



T. C.

ORDU ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**MATRİSLERİN CMP İNVERSLERİNİN BAZI YENİ
GÖSTERİMLERİ VE ÇEŞİTLİ UYGULAMALARI**

GÜLİN BAYIR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ORDU 2024

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan ve kullanılan intihal tespit programının sonuçlarına göre; bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

GÜLİN BAYIR

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

MATRİSLERİN CMP İNVERSLERİNİN BAZI YENİ GÖSTERİMLERİ VE ÇEŞİTLİ UYGULAMALARI

GÜLİN BAYIR

ORDU ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ, 82 SAYFA

(TEZ DANIŞMANI: PROF. DR. SELAHATTİN MADEN)

Bu tez çalışması beş bölüm halinde düzenlenmiştir. Birinci bölümde tez çalışmasının amacından bahsedilerek kısa bir giriş verilmiştir. İkinci bölümde çalışmada gerekli olacak temel tanımlar, teoremler ve bazı genel bilgiler ifade edilmiştir. Bu bölümde bir matris için Moore-Penrose invers, Çekirdek invers ve Çekirdek-EP tanımları ve bunların özellikleri sıralanmıştır. Üçüncü bölümde matrisler için CMP invers tanımı verilerek bu inversin çeşitli özellikleri ortaya konulmuştur. Ayrıca matrislerin CMP inversleri ile ilgili bazı yeni gösterimler ve bu inverslerin çeşitli uygulamalarından bahsedilmiştir. Dördüncü bölümde sonuç ve öneriler verilmiştir. Beşinci bölümde ise tezde yararlanılan kaynaklar listelenmiştir.

Anantara Kelimeler: Matris, Kare Matris, Rank, Parçalanmış Matris, Bir Matrisin İnversi, Genelleştirilmiş İnvers, Moore-Penrose İnvers, Drazin İnvers, Grup İnvers, Çekirdek İnvers, Çekirdek-EP İnvers, CMP İnvers.

ABSTRACT

SOME NEW REPRESENTATIONS OF THE CMP INVERSE OF MATRICES AND ITS SEVERAL APPLICATIONS

GÜLİN BAYIR

**ORDU UNIVERSITY INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED
SCIENCES**

MATHEMATICS

MASTER THESIS, 82 PAGES

(SUPERVISOR: PROF. DR. SELAHATTİN MADEN)

This thesis is organized in five parts. In the first chapter, a short introduction is given by mentioning the purpose of the thesis study. In the second chapter, the basic definitions, theorems and some general informations that will be required in our study are expressed. In this chapter, the definitions and some properties of Moore-Penrose inverse, Core invers and Core-EP inverse for a matrix are given. In the third chapter, it is given the definition of the CMP inverse of a matrix and considered some properties of the this inverse. Furthermore, some new representations and several applications of the CMP inverses of matrices are given in this chapter. In the fourth chapter, conclusions and recommendations are given. In the fifth chapter, the sources used in the thesis are listed.

Keywords: Matrix, Square Matrix, Rank, Partitoned Matrix, İnverse of a Matrix, Generalized İnverse, Moore-Penrose İnverse, Drazin İnvers, Group İnverse, Core İnverse, Core-EP İnverse, CMP İnvers.

TEŞEKKÜR

Tez konusunun belirlenmesinde ve tüm çalışmalarım boyunca her zaman üstün bilgi ve deneyimleriyle bana yol gösteren danışman hocam Sayın Prof. Dr. Selahattin MADEN' e en içten duygularla teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Ayrıca Lisansüstü eğitimim sırasında kendilerinden ders aldığım ve engin tecrübelerinden yararlandığım Ordu Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümündeki tüm değerli hocalarıma teşekkür ederim.



İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
TEZ BİLDİRİMİ	I
ÖZET	II
ABSTRACT	III
TEŞEKKÜR	IV
İÇİNDEKİLER	V
SİMGELER ve KISALTMALAR LİSTESİ	VI
1. GİRİŞ ...	1
2. GENEL BİLGİLER	3
2.1 Matrislerle İlgili Bazı Temel Kavramlar.....	3
2.2 Moore-Penrose İvers ve Özellikleri	8
2.3 Bir Matrisin Çeşitli İversleri ve Özellikleri	12
3. MATRİSLERİN CMP İVERSİLERİ	28
3.1 Bir Matrisin CMP İversi	28
3.2 CMP İverslerin Bazı Yeni Gösterimleri.....	37
3.3 CMP İverslerin Çeşitli Özellikleri	48
4. SONUÇ ve ÖNERİLER	70
5. KAYNAKLAR	71
ÖZGEÇMİŞ	74

SİMGELER ve KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{C}_n^m$	: $\mathbb{C}$ üzerinde tanımlı $m \times n$ tipindeki tüm matrislerin kümesi
I_n	: $n \times n$ tipindeki birim matris
A^T	: A matrisinin transpoz matrisi
$\bar{A}$	: A matrisinin eşlenik matrisi (eş matrisi)
A^*	: A matrisinin eşlenik transpoz matrisi (Hermitian matrisi)
$ A $	: A matrisinin determinantı
$\text{Ek}(A)$	: A matrisinin ek matrisi
A_{ij}	: A matrisinin bir a_{ij} elemanının kofaktörü
A^{-1}	: A matrisinin inversi
$\text{ind}(A)$	: A matrisinin indeksi
$r(A)$	: A matrisinin rankı
$\text{tr}(A)$	: A matrisinin izi
$\mathcal{C}(A)$	: A matrisinin satır uzayı
$\mathcal{N}(A)$	: A matrisinin null (sıfır) uzayı
$\mathfrak{R}(A)$	: A matrisinin ranj (sütun) uzayı
$A^{(1)}$	: A matrisinin genelleştirilmiş inversi (iç inversi)
$A^{(2)}$	: A matrisinin dış inversi
$A^{(1,2)}$	: A matrisinin yansımali genelleştirilmiş inversi
$A^\dagger$	: A matrisinin Moore–Penrose tipi genelleştirilmiş inversi
A^D	: A matrisinin Drazin inversi
$A^{C,\dagger}$	: A matrisinin CMP inversi
$A^\#$	: A matrisinin grup inversi
$A^\oplus$	: A matrisinin çekirdek inversi
$A^\odot$	: A matrisinin çekirdek-EP inversi
$A^\ominus$	: A matrisinin zayıf grup inversi
$\text{köş}(A)$	: A matrisinin köşegen elemanları
$\oplus$	: Direkt toplam

1. GİRİŞ

Günümüzde matrisler ve lineer denklem sistemleri, istatistik, sosyoloji, kimya, fizik eğitimi başta olmak üzere, bilgisayar mühendisliği, kodlama teorisi ve elektrik mühendisliği gibi pek çok önemli alanda gerekli olan matematiksel temel bilginin ayrılmaz parçası haline gelmiştir. Matris hesabı, 19. yüzyıl ortalarından itibaren kullanılmaya başlanmıştır. Matris kavramını ilk olarak 1850 yılında İngiliz matematikçi Sylvester kullanmıştır. 1853 yılında ise İngiliz matematikçi Hamilton ‘*Linear and Vector Functions*’ isimli eserinde matrislerin bazı önemli özelliklerinden faydalanmış olmasına rağmen matris ismini henüz kullanmamıştır. Yine bir İngiliz matematikçi olan Cayley, 1858 yılında o zamankilerde çok meşhur olan ‘*Memorie on the Theory of Matrices*’ isimli eserinde matris cebirinin temel esaslarını ortaya koymuştur. Daha ileriki zamanlarda Fransız Laguerre ve Alman Frobenius matrislerle ilgili bazı yeni tanım ve teoremler üzerine önemli çalışmışlar yapmışlardır.

Herhangi bir matrisin bildiğimiz anlamda inversinin olabilmesi için matrisin kare ve non-singüler olması gerekmektedir. Fakat kare olmayan ya da kare olsa bile non-singüler olmayan bazı matrislerin de mevcut olabileceği ve bu tipten matrislerle uygulamada oldukça sık karşılaşıldığı da bilinen bir gerçektir. Bu nedenle ki bu tür matrislerin de bir çeşit inverslerine ihtiyaç duyulmaktadır. Bir singüler matrisin inversi ifadesi ilk kez 1920 li yıllarda Moore tarafından ortaya atılmış olmasına rağmen ta ki 1955 li yıllara kadar bu konuda herhangi bir önemli çalışma da yapılamamıştır. 1955 yılında, daha önce yapılan çalışmalardan tamamen habersiz bir şekilde, Penrose (1955) biraz farklı bir yoldan da olsa singüler matrisler için Moore tarafından verilen invers kavramını yeniden tanımlamıştır. Penrose ile aşağı yukarı aynı zamanlarda yaşayan Rao ise, bir singüler matrisin Pseudo İnversi ismini verdiği ve en küçük kareler teorisinde, singüler matrisli normal denklemlerin çözümlenmesinde ve istatistiksel tahmin edicilerin varyanslarının hesaplanmasında da kullanılan yeni bir invers kavramı vermiştir. Ancak Rao tarafından geliştirilen bu Pseuda invers, Moore ve Penrose tarafından ortaya atılan kısıtlamaların tamamını maalesef sağlamamaktadır. Bu nedenle de bu invers, Moore–Penrose inversten oldukça farklıdır. Rao, daha sonra lineer denklemlerle ilgili pekçok problemin çözümünde yeterli olan ancak Moore ve Penrose tarafından verilen tanımdan daha zayıf olan bir tanım ortaya koymuştur.

1955' li yıllardan başlayarak genelleştirilmiş inversler üzerinde çalışmalar yapan başlıca bilim adamları arasında Greville, Bjerhammer, Ben-Israel ve Charnes, Chipman, Chipman ve Rao, Scroggs ve Odell gibi isimler sayılabilir. Bott ve Duffin, bir kare matrisin kısıtlamalı inversi olarak adlandırdığı bir invers tanımlamışlardır ancak bu invers bilinen g -inversten oldukça farklıdır ve çeşitli uygulamalarda çok sık kullanılmaktadır. Chernoff ise çalışmalarında bir singüler nonnegatif definit matrisin g -inversi kavramını ele almıştır. Bu invers çeşitli istatistiksel tahmin problemlerinin incelenmesinde oldukça sık kullanılmaktadır. Rao tarafından verilen daha zayıf olan tanımı sağlayan g -invers tek türlü olmamasına rağmen matris cebirinde oldukça ilginç bir çalışma olarak kabul edilir. Rao, 1967 yılındaki bir yayınında, değişik amaçlarda kullanılmak üzere g -inverslerin bir sınıflandırmasını ortaya çıkarmıştır. Bu çalışmalar daha sonraki yıllarda genelleştirilmiş inverslerin yeni bir sınıflandırmasını veren Mitra ve Bhimasankaram (1969, 1970) tarafından daha da geliştirilmiştir. Genelleştirilmiş inverslerin diğer önemli uygulamaları Mitra ve Rao (1968a, 1968b, 1969) ve Rao (1968) tarafından yapılan pek çok çalışmada detaylı bir şekilde ortaya konulmuştur. Genelleştirilmiş inversler hakkındaki sistematik gelişmeler *Generalized Inverse of Matrices and Its Applications* (Wiley, 1971) adlı kitapta verilmiştir.

Bu tez çalışmasında ilk olarak kare olmayan ya da kare olmasına rağmen bilinen anlamdaki inversi mevcut olmayan matrisler hakkında geliştirilen ve özellikle lineer denklem sistemlerinin genel çözümlerinin var olup-olmadığının incelenmesinde ve çözümün var olması durumunda ise bulunmasında kullanılan ve bilinen anlamdaki invers özelliklerini de tamı tamına sağlayan ve Moore-Penrose invers adı verilen yeni bir invers kavram ele alınacaktır. Bununla ilgili olarak ilk önce Moore-Penrose invers tanımı verilerek bunun çeşitli özellikleri deytaylıca incelenmiştir. Daha sonra kare matrisler için Drazin invers, grup invers, çekirdek invers ve çekirdek-EP invers tanımları verilerek bu inverslerin çeşitli gösterimleri ve önemli özellikleri verilmiştir. Tezin ana kısmında ise CMP invers adı verilen yeni bir genelleştirilmiş invers kavramı verilmiş, bu genelleştirilmiş inversin bazı gösterimleri ve çeşitli özellikleri incelenerek blok parçalanmış matrisler için çeşitli CMP invers gösterimler verilmiştir.

CMP inversler singüler diferansiyel denklemlerin veya fark denklemlerinin çözümlerinde, Markov zincirleriyle ilgili çalışmalarda, kriptografyada, yinelemeli yöntemlerde ve sayısal analiz problemlerinde çok çeşitli uygulama alanlarına sahiptir.

2. GENEL BİLGİLER

2.1 Matrislerle İlgili Bazı Temel Kavramlar

Tanım 2.1 i) $\mathbb{K}$ bir cisim olsun. $m, n \in \mathbb{N}$ ve $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ olmak üzere bütün (i, j) sıralı ikililer kümesi $\mathcal{A} = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ gösterilsin. Bu durumda bir $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{K}$ fonksiyonu

$$(i, j) \rightarrow f(i, j) = a_{ij}$$

biçiminde tanımlansın. $a_{ij} \in \mathbb{K}$ olmak üzere keyfi olarak seçilen m, n tane elemanın oluşturduğu bir tabloya $\mathbb{K}$ cismi üzerinde tanımlı $m \times n$ boyutlu bir matris denir ve

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

veya $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ şeklinde gösterilir. $\mathbb{K}$ cismi üzerinde tanımlanan $m \times n$ boyutlu tüm matrislerin kümesini $\mathbb{K}_n^m$ ile gösterelim. Bu durumda her bir (i, j) , $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ ye karşılık gelen a_{ij} elemanına A matrisinin (i, j) -yinci bileşeni denir.

ii) $m \times n$ tipindeki $A = [a_{ij}]$ ve $B = [b_{ij}]$ matrisleri verilmiş olsun Eğer her bir (i, j) , $1 \leq i \leq m$ ve $1 \leq j \leq n$ ikilisi için $a_{ij} = b_{ij}$ ise A ve B matrisleri eşittir denir.

iii) $m \times n$ tipinde $A = [a_{ij}]$ matrisi verilsin. Her bir (i, j) , $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ ikilisi için $a_{ij} = 0$ ise A matrisine sıfır matrisi adı verilir (Hacısalıhoğlu H.H., 1977).

Tanım 2.2 i) $m \times n$ boyutlu $A = [a_{ij}]$ ve $B = [b_{ij}]$ matrisleri verilmiş olsun. Bu durumda $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$ matrislerinin toplamı,

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

şeklinde tanımlanır.

ii) $c \in \mathbb{K}$ keyfi bir skaler sayı olmak üzere $cA \in \mathbb{K}_n^m$ matrisi (i, j) -yinci bileşeni ca_{ij} olan bir matristir. Yani

$$cA = \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \dots & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \dots & ca_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ca_{m1} & ca_{m2} & \dots & ca_{mn} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

dir (Hacısalıhoğlu H.H., 1977).

Tanım 2.3 $A = [a_{ij}] \in \mathbb{K}_p^m$ ve $B = [b_{ij}] \in \mathbb{K}_n^p$ şeklinde verilen A ve B matrislerinin çarpımı $C = [c_{ij}] \in \mathbb{K}_n^m$ şeklinde bir matris olup

$$[a_{ij}] \cdot [b_{ij}] = [c_{ij}] = [\sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj}], \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n$$

veya daha açık olarak

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} (a_{11}b_{11} + \dots + a_{1p}b_{p1}) & \dots & (a_{11}b_{1n} + \dots + a_{1p}b_{pn}) \\ \dots & \dots & \dots \\ (a_{m1}b_{11} + \dots + a_{mp}b_{p1}) & \dots & (a_{m1}b_{1n} + \dots + a_{mp}b_{pn}) \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

olarak tanımlanır. Bu tanımdan kolayca söylenebilir ki iki matrisin çarpımının tanımı olabilmesi için soldaki matrisin sütun sayısının sağdaki matrisin satır sayısına eşit olması gerekmektedir (Hacısalıhoğlu H.H., 1977).

Tanım 2.4 i) Eğer bir A matrisinin satır sayısı ile sütun sayısı birbirine eşit ise, bu takdirde A matrisine bir kare matris adı verilir. Bu durumda $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ elemanlarına ise A matrisinin köşegen (ya da esas köşegen) elemanları adı verilir.

ii) Eğer bir $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ matrisinin köşegen elemanları dışında kalan tüm elemanları sıfır ise A ya bir köşegen matris denir ve $A = \text{Köş}\{a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}\}$ ile gösterilir.

iii) Bir köşegen matriste $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn} = k$, alınırsa bu matrise skaler matris denir.

iv) Köşegen elemanları bir ve diğer elemanları sıfır olan bir kare matrise birim matris denir ve n - yinci mertebeden bir birim matris I_n ile gösterilir. Bu durumda keyfi bir $A \in \mathbb{K}_n^m$ matrisi için, $I_m A = A I_n = A$ eşitliği gerçekleşir (Hacısalıhoğlu H.H., 1977).

Tanım 2.5 Bir $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ matrisinin aynı numaralı satırlarının ve sütunların kendi aralarında yer değiştirmesiyle elde edilen bir matrisi bu A matrisinin transpozunu veya transpozunu adı verilir ve bu matris $A^T = [a_{ij}]_{n \times m}$ ile gösterilir. Bu durumda uygun mertebeden A ve B matrisleri için $(A + B)^T = A^T + B^T$ ve $(AB)^T = B^T A^T$ olduğu kolayca görülebilir. Öte yandan A bir reel kare matris olmak üzere eğer $A^T = A$ oluyorsa, bu takdirde A matrisine bir simetrik matris denir (Hacısalıhoğlu H.H., 1977).

Tanım 2.6 i) $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ matrisi verilsin. Bu durumda A matrisinin i -yinci satırı ve j -yinci sütununun çıkarılması sonucunda oluşan alt kare matrisin determinantına A matrisinin bir a_{ij} elemanının minörü denir ve $|M_{ij}|$ ile gösterilir.

ii) Bir $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ kare matrisi verilsin ve bir a_{ij} elemanının minörü $|M_{ij}|$ olsun. Bu durumda a_{ij} elemanının A_{ij} ile gösterilen ya da işaretli minörü ya da kofaktörü,

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot |M_{ij}| \quad (2.5)$$

olarak tanımlanır.

iii) $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ matrisinin determinanı herhangi bir satır (veya sütun) elemanlarının kendi işaretli minörleriyle(kofaktörleriyle) çarpılarak tüm elde edilen çarpanların toplanmasıyla elde edilir. Başka bir deyişle herhangi iki i ve j ($i, j = 1, 2, 3, \dots, n$) için

$$\det(A) = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot A_{ik} = \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} a_{ik} |M_{ik}| \quad (2.6)$$

veya

$$\det(A) = \sum_{k=1}^n a_{kj} \cdot A_{kj} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+j} a_{kj} |M_{ik}| \quad (2.7)$$

ile tanımlanır. Bu durumda her bir i için, (2.6) ifadesinde verilen açılım A matrisinin determinantının i -yinci satıra göre açılımı ve her bir j için, (2.7) ifadesinde verilen açılım ise A matrisinin determinantının j -yinci sütuna göre açılımı olarak adlandırılır.

iv) Bir $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ matrisi için eğer $|A| = 0$ ise, A matrisine bir singüler matris ve eğer $|A| \neq 0$ ise, A matrisine bir nonsingüler matris denir (Hacısalıhoğlu H.H., 1977).

Tanım 2.7 Bir $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ matrisi verilsin. Bu durumda bir a_{ij} elemanının işaretli minörü A_{ij} olmak üzere $[A_{ij}]^T = [A_{ji}]$ matrisine bu A matrisinin ek matrisi denir ve

$$Ek(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

şeklinde gösterilmektedir (Hacısalıhoğlu H.H., 1977).

Tanım 2.8 Herhangi bir $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ kare matrisi verilsin. Eğer $A \cdot B = B \cdot A = I_n$ olacak şekilde bir $B = [b_{ij}]_{n \times n}$ kare matrisi mevcutsa, bu durumda bu B matrisine A matrisinin bir inversi denir ve $A^{-1} = B$ şeklinde gösterilir (Hacısalıhoğlu H.H., 1977).

Teorem 2.1 $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ matrisi ile bu matrisin ek matrisinin çarpımı bir skaler olup,

$$A \cdot Ek(A) = Ek(A) \cdot A = |A| I_n \quad (2.9)$$

ile verilir (Hacısalıhoğlu H.H., 1977).

Teorem 2.2 $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ matrisi nonsingüler olsun. Bu durumda A matrisinin inversi,

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Ek}(A) \quad (2.10)$$

şeklinde olacaktır. (Hacısalıhoğlu H.H., 1977)

Teorem 2.3 i) Eğer $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ nonsingüler bir matris ise A^{-1} inversi tektir.

ii) Eğer A nonsingüler bir matris ise A^{-1} inversi de nonsingüler olup $(A^{-1})^{-1} = A$ dır.

iii) Eğer A ve B matrisleri çarpıma uygun nonsingüler iki matris ise bu durumda AB çarpımı da nonsingüler bir matris olup $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ dir.

iv) Eğer A matrisi nonsingüler bir matris ise bu durumda A^T matrisi de nonsingüler bir matris olacaktır ve $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ dir (Hacısalıhoğlu H.H., 1977).

Tanım 2.9 i) Bir $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ kare matrisi verildiğinde eğer $A^2 = A$ oluyorsa, bu takdirde verilen A matrisine bir idempotent matris adı verilir.

ii) $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi üzerinde tanımlı bir A verilmiş olsun. Bu durumda A matrisinin her bir elemanının yerine bun elemanın eşleniği yazılarak elde edilen bir matrise A matrisinin eşleniği ya da eş matrisi adı verilmektedir ve $\bar{A}$ ile gösterilir.

iii) $\mathbb{C}$ kompleks sayı cismi üzerinde tanımlı bir A matrisi için eğer $(\bar{A})^T = A$ eşitliği sağlanıyorsa, bu A matrisine bir Hermityen matris denir ve $A^* = (\bar{A})^T$ ile gösterilir.

iv) Bir A matrisi verildiğinde eğer $AA^* = A^*A$ eşitliği gerçekleşiyorsa, bu takdirde bu A matrisine bir normal matris denir.

v) Bir $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ nonsingüler matrisi verilmiş olsun. Bu takdirde eğer, $A^{-1} = A^*$ ya da buna denk olarak $AA^* = A^*A = I$ eşitliği sağlanıyorsa bu durumda A matrisine bir birimsel (üniter) matris adı verilir (Hacısalıhoğlu H.H., 1977).

Teorem 2.4 Uygun mertebeden A ve B matrisleri verilmiş olsun. Bu takdirde aşağıdaki eşitlikler gerçekleşir (Hacısalıhoğlu H.H., 1977):

- i)** $(\bar{A})^T = \overline{(A^T)}$, **ii)** $(A^*)^* = A$.
- iii)** $(A + B)^* = A^* + B^*$, **iv)** $(AB)^* = B^*A^*$.

Tanım 2.10 i) $x_1, x_2, \dots, x_n$ vektörleri verilmiş olsun. Bu takdirde eğer $\sum_{i=1}^n a_i x_i = 0$ eşitliği ancak $a_1, a_2, \dots, a_n$ skalerlerinin tümü birden sıfır olduğunda sağlanıyorsa bu durumda $x_1, x_2, \dots, x_n$ vektörlerine lineer bağımsızdır denir ve aksi durumda, yani, $a_1, a_2, \dots, a_n$ skalerlerinden en az biri sıfırdan farklı olmak üzere eğer $\sum_{i=1}^n a_i x_i = 0$ eşitliği sağlanıyorsa bu durumda da $x_1, x_2, \dots, x_n$ vektörlerine lineer bağımlıdır denir.

ii) $m \times n$ tipinde bir A matrisi verilmiş olsun. Ayrıca A matrisinin sütun vektörleri $A_{*1}, A_{*2}, \dots, A_{*n}$ ile ve satır vektörleri de $A_{1*}, A_{2*}, \dots, A_{m*}$ ile gösterilsin. Bu takdirde $A_{i*}, i = 1, 2, \dots, m$ vektörleri arasından oluşturulan en geniş lineer bağımsız vektörler kümesinin eleman sayısına bu A matrisinin satır rankı ve $A_{*j}, j = 1, 2, \dots, n$ vektörleri arasından oluşturulan en geniş lineer bağımsız vektör kümesinin eleman sayısına ise bu A matrisinin sütun rankı adı verilmektedir (Hacısalıhoğlu H.H., 1977).

Teorem 2.5 i) Bir matrisin iki satırının yer değiştirmesi onun satır rankını değiştirmez.

ii) Elementer satır(sütun) işlemleri bir matrisin satır(sütun) rankını değiştirmez.

iii) Keyfi bir A matrisinin satır rankı sütun rankına eşittir (Hacısalıhoğlu H.H., 1977).

Tanım 2.11 Herhangi bir A matrisinin satır(veya sütun) rankına A matrisinin rankı adı verilir ve $\text{rank}(A)$ ya da $r(A)$ ile gösterilir (Hacısalıhoğlu H.H., 1977).

Teorem 2.6 Bir A matrisi verildiğinde $r(A) = r(A^T)$ dir (Hacısalıhoğlu H.H., 1977).

Tanım 2.12 $n \times n$ tipinde verilen bir A matrisi için eğer $r(A) = n$ ise A matrisine bir nonsingüler matris denir. Aksi takdirde, yani, $r(A) < n$ oluyorsa, bu durumda da A matrisine bir singüler matris adı verilir (Hacısalıhoğlu H.H., 1977).

Tanım 2.13 i) $m \times n$ tipinde bir $A \in \mathbb{K}_n^m$ matrisi verilmiş olsun. Bu takdirde $\mathcal{N}(A) = \{x: Ax = 0\}$ kümesine verilen A matrisinin null uzayı ya da sıfır uzayı denir.

ii) $m \times n$ tipinde bir $A \in \mathbb{K}_n^m$ matrisi verilsin. Bu takdirde $\mathcal{R}(A) = \{y: Ax = y\}$ kümesine A matrisinin ranj uzayı ya da sütun uzayı denir (Hacısalıhoğlu H.H., 1977).

Teorem 2.7 Uygun mertebeden A ve B matrisleri için AB çarpımının rankı A ve B matrislerinin rankından daha büyük olamaz. Başka bir deyişle,

$$r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\} \quad (2.11)$$

eşitsizliği sağlanır (Hacısalıhoğlu H.H., 1977).

2.2 Moore-Penrose İvers ve Özellikleri

Bu kısımda tez boyunca sıklık ismini zikredeceğimiz bir matrisin Moore-Penrose inversi olarak adlandırılan bir genelleştirilmiş invers ve bu inversin çeşitli özellikleri inceleyeceğiz.

Tanım 2.14 $\mathbb{C}_n^m$ ile kompleks sayılar cismi üzerinde tanımlı $m \times n$ tipindeki tüm matrislerin kümesini gösterelim. Bu durumda bir $A \in \mathbb{C}_n^m$ matrisi için aşağıdaki dört şartı(Moore–Penrose şartları denir) sağlayan bir X matrisi bulunabilirse bu X matrisine verilen A matrisinin bir Moore–Penrose inversi adı verilir ve $A^\dagger$ sembolü ile gösterilir:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & AXA = A, \\ \text{(ii)} \quad & XAX = X, \\ \text{(iii)} \quad & (AX)^* = AX, \\ \text{(iv)} \quad & (XA)^* = XA. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Öte yandan eğer X matrisi sadece (i) şartını sağlıyorsa, bu durumda X matrisine A matrisinin bir genelleştirilmiş inversi (iç inversi) denir ve $A^{(1)}$ ile gösterilir. Eğer X matrisi sadece (ii) şartını sağlıyorsa bu durumda X matrisine A matrisinin bir dış inversi denir ve $A^{(2)}$ ile gösterilir. Hem (i) hem de (ii) şartını sağlayan bir X matrisine ise A matrisinin bir yansılmalı genelleştirilmiş inversi adı verilir ve $A^{(1,2)}$ ile gösterilir.

Bu tanıma göre eğer A matrisi nonsingüler ise bu takdirde $A^{-1} = A^\dagger$ olacağı açıktır. Eğer A matrisi singüler bir matris veya kare olmayan bir matris ise, bu durumda Moore–Penrose şartlarını sağlayan bir $A^\dagger$ matrisinin mevcudiyet sorusu akla gelebilir. Bunun cevabı her A matrisi için böyle bir $A^\dagger$ matrisinin daima mevcut ve tek olduğu şeklinde olacaktır. Aşağıda bu şekilde tanımlanan $A^\dagger$ inversinin bazı önemli özellikleri sıralanacaktır. Öncelikle belirtmek gerekir ki A matrisi $m \times n$ tipinde bir sıfır matris olduğunda, $A^\dagger$ matrisi de $n \times m$ tipinde bir sıfır matris olacaktır.

Teorem 2.8 Bir A matrisi verildiğinde Moore–Penrose şartlarını sağlayan bir ve ancak bir tane $A^\dagger$ matrisi mevcuttur (Pringle and Rayner., 1971).

