1$$

$$\frac{t}{|c|} \to \infty \quad \lim_{n \to \infty} \eta\,(cx_n - cx, t) = \lim_{n \to \infty} \eta\left(x_n - x, \frac{t}{|c|}\right) = 1$$

olduğundan ispat açıktır.

3.3 Nötrosofik Normlu Lineer Uzaylar üzerinde Sınırlılık ve Cauchy Dizisi

Tanım 3.3.1: $[23]$ Bir (V, N, ⋆, ⋄) nötrosofik normlu lineer uzayında bir (x_n) dizisini ele alalım. Bu (x_n) dizisi bir noktasal dizi olup $r \in (0,1)$ olmak üzere $0 < r < 1$ ve $t > 0$ için aşağıdaki koşulları sağlıyorsa, (x_n) dizisi nötrosofik normlu lineer uzayda sınırlıdır denir. $\forall\, n \in \mathbb{N}$ için,

$$\rho\,(x_n, t) > 1 - r$$

$$\xi\,(x_n, t) < r$$

$$\eta\,(x_n, t) < r$$

ile ifade edilir.

Tanım 3.3.2: $[23]$

1. Bir (V, N, ⋆, ⋄) NNLU’da bir (x_n) $noktasal$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu gösterelim.

$t > 0$ ve $r \in (0,1)$ verilsin ve $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır, öyle ki, $\forall$ m, n $\in n_0$ için,

$$\rho\,(x_n - x_m, t) > 1 - r$$

$$\xi\,(x_n - x_m, t) < r$$

$$\eta\,(x_n - x_m, t) < r$$

veya

$$t \to \infty \quad \lim_{n,m \to \infty} \rho\,(x_n - x_m, t) = 1$$

$$t \to \infty \quad \lim_{n,m \to \infty} \xi\,(x_n - x_m, t) = 0$$

$$t \to \infty \quad \lim_{n,m \to \infty} \eta\,(x_n - x_m, t) = 0$$

2. Bir $(V, \|.\|)$ normlu lineer uzay üzerinde (x_n) dizisi bir noktasal Cauchy dizisi olsun. O halde,

$$\lim_{n,m \to \infty} \|x_n - x_m\| = 0$$

olur.

Örnek 3.3.3: [23] $t > 0$ için,

$$\rho\,(x,t) = \frac{t}{t + \|x\|}, \quad \xi\,(x,t) = \frac{\|x\|}{t + \|x\|}, \quad \eta\,(x,t) = \frac{\|x\|}{t} \;.$$

O halde $(V, N, \star, \diamond)$ bir NNLU dur.

Şimdi,

$$\lim_{n,m \to \infty} \frac{t}{t + \|x_n - x_m\|} = 1$$

$$\lim_{n,m \to \infty} \frac{\|x_n - x_m\|}{t + \|x_n - x_m\|} = 0$$

$$\lim_{n,m \to \infty} \frac{\|x_n - x_m\|}{t} = 0$$

ve

$$t \to \infty \quad \lim_{n,m \to \infty} \rho\,(x_n - x_m, t) = 1$$

$$t \to \infty \quad \lim_{n,m \to \infty} \xi\,(x_n - x_m, t) = 0$$

$$t \to \infty \quad \lim_{n,m \to \infty} \eta\,(x_n - x_m, t) = 0$$

Bu, (x_n) dizisinin $(V, N, \star, \diamond)$ NNLU da bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir.

Teorem 3.3.4: [23] Her noktasal yakınsak dizi $(V, N, \star, \diamond)$ NNLU da bir Cauchy dizisidir.

İspat:

Bir $(V, N, \star, \diamond)$ NNLU da (x_n) dizisi bir noktasal yakınsak dizi olsun, böylece,

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x$$

olur.

O halde $t > 0$ için,

$$\lim_{n,m\to\infty} \rho(x_n - x_m, t) = \lim_{n,m\to\infty} \rho(x_n - x_m + x - x, t)$$

$$= \lim_{n,m\to\infty} \rho([(x_n - x) + (x - x_m), t])$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} \rho\left(x_n - x, \frac{t}{2}\right) = \star \lim_{m\to\infty} \rho\left(x - x_m, \frac{t}{2}\right)$$

Tanım 3.1.1 de (6) nolu koşuldan dolayı

$$= \lim_{n\to\infty} \rho\left(x_n - x, \frac{t}{2}\right) = \star \lim_{m\to\infty} \rho\left(x_m - x, \frac{t}{2}\right)$$

Tanım 3.1.1 de (5) nolu koşuldan dolayı

$t \to \infty$ limiti için

$$1 \star 1 = 1$$

olur. Böylelikle,

$$\lim_{n,m\to\infty} \rho(x_n - x_m, t) = 1$$

Ayrıca,

$$\lim_{n,m\to\infty} \xi(x_n - x_m, t) = \lim_{n,m\to\infty} \xi(x_n - x_m + x - x, t)$$

$$= \lim_{n,m\to\infty} \xi([(x_n - x) + (x - x_m), t])$$

$$\geq \lim_{n\to\infty} \xi\left(x_n - x, \frac{t}{2}\right) = \diamond \lim_{m\to\infty} \xi\left(x - x_m, \frac{t}{2}\right)$$

Tanım 3.1.1 de (11) nolu koşuldan dolayı

$$= \lim_{n\to\infty} \xi\left(x_n - x, \frac{t}{2}\right) = \diamond \lim_{m\to\infty} \xi\left(x_m - x, \frac{t}{2}\right)$$

Tanım 3.1.1 de (10) nolu koşuldan dolayı

$t \to \infty$ limiti için

$$0 \diamond 0 = 0$$

olur. Böylelikle,

$$\lim_{n,m\to\infty} \xi(x_n - x_m, t) = 0$$

Son olarak benzer şekilde,

$$\lim_{n,m\to\infty} \eta(x_n - x_m, t) = \lim_{n,m\to\infty} \eta(x_n - x_m + x - x, t)$$

$$= \lim_{n,m\to\infty} \eta([(x_n - x) + (x - x_m), t])$$

$$\geq \lim_{n\to\infty} \eta\left(x_n - x, \frac{t}{2}\right) = \diamond \lim_{m\to\infty} \eta\left(x - x_m, \frac{t}{2}\right)$$

Tanım 3.1.1 de (16) nolu koşuldan dolayı

$$= \lim_{n\to\infty} \eta\left(x_n - x, \frac{t}{2}\right) = \diamond \lim_{m\to\infty} \eta\left(x_m - x, \frac{t}{2}\right)$$

Tanım 3.1.1 de (15) nolu koşuldan dolayı

$t \to \infty$ limiti için

$$0 \diamond 0 = 0$$

olur. Böylelikle,

$$\lim_{n,m\to\infty} \eta\left(x_n - x_m, t\right) = 0$$

Sonuç olarak (x_n) dizisi bir Cauchy dizisidir.

