



**EKSANTRİK OLARAK MESNETLENEN
KİRİŞLERİN SERBEST TİTREŞİM ANALİZİ**

NİYAZİ ORAL



T.C.
BURSA ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**EKSANTRİK OLARAK MESNETLENEN KİRİŞLERİN SERBEST TİTREŞİM
ANALİZİ**

Niyazi ORAL
0009-0008-6359-0139

Prof. Dr. Hakan Tacettin TÜRKER
(Danışman)

YÜKSEK LİSANS TEZİ
İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

BURSA – 2025
Her Hakkı Saklıdır

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

EKSANTRİK OLARAK MESNETLENEN KİRİŞLERİN SERBEST TİTREŞİM ANALİZİ

Niyazi ORAL

Bursa Uludağ Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Hakan Tacettin TÜRKER

Bu tez çalışmasında, basit kirişlerin doğal frekansı üzerindeki mesnet eksantrikliğinin etkisi incelenmiştir. Geleneksel kiriş teorileri, mesnetlerinin Tarafsız Eksen (TE) düzlemde yer aldığı varsayımına dayanır; ancak pratikte mesnetler bu düzlemde farklı konumlarda olabilir. Bu farklılığın etkisini incelemek amacıyla çalışmada analitik ve sayısal yöntemler kullanılmıştır.

Eksantrik mesnetli kirişlerin serbest titreşim davranışını tanımlayan hareket (diferansiyel denklem) denklemi, Hamilton prensibi kullanılarak elde edilmiştir. Hareket denklemi çözülerek kiriş frekansları analitik olarak hesaplanmıştır. Eksantrik mesnetli kirişlerin frekansları, sayısal bir yöntem olan sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak da hesaplanmıştır. Analitik ve sayısal yöntemlerle hesaplanan frekans değerleri karşılaştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Basit mesnetler, doğal frekanslar, eksantriklik, kirişler, sınır koşulları, titreşim

2025, vii + 67 sayfa.

ABSTRACT

MSc Thesis

FREE VIBRATION ANALYSIS OF ECCENTRICALLY SUPPORTED BEAMS

Niyazi ORAL

Bursa Uludağ University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Civil Engineering

Supervisor: Prof. Dr. Hakan Tacettin TÜRKER

In this thesis study, the effect of support eccentricity on the natural frequency of simple beams is investigated. Traditional beam theories are based on the assumption that the supports are located in the Neutral Axis (NA) plane; however, in practice, the supports may be positioned differently from this plane. Analytical and numerical methods were used to examine the effect of this difference.

The equation of motion (differential equation) describing the free vibration behavior of beams with eccentric supports was derived using Hamilton's principle. By solving the equation of motion, the beam frequencies were calculated analytically. Additionally, the frequencies of beams with eccentric supports were calculated using a numerical method, specifically the finite element method. The frequency values calculated through analytical and numerical methods were compared.

Key words: Simple supports, natural frequencies, eccentricity, beams, boundary conditions, vibration

2025, vii + 67 pages.

ÖNSÖZ

Çalışmamın her aşamasında bana yol gösteren, bilgi birikimi ve tecrübelerinden yararlanırken göstermiş olduğu hoşgörüsü ve sabrıyla desteğini hiç eksik etmeyen danışman hocam Sayın Prof. Dr. Hakan Tacettin Türker'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Çalışmalarım boyunca maddi ve manevi destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan, her zaman yanımda olan ve bugünlere gelmemde büyük payı olan sevgili aileme, sonsuz şükranlarımı sunarım. Destekleri ve anlayışıyla her zaman yanımda olduğu için Aizhan Abilkhairkyzy'na teşekkür ederim. Eğitim hayatımın her kademesinde beni destekleyen ve geçtiğimiz aylarda aramızdan ayrılan kıymetli halam merhume Meral Tuna'ya ithafen.

Niyazi ORAL

20/01/2025

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
ÖNSÖZ	iii
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ	v
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	vi
ÇİZELGELER DİZİNİ	vii
1. GİRİŞ	1
2. KURAMSAL TEMELLER VE KAYNAK ARAŞTIRMASI.....	4
2.1. Önceki Çalışmaların İncelenmesi	4
2.2. Titreşim Analizi	5
2.2.1. Titreşim analizinin önemi	6
2.2.2. Titreşimin kısa bir tarihi.....	7
2.2.3. Titreşim analizinin inşaat mühendisliği ve diğer alanlarda uygulamaları	8
2.2.4. Titreşimli yapıların sınıflandırılması ve matematiksel modellenmesi	10
2.3. Euler-Bernoulli Kirişlerinin Serbest Titreşimi.....	11
2.4. Eksantrik Mesnetli Kirişler	13
3. MATERYAL VE YÖNTEM	15
3.1. Hareket Denkleminin Çıkartılması	15
3.1.1. Mesnetlerin TE’de bulunma durumu	15
3.1.2. Eksantrik mesnetli olma durumu	23
3.2. Sonlu Elemanlar Analizi	35
3.2.1. Petek kirişlerin modellenmesi	37
3.2.2. Bulonlu birleşimlerin modellenmesi	38
4. BULGULAR VE TARTIŞMA	42
4.1. Eksantrik Mesnetli Bir Kiriş İçin Elde Edilen Denklemlerin Doğrulanması.....	42
4.2. Mesnet Eksantrisitesinin Kirişlerin Frekansı Üzerindeki Etkisi	44
4.2.1. İki ucu sabit mesnetli kiriş	45
4.2.2. Bir ucu sabit diğer ucu kayıcı mesnetli kiriş	54
4.2.3. Bir ucu ankastre diğer ucu sabit mesnetli kiriş	55
4.3. Mesnet Eksantrisitesinin Petek Kirişlerin Frekansı Üzerindeki Etkisi	57
4.4. Bulonlu Birleşimli Kirişlerin Frekans Analizi	58
5. SONUÇ	63
KAYNAKLAR	65
ÖZGEÇMİŞ	67

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	Açıklama
A	Kirişin kesit alanı
b	Kirişin kalınlığı
E	Elastisite modülü
f	Dış kuvvet
$f_{analitik}$	Analitik yöntem ile bulunan frekans (Hz)
$f_{eh,i,n}$	Eksantrisitesi eh olan n bulonlu kirişin i. moda ait frekansı
f_N	Normalize edilmiş frekans
f_{SEM}	Sonlu elemanlar metodu ile bulunan frekans (Hz)
h	Kiriş yüksekliği
I	Kirişin atalet momenti
L	Kirişin uzunluğu
M	Moment
N	Normal kuvvet
T	Kinetik enerji
t	Zaman
U	Yatay yer değiştirme, potansiyel enerji
W	Düşey yer değiştirme, dış yükler tarafından yapılan iş
x, y, z	Koordinat eksenleri
δ	Varyasyon
ε	Birim şekil değiştirme
ν	Poisson oranı
ρ	Kiriş birim hacim ağırlığı
σ	Gerilme
ω	Açısal frekans
∂	Kısmi türev

Kısaltmalar	Açıklama
SEM	Sonlu elemanlar metodu
SE	Sonlu elemanlar
TE	Tarafsız eksen

ŞEKİLLER DİZİNİ

	Sayfa
Şekil 2.1	Eksantrik mesnetli kirişler 14
Şekil 3.1.	Mesnetleri TE’de bulunan kiriş 15
Şekil 3.2.	Eksantrik olarak mesnetlenen basit kiriş 24
Şekil 3.3.	Yer değiştirme ilişkisi 32
Şekil 3.4.	Yer değiştirmeler A) Boyuna B) Eğilme C) Birleşik yer 34
Şekil 3.5	Kabuk eleman ile oluşturulan I kiriş modeli 36
Şekil 3.6.	Kabuk eleman ile oluşturulan dikdörtgen kesitli kiriş modeli 37
Şekil 3.7.	Tipik petek kiriş boyutları (Grünbauer BV, 2024) 38
Şekil 3.8.	Petek kiriş SE modelinin genel görünüşü 38
Şekil 3.9.	Tek bulonların yerleşimi A) TE üzerinde B) Eksantrik 39
Şekil 3.10.	TE üzerinde yerleşimli bulon grupları 40
Şekil 3.11.	Eksantrik yerleşimli bulon grupları 40
Şekil 3.12.	Enine kesit boyutları 40
Şekil 3.13.	Ağırlık merkezleri tarafsız eksen üzerinde olan beş bulonlu I kiriş 41
Şekil 4.1.	Mesnetlenme durumu 1 için normalize eksantrisite ile normalize frekans değerlerinin değişimi 47
Şekil 4.2.	Durum-1’de ilk iki mod şekli 48
Şekil 4.3.	Mesnetlenme durumu 2 için normalize eksantrisite ile normalize frekans değerlerinin değişimi 49
Şekil 4.4.	Mesnetlenme durumu 3 için normalize eksantrisite ile normalize frekans değerlerinin değişimi 51
Şekil 4.5.	Mesnetlenme durumu 4 için normalize eksantrisite ile %hata’nın değişimi 53
Şekil 4.6.	Mesnetlenme durumu 4 için normalize eksantrisite ile normalize frekans değerlerinin değişimi 53
Şekil 4.7.	Mesnetlenme durumu 4 için L/h ile fanalitik/fSEM oranının değişimi 54
Şekil 4.8.	Mesnetlenme durumu 6 için normalize eksantrisite ile normalize frekans değerlerinin değişimi 56
Şekil 4.9.	Petek kiriş için normalize eksantrisite ile normalize frekans değerlerinin değişimi 58
Şekil 4.10	Eksantrik yerleşen bulonlarda bulon sayısına göre %hatanın değişimi (mesnetlerin TE’de olma durumu ile kıyaslandığında) 60
Şekil 4.11.	Eksantrik yerleşen bulon grubunda bulon sayısına göre %hatanın değişimi (eh=0,41 tek bulonlu yerleşim ile kıyaslandığında) 61
Şekil 4.12.	TE üzerinde yerleşen bulon grubunda bulon sayısına göre %hatanın değişimi 62

ÇİZELGELER DİZİNİ

		Sayfa
Çizelge 2.1.	İlişkili etkilerle birlikte dört farklı kiriş modeli	13
Çizelge 3.1.	Dikdörtgen kesitli kirişlerin geometrik ve malzeme özellikleri	37
Çizelge 3.2.	I ve petek kirişlerin geometrik ve malzeme özellikleri	41
Çizelge 4.1.	Sabit-sabit mesnetlenme durumunda analitik sonuçların literatür ile kıyaslanması	43
Çizelge 4.2.	Sabit-kayıcı mesnetlenme durumunda analitik sonuçların literatür ile kıyaslanması	43
Çizelge 4.3.	Ankastre-sabit mesnetlenme durumunda analitik sonuçların literatür ile kıyaslanması	43
Çizelge 4.4.	Eksantrik mesnetli bir kiriş için elde edilen denklemlerin SEM ile doğrulanması	44
Çizelge 4.5.	Eksantrik mesnetli bir kiriş için elde edilen denklemlerin mesnetlerin TE olma durumu için çıkarılan denklemler ile doğrulanması	44
Çizelge 4.6.	Durum-1’de ilk beş modun doğal frekansı	46
Çizelge 4.7.	Durum-2’de ilk beş modun doğal frekansı	48
Çizelge 4.8.	Durum-3’te ilk beş modun doğal frekansı	50
Çizelge 4.9.	Durum-4’te ilk modun doğal frekansı	52
Çizelge 4.10.	Durum-5’te ilk beş modun doğal frekansı	55
Çizelge 4.11.	Durum-6’da ilk beş modun doğal frekansı	56
Çizelge 4.12.	Sabit-sabit mesnetlenme durumunda petek kiriş için ilk beş modun doğal frekansı	57
Çizelge 4.13.	Kirişlerin eksantrik ve TE üzerinde yerleşimli olması durumunda birinci mod doğal frekansları	59

1. GİRİŞ

Kütle ve esnekliği sahip olan her cisim salınım hareketi yapabilir. Aslında duyma, görme, konuşma, yürüme, nefes alma gibi pek çok insan faaliyeti bu salınım hareketine dayanmaktadır. İşitme kulak zarının titreşimiyle, görme ışık dalgalarının titreşimiyle, konuşma gırtlaktaki titreşimlerle, yürüme bacakların ve kolların salınımıyla, nefes alma ise akciğerlerin yaptığı periyodik hareket ile gerçekleşir. Bu periyodik hareket, sistemin dinamik özellikleri hakkında önemli bilgiler sağlar ve sistemin davranışının anlaşılmasında büyük öneme sahiptir.

Mühendislikte; mekanik ve yapısal sistemlerin titreşim davranışını anlamak, farklı yapıların ve makinelerin güvenli bir şekilde tasarlanması, inşa edilmesi ve işletilmesi açısından büyük bir önem arz eder. Mekanik ve yapısal elemanlarda ve sistemlerde gerçekleşen hasarlarda bazen titreşimlerin rolü büyük olabilir. Örneğin, köprüler, binalar ve barajlar gibi yapıların önemli hasarlarının birçoğu, rüzgar kaynaklı titreşimler veya depremlerde meydana gelen salınımlı yer hareketiyle ilişkilidir. Bu nedenle, titreşim analizi, mühendislik yapılarının güvenliği, verimliliği ve dayanıklılığı açısından kritik bir öneme sahiptir. Yapıların dinamik performansını optimize etmek, titreşim kaynaklı hasarları belirlemek ve makine ile yapı elemanlarında hasarları önlemek amacıyla yaygın olarak kullanılan bu yöntem, sistemlerin uzun ömürlü ve güvenli çalışmasının sağlanmasında önemli bir yere sahiptir.

Mühendislik uygulamalarında serbest titreşim, bir sistemin başlangıç koşulları doğrultusunda, dış bir kuvvet etkisi olmaksızın gerçekleştirdiği hareket olarak tanımlanır. Salınımlı davranışın bir göstergesidir ve sistem bileşenleri arasındaki kinetik ve potansiyel enerjilerin tekrarlı değişimi sonucu ortaya çıkar ve özellikle yapı elemanlarının doğal frekanslarını belirlemek için kullanılır. Doğal frekans, bir sistemin özelliklerine bağlı olarak her yapı için benzersizdir. Doğal frekansların doğru bir şekilde hesaplanması, yapıların güvenliği açısından son derece önemlidir çünkü sistemlerin benzer frekanslarla çalışması durumunda rezonans oluşabilir ve bu da yapıların hasar görmesine veya çökmesine yol açabilir.

Kirişler, mühendislik yapılarında yaygın olarak kullanılan elemanlardır. Kirişlerin serbest titreşim analizi, mühendislik uygulamalarında sıklıkla ihtiyaç duyulan bir konudur. Klasik kiriş teorileri, kirişlerin doğal frekanslarını hesaplamak için kullanılan en temel yaklaşımlardır. Bu teorilerde, kirişin bir eksen boyunca uzanan bir yapı olarak kabul edilmesi ve mesnetlerin genellikle kirişin TE düzleminde yer aldığı varsayılır. Euler-Bernoulli ve Timoshenko kiriş teorileri gibi yaklaşımlar, klasik sınır koşullarına sahip kirişlerin doğal frekanslarını hesaplamak için yaygın olarak kullanılır.

Klasik kiriş teorilerinin kabul ettiği, mesnetlerin kirişin TE düzleminde bulunduğu varsayımı pratikte her zaman geçerli değildir ve özellikle eksantrik mesnet durumlarında geçerliliğini yitirir. Eksantriklik, bir kirişin mesnet noktalarının TE düzlemden farklı bir konumda yer alması durumunu ifade eder. Eksantrik mesnetlenmiş kirişlerin analizinde, mesnetlerin doğru konumlarının modele dahil edilmesi büyük önem taşır çünkü mesnet eksantrikliği, kirişlerin serbest titreşim özelliklerini ve dolayısıyla doğal frekanslarını doğrudan etkiler.