İspat: Eğer $A = 0$ ise bu durumda $A^\dagger = 0$ olacağından dolayı $A \neq 0$ alınabilir. O halde A matrisi r ranklı keyfi bir matris olarak verilmiş olsun. Bu takdirde A matrisi

$$A = BC \tag{2.13}$$

şeklinde parçalanabilir. Burada B matrisi $m \times r$ tipinde ve r ranklı bir matris ve C matrisi ise $r \times n$ tipinde ve r ranklı bir matris olmak üzere, B^*B ve CC^* çarpım matrislerinin her ikisi de nonsingüler olacaktır. Bunun sonucu olarak eğer $A^\dagger$ matrisi

$$A^\dagger = C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^* \quad (2.14)$$

biçiminde alınırsa, $A^\dagger$ matrisi Moore–Penrose şartlarını sağlayacaktır. Bunun için

$$(i) \quad AA^\dagger A = (BC)C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*(BC)$$

$$= B(CC^*)(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}(B^*B)C = BC = A,$$

$$(ii) \quad A^\dagger AA^\dagger = C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*(BC)C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*$$

$$= C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}(B^*B)(CC^*)(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*$$

$$= C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^* = A^\dagger,$$

$$(iii) \quad (AA^\dagger)^* = [(BC)C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*]^* = B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}(CC^*)B^*$$

$$= B(B^*B)^{-1}B^* = B(CC^*)(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*$$

$$= (BC)C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^* = AA^\dagger,$$

$$(iv) \quad (A^\dagger A)^* = [C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*(BC)]^*$$

$$= C^*(B^*B)(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}C$$

$$= C^*(CC^*)^{-1}C = C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}(B^*B)C$$

$$= C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*(BC) = A^\dagger A$$

olduğu kolayca görülür. Öte yandan Moore–Penrose inversin tekliğini göstermek için verilen herhangi bir A matrisi için Moore–Penrose şartlarını sağlayan herhangi iki $A_1^\dagger$ ve $A_2^\dagger$ matrisinin mevcut olduğu varsayalım. Bu takdirde,

$$A_1^\dagger = A_1^\dagger AA_1^\dagger = A_1^\dagger (AA_1^\dagger)^* = A_1^\dagger (A_1^\dagger)^* A^* = A_1^\dagger (A_1^\dagger)^* (AA_2^\dagger A)^*$$

$$= A_1^\dagger (A_1^\dagger)^* A^* (A_2^\dagger)^* A^* = A_1^\dagger (AA_1^\dagger)^* (AA_2^\dagger)^* = A_1^\dagger AA_1^\dagger AA_2^\dagger = A_1^\dagger AA_2^\dagger$$

$$= A_1^\dagger A (A_2^\dagger AA_2^\dagger) = (A_1^\dagger A)^* (A_2^\dagger A)^* A_2^\dagger = A^* (A_1^\dagger)^* A^* (A_2^\dagger)^* A_2^\dagger$$

$$= (AA_1^\dagger A)^* (A_2^\dagger)^* A_2^\dagger = A^* (A_2^\dagger)^* A_2^\dagger = (A_2^\dagger A)^* A_2^\dagger = A_2^\dagger AA_2^\dagger = A_2^\dagger$$

olduğu görülür, yani verilen A matrisi için $A^\dagger$ matrisi tektir.

Teorem 2.9 i) $m \times n$ tipindeki bir A matrisinin tüm elemanları 1 ise, $A^\dagger = \frac{1}{m.n} A^*$ olur.

ii) $n \times 1$ tipinde verilen bir a sütun vektörü için $a^\dagger$ inversi $a^\dagger = (a^* a)^{-1} a^*$ olacaktır.

iii) $1 \times n$ tipinde verilen bir a satır vektörü için $a^\dagger$ inversi $a^\dagger = a^* (a a^*)^{-1}$ olacaktır (Pringle and Rayner., 1971).

Teorem 2.10 A keyfi boyutlu herhangi bir matris olsun. Bu takdirde

$$(A^*)^\dagger = (A^\dagger)^* \quad (2.15)$$

eşitliği geçerlenir (Pringle and Rayner., 1971).

İspat: (2.13) bağıntısında verildiği gibi $A = BC$ olsun. Bu durumda $A^* = C^* B^*$ olup, $A^\dagger = C^* (C C^*)^{-1} (B^* B)^{-1} B^*$ dir. Bunun sonucu olarak $(A^\dagger)^* = B (B^* B)^{-1} (C C^*)^{-1} C$ olduğu elde edilir. Bu ise A^* matrisinin Moore–Penrose inversi olacaktır. Gerçekten,

$$(i) A^* (A^*)^\dagger A^* = C^* B^* B (B^* B)^{-1} (C C^*)^{-1} C C^* B^* = C^* B^* = A^*,$$

$$(ii) (A^*)^\dagger A^* (A^*)^\dagger = B (B^* B)^{-1} (C C^*)^{-1} C C^* B^* B (B^* B)^{-1} (C C^*)^{-1} C \\ = B (B^* B)^{-1} (C C^*)^{-1} C = (A^*)^\dagger,$$

$$(iii) [A^* (A^*)^\dagger]^* = [(C^* B^*) B (B^* B)^{-1} (C C^*)^{-1} C]^* = [C^* (C C^*)^{-1} C]^* \\ = C^* (C C^*)^{-1} C = C^* (B^* B) (B^* B)^{-1} (C C^*)^{-1} C = A^* (A^*)^\dagger,$$

$$(iv) [(A^*)^\dagger A^*]^* = [B (B^* B)^{-1} (C C^*)^{-1} C (C^* B^*)]^* = [B (B^* B)^{-1} B^*]^* \\ = B (B^* B)^{-1} B^* = B (B^* B)^{-1} (C C^*)^{-1} (C C^*) B^* = (A^*)^\dagger A^*$$

olur. Böylece $(A^*)^\dagger = B (B^* B)^{-1} (C C^*)^{-1} C$ olduğu elde edilir. Bunun sonucu olarak da $(A^*)^\dagger = (A^\dagger)^*$ yazılabilir ve ispat tamamlanır.

Sonuç 2.1 Herhangi bir matrisin Moore–Penrose inversinin Moore–Penrose inversi o matrise eşittir. Yani, bir A matrisi için, $(A^\dagger)^\dagger = A$ dirr (Pringle and Rayner., 1971).

Teorem 2.11 Herhangi bir A matrisi verilmiş olsun. Bu takdirde $r(A) = r(A^\dagger)$ eşitliği sağlanır (Pringle and Rayner., 1971).

İspat: Eğer Teorem 2.7 yi $AA^\dagger A = A$ ve $A^\dagger AA^\dagger = A^\dagger$ ye uygularsak bu durumda

$$r(A) = r(AA^\dagger A) \leq \min\{r(A), r(A^\dagger)\} \leq r(A^\dagger)$$

ve

$$r(A^\dagger) = r(A^\dagger AA^\dagger) \leq \min\{r(A), r(A^\dagger)\} \leq r(A)$$

olduğu elde edilir. Bu iki eşitsizlikten istenen sonuç sağlanır ve ispat tamamlanır.

Bu teoremin bir sonucu olarak eğer A matrisi r ranklı ise, bu takdirde $A^\dagger$, $AA^\dagger$, $A^\dagger A$, $AA^\dagger A$ ve $A^\dagger AA^\dagger$ matrislerinin her birinin de r ranklı olduğu görülür.

Sonuç 2.2 A matrisi simetrik ve idempotent bir matris olmak üzere $A^\dagger = A$ eşitliği sağlanır (Pringle and Rayner., 1971).

Sonuç 2.3 $B = \text{Köş}\{b_{11}, b_{22}, \dots, b_{nn}\}$ olsun. Bu durumda B matrisinin Moore–Penrose inversi $B^\dagger$, i -yinci satır ve i -yinci sütunda yer alan köşegen elemanı $b_{ii} \neq 0$ iken b_{ii}^{-1} ve $b_{ii} = 0$ iken ise 0 olan bir köşegen matristir (Pringle and Rayner., 1971).

Teorem 2.12 i) A , $m \times n$ matrisi tam satır ranklı ise, $A^\dagger = A^*(AA^*)^{-1}$ ve $AA^\dagger = I_m$,
ii) A , $m \times n$ matrisi tam sütun ranklı ise bu durumda, $A^\dagger = (A^*A)^{-1}A^*$ ve $A^\dagger A = I_n$ olur (Pringle and Rayner., 1971).

İspat: Teoremin ispatı için her iki durumda da Moore–Penrose şartlarının sağladığını göstermek yeterli olacaktır. Bu durumda,

$$\text{i)} \quad AA^\dagger A = AA^*(AA^*)^{-1}A = (AA^*)(AA^*)^{-1}A = A,$$

$$A^\dagger AA^\dagger = A^*(AA^*)^{-1}AA^*(AA^*)^{-1}$$

$$= A^*(AA^*)^{-1} = A^\dagger,$$

$$(AA^\dagger)^* = (AA^*(AA^*)^{-1})^* = ((AA^*)(AA^*)^{-1})^* = I^* = I$$

$$= (AA^*)(AA^*)^{-1} = AA^*(AA^*)^{-1} = AA^\dagger,$$

$$(A^\dagger A)^* = (A^*(AA^*)^{-1}A)^* = A^*(AA^*)^{-1}A = A^\dagger A$$

olacaktır.

$$\text{ii)} \quad AA^\dagger A = A(A^*A)^{-1}A^*A = A(A^*A)^{-1}(A^*A) = A,$$

$$A^\dagger AA^\dagger = (A^*A)^{-1}A^*A(A^*A)^{-1}A^*$$

$$= (A^*A)^{-1}(A^*A)(A^*A)^{-1}A^* = (A^*A)^{-1}A^* = A^\dagger,$$

$$(AA^\dagger)^* = (A(A^*A)^{-1}A^*)^* = A(A^*A)^{-1}A^* = AA^\dagger,$$

$$\begin{aligned}
(A^\dagger A)^* &= ((A^* A)^{-1} A^* A)^* = ((A^* A)^{-1} (A^* A))^* = I^* = I \\
&= (A^* A)^{-1} (A^* A) = (A^* A)^{-1} A^* A = A^\dagger A
\end{aligned}$$

olduğu görülür ve böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 2.13 $B \neq 0$ ve $C \neq 0$ olmak üzere sırasıyla $m \times r$ ve $r \times n$ tipinde B ve C matrisleri verilsin ve $r(B) = r(C) = r$ olsun. Bu takdirde,

$$(BC)^\dagger = C^\dagger B^\dagger \quad (2.16)$$

eşitliği gerçekleşir (Pringle and Rayner., 1971).

İspat: Bu durumda B matrisi tam sütun ranklı bir matris ve C matrisi ise tam satır ranklı bir matris olup Teorem 2.12 dikkate alınır

$$C^\dagger = C^*(CC^*)^{-1} \text{ ve } B^\dagger = (BB^*)^{-1}B^*$$

yazılabilir ve buradan da

$$C^\dagger B^\dagger = C^*(CC^*)^{-1}(BB^*)^{-1}B^*$$

eşitliği yazılır. Bu ise $(BC)^\dagger$ matrisinin ta kendisidir ve böylece ispat tamamlanır.

2.3 Bir Matrisin Çeşitli İnversleri ve Özellikleri

$m \times n$ tipindeki kompleks matrislerinin kümesi $\mathbb{C}_n^m$ olmak üzere A^* , $\Re(A)$ ve $r(A)$ sembolleri ile bir $A \in \mathbb{C}_n^m$ matrisinin sırasıyla, eşlenik devriğini, ranj uzayını ve rankını gösterelim. Ayrıca, I_n , n -yinci mertebeden birim matris olsun.

CMP invers tanımına geçmeden önce, bazı genelleştirilmiş invers kavramlarını hatırlatmak daha uygun olacaktır. Bir $A \in \mathbb{C}_n^m$ matrisinin $A^\dagger \in \mathbb{C}_n^m$ ile gösterilen Moore-Penrose inversi yukarıda detaylı bir şekilde verilmişti. Moore-Penrose inversin en önemli özelliği onun ortogonal izdüşümleri temsil etmede kullanılabilmesidir. $P_A = AA^\dagger$ ve $P_{A^*} = A^\dagger A$ sırasıyla $\Re(A)$ ve $\Re(A^*)$ üzerindeki ortogonal izdüşümlerdir.

Bir başka önemli genelleştirilmiş invers de Drazin invertir. Ancak Drazin inversin mevcut olması için öncelikle verilen matrisin bir kare matris olması gereklidir.

Tanım 2.15 Herhangi bir $A \in \mathbb{C}_n^n$ kare matrisinin Drazin inversi aşağıdaki üç eşitliği sağlayan ve tek türlü mevcut olan $A^D \in \mathbb{C}_n^n$ matrisidir (Baksalary and Trenkler, 2010):

$$A^D A A^D = A^D, A A^D = A^D A, A^{l+1} A^D = A^{l+1}, \text{ her } l \geq k \text{ için.} \quad (2.17)$$

Buradaki k , $r(A^{k+1}) = r(A^k)$ eşitliğini sağlayan en küçük pozitif tam sayı olup bu k sayısına A matrisinin indeksi adı verilir ve $k = ind(A)$ ile gösterilir. Buradan açıkça görülür ki $ind(A) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul A matrisinin bir nonsingular matris olmasıdır. Öte yandan $AA^D = A^D A$ olması durumunda her bir $l \geq k$ için $A^{l+1}A^D = A^{l+1}$ eşitliğinin $A^D A^{l+1} = A^{l+1}$ eşitliğine denk olacağı kolayca görülebilir.

Tanım 2.16 Her hangi bir A matrisi için eğer $ind(A) = 1$, yani $r(A^2) = r(A)$ ise bu takdirde Drazin inverse grup invers adı verilmektedir. Yani bir A matrisinin grup inversi aşağıdaki eşitlikleri sağlayan ve tek türlü olarak belirli olan bir $A^\# \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi olacaktır (Baksalary and Trenkler., 2010):

$$AA^\#A = A \quad A^\#AA^\# = A^\# \quad AA^\# = A^\#A. \quad (2.18)$$

Burada yeri gelmişken hemen belirtelim ki her kare matrisin bir grup inverse sahip olması gerekmez. Ancak verilen bir A matrisinin böyle bir inverse sahip olabilmesi için gerek ve yeter koşul matrisin indeksinin 1 olması, veya başka bir deyişle, $r(A^2) = r(A)$ olmasıdır. İndeksi 1 olan matrislerin kümesi $\mathbb{C}_n^{CM}$ ile gösterilecektir, yani

$$\mathbb{C}_n^{CM} = \{A \in \mathbb{C}_n^n : r(A^2) = r(A)\} \quad (2.19)$$

dir. İndeksi 1 olan matrislere grup matris veya çekirdek matris adı verilmektedir.

$\mathbb{C}_{m \times n}^{Pl}$, $\mathbb{C}_n^P$, $\mathbb{C}_n^{OP}$, $\mathbb{C}_n^{TM}$ ve $\mathbb{C}_n^{EP}$ kümeleri sırasıyla kısmi izometrilere, idempotent matrislerin, ortogonal izdüşümlerin, Hermityen idempotent matrislerin, Tripotent matrislerin ve EP- matrislerin kümelerini gösterebiliriz, yani

$$\mathbb{C}_{m,n}^{Pl} = \{A \in \mathbb{C}_{m,n}^m : AA^*A = A\} = \{A \in \mathbb{C}_{m,n}^m : A^\dagger = A^*\}, \quad (2.20)$$

$$\mathbb{C}_n^P = \{A \in \mathbb{C}_n^n : A^2 = A\}, \quad (2.21)$$

$$\mathbb{C}_n^{OP} = \{A \in \mathbb{C}_n^n : A^2 = A = A^*\} = \{A \in \mathbb{C}_n^n : A^2 = A = A^\dagger\}, \quad (2.22)$$

$$\mathbb{C}_n^{TM} = \{A \in \mathbb{C}_n^n : A^3 = A\}, \quad (2.23)$$

$$\mathbb{C}_n^{EP} = \{A \in \mathbb{C}_n^n : AA^\dagger = A^\dagger A\} = \{A \in \mathbb{C}_n^n : \Re(A) = \Re(A^*)\}, \quad (2.24)$$

olsun.

r ranklı herhangi bir $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi $U \in \mathbb{C}_n^n$ uniter matris olmak üzere,

$$A = U \begin{pmatrix} \Sigma K & \Sigma L \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^* \quad (2.25)$$

biçiminde gösterilebilir, burada $\Sigma = \text{köş}\{\sigma_1 I_{r_1} \dots \sigma_t I_{r_t}\}$ köşegen matrisi A matrisinin singüler değerlerinin oluşturduğu köşegen matris, $\sigma_1 > \sigma_2 > \dots > \sigma_t > 0$ ve $r_1 + r_2 + \dots + r_t = r$ olmak üzere $K \in \mathbb{C}_{r,r}$ ve $L \in \mathbb{C}_{r,n-r}$ matrisleri için

$$KK^* + LL^* = I_r \quad (2.26)$$

eşitliği sağlanır. Burada önemli olan şudur. Eğer A matrisi nonsingüler bir matris ise, yani $r = n$ ise bu takdirde (2.25) deki parçalı matrisin alt satırı ve sağ sütunu yok olup $V = UK^*$ olmak üzere $A = U\Sigma V^*$ olacaktır. Bu durumda (2.25) eşitliğinden

$$A^\dagger = U \begin{pmatrix} K^* \Sigma^{-1} & 0 \\ L^* \Sigma^{-1} & 0 \end{pmatrix} U^* \quad (2.27)$$

sonucu elde edilir. Ayrıca eğer verilen bir A matrisi için $\text{ind}(A) = 1$ ise, bu takdirde

$$A^\# = U \begin{pmatrix} K^{-1} \Sigma^{-1} & K^{-1} \Sigma^{-1} K^{-1} L \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^* \quad (2.28)$$

ifadesi yazılabilir.

Daha sonraki çalışmalarımızda bize yardımcı olacak olan aşağıdaki lemma (2.25) ve (2.27) gösterimleri ile (2.10)-(2.14) ifadelerinin doğrudan birleştirilmesiyle elde edilebilir.

Lemma 2.1 $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi r ranklı olsun ve (2.25) deki gösterime sahip olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanmaktadır (Baksalary and Trenkler., 2010):

- (i) $A \in \mathbb{C}_{n \times n}^{Pl} \Leftrightarrow \Sigma = I_r,$
- (ii) $A \in \mathbb{C}_n^P \Leftrightarrow \Sigma K = I_r,$
- (iii) $A \in \mathbb{C}_n^{OP} \Leftrightarrow L = 0, \Sigma = I_r, K = I_r,$
- (iv) $A \in \mathbb{C}_n^{TM} \Leftrightarrow (\Sigma K)^2 = I_r,$
- (v) $A \in \mathbb{C}_n^{EP} \Leftrightarrow L = 0.$

Tanım 2.17 Bir $A \in \mathbb{C}_n^n$ kare matrisinin verildiğini varsayalım. Bu takdirde

$$(i) \quad AA^\oplus = P_A \quad \text{ve} \quad (ii) \quad \Re(A^\oplus) \subseteq \Re(A) \quad (2.29)$$

şartlarını gerçekleyen herhangi bir $A^\oplus \in \mathbb{C}_n^n$ matrisine A matrisinin çekirdek inversi adı verilir (Baksalary and Trenkler., 2010).

Aşağıda bir matrisin çekirdek inversinin çeşitli özellikleri sıralanacaktır. Bu özellikler çekirdek invers ile bilinen çeşitli matris sınıfları arasındaki ilişkileri ortaya

koymada oldukça önemli rol oynamaktadır. Yukarıda da ifade edildiği gibi, herhangi bir matrisin Moore–Penrose inversi ve grup inversi tektir. Aynı özelliğin Çekirdek inversler için de geçerli olduğu ise istenen bir durumdur.

Lemma 2.2 Bir $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi (2.14) ifadesindeki gibi verilmiş olsun. Bu durumda A matrisinin çekirdek inversi

$$A^\oplus = U \begin{pmatrix} (\Sigma K)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^* \quad (2.30)$$

şeklinde olacaktır (Baksalary and Trenkler., 2010).

İspat. Her şeyden önce (2.25) – (2.28) eşitliklerinden

$$P_A = U \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^* \quad (2.31)$$

eşitliğinin yazılabileceğini belirtelim. Şimdi, $W \in \mathbb{C}_r^r$ ve $Z \in \mathbb{C}_{n-r}^{n-r}$ olmak üzere A matrisinin çekirdek inversi olarak alınan bir $B \in \mathbb{C}_n^n$ matrisinin

$$B = U \begin{pmatrix} W & X \\ Y & Z \end{pmatrix} U^* \quad (2.32)$$

olarak parçalanabildiğini farz edelim. Bu durumda doğrudan hesaplamayla kolayca gösterilebilir ki, Tanım 2.15 de verilen (i) şıkkının sağlanması için gerek ve yeter şart

$$\Sigma KW + \Sigma LY = I_r \text{ ve } KX + LZ = 0$$

olmasıdır. Diğer yandan $\Re(A^\oplus) \subseteq \Re(A)$ bağıntısı denk olarak $P_A A^\oplus = A^\oplus$ olarak da ifade edilebileceğinden, Tanım 2.15 de verilen (ii) koşulunun sağlanabilmesi için gerek ve yeter şart $Y = 0$, $Z = 0$ olmasıdır. Bu durumda da, $\Sigma KW = I_r$, $KX = 0$ elde edilir. Bu koşullardan birincisi K matrisinin nonsingüler bir matris olduğunu ikincisi ise $X = 0$ olduğunu gösterir ve böylece lemmanın ispatı tamamlanmış olur.

Lemma 2.2 den kolayca görülür ki, her A kare matrisi bir çekirdek inverse sahip olamaz ve $A^\oplus$ nın mevcut olabilmesi için gerek ve yeter koşul (2.25) deki K matrisinin bir nonsingüler matris olmasıdır. Daha önceden de ifade edildiği gibi $r(K) = r$ koşulu A matrisinin indeksinin bir olacağına ve dolayısıyla A matrisinin bir çekirdek matris olacağına eşdeğerdir. Bu durum ise $A^\oplus$ ile ilgili olarak ‘Çekirdek invers’ teriminin kullanımında önemli bir ilham kaynağı olmuştur.

Öte yandan $r(A^2) = r(A)$ koşulu $A^\#$ grup inversinin mevcut olması için gerek ve yeter şart olduğundan $A^\oplus$ çekirdek inversinin grup invers ile çakışıp çakışmadığını sorgulamak doğal bir durumdur. Genel anlamda bu durum doğru değildir. Örneğin

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

idempotent matrisi verildiğinde $A^\# = A$ olmakla birlikte

$$A^\dagger = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix},$$

olduğu ve buradan da

$$A^\oplus = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olduğu kolaylıkla görülebilir. Öte yandan (2.28) ve (2.30) ifadeleri karşılaştırıldığında $A^\oplus = A^\#$ eşitliğinin sağlanabilmesi için gerek ve yeter şart $L = 0$ olması, başka bir deyişle A matrisinin bir EP matris olmasıdır.

Aşağıda verilen teoremler bir A matrisinin $A^\oplus$ çekirdek inversinin bazı önemli karakterizasyonlarını ortaya koymaktadır.

Teorem 2.14 $A \in \mathbb{C}_n^{CM}$ matrisi verilsin ve $m \in \mathbb{N}$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki eşitlikler sağlanmaktadır (Baksalary and Trenkler., 2010):

- (i) $A^\oplus = A^\# P_A$,
- (ii) $A^\oplus \in \mathbb{C}_n^{EP}$,
- (iii) $(A^\oplus)^\dagger = A P_A$,
- (iv) $(A^\oplus)^\oplus = A P_A$,
- (v) $A^\oplus \in A\{1,2\}$,
- (vi) $(A^\oplus)^2 A = A^\#$,
- (vii) $(A^\oplus)^m = (A^m)^\oplus$,
- (viii) $A^\oplus A = A^\# A$.

İspat. (i) şıkkı, (2.28), (2.30) ve (2.31) ifadelerinin direkt bir sonucudur. (2.31) dan

$$(A^\oplus)^\dagger = U \begin{pmatrix} \Sigma K & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^* \quad (2.33)$$

ve dolayısıyla

$$A^\oplus(A^\oplus)^+ = (A^\oplus)^\dagger A^\oplus = P_A$$

eşitliği elde edilir ki bu da zaten teoremin (ii) şıkkıdır. Bir sonraki koşul ise (2.25), (2.26) ve (2.33) eşitliklerinden elde edileceği gibi doğrudan verilebilir. Diğer yandan teoremin (i) şıkkından

$$(A^\oplus)^\oplus = (A^\oplus)^\# P_{A^\oplus}$$

olduğu da görülebilir. Burada kolaylıkla gösterilebileceği gibi $(A^\oplus)^\#$ (2.33) de verilen $(A^\oplus)^+$ ile aynı olacaktır ve dolayısıyla $P_{A^\oplus} = P_A$ ile aynı biçimdedir. Böylelikle de (iv) koşulunun geçerli olacağı doğrudan görülebilir. (v) durumunun ispatı teoremin (i) şartının $AA^\oplus A = AA^\# P_A A$ ve $A^\oplus AA^\oplus = A^\# P_A AA^\# P_A$ olmasını gerektirdiği gerçeğine dayanmaktadır. Bu eşitliklerin birincisinden $AA^\oplus A = AA^\# A = A$ ve ikincisinden de $A^\oplus AA^\oplus = A^\# AA^\# P_A = A^\oplus$ olduğu elde edilmektedir. Ayrıca (vi) koşulunu sağlamak için (2.25) ve (2.31) ifadeleri kullanılarak yapılan bazı basit hesaplamalardan sonra

$$(A^\oplus)^2 A = U \begin{pmatrix} (\Sigma K)^{-1} & (\Sigma K)^{-2} \Sigma L \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^*,$$

elde edilir ki buradan da sağ taraftaki matrisin (2.28) de verilen $A^\#$ matrisinin başka bir formunun var olmasına yol açtığı gözlemlenir. Son iki durumun ispatı ise doğrudan teoremin (i) şıkkına dayanmaktadır. (viii) koşulunun sağlandığı kolayca görülürken (vii) koşulunun ispatı daha da kapsamlıdır. Öncelikle Teorem 2.14 ün (i) şıkkından $(A^\oplus)^m = (A^\# P_A)^m$ olduğu elde edilir. Buradan (2.28) ve (2.31) eşitlikleri kullanılarak

$$(A^\oplus)^m = U \begin{pmatrix} (\Sigma K)^{-m} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^* \quad (2.34)$$

olduğu elde edilir. Öte yandan, $(A^m)^\# = (A^\#)^m$ eşitliğinin bilinen özelliği dikkate alındığında $(A^m)^\oplus = (A^\#)^m P_{A^m}$ eşitliği elde edilebilir. Diğer taraftan A matrisinin indeksi bir olduğundan, $P_{A^m} = P_A$ eşitliği sağlanır ve bunun sonucu olarak $(A^m)^\oplus = (A^\#)^m P_A$ yazılabilir. Buradan da $(A^m)^\oplus$ matrisinin (2.34) daki matris ile aynı forma sahip olacağı gösterilmiş olur ve böylece de teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 2.14 in (iii) şıkkından $A^\oplus = (A^2 A^\dagger)^\dagger$ yazılabilir ki bu da (i) şıkkında verilen Çekirdek invers için bir alternatif formül olacaktır. Teorem 2.14 ile ilgili bazı gözlemler aşağıda verilecektir. Bunlardan ilki, EP- sızlık özelliği olup Lemma 2.1 de meydana gelen yegâne özelliktir. Bu $A^\oplus$ nın da sahip olup olmadığına bakılmaksızın

A matrisinin sahip olduğu yegane özelliğin EP-sizlik özelliğidir. Örnek olarak, $A^\oplus$ matrisinin bir r -potent matris, yani $(A^\oplus)^r = A^\oplus$, $r \geq 2$ olması için gerek ve yeter şart A matrisinin bir r -potent matris olmasıdır. Özel durumda eğer $A^\oplus$ matrisi bir izdüşüm ise, bu takdirde bir ortogonal izdüşüm olacaktır.

Tanım 2.14 ün $AA^\oplus$ matrisinin $\mathfrak{R}(A)$ üzerindeki ortogonal izdüşüm olmasını gerektirmesine rağmen, Teorem 2.14 in (viii) şikkından, $A^\oplus A$ matrisinin aynı zamanda idempotent bir matris olduğu ancak Hermityen bir matris olmasının gerekmediği de ayrıca dikkate değer bir durumdur. Esas itibariyle $A^\oplus A$ matrisi $AA^\# = A^\#A$ ile çıkışan $\mathfrak{R}(A)$ üzerine bir eğik izdüşümdür. Aşağıdaki teorem, $A^\oplus$ invers matrisinin A matrisinin çeşitli dönüşümlerine eşit olması için gerek ve yeter koşullar vermektedir.

Teorem 2.15 $A \in \mathbb{C}_n^{CM}$ matrisi verilmiş olsun. Bu takdirde aşağıda verilen ifadeler gerçekleşir (Baksalary and Trenkler., 2010):

- (i) $A^\oplus = 0 \Leftrightarrow A = 0$,
- (ii) $A^\oplus = P_A \Leftrightarrow A \in \mathbb{C}_n^P$,
- (iii) $A^\oplus = A^\dagger \Leftrightarrow A \in \mathbb{C}_n^{EP}$,
- (iv) $A^\oplus = A^\# \Leftrightarrow A \in \mathbb{C}_n^{EP}$,
- (v) $A^\oplus = A A \in \mathbb{C}_n^{TM} \cap \mathbb{C}_n^{EP}$,
- (vi) $A^\oplus = A^* \Leftrightarrow A \in \mathbb{C}_{n \times n}^{Pl} \cap \mathbb{C}_n^{EP}$.