Örnek 3.3.5: [**23**] Teorem 3.3.4 ten dolayı her noktasal yakınsak dizi bir $(V, N, \star, \diamond)$ NNLU da bir Cauchy dizisidir fakat bu ifadenin tersinin doğru olmadığı aşağıdaki örnek üzerinde gösterildi.

$V_1 = \left\{\frac{1}{n} \middle| n \in \mathbb{N}\right\}$ reel sayıların bir alt kümesi olsun ve $\|x\| = |x|$ olduğundan Örnek 3.3.3 te tanımlanan nötrosofik normla ilgili açıkça görülüyor ki $(V, N, \star, \diamond)$ bir NNLU dur.

Şimdi,

$$\lim_{n,m\to\infty} \frac{t}{t + \|x_n - x_m\|} = \lim_{n,m\to\infty} \frac{t}{t + \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right|} = 1,$$

$$\lim_{n,m\to\infty} \frac{\|x_n - x_m\|}{t + \|x_n - x_m\|} = \lim_{n,m\to\infty} \frac{\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right|}{t + \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right|} = 0,$$

ve

$$\lim_{n,m\to\infty} \frac{\|x_n - x_m\|}{t} = \lim_{n,m\to\infty} \frac{\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right|}{t} = 0.$$

Böylece $(V, N, \star, \diamond)$ NNLU da (x_n) dizisi bir noktasal Cauchy dizisidir. Fakat,

$$\lim_{n\to\infty} (x_n - x_k, t) = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{k}\right|}{t + \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{k}\right|} \neq 0$$

olduğundan $(V, N, \star, \diamond)$ NNLU da (x_n) Cauchy dizisinin yakınsak olmadığını gösterir.

Teorem 3.3.6: [23] Bir (V, N, ⋆, ⋄) NNLU'da (x_n) ve (y_n) dizileri Cauchy dizisinin vektörleri ve bir (V, N, ⋆, ⋄) NNLU'da (λ_n) Cauchy dizisinin skalerleri olsun. $(x_n + y_n)$ ve $(\lambda_n y_n)$ dizileri de (V, N, ⋆, ⋄) NNLU da Cauchy dizisidirler.

İspat: $t > 0$ için,

$$t \to \infty \lim_{n,m \to \infty} \rho\,(x_n - x_m, t) = 1$$

$$t \to \infty \lim_{n,m \to \infty} \xi\,(x_n - x_m, t) = 0$$

$$t \to \infty \lim_{n,m \to \infty} \eta\,(x_n - x_m, t) = 0$$

ve

$$t \to \infty \lim_{n,m \to \infty} \rho\,(y_n - y_m, t) = 1$$

$$t \to \infty \lim_{n,m \to \infty} \xi\,(y_n - y_m, t) = 0$$

$$t \to \infty \lim_{n,m \to \infty} \eta\,(y_n - y_m, t) = 0$$

olduğundan

$$\lim_{n,m \to \infty} \rho\,[(x_n + y_n) - (x_m + y_m), t)]$$

$$= \lim_{n,m \to \infty} \rho\,[(x_n - x_m) + (y_n - y_m), t)]$$

$$\geq \lim_{n,m \to \infty} \rho\left(\mathrm{x_n} - \mathrm{x_m}, \frac{t}{2}\right) \star \lim_{n,m \to \infty} \rho\left(y_n - y_m, \frac{t}{2}\right)$$

$t \to \infty$ limiti için

$$1 \star 1 = 1$$

Böylece,

$$t \to \infty \lim_{n,m \to \infty} \rho\,[(x_n + y_n) - (x_m + y_m), t)] = 1.$$

Ayrıca,

$$\lim_{n,m \to \infty} \xi\,[(x_n + y_n) - (x_m + y_m), t)]$$

$$= \lim_{n,m \to \infty} \xi\,[(x_n - x_m) + (y_n - y_m), t)]$$

$$\leq \lim_{n,m \to \infty} \xi\left(x_n - x_m, \frac{t}{2}\right) \diamond \lim_{n,m \to \infty} \xi\left(y_n - y_m, \frac{t}{2}\right)$$

t → ∞ limiti için

$$0 \diamond 0 = 0$$

Böylece,

$$\text{t} \to \infty \quad \lim_{n,m \to \infty} \xi \,[(x_n + y_n) - (x_m + y_m), t)] = 0.$$

Son olarak benzer şekilde,

$$\lim_{n,m \to \infty} \eta \;[(x_n + y_n) - (x_m + y_m), t)]$$

$$= \lim_{n,m \to \infty} \eta \;[(x_n - x_m) + (y_n - y_m), t)]$$

$$\leq \lim_{n,m \to \infty} \eta \left(x_n - x_m, \tfrac{t}{2}\right) \diamond \lim_{n,m \to \infty} \eta \;\left(y_n - y_m, \tfrac{t}{2}\right)$$

t → ∞ limiti için

$$0 \diamond 0 = 0$$

Böylece,

$$\text{t} \to \infty \quad \lim_{n,m \to \infty} \eta \;[(x_n + y_n) - (x_m + y_m), t)] = 0.$$

olduğundan $(x_n + y_n)$ dizileri (V, N, ⋆, ⋄) NNLU da Cauchy dizisidirler elde edilir.