Son yıllarda yapılan araştırmalar, mesnet eksantrikliğinin kirişlerin doğal frekansları üzerinde önemli bir etkiye sahip olduğunu göstermektedir. Bu nedenle, eksantrik mesnetlerin kirişlerin doğal frekansları üzerindeki etkilerinin doğru bir şekilde anlaşılması, daha güvenilir tasarım ve analizler yapılabilmesi için kritiktir. Eksantrikliğin doğal frekanslar üzerindeki etkisini tam olarak tahmin etmek için detaylı analizlere ihtiyaç duyulmaktadır.

Bir sistemin titreşimli analizi ya zaman alanında ya da frekans alanında yapılabilir. Zaman alanında, bir titreşim hareketinin bağımsız değişkeni zamandır. Bu durumda, sistem bir dizi zamana bağlı diferansiyel denklem olarak modellenebilir. Bir titreşim sisteminin modeli, ya kuvvet-momentum oranı ilişkileri (Newton'un ikinci yasası) ya da Hamilton prensibi gibi kinetik ve potansiyel enerji kavramlarını kullanan yaklaşımlarla formüle edilebilir.

Bu çalışmada, farklı mesnet eksantriklikleri ve sınır koşullarının kirişlerin dinamik davranışına etkisi incelenmiştir. Eksantrik mesnetli kirişin serbest titreşim davranışını

tanımlayan hareket denklemi çıkartılmış ve denklem çözülerek frekanslar hesaplanmıştır. Çalışma kapsamında çıkartılan analitik denklemlerle bulunan frekanslar, SE analizleri ile hesaplanan frekanslarla karşılaştırılmıştır.



2. KURAMSAL TEMELLER VE KAYNAK ARAŞTIRMASI

Bu bölüm, araştırmanın kuramsal altyapısını ve ilgili literatürdeki bilgi birikimini sunmayı amaçlamaktadır. İlk olarak önceki çalışmalar incelenerek, araştırmanın temellendiği mevcut bilgi birikimi ortaya konmuştur. Daha sonra, titreşim analizi ile ilgili temel kavramlar ve mühendislik uygulamaları kapsamlı bir şekilde verilmiştir. Titreşim analizi başlığı altında, titreşim kavramının önemi, tarihsel gelişimi, inşaat mühendisliği ve diğer alanlardaki uygulamaları ile sistemlerin matematiksel modelleme ve sınıflandırma yöntemleri ele alınmıştır. Son olarak Euler-Bernoulli kirişlerinin serbest titreşim analizi ve eksantrik mesnetli kirişler sunulmuştur.

2.1. Önceki Çalışmaların İncelenmesi

Birçok araştırmacı eksantrik olarak mesnetlenmiş kirişlerin titreşim analizini incelemiş ve bu konuda çeşitli teoriler geliştirmiştir. Dwaikat ve Kodur (2010), çelik kirişlerin yangın koşulları altında sergilediği davranışların, kirişin eksantrik mesnetlenme durumundan önemli ölçüde etkilendiğini göstermiştir. Bu çalışmada, eksantrik mesnetlenmiş çelik kirişlerin yangın altında maruz kaldıkları termal genleşme ve bu genleşme sonucunda oluşan kuvvetlerin kirişin genel performansı üzerindeki etkisi incelenmiştir. Radice, (2012) ise eksantrik mesnetli basit kirişlerin doğal frekansları üzerindeki etkisini araştırmış ve eksantrik mesnetlerin kirişin nötral ekseninden alt kenara kaydırılması durumunda, doğal frekansların %55 oranında arttığını tespit etmiştir. Bu sonuçlar, eksantrik mesnetlerin doğal frekanslar üzerindeki önemli etkisini ortaya koymaktadır. Eltaher vd. (2013), fonksiyonel olarak derecelendirilmiş makro ve nano kirişlerin serbest titreşim özelliklerinin, nötral eksenin konumuna bağlı olarak nasıl değiştiğini göstermişlerdir. Bu çalışmada, malzeme özelliklerinin eksen boyunca değişiminin, kirişin doğal frekansları üzerindeki etkisinin belirgin olduğu vurgulanmıştır. Aynı şekilde Wang vd. (2017) başka bir çalışmada, fonksiyonel olarak derecelendirilmiş kirişlerin orta düzlem ve nötral düzlem formülasyonlarına dayalı titreşim analizleri karşılaştırılmış, her iki formülasyonun da benzer sonuçlar verdiği, ancak nötral düzlem formülasyonunun belirli sınır koşulları altında daha zor uygulanabilir olduğu vurgulanmıştır. Fernando vd. (2018), katmanlı kirişlerin titreşim analizlerinde, mesnet konumlarının kiriş yüksekliği boyunca değiştirildiğinde elde edilen sonuçları

incelemiş ve bu durumun doğal frekanslar üzerinde belirgin bir değişim yarattığını göstermiştir. Bu çalışmada, genelleştirilmiş kiriş elemanları, kompozit kabuk elemanları ve üç boyutlu katı elemanlar kullanılarak yapılan modellemeler, eksantrik mesnetlerin doğal frekans değişimlerine yol açtığını doğrulamıştır. Türker'in (2022) geliştirdiği modifiye kiriş teorisi ise, eksantrik olarak mesnetlenmiş kirişlerin eğilme analizlerini daha doğru bir şekilde tahmin etmek için kullanılmış ve bu teorinin SE çözümleri ile doğrulandığı belirtilmiştir. Analizler, eksantrik mesnetlerin kirişlerin rijitliği üzerindeki önemli etkisini ortaya koymaktadır. Son olarak Li vd. (2023), basit kirişlerin serbest titreşim analizinde eksantrik mesnetlerin doğal frekanslar üzerindeki etkilerini araştırmış ve bu mesnetlerin kirişlerin genel titreşim davranışını nasıl değiştirdiğini göstermiştir. Çalışma, eksantrik mesnetlerin yalnızca yerel değil, aynı zamanda yerel olmayan bir etki yarattığını ortaya koymuştur.

2.2. Titreşim Analizi

Düzensizliklerden arınmış ve nispeten düşük frekanslarda gerçekleşen tekrarlı hareketler genellikle salınım olarak adlandırılır. Titreşim ise mekanik bir sistemin tekrarlayan, periyodik veya salınımlı tepkisidir. Bir titreşim döngüsünün tekrar etme hızına frekans denir. Ancak, düzensiz ve rastgele davranış sergileyen, yüksek frekanslı ve düşük genlikli salınımlar da genellikle titreşim sınıfına girer.

Bir mühendislik sistemi, bir başlangıç etkisiyle harekete geçirilip, sonrasında herhangi bir zorlayıcı uyarım olmadan serbestçe hareket etmesine izin verildiğinde, belirli bir frekansta titreşim yapma ve belirli bir geometrik şekli koruma eğiliminde olacaktır. Bu frekans sistemin doğal frekansı olarak adlandırılır ve sistemin hareketli parçalarının karşılık gelen şekli (veya hareket oranı) mod şekli olarak adlandırılır. Titreşimli bir sistemin herhangi bir rastgele hareketi, doğal frekansları ve mod şekilleri ile ifade edilebilir (de Silva, 2006).

Mühendislik yapılarının titreşim altındaki tasarımında önemli bir adım, yapının mod şekilleri ve doğal frekansları gibi titreşim modal özelliklerinin değerlendirilmesidir. Bu modal bilgiler, dinamik uyarımlara maruz kalan bir yapının tasarımında ve istenmeyen titreşimlerin bastırılmasında önemli bir rol oynar (Jin vd., 2015).

2.2.1. Titreşim analizinin önemi

Mühendislik yapıları; mimari yapılar, uçaklar, roketler, otomobiller, türbinler, gemiler ve denizaltılar gibi karmaşık ortamlarda çalışarak çeşitli dinamik yüklere maruz kalır. Bu durum, yapıların titreşimli davranış göstermesine neden olabilir. Bu tür uygulamalarda, titreşimlerin yol açtığı malzeme yorgunluğu, mühendislik yapılarını çökmeye sonuçlanabilecek bir risk ile karşı karşıya getirebilir.

Titreşim uygulamaları; inşaat, üretim, makine, havacılık ve uzay, mekatronik ve elektrik-elektronik gibi mühendislik alanlarının birçoğunda yer almaktadır. İnşaat mühendisliği alanında titreşimlerin önemi büyüktür. Bu alanda birçok felaket niteliğindeki olay, titreşimlerin yıkıcı etkisini gözler önüne sermiştir. Örneğin, ünlü Tacoma Narrows Köprüsü, 1940 yılında, rüzgarın köprünün doğal frekanslarından biriyle uyumlu bir dış periyodik frekans oluşturması sonucu şiddetli rezonansa maruz kalarak çökmüştür. Birçok mühendislik sistemi için rezonans, istenmeyen ve yıkıcı sonuçlara yol açabilecek bir durumdur. Ayrıca mimari yapılarda oluşan titreşimlerin yarattığı gürültü; insanlarda huzursuzluk, rahatsızlık ve verimlilik kaybına yol açmaktadır. Bu nedenlerle, yapı titreşimlerini anlamak ve bu titreşimleri uygun tasarım yöntemleriyle azaltmak, güvenilir, emniyetli ve uzun ömürlü yapısal performans için büyük önem taşımaktadır (Jin vd., 2015).

Titreşim tasarımı ve kontrolü, yapıların, makinelerin ve endüstriyel süreçlerin yüksek performansını korumak ve üretim verimliliğini artırmak ve servis sürelerini uzatmak açısından kritik bir önem taşımaktadır. Titreşimler "iyi" veya "kötü" etkiler gösterebilir. İyi etki gösteren titreşimler faydalı bir amaca hizmet ederken, kötü etki gösteren titreşimler rahatsız edici veya hasar bırakan etkilere neden olabilir ve bu titreşimler doğal olarak meydana gelebileceği gibi insan kaynaklı nedenlerle de ortaya çıkabilmektedir (Balachandran, 2019). Titreşim analizlerinin temel hedefleri, istenmeyen titreşimleri bastırmak veya bunların ortadan kaldırılması ve istenen titreşim şekilleri ile seviyelerini üretmektir (de Silva, 2006).

Kirişler, plakalar ve kabuklar, birçok mühendislik yapısı ve makinenin temel yapısal elemanlarını oluşturur. Yapıların birçoğu, bir veya daha fazla kiriş bileşeni içerir; örneğin

çelik çerçeveli yapılar, köprüler ve binalar bunlara örnek verilebilir. Ayrıca birçok yapı başlangıçta kiriş olarak modellenebilir. Örneğin, bir yay tahtası veya bir rüzgar enerji jeneratörünün destekleri, bir konsol kiriş olarak, bir üst geçit ya da köprünün açıklığı basit bir kiriş olarak değerlendirilebilir. Bu elemanların titreşim özelliklerinin detaylı bir biçimde anlaşılması, yapıların titreşimlerinin tahmin edilmesi ve düşük titreşim ve gürültü yayılım özelliklerine sahip uygun yapılar tasarlanması bakımından büyük bir öneme sahiptir (Jin vd., 2015).

2.2.2. Titreşimin kısa bir tarihi

Titreşim teorisinin temelleri, müzik aletlerinin tasarımı ve geliştirilmesine kadar uzanmaktadır. Davullar, flütler ve telli çalgılar gibi enstrümanların, Çin ve Hindistan'da M.Ö. binlerce yıl öncesine dayandığı bilinmektedir. Örneğin, Mısırlılar M.Ö. 3000 yılı civarında arplar kullanırken, Yunan filozof ve matematikçi Pythagoras (M.Ö. 582–502), demircilerin ürettiği seslerle deneyler yapmış ve bu sesleri müzik ile fizik arasında anlamlandırmaya çalışmıştır. Çinliler ise M.S. 2. yüzyılda deprem titreşimlerini tespit etmek için mekanik bir sismograf geliştirmiştir. Modern titreşim teorisinin temelleri, çeşitli bilim insanları ve matematikçilerin çalışmalarıyla atılmıştır. Robert Hooke (1635–1703) iplerin titreşimleri üzerine deneyler yaparken, Sir Isaac Newton (1642–1727) titreşimleri analiz etmek için hareket yasalarını ve kalkülüsü geliştirmiştir. Daniel Bernoulli (1700–1782) ve Leonard Euler (1707–1783) kiriş titreşimlerini incelemiş, Joseph Lagrange (1736–1813) dinamik denklemleri formüle etmek için enerji yöntemlerini araştırmıştır. Charles Coulomb (1736–1806) torsiyonel titreşimler ve sürtünme konularına odaklanırken Joseph Fourier (1768–1830) sinyal frekans analizinin teorisini geliştirmiştir. Simeon-Dennis Poisson (1781–1840) ise membranlar ve elastik malzemelerin titreşimlerini analiz etmiştir. Sanayi Devrimi ile birlikte, buhar türbinleri ve diğer döner makinelerin gelişimi, titreşim analizi, tasarımı ve kontrolü alanında yenilikleri zorunlu hale getirmiştir. Günümüz titreşim tekniklerinin birçok yönü, bu dönemdeki gelişmelerden etkilenmiştir. Daha yakın dönemde öne çıkan ve önemli katkılar sunan isimler arasında Rankine (1820–1872), şaftların kritik hızları üzerine yaptığı çalışmalarla tanınmıştır. Kirchhoff (1824–1887), levhaların titreşimlerini detaylı bir şekilde analiz etmiştir. Rayleigh (1842–1919), ses ve titreşim teorisine önemli katkılar sağlamış ve doğal titreşimleri belirlemek için hesaplama yöntemleri geliştirmiştir. De

Laval (1845–1913), dönen disklerin dengeleme sorunları üzerinde çalışmıştır. Poincare (1854–1912), doğrusal olmayan titreşimleri analiz eden çalışmalarıyla dikkat çekmiştir. Stodola (1859–1943), rotorlar, yataklar ve sürekli sistemlerin titreşimleri üzerine kapsamlı araştırmalar yapmıştır. Ayrıca Timoshenko (1878–1972), Den Hartog (1901–1989), Clough (1920–2014) ve Crandall (1903–1994), titreşim uygulamaları ve bu alandaki literatüre değerli katkılar sunmuş mühendisler arasında yer almaktadır (de Silva, 2006).

2.2.3. Titreşim analizinin inşaat mühendisliği ve diğer alanlarda uygulamaları

Titreşim analizi, iki ana uygulama alanını kapsamaktadır. Bunlardan birincisi; istenmeyen titreşimlerin bastırılması veya ortadan kaldırılması, ikincisi ise gerekli tür ve seviyelerdeki yararlı titreşimlerin üretilmesidir. Zararlı ve istenmeyen titreşim örnekleri arasında şunlar yer alır: Depremlerin sonucunda ortaya çıkan yapısal hareketler, köprüler veya raylı sistemlerle araçlar arasında meydana gelen dinamik etkileşimler, inşaat ekipmanlarının oluşturduğu gürültü, makinelerden destek yapılarına ya da çevreye yayılan titreşimler ve dinamik yükleme sonucunda oluşan kabul edilemez hareketler ile malzeme yorgunluğuna bağlı hasar ve çökmeler.

Örneğin; bir ulaşım aracı ile köprü arasındaki dinamik etkileşimler, hem yapısal problemlere hem de sürüş kalitesinde düşüşe neden olabilir. Bu tür kara ulaşım sistemlerinin geliştirilmesi sırasında, titreşimle ilgili detaylı analiz ve özenli tasarım kritik bir öneme sahiptir. Titreşim miktarlarının azaltılması, gürültü kirliliğini azaltır ve daha iyi bir çalışma ortamı sağlar. Ayrıca yüksek performans ve üretim verimliliğinin korunmasının yanı sıra kullanıcı ve operatör konforunu artırarak endüstriyel makinelerin kullanım ömrü uzar.