İspat: (i) şikkının gereklilik kısmını göstermek için, Teorem 2.14 in (i) şikkından

$$A^\oplus = 0 \Rightarrow A^\# P_A = 0$$

eşitliğinin yazılabileceğine dikkat edelim. Bu durumda sağ taraftaki ifadeyi A matrisi ile sağdan ve soldan çarparak $A = 0$ olduğu görülür. (i) şikkının yeterlilik kısmı ise Tanım 2.17 (ii) koşulunun doğrudan bir sonucu olacaktır. Öte yandan (2.20) ve (2.21) ifadeleri ve Lemma 2.1 in (ii) şikkının birleştirilmesi sonucunda (ii) elde edilir. (2.27) ve (2.30) ifadeleri kullanılırsa, $A^\oplus = A^\dagger$ olabilmesi için gerek ve yeter şartın $L = 0$ ve $(\Sigma K)^{-1} = K^* \Sigma^{-1}$ olduğu görülebilir. Bununla birlikte, (2.25) ifadesinin ışığı altında, $L = 0 \Rightarrow K^* = K^{-1}$ olduğu ve dolayısıyla da bu ilişkilerden ikincisinin her zaman sağlandığı görülmektedir. Benzer şekilde (iv) ifadesinin sol tarafındaki koşulun sağlanabilmesi için gerek ve yeter şart $L = 0$ ve $(\Sigma K)^{-1} = K^{-1} \Sigma^{-1}$ olmasıdır. Bu ise yalnızca birinci koşula indirgenebilen bağlaç olması durumunda geçerli olacaktır.

(2.25) ve (2.30) ifadelerini kullanarak yapılan doğrudan hesaplamalar aslında, $A^\oplus = A$ olması için gerek ve yeter şart $L = 0$ ve $(\Sigma K)^{-1} = \Sigma K$ iken $A^\oplus = A^*$ olması için gerek ve yeter şart $L = 0$ ve $(\Sigma K)^{-1} = K^* \Sigma$ olduğunu gösterir. Bu durumda hem Σ ve hem de K matrislerinin nonsingüler olduğu gerçeğini kullanarak, birinci durumda $L = 0$ in $(\Sigma K)^2 = I_r$ ile, ikinci durumda ise $\Sigma = I_r$ ile birleştirileceği sonucuna varılır. Öte yandan, teoremin (v) ve (vi) şıklarındaki ifadeler ise Lemma 2.1' den kolayca elde edilebilir ve böylece de teoremin ispatı tamamlanmış olur.

$A^\oplus$ çekirdek inversinin içeren $A \in \mathbb{C}_n^{EP}$ matrisinin iki önemli karakterizasyonu Teorem 2.15 de verildiği gibidir. Diğer sonuçlar ise aşağıdaki teoremde belirlenmiştir.

Teorem 2.16 $A \in \mathbb{C}_n^{CM}$ matrisi verilmiş olsun. Bu takdirde aşağıda verilen ifadeler birbirine denk olacaktır (Baksalary and Trenkler., 2010):

- (i) $A \in \mathbb{C}_n^{EP}$,
- (ii) $(A^\oplus)^\oplus = A$,
- (iii) $A^\oplus A = AA^\oplus$,
- (iv) $(A^\dagger)^\oplus = A$,
- (v) $(A^\oplus)^\dagger = (A^\dagger)^\oplus$.

İspat: Teoremin ispatı için (ii)–(v) koşullarının her birinin $L = 0$ olmasına eşdeğer olduğunu göstermek yeterli olacaktır. Bu durumda Teorem 2.15 in (iv) şıkkı göz önüne alınırsa, teoremin (ii) şıkkının $AP_A = A$ olarak ifade edilebildiği görülür. Bu nedenle

$$(A^\oplus)^\oplus = A \Leftrightarrow L = 0$$

denkliği açıkça görülür. Açıkça doğrulanabileceği gibi, (i) $\Leftrightarrow$ (iii) durumunu ispatlamak için, $A^\oplus A = AA^\oplus \Leftrightarrow (\Sigma K)^{-1} \Sigma L = 0$ olduğuna dikkat edilmelidir. Bu durumda Teorem 2.1 in (i) şıkkının tekrar kullanılması sonucunda $(A^\dagger)^\oplus = (A^\dagger)^\# P_{A^\dagger}$ eşitliğinin sağlandığı kolayca gösterilebilir. Diğer taraftan doğrudan hesaplamayla

$$(A^\dagger)^\# = U \begin{pmatrix} \Sigma(K^*)^{-1} & 0 \\ L^*(K^*)^{-1} \Sigma(K^*)^{-1} & 0 \end{pmatrix} U^*$$

ve

$$P_{A^\dagger} = U \begin{pmatrix} K^* K & K^* L \\ L^* K & L^* L \end{pmatrix} U^*$$

olduğu gösterilebilir. Bunun sonucu olarak da

$$(A^\dagger)^\oplus = U \begin{pmatrix} \Sigma K & \Sigma L \\ L^*(K^*)^{-1}\Sigma K & L^*(K^*)^{-1}\Sigma L \end{pmatrix} U^* \quad (2.35)$$

ifadesi elde edilir. Diğer taraftan (2.25) ve (2.35) ifadelerinin karşılaştırılması bizi $L^*(K^*)^{-1}\Sigma K = 0$ ve $L^*(K^*)^{-1}\Sigma L$ olabilmesi için gerek ve yeter şartın $(A^\dagger)^\oplus = A$ olduğu sonucuna götürecektir. Σ ve K matrislerinin nonsingülerliği dikkate alındığında bu koşullardan ilkinin $L = 0$ olmasına denk olduğu görülür. Böylece teoremin (i) $\Leftrightarrow$ (iv) durumunun denkliği ispatlanmış olur. (2.26) ve (2.35) dan kolayca görülmektedir ki, $(A^\oplus)^\oplus = A \Leftrightarrow L = 0$ denkleğinin geçerliliği ispatı tamamlayan bir gerçektir.

Teorem 2.16 e yapılacak bir yorum da (2.27), (2.28) ve (2.30) eşitliklerinden

$$A \in \mathbb{C}_n^{EP} \Leftrightarrow A^\oplus = A^\# \Leftrightarrow A^\oplus = A^\dagger$$

durumunun elde edilmesidir. Bu takdirde aşağıda verilen sonuç, iki ortogonal izdüşümün çarpımının çekirdek inversi ile ilgili önemli bir formül ortaya koymaktadır.

Sonuç 2.4 $A, B \in \mathbb{C}_n^{OP}$ matrislerinin verilmiş olduğunu varsayalım. Bu takdirde $(AB)^\oplus = (ABA)^\dagger$ olacaktır (Baksalary and Trenkler., 2010).

Sonuç 2.5 $A \in \mathbb{C}_n^{CM}$ matrisi (2.25) formuna sahip r ranklı bir matris olsun. X ve Y matrisleri ise A matrisinin iki genelleştirilmiş inversi olsun. Bu takdirde aşağıdaki koşullar birbirine denktir (Baksalary and Trenkler., 2010):

- (i) $A^\oplus = XAY$,
- (ii) $\Re(XA) \subseteq \Re(A)$,
- (iii) $X_{12} \in \mathbb{C}_{r,(n-r)}$, $X_{22}, Y_{22} \in \mathbb{C}_{(n-r),(n-r)}$ ve $Y_{21} \in \mathbb{C}_{(n-r),r}$ olmak üzere X ve Y matrisleri sırasıyla

$$X = U \begin{pmatrix} (\Sigma K)^{-1} & X_{12} \\ 0 & X_{22} \end{pmatrix} U^* \text{ ve } Y = U \begin{pmatrix} (\Sigma K)^{-1} - K^{-1}LY_{21} & -K^{-1}LY_{22} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

şeklindedir.

Teorem 2.17 $A \in \mathbb{C}_n^{CM}$ matrisi (2.25) formuna sahip r ranklı bir matris olsun. Z matrisinin de A matrisinin bir genelleştirilmiş inversi olduğunu varsayalım. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler birbirine eşdeğerdir (Baksalary and Trenkler, 2010):

- (i) $A^\oplus = (A^2Z)^\dagger$,
- (ii) $Z \in A\{1,3\}$,

(iii) $Z_{21} \in \mathbb{C}_{(n-r),r}$ ve $Z_{22} \in \mathbb{C}_{(n-r),(n-r)}$ olmak üzere Z matrisi

$$Z = U \begin{pmatrix} (\Sigma K)^{-1} - K^{-1}LZ_{21} & -K^{-1}LZ_{22} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} U^* \quad (2.37)$$

olarak yazılabilir.

İspat: (ii) ve (iii) durumlarının denkliği Sonuç 2.5 de zaten verildiğinden (i) ve (iii) durumlarının denk olduğunu göstermek yeterlidir. Bu durumda $A^\oplus = (A^2Z)^\dagger$ koşulu

$$(A^\oplus)^\dagger = (A^2Z),$$

eşitliğine denk olacağından $A^\oplus$ matrisinin Moore-Penrose inversi

$$(A^\oplus)^\dagger = U \begin{pmatrix} \Sigma K & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^*$$

şeklinde yazılabilir. Öte yandan Z matrisi A nın genelleştirilmiş inversi olduğundan,

$$Z = U \begin{pmatrix} (\Sigma K)^{-1} - K^{-1}LZ_{21} & Z_{21} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} U^*$$

şeklinde yazılabilir. Böylece A^2Z çarpımı

$$\begin{aligned} A^2Z &= U \begin{pmatrix} \Sigma K & \Sigma L \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma K & \Sigma L \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\Sigma K)^{-1} - K^{-1}LZ_{21} & Z_{21} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} U^* \\ &= U \begin{pmatrix} \Sigma K & \Sigma K(\Sigma KZ_{12} + \Sigma LZ_{22}) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^* \end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Sonuç olarak $A^\oplus = (A^2Z)^\dagger$ eşitliği

$$\begin{pmatrix} \Sigma K & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma K & \Sigma K(\Sigma KZ_{12} + \Sigma LZ_{22}) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

eşitliğine denktir ki bu eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter koşul

$$Z_{12} = -(\Sigma K)^{-1}(\Sigma LZ_{22}) = -K^{-1}LZ_{22}$$

olmasıdır. Böylece (i) ve (iii) şıklarının denkliği ispatlanmış olur ve ispat tamamlanır.

A matrisi (2.25) biçiminde olduğunda, $A \leq^\oplus B$ bağıntısının sağlanabilmesi için gerek ve yeter şart B matrisinin bir $Z \in \mathbb{C}_{n-r}^{CM}$ için

$$B = U \begin{pmatrix} \Sigma K & \Sigma L \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^* \quad (2.38)$$

biçiminde yazılabilmesidir.

Sonuç 2.6 $A, B \in \mathbb{C}_n^{CM}$ olsun ve $A \leq^\oplus B$ bağıntısının sağlandığını varsayalım. Bu takdirde aşağıdaki eşitlikler sağlanır (Baksalary and Trenkler., 2010):

- (i) $BA^\oplus B = A$,
- (ii) $B^\oplus AB^\oplus = A^\oplus$,
- (iii) $B^\oplus BA^\oplus = A^\oplus BB^\oplus = A^\oplus$

Sonuç 2.7 $A \in \mathbb{C}_n^{CM}$ matrisi r ranklı bir matris olsun. Bu takdirde

(i) $B \in \mathbb{C}_n^{CM}$ olması için için gerek ve yeter koşul

$$BA^\oplus B = A \quad (2.39)$$

olmasıdır, burada $Z \in \mathbb{C}_{n-r}^{CM}$ ve $T \in \mathbb{C}_{r,r}$ ve $T^2 = I_r$ olmak üzere

$$B = U \begin{pmatrix} T\Sigma K & T\Sigma L \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^* \quad (2.40)$$

dir.

(ii) $B \in \mathbb{C}_n^{CM}$ olması için gerek ve yeter koşul

$$B^\oplus AB^\oplus = A^\oplus \quad (2.41)$$

olmasıdır, burada $Z \in \mathbb{C}_{n-r}^{CM}$, $V \in \mathbb{C}_{n-r}^r$, $T \in \mathbb{C}_r^r$ ve $T^2 = I_r$ olmak üzere

$$B = U \begin{pmatrix} T\Sigma K & T\Sigma[LZ^\oplus Z + V(I_{n-r} - Z^\oplus Z)] \\ 0 & Z \end{pmatrix} \quad (2.42)$$

dir.

(iii) $B \in \mathbb{C}_n^{CM}$ olması için gerek ve yeter koşul $\mathfrak{R}(A) \subseteq \mathfrak{R}(B)$ olmak üzere

$$B^\oplus BA^\oplus = A^\oplus BB^\oplus = A^\oplus \quad (2.43)$$

olmasıdır (Baksalary and Trenkler., 2010).

Sonuç 2.8 $A, B \in \mathbb{C}_n^{CM}$ matris verilmiş olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadelerler birbirine eşdeğer olacaktır (Baksalary and Trenkler, 2010):

- (i) $A^\oplus BA^\oplus = A^\oplus$, yani $A^\oplus, B$ matrisinin bir dış inversi olacaktır.
- (ii) $A^\dagger BA^\# = A^\oplus$.

Sonuç 2.9 (i) $A \in \mathbb{C}_n^{CM}$ matrisi r ranklı bir matris olsun. Bu takdirde bir $B \in \mathbb{C}_n^n$ için

$$A^\oplus BA^\oplus = A^\oplus \quad (2.44)$$

eşitliğinin sağlanabilmesi için gerek ve yeter şart B matrisinin $B_{12} \in \mathbb{C}_{r,(n-r)}$, $B_{21} \in \mathbb{C}_{(n-r),r}$ ve $B_{22} \in \mathbb{C}_{(n-r),(n-r)}$ keyfi matrisler olmak üzere

$$B = U \begin{pmatrix} \Sigma K & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} U^* \quad (2.45)$$

formunda olmasıdır.

(ii) $r(A) = r$ olmak üzere $B \in \mathbb{C}_n^n$ ve $A \in \mathbb{C}_n^{CM}$ matrislerinin, $B_{12} \in \mathbb{C}_{r,(n-r)}$, $B_{21} \in \mathbb{C}_{(n-r),r}$ ve $B_{22} \in \mathbb{C}_{(n-r),(n-r)}$ matrisleri keyfi matrisler olmak üzere

$$A^\dagger B A^\# = A^\oplus \quad (2.46)$$

eşitliğini sağlaması için gerek ve yeter şart A nın ranj-Hermityen ve B matrisinin

$$B = U \begin{pmatrix} \Sigma K & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} U^* \quad (2.47)$$

formunda olmasıdır.

Şimdi çekirdek inversin bir genelleştirmesi olan çekirdek-EP invers kavramı ele alınacaktır.

Tanım 2.18 $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi $\text{ind}(A) = k$ özelliğini sağlasın. Bu takdirde $GAG = G$ olmak üzere

$$\mathfrak{R}(X) = \mathcal{C}(X) = \mathfrak{R}(A^k) \quad (2.48)$$

şartını sağlayan bir G matrisine $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisinin bir çekirdek-EP inversi denir ve $X = A^\odot$ ile gösterilir. Öte yandan $X = (A^\odot)^2 A$ matrisine ise $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisinin bir zayıf Grup inversi denir ve $X = A^\ominus$ ile gösterilir (Wang, 2016).

Burada $\mathcal{C}(X) = \mathfrak{R}(X^*)$ olduğu dikkate alınırsa (2.52) ifadesinin

$$\mathfrak{R}(X) = \mathfrak{R}(X^*) = \mathfrak{R}(A^k) \quad (2.49)$$

olarak da yazılabileceğini belirtelim. Şimdi aşağıdaki Lemma verilebilir.

Lemma 2.3 $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi $\text{ind}(A) = k$ özelliğini sağlasın. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler birbirine denktir (Wang, 2016):

- (i) $X = A^\odot$ dir.
- (ii) $XAX = X$, $(AX)^* = AX$, $XA^{t+1} = A^t$, $\mathfrak{R}(X) \subseteq \mathfrak{R}(A^t)$ dir, burada $t \in \mathbb{N}$ dir.

İspat. (i) $\Rightarrow$ (ii): (i) den X matrisi bir dış invers olup $\mathfrak{R}(X) = \mathcal{C}(X^*) = \mathfrak{R}(A^k)$ olduğu görülür. Öte yandan XA matris çarpımı $\mathfrak{R}(X) = \mathfrak{R}(A^k)$ üzerinde bir eğik izdüşüm olduğundan $XA^{k+1} = XAA^k = A^k$ yazılabilir. Dolayısıyla $k = t$ alınabilir. Benzer şekilde X matrisi A matrisinin bir dış inversi olduğundan AX bir idempotent matris olup $\mathcal{C}(AX) = \mathcal{C}(X) = \mathfrak{R}(A^k)$ dir. Böylece $\mathfrak{R}(AX) = \mathfrak{R}(A^{k+1}) = \mathfrak{R}(A^k)$ olduğu görülür. Bu nedenle AX bir EP matris olacaktır. Dolayısıyla idempotent ve EP olduğundan $(AX)^* = AX$ yazılabilir, bu ise (i) $\Rightarrow$ (ii) ispatını tamamlar.

(ii) $\Rightarrow$ (i): X matrisi (ii) de verilen şartları sağlasın. Bu durumda $XA^{t+1} = A^t$ olduğundan $r(XA^{t+1}) = r(A^t)$ ve $\mathfrak{R}(A^t) \subseteq \mathfrak{R}(X)$ yazılabilir. Aksine olarak $t \geq k$ ve $\mathfrak{R}(A^t) = \mathfrak{R}(A^k)$ alalım. Bu durumda $\mathfrak{R}(X) \subseteq \mathfrak{R}(A^t)$ ifadesi $\mathfrak{R}(X) = \mathfrak{R}(A^k)$ eşitliğini sağlar. Öte yandan $XAX = X$ ve $(AX)^* = AX$ olduğundan AX matrisi $\mathcal{C}(X) = \mathcal{C}(AX) = \mathfrak{R}(AX)$ olacak şekilde bir eğik izdüşümdür. Bu durumda $\mathcal{C}(X) = \mathcal{C}(AX) = \mathfrak{R}(AX) = \mathfrak{R}(A^k)$ olduğu görülür. Bu nedenle X bir EP matrisi olup G nin satır ve sütun uzayları $\mathfrak{R}(A^k)$ olarak aynıdır. Böylece (ii) $\Rightarrow$ (i) olduğu görülür ve ispat tamamlanır.

Çekirdek-EP inversin mevcut olup olmadığı ile ilgili soruya aşağıdaki Lemma kullanılarak cevap verilebilir.

Lemma 2.4 $\mathbb{F}$ keyfi bir skaler cisim olmak üzere A, P, Q matrisleri $\mathbb{F}$ cismi üzerinden uygun boyutta matrisler olsun. Bu takdirde aşağıdakiler gerçekleşir (Wang, 2016):

(i) Öyle bir $O \in \{A^{(2)}\}$ matrisi mevcuttur ki

$$\mathfrak{R}(O) \subseteq \mathfrak{R}(Q), \mathcal{C}(O) \subset \mathcal{C}(P) \text{ ve } r(O) = r(PAQ) \quad (2.50)$$

dir.

(ii) (i) deki tüm dış inverslerin sınıfı

$$\{O \in \{A^{(2)}\} : \mathfrak{R}(O) \subseteq \mathfrak{R}(Q), \mathcal{C}(O) \subset \mathcal{C}(P)\} = \{Q(PAQ)^{(2)}P\} \quad (2.51)$$

ile verilir.

(iii) (i) deki tüm dış inverslerin sınıfı

$$\begin{aligned} & \{O \in \{A^{(2)}\} : \mathfrak{R}(O) \subseteq \mathfrak{R}(Q), \mathcal{C}(O) \subset \mathcal{C}(P)\} \\ & = \{Q_1(P_1AQ_1)^{(2)}P_1 : \mathfrak{R}(Q_1) \subseteq \mathfrak{R}(Q), \mathcal{C}(P_1) \subset \mathcal{C}(P)\} \end{aligned} \quad (2.52)$$

ile verilir.

(iv) Eğer PAQ sıfır değilse bu takdirde $\mathfrak{R}(O) = \mathfrak{R}(Q)$ ve $\mathcal{C}(O) = \mathcal{C}(P)$ olacak şekilde bir O dış inversinin tek türlü olarak mevcut olması için gerek ve yeter şart $r(P) = r(Q) = r(PAQ)$ olmasıdır. Bu durumda O dış inversi PAQ nun keyfi seçilmiş $(PAQ)^{(1,2)}$ yansımali g-inversi ve $(PAQ)^{(1)}$ g-inversi için

$$O = Q(PAQ)^{(1,2)}P = Q(PAQ)^{(1)}P \quad (2.53)$$

ile verilir.

Teorem 2.18 $ind(A) = k$ olmak üzere bir $A \in \mathbb{C}_n^n$ kare matrisinin verildiğini varsayalım. Bu takdirde Çekirdek-EP inversin mevcut olabilmesi için gerek ve yeter şart $r(A^{*k}A^{k+1}) = r(A^k)$ rank eşitliğinin sağlanmasıdır. Ayrıca mevcut olması durumunda çekirdek-EP invers tektir ve

$$A^{\odot} = A^k((A^*)^k A^{k+1})^{(1)}(A^*)^k \quad (2.54)$$

şeklinde verilir (Wang, 2016).

İspat. Mevcut olduğunda öncelikle A matrisinin çekirdek-EP inversinin satır ve sütun uzayları aynı ve $\mathfrak{R}A^k$ ye eşit olmak üzere, A matrisinin bir dış inversi olduğunu hatırlatalım. Bu durumda $\mathcal{C}(A^{*k}) = \mathfrak{R}(A^k)$ olduğu dikkate alınırsa Lemma 2.4 (iv) den $P = A^{*k}$ ve $Q = A^k$ eşitlikleri elde edilir ve böylece de ispat tamamlanır.

Hatırlatma 2.1 Skaler cisim yerine reel sayılar ya da kompleks sayılar kümesi dikkate alındığında $ind(A) = k$ olan herhangi bir A matrisi için $r(A^{*k}A^{k+1}) = r(A^k)$ eşitliği $r(A^{*k}A^k) = r(A^k)$ eşitliği olarak da alınabilir. Dolayısıyla reel sayılar ya da kompleks sayılar kümesi üzerinde bir kare matris için tıpkı Drazin invers de olduğu gibi çekirdek-EP invers de daima mevcut olup tektir. Ayrıca eğer A^k bir EP matris ve $G = A^{\otimes}$ mevcut ise bu durumda hem AG ve hem de GA aynı satır ve sütun uzaylarına sahip idempotent matrisler olacağından $GA = AG$ olup (2.52) şartı sağlanır. Dolayısıyla bu durumda çekirdek-EP invers Drazin invers ile çakışacaktır. Eğer A matrisi 1 indeksli ve $G = A^{\odot}$ ise bu takdirde $GA^2 = A$ olup G matrisi bir çekirdek matris ile bir nilpotent matrisin toplamı olarak $G = N + M$ şeklinde yazılabilir. Burada N matrisi bir çekirdek matris ve M matrisi ise bir nilpotent matris olup $MN = NM = 0$ dir. Bu ise AG ve GA matrislerinin her ikisinin de idempotent matrisler olduğunu ve $r(G) = r(A)$ eşitliğinin sağlandığını gösterir. Bu nedenle G matrisi $AGA = A$ şartını da sağlar.

Teorem 2.19 (Çekirdek-EP Ayırışımı) $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi için $\text{ind}(A) = k$ olsun. Bu takdirde $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi $A_1 \in \mathbb{C}_n^{CM}$, $A_2^k = 0$ ve $A_1^* A_2 = A_2 A_1 = 0$ olmak üzere $A = A_1 + A_2$ formunda A_1 ve A_2 matrislerinin toplamı şeklinde yazılabilir. Burada A_1 ve A_2 biri veya her ikisi de sıfır olabilir (Wang, 2016).

İspat. $A \in \mathbb{C}_n^n$ olsun. Bu durumda Schur ayrışımına göre $U^* A U$ bir üst üçgensel matris olacak şekilde bir $U \in \mathbb{C}_n^n$ üniter matrisi mevcuttur. Gerçekten üst üçgensel matrisin esas köşegen elemanları A matrisinin özdeğerleri olup ilk özdeğerin sıfırdan farklı olduğu kabul edilebilir. Bu nedenle T_1 üst üçgensel ve nonsingüler, T_3 üst üçgensel ve esas köşegeni sıfır olmak $A = U \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ 0 & T_3 \end{pmatrix} U^*$ şeklinde yazılabilir. Bu durumda

$$A_1 = U \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^* \text{ ve } A_2 = U \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & T_3 \end{pmatrix} U^*$$

olarak alınırsa istenilen şartlar sağlanır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Şimdi de kare matrislerin çekirdek-EP inverslerinin bazı özellikler verilecektir. Önce $(AX)^* = AX$, $XA^{k+1} = A^k$ ve $\mathfrak{R}(X) = \mathfrak{R}(X^*) = \mathfrak{R}(A^k)$ şartlarını kullanarak çekirdek-EP invers için bazı gerek ve yeter şartlar verilecek, daha sonra çekirdek-EP inversin bazı özellikleri ve gösterimleri sıralanacaktır. Aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 2.20 $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi için $\text{ind}(A) = k$ olsun. Bu takdirde X matrisinin A matrisinin bir çekirdek-EP inversi olabilmesi için gerek ve yeter şart $(AX)^* = AX$, $XA^{k+1} = A^k$ ve $\mathfrak{R}(X) \subseteq \mathfrak{R}(A^k)$ şartlarını sağlamasıdır (Zou ve Cheng, 2019).

İspat. $XA^{k+1} = A^k$ ve $\mathfrak{R}(X) \subseteq \mathfrak{R}(A^k)$ olduğunu varsayalım. Bu takdirde bir $T \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi için $X = A^k T$ yazılabilir. Bu nedenle $XAX = XA^{k+1}T = A^k T = X$ elde edilir.

Sonuç 2.10 $A, X \in \mathbb{C}_n^n$ olmak üzere $\text{ind}(A) = k$ ve A matrisinin çekirdek-EP ayrışımı Teorem 2.19 daki gibi verilsin. Bu takdirde aşağıdakiler denktir (Zou ve Cheng, 2019):

- (i) $X = A^\odot$,
- (ii) $(AX)^* = AX$, $XA^{k+1} = A^k$ ve $r(A^k) = r(X)$,
- (iii) $(AX)^* = AX$, $XA^{k+1} = A^k$ ve $A_1 X^2 = X$,
- (iv) $(AX)^* = AX$, $XA^{k+1} = A^k$ ve $A^s X^{s+1} = X$, $s > 0$ bir tam sayı,
- (v) $(AX)^* = AX$, $XA^{k+1} = A^k$ ve $XA_1 X = X$.

Sonuç 2.11 $A, X \in \mathbb{C}_n^n$ olmak üzere $\text{ind}(A) = k$ olduğunu varsayalım. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler birbirine denktir (Zou ve Cheng, 2019):

- (i) $X = A^\odot$,
- (ii) $\Re(X) = \Re(X^*) = \Re(A^k)$ ve $XA^{k+1} = A^k$,
- (iii) $\Re(X) = \Re(X^*) = \Re(A^k)$ ve $A^s X^{s+1} = X, s > 0$ bir tam sayı,
- (iv) $\Re(X) = \Re(X^*) = \Re(A^k)$ ve $XA \in \mathbb{C}_n^P$,
- (v) $\Re(X) = \Re(X^*) = \Re(A^k)$ ve $AX \in \mathbb{C}_n^P$,
- (vi) $\Re(X) = \Re(X^*) = \Re(A^k)$ ve $AXA^k = A^k$.

Sonuç 2.12 $A, X \in \mathbb{C}_n^n$ olmak üzere $\text{ind}(A) = k$ olsun. Bu durumda $X = A^\odot$ olması için gerek ve yeter şart $AX = P_{A^k}$ ve $\Re(X) \subseteq \Re(A^k)$ olmasıdır (Zou ve Cheng, 2019).

Sonuç 2.13 $A, X \in \mathbb{C}_n^n$ olmak üzere $\text{ind}(A) = k$ olduğunu varsayalım ve A matrisinin çekirdek-EP ayrışımı Teorem 2.19 daki gibi verilmiş olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler birbirine eşdeğerdir (Zou ve Cheng, 2019):

- (i) $X = A^\odot$,
- (ii) $AX = P_{A^k}$ ve $AX^2 = X$,
- (iii) $AX = P_{A^k}$ ve $A_1 X^2 = X$,
- (iv) $AX = P_{A^k}, X \in \mathbb{C}_n^{EP}$ ve $XAX = X$.

Sonuç 2.14 $A, X \in \mathbb{C}_n^n$ olmak üzere $\text{ind}(A) = k$ verilsin. Bu takdirde aşağıda verilen ifadeler birbirine denk olacaktır (Zou ve Cheng, 2019):

- (i) $X = A^\odot$,
- (ii) $XAX = X, \Re(X) = \Re(A^k)$ ve $XP_{A^k} = X$
- (iii) $XA^{k+1} = A^k, \Re(X) = \Re(A^k)$ ve $XP_{A^k} = X$
- (iv) $XA^{k+1} = A^k$ ve $\Re(X^*) = \Re(A^k)$,
- (v) $X = P_{A^k}X = XP_{A^k}$ ve $P_{A^k} = XAP_{A^k}$,
- (vi) $X = P_{A^k}X = XP_{A^k}$ ve $P_{A^k} = P_{A^k}AX$.

3. MATRİSLERİN CMP İNVERSLERİ

3.1 Bir Matrisin CMP İnversi

İkinci bölümde matrislerin bazı genelleştirilmiş inverslerinden söz edilmiş, Moore-Penrose invers, Drazin invers, Grup invers, Çekirdek invers ve Çekirdek-EP invers tanımları ile bu inverslerin bazı önemli özellikleri verilmişti. Bilindiği gibi bir matrisin Moore-Penrose inversi ve Drazin inversi daima mevcut iken, Grup inversi ve Çekirdek inversinin mevcut olması için $r(A^2) = r(A)$, yani $ind(A) = 1$ olması gerek ve yeter şarttır. Ayrıca bir matris için çekirdek-EP invers de daima mevcut ve tektir.