Benzer şekilde,

$$\lim_{n,m \to \infty} \rho \,[(\lambda_m y_m - \lambda_n y_n), t]$$

$$= \lim_{n,m \to \infty} \rho \,[(\lambda_m y_m - \lambda_n y_n) + (\lambda_m y_n - \lambda_n y_n), t]$$

$$= \lim_{n,m \to \infty} \rho \,[(\lambda_m (y_m - y_n) + y_n (\lambda_m - \lambda_n), t]$$

$$\geq \lim_{n,m \to \infty} \rho \left[\left((y_m - y_n), \frac{t}{2\,|\lambda_m|}\right)\right] \star \rho \left(y_n, \frac{t}{2\,|\lambda_m - \lambda_n|}\right)$$

olduğundan m, n → ∞ limitleri için $|\lambda_m - \lambda_n| \to 0$ $|\lambda_m - \lambda_n| \neq 0$. Böylece (y_n) Cauchy dizisi sınırlı olur.

Dolayısıyla,

$$\text{t} \to \infty \text{ limiti için } \lim_{n,m \to \infty} \rho \,[(\lambda_m y_m - \lambda_n y_n), t] = 1$$

Ayrıca,

$$\lim_{n,m \to \infty} \xi \,[(\lambda_m y_m - \lambda_n y_n), t]$$

$$= \lim_{n,m \to \infty} \xi\, [(\lambda_m y_m - \lambda_m y_n) + (\lambda_m y_n - \lambda_n y_n), t]$$

$$= \lim_{n,m \to \infty} \xi\, [(\lambda_m (y_m - y_n) + y_n\, (\lambda_m - \lambda_n), t]$$

$$\leq \lim_{n,m \to \infty} \xi \left[\left((y_m - y_n), \frac{t}{2\,|\lambda_m|}\right)\right] \diamond \xi \left(y_n, \frac{t}{2\,|\lambda_m - \lambda_n|}\right)$$

Dolayısıyla,

$$\text{t} \to \infty \text{ limiti için } \lim_{n,m \to \infty} \xi\, [(\lambda_m y_m - \lambda_n y_n), t] = 0$$

Son olarak benzer şekilde,

$$\lim_{n,m \to \infty} \eta\, [(\lambda_m y_m - \lambda_n y_n), t]$$

$$= \lim_{n,m \to \infty} \eta\, [(\lambda_m y_m - \lambda_m y_n) + (\lambda_m y_n - \lambda_n y_n), t]$$

$$= \lim_{n,m \to \infty} \eta\, [(\lambda_m (y_m - y_n) + y_n\, (\lambda_m - \lambda_n), t]$$

$$\leq \lim_{n,m \to \infty} \eta \left[\left((y_m - y_n), \frac{t}{2\,|\lambda_m|}\right)\right] \diamond \eta \left(y_n, \frac{t}{2\,|\lambda_m - \lambda_n|}\right)$$

Dolayısıyla,

$$\text{t} \to \infty \text{ limiti için } \lim_{n,m \to \infty} \eta\, [(\lambda_m y_m - \lambda_n y_n), t] = 0$$

olduğundan $(\lambda_n y_n)$ dizileri (V, N, ⋆, ⋄) NNLU da Cauchy dizisidirler elde edilir.

3.4 Nötrosofik Normlu Lineer Uzaylar üzerinde Tamlık

Tanım 3.4.1: [23] (V, N, ⋆, ⋄) bir NNLU olsun ve Δ_V, V üzerindeki tüm noktaların ailesi olsun. Δ_V üzerindeki her noktasal Cauchy dizisi Δ_V üzerindeki bir noktaya yakınsıyorsa (V, N, ⋆, ⋄) NNLU'da tamdır denir.

Teorem 3.4.2: [23] Bir (V, N, ⋆, ⋄) NNLU da her Cauchy dizisi bir yakınsak alt diziye sahipse (V, N, ⋆, ⋄) NNLU da tamdır.

İspat:

Bir (V, N, ⋆, ⋄) NNLU da (x_{n_k}) dizisi bir (x_n) Cauchy dizisinin $(x_{n_k}) \to$ x ∈ V olacak şekilde yakınsak alt dizisi olsun. (x_n) dizisi (V, N, ⋆, ⋄) uzayında bir Cauchy dizisi olduğundan, t > 0 için

$$t \to \infty \lim_{n,k \to \infty} \rho\left(x_n - x_{n_k}, \frac{t}{2}\right) = 1$$

$$t \to \infty \lim_{n,k \to \infty} \xi\left(x_n - x_{n_k}, \frac{t}{2}\right) = 0$$

$$t \to \infty \lim_{n,k \to \infty} \eta\left(x_n - x_{n_k}, \frac{t}{2}\right) = 0$$

Ayrıca $\left(x_{n_k}\right)$ alt dizisi x e yakınsadığından $\left(x_{n_k}\right) \to$ x, o halde,

$$t \to \infty \lim_{n,k \to \infty} \rho\left(x_{n_k} - \mathrm{x}, \frac{t}{2}\right) = 1$$

$$t \to \infty \lim_{n,k \to \infty} \xi\left(x_{n_k} - \mathrm{x}, \frac{t}{2}\right) = 0$$

$$t \to \infty \lim_{n,k \to \infty} \eta\left(x_{n_k} - \mathrm{x}, \frac{t}{2}\right) = 0$$

ve

$$\rho\left(x_n - \mathrm{x}, t\right) = \rho\left(x_n - x_{n_k} + x_{n_k} - x, t\right)$$

$$\geq \rho\left(x_n - x_{n_k}, \frac{t}{2}\right) \star \rho\left(x_{n_k} - \mathrm{x}, \frac{t}{2}\right).$$

olduğundan

$$\lim_{n \to \infty} \rho\left(x_n - \mathrm{x}, t\right) = 1$$

elde edilir. Ayrıca

$$\xi\left(x_n - \mathrm{x}, t\right) = \xi\left(x_n - x_{n_k} + x_{n_k} - x, t\right)$$

$$\leq \xi\left(x_n - x_{n_k}, \frac{t}{2}\right) \diamond \xi\left(x_{n_k} - \mathrm{x}, \frac{t}{2}\right).$$

olduğundan

$$\lim_{n \to \infty} \xi\left(x_n - \mathrm{x}, t\right) = 0$$

elde edilir. Ayrıca

$$\eta\left(x_n - \mathrm{x}, t\right) = \eta\left(x_n - x_{n_k} + x_{n_k} - x, t\right)$$

$$\leq \eta\left(x_n - x_{n_k}, \frac{t}{2}\right) \diamond \eta\left(x_{n_k} - \mathrm{x}, \frac{t}{2}\right).$$

olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} \eta\,(x_n - \mathrm{x}, t) = 0$$

elde edilir. Sonuç olarak, $(x_n) \to \mathrm{x} \in \mathrm{V}$ elde edilir.