Faydalı titreşim türleri arasında müzik aletlerinin ürettiği titreşimler, fizik tedavi ve tıbbi alanlarda kullanılan cihazlar, endüstriyel karıştırıcılar, parça besleyiciler ve ayırıcılar gibi titreşim ekipmanları ile matkaplar ve yüzey cilalama cihazları gibi malzeme işleme araçları yer almaktadır.

Titreşim farklı mühendislik disiplinlerinde geniş bir uygulama alanına sahiptir. İnşaat mühendisliği yapılarının; örneğin köprüler, raylı sistemler, yüksek binalar ve bacalar gibi

yapıların modal analiz ve tasarımına yönelik çalışmalar doğrudan titreşim teorisi ve uygulamalarını içermektedir.

Kara ulaşım sistemlerinde, araçların titreşim analizi prensiplerine uygun olarak tasarlanması, yalnızca yapısal dayanıklılık ve işlevselliğin sağlanması açısından değil, aynı zamanda sürüş kalitesi ve konfor düzeylerinin iyileştirilmesi için de gereklidir. Ulaşım sistemlerinin tasarımında, farklı frekanslar ve seyahat süreleri için ivmenin kök-ortalama-kare (RMS) seviyelerine getirilen sınırlar belirlenerek, sürüş konforu ve kalite standartları tanımlanır.

Havacılık sektöründe, uçakların mekanik ve yapısal bileşenleri, optimum titreşim performansı sağlayacak şekilde tasarlanmaktadır. Örneğin, helikopterlerde rotor dengesizliklerinden kaynaklanan titreşimler, uygun tasarım ve dengeleme yöntemleriyle azaltılabilir. Gemi titreşimleri ise yapısal tasarımın yanı sıra pervane ve dümen tasarımıyla kontrol altına alınabilir. İçten yanmalı motorlarda titreşimlerin azaltılması, özel titreşim bastırma tasarım prensiplerinin uygulanmasıyla mümkündür.

Üretim ve imalat mühendisliği alanında, mekanik titreşimler, ürün kalitesi ve proses verimliliği üzerinde doğrudan etkili olmaktadır. Örneğin makine tezgahlarında oluşan titreşimler, yalnızca ürünlerin boyutsal hassasiyetini ve yüzey kalitesini olumsuz etkilemekle kalmaz, aynı zamanda hızlı aşınmaya ve takım kırılmalarına neden olabilir. Titreşimler yalnızca makinelerin ömrünü kısaltmakla kalmaz, aynı zamanda üretim makinelerinde diğer mekanik problemlere de neden olur ve sürekli bakım yapılmasını gerektirir. Üretim süreçlerinde titreşimlerden kaynaklanan duruş süreleri (üretim kayıpları) ve bunların maliyetleri oldukça yüksek olabilir. Ayrıca, üretim makinelerindeki titreşimler gürültü sorunlarına yol açarak, destek yapıları üzerinden diğer işlemlere iletilip bu süreçlerin performansını olumsuz etkileyebilir. Genel olarak, titreşimler üretim süreçlerinin performansını düşürür ve verimliliği azaltır.

Ağır inşaat makineleri; örneğin ekskavatörler, vinçler, darbe ve sıkıştırma makineleri ile buldozerler, güvenlik, dayanıklılık ve yapısal bütünlük açısından büyük önem taşır. Dinamik yüklemeler genellikle rastgele bir doğaya sahip olsa da motor kaynaklı

titreşimler ve makinelerin gerçekleştirdiği operasyonların işlevsel tekrarı oldukça belirgindir. Titreşim ve yorulma esaslı bir tasarım yaklaşımı, yapıların performansını sürdürebilmesi, ömrünün uzatılması ve bakım masraflarının azaltılması açısından kritik bir rol oynar.

2.2.4. Titreşimli yapıların sınıflandırılması ve matematiksel modellemesi

Titreşimler şu türlerde sınıflandırılabilir (Kelly, 2000):

1. Sönümsüz ve sönümlü titreşim: Bir sistemin titreşimi sırasında sürtünme veya benzeri dirençler sebebiyle enerji kaybı yoksa, sistem "sönümsüz" olarak adlandırılır. Eğer sönümleme nedeniyle enerji kaybı varsa, sistem "sönümlü" olarak nitelendirilir. Sönümleme ihmal edildiğinde sistem analizi daha basit hale gelir, ancak sistem rezonans noktasına yakın çalışıyorsa sönümleme etkisinin hesaba katılması kritik bir önem taşır.
2. Serbest ve zorlanmış titreşim: Bir sistem, yalnızca başlangıçtaki bir etki sebebiyle (dış bir kuvvet uygulanmaksızın) titreşiyorsa, bu durum "serbest titreşim" olarak adlandırılır. Buna karşılık, bir sistem harici bir kuvvetin etkisiyle titreşiyorsa, bu "zorlanmış titreşim" olarak ifade edilir.
3. Doğrusal ve doğrusal olmayan titreşim: Eğer titreşen bir sistemin bileşenleri (kütle, yay, damper gibi) doğrusal davranış sergiliyorsa, titreşim "doğrusal" olarak adlandırılır. Ancak, bileşenlerden herhangi birinin doğrusal olmayan davranış göstermesi durumunda, sistemin titreşimi "doğrusal olmayan titreşim" olarak tanımlanır. Doğrusal titreşimler doğrusal diferansiyel denklemlerle tanımlanırken, doğrusal olmayan titreşimler doğrusal olmayan diferansiyel denklemlerle ifade edilir.

Titreşimli bir yapı, çıktının (yanıtın) girdilere (uyarılara) ve yapı parametrelerine (örneğin kütle, rijitlik, sönümleme) bağlı olduğu dinamik bir sistemdir. Sistemin uyarılması ve verilen tepki zamana bağlıdır. Titreşim analizi, verilen bir uyarım karşısında sistemin vereceği tepkinin belirlenmesini içerir. Genelde bu süreç, matematiksel modelleme, hareket denklemlerinin çıkarılması ve bu hareket denklemlerinin çözülmesini içerir. Matematiksel modellemede amaç, sistemi yöneten denklemleri oluşturabilmek için temel

özelliklerini temsil etmektir. Bu modeller, sistemi makul bir basitlikte tanımlayacak şekilde seçilir. Sistemin özelliklerine bağlı olarak matematiksel model doğrusal ya da doğrusal olmayan bir yapıda olabilir. Doğrusal modeller, çözüm kolaylığı ve hızlı hesaplama imkanı sağlar. Doğrusal olmayan modeller ise doğrusal yaklaşımla açıklanamayan bazı kritik sistem davranışlarını ortaya koyar.

Sistemin hareket denklemlerini oluşturmak için D'Alembert ilkesi, Newton'un ikinci hareket kanunu veya Hamilton ilkesi gibi çeşitli yöntemlerden faydalanılabilir. Bu denklemler, sistemin dinamik davranışını ifade eder ve çözümü için farklı teknikler kullanılabilir. Denklemlerin çözüm yöntemi, genellikle ilgili denklemlerin karmaşıklığına bağlıdır ve analitik (kapalı form) çözümler veya sayısal yöntemlerle elde edilebilir.

2.3. Euler-Bernoulli Kirişlerinin Serbest Titreşimi

Kirişler, en temel yapısal elemanlardan biridir. Bir kiriş genellikle bir boyutunun diğer boyutlara göre belirgin şekilde daha büyük olduğu yapısal bileşenler olarak tanımlanır. (Qatu, 2004). Mühendislik uygulamalarında geniş bir kullanım alanına sahip olan kirişler, boyutlarına ve şekillerine bağlı olarak adlandırılır ve bunların davranışlarını analiz etmek için çeşitli teoriler geliştirilmiştir.

Kiriş teorileri; kirişler, kolonlar, uçak kanatları ve köprüler, kemerler gibi ince yapılı cisimlerin yapısal davranışlarını incelemek için yaygın bir şekilde kullanılır (Simites & Hodges, 2006). Bu teorilerin en büyük avantajı, üç boyutlu bir problemi yalnızca kiriş eksenine bağlı bir değişkenler kümesine indirgemesidir. Bu yaklaşımla elde edilen bir boyutlu yapısal elemanlar, iki boyutlu plaka/kabuk elemanlar veya üç boyutlu katı elemanlara kıyasla daha basit ve hesaplama açısından daha verimlidir. Bu özellikleri göz önüne alındığında kiriş teorileri, yapıların statik ve dinamik analizinde oldukça tercih edilir hale gelir (Carrera vd., 2011).

İnce kirişlerin enine titreşimlerine ilişkin hareket denklemi, 1735 yılında Daniel Bernoulli tarafından türetilmiş ve bu denklemin çeşitli mesnet koşulları altındaki ilk çözümleri 1744 yılında Euler tarafından sunulmuştur. Bu yaklaşım, Euler-Bernoulli veya ince kiriş teorisi olarak bilinmektedir. Rayleigh ise döner eylemsizlik etkisini de içeren bir kiriş teorisi

geliştirmiştir. Timoshenko (1921), döner eylemsizlik ve kesme deformasyonunun etkilerini de içeren, Timoshenko veya kalın kiriş teorisi olarak bilinen daha gelişmiş bir titreşim teorisi ortaya koymuştur (Rao, 2007).

İnce veya Euler-Bernoulli kirişi uzun prizmatik bir yapı elemanı olarak tanımlanır. Bu teori, bazı temel varsayımlar ve basitleştirmeler çerçevesinde uygulanır. Bunlar aşağıdaki gibidir.

Sadece düz kirişler için geçerlidir, boylamasına eksen boyunca uzama gerçekleşmez, boylamasına eksen etrafında burulma oluşmaz, deformasyonlar tek bir düzlemde meydana gelir, yani simetrik eğilme varsayılır, deformasyonlar küçük olduğu kabul edilir, kirişin kesitleri basit şekillere sahiptir.

Klasik kiriş eğilme teorileri, kesme rijit ve kesme esnek modeller olarak ikiye ayrılır. Kesme rijit kiriş, diğer adıyla ince veya Euler-Bernoulli kirişi, kesme kuvvetlerinden kaynaklanan kesme deformasyonlarını ihmal eder. Bu teoriye göre, deformasyondan önce kiriş eksenine dik olan bir kesit düzlemi, deformasyon sonrasında da eksene dik kalır. Ayrıca, kesit düzlemlerinin deformasyon sonrasında da düz ve eğrilmemiş olarak kaldığı varsayılır. Bu iki temel varsayım, Bernoulli hipotezi olarak bilinir. Genel olarak bu modelde kesit düzlemlerinin kirişin merkez hattına rijit şekilde bağlı olduğu kabul edilir. Dolayısıyla merkez hattındaki bir değişiklik tüm deformasyonu etkiler. Ayrıca kesit düzlemlerinin geometrik boyutlarının sabit kaldığı varsayılır. Timoshenko kirişi veya Levinson kirişi gibi kesme esnek kirişler ise, eğilme deformasyonun yanında kesme deformasyonlarını da dikkate alır. Bu modellerde kesit düzlemleri, deformasyon sırasında dikey eksene göre bir γ açısı kadar döner. Ancak, uzunluğunun kesit boyutuna oranı 10 ila 20 kat daha büyük olan homojen kirişlerde, kesme etkisi genellikle ilk yaklaşımda ihmal edilebilir (Öchsner, 2021). Sık kullanılan dört farklı kiriş modeli Çizelge 2.1’de verilmiştir.

Çizelge 2.1. İlişkili etkilerle birlikte dört farklı kiriş modeli

Kiriş modeli	Eğilme momenti	Yanal yerdeğiştirme	Kayma deformasyonu	Dönme ataleti
Euler-Bernoulli	✓	✓	X	X
Rayleigh	✓	✓	X	✓
Shear	✓	✓	✓	X
Timoshenko	✓	✓	✓	✓

2.4. Eksantrik Mesnetli Kirişler

Mühendislik uygulamalarında, bir yapı için çeşitli olası sınır kısıtlama durumlarıyla karşılaşılabilir. Yapısal sınır koşulları, yapının dış ortamdan aldığı deformasyon kısıtlamasını temsil ettikleri için elde edilen doğal frekanslar üzerinde büyük bir etkiye sahiptir. Sık karşılaşılan sınır koşulları arasında; sabit, ankastre ve kayıcı mesnetli uçlar, serbest uçlar ve elastik mesnetler bulunur.

Eksantrik mesnetli kirişler, mesnetlerin kirişin merkez eksenini dışında bir konuma yerleştirildiği taşıyıcı elemanlar olarak tanımlanabilir. Klasik kiriş teorilerinde, mesnetlerin kirişin tarafsız eksenini boyunca yerleştirildiği varsayılır. Ancak mühendislik uygulamalarında bu varsayım çoğu zaman karşılanmaz.

Eksantrik mesnetli kirişler; köprüler, endüstriyel yapılar ve binalar gibi birçok mühendislik uygulamasında karşımıza çıkmaktadır. Şekil 2.1’de bir köprü yapısında kullanılan çelik kirişler görülmektedir. Kirişler, mesnet ayaklarına eksantrik olarak oturmaktadır.



Şekil 2.1 Eksantrik mesnetli kirişler

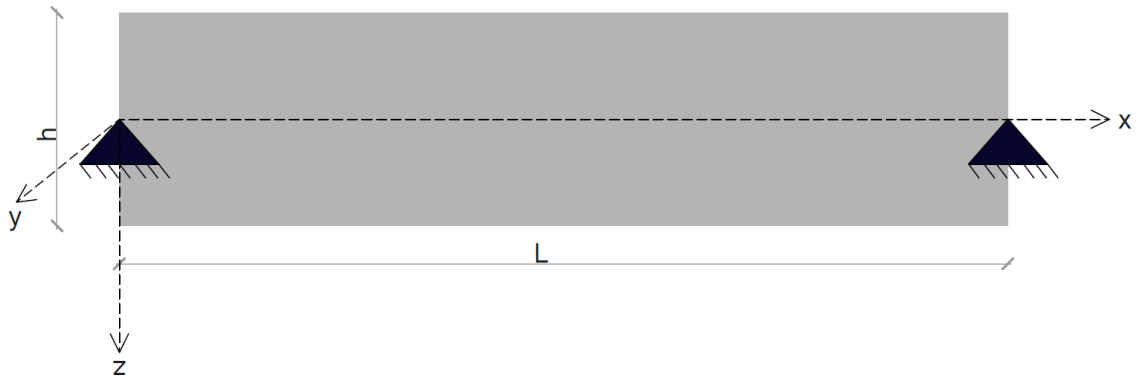
3. MATERİYAL VE YÖNTEM

Materiyal ve Yöntem bölümünün organizasyonu şu şekilde düzenlenmiştir: Öncelikle, 3.1 numaralı alt bölümde serbest titreşim davranışını yöneten hareket denklemi, Hamilton prensibi kullanılarak elde edilmiştir. İlk olarak 3.1.1 numaralı alt bölümde mesnetlerin TE’de bulunma durumu için hareket denklemlerinin çıkarılması yapılmıştır. Daha sonra 3.1.2 numaralı alt bölümde eksantrik mesnetli olma durumu için bir kirişin serbest titreşim davranışını yöneten hareket denklemi çıkarılmış ve bu hareket denklemi çözülerek eksantrik mesnetli kirişin frekans denklemi türetilmiştir. Sonraki bölüm olan 3.2 numaralı alt bölümde, Sonlu Elemanlar (SE) analizleri yer almaktadır. Bu bölümde ilk olarak, analitik olarak elde edilen frekans denklemlerinin doğrulanması için kullanılan SE metodunun detayları açıklanmıştır. Sonrasında petek kirişlerin modellenmesi ele alınmıştır. Son olarak mesnetlenmesi bulonlarla sağlanan kirişlerin modellenmesi ele alınmış ve bu modelleme süreci detaylandırılmıştır.