Bu kısımda yeni bir genelleştirilmiş invers kavramı verilecektir. Daha önce ifade edildiği gibi $\mathbb{C}_n^n$ $n \times n$ tipindeki kompleks kare matrislerinin kümesi olsun. A^* , $\Re(A)$ ve $r(A)$ sembolleri bir $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisinin sırasıyla, eşlenik devriğini, ranj uzayını (sütun uzayı) ve rankını gösterecek ve I_n de n -yinci mertebeden birim matrisi gösterecek. Öncelikle aşağıdaki Lemma verilebilir.

Lemma 3.1 (Çekirdek-Nilpotent Ayrışımı) $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi verilmiş olsun. Bu takdirde $A = A_1 + A_2$ olacak şekilde A_1 ve A_2 matrisleri mevcuttur öyle ki

- (i) $r(A_1) = r(A_1^2)$, yani $ind(A_1) \leq 1$,
- (ii) A_2 nilpotenttir,.
- (iii) $A_1 A_2 = A_2 A_1 = 0$,

dir. Ayrıca A^D matris A matrisinin Drazin inversi olmak üzere $A_1 = AA^D A = A^D A^2 = A^2 A^D$ ve $A_2 = A - AA^D A$ şeklindedir (Mitra ve Ark., 2010).

Tanım 3.1 Lemma 3.1 deki A_1 ve A_2 matrislerine sırasıyla $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisinin çekirdek ve nilpotent kısımları adı verilir ve bu ayrışım tek türdür. Eğer $A^\dagger A_1 = A_1 A^\dagger$ eşitliği sağlanırsa $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisine Çekirdek-EP matris adı verilir (Mitra ve Ark., 2010).

Uyarı 3.1 Tanım 3.1 e göre eğer bir $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi çekirdek-EP matris ise A^* matris ile herhangi bir üniter $U \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi için UAU^* matrisi de bir çekirdek-EP matris olacaktır. Ayrıca her EP matris aynı zamanda bir çekirdek EP matristir ancak tersi doğru değildir. Örneğin $0 \neq A \in \mathbb{C}_n^n$ nilpotent bir matris ise $A_1 = 0$ olup A matrisi çekirdek EP matris olacaktır. Ancak bu durumda $ind(A) > 1$ olacağından A matrisi EP matris değildir. Eğer $ind(A) \leq 1$ ise $A_1 = A$ olacağından $ind(A) \leq 1$ olması durumunda her çekirdek EP matris aynı zamanda bir EP matris olacaktır.

Tanım 3.2 Bir A kare matrisinin $A^\dagger$ Moore-Penrose inversi ve A_1 çekirdek kısmı kullanılarak tanımlanan $A^{C,\dagger} = A^\dagger A_1 A^\dagger$ matrisine A matrisinin CMP inversi adı verilir (Mehdipour ve Salemi, 2018).

Teorem 3.1 $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi verilmiş olsun. Bu takdirde

$$XAX = X, AXA = A_1, AX = A_1 A^\dagger, XA = A^\dagger A_1 \quad (3.1)$$

matris denklem sistemini sağlayan bir tek $X = A^{C,\dagger} \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi mevcuttur (Mehdipour ve Salemi, 2018).

İspat. $A^{C,\dagger} = A^\dagger A_1 A^\dagger$ matrisinin (3.1) sistemini sağladığı kolayca görülebilir. Teklik için farz edelim ki B_1 ve B_2 matrisleri (3.1) sisteminin iki çözümü olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} B_1 &= B_1 A B_1 = A^\dagger A_1 X B_1 = A^\dagger A_1 B_2 A B_1 = A^\dagger A B_2 A_1 A^\dagger \\ &= A^\dagger A B_2 A B_2 = A^\dagger A B_2 = B_2 A B_2 = B_2 \end{aligned}$$

olduğu elde edilir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

A matrisinin CMP inversi aynı zamanda A matrisinin çekirdek kısmı olan A_1 matrisinin bir yansılalı genelleştirilmiş inversidir, ancak A matrisinin bir yansılalı genelleştirilmiş inversi değildir. Örneğin

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisini göz önüne alalım. Bu durumda

$$A^\dagger = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } A^{C,\dagger} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olacaktır. Buradan $A^{C,\dagger} A_1 A^{C,\dagger} = A^{C,\dagger}$ ve $A_1 A^{C,\dagger} A_1 = A_1$ olduğu dolayısıyla $A^{C,\dagger}$ matrisinin A_1 matrisinin bir yansılalı genelleştirilmiş inversi olduğu kolayca görülür. Öte yandan $A^{C,\dagger} A A^{C,\dagger} = A^{C,\dagger}$ olmasına rağmen $A A^{C,\dagger} A \neq A$ olduğundan $A^{C,\dagger}$ matrisi A matrisinin bir yansılalı genelleştirilmiş inversi değildir.

Teorem 3.2 $A = A_1 + A_2$ çekirdek-nilpotent ayrışımına sahip olan bir $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi verilmiş olsun. Bu takdirde

$$(i) \quad P_A = A A^\dagger \text{ ve } Q_A = A^\dagger A \text{ olmak üzere } A^{C,\dagger} = Q_A A^D P_A \text{ dir.}$$

(ii) $A^{C,\dagger}$ matrisi A_1 matrisinin bir yansımali genelleştirilmiş inversidir.

(iii) $A_1 A^{C,\dagger} = A A^{C,\dagger}$ ve $A^{C,\dagger} A_1 = A^{C,\dagger} A$ dir (Mehdipour ve Salemi, 2018).

İspat. Bu durumda $A^{C,\dagger} = A^\dagger A_1 A^\dagger = A^\dagger A A^D A A^\dagger = Q_A A^D P_A$ yazılabilir. Böylece teoremin (i) şıkkı gösterilmiş olur. Şimdi $A^{C,\dagger} A_1 A^{C,\dagger} = A^{C,\dagger}$ ve $A_1 A^{C,\dagger} A_1 = A_1$ olduğunu gösterelim. Öte yandan $A_1 = A A^D A$ ve $A^{C,\dagger} = Q_A A^D P_A$ olduğu bilinmektedir. Bu nedenle $A_1 A^{C,\dagger} A_1 = A A^D A Q_A A^D P_A = A A^D A$ yazılabilir. $A Q_A = A = P_A A$, $A^D A A^D = A^D$ ve $A A^\dagger A = A^\dagger$ olduğundan $A_1 A^{C,\dagger} A_1 = A A^D A = A_1$ olduğu elde edilir. Benzer şekilde $A^{C,\dagger} A A^{C,\dagger} = A^{C,\dagger}$ eşitliğinin sağladığı da kolayca görülebilir. Diğer taraftan $A_1 = A A^D A$ ve $A^{C,\dagger} = Q_A A^D P_A$ olduğundan $A_1 A^{C,\dagger} = A A^D A Q_A A^D P_A = A A^D P_A = A Q_A A^D P_A = A A^{C,\dagger}$ eşitlikleri yazılabilir. Benzer şekilde $A^{C,\dagger} A_1 = Q_A A^D P_A A A^D A = Q_A A^D A = Q_A A^D P_A A = A^{C,\dagger} A$ eşitlikleri de sağlanır ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.3 m indeksine sahip olan bir $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi verilmiş olsun. Bu takdirde

(i) $A^{m+1} A^{C,\dagger} = A^{m+1} A^\dagger$ dir.

(ii) $A^{C,\dagger} A^m = A^\dagger A^m$ dir (Mehdipour ve Salemi, 2018).

İspat. Her k pozitif tam sayısı için $A^k Q_A = A^k$ olduğu bilinmektedir. Bu durumda Teorem 3.2 ye göre $A^{m+1} A^{C,\dagger} = A^{m+1} Q_A A^D P_A = A^{m+1} A^D A A^\dagger = A^m A A^\dagger = A^{m+1} A^\dagger$ eşitlikleri elde edilir. Benzer şekilde her k pozitif tam sayısı için $P_A A^k = A^k$ eşitliği sağlanacağı için $A^{C,\dagger} A^m = Q_A A^D P_A A^m$ yazılabilir. Diğer taraftan $Q_A A^D P_A A^m = Q_A A^D A^m = A^\dagger A^{m+1} A^D = A^\dagger A^m$ eşitlikleri sağlanacağından $A^{C,\dagger} A^m = A^\dagger A^m$ olduğu gösterilmiş olur ve böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.1 ve Teorem 3.2 den görülür ki verilen bir A kare matrisi için $A^D A A^\dagger$ matrisi (3.1) sistemini sağlayan yegane matristir.

Şimdi A kare matrisinin CMP inversi için kanonik form verilecektir.

Lemma 3.2 Rankı $r > 0$ olan her $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi için Singüler Değer Ayrışımı (Hartwig - Spindelböck Ayrışımı) $U \in \mathbb{C}_n^n$ uniter matris olmak üzere,

$$A = U \begin{pmatrix} \Sigma K & \Sigma L \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^* \quad (3.2)$$

biçiminde gösterilir, burada $\Sigma = \text{köş}\{\sigma_1 I_{r_1}, \dots, \sigma_t I_{r_t}\}$ köşegen matrisi A matrisinin singüler değerlerinden oluşan bir köşegen matris, $\sigma_1 > \sigma_2 > \dots > \sigma_t > 0$ ve $r_1 +$

$r_2 + \dots + r_t = r$ olmak üzere $K \in \mathbb{C}_{r,r}$ ve $L \in \mathbb{C}_{r,n-r}$ matrisleri için $KK^* + LL^* = I_r$ eşitliği sağlanır (Hartwig ve Scindelböck, 1984).

Bu durumda Hartwig - Spindelböck Ayırışımı kullanılarak $\text{ind}(A) = m$ olmak üzere A matrisinin Drazin inversi ve Moore-Penrose inversi hesaplanabilir. A matrisine paralel olarak parçalanmış

$$X = U \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix} U^* \quad (3.3)$$

matrisi A matrisinin Drazin inversi olsun. Bu takdirde $XAX = X$, $XA = AX$ ve $A^{m+1}X = A^m$ eşitlikleri sağlanır. Dolayısıyla $XAX = X$ eşitliğinden

$$X_1 \Sigma K X_1 + X_1 \Sigma L X_3 = X_1, \quad (3.4)$$

$$X_3 \Sigma K X_1 + X_3 \Sigma L X_3 = X_3, \quad (3.5)$$

$$X_1 \Sigma K X_2 + X_1 \Sigma L X_4 = X_2, \quad (3.6)$$

$$X_3 \Sigma K X_2 + X_3 \Sigma L X_4 = X_4, \quad (3.7)$$

eşitlikleri, $XA = AX$ eşitliğinden

$$\Sigma K X_1 + \Sigma L X_3 = X_1 \Sigma K, \quad (3.8)$$

$$X_3 \Sigma K = 0, \quad (3.9)$$

$$\Sigma K X_2 + \Sigma L X_4 = X_1 \Sigma L, \quad (3.10)$$

$$X_3 \Sigma L = 0, \quad (3.11)$$

eşitlikleri ve $A^{m+1}X = A^m$ eşitliğinden de

$$(\Sigma K)^{m+1}X_1 + (\Sigma K)^m \Sigma L X_3 = (\Sigma K)^m, \quad (3.12)$$

$$(\Sigma K)^{m+1}X_2 + (\Sigma K)^m \Sigma L X_4 = (\Sigma K)^{m-1} \Sigma L \quad (3.13)$$

eşitlikleri yazılabilir. Buradan $X_1 \Sigma K X_1 = X_1$, $X_1 \Sigma K X_2 = X_2$, $\Sigma K X_1 = X_1 \Sigma K$, $\Sigma K X_2 = X_1 \Sigma L$ ve $(\Sigma K)^{m+1}X_1 = (\Sigma K)^m$, $(\Sigma K)^{m+1}X_2 = (\Sigma K)^{m-1} \Sigma L$ eşitlikleri yazılabilir. Bu eşitliklerden de A matrisinin Drazin inversinin

$$A^D = U \begin{pmatrix} (\Sigma K)^D & ((\Sigma K)^D)^2 \Sigma L \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^* \quad (3.14)$$

şeklinde olduğu görülür. Benzer şekilde A matrisinin Moore-Penrose inversinin ise

$$A^\dagger = U \begin{pmatrix} K^* \Sigma^{-1} & 0 \\ L^* \Sigma^{-1} & 0 \end{pmatrix} U^* \quad (3.15)$$

olduğu gösterilebilir. Sonuç olarak $A_1 = AA^D A$ olacağından A matrisinin CMP inversi

$$A^{C,\dagger} = A^\dagger AA^D AA^\dagger = U \begin{pmatrix} K^* K(\Sigma K)^D & 0 \\ L^* K(\Sigma K)^D & 0 \end{pmatrix} U^* \quad (3.16)$$

olarak yazılabilir.

Teorem 3.4 $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi verilmiş olsun. Bu takdirde $A^{C,\dagger} = A^\dagger$ olması için gerek ve yeter şart $\text{ind}(A) \leq 1$ olmasıdır (Mehdipour ve Salemi, 2018).

İspat. $A = A_1 + A_2$ ifadesi $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisinin çekirdek-nilpotent ayrışımı olsun. Eğer $\text{ind}(A) \leq 1$ ise bu takdirde $A = A_1$ olacağından $A^{C,\dagger} = A^\dagger A_1 A^\dagger = A_1^\dagger A_1 A_1^\dagger = A_1^\dagger = A^\dagger$ yazılabilir. Tersine olarak $A^{C,\dagger} = A^\dagger$ olsun. Bu durumda (3.15) ve (3.16) ifadelerinden $K^* \Sigma^{-1} = K^* K(\Sigma K)^D$ ve $L^* \Sigma^{-1} = L^* K(\Sigma K)^D$ eşitlikleri elde edilir. Bu iki eşitlik soldan sırasıyla K ve L ile çarpılır ve $KK^* + LL^* = I_r$ eşitliği dikkate alınırsa $\Sigma^{-1} = K(\Sigma K)^D$ olduğu görülür. Bu nedenle ΣK matris çarpımı nonsingüler olup $r(A) = r$ elde edilir. Öte yandan

$$A^2 = U \begin{pmatrix} \Sigma K & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma K & \Sigma L \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^* = U \begin{pmatrix} \Sigma K & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma K & \Sigma L \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^*$$

olacağından $r(A) = r(A^2) = r$ yazılabilir ve dolayısıyla $\text{ind}(A) \leq 1$ eşitsizliği sağlanmış olur ki bu da ispatı tamamlar.

Uyarı 3.2 Eğer $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi EP matris ise bu durumda $A^\dagger$ matrisi de EP matrisi olacaktır ve bu durumda $A^{C,\dagger} = A^\# = A^\oplus = A^\dagger$ olur. Ancak bu ifadenin tersi genel olarak doğru değildir. Örneğin

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisini göz önüne alalım. Bu durumda

$$A^\dagger = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } A^{C,\dagger} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olacağından $(A^{C,\dagger})^\dagger = A^{C,\dagger}$ ve dolayısıyla $A^{C,\dagger}$ matrisi bir EP matristir fakat $AA^\dagger \neq A^\dagger A$ olduğundan A matrisi bir EP matris değildir.

Aşağıdaki ispatlanacak olan teorem $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisinin $A^{C,\dagger}$ CMP inversinin bazı özelliklerini vermektedir.

Teorem 3.5 $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi (3.2) deki gibi verilmiş olsun. Bu durumda $A^{C,\dagger}$ CMP inversi aşağıdaki özelliklere sahiptir (Mehdipour ve Salemi, 2018):

- (i) $(A^{C,\dagger})^\dagger = A^{C,\dagger}$ olması için gerek ve yeter şart $(K^*\Sigma^{-1})^D K^* = (K(\Sigma K)^D)^\dagger$ olmasıdır..
- (ii) $A^{C,\dagger} = 0$ olması için gerek ve yeter şart A matrisinin nilpotent olmasıdır.
- (iii) $A^{C,\dagger} = A$ olması için gerek ve yeter şart $A^\dagger = A$ olmasıdır.
- (iv) $A^{C,\dagger} = A^*$ olması için gerek ve yeter şart $A^\dagger = A^*$ ve $\text{ind}(A) = 1$ olmasıdır.

İspat. (i) $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisinin (3.2) deki ayrışımı kullanılarak Teorem 3.2 (i) den basit bir hesaplamayla $A^{C,\dagger} = Q_A A^D P_A$ olduğu ve dolayısıyla $(A^\dagger)^{C,\dagger} = Q_{A^\dagger} (A^\dagger)^D P_{A^\dagger} = P_A (A^\dagger)^D Q_A$ olduğu görülür. Ayrıca

$$(A^\dagger)^D = U \begin{pmatrix} (K^*\Sigma^{-1})^D & 0 \\ L^*\Sigma^{-1}((K^*\Sigma^{-1})^D)^2 & 0 \end{pmatrix} U^* \quad (3.17)$$

olduğu gösterilebilir. Buradan $(A^\dagger)^{C,\dagger}$ ve $(A^{C,\dagger})^\dagger$ matrislerinin

$$(A^\dagger)^{C,\dagger} = U \begin{pmatrix} (K^*\Sigma^{-1})^D K^* K & (K^*\Sigma^{-1})^D K^* L \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^* \quad (3.18)$$

ve

$$(A^{C,\dagger})^\dagger = U \begin{pmatrix} (K(\Sigma K)^D)^\dagger K & (K(\Sigma K)^D)^\dagger L \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^* \quad (3.19)$$

şeklinde olduğu görülür. Dolayısıyla $(A^\dagger)^{C,\dagger} = (A^{C,\dagger})^\dagger$ eşitliğinin sağlanması için gerek ve yeter şart

$$(K^*\Sigma^{-1})^D K^* K = (K(\Sigma K)^D)^\dagger K \text{ ve } (K^*\Sigma^{-1})^D K^* L = (K(\Sigma K)^D)^\dagger L \quad (3.20)$$

eşitliklerinin sağlanmasıdır. Eğer bu eşitlikler soldan sırasıyla K^* ve L^* matrisleri ile çarpılır ve $KK^* + LL^* = I_r$ eşitliği dikkate alınırsa $(K^*\Sigma^{-1})^D K^* = (K(\Sigma K)^D)^\dagger$ eşitliği sağlanmış olur.

(ii) Eğer A matrisi nilpotent ise $A^D = 0$ ve dolayısıyla $A^{C,\dagger} = A^\dagger A A^D A A^\dagger = 0$ olacaktır. Tersine olarak $A^{C,\dagger} = 0$ ise bu takdirde $K^* K(\Sigma K)^D = 0$ ve $L^* K(\Sigma K)^D = 0$ olacaktır. Bu iki eşitlik soldan sırasıyla K ve L matrisleri ile çarpılır ve $KK^* + LL^* = I_r$ eşitliği

dikkate alınır $K(\Sigma K)^D = 0$ olduğu görülebilir. Bu durumda $(\Sigma K)^D \Sigma K (\Sigma K)^D = (\Sigma K)^D = 0$ yazılabilir. Böylece ΣK matrisi nilpotent olup dolayısıyla A matrisi de nilpotent olacaktır.

(iii) $A^{C,\dagger} = A$ olsun. Bu durumda $K^* K (\Sigma K)^D = \Sigma K$ ve $\Sigma L = 0$ olduğu görülebilir. Σ matrisi nonsingüler ve $KK^* + LL^* = I_r$ olduğundan $K^* \Sigma^{-1} = \Sigma K$ ve $KK^* = I_r$ ve dolayısıyla $A^\dagger = A$ olduğu gösterilmiş olur. Tersine olarak eğer $A^\dagger = A$ ise bu durumda $L = 0$, $K^* \Sigma^{-1} = \Sigma K$ ve $KK^* = I_r$ olduğu kolayca görülebilir. Bu nedenle $(\Sigma K)^D = \Sigma K$ yazılabilir. (3.15) ve (3.16) dan istenilen sonuç elde edilir.

(iv) $A^{C,\dagger} = A^*$ olsun. Bu durumda (3.15) ve (3.16) eşitliklerinden $K^* K (\Sigma K)^D = K^* \Sigma$ ve $L^* K (\Sigma K)^D = L^* \Sigma$ olduğu görülebilir. Bu iki eşitlik soldan sırasıyla K ve L matrisleriyle çarpılır ve $KK^* + LL^* = I_r$ olduğundan $K(\Sigma K)^D = \Sigma$ olduğu gösterilmiş olur. Böylece K matrisi nonsingüler olup $\Sigma^{-1} = K(K\Sigma)^{-1} = K(K\Sigma)^D = \Sigma$ olduğu görülür. Dolayısıyla $A^{C,\dagger} = A^*$ olması için gerek ve yeter şart K matrisinin tersinir ve $\Sigma = I_r$ olmasıdır. Öte yandan $A^\dagger = A^*$ olması için gerek ve yeter şart $\Sigma = I_r$ olmasıdır. Ayrıca K matrisinin tersinir olması için gerek ve yeter şart $\text{ind}(A) = 1$ olmasıdır. Sonuç olarak $A^{C,\dagger} = A^*$ olması için gerek ve yeter şart $A^\dagger = A^*$ ve $\text{ind}(A) = 1$ olması olduğu gösterilmiş olur ve böylece de ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.6 $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi (3.2) deki gibi verilmiş olsun. Bu durumda A matrisinin bir çekirdek EP matris olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki şartların sağlanmasıdır (Mehdipour ve Salemi, 2018):

$$(i) \quad K^* K (\Sigma K)^D = (\Sigma K)^D ,$$

$$(ii) \quad L^* K (\Sigma K)^D = 0,$$

$$(iii) \quad (\Sigma K)^D \Sigma L = 0.$$

İspat. $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi (3.2) deki gibi verilmiş olsun. Bu durumda

$$A_1 = AA^D A = U \begin{pmatrix} \Sigma K (\Sigma K)^D \Sigma K & \Sigma K (\Sigma K)^D \Sigma L \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^* \quad (3.21)$$

olduğu görülebilir. Buradan basit bir hesaplamayla $A_1 A^\dagger = A^\dagger A_1$ olması için gerek ve yeter şartın

$$K^* K (\Sigma K)^D \Sigma K = \Sigma K (\Sigma K)^D, \quad (3.22)$$

$$L^* K (\Sigma K)^D \Sigma K = 0, \quad (3.23)$$

$$K^*K(\Sigma K)^D\Sigma L = 0, \quad (3.24)$$

$$L^*K(\Sigma K)^D\Sigma L = 0 \quad (3.25)$$

eşitliklerinin sağlanması olduğu görülür. Bu durumda (3.22) eşitliği soldan $(\Sigma K)^D$ ile çarpılır ve $(\Sigma K)^D\Sigma K(\Sigma K)^D = (\Sigma K)^D$ olduğu dikkate alınır (i) şıkkı elde edilir. (ii) şıkkı (3.23) eşitliğinin soldan $(\Sigma K)^D$ ile çarpılmasının bir sonucudur. Benzer şekilde (3.24) ve (3.25) eşitlikleri sırasıyla soldan $(\Sigma K)^D\Sigma K$ ve $(\Sigma K)^D\Sigma L$ ile çarpılıp $KK^* + LL^* = I_r$ olduğu dikkate alınır (iii) şartı sağlanır. Tersine olarak (i) nin ((3.22) eşitliğini, (ii) nin (3.23) eşitliğini ve (iii) nin de (3.24) ve (3.25) eşitliklerini sağladığı kolaylıkla gösterilebilir ve böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 3.7 $A = A_1 + A_2$ çekirdek-nilpotent ayrışımına sahip olan bir $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi verilmiş olsun. Bu takdirde $A^{C,\dagger} = A^D$ olması için gerek ve yeter şart A matrisinin çekirdek-EP matris olmasıdır (Mehdipour ve Salemi, 2018).

İspat. Bu durumda (3.15) ve (3.16) ifadelerinden $A^{C,\dagger} = A^D$ olması için gerek ve yeter şartın $K^*K(\Sigma K)^D = (\Sigma K)^D$, $L^*K(\Sigma K)^D = 0$ ve $((\Sigma K)^D)^2\Sigma L = 0$ eşitliklerinin sağlanması olduğu görülür. Buradaki ilk iki eşitlik Teorem 3.6 daki (i) ve (ii) şıkları ile aynıdır. Böylece üçüncü eşitliğin Teorem 3.6 daki (iii) şıkkına denk olduğunu göstermek yeterlidir. Bu durumda eğer $((\Sigma K)^D)^2\Sigma L = 0$ ise bu takdirde $\Sigma K((\Sigma K)^D)^2\Sigma L = (\Sigma K)^D\Sigma L = 0$ olacaktır. Tersisi durum ise açıkça görülmektedir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Uyarı 3.3 $\text{ind}(A) = m$ olan bir $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi matrisine m-EP matris adı verilir sayet $A^mA^\dagger = A^\dagger A^m$ eşitliği sağlanıyorsa. Bu tanıma göre m-EP matrisler Ep matrislerin bir genelleştirilmesi olarak düşünülebilir.

Sonuç 3.1 $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi (3.2) deki gibi verilmiş olsun. Bu durumda A matrisinin bir m-EP matris olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki şartların sağlanmasıdır (Mehdipour ve Salemi, 2018):

$$(i) \quad K^*K(\Sigma K)^{m-1} = (\Sigma K)^{m-1},$$

$$(ii) \quad L^*K(\Sigma K)^{m-1} = 0,$$

$$(iii) \quad (\Sigma K)^{m-1}\Sigma L = 0,$$

$$(iv) \quad \text{ind}(\Sigma K) = m - 1.$$

Teorem 3.8 $ind(A) = m$ olan bir $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi verilmiş olsun. Bu takdirde $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisinin bir çekirdek EP matris olması için gerek ve yeter şart $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisinin bir m-EP matris olmasıdır (Mehdipour ve Salemi, 2018).

İspat. $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi bir çekirdek EP matris ise $A_1 A^\dagger = A^\dagger A_1$ olacaktır ve dolayısıyla $A_1^m A^\dagger = A^\dagger A_1^m$ yazılabilir. Bu durumda $A_1^m = A^m$ olduğundan $A^\dagger A^m = A^m A^\dagger$ olup $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi bir m-EP matris olacaktır. Tersine olarak $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi bir m-EP matris olsun. Bu durumda Sonuç 3.1 deki (i)-(iv) şartları sağlanır. Dolayısıyla bu şartların Teorem 3.6 daki (i)-(iii) şıklarına denk olduğunu göstermek yeterlidir. Sonuç 3.1 deki (iv) şartından $(\Sigma K)^D = (\Sigma K)^{m-1}((\Sigma K)^{2m-1})^\dagger (\Sigma K)^{m-1}$ elde edilir. Böylece $K^* K(\Sigma K)^D = K^* K(\Sigma K)^{m-1}((\Sigma K)^{2m-1})^\dagger (\Sigma K)^{m-1}$ yazılabilir. Diğer taraftan (i) den $K^* K(\Sigma K)^{m-1}((\Sigma K)^{2m-1})^\dagger (\Sigma K)^{m-1} = (\Sigma K)^{m-1}((\Sigma K)^{2m-1})^\dagger (\Sigma K)^{m-1}$ olacağından $K^* K(\Sigma K)^D = (\Sigma K)^D$ elde edilir ve böylece Teorem 3.6 daki (i) şıkkı sağlanmış olur. (ii) şıkkı sağlansın. Bu durumda $L^* K(\Sigma K)^D = L^* K(\Sigma K)^{m-1}((\Sigma K)^{2m-1})^\dagger (\Sigma K)^{m-1} = 0$ olacağından Teorem 3.6 daki (ii) şıkkı sağlanmış olur. Son olarak (iii) şıkkının sağlandığını varsayalım. Buradan $(\Sigma K)^D \Sigma L = (\Sigma K)^{m-1}((\Sigma K)^{2m-1})^\dagger (\Sigma K)^{m-1} \Sigma L = 0$ olacağından Teorem 3.6 daki (iii) şıkkı sağlanır ve böylece de teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Önerme 3.1 $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi için $A^{D,\dagger} := A^D A A^\dagger$ ve $A^{\dagger,D} := A^\dagger A A^D$ genelleştirilmiş inversleri tanımlanmış olsun. Bu takdirde $A^{D,\dagger} = A^{\dagger,D}$ olması için gerek ve yeter şart A matrisinin bir çekirdek EP matris olmasıdır (Mehdipour ve Salemi, 2018).

İspat. $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi verilmiş olsun. Bu durumda

$$A^{D,\dagger} = A^D A A^\dagger = U \begin{pmatrix} (\Sigma K)^D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^* \quad (3.26)$$

ve

$$A^{\dagger,D} = A^\dagger A A^D = U \begin{pmatrix} K^* K(\Sigma K)^D & K^* K((\Sigma K)^D)^2 \Sigma L \\ L^* K(\Sigma K)^D & L^* K((\Sigma K)^D)^2 \Sigma L \end{pmatrix} U^* \quad (3.27)$$

olacağından $A^{D,\dagger} = A^{\dagger,D}$ olması için gerek ve yeter şart

$$K^* K(\Sigma K)^D = (\Sigma K)^D, L^* K(\Sigma K)^D = 0 \text{ ve } K((\Sigma K)^D)^2 \Sigma L = 0 \quad (3.28)$$

eşitliklerinin sağlanmasıdır. Öte yandan A matrisinin bir çekirdek EP matris olması için gerek ve yeter şart

$$K^*K(\Sigma K)^D\Sigma K = (\Sigma K)^D, L^*K(\Sigma K)^D\Sigma K = 0 \text{ ve } K(\Sigma K)^D\Sigma L = 0 \quad (3.29)$$

eşitliklerinin sağlanmasıdır. Dolayısıyla (3.28) ve (3.29) eşitliklerinin birbirine denk olduğunu göstermek yeterlidir. (3.29) daki ilk iki eşitliği $(\Sigma K)^D$ ile sağdan çarpıp $(\Sigma K)^D\Sigma K(\Sigma K)^D = (\Sigma K)^D$ olduğu dikkate alınırsa (3.29) daki ilk iki eşitliğin (3.28) daki ilk iki eşitliğe den olduğu gösterilmiş olur. Şimdi üçüncü eşitliklerin denk olduğunu gösterelim. (3.28) daki son eşitliği soldan Σ ile ve (3.29) daki son eşitliği de soldan $(\Sigma K)^D\Sigma$ ile çarparak $(\Sigma K)^D\Sigma L = 0$ olduğu gösterilmiş olur ve böylece de teoremin ispatı tamamlanır.