Teorem 3.4.3: [23] Bir (V, N, ⋆, ⋄) NNLU da her yakınsak dizi bir Cauchy dizisidir.

İspat:

(x_n) dizisi (V, N, ⋆, ⋄) NNLU da bir yakınsak dizi olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \mathrm{x}$$

olsun.

s, t ∈ $\mathbb{R}^+$ ve p = 1, 2, 3,…, için

$$\begin{aligned}\rho\left(\mathrm{x}_{n+p} - \mathrm{x}_n, s+t\right) &= \rho\left(\mathrm{x}_{n+p} - \mathrm{x} + \mathrm{x} - \mathrm{x}_n, s+t\right)\\ &\geq \rho\left(\mathrm{x}_{n+p} - \mathrm{x}, s\right) \star \rho(\mathrm{x} - \mathrm{x}_n, t)\\ &= \rho\left(\mathrm{x}_{n+p} - \mathrm{x}, s\right) \star \rho(x_n - \mathrm{x}, t)\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \rho\left(\mathrm{x}_{n+p} - \mathrm{x}_n, s+t\right) &\geq \lim_{n\to\infty} \rho\left(\mathrm{x}_{n+p} - \mathrm{x}, s\right) \star \lim_{n\to\infty} \rho(x_n - \mathrm{x}, t)\\ &= 1 \star 1 = 1\end{aligned}$$

elde edilir.

∀ s, t → ∞ ve p = 1, 2, 3,…, için

$$\lim_{n\to\infty} \rho\left(\mathrm{x}_{n+p} - \mathrm{x}_n, s+t\right) = 1$$

elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned}\xi\left(\mathrm{x}_{n+p} - \mathrm{x}_n, s+t\right) &\leq \xi\left(\mathrm{x}_{n+p} - \mathrm{x} + \mathrm{x} - \mathrm{x}_n, s+t\right)\\ &\leq \xi\left(\mathrm{x}_{n+p} - \mathrm{x}, s\right) \diamond \xi\,(\mathrm{x} - \mathrm{x}_n, t)\\ &= \xi\left(\mathrm{x}_{n+p} - \mathrm{x}, s\right) \diamond \xi\,(x_n - \mathrm{x}, t)\end{aligned}$$

olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} \xi\left(\mathrm{x}_{n+p} - \mathrm{x}_n, s+t\right) \leq \lim_{n\to\infty} \xi\left(\mathrm{x}_{n+p} - \mathrm{x}, s\right) \diamond \lim_{n\to\infty} \xi\,(x_n - \mathrm{x}, t)$$

$$= 0 \diamond 0 = 0$$

elde edilir.

$\forall$ s, t $\rightarrow \infty$ ve p = 1, 2, 3,…, için

$$\lim_{n\rightarrow\infty} \xi\left(x_{n+p} - x_n, s+t\right) = 0$$

elde edilir.

$$\eta\left(x_{n+p} - x_n, s+t\right) \leq \eta\left(x_{n+p} - x + x - x_n, s+t\right)$$

$$\leq \eta\left(x_{n+p} - x, s\right) \diamond \eta\left(x - x_n, t\right)$$

$$= \eta\left(x_{n+p} - x, s\right) \diamond \eta\left(x_n - x, t\right)$$

olduğundan

$$\lim_{n\rightarrow\infty} \eta\left(x_{n+p} - x_n, s+t\right) \leq \lim_{n\rightarrow\infty} \eta\left(x_{n+p} - x, s\right) \diamond \lim_{n\rightarrow\infty} \eta\left(x_n - x, t\right)$$

$$= 0 \diamond 0 = 0$$

elde edilir.

$\forall$ s, t $\rightarrow \infty$ ve p = 1, 2, 3,…, için

$$\lim_{n\rightarrow\infty} \eta\left(x_{n+p} - x_n, s+t\right) = 0$$

elde edilir. Böylece, (x_n) dizisi (V, N, $\star$, $\diamond$) NNLU da bir Cauchy dizisidir.

Teorem 3.4.4: [23] (V, N, $\star$, $\diamond$) bir NNLU olsun. Her Cauchy dizisi bir yakınsak alt diziye sahipse (V, N, $\star$, $\diamond$) tamdır.

İspat:

(x_n) dizisi (V, N, $\star$, $\diamond$) üzerinde bir Cauchy dizisi olsun ve (x_{n_k}), (x_n) dizisinin bir alt dizisi olsun ve t > 0 için (x_{n_k}) x $\in$ V ye $(x_{n_k}) \rightarrow$ x $\in$ V olsun. (x_n) dizisi (V, N, $\star$, $\diamond$) üzerinde bir Cauchy dizisi olduğundan,

$$\lim_{n,k\rightarrow\infty} \rho\left(x_n - x_k, \frac{t}{2}\right) = 1$$

$$\lim_{n,k\rightarrow\infty} \xi\left(x_n - x_k, \frac{t}{2}\right) = 0$$

$$\lim_{n,k\to\infty} \eta\left(x_n - x_k, \frac{t}{2}\right) = 0$$

Ayrıca $\left(x_{n_k}\right)$ x e yakınsasın $\left(x_{n_k}\right) \to$ x, o halde,

$$\lim_{n,k\to\infty} \rho\left(x_{n_k} - x, \frac{t}{2}\right) = 1$$

$$\lim_{n,k\to\infty} \xi\left(x_{n_k} - x, \frac{t}{2}\right) = 0$$

$$\lim_{n,k\to\infty} \eta\left(x_{n_k} - x, \frac{t}{2}\right) = 0$$

Şimdi,

$$\rho\,(x_n - x, t) = \rho\left(x_n - x_{n_k} + x_{n_k} - x, t\right)$$

$$\geq \rho\left(x_n - x_{n_k}, \frac{t}{2}\right) \star \rho\left(x_{n_k} - x, \frac{t}{2}\right)$$

olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} \rho\,(x_n - x, t) = 1.$$

elde edilir. Ayrıca

$$\xi\,(x_n - x, t) = \xi\left(x_n - x_{n_k} + x_{n_k} - x, t\right)$$

$$\leq \xi\left(x_n - x_{n_k}, \frac{t}{2}\right) \diamond \xi\left(x_{n_k} - x, \frac{t}{2}\right)$$

olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} \xi\,(x_n - x, t) = 0.$$

elde edilir.