3.1. Hareket Denkleminin Çıkartılması

3.1.1. Mesnetlerin TE’de bulunma durumu

TE’de bulunma durumu, kirişin mesnetlerinin tarafsız eksen çizgisi üzerinde yer alması durumunu ifade etmektedir. Bu alt başlık altında mesnetlerin tarafsız ekseninde bulunma durumu için hareket denklemleri çıkartılmıştır. Şekil 3.1’de mesnetleri tarafsız eksenin üzerinde bulunan basit bir kiriş gösterilmiştir. Bu kirişlerin hareket denklemleri Hamilton Prensibi kullanılarak çıkartılmıştır.



Şekil 3.1. Mesnetleri TE’de bulunan kiriş

Hamilton prensibi Denklem (3.1) ile ifade edilebilir (Meirovitch, 1967).

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (U - T - W) dt = 0 \quad (3.1)$$

Kinetik enerji Denklem (3.2) ile ifade edilebilir.

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \rho A \left(\frac{\partial w(x, t)}{\partial t} \right)^2 dx \quad (3.2)$$

Denklem (3.2)'nin varyasyonu Denklem (3.3)'de görüldüğü gibidir.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} T dt = \int_0^l \left(\int_{t_1}^{t_2} \rho A \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} \frac{\partial \delta w(x, t)}{\partial t} dt \right) dx \quad (3.3)$$

Denklem (3.3) zayıf formdadır. Güçlü form için kısmi integrasyon yöntemi uygulanırsa Denklem (3.4) elde edilir.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} T dt = - \int_{t_1}^{t_2} \rho A \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} \delta w(x, t) dt \quad (3.4)$$

Potansiyel enerji Denklem (3.5) ile ifade edilebilir.

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l EI \left(\frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (3.5)$$

Denklem (3.5)'in varyasyonu alınır, Denklem (3.6) elde edilir.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} U dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_0^l EI \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \delta w(x, t)}{\partial x^2} dx \right) dt \quad (3.6)$$

Denklem (3.6) zayıf formdadır. Güçlü form için iki defa kısmi integrasyon yöntemi uygulanmalıdır. İlk uygulamışta (3.7) elde edilir.

$$EI \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \frac{\partial \delta w(x, t)}{\partial x} \Big|_0^l - \int_0^l EI \frac{\partial^3 w(x, t)}{\partial x^3} \frac{\partial \delta w(x, t)}{\partial x} dx \quad (3.7)$$

İkinci uygulamışta ise Denklem (3.8) elde edilir.

$$-EI \frac{\partial^3 w(x, t)}{\partial x^3} \delta w(x, t) \Big|_0^l + \int_0^l EI \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} \delta w(x, t) dx \quad (3.8)$$

Böylelikle potansiyel enerji ifadesinin güçlü formu Denklem (3.9)'daki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_1}^{t_2} U dt &= EI \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \frac{\partial \delta w(x, t)}{\partial x} \Big|_0^l - EI \frac{\partial^3 w(x, t)}{\partial x^3} \delta w(x, t) \Big|_0^l \\ &+ \int_0^l EI \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} \delta w(x, t) dx \end{aligned} \quad (3.9)$$

Dış yükler tarafından yapılan iş Denklem (3.10) ile ifade edilebilir.

$$W = \int_0^l f w(x, t) dx \quad (3.10)$$

W'nin varyasyonu alınırsa Denklem (3.11) elde edilir.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} W dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_0^l f \delta w(x, t) dx \right) dt \quad (3.11)$$

Denklem (3.4), (3.9) ve (3.11)'i Denklem (3.1)'de yerine koyarak Denklem (3.12) elde edilir.

$$\begin{aligned}
& \delta \int_{t_1}^{t_2} (U - T - W) dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \left(\left(EI \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \frac{\partial \delta w(x, t)}{\partial x} \right) \Big|_0^l \right. \\
&\quad \left. - EI \frac{\partial^3 w(x, t)}{\partial x^3} \delta w(x, t) \Big|_0^l \right) dt \\
&\quad + \int_0^l \left(EI \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} \right. \\
&\quad \left. - f \delta w(x, t) \right) \delta w(x, t) dx dt
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Denklem (3.12)'deki iki katlı integralin sıfır olabilmesi yalnızca " δw " katsayısının sıfıra eşitlenmesiyle mümkündür. Bu durumda Denklem (3.13) elde edilir ve bu denklem hareket denklemi olmaktadır.

$$EI \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = f \delta w(x, t) \tag{3.13}$$

Sınır koşulları ise geriye kalan terimlerin sıfıra eşitlenmesi yoluyla elde edilir ve Denklem (3.14) ve (3.15)'de verilmektedir.

$$EI \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \frac{\partial \delta w(x, t)}{\partial x} \Big|_0^l = 0 \tag{3.14}$$

$$-EI \frac{\partial^3 w(x, t)}{\partial x^3} \delta w(x, t) \Big|_0^l = 0 \tag{3.15}$$

Serbest titreşimde dış yüklerin sıfır olduğu varsayılır ve Denklem (3.16) elde edilir.

$$EI \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (3.16)$$

Uniform bir kiriş için Denklem (3.16), Denklem (3.17)'deki gibi ifade edilebilir.

$$c^2 \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (3.17)$$

Burada $c = \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$ olarak ifade edilmektedir. Yer değiştirme bileşeni değişkenlerine ayrıştırma yöntemi ile Denklem (3.18)'deki gibi ifade edilebilir.

$$w(x, t) = W(x)T(t) \quad (3.18)$$

Denklem (3.18)'i, Denklem (3.17)'de yerine koyarak (3.19) elde edilir.

$$c^2 \frac{1}{W(x)} \frac{\partial^4 W(x)}{\partial x^4} = - \frac{1}{T(t)} \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} = a = \omega^2 \quad (3.19)$$

Burada $a = \omega^2$ 'dir. Buradan Denklem (3.20) ve (3.21) olarak iki adi diferansiyel denklem elde edilir.

$$\frac{\partial^4 W(x)}{\partial x^4} - \beta^4 W(x) = 0 \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} + \omega^2 T(t) = 0 \quad (3.21)$$

Burada $\beta^4 = \frac{\omega^2}{c^2}$ olarak ifade edilmektedir. Bu durumda açısal frekans Denklem (3.22)'deki gibi ifade edilebilir.

$$\omega = \beta^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} = (\beta l)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}} \quad (3.22)$$

Denklem (3.21)'in çözümü Denklem (3.23) şeklindedir.

$$T(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) \quad (3.23)$$

Burada A ve B başlangıç koşullarından bulunabilecek sabitlerdir. Denklem (3.20)'nin çözümü Denklem (3.24) şeklindedir ve sistemin mod şekillerini tanımlayan genel çözüm formunu vermektedir. Bu ifade, serbest titreşim modlarının şekillerini tanımlamakta olup, sistemin başlangıç koşullarına göre belirlenen C_1, C_2, C_3, C_4 katsayıları ile parametrize edilir

$$W(x) = C_1 \cosh(\beta x) + C_2 \sinh(\beta x) + C_3 \cos(\beta x) + C_4 \sin(\beta x) \quad (3.24)$$

Denklem (3.24)'ün bir diğer ifadesi Denklem (3.25) şeklinde de ifade edilebilir.

$$W(x) = C_1 (\cos(\beta x) + \cosh(\beta x)) + C_2 (\cos(\beta x) - \cosh(\beta x)) \\ + C_3 (\sin(\beta x) + \sinh(\beta x)) + C_4 (\sin(\beta x) - \sinh(\beta x)) \quad (3.25)$$

İki ucu sabit veya bir ucu sabit bir ucu kayıcı mesnetli kiriş:

Enine yer değiştirme ve eğilme momenti sabit mesnetli bir uçta sıfırdır. Dolayısıyla, sınır koşulları Denklem (3.26), (3.27), (3.28) ve (3.29)'daki gibidir.

$$W(0) = 0 \quad (3.26)$$

$$EI \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}(0) = 0 \quad (3.27)$$

$$W(l) = 0 \quad (3.28)$$

$$EI \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}(l) = 0 \quad (3.29)$$

Denklem (3.25)'in çözümü için Denklem (3.26) ve (3.27) kullanıldığında $C_1 + C_2 = 0$ elde edilir.

Denklem (3.25)'in çözümü için Denklem (3.28) ve (3.29) kullanıldığında Denklem (3.30) ve (3.31) elde edilir.

$$C_3 (\sin(\beta l) + \sinh(\beta l)) + C_4 (\sin(\beta l) - \sinh(\beta l)) = 0 \quad (3.30)$$

$$-C_3 (\sin(\beta l) - \sinh(\beta l)) - C_4 (\sin(\beta l) + \sinh(\beta l)) = 0 \quad (3.31)$$

Denklem (3.30) ve (3.31) ile tanımlanan bu homojen lineer denklem sistemi, yalnızca sıfırdan farklı çözümler içeriyorsa anlamlı olacaktır. Bu durum, matrisin determinantının sıfır olması gerektiğini ifade eder. Bu durumda Denklem (3.32) elde edilir.

$$\sin(\beta l) \sinh(\beta l) = 0 \quad (3.32)$$

$\beta=0$ olmadığı sürece, $\sinh(\beta l)$ ifadesinin sıfıra eşit olmadığı açıktır. $\beta=0$ durumu özel bir durum olarak ele alınmaz, çünkü bu durumda Denklem (3.22) gereğince $\omega=0$ olacaktır ve bu da kirişin hareketsiz olduğu ve herhangi bir titreşimin meydana gelmediği anlamına gelir. Dolayısıyla, $\beta \neq 0$ varsayımı altında frekans denklemi (3.33)'deki gibi olur.

$$\sin(\beta l) = 0 \quad (3.33)$$

Denklem (3.33)'ün kökleri (3.34)'deki bulunur.

$$\beta_n l = n\pi \quad n = 1, 2 \dots \quad (3.34)$$

Denklem (3.22)'de kökler yerine konursa iki ucu sabit veya bir ucu sabit bir ucu kayıcı mesnetli kiriş için titreşimin doğal frekansları Denklem (3.35)'deki gibi elde edilir. Bu denklem belirtildiği gibi, mesnetlerin TE'de bulunması durumunda hem sabit-sabit hem de sabit-kayıcı mesnetli bir kirişin frekansları için kullanılabilir.

$$\omega_n = (\beta_n l)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}} = n^2 \pi^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}} \quad (3.35)$$

Bir ucu sabit diğer ucu ankastre mesnetli kiriş:

Bu kiriş için sınır koşulları şu şekilde verilebilir: Ankastre mesnetli bir uçta, enine yer değiştirme ve dönme; sabit mesnetli bir uçta, enine yer değiştirme ve eğilme momenti sıfırdır. Kiriş $x = 0$ 'da sabit ve $x = l$ 'de ankastre mesnetli ise, sınır koşulları Denklem (3.36), (3.37), (3.38) ve (3.39)'daki gibi ifade edilir.

$$W(0) = 0 \quad (3.36)$$

$$\frac{dW}{dx}(0) = 0 \quad (3.37)$$

$$W(l) = 0 \quad (3.38)$$

$$EI \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}(l) = 0 \quad (3.39)$$

Denklem (3.25)'in çözümü için Denklem (3.36) kullanıldığında (3.40) elde edilir.

$$C_1 + C_3 = 0 \quad (3.40)$$

Denklem (3.25)'in çözümü için Denklem (3.37) kullanılırsa (3.41) elde edilir.

$$\beta(C_2 + C_4) = 0 \quad (3.41)$$

Böylece Denklem (3.25), (3.42)'deki gibi olur.

$$W(x) = C_1(\cos(\beta x) - \cosh(\beta x)) + C_2(\sin(\beta x) - \sinh(\beta x)) \quad (3.42)$$

Denklem (3.25)'in çözümü için Denklem (3.38) ve (3.39) kullanıldığında (3.43) ve (3.44) elde edilir.

$$C_1(\cos(\beta l) - \cosh(\beta l)) + C_2(\sin(\beta l) - \sinh(\beta l)) = 0 \quad (3.43)$$

$$-C_1(\cos(\beta l) + \cosh(\beta l)) - C_2(\sin(\beta l) + \sinh(\beta l)) = 0 \quad (3.44)$$

Daha önce de belirtildiği gibi Denklem (3.43) ve (3.44) ile tanımlanan bu homojen lineer denklem sistemi, yalnızca sıfırdan farklı çözümler içeriyorsa anlamlı olacaktır. Bu durum, matrisin determinantının sıfır olması gerektiğini ifade eder. Bu durumda Denklem (3.45) elde edilir.

$$\cos(\beta l) \sinh(\beta l) - \sin(\beta l) \cosh(\beta l) = 0 \quad (3.45)$$

Denklem (3.45)'in kökleri Denklem (3.46)'daki gibi olur.

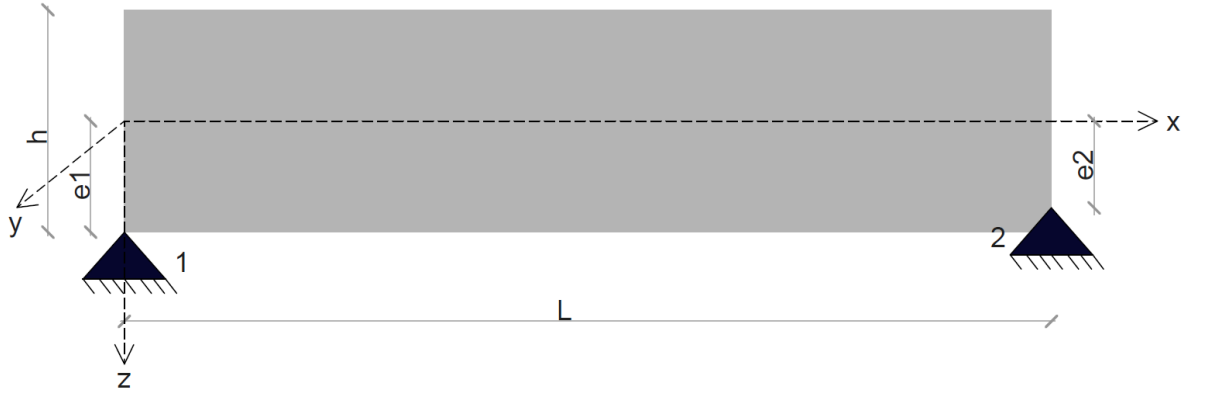
$$\beta_n l = \left(n + \frac{1}{4}\right) \pi \quad n = 1, 2 \dots \quad (3.46)$$

Denklem (3.22)'de kökler yerine konursa bir ucu ankastre bir ucu sabit mesnetli kiriş için titreşimin doğal frekansları Denklem (3.47)'deki gibi olur.

$$\omega_n = \left(\left(n + \frac{1}{4}\right) \pi\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}} \quad (3.47)$$

3.1.2. Eksantrik mesnetli olma durumu

Eksantrisite, kirişin mesnetlerinin Tarafsız Eksen (TE)'den farklı bir konumda yer alması durumudur. Eksantrik olarak mesnetlenen basit bir kiriş Şekil 3.2'de gösterilmiştir. 1 ve 2 mesnet numaralarıdır. TE ile mesnetler arasındaki mesafeler e_1 ve e_2 olarak adlandırılmıştır. Çalışmada, Euler-Bernoulli Kiriş Teorisi'nin kabulleri dikkate alınmış ve kayma deformasyonları ihmal edilmiştir. Eksantrik mesnetli kirişlerin serbest titreşim davranışını tanımlayan hareket (diferansiyel) denklemi, Hamilton prensibi kullanılarak elde edilmiştir. Hareket denklemi çözülerek kiriş frekansları analitik olarak hesaplanmıştır.