3.2 CMP İnversonların Bazı Yeni Gösterimleri

$A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi verilmiş olsun. $P_A = AA^\dagger$ ve $Q_A = A^\dagger A$ sırasıyla $\mathfrak{R}(A)$ ve $\mathfrak{R}(A^*)$ üzerinde dik izdüşümler olsun. Bu durumda $A^{C,\dagger} = Q_A A^D P_A$ yazılabilir. Dolayısıyla

$$A^{C,\dagger} = A^\dagger A A^D A A^\dagger = A^\dagger A A^D A A^D A A^\dagger = (A^\dagger A A^D) A (A^D A A^\dagger) = A^{\dagger,D} A A^{D,\dagger}$$

eşitlikleri yazılabilir. Bu durumda aşağıdaki lemma verilebilir.

Lemma 3.3 $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi verilmiş olsun. Bu takdirde

$$A^{C,\dagger} = A^{\dagger,D} A A^{D,\dagger} = Q_A A^{D,\dagger} = A^{\dagger,D} P_A \quad (3.30)$$

eşitlikleri gerçekleşir (Sanzhang ve Ark., 2018).

Şimdi Singüler Değer Ayrışımına göre A_1 matrisi A matrisinin çekirdek kısmı olmak üzere $A_1 A^\dagger A = A_1$ ve $A^\dagger A A_1 = A_1$ eşitliklerinin yazılabileceğini belirtelim. Bu durumda CMP inversin aşağıdaki karakterizasyonu verilebilir.

Teorem 3.9 $A, X \in \mathbb{C}_n^n$ matrisleri verilsin ve A_1 matrisi A matrisinin çekirdek kısmı olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler birbirine denktir (Sanzhang ve Ark., 2018):

- (1) X matrisi A matrisinin CMP inversidir;
- (2) $XA_1X = X$, $A_1XA_1 = A_1$, $A_1X = A_1A^\dagger$ ve $XA_1 = A^\dagger A_1$;
- (3) $XA_1X = X$, $A_1X = A_1A^\dagger$ ve $XA_1 = A^\dagger A_1$;
- (4) $XA_1X = X$, $A^DAX = A^DAA^\dagger$, $XAA^D = A^\dagger AA^D$;
- (5) $XA_1X = X$, $A^DAX = A^{D,\dagger}$, $XAA^D = A^{\dagger,D}$;
- (6) $XA_1X = X$, $A^DX = A^DA^\dagger$, $XA^D = A^\dagger A^D$;

$$(7) \quad XA_1X = X, \quad A^kX = A^kA^\dagger, \quad XA^k = A^\dagger A^k, \quad k = \text{ind}(A);$$

$$(8) \quad \Re(P) = \Re(A^D), \quad \mathcal{N}(P) = \mathcal{N}(A_1A^\dagger), \quad \Re(Q) = \Re(A^\dagger A_1) \quad \text{ve} \quad \mathcal{N}(Q) = \mathcal{N}(A^D)$$

olacak şekilde $P, Q \in \mathbb{C}_n^n$ matrisleri mevcuttur.

$$(9) \quad \Re(P) = \Re(A^D), \quad \mathcal{N}(P) = \mathcal{N}(A^{D,\dagger}), \quad \Re(Q) = \Re(A^{\dagger,D}) \quad \text{ve} \quad \mathcal{N}(Q) = \mathcal{N}(A^D)$$

olacak şekilde $P, Q \in \mathbb{C}_n^n$ matrisleri mevcuttur.

Ayrıca $A^{C,\dagger} = QA^DP$ dir.

İspat. (1) $\Rightarrow$ (2): X matrisi A matrisinin CMP inversi olduğundan X matrisi A A_1 matrisinin bir $\{1,2\}$ inversi olacaktır. Yani $XA_1X = X$ ve $A_1XA_1 = A_1$ olacaktır. $A_1X = A_1A^\dagger$ ve $XA_1 = A^\dagger A_1$ eşitlikleri ise daha önceden gösterilmişti.

(2) $\Rightarrow$ (3): Bu durum açıktır.

(3) $\Rightarrow$ (1): $X = A^\dagger A_1 A^\dagger$ ise $A^\dagger AA^D AA^\dagger AX = A^\dagger AA^D AX = A^\dagger AA^D AAA^\dagger AA^D AX = XA_1X = X$ yazılabilir. Ayrıca $A_1X = A_1A^\dagger$ ve $XA_1 = A^\dagger A_1$ eşitlikleri açıktır. Öte yandan $A_1A^\dagger A = A_1$ ve $AX = A_1A^\dagger$ eşitliklerinden $AXA = A_1$ olacaktır. Böylece CMP invers tanımına göre X matrisi A matrisinin CMP inversi olacaktır.

(3) $\Leftrightarrow$ (4) – (7): Bu durumda

$$\begin{aligned} AX = A_1A^\dagger &\Leftrightarrow AA^D AX = AA^D AA^\dagger \\ &\Leftrightarrow A^D AX = A^D AA^\dagger (A^{D,\dagger}) \\ &\Leftrightarrow A^D X = A^D A^\dagger \\ &\Leftrightarrow A^k X = A^k A^\dagger \end{aligned}$$

yazılabilir. Geri kalan durumlar benzer şekilde gösterilebilir.

(1) $\Rightarrow$ (8): $P = AX$ ve $Q = XA$ olsun. $XAX = X$ olduğundan $P = P^2$ ve $Q = Q^2$ olacaktır. Diğer taraftan

$$\Re(P) = \Re(AX) = \Re(AA^D AA^\dagger) = \Re(AA^D) = \Re(A^D),$$

$$\mathcal{N}(P) = \mathcal{N}(AX) = \mathcal{N}(AA^D AA^\dagger),$$

$$\Re(Q) = \Re(XA) = \Re(A^\dagger AA^D A)$$

ve

$$\mathcal{N}(Q) = \mathcal{N}(XA) = \mathcal{N}(A^\dagger AA^D A) = \mathcal{N}(AA^D) = \mathcal{N}(A^D)$$

eşitliklerinin sağlandığı görülür.

(8) $\Rightarrow$ (3): $\Re(P) = \Re(A^D)$, $\mathcal{N}(P) = \mathcal{N}(AA^D AA^\dagger)$, $\Re(Q) = \Re(A^\dagger AA^D A)$ ve $\mathcal{N}(Q) = \mathcal{N}(A^D)$ olacak şekilde, $Q \in \mathbb{C}_n^n$ matrisleri mevcut olsun. Öte yandan $\Re(P) = \Re(A^D)$ olduğundan $P = A^D AP$ ve $A^D = PA^D$ yazılabilir. $\mathcal{N}(Q) = \mathcal{N}(A^D) = \Re(I - AA^D)$ ve $\Re(I - Q) = \mathcal{N}(Q) = \mathcal{N}(A^D)$ olduğundan $Q = QAA^D$ ve $A^D = A^D Q$ yazılabilir. Şimdi $X = QA^D P$ alalım. Bu durumda $XA_1 X = QA^D (PA^D) A^2 X = (QA^D A) X = Q^2 A^D A = X$ yazılabilir. Öte yandan $\Re(I - P) = \mathcal{N}(P) = \mathcal{N}(AA^D AA^\dagger)$ olduğundan $AA^D AA^\dagger = AA^D AA^\dagger P$ ve bunun sonucunda $A_1 X = A^2 (A^D Q) A^D P = A^D AP = AA^D AA^\dagger (AA^D P) = AA^D AA^\dagger P = AA^D AA^\dagger = A_1 A^\dagger$ olduğu gösterilmiş olur. Benzer şekilde $XA_1 = A^\dagger A_1$ eşitliği de gösterilebilir.

(8) $\Leftrightarrow$ (9): $\mathcal{N}(P) = \mathcal{N}(A_1 A^\dagger)$ olması için gerek ve yeter şart $\mathcal{N}(P) = \mathcal{N}(A^{D,\dagger})$ ve $\Re(Q) = \Re(A^\dagger A_1)$ olması için gerek ve yeter şart $\Re(Q) = \Re(A^{\dagger,D})$ olduğu kolayca kontrol edilebilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Aşağıdaki lemma bir A matrisinin Drazin inversi hesaplamak için kullanılabilir. Bunun sonucu olarak A matrisinin çekirdek-EP ayrışımı kullanılarak A matrisinin CMP inversi için bir ifade verilebilir. $\text{ind}(A) = k$ olmak üzere $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi verilmiş olsun. Bu takdirde A_1 indeksi 1 olan bir matris ve $A_2^k = 0$ ve $A_1^* A_2 = A_2 A_1 = 0$ olmak üzere $A = A_1 + A_2$ olacak şekilde $A_1, A_2 \in \mathbb{C}_n^n$ matrisleri mevcuttur. Bu ayrışım tek türlü olup r A matrisinin sıfırdan farklı özdeğerleri olmak üzere $T \in \mathbb{C}_r^r$ nonsingüler ve $N \in \mathbb{C}_{n-r}^{n-r}$ nilpotent matrisleri için

$$A_1 = U \begin{bmatrix} T & S \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^* \text{ ve } A_2 = U \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} U^* \quad (3.31)$$

olacak şekilde bir $U \in \mathbb{C}_n^n$ üniter matrisi mevcuttur.

Lemma 3.4 $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi verilsin. $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere eğer bir $X \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi için $AX^{k+1} = X^k$ ve $XA^{k+1} = A^k$ eşitlikleri sağlanıyorsa bu takdirde

$$A^D = X^{k+1} A^k$$

olacaktır (Sanzhang ve Ark., 2018).

Lemma 3.5 $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi verilsin. $\text{ind}(A) = k$ olsun. Eğer A_1 ve A_2 (3.31) deki gibi olmak üzere $A = A_1 + A_2$ çekirdek-EP ayrışımı verilmiş ise bu takdirde

$$A^\odot = A_1^\oplus = U \begin{bmatrix} T^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*$$

olacaktır (Sanzhang ve Ark., 2018).

Teorem 3.10 $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi verilsin. $\text{ind}(A) = k$ olsun. Eğer A_1 ve A_2 matrisleri (3.31) ifadesindeki gibi olmak üzere $A = A_1 + A_2$ çekirdek-EP ayrışımı verilmiş ise bu takdirde $\Phi_k = \sum_{j=1}^k T^{j-1} S N^{k-j}$ olmak üzere

$$A^D = U \begin{bmatrix} T^{-1} & T^{-(k+1)} \Phi_k \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*$$

olacaktır (Sanzhang ve Ark., 2018).

İspat. Bu durumda $A^\odot = A_1^\oplus = A^D A^k (A^k)^\dagger$ olduğundan

$$A_1^\oplus A^{k+1} = A^D A^k (A^k)^\dagger A^{k+1} = A^D A^{k+1} = A^k \quad (3.32)$$

eşitliği yazılabilir. Öte yandan

$$A = U \begin{bmatrix} T & S \\ 0 & N \end{bmatrix} U^* \text{ ve } (A_1^\oplus)^{k+1} = U \begin{bmatrix} T^{-(k+1)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*$$

olacağından

$$A(A_1^\oplus)^{k+1} = U \begin{bmatrix} T & S \\ 0 & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T^{-(k+1)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^* = U \begin{bmatrix} T^{-k} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^* = (A_1^\oplus)^k \quad (3.33)$$

yazılabilir. Bu nedenle $\Phi_k = \sum_{j=1}^k T^{j-1} S N^{k-j}$ olmak üzere $A^k = U \begin{bmatrix} T^k & \Phi_k \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*$ olur.

Bu durumda (3.32), (3.33) eşitlikleri ve Lemma 3.3 dikkate alınırsa

$$A^D = (A_1^\oplus)^{k+1} A^k = U \begin{bmatrix} T^{-1} & T^{-(k+1)} \Phi_k \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*$$

olduğu görülür ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.11 $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi verilsin. $\text{ind}(A) = k$ olsun. Eğer A_1 ve A_2 matrisleri (3.31) ifadesindeki gibi olmak üzere $A = A_1 + A_2$ çekirdek-EP ayrışımı verilmiş ise bu takdirde $\Phi_k = \sum_{j=1}^k T^{j-1} S N^{k-j}$ olmak üzere

$$A^{D,\dagger} = U \begin{bmatrix} T^{-1} & T^{-(k+1)} \Phi_k N N^\dagger \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*$$

olacaktır (Sanzhang ve Ark., 2018).

İspat. $A = U \begin{bmatrix} T & S \\ 0 & N \end{bmatrix} U^*$ matrisi verilsin ve $B = \begin{bmatrix} T & S \\ 0 & N \end{bmatrix}$ alalım. Ayrıca $B^\dagger$ matrisini $B^\dagger = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix}$ ile gösterelim. Bu takdirde

$$\begin{aligned} BB^\dagger &= \begin{bmatrix} T & S \\ 0 & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} TB_1 + SB_3 & TB_2 + SB_4 \\ NB_3 & NB_4 \end{bmatrix}, \\ BB^\dagger B &= \begin{bmatrix} TB_1 + SB_3 & TB_2 + SB_4 \\ NB_3 & NB_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T & S \\ 0 & N \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (TB_1 + SB_3)T & (TB_1 + SB_3)S + (TB_2 + SB_4)N \\ NB_3T & NB_3S + NB_4N \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.34)$$

elde edilir. Bu durumda $BB^\dagger$ matrisi bir izdüşüm matrisi ve $BB^\dagger B = B$ olacağından (3.34) eşitliğinden

$$\begin{aligned} (NB_4)^* &= NB_4, \quad (TB_2 + SB_4)^* = NB_3, \\ NB_3T &= 0, \quad (TB_1 + SB_3)T = T, \quad N = NB_3S + NB_4N \end{aligned}$$

eşitlikleri ve T matrisinin nonsingülerliğinden ise

$$\begin{aligned} (NB_4)^* &= NB_4, \quad NB_3 = 0, \quad TB_2 + SB_4 = 0, \\ TB_1 + SB_3 &= I_r, \quad NB_4N = N \end{aligned} \quad (3.35)$$

eşitlikleri yazılabilir. Buradan $B_4 \in N\{1,3\}$ olduğu ve dolayısıyla $NN^\dagger = NB_4$ olduğu görülür ve buradan da

$$BB^\dagger = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & NN^\dagger \end{bmatrix}$$

eşitliği yazılabilir. Daha önce Teorem 3.10 da $A^D = U \begin{bmatrix} T^{-1} & T^{-(k+1)}\Phi_k \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*$ olduğu gösterilmişti. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} A^{D,\dagger} &= U \begin{bmatrix} T^{-1} & T^{-(k+1)}\Phi_k \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^* U \begin{bmatrix} T & S \\ 0 & N \end{bmatrix} U^* U \begin{bmatrix} T & S \\ 0 & N \end{bmatrix}^\dagger U^* \\ &= U \begin{bmatrix} T^{-1} & T^{-(k+1)}\Phi_k \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T & S \\ 0 & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T & S \\ 0 & N \end{bmatrix}^\dagger U^* \\ &= U \begin{bmatrix} T^{-1} & T^{-(k+1)}\Phi_k \\ 0 & 0 \end{bmatrix} BB^\dagger U^* \\ &= U \begin{bmatrix} T^{-1} & T^{-(k+1)}\Phi_k \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & NN^\dagger \end{bmatrix} U^* \end{aligned}$$

$$= U \begin{bmatrix} T^{-1} & T^{-(k+1)}\Phi_k NN^\dagger \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.12 $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi verilsin. $\text{ind}(A) = k$ olsun. Eğer A_1 ve A_2 matrisleri (3.31) deki gibi olmak üzere $A = A_1 + A_2$ çekirdek-EP ayrışımı verilmiş olsun. Bu takdirde $\Phi_k = \sum_{j=1}^k T^{j-1} S N^{k-j}$, $X = (I - N^\dagger N) S^* (T T^* + S(I - N^\dagger N) S^*)^{-1}$ ve $Y = T^{-1}(I_r - S X)$ olmak üzere

$$A^{C,\dagger} = U \begin{bmatrix} Y & Y T^{-k} \Phi_k NN^\dagger \\ X & X T^{-k} \Phi_k NN^\dagger \end{bmatrix} U^*$$

olacaktır (Sanzhang ve Ark., 2018).

İspat. Bu durumda $A^{C,\dagger} = Q_A A^{D,\dagger}$ olacağından Teorem 3.11 den

$$\begin{aligned} A^{C,\dagger} &= Q_A A^{D,\dagger} = U \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T & S \\ 0 & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T^{-1} & T^{-(k+1)}\Phi_k NN^\dagger \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^* \\ &= U \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_r & T^{-k}\Phi_k NN^\dagger \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^* \\ &= U \begin{bmatrix} B_1 & B_1 T^{-k}\Phi_k NN^\dagger \\ B_3 & B_3 T^{-k}\Phi_k NN^\dagger \end{bmatrix} U^* \end{aligned} \quad (3.36)$$

olduğu görülür. Öte yandan $T B_1 + S B_3 = I_r$ yani

$$B_1 = T^{-1} - T^{-1} S B_3 \quad (3.37)$$

olacağından $X = (I - N^\dagger N) S^* (T T^* + S(I - N^\dagger N) S^*)^{-1}$ olduğu gösterilebilir. Eğer $Y = B_1$ alınırsa bu durumda (3.36) ve (3.37) ifadelerinden ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.13 $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi (3.2) Hartwig-Spindelböck Ayrışımı formunda verilmiş olsun. Bu takdirde $A^{C,\dagger}$ matrisinin bir EP-matris olabilmesi için gerek ve yeter şart $\Delta = K(\Sigma K)^D ((K(\Sigma K)^D)^\dagger)$ olmak üzere aşağıdaki şartların sağlanmasıdır:

- (1) $K^* \Delta K = ((K(\Sigma K)^D)^\dagger K(\Sigma K)^D)$;
- (2) $\Delta L = 0$;
- (3) $L^* \Delta K = 0$.

Ayrıca eğer $A^{C,\dagger}$ matrisi bir EP-matris ise

$$(1) \quad [LL^*, \Delta] = 0;$$

$$(2) \quad [KK^*, \Delta] = 0;$$

$$(3) \quad \Delta K = K((K(\Sigma K)^D)^\dagger K(\Sigma K)^D$$

olacaktır (Sanzhang ve Ark., 2018).

İspat. $A^{C,\dagger}$ matrisinin bir EP-matris olması için gerek ve yeter şart $A^{C,\dagger}(A^{C,\dagger})^\dagger = (A^{C,\dagger})^\dagger A^{C,\dagger}$ olmasıdır. (3.16) ifadesinde

$$A^{C,\dagger} = U \begin{pmatrix} K^* K(\Sigma K)^D & 0 \\ L^* K(\Sigma K)^D & 0 \end{pmatrix} U^* \quad (3.38)$$

olduğu verilmişti. Dolayısıyla

$$(A^{C,\dagger})^\dagger = U \begin{pmatrix} ((K(\Sigma K)^D)^\dagger K & ((K(\Sigma K)^D)^\dagger L \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^* \quad (3.39)$$

yazılabilir. Böylece $KK^* + LL^* = I_r$ eşitliği ve (3.38) ve (3.39) ifadeleri kullanılarak

$$\begin{aligned} A^{C,\dagger}(A^{C,\dagger})^\dagger &= U \begin{pmatrix} K^* K(\Sigma K)^D & 0 \\ L^* K(\Sigma K)^D & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ((K(\Sigma K)^D)^\dagger K & ((K(\Sigma K)^D)^\dagger L \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^* \\ &= U \begin{pmatrix} K^* K(\Sigma K)^D ((K(\Sigma K)^D)^\dagger K & K^* K(\Sigma K)^D ((K(\Sigma K)^D)^\dagger L \\ L^* K(\Sigma K)^D ((K(\Sigma K)^D)^\dagger K & L^* K(\Sigma K)^D ((K(\Sigma K)^D)^\dagger L \end{pmatrix} U^* \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} (A^{C,\dagger})^\dagger A^{C,\dagger} &= U \begin{pmatrix} ((K(\Sigma K)^D)^\dagger K & ((K(\Sigma K)^D)^\dagger L \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K^* K(\Sigma K)^D & 0 \\ L^* K(\Sigma K)^D & 0 \end{pmatrix} U^* \\ &= U \begin{pmatrix} ((K(\Sigma K)^D)^\dagger K K^* K(\Sigma K)^D + ((K(\Sigma K)^D)^\dagger L L^* K(\Sigma K)^D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^* \\ &= U \begin{pmatrix} ((K(\Sigma K)^D)^\dagger (KK^* + LL^*) K(\Sigma K)^D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^* \\ &= U \begin{pmatrix} ((K(\Sigma K)^D)^\dagger K(\Sigma K)^D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^* \end{aligned}$$

olduğu görülür. Böylece $A^{C,\dagger}$ matrisinin bir EP-matris olması için gerek ve yeter şart $A^{C,\dagger}(A^{C,\dagger})^\dagger = (A^{C,\dagger})^\dagger A^{C,\dagger}$ eşitliğinin sağlanması olduğundan

$$K^* K(\Sigma K)^D ((K(\Sigma K)^D)^\dagger K = ((K(\Sigma K)^D)^\dagger K(\Sigma K)^D,$$

$$K^* K(\Sigma K)^D ((K(\Sigma K)^D)^\dagger L = 0,$$

$$\begin{aligned}
L^*K(\Sigma K)^D((K(\Sigma K)^D)^\dagger K &= 0, \\
L^*K(\Sigma K)^D((K(\Sigma K)^D)^\dagger L &= 0,
\end{aligned} \tag{3.40}$$

eşitlikleri sağlanır. $K^*K(\Sigma K)^D((K(\Sigma K)^D)^\dagger L = 0$ eşitliği K ile soldan ve L^* ile sağdan ve $L^*K(\Sigma K)^D((K(\Sigma K)^D)^\dagger K = 0$ eşitliği de L ile soldan ve K^* ile sağdan çarpılırsa

$$KK^*K(\Sigma K)^D((K(\Sigma K)^D)^\dagger LL^* = 0 \text{ ve } LL^*K(\Sigma K)^D((K(\Sigma K)^D)^\dagger KK^* = 0 \tag{3.41}$$

eşitlikleri sağlanır. Öte yandan $KK^* + LL^* = I_r$ olduğundan

$$(I_r - LL^*)K(\Sigma K)^D((K(\Sigma K)^D)^\dagger LL^* = 0$$

ve

$$(I_r - KK^*)K(\Sigma K)^D((K(\Sigma K)^D)^\dagger KK^* = 0$$

eşitlikleri sağlanır. Bu iki eşitlik sırasıyla

$$\begin{aligned}
K(\Sigma K)^D((K(\Sigma K)^D)^\dagger LL^* &= LL^*K(\Sigma K)^D((K(\Sigma K)^D)^\dagger LL^* \\
K(\Sigma K)^D((K(\Sigma K)^D)^\dagger KK^* &= KK^*K(\Sigma K)^D((K(\Sigma K)^D)^\dagger KK^*
\end{aligned} \tag{3.42}$$

olarak yazılabilir. Ayrıca $KK^* + LL^* = I_r$ olduğundan (3.41) ve (3.42) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}
K(\Sigma K)^D((K(\Sigma K)^D)^\dagger LL^* &= LL^*K(\Sigma K)^D((K(\Sigma K)^D)^\dagger LL^* \\
&= LL^*K(\Sigma K)^D((K(\Sigma K)^D)^\dagger LL^* + L(L^*K)(\Sigma K)^D((K(\Sigma K)^D)^\dagger KK^* \\
&= LL^*K(\Sigma K)^D((K(\Sigma K)^D)^\dagger (LL^* + KK^*) \\
&= LL^*K(\Sigma K)^D((K(\Sigma K)^D)^\dagger \\
K(\Sigma K)^D((K(\Sigma K)^D)^\dagger KK^* &= KK^*K(\Sigma K)^D((K(\Sigma K)^D)^\dagger KK^* \\
&= KK^*K(\Sigma K)^D((K(\Sigma K)^D)^\dagger KK^* + K(K^*K)(\Sigma K)^D((K(\Sigma K)^D)^\dagger LL^* \\
&= KK^*K(\Sigma K)^D((K(\Sigma K)^D)^\dagger (LL^* + KK^*) \\
&= KK^*K(\Sigma K)^D((K(\Sigma K)^D)^\dagger
\end{aligned} \tag{3.43}$$

olduğu görülür. Böylece (3.43) eşitliğinden

$$[LL^*, K(\Sigma K)^D((K(\Sigma K)^D)^\dagger] = 0 \text{ ve } [KK^*, K(\Sigma K)^D((K(\Sigma K)^D)^\dagger] = 0$$

eşitlikleri yazılabileceğinden (3.41) eşitlikleri

$$K(\Sigma K)^D((K(\Sigma K)^D)^\dagger KK^*LL^* = 0 \text{ ve } K(\Sigma K)^D((K(\Sigma K)^D)^\dagger LL^*KK^* = 0 \tag{3.44}$$

şeklinde de yazılabilir. Diğer taraftan $L^*K(\Sigma K)^D((K(\Sigma K)^D)^\dagger L = 0$ ifadesi L ile soldan ve L^* ile de sağdan çarpılırsa bu takdirde

$$LL^*K(\Sigma K)^D((K(\Sigma K)^D)^\dagger LL^* = 0 \quad (3.45)$$

elde edilir. Bu nedenle (3.42) ve (3.45) ifadeleri birleştirilerek

$$K(\Sigma K)^D((K(\Sigma K)^D)^\dagger LL^* = 0$$

elde edilir. Buradan eğer $K^*K(\Sigma K)^D((K(\Sigma K)^D)^\dagger K = ((K(\Sigma K)^D)^\dagger K(\Sigma K)^D$ eşitliği soldan K ile ve $L^*K(\Sigma K)^D((K(\Sigma K)^D)^\dagger K = 0$ eşitliği de soldan L ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} KK^*K(\Sigma K)^D((K(\Sigma K)^D)^\dagger K &= ((K(\Sigma K)^D)^\dagger K(\Sigma K)^D, \\ LL^*K(\Sigma K)^D((K(\Sigma K)^D)^\dagger K &= 0 \end{aligned} \quad (3.46)$$

olduğu görülür. Öte yandan $KK^* + LL^* = I_r$ olduğundan bu son eşitlikten

$$K(\Sigma K)^D((K(\Sigma K)^D)^\dagger K = K((K(\Sigma K)^D)^\dagger K(\Sigma K)^D$$

ve dolayısıyla da

$$K(\Sigma K)^D((K(\Sigma K)^D)^\dagger L = 0$$

olduğu gösterilmiş olur. Böylece (3.40) ifadesi

$$K^*K(\Sigma K)^D((K(\Sigma K)^D)^\dagger K = ((K(\Sigma K)^D)^\dagger K(\Sigma K)^D,$$

$$K(\Sigma K)^D((K(\Sigma K)^D)^\dagger K = 0,$$

$$L^*K(\Sigma K)^D((K(\Sigma K)^D)^\dagger K = 0$$

şeklinde de yazılabilir bu ise teoremin ispatını tamamlar.

Teorem 3.14 $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi (3.2) Hartwig-Spindelböck Ayırışımı formunda verilmiş olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir (Sanzhang ve Ark., 2018):

$$(1) A^{C,\dagger} = A^{D,\dagger},$$

$$(2) \mathfrak{R}(S) \subseteq \mathfrak{R}(T) \text{ ve } \mathfrak{R}(S^*) \subseteq \mathfrak{R}(T^*).$$

İspat. $A = U \begin{bmatrix} T & S \\ 0 & N \end{bmatrix} U^*$ ve $B = \begin{bmatrix} T & S \\ 0 & N \end{bmatrix}$ alalım ve $B^\dagger = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix}$ olsun. Bu takdirde

$$\Phi_k = \sum_{j=1}^k T^{j-1} S N^{k-j} \text{ ve } B_1 = T^{-1} - T^{-1} S B_3$$

olmak üzere $A^{C,\dagger}$ ve $A^{D,\dagger}$ matrislerinin sırasıyla

$$A^{C,\dagger} = U \begin{bmatrix} B_1 & B_1 T^{-k} \Phi_k N N^\dagger \\ B_3 & B_3 T^{-k} \Phi_k N N^\dagger \end{bmatrix} U^* \quad (3.47)$$

ve

$$A^{D,\dagger} = U \begin{bmatrix} T^{-1} & T^{-(k+1)} \Phi_k N N^\dagger \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^* \quad (3.48)$$

şeklinde olduğu daha önce gösterilmişti. Bu durumda $A^{C,\dagger} = A^{D,\dagger}$ olduğundan $B_3 = 0$ olacaktır. Böylece $\Re(S) \subseteq \Re(T)$ ve $\Re(S^*) \subseteq \Re(T^*)$ olduğu görülür. Tersine olarak $\Re(S) \subseteq \Re(T)$ ve $\Re(S^*) \subseteq \Re(T^*)$ olduğunu varsayalım. Bu takdirde $B_3 = 0$ ve dolayısıyla $B_1 = T^{-1} - T^{-1} S B_3$ eşitliğinden $B_1 = T^{-1}$ olduğu görülür. Bu nedenle (3.47) eşitliğinden

$$A^{C,\dagger} = U \begin{bmatrix} T^{-1} & T^{-(k+1)} \Phi_k N N^\dagger \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^* \quad (3.49)$$

olduğu elde edilir ve böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 3.15 $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi verilmiş olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir (Sanzhang ve Ark., 2018):

- (1) $A^\dagger A_1 = A_1 A^\dagger$,
- (2) $A^{C,\dagger} = A^{D,\dagger}$ ve $A^{C,\dagger} = A^{\dagger,D}$.