$$\eta\,(x_n - x, t) = \eta\left(x_n - x_{n_k} + x_{n_k} - x, t\right)$$

$$\leq \eta\left(x_n - x_{n_k}, \frac{t}{2}\right) \diamond \eta\left(x_{n_k} - x, \frac{t}{2}\right)$$

olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} \eta\,(x_n - x, t) = 0.$$

elde edilir. Böylelikle, $(V, N, \star, \diamond)$ üzerinde $(x_n) \to$ x e yakınsadığından $(V, N, \star, \diamond)$ tamdır elde edilir.

Teorem 3.4.5: [23] $(V, N, \star, \diamond)$ bir sonlu boyutlu NNLU olsun. Aşağıdaki koşullar sağlanırsa

$$\forall\, \alpha \in [0,1] \text{ için } \begin{cases} \alpha \diamond \alpha = \alpha \\ \alpha \star \alpha = \alpha \end{cases} \qquad (1)$$

$$\forall\, t > 0 \rightarrow x = 0 \ \ \rho\,(x, t) > 0 \qquad (2)$$

$(V, N, \star, \diamond)$ NNLU tamdır.

İspat:

$(V, N, \star, \diamond)$ bir sonlu boyutlu NNLU olsun ve ayrıca yukarıdaki (1) ve (2) koşullarını sağlasın. Bununla beraber, boyut $V = k$ ve $e_1, e_2, \dots, e_k$ V nin bir bazı olsun. (x_n) dizisini (V,A) üzerinde keyfi bir Cauchy dizisi olarak göz önünde bulunduralım.

$$x_n = \beta_1^{(n)} e_1 + \beta_2^{(n)} e_2 + \ldots + \beta_k^{(n)} e_k \ \text{ için } \ \beta_1^{(n)}, \beta_2^{(n)}, \ldots, \beta_k^{(n)}$$

bu diziye uygun skalerlerdir.

O halde, buna benzer şekilde hesaplama yöntemi yapılarak, $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k \in F$ vardır, öyle ki,

$i = 1, 2, \ldots, k$ için $\left\{\beta_i^{(n)}\right\}_n$ dizisi β_i ye yakınsar, yani, $\left\{\beta_i^{(n)}\right\}_n \rightarrow \beta_i$ dir ve olur.

Ayrıca

$$x = \rho\,\left(\sum_{i=1}^{k} \beta_i^{(n)} e_i\right) \in V$$

olur.

$$\begin{aligned}
\rho\,(x_n - x, t) &= \rho\,\left(\sum_{i=1}^{k} \beta_i^{(n)} e_i - \sum_{i=1}^{k} \beta_i e_i , t\right) \\
&= \rho\,\left(\sum_{i=1}^{k} (\beta_i^{(n)} - \beta_i)\, e_i , t\right) \\
&\geq \rho\,\left(\left(\beta_1^{(n)} - \beta_1\right) e_i , \frac{t}{k}\right) \star \ldots \star \rho\,\left(\left(\beta_k^{(n)} - \beta_k\right) e_k , \frac{t}{k}\right) \\
&= \rho\left(e_1 , \frac{t}{k\left|\beta_1^{(n)} - \beta_1\right|}\right) \star \ldots \star \rho\left(e_k , \frac{t}{k\left|\beta_k^{(n)} - \beta_k\right|}\right)
\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{t}{k\left|\beta_i^{(n)} - \beta_i\right|} = \infty \text{ olduğundan } \lim_{n\to\infty} \rho\left(e_i , \frac{t}{k\left|\beta_i^{(n)} - \beta_i\right|}\right) = 1$$

olduğu elde edilir. Ayrıca

$$\forall\, t > 0 \; için \; \lim_{n \to \infty} \rho\,(x_n - x, t) \geq 1 \star \ldots \star 1 = 1$$

$$\forall\, t > 0 \text{ için } \lim_{n \to \infty} \rho\,(x_n - x, t) = 1.$$

Ayrıca $\forall\, t > 0$ için,

$$\begin{aligned}
\xi\,(x_n - x, t) &= \xi\left(\textstyle\sum_{i=1}^{k} \beta_i^{(n)} e_i - \sum_{i=1}^{k} \beta_i\, e_i \,, t\right) \\
&= \xi\,(\textstyle\sum_{i=1}^{k} (\beta_i^{(n)} - \beta_i)\, e_i \,, t) \\
&\leq \xi\left(\left(\beta_1^{(n)} - \beta_1\right) e_i \,, \frac{t}{k}\right) \diamond \ldots \diamond \xi\left(\left(\beta_k^{(n)} - \beta_k\right) e_k \,, \frac{t}{k}\right) \\
&= \xi\left(e_1 \,, \frac{t}{k\left|\beta_1^{(n)} - \beta_1\right|}\right) \diamond \ldots \diamond \xi\left(e_k \,, \frac{t}{k\left|\beta_k^{(n)} - \beta_k\right|}\right)
\end{aligned}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{t}{k\left|\beta_i^{(n)} - \beta_i\right|} = \infty \text{ olduğundan } \lim_{n \to \infty} \xi\left(e_i \,, \frac{t}{k\left|\beta_i^{(n)} - \beta_i\right|}\right) = 0$$