Şekil 3.2. Eksantrik olarak mesnetlenen basit kiriş

Euler-Bernoulli kiriş teorisine dayanarak, kesme deformasyonu ve dönme ataleti etkisi ihmal edildiğinde, boyuna yer değiştirme Denklem (3.48) ile ve eğilme yer değiştirmesi Denklem (3.49) ile tanımlanır (Radice, 2012). Burada $u_0(x, t)$ ve $w_0(x, t)$ tarafsız eksendeki yer değiştirme bileşenleridir.

$$U(x, z, t) = u_0(x, t) - z \frac{\partial w_0(x, t)}{\partial x} \quad (3.48)$$

$$W(x, z, t) = w_0(x, t) \quad (3.49)$$

Kirişte oluşan gerinim bileşeni Denklem (3.50) ile ifade edilir. Burada birinci terim boyuna gerinim bileşenini tanımlarken, ikinci terim ise eğilmeden kaynaklanan gerinim bileşenini tanımlar.

$$\varepsilon_x(x, z) = \frac{\partial u_0(x, t)}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0(x, t)}{\partial x^2} \quad (3.50)$$

Gerilme, Hooke yasasına göre gerinim ile ilişkilendirilirse Denklem (3.51)'de gösterildiği şekilde ifade edilir.

$$\sigma_x(x, z) = E \varepsilon_x(x, z) = E \left(\frac{\partial u_0(x, t)}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0(x, t)}{\partial x^2} \right) \quad (3.51)$$

Serbest titreşimde dış yük yani $W=0$ olduğu için Hamilton Prensibi Denklem (3.52)'deki gibi ifade edilir.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (U - T) dt = 0 \quad (3.52)$$

Potansiyel enerji ise Denklem (3.53) ile ifade edilebilir.

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x \epsilon_x b dz dx \quad (3.53)$$

Denklem (3.50) ve (3.51), Denklem (3.53)'de yerine konursa Denklem (3.54) elde edilir.

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l EA \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l EI \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (3.54)$$

Doğrusal elastik bünye ilişkisi varsayıldığında, iç kuvvet ve eğilme momenti Denklem (3.55)'deki gibi tanımlanabilir.

$$N_x = EA \frac{\partial u_0}{\partial x}, M_y = EI \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \quad (3.55)$$

Burada $I = \frac{bh^3}{12}$ olarak ifade edilmektedir. Denklem (3.55)'deki iç kuvvet ve eğilme momenti ifadeleri yerlerine konursa Denklem (3.56) elde edilir.

$$U = \frac{1}{2} \left(\int_0^l N_x \frac{\partial u_0}{\partial x} dx + \int_0^l M_y \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} dx \right) \quad (3.56)$$

Denklem (3.56)'nın varyasyonu alınırsa Denklem (3.57) elde edilir.

$$\delta U = \int_0^l N_x \frac{\partial \delta u_0}{\partial x} dx + \int_0^l M_y \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x^2} dx \quad (3.57)$$

Denklem (3.57) zayıf formdadır. Güçlü form için birinci terim 1 ikinci terime ise 2 defa kısmi integrasyon yöntemi uygulanmalıdır. İlk uygulandı (3.58) elde edilir.

$$\delta U = N_x \delta u_0 \Big|_0^l - \int_0^l \delta u_0 \frac{\partial N_x}{\partial x} dx + M_y \frac{\partial \delta w_0}{\partial x} \Big|_0^l - \int_0^l \frac{\partial M_y}{\partial x} \frac{\partial \delta w_0}{\partial x} dx \quad (3.58)$$

İkinci terime bir defa daha uygulanırsa Denklem (3.59) elde edilir.

$$\begin{aligned} \delta U = N_x \delta u_0 \Big|_0^l - \int_0^l \delta u_0 \frac{\partial N_x}{\partial x} dx + M_y \frac{\partial \delta w_0}{\partial x} \Big|_0^l - \frac{\partial M_y}{\partial x} \delta w_0 \Big|_0^l \\ + \int_0^l \delta w_0 \frac{\partial^2 M_y}{\partial x^2} dx \end{aligned} \quad (3.59)$$

Türevli olan N_x ve M_y 'den kurtulmak için Denklem (3.59)'da N_x ve M_y ifadeleri yerlerine konursa Denklem (3.60) elde edilir.

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \delta U dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[N_x \delta u_0 \Big|_0^l - \int_0^l E b h \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \delta u_0 dx + M_y \frac{\partial \delta w_0}{\partial x} \Big|_0^l \right. \\ \left. - E I \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} \delta w_0 \Big|_0^l + \int_0^l E I \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} \delta w_0 dx \right] dt \end{aligned} \quad (3.60)$$

Kinetik enerji Denklem (3.61) ile ifade edilebilir.

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \int_{-h/2}^{h/2} \rho \left[\left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right)^2 \right] b dz dx \quad (3.61)$$

Denklem (3.48) ve (3.49), Denklem (3.61)'de yerine konursa Denklem (3.62) elde edilir.

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \int_{-h/2}^{h/2} \rho \left(\frac{\partial u_0}{\partial t} - z \frac{\partial w_0}{\partial x \partial t} \right)^2 b dz dx + \frac{1}{2} \int_0^l \int_{-h/2}^{h/2} \rho \left(\frac{\partial w_0}{\partial t} \right)^2 b dz dx \quad (3.62)$$

Denklem (3.62)'nin varyasyonu alınırsa Denklem (3.63) elde edilir.

$$\begin{aligned}\delta T = & b \int_0^l \int_{-h/2}^{h/2} \rho \left(\frac{\partial u_0}{\partial t} - z \frac{\partial w_0}{\partial x \partial t} \right) \left(\frac{\partial u_0}{\partial t} - z \frac{\partial \delta w_0}{\partial x \partial t} \right) dz dx \\ & + b \int_0^l \int_{-h/2}^{h/2} \rho \frac{\partial w_0}{\partial t} \frac{\partial \delta w_0}{\partial t} b dz dx\end{aligned}\quad (3.63)$$

İntegral işlemleri yapılırsa Denklem (3.64) elde edilir.

$$\delta T = \int_0^l b \rho \left(\frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial t \partial x} \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial t \partial x} + h \frac{\partial u_0}{\partial t} \frac{\partial \delta u_0}{\partial t} \right) dx + \int_0^l \rho b h \frac{\partial w_0}{\partial t} \frac{\partial \delta w_0}{\partial t} dx \quad (3.64)$$

Denklem (3.64)'teki 1. terime x 'e göre kısmi integrasyon yöntem uygulanırsa Denklem (3.65) elde edilir.

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2} \delta T dt = & b \rho \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial t \partial x} \frac{\partial \delta w_0}{\partial t} \right]_0^l - \int_0^l \frac{h^3}{12} \frac{\partial^3 w_0}{\partial t \partial x^2} \frac{\partial \delta w_0}{\partial t} dx \\ & + \int_0^l b \rho \left(h \frac{\partial u_0}{\partial t} \frac{\partial \delta u_0}{\partial t} + h \frac{\partial w_0}{\partial t} \frac{\partial \delta w_0}{\partial t} \right) dx \Bigg] dt\end{aligned}\quad (3.65)$$

Denklem (3.65) t 'ye göre kısmi integrasyon yöntemi uygulamak üzere düzenlenirse Denklem (3.66) elde edilir.

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2} \delta T dt = & b \rho \int_{t_1}^{t_2} \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial t \partial x} \frac{\partial \delta w_0}{\partial t} \Bigg|_0^l \\ & - b \rho \int_0^l \left(\int_{t_1}^{t_2} \frac{h^3}{12} \frac{\partial^3 w_0}{\partial t \partial x^2} \frac{\partial \delta w_0}{\partial t} dt \right) dx \\ & + b \rho \int_0^l \left[\int_{t_1}^{t_2} \left(h \frac{\partial u_0}{\partial t} \frac{\partial \delta u_0}{\partial t} + h \frac{\partial w_0}{\partial t} \frac{\partial \delta w_0}{\partial t} \right) dt \right] dx\end{aligned}\quad (3.66)$$

Denklem (3.66)'da 2. ve 3. terim için kısmi integrasyon yöntemi uygulanırsa Denklem (3.67) elde edilir.

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} \delta T dt &= b\rho \int_{t_1}^{t_2} \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial t \partial x} \frac{\partial \delta w_0}{\partial t} \Big|_0^l \\
&+ b\rho \int_0^l \left(-\frac{h^3}{12} \frac{\partial^3 w_0}{\partial t \partial x^2} \delta w_0 \Big|_{t_1}^{t_2} \right. \\
&+ \left. \int_{t_1}^{t_2} \frac{h^3}{12} \frac{\partial^4 w_0}{\partial t^2 \partial x^2} \delta w_0 dt \right) dx \\
&+ b\rho \int_0^l \left[h \frac{\partial u_0}{\partial t} \delta u_0 \Big|_{t_1}^{t_2} \right. \\
&- \left. \int_{t_1}^{t_2} h \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \delta u_0 dt + \left(h \frac{\partial w_0}{\partial t} \delta w_0 \right) \Big|_{t_1}^{t_2} \right. \\
&- \left. \int_{t_1}^{t_2} h \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \delta w_0 dt \right] dx
\end{aligned} \tag{3.67}$$

Denklem (3.60) ve (3.67), Denklem (3.52)'de yerine konursa Denklem (3.68) elde edilir.

$$\begin{aligned}
&\int_{t_1}^{t_2} (\delta U - \delta T) dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \left[\left(b\rho h \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - E b h \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \right) \delta u_0 \right. \\
&+ \left. \left(E I \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} - b\rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^4 w_0}{\partial t^2 \partial x^2} + b\rho h \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \right) \delta w_0 \right] dx dt \\
&+ \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(N_x \delta u_0 + M_y \frac{\partial \delta w_0}{\partial x} \right) \Big|_0^l - E I \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} \delta w_0 \Big|_0^l \right. \\
&- \left. b\rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial t \partial x} \frac{\partial \delta w_0}{\partial t} \Big|_0^l \right] dt \\
&+ \int_0^l \left[\left(b\rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^3 w_0}{\partial t \partial x^2} \delta w_0 - b\rho h \frac{\partial w_0}{\partial t} \delta w_0 \right) \Big|_{t_1}^{t_2} \right. \\
&- \left. \left(b\rho h \frac{\partial u_0}{\partial t} \delta u_0 \right) \Big|_{t_1}^{t_2} \right] dx
\end{aligned} \tag{3.68}$$

Denklem (3.68)'den diferansiyel hareket denklemleri ve sınır koşulları elde edilir. Denklem (3.69) boyuna yer değiştirmeyi ve Denklem (3.70) eğilme yer değiştirmesini ifade eder. Burada $a = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ olarak verilir.

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} = 0 \quad (3.69)$$

$$EI \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + b\rho h \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} - b\rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^4 w_0}{\partial t^2 \partial x^2} = 0 \quad (3.70)$$

Denklem (3.70)'teki 3. terim $\rho I \frac{\partial^4 w_0}{\partial t^2 \partial x^2}$ şeklinde yazılabilir ve bu terim dönme ataletinin etkisini ifade eder. Bu çalışmada Euler-Bernoulli kiriş teorisinin varsayımları geçerli kabul edildiği için dönme ataletinin etkisi ve dolayısıyla 3. terim ihmal edilmiştir. Böylelikle Denklem (3.70), (3.71)'deki gibi ifade edilebilir.

$$EI \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + b\rho h \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} = 0 \quad (3.71)$$

Sonrasında bu diferansiyel denklemlerin çözümüne geçilir. Denklem (3.69) değişkenlerine ayırma yöntemi ile Denklem (3.72) şeklinde ifade edilebilir.

$$u_0(x, t) = U(x)T(t) \quad (3.72)$$

Denklem (3.72)'yi Denklem (3.69)'da yerine koyarak Denklem (3.73) elde edilir.

$$\frac{1}{a^2 T(t)} \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} = \frac{1}{U(x)} \frac{\partial^2 U(x)}{\partial x^2} = -\omega^2 \quad (3.73)$$

Buradan sırasıyla zamana bağlı ve uzaya bağlı, Denklem (3.74) ve (3.75) elde edilir.

$$\frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} + \omega^2 T(t) = 0 \quad (3.74)$$

$$\frac{\partial^2 U(x)}{\partial x^2} + \frac{\omega^2}{a^2} U(x) = 0 \quad (3.75)$$

Denklem (3.74)'ün çözümü (3.76)'daki gibi elde edilir.

$$T(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) \quad (3.76)$$

Burada A ve B başlangıç koşullarından bulunabilecek sabitlerdir. Denklem (3.75)'in çözümü Denklem (3.77) şeklindedir.

$$U(x) = D_1 \cos\left(\frac{\omega}{a} x\right) + D_2 \sin\left(\frac{\omega}{a} x\right) \quad (3.77)$$

Eğilme yer değiştirmesinin diferansiyel denklemi olan Denklem (3.71)'in çözümüne geçilir.

Uniform bir kiriş için Denklem (3.71), Denklem (3.78)'deki gibi ifade edilebilir.

$$c^2 \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (3.78)$$

Burada $c = \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$ olarak verilir. Yer değiştirme bileşeni değişkenlerine ayırıştırma yöntemi ile Denklem (3.79)'daki gibi ifade edilebilir.

$$w(x, t) = W(x)T(t) \quad (3.79)$$

Denklem (3.79)'u, Denklem (3.78)'de yerine koyarak (3.80) elde edilir.

$$c^2 \frac{1}{W(x)} \frac{\partial^4 W(x)}{\partial x^4} = - \frac{1}{T(t)} \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} = k = \omega^2 \quad (3.80)$$

Burada $k = \omega^2$ 'dir. Burada Denklem (3.81) ve (3.82) olarak iki adi diferansiyel denklem elde edilir.

$$\frac{\partial^4 W(x)}{\partial x^4} - \beta^4 W(x) = 0 \quad (3.81)$$

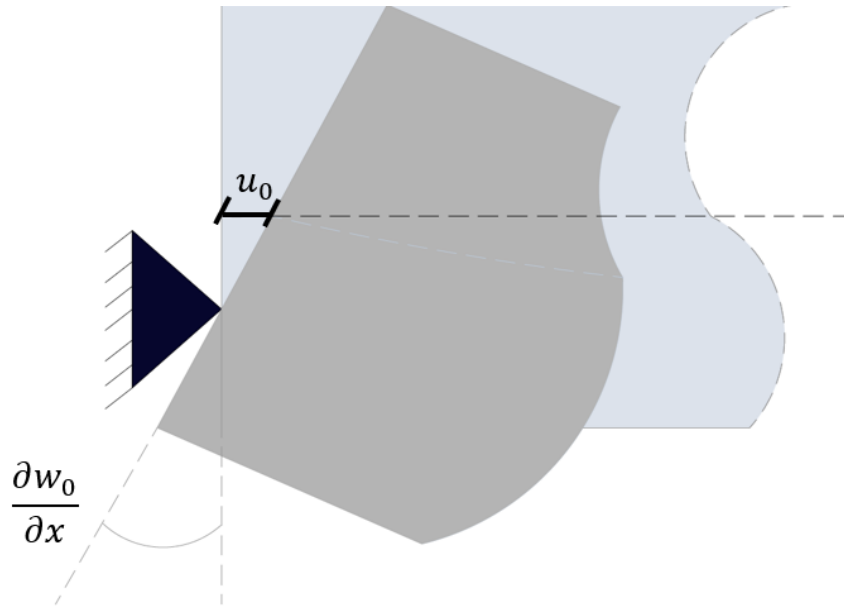
$$\frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} + \omega^2 T(t) = 0 \quad (3.82)$$

Denklem (3.82)'nin çözümü (3.74)'ün çözümü ile aynıdır ve (3.76)'da verilmiştir.