İspat. $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi (3.2) Hartwig-Spindelböck Ayrışımı formunda verilmiş olsun. Bu takdirde $A^{C,\dagger}$ matrisi

$$A^{C,\dagger} = U \begin{pmatrix} K^* K (\Sigma K)^D & 0 \\ L^* K (\Sigma K)^D & 0 \end{pmatrix} U^* \quad (3.50)$$

şeklinde yazılabilir. Öte yandan

$$A^{D,\dagger} = U \begin{pmatrix} (\Sigma K)^D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^*,$$

$$A^D = U \begin{pmatrix} (\Sigma K)^D & ((\Sigma K)^D)^2 \Sigma L \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^*$$

ve

$$A^{\dagger,D} = U \begin{pmatrix} K^* K (\Sigma K)^D & K^* K (\Sigma K)^D \Sigma L \\ L^* K (\Sigma K)^D & L^* K (\Sigma K)^D \Sigma L \end{pmatrix} U^*$$

olduğu açıktır. Şimdi $A^\dagger A_1 = A_1 A^\dagger$ olsun. Bu takdirde

$$K^*K(\Sigma K)^D = (\Sigma K)^D, L^*K(\Sigma K)^D = 0 \text{ ve } (\Sigma K)^D \Sigma L = 0$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece $A^{C,\dagger} = A^{D,\dagger}$ ve $A^{C,\dagger} = A^{\dagger,D}$ olduğu gösterilmiş olur. Tersine olarak $A^{C,\dagger} = A^{D,\dagger}$ eşitliği $K^*K(\Sigma K)^D \Sigma L = 0$ ve $L^*K(\Sigma K)^D \Sigma L = 0$ olduğunu gösterir. Böylece $K^*K + LL^* = I_r$ olduğundan $K(\Sigma K)^D \Sigma L = 0$ yazılabilir. Öte yandan $K(\Sigma K)^D \Sigma L = 0$ ifadesi soldan $(\Sigma K)^D \Sigma$ ile çarpılırsa $(\Sigma K)^D \Sigma L = 0$ elde edilir. Böylece $A^{C,\dagger} = A^{D,\dagger}$ eşitliği $K^*K(\Sigma K)^D = (\Sigma K)^D$ ve $L^*K(\Sigma K)^D = 0$ eşitliklerinin her ikisinin de sağlanmasına denk olacaktır. Diğer taraftan $A^D = A^{D,\dagger}$ olması için gerek ve yeter şart $((\Sigma K)^D)^2 \Sigma L = 0$ olmasıdır. Böylece $A^\dagger A_1 = A_1 A^\dagger$ olduğu gösterilmiş olur ki bu da teoremin ispatını tamamlar.

Uyarı 3.4 $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi (3.2) Hartwig-Spindelsböck Ayrışımı formunda verilmiş olsun. Eğer $\text{ind}(A) = k$ ise bu takdirde $A^{C,\dagger} = A^{D,\dagger}$ olması için gerek ve yeter şart

$$K^*K(\Sigma K)^{-1} = (\Sigma K)^{-1} \text{ ve } L^*K(\Sigma K)^{-1} = 0$$

eşitliklerinin her ikisinin de sağlanmasıdır. Ayrıca $A^D = A^{D,\dagger}$ olması için gerek ve yeter şart $A^{C,\dagger} = A^{\dagger,D}$ olmasıdır. Gerçekten $A^D = A^{D,\dagger}$ olabilmesi için gerek ve yeter şart $(\Sigma K)^{k-1} \Sigma L = 0$ olması ve $A^{C,\dagger} = A^{\dagger,D}$ olabilmesi için ise gerek ve yeter şart $(\Sigma K)^{k-1} \Sigma L = 0$ olmasıdır.

Teorem 3.16 $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi $\text{ind}(A) = k$ olacak şekilde verilmiş olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir (Sanzhang ve Ark., 2018):

- (1) $A^\dagger A_1 = A_1 A^\dagger$,
- (2) $A^{C,\dagger} A^{k+1} = A^{k+1} A^{C,\dagger} = A^k$,
- (3) $A^{C,\dagger} = (A^\dagger)^k A^{C,\dagger} A^k$.

İspat. (i) $\Leftrightarrow$ (ii): Bu durumda $A^{k+1} A^{C,\dagger} = A^{k+1} A^\dagger$ ve $A^{C,\dagger} A^k = A^\dagger A^k$ eşitliklerinin sağlandığı kolayca görülebilir. Buradan $A^{C,\dagger} A^k = A^\dagger A^k$ eşitliği $A^{C,\dagger} A^{k+1} = A^\dagger A^{k+1}$ eşitliğini sağlar. Dolayısıyla $A^\dagger A_1 = A_1 A^\dagger$ eşitliğinin sağlanması için gerek ve yeter şart A matrisinin bir EP-matris olmasıdır. Oysa A matrisinin bir EP-matris olması için gerek ve yeter şart $A^\dagger A^{k+1} = A^{k+1} A^\dagger = A^k$ olmasıdır.

(i) $\Leftrightarrow$ (iii): Bu durumda $A^D = (A^\dagger)^{k+1}A^k$ ve $A^{C,\dagger}A^k = A^\dagger A^k$ eşitliklerinin sağlandığı kolayca görülebilir. Buradan

$$A^D = (A^\dagger)^{k+1}A^k = (A^\dagger)^k A^\dagger A^k = (A^\dagger)^k A^{C,\dagger}A^k \quad (3.51)$$

olduğu görülür. Böylelikle

$$A^\dagger A_1 = A_1 A^\dagger \Leftrightarrow A^{C,\dagger} = A^D$$

olması gerçeği kullanılarak ispat tamamlanmış olur.

3.3 CMP İnversonların Çeşitli Özellikleri

Bu kısımda öncelikle $A^{C,\dagger}$ matrisinin bir EP-matris olması için bazı ilave gerek ve yeter şartlar verilecektir. Daha sonra CMP inversonlar cebirsel ve geometrik bakımdan karakterize edilecektir. Bir matrisin CMP inversonunun ranj uzayı ve sütun uzayı üzerine kurulması ile ilgili bazı denk şartlar verilecektir. Son olarak CMP inversonlar yardımıyla bazı özel matrislerin çeşitli yeni karakterizasyonları incelenecektir.

Şimdi ilerleyen kısımlarda kullanılacak olan bazı lemmalar verilebilir. Bu lemmalardan bazılarının ispatına burada girilmeyecektir. Bir $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi için $XAX = X$ şartını sağlayan bir $X \in \mathbb{C}_n^n$ matrisine A matrisinin bir dış inversonu adı verildiğini ve tüm dış inversonlar kümesinin $A^{(2)}$ ile gösterildiğini hatırlayalım.

$A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi için $r(A) = r$ olsun ve T vektör uzayı $\mathbb{C}^n$ nin $s \leq r$ boyutlu bir alt uzayı ve S vektör uzayı da $\mathbb{C}^n$ nin $n - s$ boyutlu bir alt uzayı olsun. Bu takdirde bir $X \in \mathbb{C}_n^n$ matrisinin $XAX = X$, $\mathfrak{R}(X) = T$, $\mathcal{N}(X) = S$ eşitliklerini sağlaması için gerek ve yeter şart $AT \oplus S = \mathbb{C}^m$ olmasıdır ve bu durumda X matrisi tektir ve $A_{T,S}^{(2)}$ şeklinde gösterilir.

Eğer $X \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi A matrisinin bir dış inversonu ise $\mathcal{N}(AX) \subseteq \mathcal{N}(XAX) = \mathcal{N}(X) \subseteq \mathcal{N}(AX)$ ve $\mathfrak{R}(XA) \subseteq \mathfrak{R}(X) = \mathfrak{R}(XAX) \subseteq \mathfrak{R}(XA)$ yani $\mathcal{N}(X) = \mathcal{N}(AX)$ ve $\mathfrak{R}(X) = \mathfrak{R}(XA)$ olacaktır. Başka bir deyişle $A_{\mathfrak{R}(X), \mathcal{N}(X)}^{(2)}$ mevcuttur. Bu durumda eğer Moore-Penrose inverson, Grup inverson, Drazin inverson ve çekirdek inverson tanımları dikkate alınırsa $ind(A) = k$ olmak üzere sırasıyla

$$A^\dagger = A_{\mathfrak{R}(A^*), \mathcal{N}(A^*)}^{(2)}, \quad A^\# = A_{\mathfrak{R}(A), \mathcal{N}(A)}^{(2)},$$

$$A^D = A_{\Re(A^k), \mathcal{N}(A^k)}^{(2)}, \quad A^\oplus = A_{\Re(A^*), \mathcal{N}(A^*)}^{(2)} \quad (3.52)$$

olacağı kolayca gösterilebilir.

Aşağıdaki Lemma CMP inversin yeni bir gösterimini vermektedir.

Lemma 3.6 $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi verilsin ve $\text{ind}(A) = k$ olsun. Bu takdirde

$$A^{C,\dagger} = A_{\Re(A^\dagger A^k), \mathcal{N}(A^k A^\dagger)}^{(2)} = A_{\Re(A^\dagger A^{2k} A^\dagger), \mathcal{N}(A^\dagger A^{2k} A^\dagger)}^{(2)} \quad (3.53)$$

dir (Chen ve Ark., 2021).

İspat. Bu durumda eğer $A^{C,\dagger}$ nin tanımı dikkate alınırsa $\mathcal{N}(A^{C,\dagger}) = \mathcal{N}(AA^{C,\dagger}) = \mathcal{N}(AA^D AA^{C,\dagger})$ yazılabilir. Öte yandan $A^{C,\dagger} = A^\dagger AA^D AA^\dagger$ olduğundan

$$\mathcal{N}(A^{C,\dagger}) = \mathcal{N}(AA^D AA^\dagger) = \mathcal{N}(A^{C,\dagger}) = \mathcal{N}(AA^{D,\dagger}) = \mathcal{N}(A^{D,\dagger}) = \mathcal{N}(A^k A^\dagger)$$

olduğu görülebilir. Ayrıca yine eğer $A^{C,\dagger}$ nin tanımı dikkate alınırsa

$$\Re(A^{C,\dagger}) = \Re(A^{C,\dagger} A) = \Re(A^\dagger AA^D A) = \Re(A^{\dagger,D} A) = \Re(A^{\dagger,D}) \quad (3.54)$$

olduğu da görülebilir. Bunun sonucu olarak $\Re(A^{\dagger,D}) = A^\dagger \Re(AA^D)$ ve $\Re(AA^D) = \Re(A^k)$ eşitlikleri dikkate alınarak $\Re(A^{C,\dagger}) = \Re(A^\dagger A^k)$ eşitliği yazılabilir. Dolayısıyla $A^{C,\dagger} = A_{\Re(A^\dagger A^k), \mathcal{N}(A^k A^\dagger)}^{(2)}$ eşitliği elde edilmiş olur. Öte yandan $\text{ind}(A) = k$ olduğu dikkate alınırsa $r(A^k A^\dagger) = r(A^k) = r(A^\dagger A^k) = r(A^\dagger A^{2k} A^\dagger)$ olduğu görülür. Ayrıca $\mathcal{N}(A^k A^\dagger) \subseteq r(A^\dagger A^{2k} A^\dagger)$ ve $\Re(A^\dagger A^{2k} A^\dagger) \subseteq \Re(A^\dagger A^k)$ olduğundan

$$\mathcal{N}(A^k A^\dagger) = r(A^\dagger A^{2k} A^\dagger) \text{ ve } \Re(A^\dagger A^{2k} A^\dagger) = \Re(A^\dagger A^k) \quad (3.55)$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece

$$A^{C,\dagger} = A_{\Re(A^\dagger A^{2k} A^\dagger), \mathcal{N}(A^\dagger A^{2k} A^\dagger)}^{(2)}$$

olduğu gösterilmiş olur. Bu ise lemmanın ispatını tamamlar.

Lemma 3.7 AB çarpımı mevcut olacak şekildeki herhangi iki A ve B matrisi için $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$ olması için gerek ve yeter şart

$$\Re(A^* AB) \subseteq \Re(B) \text{ ve } \Re(BB^* A^*) \subseteq \Re(A^*)$$

içermelerinin sağlanmasıdır (Chen ve Ark., 2021).

Şimdi $\text{ind}(A) = k$ olan bir $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisinin $A^\dagger, A^D, A^{D,\dagger}, A^{\dagger,D}, A^{C,\dagger}, A^\odot$ ve $A^\ominus$ inverslerinin Çekirdek-EP ayrışımı cinsinden ifadeleri aşağıdaki lemma ile verilebilir.

Lemma 3.8 $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi $\text{ind}(A) = k$ olacak şekilde verilmiş olsun. Bu takdirde

$$\tilde{T} = \sum_{j=0}^{k-1} T^{j-1} S N^{k-1-j}, \Delta = [T T^* + S(I_{n-t} - N^\dagger N) S^*]^{-1} \text{ ve } t = r(T) = r(A^k)$$

olmak üzere aşağıdaki ifadeler sağlanır (Chen ve Ark., 2021):

$$A^\dagger = U \begin{bmatrix} T^* \Delta & -T^* \Delta S N^\dagger \\ (I_{n-t} - N^\dagger N) S^* \Delta & N^\dagger - (I_{n-t} - N^\dagger N) S^* \Delta S N^\dagger \end{bmatrix} U^*, \quad (3.56)$$

$$A^D = U \begin{bmatrix} T^{-1} & T^{-k-1} \tilde{T} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*, \quad (3.57)$$

$$A^{D,\dagger} = U \begin{bmatrix} T^{-1} & T^{-k-1} \tilde{T} N N^\dagger \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*, \quad (3.58)$$

$$A^{\dagger,D} = U \begin{bmatrix} T^* \Delta & T^* \Delta T^{-k} \tilde{T} \\ (I_{n-t} - N^\dagger N) S^* \Delta & N^\dagger - (I_{n-t} - N^\dagger N) S^* \Delta T^{-k} \tilde{T} \end{bmatrix} U^*, \quad (3.59)$$

$$A^{C,\dagger} = U \begin{bmatrix} T^* \Delta & T^* \Delta T^{-k} \tilde{T} N N^\dagger \\ (I_{n-t} - N^\dagger N) S^* \Delta & N^\dagger - (I_{n-t} - N^\dagger N) S^* \Delta T^{-k} \tilde{T} N N^\dagger \end{bmatrix} U^*, \quad (3.60)$$

$$A^\odot = U \begin{bmatrix} T^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*, \quad (3.61)$$

$$A^\ominus = U \begin{bmatrix} T^{-1} & T^{-2} S^2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*. \quad (3.62)$$

Teorem 3.13 de $A^{C,\dagger}$ inversinin bir EP- matris olması ile ilgili bazı gerek ve yeter şartlar verilmişti. Bu şartlara ilave olarak aşağıda bazı sonuçlar verilecektir.

Teorem 3.17 $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi (3.2) Hartwig-Spindelböck Ayrışımı formunda verilmiş olsun. Bu takdirde $A^{C,\dagger}$ matrisinin bir EP-matris olabilmesi için gerek ve yeter şart aşağıdaki şartların sağlanmasıdır (Chen ve Ark., 2021):

$$(1) K^* K (\Sigma K)^D \in \mathbb{C}_r^{EP},$$

$$(2) L^* K (\Sigma K)^D = 0.$$

İspat. Bu durumda $A^{C,\dagger}$ matrisinin bir EP-matris olabilmesi için gerek ve yeter şart $\Re(A^{C,\dagger}) = \Re((A^{C,\dagger})^*)$ ranj uzayı eşitliğinin sağlanmasıdır. Diğer taraftan (3.16)

eşitliğinden $\Re(A^{C,\dagger}) = \Re((A^{C,\dagger})^*)$ olabilmesi için $L^*K(\Sigma K)^D = 0$ ve $K^*K(\Sigma K)^D \in \mathbb{C}_n^{EP}$ olmasının gerek ve yeter şart olduğu kolayca görülebilir. Bu ise ispatı tamamlar.

Sonuç 3.2 $\in \mathbb{C}_n^n$ matrisi (3.2) Hartwig-Spindelböck Ayırışımı formunda verilmiş olsun. Eğer $L^*K(\Sigma K)^D = 0$ ise bu durumda aşağıdaki eşitlikler sağlanır (Chen ve Ark., 2021):

$$(1) \quad KK^*K(\Sigma K)^D = K(\Sigma K)^D,$$

$$(2) \quad (K^*K(\Sigma K)^D)^\dagger = (K(\Sigma K)^D)^\dagger K.$$

İspat. (1): $L^*K(\Sigma K)^D = 0$ eşitliği soldan L ile çarpılırsa $LL^*K(\Sigma K)^D = 0$ elde edilir. Öte yandan $KK^* + LL^* = I_r$ eşitliği verildiğinden $(I_r - K^*K)K(\Sigma K)^D = 0$ eşitliği yani $K(\Sigma K)^D = KK^*K(\Sigma K)^D$ eşitliği elde edilmiş olur.

(2): (1). şıkkı ve Moore-Penrose invers tanımı dikkate alınır

$$\begin{aligned} K^*K(\Sigma K)^D(K(\Sigma K)^D)^\dagger KK^*K(\Sigma K)^D &= K^*K(\Sigma K)^D(K(\Sigma K)^D)^\dagger K(\Sigma K)^D \\ &= K^*K(\Sigma K)^D, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (K(\Sigma K)^D)^\dagger KK^*K(\Sigma K)^D(K(\Sigma K)^D)^\dagger K &= (K(\Sigma K)^D)^\dagger K(\Sigma K)^D(K(\Sigma K)^D)^\dagger K \\ &= (K(\Sigma K)^D)^\dagger K, \end{aligned}$$

$$(K^*K(\Sigma K)^D(K(\Sigma K)^D)^\dagger K)^* = K^*K(\Sigma K)^D(K(\Sigma K)^D)^\dagger K$$

ve

$$\begin{aligned} ((K(\Sigma K)^D)^\dagger KK^*K(\Sigma K)^D)^* &= (K(\Sigma K)^D)^\dagger K(\Sigma K)^D \\ &= (K(\Sigma K)^D)^\dagger KK^*K(\Sigma K)^D \end{aligned}$$

eşitliklerinin sağladığı kolayca görülebilir. Böylece $(K^*K(\Sigma K)^D)^\dagger = (K(\Sigma K)^D)^\dagger K$ olduğu görülür ki bu da ispatı tamamlar.

Sonuç 3.3 $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi (3.2) Hartwig-Spindelböck Ayırışımı formunda verilmiş olsun. Bu durumda $A^{C,\dagger}$ matrisinin bir EP-matris olabilmesi için gerek ve yeter şart aşağıdaki şartların sağlanmasıdır (Chen ve Ark., 2021):

$$(1) \quad K^*\Delta K = (K(\Sigma K)^D)^\dagger K(\Sigma K)^D,$$

$$(2) \quad \Delta L = 0,$$

burada $\Delta = K(\Sigma K)^D(K(\Sigma K)^D)^\dagger$ dir.

İspat. Eğer Sonuç 3.3 ün şartları sağlanıyorsa $\Delta L = 0$ şartının eşlenik transpozu alınarak $L^*K(\Sigma K)^D(K(\Sigma K)^D)^\dagger = 0$ eşitliği elde edilir. Bu durumda Sonuç 3.2 ye göre $K(\Sigma K)^D = KK^*K(\Sigma K)^D$ ve $(K^*K(\Sigma K)^D)^\dagger = (K(\Sigma K)^D)^\dagger K$ eşitlikleri elde edilir. Bu nedenle (1) den $K^*K(\Sigma K)^D(K^*K(\Sigma K)^D)^\dagger = (K^*K(\Sigma K)^D)^\dagger K^*K(\Sigma K)^D$ olduğu yani $K^*K(\Sigma K)^D \in \mathbb{C}_r^{EP}$ olduğu elde edilmiş olur. Tersine olarak $L^*K(\Sigma K)^D = 0$ eşitliği dikkate alınırsa Sonuç 3.2 deki (1) ve (2) durumlarının sağlandığı görülebilir. Buradan $L^*K(\Sigma K)^D = 0$ ifadesi sağdan $(K(\Sigma K)^D)^\dagger$ çarpılır ve daha sonra elde edilen ifadenin eşlenik transpozu alınırsa $K(\Sigma K)^D(K(\Sigma K)^D)^\dagger L = 0$ eşitliği elde edilir ve böylece de ispat tamamlanmış olur.

Yukarıda elde edilen sonuçlar kullanılarak $A^{C,\dagger} \in \mathbb{C}_n^{EP}$ olması için bazı denk şartlar aşağıdaki teoremde verilmiştir.

Teorem 3.18 $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi (3.2) Hartwig-Spindelböck Ayrışımı formunda verilmiş olsun. Bu durumda aşağıdaki şartlar denktir (Chen ve Ark., 2021):

- (1) $A^{C,\dagger} \in \mathbb{C}_n^{EP}$ dir.
- (2) $K^*K(\Sigma K)^D = (K(\Sigma K)^D)^\dagger K(\Sigma K)^D K^*K(\Sigma K)^D$, $L^*K(\Sigma K)^D = 0$.
- (3) $(K(\Sigma K)^D)^\dagger K = (K(\Sigma K)^D)^\dagger K(K(\Sigma K)^D)^\dagger K(\Sigma K)^D$, $(K(\Sigma K)^D)^\dagger L = 0$.

İspat. (1) $\Rightarrow$ (2): $A^{C,\dagger} \in \mathbb{C}_n^{EP}$ olduğundan Sonuç 3.2 nin şartları sağlanır. Bu durumda

$$\begin{aligned} (K(\Sigma K)^D)^\dagger K(\Sigma K)^D K^*K(\Sigma K)^D &= (K(\Sigma K)^D)^\dagger K K^*K(\Sigma K)^D K^*K(\Sigma K)^D \\ &= (K^*K(\Sigma K)^D)^\dagger K^*K(\Sigma K)^D K^*K(\Sigma K)^D \\ &= K^*K(\Sigma K)^D (K^*K(\Sigma K)^D)^\dagger K^*K(\Sigma K)^D \\ &= K^*K(\Sigma K)^D \end{aligned}$$

olduğu görülür.

(2) $\Rightarrow$ (3): $L^*K(\Sigma K)^D = 0$ eşitliğinin $(K(\Sigma K)^D)^\dagger L = 0$ eşitliğine denk olduğu kolayca gösterilebilir. Ayrıca Sonuç 3.2 den $(K^*K(\Sigma K)^D)^\dagger = (K(\Sigma K)^D)^\dagger K$ eşitliği yazılabilir. $(K(\Sigma K)^D)^\dagger K(\Sigma K)^D K^*K(\Sigma K)^D = K^*K(\Sigma K)^D$ olduğundan

$$\begin{aligned} K^*K(\Sigma K)^D (K^*K(\Sigma K)^D)^\dagger (K^*K(\Sigma K)^D)^\dagger K(\Sigma K)^D K^*K(\Sigma K)^D \\ = (K(\Sigma K)^D)^\dagger K(\Sigma K)^D K^*K(\Sigma K)^D, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (K(\Sigma K)^D)^\dagger K(\Sigma K)^D K^* K(\Sigma K)^D (K(\Sigma K)^D)^* K(K(\Sigma K)^D)^\dagger K(\Sigma K)^D \\
& = K^* K(\Sigma K)^D (K(\Sigma K)^D)^* K(K(\Sigma K)^D)^\dagger K(\Sigma K)^D,
\end{aligned}$$

olduğu kolayca gösterilebilir. Dolayısıyla

$$\Re((K(\Sigma K)^D)^\dagger K(\Sigma K)^D K^* K(\Sigma K)^D) \subseteq \Re(K^* K(\Sigma K)^D)$$

ve

$$\Re(K^* K(\Sigma K)^D (K(\Sigma K)^D)^* K(K(\Sigma K)^D)^\dagger K(\Sigma K)^D) \subseteq \Re((K(\Sigma K)^D)^\dagger K(\Sigma K)^D)$$

içermeleri yazılabilir. Bunun sonucu olarak Lemma 3.7 ye göre

$$((K(\Sigma K)^D)^\dagger K(\Sigma K)^D K^* K(\Sigma K)^D)^\dagger = K(K(\Sigma K)^D)^\dagger K(\Sigma K)^D$$

olduğu kolayca gösterilebilir.

(3) $\Rightarrow$ (1): $(K(\Sigma K)^D)^\dagger L = 0$ eşitliğinin $L^* K(\Sigma K)^D = 0$ eşitliğine denk olduğu kolayca gösterilebilir. Bu nedenle Sonuç 3.2 nin koşulları sağlanır. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}
(K(\Sigma K)^D)^\dagger K &= (K(\Sigma K)^D)^\dagger K(K(\Sigma K)^D)^\dagger K(\Sigma K)^D \\
&= (K(\Sigma K)^D)^\dagger K(K(\Sigma K)^D)^\dagger K K^* K(\Sigma K)^D \\
&= (K^* K(\Sigma K)^D)^\dagger (K^* K(\Sigma K)^D)^\dagger K^* K(\Sigma K)^D
\end{aligned}$$

olduğu kolayca gösterilebilir. Eğer $\tilde{K} = K^* K(\Sigma K)^D$ alınırsa bu takdirde $\tilde{K}^\dagger = \tilde{K}^\dagger \tilde{K}^\dagger \tilde{K}$ eşitliği yazılabilir. Bu durumda eşitliğin her iki yanını soldan $\tilde{K}^* \tilde{K}$ ile ve sağdan $\tilde{K}$ ile çarpılır ve $\tilde{K}^* \tilde{K} \tilde{K}^\dagger = \tilde{K}^*$ eşitliği dikkate alınırsa $\tilde{K}^* \tilde{K} = \tilde{K}^* \tilde{K}^\dagger \tilde{K}^2$ eşitliği yazılabilir. Böylece bilinen rank özdeşliklerinden

$$r[\tilde{K}^* \tilde{K} - \tilde{K}^* \tilde{K}^\dagger \tilde{K}^2] = r \begin{bmatrix} \tilde{K}^* \tilde{K} \tilde{K}^* & \tilde{K}^* \tilde{K}^2 \\ \tilde{K}^* \tilde{K}^* & \tilde{K}^* \tilde{K} \end{bmatrix} - r(\tilde{K}) \quad (3.63)$$

rank eşitliği yazılabilir. Öte yandan $(\tilde{K}^*)^\dagger \tilde{K}^* \tilde{K} = \tilde{K}$ eşitliği dikkate alınırsa

$$r \begin{bmatrix} \tilde{K} \tilde{K}^* & \tilde{K}^2 \\ \tilde{K}^* \tilde{K}^* & \tilde{K}^* \tilde{K} \end{bmatrix} = r \left(\begin{bmatrix} (\tilde{K}^*)^\dagger & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{K}^* \tilde{K} \tilde{K}^* & \tilde{K}^* \tilde{K}^2 \\ \tilde{K}^* \tilde{K}^* & \tilde{K}^* \tilde{K} \end{bmatrix} \right) \leq r \begin{bmatrix} \tilde{K}^* \tilde{K} \tilde{K}^* & \tilde{K}^* \tilde{K}^2 \\ \tilde{K}^* \tilde{K}^* & \tilde{K}^* \tilde{K} \end{bmatrix},$$

ve

$$r \begin{bmatrix} \tilde{K}^* \tilde{K} \tilde{K}^* & \tilde{K}^* \tilde{K}^2 \\ \tilde{K}^* \tilde{K}^* & \tilde{K}^* \tilde{K} \end{bmatrix} = r \left(\begin{bmatrix} \tilde{K}^* & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{K}^* & \tilde{K}^2 \\ \tilde{K}^* \tilde{K}^* & \tilde{K}^* \tilde{K} \end{bmatrix} \right) \leq r \begin{bmatrix} \tilde{K} \tilde{K}^* & \tilde{K}^2 \\ \tilde{K}^* \tilde{K}^* & \tilde{K}^* \tilde{K} \end{bmatrix}$$

rank eşitsizlikleri yazılabilir ki buradan da

$$r \begin{bmatrix} \tilde{K}^* \tilde{K} \tilde{K}^* & \tilde{K}^* \tilde{K}^2 \\ \tilde{K}^* \tilde{K}^* & \tilde{K}^* \tilde{K} \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} \tilde{K} \tilde{K}^* & \tilde{K}^2 \\ \tilde{K}^* \tilde{K}^* & \tilde{K}^* \tilde{K} \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

eşitliği elde edilir. Böylece (3.63) ve (3.64) eşitliklerinin sonucu olarak

$$\begin{aligned} r[\tilde{K}^* \tilde{K} - \tilde{K}^* \tilde{K}^\dagger \tilde{K}^2] &= r \begin{bmatrix} \tilde{K}^* \tilde{K} \tilde{K}^* & \tilde{K}^* \tilde{K}^2 \\ \tilde{K}^* \tilde{K}^* & \tilde{K}^* \tilde{K} \end{bmatrix} - r(\tilde{K}) \\ &= r \left(\begin{bmatrix} \tilde{K} \\ \tilde{K}^* \end{bmatrix} [\tilde{K}^* \ \tilde{K}] \right) - r(\tilde{K}) \\ &= r([\tilde{K}^* \ \tilde{K}]^* [\tilde{K}^* \ \tilde{K}]) - r(\tilde{K}) \\ &= r[\tilde{K}^* \ \tilde{K}] - r(\tilde{K}) \end{aligned}$$

rank eşitsizlikleri yazılabilir. Bunun sonucu olarak $\tilde{K}^* \tilde{K} = \tilde{K}^* \tilde{K}^\dagger \tilde{K}^2$ matris eşitliği $r[\tilde{K}^* \ \tilde{K}] = r(\tilde{K})$ rank eşitliğine denk olacaktır. Bu son eşitlik $\tilde{K} = K^* K (\Sigma K)^D \in \mathbb{C}_r^{EP}$ olduğunu gösterir. Buradan $A^{C,\dagger} \in \mathbb{C}_n^{EP}$ olduğu gösterilmiş olur ve böylece teoremin ispatını tamamlanır.