olduğu elde edilir. Ayrıca

$$\forall\, t > 0 \; için \; \lim_{n \to \infty} \xi\,(x_n - x, t) \leq 0 \diamond \ldots \diamond 0 = 0$$

$$\forall\, t > 0 \text{ için } \lim_{n \to \infty} \xi\,(x_n - x, t) = 0.$$

Son olarak benzer şekilde, $\forall\, t > 0$ için,

$$\begin{aligned}
\eta\,(x_n - x, t) &= \eta\left(\textstyle\sum_{i=1}^{k} \beta_i^{(n)} e_i - \sum_{i=1}^{k} \beta_i\, e_i \,, t\right) \\
&= \eta\,(\textstyle\sum_{i=1}^{k} (\beta_i^{(n)} - \beta_i)\, e_i \,, t) \\
&\leq \eta\left(\left(\beta_1^{(n)} - \beta_1\right) e_i \,, \frac{t}{k}\right) \diamond \ldots \diamond \eta\left(\left(\beta_k^{(n)} - \beta_k\right) e_k \,, \frac{t}{k}\right) \\
&= \eta\left(e_1 \,, \frac{t}{k\left|\beta_1^{(n)} - \beta_1\right|}\right) \diamond \ldots \diamond \eta\left(e_k \,, \frac{t}{k\left|\beta_k^{(n)} - \beta_k\right|}\right)
\end{aligned}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{t}{k\left|\beta_i^{(n)} - \beta_i\right|} = \infty \text{ olduğundan } \lim_{n \to \infty} \eta\left(e_i \,, \frac{t}{k\left|\beta_i^{(n)} - \beta_i\right|}\right) = 0$$

olduğu elde edilir. Ayrıca

$\forall\, t > 0 \; için \; \lim_{n \to \infty} \eta\,(x_n - x, t) \leq 0 \diamond \ldots \diamond 0 = 0$

$$\forall\, t > 0 \text{ için } \lim_{n \to \infty} \eta\,(x_n - x, t) = 0.$$

Böylelikle, (x_n) dizisinin keyfi bir Cauchy dizisi olarak x ∈ V ye yakınsadığını $(x_n) \rightarrow x \in V$ elde edildi. Dolayısıyla, $(V, N, \star, \diamond)$ NNLU tamdır.

Teorem 3.4.6: [23] $(V, N, \star, \diamond)$ bir NNLU olsun ve (1) denkleminin koşullarını sağlasın. Her Cauchy dizisi $(V, N, \star, \diamond)$ üzerinde sınırlıdır.

İspat:

(x_n) dizisi $(V, N, \star, \diamond)$ NNLU da bir Cauchy dizisi olsun ve ρ, ξ ve η denklemleri

$$\forall\, t > 0 \text{ için } p = 1, 2, \dots \begin{cases} \lim\limits_{n \to \infty} \rho\left(x_{n+p} - x, t\right) = 1 \\ \lim\limits_{n \to \infty} \xi\left(x_{n+p} - x, t\right) = 0 \\ \lim\limits_{n \to \infty} \eta\left(x_{n+p} - x, t\right) = 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.

Bir r_0 sabitini seçelim ve $0 < r_0 < 1$ olsun. Burada,

$$\forall\, t > 0 \text{ için } p = 1, 2, \dots \quad \lim_{n \to \infty} \rho\left(x_n - x_{n+p}, t\right) = 1 > r_0$$

$t' > 0$ için $\exists\, n_0 = n_0(t')$ olmak üzere $\forall\, n \geq n_0$ için $p = 1, 2, \dots$ vardır ve

$$\rho\left(x_n - x_{n+p}, t'\right) > r_0$$

olduğu elde edilir. Böylece

$$\lim_{n \to \infty} \rho\,(x, t) = 1 \text{ olduğundan, her bir } x \in t > 0 \text{ vardır ve}$$

$$\forall\, t > t_i \text{ için } n = 1, 2, \dots \quad \rho(x_n, t) > r_0$$

olduğu elde edilir. Böylece

$$t_0 = t' + \max\left\{t_1, t_2, \dots, t_{n_0}\right\}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \rho(x_n, t_0) &\geq \rho\left(x_n, t' + t_{n_0}\right) \\ &= \rho\left(x_n - x_{n_0} + x_{n_0}, t' + t_{n_0}\right) \\ &\geq \rho\left(x_n - x_{n_0}, t'\right) \star \rho\left(x_{n_0}, t_{n_0}\right) \end{aligned}$$

$$\forall\, n \geq n_0 \text{ için } > r_0 \star r_0 = r_0$$

olduğu elde edilir. Böylece

$$\forall \text{ n} \geq n_0 \text{ için } \rho(x_n, t_0) > r_0.$$

Ayrıca,

$$\forall \text{ n} = 1, 2, \ldots, n_0 \text{ için } \rho(x_n, t_0) \geq \rho(x_n, t_n) > r_0$$

olduğu elde edilir. Böylece

$\rho(x_n, t_0) > r_0$ olduğundan $\forall$ n = 1, 2,… (3)

Ayrıca,

$$\forall \text{ t} > 0 \text{ için p} = 1, 2, \ldots \lim_{n \to \infty} \xi\left(x_n - x_{n+p}, \text{t}\right) = 0 < (1 - r_0)$$