Denklem (3.81)'in çözümü, Denklem (3.83) şeklindedir ve sistemin mod şekillerini tanımlayan genel çözüm formunu vermektedir. Bu ifade, serbest titreşim modlarının şekillerini tanımlamakta olup, sistemin başlangıç koşullarına göre belirlenen C_1 , C_2 , C_3 , C_4 katsayıları ile tanımlıdır.

$$W(x) = C_1 \cosh(\beta x) + C_2 \sinh(\beta x) + C_3 \cos(\beta x) + C_4 \sin(\beta x) \quad (3.83)$$

Mesnet bölgesindeki kiriş deformasyonu Şekil 3.3'te gösterilmiştir. Sınır koşulları, bu davranış göz önünde bulundurularak belirlenmiştir.



Şekil 3.3. Yer değiştirme ilişkisi

Şekil 3.3'te gösterilen sınır koşulu Denklem (3.84)'teki gibi ifade edilebilir.

$$u_0 + e \frac{\partial w_0}{\partial x} = 0 \quad (3.84)$$

Sabit mesnetin oluşturduğu kısıtlama kuvvetinin orta düzleme aktarılmasıyla, sınırdaki iç kuvvetler N ve eğilme momentleri M hesaplanabilir. Denklem (3.84)'ün varyasyonu alınarak, Denklem (3.68)'de yerine konursa Denklem (3.85) elde edilir.

$$(M_y - eN_x) \Big|_{x=0}^{x=L} = 0 \quad (3.85)$$

Bir kirişin kayıcı mesnetli olan ucunda x yönündeki hareket belirsizdir ve Denklem (3.84)'e benzer bir durum mevcut değildir. Denklem (3.84)'teki ilişki sadece eksantrik de olabilen sabit mesnet olma durumunda mevcuttur. Bu çalışmanın analitik kısmında 3 tip mesnetlenme durumu için sınır koşulları aşağıda verilmiştir.

Sınır koşulları şu şekildedir: Eksantrik sabit mesnet olma durumunda Denklem (3.86)'da, kayıcı mesnetli olma durumunda (3.87)'de, ankastre mesnet olma durumunda (3.88)'de verilmiştir.

$$u_0 + e \frac{\partial w_0}{\partial x} = 0, w_0 = 0, M_y - eN_x = 0 \quad (3.86)$$

$$N_x = 0, M_y = 0, w_0 = 0 \quad (3.87)$$

$$u_0 = 0, w_0 = 0, \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (3.88)$$

Denklem (3.55), (3.72) ve (3.79); Denklem (3.86), (3.87), (3.88)'de yerine konduğunda üç kombinasyon için aşağıdaki sınır koşulları elde edilir.

Her iki mesnetin de eksantrik sabit mesnetli olma durumunda sınır koşulları:

$$\begin{aligned}
U_i(0) + e_1 \frac{\partial W_i(0)}{\partial x} &= 0, & W_i(0) &= 0, & I \frac{\partial^2 W_i(0)}{\partial x^2} - e_1 b h \frac{\partial U_i(0)}{\partial x} &= 0 \\
U_i(L) + e_2 \frac{\partial W_i(L)}{\partial x} &= 0, & W_i(L) &= 0, & I \frac{\partial^2 W_i(L)}{\partial x^2} - e_2 b h \frac{\partial U_i(L)}{\partial x} &= 0
\end{aligned} \tag{3.89}$$

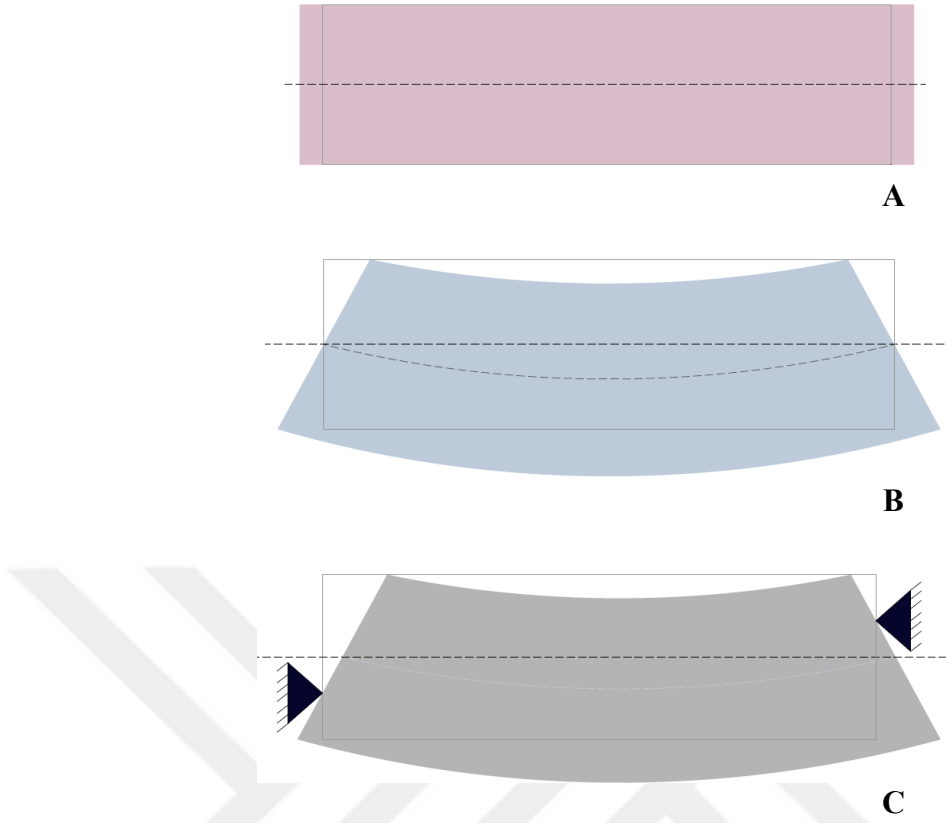
Bir mesnetin eksantrik sabit mesnet, diğer mesnetin kayıcı mesnet olma durumunda sınır koşulları:

$$\begin{aligned}
U_i(0) + e_1 \frac{\partial W_i(0)}{\partial x} &= 0, & W_i(0) &= 0, & I \frac{\partial^2 W_i(0)}{\partial x^2} - e_1 b h \frac{\partial U_i(0)}{\partial x} &= 0 \\
\frac{\partial U_i(L)}{\partial x} &= 0, & W_i(L) &= 0, & \frac{\partial^2 W_i(L)}{\partial x^2} &= 0
\end{aligned} \tag{3.90}$$

Bir mesnetin ankastre mesnet, diğer mesnetin sabit mesnet olması durumunda sınır koşulları:

$$\begin{aligned}
U_i(0) + e_1 \frac{\partial W_i(0)}{\partial x} &= 0, & W_i(0) &= 0, & I \frac{\partial^2 W_i(0)}{\partial x^2} - e_1 b h \frac{\partial U_i(0)}{\partial x} &= 0 \\
U_i(L) &= 0, & W_i(L) &= 0, & \frac{\partial W_i(L)}{\partial x} &= 0
\end{aligned} \tag{3.91}$$

Çıkarılan eğilme yer değiştirme denklemi 4 bilinmeyen içerirken, boyuna yer değiştirme denklemleri 2 bilinmeyen içerir. Dolayısıyla toplamda 6 bilinmeyen çözüm için 6 sınır koşuluna ihtiyaç duyulur. Bu iki yer değiştirme modu, birbirinden bağımsız olmayıp eksantrik mesnetleme nedeniyle bağlanmış bir şekilde hareket eder. Bu durum, Şekil 3.4'te görüldüğü gibi boyuna yer değiştirme $U(x)$ ve eğilme yer değiştirme $W(x)$ etkilerinin etkileşimi sonucu ortaya çıkan birleşik yer değiştirme ile açıklanabilir. Eksantrik mesnetlenme durumunda elde edilen boyuna yer değiştirme ve eğilme yer değiştirme diferansiyel denklemleri çıkarılan sınır koşulları kullanılarak Mathematica programı ile çözülmüş ve eksantrik mesnetli kirişin açılma frekansı türetilmiştir.



Şekil 3.4. Yer değiştirmeler **A)** Boyuna **B)** Eğilme **C)** Birleşik yer değiştirme

Eksantrik sabit-sabit mesnetli sistem için karakteristik denklem, Denklem (3.92)'de verilmiştir.

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{a^2 E \sqrt{I}} 2e^{-\frac{L \rho I^{1/4} \sqrt{\omega}}{E^{1/4} I^{1/4}}} \sqrt{\rho} \omega^2 (a I^{3/4} \rho I^{1/4} \sin[\frac{L(\rho A)^{1/4} \sqrt{\omega}}{E^{1/4} I^{1/4}}]) (-4Ae^{-\frac{L(\rho A)^{1/4} \sqrt{\omega}}{E^{1/4} I^{1/4}}} E^{1/4} e_1 e_2 \sqrt{\omega} \\
 & + A(1 + e^{\frac{2L(\rho A)^{1/4} \sqrt{\omega}}{E^{1/4} I^{1/4}}}) E^{1/4} (e_1^2 + e_2^2) \sqrt{\omega} \cos[\frac{L\omega}{a}] + 2a(-1 \\
 & + e^{\frac{2L(\rho A)^{1/4} \sqrt{\omega}}{E^{1/4} I^{1/4}}}) I^{3/4} (\rho A)^{1/4} \sin[\frac{L\omega}{a}] - 2AE^{1/4} e_1 e_2 \sqrt{\omega} (-a(-1 \\
 & + e^{\frac{2L(\rho A)^{1/4} \sqrt{\omega}}{E^{1/4} I^{1/4}}}) I^{3/4} (\rho A)^{1/4} + Ae^{-\frac{L(\rho A)^{1/4} \sqrt{\omega}}{E^{1/4} I^{1/4}}} E^{1/4} e_1 e_2 \sqrt{\omega} \sin[\frac{L\omega}{a}]) \\
 & + AE^{1/4} \sqrt{\omega} \cos[\frac{L(\rho A)^{1/4} \sqrt{\omega}}{E^{1/4} I^{1/4}}]) (-a(-1 + e^{\frac{2L(\rho A)^{1/4} \sqrt{\omega}}{E^{1/4} I^{1/4}}}) (e_1^2 \\
 & + e_2^2) I^{3/4} (\rho A)^{1/4} \cos[\frac{L\omega}{a}] + A(1 \\
 & + e^{\frac{2L(\rho A)^{1/4} \sqrt{\omega}}{E^{1/4} I^{1/4}}}) E^{1/4} e_1^2 e_2^2 \sqrt{\omega} \sin[\frac{L\omega}{a}])) \quad (3.92)
 \end{aligned}$$

Eksantrik sabit-kayıcı mesnetli sistemin karakteristik denklemi, Denklem (3.93)'te verilmiştir.

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{a^2 E I^{3/4}} e^{-\frac{L(\rho A)^{1/4} \sqrt{\omega}}{E^{1/4} I^{1/4}}} (4a(-1 \\
& + e^{\frac{2L(\rho A)^{1/4} \sqrt{\omega}}{E^{1/4} I^{1/4}}}) I^{3/4} (\rho A) \omega^3 \cos\left[\frac{L\omega}{a}\right] \sin\left[\frac{L(\rho A)^{1/4} \sqrt{\omega}}{E^{1/4} I^{1/4}}\right] \\
& + 2AE^{1/4} e_1^2 (\rho A)^{3/4} \omega^{7/2} ((-1 \\
& + e^{\frac{2L(\rho A)^{1/4} \sqrt{\omega}}{E^{1/4} I^{1/4}}}) \cos\left[\frac{L(\rho A)^{1/4} \sqrt{\omega}}{E^{1/4} I^{1/4}}\right] - (1 \\
& + e^{\frac{2L(\rho A)^{1/4} \sqrt{\omega}}{E^{1/4} I^{1/4}}}) \sin\left[\frac{L(\rho A)^{1/4} \sqrt{\omega}}{E^{1/4} I^{1/4}}\right]) \sin\left[\frac{L\omega}{a}\right])
\end{aligned} \tag{3.93}$$

Ankastre-sabit mesnetli sistemin karakteristik denklemi, Denklem (3.94)'te verilmiştir.

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{a E^{3/4} \sqrt{I}} e^{-\frac{L(\rho A)^{1/4} \sqrt{\omega}}{E^{1/4} I^{1/4}}} (-2AE^{1/4} e_1^2 \sqrt{(\rho A)} \omega^2 (-2e^{\frac{L(\rho A)^{1/4} \sqrt{\omega}}{E^{1/4} I^{1/4}}} + (1 \\
& + e^{\frac{2L(\rho A)^{1/4} \sqrt{\omega}}{E^{1/4} I^{1/4}}}) \cos\left[\frac{L(\rho A)^{1/4} \sqrt{\omega}}{E^{1/4} I^{1/4}}\right]) \cos\left[\frac{L\omega}{a}\right] \\
& - 2a I^{3/4} (\rho A)^{3/4} \omega^{3/2} ((-1 + e^{\frac{2L(\rho A)^{1/4} \sqrt{\omega}}{E^{1/4} I^{1/4}}}) \cos\left[\frac{L(\rho A)^{1/4} \sqrt{\omega}}{E^{1/4} I^{1/4}}\right] \\
& - (1 + e^{\frac{2L(\rho A)^{1/4} \sqrt{\omega}}{E^{1/4} I^{1/4}}}) \sin\left[\frac{L(\rho A)^{1/4} \sqrt{\omega}}{E^{1/4} I^{1/4}}\right]) \sin\left[\frac{L\omega}{a}\right])
\end{aligned} \tag{3.94}$$

3.2. Sonlu Elemanlar Analizi

Herhangi bir mühendislik probleminin çözümü için üç temel yöntem bulunmaktadır: Analitik yöntem, sayısal yöntem ve deneysel yöntem (Tajima vd., 2009). Sonlu elemanlar metodu (SEM), belirli sonuçlar elde etmek için gerilmeye tabi tutulan ve analiz edilen bir malzeme veya tasarımın bilgisayar modelinden oluşan, yapıları analiz etmek için kullanılan sayısal bir yöntemdir (Zienkiewicz vd., 2005).

Bu çalışmada gerçekleştirilen sonlu elemanlar (SE) analizlerinde, ticari SE yazılımı Abaqus (2012) kullanılmıştır. Analizlerde I kesitli ve dikdörtgen kesitli kirişler modellenmiştir. Bu iki kirişin modellenmesinde “S4” tipi kabuk (shell) eleman (bkz. Şekil 3.5 ve Şekil 3.6) kullanılmıştır. Malzeme modeli doğrusal elastik olarak tanımlanmış ve malzemenin homojen izotropik olduğu kabul edilmiştir.



Şekil 3.5. Kabuk eleman ile oluşturulan I kiriş modeli

Bu çalışma kapsamında kirişlerin düzlem dışı davranışları ve frekansları incelenmediği için modelleme sürecinde kirişlerin düzlem dışı hareketleri tutulmuştur. Bu sayede yalnızca düzlem içi modlar ve frekanslar elde edilmiştir. Modellerde ağ (mesh) büyüklüklerini belirlemek için uyum (convergence) analizi gerçekleştirilmiştir.