Lemma 3.6'nın sonuçları kullanılarak $\Re(A^{C,\dagger}) = \Re(A^\dagger A^k)$ ve $\mathcal{N}(A^{C,\dagger}) = \mathcal{N}(A^k A^\dagger)$ olduğu görülebilir. Aşağıdaki teoremlerde bir matrisin CMP inversinin bazı farklı özellikleri ve karakterizasyonları verilecektir.

Teorem 3.19 $A, X \in \mathbb{C}_n^n$ matrisleri verilsin ve $\text{ind}(A) = k$ ve $A_1 = AA^D A$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir (Chen ve Ark., 2021):

- (1) $X = A^{C,\dagger}$;
- (2) $\Re(X) = \Re(A^\dagger A^k), AX = A_1 A^\dagger$;
- (3) $\Re(X) = \Re(A^\dagger A^k), A^k X = A^k A^\dagger$;
- (4) $\Re(X) = \Re(A^\dagger A^k), A^D AX = A^{D,\dagger}$.

İspat. (1) $\Rightarrow$ (2): $A^{C,\dagger}$ nin tanımı ve Lemma 3.6 dikkate alınırsa istenilen elde edilir.

(2) $\Rightarrow$ (3): $AX = A_1 A^\dagger$ şartı yardımıyla $A^k X = A^k A^\dagger$ eşitliği kolayca görülebilir.

(3) $\Leftrightarrow$ (4): $A^D AX = A^{D,\dagger}$ eşitliği $A^k X = A^k A^\dagger$ eşitliğine denk olup iddia gerçekleşir.

(4) $\Rightarrow$ (1): $A^D AX = A^{D,\dagger}$ olduğundan $\mathcal{N}(X) \subseteq \mathcal{N}(A^{D,\dagger}) = (A^k A^\dagger)$ içermesi kolayca yazılabilir. Diğer taraftan eğer $\Re(X) = \Re(A^\dagger A^k)$ eşitliği dikkate alınırsa bu takdirde $r(X) = r(A^\dagger A^k) = r(A^k) = r(A^k A^\dagger)$ eşitlikleri yazılabilir. Dolayısıyla $\mathcal{N}(X) =$

$\mathcal{N}(A^k A^\dagger) = \mathcal{N}(A^{D,\dagger})$ olacağından keyfi bir $T \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi için $X = T A^{D,\dagger}$ elde edilir. Eğer $A^D A X = A^{D,\dagger}$ eşitliği soldan T matrisi ile çarpılırsa $X A X = X$ olduğu görülür. Böylece lemma 3.6 ya göre $X = A_{\mathfrak{R}(A^\dagger A^k), \mathcal{N}(A^\dagger A^k)}^{(2),\dagger} = A^{C,\dagger}$ yazılabilir. Bu ise teoremin ispatını tamamlar.

Uyarı 3.5 Teorem 3.19 da verilen $\mathfrak{R}(X) = \mathfrak{R}(A^\dagger A^k)$ şartı yerine $\mathfrak{R}(X) \subseteq \mathfrak{R}(A^\dagger A^k)$ içermesi de alınabilir.

Teorem 3.20 $A, X \in \mathbb{C}_n^n$ matrisleri verilsin ve $\text{ind}(A) = k$ ve $A_1 = A A^D A$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir (Chen ve Ark., 2021):

- (1) $X = A^{C,\dagger}$;
- (2) $\mathcal{N}(X) = \mathcal{N}(A^k A^\dagger), X A = A^\dagger A_1$;
- (3) $\mathcal{N}(X) = \mathcal{N}(A^k A^\dagger), X A^k = A^\dagger A^k$;
- (4) $\mathcal{N}(X) = \mathcal{N}(A^k A^\dagger), X A A^D = A^{+,D}$.

İspat. (1) $\Rightarrow$ (2): $A^{C,\dagger}$ nin tanımı ve Lemma 3.6 dikkate alınırsa istenilen elde edilir.

(2) $\Rightarrow$ (3): $X A = A^\dagger A_1$ şartı yardımıyla $X A^k = A^\dagger A^k$ eşitliği kolayca görülebilir.

(3) $\Leftrightarrow$ (4): $X A A^D = A^{+,D}$ eşitliği $X A^k = A^\dagger A^k$ eşitliğine denk olup iddia gerçekleşir.

(4) $\Rightarrow$ (1): $\mathcal{N}(X) = \mathcal{N}(A^k A^\dagger) = \mathcal{N}(A^{D,\dagger}) = \mathcal{N}(A A^{D,\dagger})$ ve $X A A^D = A^{+,D}$ eşitlikleri dikkate alınırsa $X = X A A^{D,\dagger} = X A A^D A A^\dagger = A^{+,D} A A^\dagger = A^{C,\dagger}$ eşitlikleri yazılabilir. Böylece de teoremin ispatı tamamlanır.

Uyarı 3.6 Teorem 3.20 de verilen $\mathcal{N}(X) = \mathcal{N}(A^k A^\dagger)$ şartı yerine $\mathcal{N}(A^k A^\dagger) \subseteq \mathfrak{R}(X)$ içermesi de alınabilir.

$A^{C,\dagger} A A^{C,\dagger} = A^{C,\dagger}$ gerçeği dikkate alınarak matrislerin CMP inverslerinin bazı farklı karakterizasyonları aşağıdaki teoremlerde verilmektedir.

Teorem 3.21 $A, X \in \mathbb{C}_n^n$ matrisleri verilsin ve $\text{ind}(A) = k$ ve $A_1 = A A^D A$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir (Chen ve Ark., 2021):

- (1) $X = A^{C,\dagger}$;
- (2) $\mathfrak{R}(X) = \mathfrak{R}(A^\dagger A^k), \mathcal{N}(X) = \mathcal{N}(A^k A^\dagger), X A X = X$;

$$(3) \mathfrak{R}(XA) = \mathfrak{R}(A^\dagger A^k), AX = A_1 A^\dagger, XAX = X;$$

$$(4) XA^k = A^\dagger A^k, AX = A_1 A^\dagger, XAX = X;$$

$$(5) A^k X = A^k A^\dagger, XA = A^\dagger A_1, XAX = X;$$

$$(6) \mathcal{N}(AX) = \mathcal{N}(A^k A^\dagger), XA = A^\dagger A_1, XAX = X.$$

İspat. (1) $\Rightarrow$ (2): $A^{C,\dagger}$ nin tanımı ve Lemma 3.6 dikkate alınırsa istenilen elde edilir.

(2) $\Rightarrow$ (3): Eğer $XAX = X$ ve $\mathfrak{R}(X) = \mathfrak{R}(A^\dagger A^k)$ eşitlikleri dikkate alınırsa $\mathfrak{R}(XA) = \mathfrak{R}(A^\dagger A^k)$ ve $\mathfrak{R}(AX) = A\mathfrak{R}(X) = A\mathfrak{R}(A^\dagger A^k) = \mathfrak{R}(A^k) = \mathfrak{R}(A_1 A^k)$ ve $\mathcal{N}(AX) = \mathcal{N}(X) = \mathcal{N}(A^k A^\dagger) = \mathcal{N}(A_1 A^\dagger)$ yazılabilir. Ayrıca $XAX = X$ olup $A_1 A^\dagger$ idempotent olduğundan $AX = A_1 A^\dagger$ eşitliği elde edilir.

(3) $\Rightarrow$ (4): Eğer $XAX = X$ ve $\mathfrak{R}(X) = \mathfrak{R}(A^\dagger A^k)$ eşitlikleri dikkate alınırsa

$$\mathfrak{R}(X) = \mathfrak{R}(A^\dagger A^k) = \mathfrak{R}(A^{\dagger,D}) = \mathfrak{R}(A^{\dagger,D} A)$$

ve dolayısıyla $A^{\dagger,D} AX = X$ yazılabilir. Ayrıca

$$XA^k = A^{\dagger,D} AXA^k = A^{\dagger,D} A_1 A^\dagger A^k = A^\dagger A^k$$

eşitliği gerçekleşir.

(4) $\Rightarrow$ (1): Verilen şartlardan ve $A^D A$ idempotent olduğundan

$$X = XAA^D AA^\dagger = XA^k (A^D)^k AA^\dagger = A^\dagger A^k (A^D)^k AA^\dagger = A^\dagger AA^D AA^\dagger = A^{C,\dagger}$$

eşitliğ yazılabilir.

(1) $\Rightarrow$ (5): $A^{C,\dagger}$ nin tanımı dikkate alınırsa istenilen elde edilir.

(5) $\Rightarrow$ (6): Eğer verilen şartlar dikkate alınırsa bu takdirde

$$r(X) = r(XA) = r(A^\dagger A_1) = r(A^k) = r(A^k A^\dagger)$$

rank eşitlikleri yazılabilir. Dolayısıyla

$$\mathcal{N}(X) \subseteq \mathcal{N}(AX) \subseteq \mathcal{N}(A^k X) = \mathcal{N}(A^k A^\dagger)$$

içermesinden $\mathcal{N}(AX) = \mathcal{N}(A^k A^\dagger)$ olduğu görülür.

(6) $\Rightarrow$ (1): Eğer verilen şartlar dikkate alınırsa bu takdirde

$$X = A^\dagger AA^D AX = A^\dagger AA^D AA^\dagger AX = A^{C,\dagger} AX = A^{C,\dagger} P_{\mathfrak{R}(AX), \mathcal{N}(AX)} = A^{C,\dagger}$$

eşitliği yazılabilir ve böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.22 $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi verilsin ve $\text{ind}(A) = k$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler sağlanır (Chen ve Ark., 2021):

$$(1) AA^{C,\dagger} = P_{\mathfrak{R}(A^k), \mathcal{N}(A^k A^\dagger)},$$

$$(2) A^{C,\dagger} A = P_{\mathfrak{R}(A^\dagger A^k), \mathcal{N}(A^k)}.$$

İspat. (1): bu durum Lemma 3.6'nın bir sonucu olarak kolayca görülebilir.

(2): $A^{C,\dagger} AA^{C,\dagger} = A^{C,\dagger}$ olduğundan $A^{C,\dagger} A$ matrisi idempotent olacaktır. Bu durumda Lemma 3.6 dikkate alınrsa $\mathfrak{R}(A^{C,\dagger} A) = \mathfrak{R}(A^{C,\dagger}) = \mathfrak{R}(A^\dagger A^k)$ eşitliği elde edilir. Ayrıca eğer $A^{C,\dagger} A = A^\dagger AA^D A$ ve $A^D = A^D AA^D = A^D AA^\dagger AA^D$ eşitlikleri dikkate alınrsa bu takdirde $\mathcal{N}(A^{C,\dagger} A) \subseteq \mathcal{N}(A^D AA^\dagger AA^D A) = \mathcal{N}(A^D A) \subseteq \mathcal{N}(A^{C,\dagger} A)$ olduğu görülür ve böylece

$$\mathcal{N}(A^{C,\dagger} A) = \mathcal{N}(A^D A) = \mathcal{N}(A^D) = \mathcal{N}(A^k)$$

eşitliği elde edilir ki bu da teoremin ispatını tamamlar.

Teorem 3.23 $A, X \in \mathbb{C}_n^n$ matrisleri verilsin ve $\text{ind}(A) = k$ olsun. Bu takdirde A matrisinin $A^{C,\dagger}$ ile verilen CMP inversi

$$XA = P_{\mathfrak{R}(A^\dagger A^k), \mathcal{N}(A^k)} \text{ ve } \mathcal{N}(A^*) \subseteq \mathcal{N}(X) \quad (3.65)$$

koşullarını sağlayan tek X matrisidir (Chen ve Ark., 2021):

İspat. Teorem 3.22 den $A^{C,\dagger}$ matrisinin $XA = P_{\mathfrak{R}(A^\dagger A^k), \mathcal{N}(A^k)}$ eşitliğini sağladığı görülür. Ayrıca $\mathcal{N}(A^*) = \mathcal{N}(A^\dagger) \subseteq \mathcal{N}(A^\dagger AA^D AA^\dagger) = \mathcal{N}(A^{C,\dagger})$ olduğu görülür ve geriye sadece tekliğin gösterilmesi kalır. Farz edelim ki X_1 ve X_2 matrisleri (3.65) şartlarını sağlasın. Bu takdirde $X_1 A = X_2 A = P_{\mathfrak{R}(A^\dagger A^k), \mathcal{N}(A^k)}$ olup $\mathcal{N}(A^*) \subseteq \mathcal{N}(X_1)$ ve $\mathcal{N}(A^*) \subseteq \mathcal{N}(X_2)$ içermeleri sağlanır. Bu durumda $(X_1 - X_2)A = 0$ olacağından $A^*(X_1^* - X_2^*) = 0$ elde edilir ki bu da $\mathfrak{R}(X_1^* - X_2^*) \subseteq \mathcal{N}(A^*)$ olduğunu gösterir. Diğer taraftan $i = 1, 2$ olmak üzere $\mathcal{N}(A^*) \subseteq \mathcal{N}(X_i)$ ve $\mathfrak{R}(X_i^*) \subseteq \mathfrak{R}(A)$ olacağından

$$\mathfrak{R}(X_1^* - X_2^*) \subseteq \mathfrak{R}(A) \cap \mathcal{N}(A^*) = \mathfrak{R}(A) \cap \mathfrak{R}(A)^\perp = \{0\}$$

elde edilir ve böylece $X_1^* = X_2^*$ yani $X_1 = X_2$ olduğu gösterilmiş olur. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

Uyarı 3.7 Teorem 3.22 ve Teorem 3.23 den $X = A^{C,\dagger}$ olduğunda $AX = P_{\mathfrak{R}(A^k), \mathcal{N}(A^k A^\dagger)}$ ve $XA = P_{\mathfrak{R}(A^\dagger A^k), \mathcal{N}(A^k)}$ eşitliklerinin sağlandığı görülmektedir. Bununla beraber bir X matrisi için $AX = P_{\mathfrak{R}(A^k), \mathcal{N}(A^k A^\dagger)}$ ve $XA = P_{\mathfrak{R}(A^\dagger A^k), \mathcal{N}(A^k)}$ eşitliklerinin sağlanması $X = A^{C,\dagger}$ olmasını gerektirmez. Bunu açıklamak için aşağıdaki örnek verilebilir.

Örnek 3.1 A ve X matrisleri $A = X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ olarak alınsın. Bu takdirde

$$A^{C,\dagger} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olduğu kolayca görülebilir. Öte yandan $\text{ind}(A) = 2$ olacaktır. Ayrıca X matrisi için $AX = P_{\mathfrak{R}(A^2), \mathcal{N}(A^2 A^\dagger)}$ ve $XA = P_{\mathfrak{R}(A^\dagger A^2), \mathcal{N}(A^2)}$ eşitlikleri sağlanır. Bununla beraber $A^{C,\dagger} \neq X$ olduğu da açıktır.

Teorem 3.24 $A, X \in \mathbb{C}_n^n$ matrisleri verilsin ve $\text{ind}(A) = k$ olsun. Bu takdirde $X = A^{C,\dagger}$ olması için gerek ve yeter şart

$$AX = P_{\mathfrak{R}(A^k), \mathcal{N}(A^k A^\dagger)}, XA = P_{\mathfrak{R}(A^\dagger A^k), \mathcal{N}(A^k)} \text{ ve } r(A^k) = r(X)$$

olmasıdır (Chen ve Ark., 2021).

İspat. Eğer $X = A^{C,\dagger}$ ise bu takdirde Teorem 3.22 den istenilen sonucun elde edildiği kolayca görülebilir. Tersine olarak eğer

$$XA = P_{\mathfrak{R}(A^\dagger A^k), \mathcal{N}(A^k)} \text{ ve } P_{\mathfrak{R}(A^\dagger A^k), \mathcal{N}(A^k)} = A^{C,\dagger} A = A^\dagger A_1$$

ise bu durumda $XA = A^\dagger A_1$ yazılabilir. Öte yandan $\mathcal{N}(X) \subseteq \mathcal{N}(AX) = \mathcal{N}(A^k A^\dagger)$ içermesi yazılabilir. Ancak $r(X) = r(A^k) = r(A^k A^\dagger)$ olacağından $\mathcal{N}(X) = \mathcal{N}(A^k A^\dagger)$ elde edilir. Bu nedenle Teorem 3.20 nin (2) şıkkından $X = A^{C,\dagger}$ olduğu görülür ve böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 3.4 $A, X \in \mathbb{C}_n^n$ matrisleri verilsin ve $\text{ind}(A) = k$ olsun. Bu takdirde $X = A^{C,\dagger}$ olması için gerek ve yeter koşul

$$AX = P_{\mathfrak{R}(A^k), \mathcal{N}(A^k A^\dagger)}, XA = P_{\mathfrak{R}(A^\dagger A^k), \mathcal{N}(A^k)} \text{ ve } XAX = X$$

olmasıdır (Chen ve Ark., 2021).

İspat. Eğer $X = A^{C,\dagger}$ ise bu takdirde $A^{C,\dagger}$ nin tanımı ve Teorem 3.22 den istenilen sonuç elde edilir. Tersine olarak $AX = P_{\mathfrak{R}(A^k), \mathcal{N}(A^k A^\dagger)}$ ve $XAX = X$ ise $r(X) = r(AX) = \dim \mathfrak{R}(A^k) = r(A^k)$ olacaktır. Bu nedenle Teorem 3.24 den direkt olarak $X = A^{C,\dagger}$ olduğu elde edilir.

Teorem 3.25 $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi verilsin ve $\text{ind}(A) = k$ ve $r(A^k) = t$ olsun. Bu takdirde

$$A^k A^\dagger P = 0, PA^k = 0, P^2 = P, r(P) = n - t, \quad (3.66)$$

olacak şekilde bir tek P matrisi;

$$QA^\dagger A^k = 0, A^k Q = 0, Q^2 = Q, r(Q) = n - t, \quad (3.67)$$

olacak şekilde bir tek Q matrisi;

$$r \begin{pmatrix} A & I - P \\ I - Q & Z \end{pmatrix} = r(A), \quad (3.68)$$

olacak şekilde bir tek Z matrisi mevcuttur. Bu durumda Z matrisi $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisinin CMP inversidir. Ayrıca

$$P = I - AA^{C,\dagger} \text{ ve } Q = I - A^{C,\dagger}A \quad (3.69)$$

dir (Chen ve Ark., 2021).

İspat. (3.66) in temelinde $A^k A^\dagger P = 0$ ifadesi $A^k A^\dagger (I - P) = A^k A^\dagger$ ifadesine denktir. Bu ise $\mathcal{N}(I - P) \subseteq \mathcal{N}(A^k A^\dagger)$ olduğunu gösterir. Ayrıca $PA^k = 0$ ve $(I - P)A^k = A^k$ denkliğinden $\mathfrak{R}(A^k) \subseteq \mathfrak{R}(I - P)$ olduğu elde edilir. Benzer şekilde $r(P) = n - t$ eşitliği $r(I - P) = t = r(A^k A^\dagger)$ ifadesine denk olacaktır. Böylece $\mathcal{N}(I - P) = \mathcal{N}(A^k A^\dagger)$ ve $\mathfrak{R}(A^k) = \mathfrak{R}(I - P)$ eşitlikleri sağlanır. Öte yandan $P^2 = P$ olduğundan $I - P$ matrisi idempotenttir. Bu nedenle Teorem 3.22 den $I - P = AA^{C,\dagger}$ yazılabilir ve dolayısıyla $P = I - AA^{C,\dagger}$ olduğu gösterilmiş olur. Aynı yöntemle (3.67) özelliği ve $Q = I - A^{C,\dagger}A$ olduğu da gösterilebilir. Sonuç olarak $P = I - AA^{C,\dagger}$ ve $Q = I - A^{C,\dagger}A$ olduğundan

$$\begin{pmatrix} A & I - P \\ I - Q & Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & AA^{C,\dagger} \\ A^{C,\dagger}A & Z \end{pmatrix}$$

yazılabilir. Öte yandan (3.68) ifadesinden $r(Z - A^{C,\dagger}AA^{C,\dagger}) = 0$ olduğu elde edilir ki bu da $Z = A^{C,\dagger}AA^{C,\dagger} = A^{C,\dagger}$ olduğunu gösterir ve böylece de ispat tamamlanır.

$P = I - AA^{C,\dagger}$ ve $Q = I - A^{C,\dagger}A$ izdüşümleri kullanılarak $A^{C,\dagger}$ CMP inversi için aşağıdaki ifadeler verilebilir.

Teorem 3.26 $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi verilsin ve $\text{ind}(A) = k$, $a \neq 0$, $P = I - AA^{C,\dagger}$ ve $Q = I - A^{C,\dagger}A$ olsun. Bu takdirde $A + aP$ ve $A + aQ$ matrisleri tersinirdir. Ayrıca aşağıdaki ifadeler sağlanır (Chen ve Ark., 2021):

$$(1) A^{C,\dagger} = (I - Q)(A + aP)^{-1},$$

$$(2) A^{C,\dagger} = (A + aQ)^{-1}(I - P).$$

İspat. (1). Bu durumda $A + aP$ matrisinin tersinir olduğunu göstermek için $\alpha_1 \in \mathbb{C}^t$ ve $\alpha \in \mathcal{N}(A + aP)$ olmak üzere $\alpha = U \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^t$ olduğunu varsayalım. Bu takdirde $A\alpha = -aP\alpha$ olacaktır. Bunun sonucu olarak $\tilde{T} = \sum_{j=0}^{k-1} T^j S N^{k-1-j}$ olmak üzere

$$\begin{pmatrix} T & S \\ 0 & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = -a \begin{pmatrix} 0 & -T^{-k} \tilde{T} N N^\dagger \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

yazılabilir. Böylece $a \neq 0$, N matrisi nilpotent ve T matrisi nonsingüler olduğundan $\alpha_2 = 0$ ve $\alpha_1 = 0$ elde edilir. Dolayısıyla $A + aP$ matrisi tersinir olacaktır. Öte yandan $A^{C,\dagger}(A + aP) = A^{C,\dagger}[A + a(I - AA^{C,\dagger})] = A^{C,\dagger}A = I - Q$ olacağından $A^{C,\dagger} = (I - Q)(A + aP)^{-1}$ olduğu gösterilmiş olur.

(2). Bu durumda $A + aP$ matrisinin tersinir olduğunu göstermek için $\beta_1 \in \mathbb{C}^t$ ve $\beta \in \mathcal{N}(A + aQ) = \mathcal{N}(A^2 + aAQ)$ olmak üzere $\beta = U \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^t$ olduğunu varsayalım. Bu takdirde $A^2\beta = -a(A - AA^{C,\dagger}A)\beta$ eşitliği elde edilir. Bunun sonucu olarak da $\tilde{T} = \sum_{j=0}^{k-1} T^j S N^{k-1-j}$ olmak üzere

$$\begin{pmatrix} T^e & TS + SN \\ 0 & N^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = -a \begin{pmatrix} 0 & -T^{-k} \tilde{T} N \\ 0 & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$$

yazılabilir. Böylece $T^{-k} \tilde{T} N \beta_2 = T^2 \beta_1 + (TS + SN) \beta_2$ ve $-aN \beta_2 = N^2 \beta_2$ eşitlikleri elde edilir ki bu da $a \neq 0$, N matrisi nilpotent ve T matrisi nonsingüler olduğundan $N \beta_2 = 0$ ve $T \beta_1 + S \beta_2 = 0$ olduğunu gösterir. Bu takdirde $A \beta = 0$ elde edilir. Öte yandan $(A + aQ) \beta = [A + a(I - A^{C,\dagger}A)] \beta = 0$ olacağından $a \neq 0$ olduğundan $\beta = 0$ olmak zorundadır. Bu da $A + aQ$ matrisinin tersinir olduğunu gösterir. İspatın geri kalan kısmı aşıkâr olup ispat tamamlanmış olur.

Yukarıdaki teoremin bir uygulaması olarak aşağıdaki matrisi göz önüne alalım.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Bu durumda $\text{ind}(A) = 3$ olduğundan $A^D = A^k(A^{k+1})^\dagger$ eşitliği kullanılarak A matrisinin CMP inversinin

$$A^{C,\dagger} = A^\dagger A A^D A A^\dagger = A^\dagger A^4 (A^4)^\dagger A A^\dagger = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

şeklinde olduğu görülür. $P = I - A A^{C,\dagger}$ ve $Q = I - A^{C,\dagger} A$ olsun. Bu takdirde

$$(A - 3P)^{-1} = \frac{1}{432} \begin{pmatrix} -241 & 1 & 223 & -127 \\ -223 & -17 & 97 & -1 \\ -1 & -95 & -17 & -31 \\ -127 & 31 & 1 & -49 \end{pmatrix}$$

ve

$$(A + \frac{1}{4}Q)^{-1} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 3633 & -4081 & -3599 & 4111 \\ 3599 & -4047 & -3569 & 4081 \\ 4081 & -4593 & -4047 & 4623 \\ 4111 & -4623 & -4081 & 4657 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Buradan $(I - Q)(A - 3P)^{-1} = A^{C,\dagger}$ ve $(A + \frac{1}{4}Q)^{-1}(I - P) = A^{C,\dagger}$ olduğu direkt hesaplamalarla kolayca görülebilir.

Teorem 3.27 $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi olmak üzere

$$\mathbb{C}_n^{CM} = \{A \in \mathbb{C}_n^n : r(A^2) = r(A)\}$$

$$\mathbb{C}_n^{EP} = \{A \in \mathbb{C}_n^n : A A^\dagger = A^\dagger A\} = \{A \in \mathbb{C}_n^n : \Re(A) = \Re(A^*)\},$$

kümeleri tanımlansın. Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır (Chen ve Ark., 2021):

$$(1) A A^{C,\dagger} = A A^\dagger \Leftrightarrow A \in \mathbb{C}_n^{CM},$$

$$(2) A A^{C,\dagger} = A^\dagger A \Leftrightarrow A \in \mathbb{C}_n^{EP},$$

$$(3) A^{C,\dagger} A = A A^\dagger \Leftrightarrow A \in \mathbb{C}_n^{EP},$$

$$(4) A^{C,\dagger} A = A^\dagger A \Leftrightarrow A \in \mathbb{C}_n^{CM}.$$

İspat. Bu durumda A matrisinin çekirdek-EP ayrışımından $\tilde{T} = \sum_{j=0}^{k-1} T^{j-1} S N^{k-1-j}$, $\Delta = [T T^* + S(I_{n-t} - N^\dagger N) S^*]^{-1}$ ve $t = r(T) = r(A^k)$ olmak üzere

$$A A^\dagger = U \begin{bmatrix} I_t & 0 \\ 0 & N^\dagger N \end{bmatrix} U^* \quad (3.70)$$

ve

$$A^\dagger A = U \begin{bmatrix} T^* \Delta T & -T^* \Delta S(I_{n-t} - N^\dagger N) \\ (I_{n-t} - N^\dagger N) S^* \Delta T & N^\dagger N + (I_{n-t} - N^\dagger N) S^* \Delta S(I_{n-t} - N^\dagger N) \end{bmatrix} U^* \quad (3.71)$$

ede edilir. Buradan

$$A A^{C,\dagger} = U \begin{bmatrix} I_t & T^{-k} \tilde{T} N N^\dagger \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^* \quad (3.72)$$

ve

$$A^{C,\dagger} A = U \begin{bmatrix} T^* \Delta T & -T^* \Delta (S + T^{-k} \tilde{T} N) \\ (I_{n-t} - N^\dagger N) S^* \Delta T & (I_{n-t} - N^\dagger N) S^* \Delta S (S + T^{-k} \tilde{T} N) \end{bmatrix} U^* \quad (3.73)$$

eşitlikleri yazılabilir.

(1). (3.70) ve (3.72) eşitliklerinden $A^{C,\dagger} A = A^\dagger A$ olması için gerek ve yeter şartın $N = 0$ yani $A \in \mathbb{C}_n^{CM}$ olduğu elde edilmiş olur.

(2). Bu durumda (3.71) ve (3.73) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} A A^{C,\dagger} = A^\dagger A &\Leftrightarrow S = S N^\dagger N, N^\dagger N = 0, T^* \Delta S(I_{n-t} - N^\dagger N) = T^{-k} \tilde{T} N N^\dagger \\ &\Leftrightarrow S = 0, N = 0 \\ &\Leftrightarrow A \in \mathbb{C}_n^{EP} \end{aligned}$$

elde edilir.