$t' > 0$ için $\exists\, n_0' = n_0'$ (t′) olmak üzere $\forall$ n $\geq n_0'$ için p = 1, 2, … vardır ve

$$\xi\left(x_n - x_{n+p}, \text{t}'\right) < (1 - r_0)$$

olduğu elde edilir. Böylece

$$\lim_{n \to \infty} \xi\,(x, t) = 0 \text{ olduğundan, her bir } x_\text{i} \in t_i' > 0 \text{ vardır ve}$$

$$\forall \text{ t} > t_i' \text{ için n} = 1, 2, \ldots \quad \xi\,(x_n, t) < (1 - r_0)$$

olduğu elde edilir. Böylece

$t_0' = t' + \max\left\{t_1', t_2', \ldots, t_{n_0}'\right\}$ olmak üzere

$$\xi\,(x_n, t_0') \leq \xi\left(x_n, \text{t}' + t_{n_0}'\right)$$

$$= \xi\left(x_n - x_{n_0}' + x_{n_0}', \text{t}' + t_{n_0}'\right)$$

$$\leq \xi\left(x_n - x_{n_0}', \text{t}'\right) \diamond \xi\left(x_{n_0}', t_{n_0}'\right)$$

$$\forall \text{ n} > n_0' \text{ için } < (1 - r_0) \diamond (1 - r_0) = (1 - r_0)$$

olduğu elde edilir. Böylece

$$\forall \text{ n} > n_0' \text{ için } \xi\,(x_n, t_0') < (1 - r_0).$$

Ayrıca,

$$\forall \text{ n} = 1, 2, \ldots, n_0' \text{ için } \xi\,(x_n, t_0') \leq \xi\,(x_n, t_n') < (1 - r_0)$$

olduğu elde edilir. Böylece

$\xi\,(x_n, t_0') < (1 - r_0)$ olduğundan $\forall$ n = 1, 2,… (4)

Son olarak benzer şekilde,

$$\forall\, t > 0 \text{ için } p = 1, 2, \ldots \quad \lim_{n \to \infty} \eta\left(x_n - x_{n+p}, t\right) = 0 < (1 - r_0)$$

$t' > 0$ için $\exists\, n_0' = n_0'$ (t′) olmak üzere $\forall$ n $\geq n_0'$ için p = 1, 2, … vardır ve

$$\eta\left(x_n - x_{n+p}, t'\right) < (1 - r_0)$$

olduğu elde edilir. Böylece

$$\lim_{n \to \infty} \eta\,(x, t) = 0 \text{ olduğundan, her bir } x_i \in t_i' > 0 \text{ vardır ve}$$

$$\forall\, t > t_i' \text{ için } n = 1, 2, \ldots \quad \eta(x_n, t) < (1 - r_0)$$

olduğu elde edilir. Böylece

$t_0' = t' + \max\left\{t_1', t_2', \ldots, t_{n_0}'\right\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \eta\,(x_n, t_0') &\leq \eta\left(x_n, t' + t_{n_0}'\right) \\ &= \eta\left(x_n - x_{n_0}' + x_{n_0}', t' + t_{n_0}'\right) \\ &\leq \eta\left(x_n - x_{n_0}', t'\right) \diamond \eta\left(x_{n_0}', t_{n_0}'\right) \\ \forall\, n > n_0' \text{ için } &< (1 - r_0) \diamond (1 - r_0) = (1 - r_0) \end{aligned}$$

olduğu elde edilir. Böylece

$$\forall\, n > n_0' \text{ için } \eta\,(x_n, t_0') < (1 - r_0).$$

Ayrıca,

$$\forall\, n = 1, 2, \ldots, n_0' \text{ için } \eta\,(x_n, t_0') \leq \eta\,(x_n, t_n') < (1 - r_0)$$

olduğu elde edilir. Böylece

$\eta\,(x_n, t_0') < (1 - r_0)$ olduğundan $\forall$ n = 1, 2,… (5)

$t''_0 = \max\{t_0, t_0'\}$ olmak üzere (3), (4) ve (5) koşullarından

$$\forall\, n = 1, 2, \ldots \begin{cases} \rho\,(x_n, t''_0) > r_0 \\ \xi\,(x_n, t''_0) < (1 - r_0) \\ \eta\,(x_n, t''_0) < (1 - r_0) \end{cases}$$

olduğu elde edilir.

Tüm bu ifadeler (x_n) dizisinin (V, N,⋆,⋄) üzerinde sınırlı olduğu anlamına gelir.

BÖLÜM 4
SONUÇ

Dört bölümden oluşan bu yüksek lisans tezinde; giriş kısmı olan birinci bölümde belirsizlik kavramı ele alındı ve bu kavramın klasik küme teorisinden nötrosofik küme teorisine geçişte nasıl kullanılıp kullanılmadığına bakıldı. Klasik kümeyi, bulanık kümeyi ve sezgisel bulanık kümeyi açıklayıcı örnekler verildi ve bu örnekler verilirken aradaki farklar da görünür hale geldi. Ayrıca, normlu lineer uzaylarda nötrosofik yaklaşımı ile ilgili genel ve yüzeysel bir bilgi akışı verilerek bu konuyu ele alan araştırmacıları ve onların araştırmalarında nereye kadar ulaştıkları bilgisi verildi.

İkinci bölümde lineer uzay (vektör uzay) tanımı verildi. Normlu lineer uzay tanımı verildi. T-norm ve t-co-norm tanımları verildi. Bulanık küme tanımı incelendi ve bulanık kümesinin kapsamasının, birleşiminin, kesişiminin, tümleyeninin, toplama işleminin, çarpma işleminin tanımları verildi ve bu tanımlara örnekler verildi. Aralık değerli bulanık küme ve bulanık normlu lineer uzay tanımları gözden geçirildi. Sezgisel bulanık küme, aralık değerli bulanık küme ve sezgisel bulanık normlu lineer uzay tanımları incelendi. Nötrosofik kümenin tanımı verildi. Tek değerli nötrosofik kümenin tanımı incelendi. Tek değerli nötrosofik kümelerin tümleyeninin, kapsamasının, eşitliliğinin, birleşiminin, kesişiminin, toplama işleminin, çarpma işleminin, λ gibi bir skalerle çarpımının ve kuvvetinin tanımları verildi ve bu tanımlara örnekler verildi. Çok değerli nötrosofik kümenin tanımı gözden geçirildi. Çok değerli nötrosofik kümelerin tümleyeninin, kapsamasının, eşitliliğinin, birleşiminin, kesişiminin, toplama işleminin, çarpma işleminin tanımları verildi ve bu tanımlara örnekler verildi. Ayrıca çok değerli nötrosofik boş küme ve çok değerli nötrosofik evrensel kümenin tanımları incelendi.