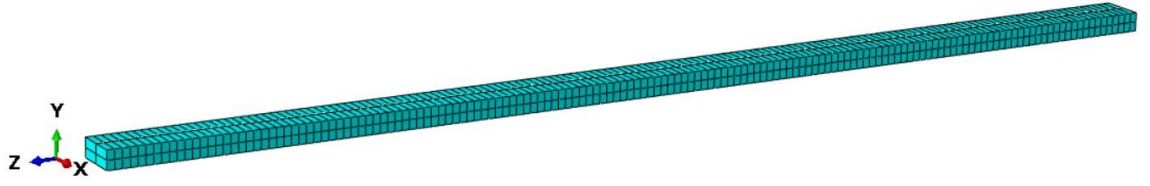
Sınır şartlarının tanımlanması: Sabit mesnetli uçlarda dönmeler serbest bırakılmış yer değiştirmeler kısıtlanmıştır. Kayıcı mesnete sahip uçlarda dönmeler ve z yönündeki yer değiştirme serbest bırakılmış diğer yönlerdeki yer değiştirmeler kısıtlanmıştır.

Literatürde bu konuda çalışan araştırmacılarla sonuçların karşılaştırılabilmesi ve analitik olarak elde edilen frekans denklemlerinin doğrulanması amacıyla literatürde kullanılan (Li vd., 2023; Fernando vd., 2018) kiriş örneklerinin özellikleri dikdörtgen kesitli kiriş modellerinde kullanılmıştır. Kirişlerin uzunluğu (L), yüksekliği (h), genişliği (b), elastisite modülü (E), yoğunluğu (ρ), Poisson oranı (ν) gibi geometrik ve malzeme özellikleri Çizelge 3.1’de sunulmuştur.

Çizelge 3.1. Dikdörtgen kesitli kirişlerin geometrik ve malzeme özellikleri

Kiriş Tipi	L (mm)	h (mm)	b (mm)	E (GPa)	ρ (kg/m ³)	ν
Dikdörtgen kesitli	762	12,7	50,8	69	2730	0,33

Tanımlanan dikdörtgen kesitli kiriş modeli Şekil 3.6’te görülmektedir.

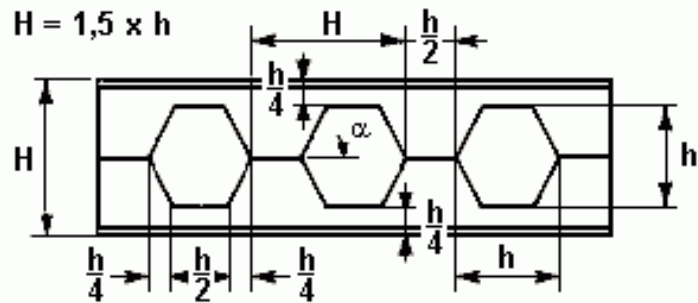


Şekil 3.6. Kabuk eleman ile oluşturulan dikdörtgen kesitli kiriş modeli (kabuk kalınlığı gösterimi ile)

Bu özelliklerin dışında I ve Petek kiriş modellerinde kullanılan geometrik ve malzeme özellikleri Çizelge 3.2’de verilmiştir.

3.2.1. Petek kirişlerin modellenmesi

Tipik bir petek kiriş için Grünbauer BV (2024) kaynağında belirtilen boyutlar, çelik üretim standardını temsil etmekte olup, petek kirişlerin boyutlandırılmasında kullanılmaktadır. Bu ölçüler ve açılar minimum ya da maksimumu değerleri ifade etmemekte, tek tip boyutları temsil etmektedir. İlgili boyutlar ve geometrik detaylar Şekil 3.7’de gösterilmiştir.



Şekil 3.7. Tipik petek kiriş boyutları (Grünbauer BV, 2024)

Bu boyutlar dikkate alınarak çizilen kirişin ölçekli görünüşü Şekil 3.8’de görülmektedir. Petek kirişin enine kesit boyutları ise Şekil 3.12’de verilmiştir.

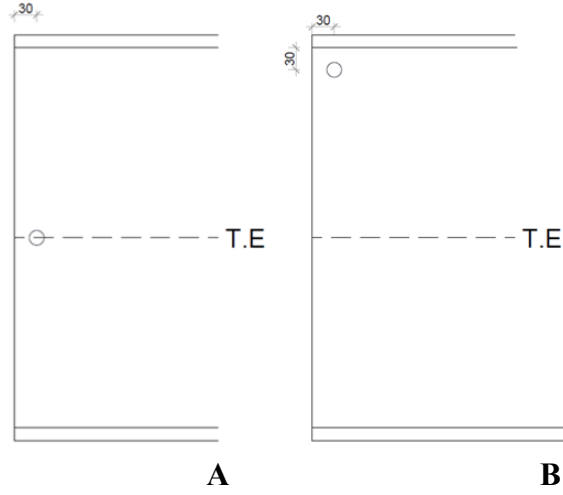


Şekil 3.8. Petek kiriş SE modelinin genel görünüşü

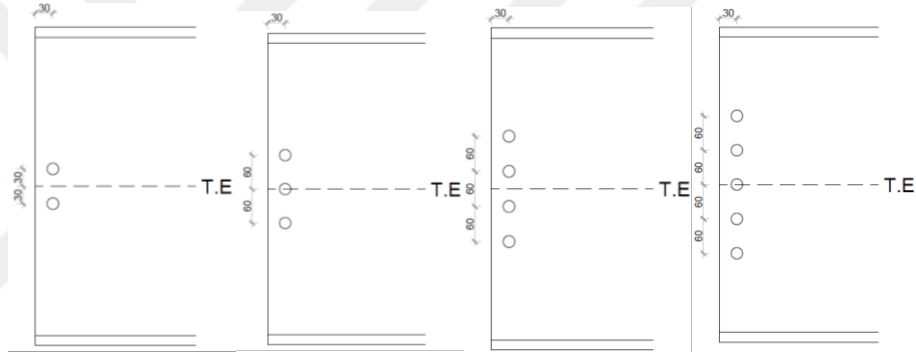
Petek kirişlerin eksantrisitenin çalışılabilmesi için değişken eksantrisite durumları göz önüne alınmış ve sonlu elemanlar modellerinde mesnetin olduğu konuma göre tanımlama yapılmıştır. Bu mesnetlenme durumları ve incelenmeleri Bölüm 4.3'te verilmiştir.

3.2.2. Bulonlu birleşimlerin modellenmesi

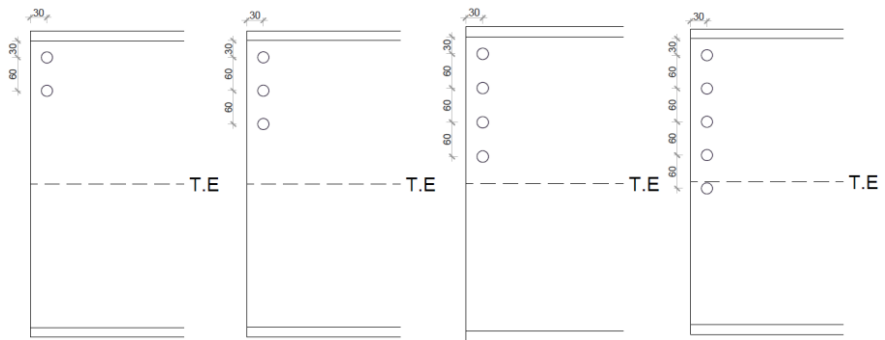
Bu çalışmada bulonlu kirişlerden kasıt, iki ucunda moment aktarmayan bulonlu birleşimlere sahip kirişlerdir. Bu kirişler, bulonlar üzerinden sabit mesnetli kabul edilmiştir. Birden fazla bulona sahip birleşimlere bulon grubu ifadesi kullanılmıştır. Çalışmada, bulon gruplarının merkezinin TE'de olma durumu (eksantrik olmayan bulon grubu) ve bulon grubunun merkezinin TE'de olmama durumu (eksantrik bulon grubu) dikkate alınmıştır. Birleşimlerde bulon sayısı 1'den 5'e değişmekle birlikte, bulon çapı 20 mm, kenara olan uzaklık 30 mm ve bulonlar arası mesafe 60 mm'dir. Yapılan kıyaslamalarda dikkate alınan kirişlerin her iki ucundaki bulon sayısı, bulonların yerleşim şekilleri ve mesnetlenmeleri aynıdır. Bulon grubunda, bulon sayısı ve bulon grubunun eksantrisitesi, frekans hesaplamalarında parametreler (değişkenler) olarak belirlenmiştir. Dikkate alınan farklı bulon sayısı ve farklı eksantrisite durumları Şekil 3.9, Şekil 3.10 Şekil 3.11'de verilmiştir.



Şekil 3.9. Tek bulonların yerleşimi A) TE üzerinde B) Eksantrik

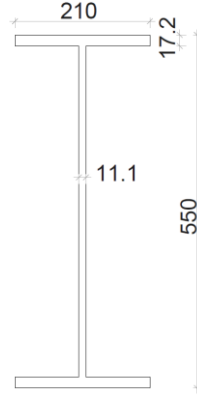


Şekil 3.10. TE üzerinde yerleşimli bulon grupları



Şekil 3.11. Eksantrik yerleşimli bulon grupları

Bulonlu birleşimli kirişlerde, I kiriş ve petek kirişlerin doğal frekansları incelenmiştir. Kirişin enine kesit boyutları Şekil 3.12’de verilmiştir.



Şekil 3.12. Enine kesit boyutları

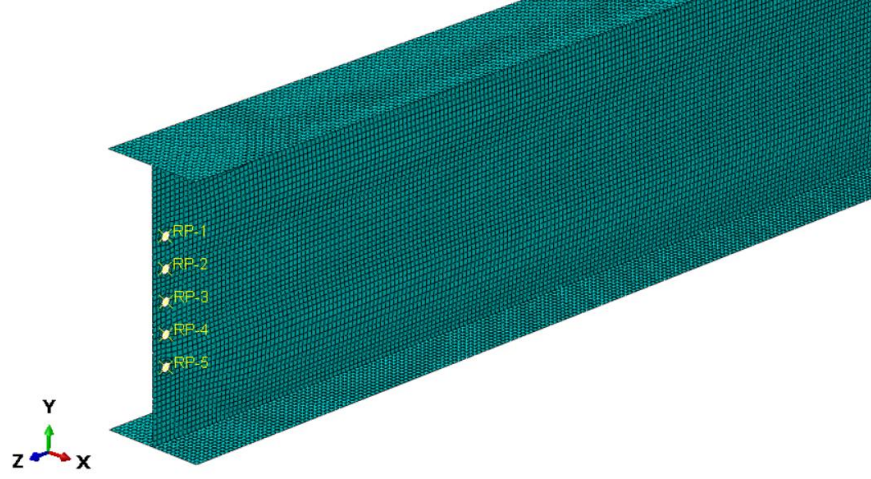
Bölüm 4.4'te sonuçları verilen bulonlu birleşimler, içi dolu (I kiriş) ve boşluklu (petek) kirişlerde çalışılmıştır. Bulonlu birleşimler için I ve petek olmak üzere temel olarak 2 tip kiriş modeli üzerinde analizler yapılmıştır. Oluşturulan petek kiriş modeli Şekil 3.8'de verilmiştir.

Bulonlu birleşimli kirişlerin (I ve Petek) malzemesi olarak çelik kullanılmıştır. Kirişlerin kesit yüksekliği (d), başlık kalınlığı (t_f), gövde kalınlığı (t_w), başlık genişliği (b) olmak üzere bulonlu birleşimli kirişler için kullanılan geometrik ve malzeme özellikleri Çizelge 3.2'de verilmiştir.

Çizelge 3.2. I ve petek kirişlerin geometrik ve malzeme özellikleri

Kiriş Tipi	L (mm)	d (mm)	t_f (mm)	t_w (mm)	b (mm)	E (GPa)	ρ (kg/m ³)	ν
I ve Petek	8250	550	17,2	11,1	210	200	7850	0,30

Bulonlu birleşimli kirişlerin sınır şartları, bulonların merkezinde üç doğrultudaki yer değiştirmeler sabitlenerek (sabit mesnet tanımı) belirlenmiştir. Örneğin merkezi olarak mesnetlenmiş beş bulonlu bir I kesitli kirişin bir ucu Şekil 3.13'te verilmiştir.



Şekil 3.13. Ağırlık merkezleri tarafsız eksen üzerinde olan beş bulonlu I kiriş

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bulgular ve Tartışma bölümünde, eksantrik mesnetli kirişlerin dinamik davranışları üzerine yapılan çalışmalar sunulmuştur. İlk olarak, 4.1 numaralı alt bölümde, eksantrik mesnetli bir kiriş için elde edilen denklemlerin, literatür, SEM ve mesnetlenmesi TE üzerinde olan bir kirişin frekans denklemi ile doğrulanması gerçekleştirilmiştir. Sonrasında 4.2 numaralı alt bölümde mesnet eksantrisitesinin kirişlerin frekansı üzerindeki etkisi detaylı bir şekilde analiz edilmiştir. 4.3 numaralı alt bölümde, petek kirişlerde eksantrisitenin frekansa etkisi incelenmiştir. 4.4 numaralı alt bölümde, eksantrik yerleştirilen bulon grubunun kirişlerin frekansı üzerindeki etkisi gösterilmiştir.

4.1. Eksantrik Mesnetli Bir Kiriş İçin Elde Edilen Denklemlerin Doğrulanması

Eksantrik mesnetin tarafsız eksene olan mesafesinin kiriş yüksekliğinde bölünmesi normalize edilmiş eksantrisiteyi tanımlar ve bu ifade Denklem (4.1)'de verilmiştir.

$$eh_n = \frac{e_n}{h} \quad (4.1)$$

n burada, sol mesnet için 1 sağ mesnet için 2 olmak üzere mesnet numarasını ifade etmektedir. İki uçtaki e değerinin aynı olması durumunda ise $eh = \frac{e_1}{h} = \frac{e_2}{h}$ şeklinde ifade edilir.

Çıkarılan denklemlerin doğruluğunu irdelemek için Bölüm 3.1.2'de türetilen analitik denklemlerle bulunan frekans değerleri önce literatürde verilen örneklerin sonuçları ile kıyaslanmıştır. Bu kıyaslamalar aşağıda mesnetlenme durumlarına göre sırasıyla verilmiştir.

Eksantrik sabit-sabit mesnetli olma durumu için çıkarılan Denklem (3.92) ile elde edilen 1. mod frekans değerleri, farklı eksantrisite durumları (eh) için Fernando vd., (2018) çalışmasında verilen örneğin sonuçları ile kıyaslanmıştır. Sonuçlar Çizelge 4.1'de verilmiştir. Söz konusu örneğe ait bilgiler Bölüm 3.2'de sunulan Çizelge 3.1'de verilmiştir. Sonuçların oldukça iyi uyuştğu görülmektedir.

Çizelge 4.1. Sabit-sabit mesnetlenme durumunda analitik sonuçların literatür ile kıyaslanması

Mod	eh	Analitik	Fernando	Analitik-Fernando %Hata
1	0	49,86	49,86	0,00
	0,125	53,39	53,39	0,00
	0,25	61,71	61,71	0,00
	0,375	71,09	71,10	0,01
	0,5	79,48	79,46	0,03

Sabit-kayıcı mesnetli olma durumu için çıkarılan Denklem (3.93) ile elde edilen 1. mod frekans değerleri, farklı eksantrisite durumları (eh) için Li vd., (2023) ve Fernando vd., (2018) çalışmalarında verilen örneğin sonuçları ile kıyaslanmıştır. Sonuçlar Çizelge 4.2’de verilmiştir. Söz konusu örneğe ait bilgiler Bölüm 3.2’de sunulan Çizelge 3.1’de verilmiştir. Sonuçların oldukça iyi uyduğu görülmektedir.