(3). Bu durumda (3.70) ve (3.73) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} A^{C,\dagger} A = A A^\dagger &\Leftrightarrow S = S N^\dagger N, N^\dagger N = 0, T^* \Delta (S + T^{-k} \tilde{T} N) = 0 \\ &\Leftrightarrow S = 0, N = 0 \\ &\Leftrightarrow A \in \mathbb{C}_n^{EP} \end{aligned}$$

olduğu görülür.

(4). Bu durumda (3.71) ve (3.73) eşitliklerinden

$$A^{C,\dagger}A = A^\dagger A \Leftrightarrow SN^\dagger N + T^{-k}\tilde{T}N = 0, N^\dagger N = (I_{n-t} - N^\dagger N)T^*\Delta(SN^\dagger N + T^{-k}\tilde{T}N) = 0$$

$$\Leftrightarrow A \in \mathbb{C}_n^{CM}$$

olduğu elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Son olarak çekirdek-EP ayrışım kullanılarak özel matris sınıfları için CMP invers gösterimleri verilecektir. Bununla ilgili olarak,

$$\begin{aligned}\mathbb{C}_n^{k-EP} &= \{A \in \mathbb{C}_n^n : k = \text{ind}(A), A^k A^\dagger = A^\dagger A^\dagger\}, \\ \mathbb{C}_n^{k,D^\dagger} &= \{A \in \mathbb{C}_n^n : k = \text{ind}(A), A^k A^{D,\dagger} = A^{D,\dagger} A^\dagger\}, \\ \mathbb{C}_n^{k,\dagger D} &= \{A \in \mathbb{C}_n^n : k = \text{ind}(A), A^k A^{\dagger,D} = A^{\dagger,D} A^\dagger\}, \\ \mathbb{C}_n^{k,\ominus} &= \{A \in \mathbb{C}_n^n : k = \text{ind}(A), A^k A^\ominus = A^\ominus A^\dagger\}, \\ \mathbb{C}_n^{k,\odot} &= \{A \in \mathbb{C}_n^n : k = \text{ind}(A), A^k A^\odot = A^\odot A^\dagger\},\end{aligned}$$

sınıf gösterimleri verilmiş olsun. Şimdi aşağıdaki lemma verilebilir.

Lemma 3.9 $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi verilsin ve $\text{ind}(A) = k$ olsun. Bu durumda

- (1) $A \in \mathbb{C}_n^{k-EP} \Leftrightarrow A \in \mathbb{C}_n^{k,C^\dagger} \Leftrightarrow S = SN^\dagger N$ ve $\tilde{T} = \tilde{T}NN^\dagger$
- (2) $A \in \mathbb{C}_n^{k,D^\dagger} \Leftrightarrow \tilde{T} = \tilde{T}NN^\dagger$,
- (3) $A \in \mathbb{C}_n^{k,\dagger D} \Leftrightarrow S = SN^\dagger N$,
- (4) $A \in \mathbb{C}_n^{k,\ominus} \Leftrightarrow SN = 0$,
- (5) $A \in \mathbb{C}_n^{k,\odot} \Leftrightarrow S = 0$,

durumları sağlanır, burada $\tilde{T} = \sum_{j=0}^{k-1} T^j S N^{k-1-j}$ dir (Chen ve Ark., 2021).

Teorem 3.28 $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi verilsin ve $\text{ind}(A) = k$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler birbirine denktir (Chen ve Ark., 2021).

- (1) $A \in \mathbb{C}_n^{k-EP}$,
- (2) $AA^{C,\dagger} = A^{C,\dagger}A$,
- (3) $AA^{C,\dagger} = A^{\dagger,D}A$,
- (4) $A^{C,\dagger}A = AA^{D,\dagger}$,
- (5) $A^k A^{C,\dagger} = A^\dagger A^k$,

$$(6) A^k A^{C,\dagger} = A^{\dagger,D} A^k ,$$

$$(7) A^{C,\dagger} A^k = A^k A^\dagger ,$$

$$(8) A^{C,\dagger} A^k = A^k A^{D,\dagger} .$$

İspat. (1) $\Leftrightarrow$ (2): Bu durumda (3.72) ve (3.73) eşitliklerinden

$$AA^{C,\dagger} = A^{C,\dagger} A$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} I_t & T^{-k} \tilde{T} N N^\dagger \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T^* \Delta T & -T^* \Delta (S + T^{-k} \tilde{T} N) \\ (I_{n-t} - N^\dagger N) S^* \Delta T & (I_{n-t} - N^\dagger N) S^* \Delta (S + T^{-k} \tilde{T} N) \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow S = S N^\dagger N, T^{-k} \tilde{T} N N^\dagger = T^{-1} S + T^{-k-1} \tilde{T} N$$

$$\Leftrightarrow S = S N^\dagger N, \tilde{T} N N^\dagger = \tilde{T}$$

$$\Leftrightarrow A \in \mathbb{C}_n^{k-EP}$$

olduğu görülür.

$$(2) \Leftrightarrow (3): A^{\dagger,D} A = A^{C,\dagger} A \text{ olduğundan iddia doğrudur.}$$

$$(2) \Leftrightarrow (4): AA^{D,\dagger} = AA^{C,\dagger} \text{ olduğundan iddia doğrudur.}$$

(1) $\Leftrightarrow$ (5): $A^k A^{C,\dagger} = A^k A^\dagger$ ve $A^{C,\dagger} A^k = A^\dagger A^k$ eşitliklerinin sağlandığı kolaylıkla gösterilebilir. Buradan istenilen sonuç elde edilir. İspatın geri kalan kısımları da benzer şekilde görülebilir ve böylece de teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 3.29 $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi verilsin ve $\text{ind}(A) = k$ olsun. Bu durumda $X_1 \in \{A^D, A^{D,\dagger}, A^\odot, A^\ominus\}$ olmak üzere

$$(1) A \in \mathbb{C}_n^{k,D^\dagger} ,$$

$$(2) AA^{C,\dagger} = AA^D ,$$

$$(3) AA^{C,\dagger} = AA^{\dagger,D} ,$$

$$(4) AA^{C,\dagger} = A^{D,\dagger} A ,$$

$$(5) A^k A^{C,\dagger} = A^k A^{\dagger,D} ,$$

$$(6) A^k A^{C,\dagger} = X_1 A^k$$

ifadeleri birbirine denktir (Chen ve Ark., 2021).

İspat. (1) $\Leftrightarrow$ (2): Bu durumda (3.71) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
AA^{C,\dagger} = AA^D &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} I_t & T^{-k}\tilde{T}NN^\dagger \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_t & T^{-k}\tilde{T} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&\Leftrightarrow \tilde{T} = \tilde{T}NN^\dagger \\
&\Leftrightarrow A \in \mathbb{C}_n^{k,D^\dagger}
\end{aligned}$$

olduğu görülür.

(2) $\Leftrightarrow$ (3) $\Leftrightarrow$ (4): kolaylıkla gösterilebilir ki $AA^D = AA^{\dagger,D} = A^{D,\dagger}A$ eşitlikleri sağlanır. Buradan da istenilen sonuç elde edilir.

(1) $\Leftrightarrow$ (6): Bu durumda

$$A^k A^{C,\dagger} = U \begin{bmatrix} T^{k-1} & T^{-1}\tilde{T}NN^\dagger \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^* \quad (3.74)$$

eşitliği yazılabilir. Buradan $X_1 A^k$ matris çarpımı $X_1 \in \{A^D, A^{D,\dagger}, A^\ominus, A^\ominus\}$ olmak üzere

$$X_1 A^k = U \begin{bmatrix} T^{k-1} & T^{-1}\tilde{T} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^* \quad (3.75)$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu durumda (3.74) ve (3.75) ifadeleri birleştirilirse $X_1 \in \{A^D, A^{D,\dagger}, A^\ominus, A^\ominus\}$ olmak üzere $A^k A^{C,\dagger} = X_1 A^k$ eşitliğinin sağlanması için gerek ve yeter şart $T^{-1}\tilde{T}NN^\dagger = T^{-1}\tilde{T}$ eşitliğinin sağlanması olacaktır. Eğer bu durum T matrisinin nonsingüler olması gerçeği ile birleştirilirse $\tilde{T}NN^\dagger = \tilde{T}$ olduğu görülür ki bu da $A \in \mathbb{C}_n^{k,D^\dagger}$ olmasına eşdeğerdir.

(1) $\Leftrightarrow$ (5): Bu durumda $A^k A^{\dagger,D} = A^k A^D = A^D A^k$ eşitliği kolayca gösterilebilir ki bu da istenilen durumun sağlandığını ifade eder ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.30 $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi verilmiş olsun ve $\text{ind}(A) = k$ alınsın. Bu durumda $X_1 \in \{A^D, A^{D,\dagger}, A^\ominus, A^\ominus\}$ olmak üzere

- (1) $A \in \mathbb{C}_n^{k,\dagger D}$,
- (2) $A^{C,\dagger}A = A^D A$,
- (3) $A^{C,\dagger}A = A^{D,\dagger}A$,
- (4) $A^{C,\dagger}A = AA^{\dagger,D}$,
- (5) $A^{C,\dagger}A^k = A^k A^{\dagger,D}$,
- (6) $A^{C,\dagger}A^k = X_1 A^k$

ifadeleri birbirine denktir (Chen ve Ark., 2021).

İspat. (1) $\Leftrightarrow$ (2): Bu durumda (3.73) eşitliğinden

$$\tilde{T} = \sum_{j=0}^{k-1} T^{j-1} S N^{k-1-j} \text{ ve } \Delta = [T T^* + S(I_{n-t} - N^\dagger N) S^*]^{-1}$$

olmak üzere

$$A^{C,\dagger} A = A^D A$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} T^* \Delta T & -T^* \Delta (S + T^{-k} \tilde{T} N) \\ (I_{n-t} - N^\dagger N) S^* \Delta T & (I_{n-t} - N^\dagger N) S^* \Delta (S + T^{-k} \tilde{T} N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_t & T^{-k} \tilde{T} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow S = S N^\dagger N, \quad T^{-1} S + T^{-k-1} \tilde{T} N = \tilde{T} N N^\dagger$$

$$\Leftrightarrow S = S N^\dagger N$$

$$\Leftrightarrow A \in \mathbb{C}_n^{k,\dagger D}$$

olduğu görülür.

(2) $\Leftrightarrow$ (3) $\Leftrightarrow$ (4): Bu durumda kolaylıkla gösterilebilir ki $A^D A = A^{D,\dagger} A = A A^{\dagger,D}$ eşitlikleri sağlanır. Buradan da istenilen sonuç elde edilir.

(1) $\Leftrightarrow$ (6): Bu durumda

$$A^{C,\dagger} A^k = U \begin{bmatrix} T^* \Delta T^k & T^* \Delta \tilde{T} \\ (I_{n-t} - N^\dagger N) S^* \Delta T^k & (I_{n-t} - N^\dagger N) S^* \Delta \tilde{T} \end{bmatrix} U^* \quad (3.76)$$

eşitliği yazılabilir. Bunun sonucu olarak (3.75) ve (3.76) eşitliklerinden $X_1 \in \{A^D, A^{D,\dagger}, A^\ominus, A^\ominus\}$ olmak üzere $A^{C,\dagger} A^k = X_1 A^k$ eşitliğinin sağlanması için gerek ve yeter şart $S = S N^\dagger N$ eşitliğinin sağlanması olacaktır. Bu durum ise $A \in \mathbb{C}_n^{k,\dagger D}$ olmasına eşdeğer olacaktır.

(1) $\Leftrightarrow$ (5): Bu durumda $A^k A^{\dagger,D} = A^k A^D = A^D A^k$ eşitliği yine sağlanacağından bu da istenilen ifadenin sağlandığını gösterir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.31 $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi verilsin ve $\text{ind}(A) = k$ olsun. Bu durumda

$$(1) \quad A \in \mathbb{C}_n^{k,\ominus},$$

$$(2) \quad A A^{C,\dagger} = A A^\ominus,$$

$$(3) \quad A^k A^{C,\dagger} = A^k A^\ominus,$$

ifadeleri birbirine denktir (Chen ve Ark., 2021).

İspat. (1) $\Leftrightarrow$ (2): Bu durumda (3.71) eşitliğinden

$$\tilde{T} = \sum_{j=0}^{k-1} T^{j-1} S N^{k-1-j}$$

olmak üzere

$$A A^{C,\dagger} = A A^{\odot} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} I_t & T^{-k} \tilde{T} N N^{\dagger} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_t & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \tilde{T} N = 0$$

$$\Leftrightarrow S N = 0$$

$$\Leftrightarrow A \in \mathbb{C}_n^{k,\odot}$$

olduğu görülür.

(1) $\Leftrightarrow$ (3): Bu durumda daha önce verilenler dikkate alınır

$$A^k A^{\odot} = U \begin{bmatrix} T^{k-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^* \quad (3.77)$$

eşitliği yazılabilir. Bunun sonucu olarak (3.74) ve (3.77) ifadeleri birleştirilirse $A^k A^{C,\dagger} = A^k A^{\odot}$ eşitliğinin sağlanabilmesi için gerek ve yeter şart $S N = 0$ eşitliğinin sağlanması olacaktır. Bu durum ise $A \in \mathbb{C}_n^{k,\odot}$ olmasına eşdeğerdır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.32 $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi verilsin ve $\text{ind}(A) = k$ olsun. Bu durumda

$$(1) \quad A \in \mathbb{C}_n^{k,\odot},$$

$$(2) \quad A^{C,\dagger} A = A A^{\odot},$$

$$(3) \quad A^{C,\dagger} A^k = A^k A^{\odot},$$

ifadeleri birbirine denktir (Chen ve Ark., 2021).

İspat. (1) $\Leftrightarrow$ (2): Bu durumda (3.72) eşitliğinden

$$\tilde{T} = \sum_{j=0}^{k-1} T^{j-1} S N^{k-1-j} \text{ ve } \Delta = [T T^* + S(I_{n-t} - N^{\dagger} N) S^*]^{-1}$$

olmak üzere

$$A^{C,\dagger} A = A A^{\odot}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} T^* \Delta T & -T^* \Delta (S + T^{-k} \tilde{T} N) \\ (I_{n-t} - N^{\dagger} N) S^* \Delta T & (I_{n-t} - N^{\dagger} N) S^* \Delta (S + T^{-k} \tilde{T} N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_t & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow T^* \Delta T = I_t, S = SN^\dagger N, T^* \Delta(S + T^{-k} \tilde{T} N) = 0$$

$$\Leftrightarrow S = SN^\dagger N, T^{-1} S + T^{-k-1} \tilde{T} N = 0$$

$$\Leftrightarrow S = SN^\dagger N, T \tilde{T} = 0$$

$$\Leftrightarrow S = 0$$

$$\Leftrightarrow A \in \mathbb{C}_n^{k, \odot}$$

olduğu gösterilmiş olur.

(1) $\Leftrightarrow$ (3): Bu durumda (3.76) ve (3.77) ifadeleri birleştirilirse $A^{C, \dagger} A^k = A^k A^\odot$ eşitliğinin sağlanabilmesi için gerek ve yeter şart $\tilde{T} = 0$ olmasıdır. $\tilde{T} = 0$ olması için gerek ve yeter şart ise $SN = 0$ eşitliğinin sağlanmasıdır. Bu durum ise $A \in \mathbb{C}_n^{k, \odot}$ olmasına eşdeğerdir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.33 $A \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi verilsin ve $\text{ind}(A) = k$ olsun. Bu durumda

$$(1) A \in \mathbb{C}_n^{k, \dagger} \cap \mathbb{C}_n^{k, \odot},$$

$$(2) A^{C, \dagger} A = A^\odot A,$$

$$(3) A^{C, \dagger} A = A A^\odot,$$

$$(4) A^{C, \dagger} A^k = A^k A^\odot,$$

ifadeleri birbirine denktir (Chen ve Ark., 2021).

İspat. (1) $\Leftrightarrow$ (2): Bu durumda daha önce verilen notasyonlar ve (3.73) eşitliği dikkate alınırsa

$$\tilde{T} = \sum_{j=0}^{k-1} T^{j-1} S N^{k-1-j} \text{ ve } \Delta = [T T^* + S(I_{n-t} - N^\dagger N) S^*]^{-1}$$

olmak üzere

$$A^{C, \dagger} A = A^\odot A$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} T^* \Delta T & -T^* \Delta(S + T^{-k} \tilde{T} N) \\ (I_{n-t} - N^\dagger N) S^* \Delta T & (I_{n-t} - N^\dagger N) S^* \Delta S(S + T^{-k} \tilde{T} N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_t & T^{-1} S \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow S = SN^\dagger N, T^* \Delta(S + T^{-k} \tilde{T} N) = 0$$

$$\Leftrightarrow S = SN^\dagger N, \tilde{T} N = 0$$

$$\Leftrightarrow S = SN^\dagger N, SN = 0$$

$$\Leftrightarrow A \in \mathbb{C}_n^{k,\dagger D} \cap \mathbb{C}_n^{k,\Theta}$$

olduğu elde edilir.

(2) $\Leftrightarrow$ (3): Bu durum $AA^\ominus = A(A^\ominus)^2 A = A^\ominus A$ eşitliğinden direkt olarak görülür.

(3) $\Leftrightarrow$ (4): Bu durumda daha önce verilen notasyonlar ve (3.76) eşitliği dikkate alınırsa

$$\tilde{T} = \sum_{j=0}^{k-1} T^{j-1} S N^{k-1-j} \text{ ve } \Delta = [T T^* + S(I_{n-t} - N^\dagger N) S^*]^{-1}$$

olmak üzere

$$A^{C,\dagger} A^k = A^k A^\ominus$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} T^* \Delta T^k & -T^* \Delta \tilde{T} \\ (I_{n-t} - N^\dagger N) S^* \Delta T^k & (I_{n-t} - N^\dagger N) S^* \Delta \tilde{T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T^{k-1} & T^{k-2} S \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow S = S N^\dagger N, \quad T^{k-2} S = T^{-1} \tilde{T}$$

$$\Leftrightarrow S = S N^\dagger N, \quad S N = 0$$

$$\Leftrightarrow A \in \mathbb{C}_n^{k,\dagger D} \cap \mathbb{C}_n^{k,\Theta}$$

olduğu elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

4. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında ilk önce bir Giriş verilmiş ve Genel Bilgiler başlığı altında matrislerle ilgili bazı önemli tanım ve teoremler ifade edilmiştir. Kare olmayan ya da kare olduğu halde normal olarak bildiğimiz anlamda inversi mevcut olmayan matrisler için geliştirilen ve özel olarak lineer denklem sistemlerinin çözümünün mevcut olup olmadığının araştırılmasında ve çözümün mevcut olması durumunda da çözümün belirlenmesinde kullanılan ve bilinen anlamdaki invers özelliklerini de tam olarak sağlayan ve geliştirilmiş invers adı verilen bir invers kavramı ele alınmıştır. Bu amaç doğrultusunda ilk olarak bir matrisin Moore-Penrose inversi tanımı verilmiş ve bu inversin çeşitli önemli özellikleri detaylı olarak ortaya konulmuştur. Daha sonra ise keyfi mertebeden kare matrisler için tanımlı olan için grup invers, çekirdek invers ve çekirdek-EP invers tanımları verilerek bu invers çeşitlerinin bazı temel özellikleri detaylı bir şekilde ortaya konulmuştur.

Tezin esas kısmında ise keyfi mertebeden kare matrisler için CMP invers adı verilen ve diğer invers çeşitlerinden daha genel olan bir geliştirilmiş invers tanımı verilmiş ve bu inversin bazı temel özellikleri ortaya konulmuştur. Ayrıca kare matrislerin CMP inversleri ile ilgili bazı yeni gösterimler ve bu inverslerin çeşitli uygulamalarından bahsedilmiştir.

Tezde yapılan çalışmalar ve elde edilen bulgular dikkate alınarak keyfi mertebeden bir kare matris çeşitli mertebeden alt kare matrisler şeklinde parçalanarak verilen matrisin CMP inversinin bu alt kare matrislerin CMP inversleri yardımıyla nasıl ifade edilebileceği konusu araştırılabilir. Ayrıca tıpkı diğer geliştirilmiş inversler için ifade edildiği gibi matrislerin CMP inverslerinin hesaplanmasında kullanılmak amacıyla çeşitli algoritmalar ve bilgisayar programları da geliştirilebilir. Özellikle matrislerin inverslerinin oldukça sıkça kullanıldığı çeşitli mühendislik uygulamalarında diğer geliştirilmiş inverslerde olduğu gibi CMP inverslerin de kullanılıp kullanılmayacağı araştırılarak eğer kullanılabiliriyorsa diğer inverslere göre daha uygulanabilir olup olmadığı incelenebilir.

5. KAYNAKLAR

- Baksalary, OM. & Trenkler, G. (2008). Characterization of EP, normal, and Hermitian matrices, *Linear and Multilinear Algebra* 56(3): 299 – 304.
- Baksalary, OM. & Trenkler, G. (2010). Core inverse of matrices. *Linear Multilinear Algebra*, 58, No. 6: 681–697.
- Baksalary, OM. & Trenkler, G. (2014). On a generalized core inverse. *Applied Math. Computation*, 236: 450–457.
- Baksalary, OM., Styan, GPH. & Trenkler, G. (2009). On a matrix decomposition of Hartwig and Spindelböck. *Linear Algebra and Its Appl.*, 430: 2798–2812.
- Ben-Israel, A. & Greville, TNE. (2003). *Generalized Inverses, Theory and Applications*, second edition, Canadian Mathematical Society, Springer, New York, Berlin, Heidelberg, Hong Kong, London, Milan, Paris, Tokyo.
- Björhammar, A. (1958). A generalized matrix algebra, *Kungl. Tekn. Högsk. Handl. Stockholm*. No. 124, 1-32.
- Bu, C., Zhao, J. & Zheng, J. (2008). Group inverse for a class 2×2 block matrices over skew fields, *Applied Mathematics and Computation* 204: 45 – 49.
- Campbell SL, Meyer CD. (2009). *Generalized inverses of linear transformations*. SIAM: Philadelphia.
- Chen, Y., Zhu, H. & Patricio, P. (2017). Characterizations and representations of core and dual core inverses. *Canad Math Bulletin*, 60:269–282.
- Chen, Y., Zuo, K., Wang, O. & Fu, Z. (2021). Further characterizations of the CMP inverse of matrices, *Linear and Multilinear Algebra*, Volume 69(3): 1-20.
- Cvetković-Ilić, DS. & Wei, Y. (2017). *Algebraic properties of generalized inverses*. Singapore: Springer.
- Drazin, MP. (2012). A class of outer generalized inverses. *Linear Algebra Appl.*, 436: 1909–1923.
- Ferreira, DE., Levis, FE. & Thome, N. (2020). Characterizations of k -commutative equalities for some outer generalized inverses. *Linear Multilinear Algebra*, 68(1): 177–192
- Gao, Y., Chen, JL. & Patricio, P. (2021). Continuity of the core-EP inverse and its applications. *Linear and Multilinear Algebra*. Volume 69(3): 557-571.
- Hartwig, RE, Spindelböck K. (1984). Matrices for which A^* and $A^\dagger$ commute. *Linear Multilinear Algebra*. 14 (3): 241–256.
- Hernandez, A., Lattanzi, M, Thome, N, et al. (2012). The star partial order and the eigen projection at 0 on EP matrices. *Appl Math Computations*, 218: 10669–10678.
- Ke, Y., Wang, L. & Chen, J. (2019). The core inverse of a product and 2×2 matrices, *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society* 42: 51 – 66.
- Kurata, H. (2018). Some theorems on the core inverse of matrices and the core partial ordering. *Appl Math Computation*, 316:43–51.

- Ma, H. (2018). Optimal perturbation bounds for the core inverse. *Applied Math. Computation*, 336: 176–181.
- Ma, H. & Li, T. (2021). Characterizations and representations of the core inverse and its applications, *Linear and Multilinear Algebra*, 69(1): 93-103.
- Ma, H. & Stanimirovic, PG. (2019). Characterizations, approximation and perturbations of the core-EP inverse. *Applied Mathematics and Computation*. 359: 404–417.
- Malik, SB. & N. Thome, N. (2014). On a new generalized inverse for matrices of an arbitrary index. *Applied Mathematics and Computation*. 226: 575-580.
- Malik, SB., Rueda, L. & and N. Thome, N. (2014). Further properties on the core partial order and other matrix partial orders. *Linear and Multilinear Algebra*. 62: 1629-1648.
- Mehdipour, M. & Salemi, A. (2018). On a new generalized inverse of matrices. *Linear Multilinear Algebra*, 66(5): 1046–1053.
- Mieliniczuk, J. (2015). Some results on C-inverses of a core matrix, *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics* 46: 383 – 395.
- Mitra, SK. (1987). On group inverses and the sharp order. *Linear Algebra and Its Applications*, 92: 17–37.
- Mitra, SK. & Rao, CR. (1968). A note on a previous lemma in the theory of least squares and some further results. *Sankhya Ser. A*. Vol. 30, 245-252.
- Mitra, SK., Bhimasankaram, P. & Malik, SB. (2010). *Matrix partial orders, shorted operators and applications*. Singapore, World Scientific Publishing Company
- Moore, EH. (1920). On the reciprocal of the general algebraic matrix (abstract), *Bull. Amer. Math. Soc.*, Vol. 26, 394-395.
- Mosic, D. (2018). The CMP inverse for rectangular matrices, *Aequat. Mathematica* 92, 649–659
- Mosic, D. (2019). Weighted core-EP inverse of an operator between hilbert spaces, *Linear Multilinear Algebra* 67: 278–298.
- Mosic, D., Stanimirovic, PG. & Ma, H. (2021). Generalization of core-EP inverse for rectangular matrices. *J. of Math. Analysis and Appl.* 500(1), 125101, 1-19.
- Mosic, D., Stanimirovic, PG. & Katsikis, VN. (2022). Properties of the CMP inverse and its computation. *Computational and Applied Mathematics*, 41: 131-153.
- Penrose, R. (1955). A generalized inverse for matrices, *Proceeding Cambridge Philos. Soc.*, Vol. 51, 406-413.
- Penrose, R. (1956). On best approximate solutions of linear matrix equations, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, Vol. 52, 17-19.
- Prasad, KM. & Mohana, KS. (2014). Core-EP inverse. *Linear Multilinear Algebra*, 62(6): 92–802.

- Prasad, KM. & Raj, MD. (2018). Bordering method to compute core-EP inverse, *Spec. Mathematics*. 6: 193–200.
- Pringle, RM., Rayner AA. (1970). Expressions for generalized inverses of a bordered matrix with application to the theory of constrained linear models, *SIAM Rev.* 12, 107-115.
- Pringle, RM., Rayner AA. (1971). *Generalized Inverse Matrices*, Griffin, London.
- Rakic, DS, Dincic, N, Djordjevic, DS. (2014). Core inverse and core partial order of Hilbert space operators. *Appl Math Computations*, 244: 283–302.
- Rao, CR. (1962). A note on a generalized inverse of a matrix with applications to problems in mathematical statistics, *Journal of Roy. Statist. Soc. Ser. B*. Vol. 24, 152-158.
- Rao, CR. (1966). Generalized inverse for matrices and its applications in mathematical statistics, *Research papers in Statistics, Festschrift for Journal Neyman*, New York, Wiley.
- Rao, CR. (1967). Calculus of generalized inverse of matrices. Part 1: General theory, *Sankhya Ser. A*, Vol. 29, 317-342 s.
- Rao, CR., Mitra, SK. (1971). *Generalized inverse if matrices and its Applications*, Wiley, New York.
- Sanzhang Xu, Jianlong Chen & Dijana Mosić (2018): New characterizations of the CMP inverse of matrices, *Linear and Multilinear Algebra*, 1-15.
- Wang, HX. (2016). Core-EP decomposition and its applications. *Linear Algebra and Its Applications*, 508: 289–300.
- Wang, HX., Li, X. (2015). Characterizations of the core inverse and the core partial ordering. *Linear Multilinear Algebra*, 63: 1829–1836.
- Wang, HX., Li, X. (2016). Partial orders based on core-nilpotent decomposition. *Linear Algebra and its Applications*. 488: 235-248.
- Wang, HX., Chen, J. & Yan, G. (2018). Generalized Cayley–Hamilton theorem for core-EP inverse matrix and DMP inverse matrix, *J. Southeast Univ. English Edition* 34: 135–138.
- Wang, G., Wei, Y. & Qian, S. (2018). *Generalized inverses: Theory and computations*, in *Developments in Mathematics*, 53, Springer and Beijing, Science Press.
- Xu, S., Chen, J. & Masic, D. (2020) New characterizations of the CMP inverse of matrices. *Linear Multilinear Algebra* 68(4): 790–804
- Zhou, M., Chen, J., Li, TT. & Wang, D. (2018). Three limit representation of the core-EP inverse, *Filomat* ,32(17): 5887 – 5894
- Zuo, KZ. & Cheng, YJ. (2019). Three new revision of core-EP inverse of matrices, *Filomat*, 33(10): 3061 – 3072.
- Zuo, KZ., Yu, L. & Gaojun L. (2020). A new generalized inverse of matrices from core-EP decomposition. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2007.02364>.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	Gülin BAYIR
Doğum Yeri	
Doğum Tarihi	
Uyruğu	☒ T.C. ☐ Diğer:
Telefon	
E-Posta Adresi	

Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	Balıkesir Üniversitesi
Fakülte	Necatibey Eğitim Fakültesi
Bölümü	Matematik Öğretmenliği
Mezuniyet Yılı	2007
Yüksek Lisans	
Üniversite	
Enstitü Adı	
Anabilim Dalı	
Programı	
Mezuniyet Tarihi	
Doktora	
Üniversite	
Enstitü Adı	
Anabilim Dalı	
Programı	
Mezuniyet Tarihi	