Üçüncü bölümde nötrosofik normlu lineer uzay tanımı verildi. Nötrosofik normlu lineer uzaylarda yakınsak dizi tanımı verildi ve bu konuyla ilgili teoremler verilip ispatları gözden geçirildi. Nötrosofik normlu lineer uzaylarda sınırlılık ve Cauchy dizisi tanımları incelendi ve bu konuyla ilgili örnekler verildi ve verilen teoremlerin ispatı gözden geçirildi. Nötrosofik normlu lineer uzayda tam tanımı incelendi ve bu konuyla ilgili teoremler verilip ispatı gözden geçirildi.

Tüm bu ifadelerden yola çıktığımızda, bu çalışmanın amacı normlu lineer uzaylar üzerinde bazı nötrosofik yapıları incelemekti. Bu nötrosofik yapılar incelenirken normlu lineer uzaydan nötrosofik normlu lineer uzaya ulaşıp gerekli koşulların sağlandığının gösterilmesinin önemi üzerinde duruldu. Bu nötrosofik normlu lineer uzay incelenirken lineer uzay, normlu lineer uzay, t-norm, t-co-norm, bulanık küme, sezgisel bulanık küme, bulanık normlu lineer uzay ve sezgisel bulanık normlu lineer uzay gibi birçok nötrosofik yapılardan yararlanıldı ve bunlar üzerinde ayrı ayrı duruldu. Ayrıca, tüm konular birbiriyle bağlantılı olacak şekilde ilerleyerek nötrosofik normlu lineer uzayı meydana getirdiği görüldü. Bu nötrosofik normlu lineer uzay üzerinde yakınsaklık, sınırlılık, tamlık ve Cauchy dizisi gibi yapılar da gözden geçirildi. Bu yapılarla ilgili örnekler ve teoremler gözden geçirildi.

KAYNAKLAR

[1] Zadeh, L.A., Fuzzy sets, *information and Control*, 89 (1965), 338-358.

[2] Atanassov, K.T., Intuitionistic fuzzy sets, *Fuzzy sets and systems*, 20 (1986) 87-96.

[3] Atanassov, K.T., More on Intuitionistic fuzzy sets, *Fuzzy sets and Systems*, 33(1989), no. 1, 37-45.

[4] Atanassov, K.T., *Intuitionistic fuzzy sets, Theory and applications*. Studies in Fuzziness and soft Computing,35. Physica- Verlag, Heidelberg, 1999.

[5] Smarandache, F. (1998). *A unifying field in logics. Neutrosophy: neutrosophic probability, set and logic.* Rehoboth: American Research Press

[6] Abdel Basset. M., Chang. V., and Gamal. A & Smarandacha. F., (2019). An Integrated Neutrosophic ANP & VIKOR method for achieving sustainable supplier selection: A case study in importing field. *Computers in Industry*, 106, 94 -110.

[7] Abdel Basset. M., Manogaran. G., Gamal. A & Smarandacha. F., (2019). A group decision making frame work based on Neutrosophic TOPSIS approach for smart medical device selection. *Journal of medical systems*,43(2),38.

[8] Gahler, S., Lineare 2-normierte Raume, *Math.Nachr.*, Vol 28, (1965), pp.1-43.

[9] Maji, P.K., Neutrosophic soft set, *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, 5(1), (2013), 157-168.

[10] Felbin, C., Finite dimensional fuzzy normed linear spaces, *Fuzzy sets and Systems* 48(1992) 239-248.

[11] Felbin, C., The completion of fuzzy normed linear space, *Journal of Analysis and Applications*, 174(1993), No.2,428-440.

[12] Felbin, C., Finite dimensional fuzzy normed linear spaces IIb, *Journal of Analysis*, 7 (1999), 117-131.

[13] Bag, T., Samanta, S.K., Finite dimensional fuzzy normed linear spaces, *The journal of fuzzy Mathematics*, 11(3) (2003) 687-705.

[14] Bag, T., Samanta, S.K., Fuzzy bounded linear operators, *Fuzzy Sets and Systems*, 151 (2005) 513-547.

[15] Bag, T., Samanta, S.K., Fixed point theorems on fuzzy normed linear spaces, *Information science*, 176 (2006) 2910-2931.

[16] Bag, T., Samanta, S.K., Finite dimensional fuzzy normed linear spaces, *Annals of fuzzy Mathematics and Informatics*, 6(2), (2013),271-283.

[17] Santhosh C.P., & Ramakrishnan, T.V., Norm and inner product on fuzzy linear spaces over fuzzy fields, *Iranian Journal of fuzzy systems*, vol 8, no.1, (2011), pp.135-144.

[18] Vijayabalaji, S., Anita, S., Shanthi & Thillaigovindan, N., Interval valued fuzzy n-normed linear space, *Journal of Fundamental Sciences*. 10(2007).

[19] Vijayabalaji, S., Thillaigovindan, N., and Bae Jun, Y., Intuitionistic fuzzy n-normed linear spaces, *Bull. Korean Math.* Soc. 44 (2007) 291-308.

[20] Samanta T.K., and Jebril, I.H., Finite dimensional intuitionistic fuzzy normed linear spaces, *Int.J.Open Problems Compt. Math.*,2(4),(2009),574-591.

[21] Issac, P., and Maya, K., On the Intuitionistic fuzzy normed linear space ($\mathcal{R}^n$, A), Inter. *J. Fuzzy Math. And Systems*, 2(2), (2012), 95-110.

[22] Sandeep Kumar, Some results on Interval valued Intuitionistic Fuzzy n-Normed linear space. *International journal of Mathematics Archive*, 168-178, 2018.

[23] Muralikrishna, P., & Kumar, D. S. (2019). Neutrosophic approach on Normed linear space. *Neutrosophic Sets and Systems*, 30, 225-240.

[24] Wang, H., Smarandache, F., Zhang, Y., & Sunderraman, R. (2010). Single Valued Neutrosophic Sets, *Multispace and Multistructure*, 4, 410-413 p.

[25] Chatterjee, R., Majumdar, R., & Samanta, S. K. (2015). Single valued neutrosophic multiset. *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, 10(3), 499-514.

ÖZGEÇMİŞ

AD : ELİF

SOYAD : AKAY

YÜKSEK LİSANS : GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ

LİSANS : GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ

LİSE : MİMAR SİNAN LİSESİ