Çizelge 4.2. Sabit-kayıcı mesnetlenme durumunda analitik sonuçların literatür ile kıyaslanması

Mod	eh	Analitik	Li	Analitik-Li %Hata	Fernando	Analitik-Fernando %Hata
1	0	49,86	49,85	0,02	49,84	0,04
	0,5	49,83	49,81	0,04	49,77	0,12

Ankastre-sabit mesnetli olma durumu için çıkarılan Denklem (3.94) ile elde edilen 1. mod frekans değerleri, farklı eksantrisite durumları (eh) için Fernando vd., (2018) çalışmasında verilen örneğin sonuçları ile kıyaslanmıştır. Sonuçlar Çizelge 4.3’te verilmiştir. Söz konusu örneğe ait bilgiler Bölüm 3.2’de sunulan Çizelge 3.1’de verilmiştir. Sonuçların oldukça iyi uyduğu görülmektedir.

Çizelge 4.3. Ankastre-sabit mesnetlenme durumunda analitik sonuçların literatür ile kıyaslanması

Mod	eh ₂	Analitik	Fernando	Analitik-Fernando %Hata
1	0	77,89	77,89	0,00
	0,125	78,87	78,89	0,03
	0,25	81,48	81,44	0,05
	0,375	85,06	85,08	0,02
	0,5	88,90	89,11	0,24

Diğer doğrulama SEM ile olmuştur. Analitik denklemlerin SEM ile kıyaslaması yapılmış ve Çizelge 4.4'te verilmiştir. SEM ile bulunan doğal frekanslar Bölüm 3.2'de detayları verilen dikdörtgen kesitli SE modelinin analizi ile elde edilmiştir. Sonuçların oldukça iyi uyduğu görülmektedir.

Çizelge 4.4. Eksantrik mesnetli bir kiriş için elde edilen denklemlerin SEM ile doğrulanması

Mod	Mesnetlenme Durumu	eh	$f_{analitik}$	f_{SEM}	$f_{analitik}-f_{SEM}$ %Hata
1	Sabit-sabit	0	49,86	49,90	0,08
		0,5	79,48	78,09	1,75
1	Sabit-kayıcı	0	49,86	49,90	0,08
		0,5	49,83	49,89	0,12
1	Ankastre-sabit	0	77,89	77,94	0,06
		0,5	88,90	88,61	0,33

Bir diğer doğrulama mesnetlerin TE'de bulunma durumları için Bölüm 3.1.1'de çıkarılan Denklem (3.35) ve (3.47) ile yapılmıştır. Doğrulamada dikdörtgen kesitler için Çizelge 4.5'te verilen dikdörtgen kesitli kirişin malzeme özellikleri kullanılmıştır. Karşılaştırma Çizelge 4.5'te verilmiştir. Sonuçların oldukça iyi uyduğu görülmektedir.

Çizelge 4.5. Eksantrik mesnetli bir kiriş için elde edilen denklemlerin mesnetlerin TE olma durumu için çıkarılan denklemler ile doğrulanması

Mod	Mesnetlenme Durumu	eh	Mesnetlerin TE'de Bulunma durumu için $f_{analitik}$	Eksantrik Mesnetler için $f_{analitik}$	%Hata
1	Sabit-sabit veya sabit-kayıcı	0	49,84	49,86	0,04
1	Ankastre-sabit	0	77,87	77,89	0,06

4.2. Mesnet Eksantrisitesinin Kirişlerin Frekansı Üzerindeki Etkisi

Bu alt bölümde; mesnet eksantrisitesinin kirişlerin frekansı üzerindeki etkisini incelemede kullanılan sabit-sabit, sabit-kayıcı, ankastre-sabit sınır şartları literatürde klasik sınır şartları olarak tanımlanmaktadır. Klasik sınır şartları, kirişlerde titreşim analizlerinde en yaygın kullanılanlarıdır (Fernandes da Silva vd., 2015).

Doğal frekanslar, bu sınır şartlarına göre değişken eksantrisite durumlarında Bölüm 3.1’de türetilen frekans denklemleriyle analitik olarak elde edilmiştir.

Sonuçların değerlendirilmesinde kullanılan f_N normalize edilmiş doğal frekans değerini ifade etmektedir. Bu değer mesnetlerin eksantrik ($eh \neq 0$) olması durumunda elde edilen doğal frekansların, mesnetlerin TE üzerinde ($eh = 0$) olması durumunda elde edilen doğal frekanslara bölünmesiyle Denklem (4.2)’deki gibi elde edilir. Burada i mod numarasını ifade etmektedir.

$$f_N = \frac{f_{eh \neq 0, i}}{f_{eh = 0, i}} \quad (4.2)$$

4.2.1. İki ucu sabit mesnetli giriş

Eksantrisite etkisi, sabit-sabit mesnetlenme türü için 4 farklı durumda incelenmiştir. Bu mesnetlenme durumları aşağıda verilmiştir.

Durum-1: $eh=0$; 0,125; 0,25; 0,375; 0,5 olma durumu.

Durum-2: $eh_1=0$; 0,125; 0,25; 0,375; 0,5 ve $eh_2=0$ olma durumu.

Durum-3: $eh_1=0$; 0,125; 0,25; 0,375; 0,5 ve $eh_2=-0,5$ olma durumu.

Durum-4: $eh=0$; 0,125; 0,25; 0,375; 0,5 ve farklı L/h oranlarında eksantrisite etkisinin incelendiği durum.

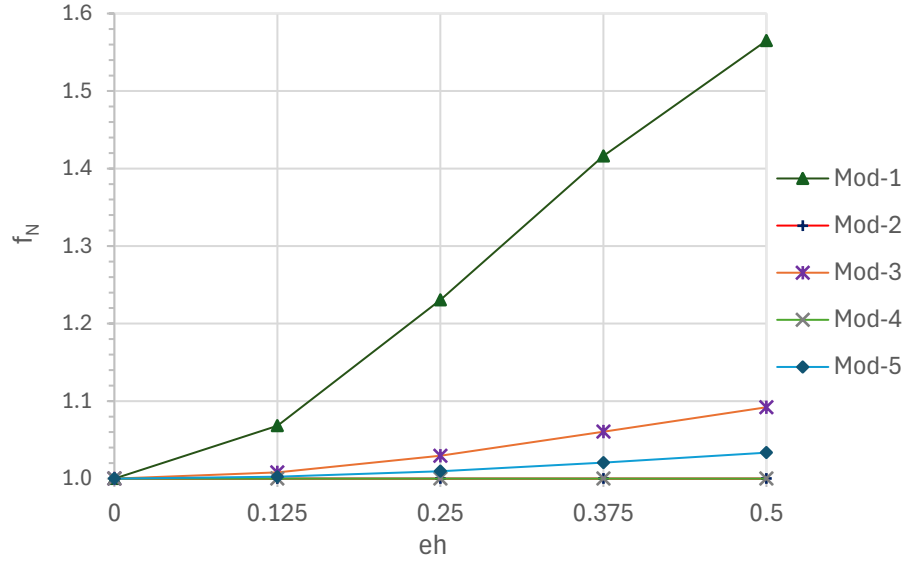
Durum-1, 2, 3 için Çizelge 3.1’de verilen geometrik özellikler kullanılmış olup $L/h=60$ ’tır. Durum-4 için ise malzeme özellikleri Çizelge 3.1’deki gibi olup değişken L/h oranları için kesit sabit bırakılarak girişlerin L değeri ile oynanmıştır. 4 durum için incelemeler aşağıdaki gibidir.

Durum-1: Çizelge 4.6’da bu durum için ilk beş modun doğal frekansları verilmiştir. Bu çizelgedeki değerler Şekil 4.1 çizdirilerek irdelenmiştir.

Çizelge 4.6. Durum-1’de ilk beş modun doğal frekansı

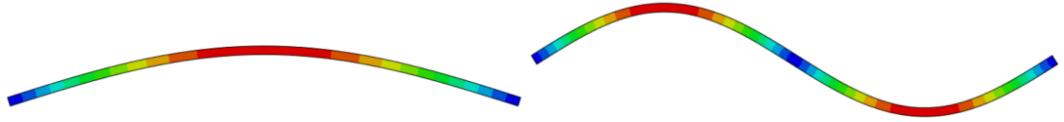
Mod	eh	$f_{analitik}$
1	0	49,86
	0,125	53,39
	0,25	61,71
	0,375	71,09
	0,5	79,48
2	0	199,45
	0,125	199,41
	0,25	199,31
	0,375	199,14
	0,5	198,81
3	0	448,75
	0,125	452,41
	0,25	462,00
	0,375	476,76
	0,5	492,78
4	0	797,79
	0,125	797,21
	0,25	795,48
	0,375	792,57
	0,5	788,46
5	0	1246,54
	0,125	1249,83
	0,25	1259,26
	0,375	1273,61
	0,5	1291,22

Şekil 4.1’de mesnetlenme durumu 1 için normalize eksantrisite ile normalize frekans değerlerinin değişimi verilmiştir. Sonuçlar incelendiğinde en büyük değişiklik 1,56 ile mod-1’de olup ileri modlara gidildikçe eksantrisite etkisinin azaldığı görülmüştür. Mod-3 ve mod-5 için eksantrisite etkisi 1,1’in altına kalmaktadır. Bununla birlikte çift sayılı modlar için eksantrikliğin doğal frekans üzerindeki etkisi, tek sayılı modlardaki gibi değildir. Eksantrikliğin çift sayılı frekanslar üzerinde neredeyse hiçbir etkisi bulunmamaktadır.



Şekil 4.1. Mesnetlenme durumu 1 için normalize eksantrisite ile normalize frekans değerlerinin değişimi

Şekil 4.2'de kirişin birinci ve ikinci mod şekilleri gösterilmiştir. Birinci mod şekli, kirişin pozitif ve negatif yönlerde tüm uzunluğu boyunca hareket gerçekleştirdiği temel bir titreşim modunu tanımlar. İkinci mod şekli ise kirişin hem pozitif hem de negatif yer değiştirmeler arasında dengeyi koruduğu daha karmaşık bir titreşim modunu tanımlar. Birinci modda, kirişin tüm uzunluğu boyunca aynı yönde hareket etmesi nedeniyle, eksantriklikten kaynaklanan asimetrik etkiler kirişin genel dinamik davranışı üzerinde daha belirgin bir rol oynamaktadır. Bunun sonucunda, eksantrisitenin artmasıyla birlikte birinci modun doğal frekansında daha fazla değişiklik gözlemlenmektedir. İkinci modda ise kirişin farklı bölgeleri zıt yönlerde hareket ettiğinden bu karşıt hareketler eksantrisitenin etkisini büyük ölçüde dengelemektedir. Özellikle kısalan ve uzayan bölgelerin simetrik olması nedeniyle eksantrisitenin frekans üzerindeki etkisi minimal düzeyde kalmaktadır. Bu durum, ikinci modda eksantrisite etkisinin büyük oranda azalmasına neden olmaktadır. Diğer bir ifadeyle ikinci modda kirişin kısalma ve uzama bölgeleri birbirini dengelediği için eksantrisite değişmesine rağmen frekansta kayda değer bir değişim görülmemektedir.



Şekil 4.2. Durum-1’de ilk iki mod şekli

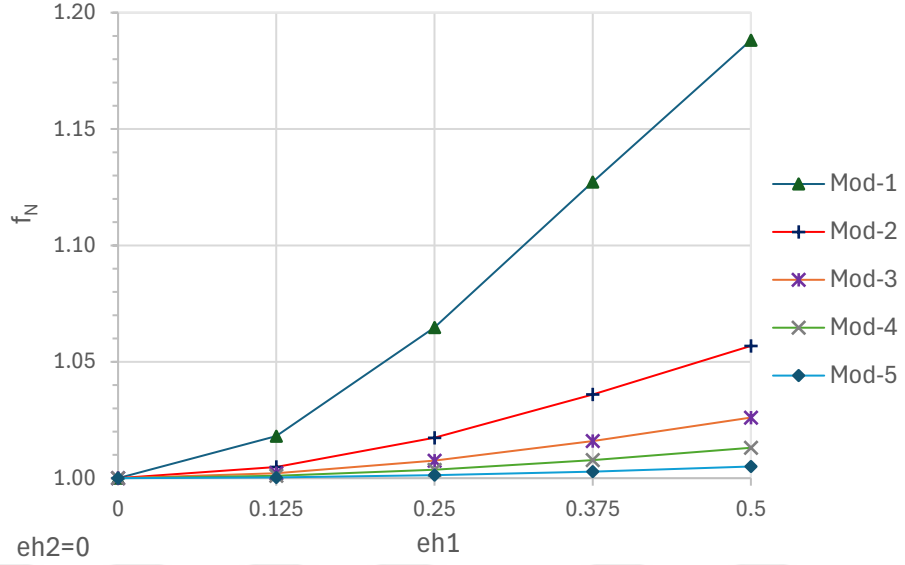
Durum 2: Çizelge 4.7’de bu durum için ilk beş modun doğal frekansları verilmiştir. Bu çizelgedeki değerler Şekil 4.3 çizdirilerek irdelenmiştir.

Çizelge 4.7. Durum-2’de ilk beş modun doğal frekansı

Mod	eh ₁	eh ₂	f _{analitik}
1	0	0,000	49,86
	0,125		50,78
	0,25		53,19
	0,375		56,37
	0,5		59,65
2	0	0,000	199,45
	0,125		200,37
	0,25		202,96
	0,375		206,79
	0,5		211,30
3	0	0,000	448,75
	0,125		449,63
	0,25		452,17
	0,375		456,08
	0,5		460,96
4	0	0,000	797,79
	0,125		798,54
	0,25		799,30
	0,375		800,74
	0,5		808,72
5	0	0,000	1246,54
	0,125		1246,99
	0,25		1248,33
	0,375		1250,49
	0,5		1253,38

Mesnetlenme durumu 2 için normalize eksantrisite ile normalize frekans değerlerinin değişimi ise Şekil 4.3’te verilmiştir. Mod-1 ve eh=0,5 için Durum-1’de 1,56 olan f_N değeri, Durum-2’de 1,19’a düşmüştür. Yani iki ucun eksantrik olma durumuna göre bir bir ucun eksantrik olması; eksantrisite etkisinin %37 azalmasına sebep olmuştur. Çift

numaralı modlar olan mod-2 ve mod-4 için Durum-1’de minimal düzeyde kalan eksantrisite etkisi, durum-2’de daha fazladır. Mod-2 ve mod-4 için eksantrisite etkisi sırasıyla 1,06 oranında ($f_N=1,00 \rightarrow 1,06$) ve 1,01 ($f_N=1,00 \rightarrow 1,01$) oranında olmaktadır. Mod-3 ve mod-5’te ise durum-1’e benzer şekilde eksantrisinin etkisi azalmakta ve 1,03’ün altında kalmaktadır.



Şekil 4.3. Mesnetlenme durumu 2 için normalize eksantrisite ile normalize frekans değerlerinin değişimi

Durum-3: Bu durumda bir uçtaki mesnet eksantritesi $eh=-0,5$ ’te sabit tutularak diğer uçtaki mesnet eksantritesi değiştirilmiştir. Bu durum için ilk beş modun doğal frekansı Çizelge 4.8’de verilmiştir. Bu çizelgedeki değerler Şekil 4.4 çizdirilerek irdelenmiştir.

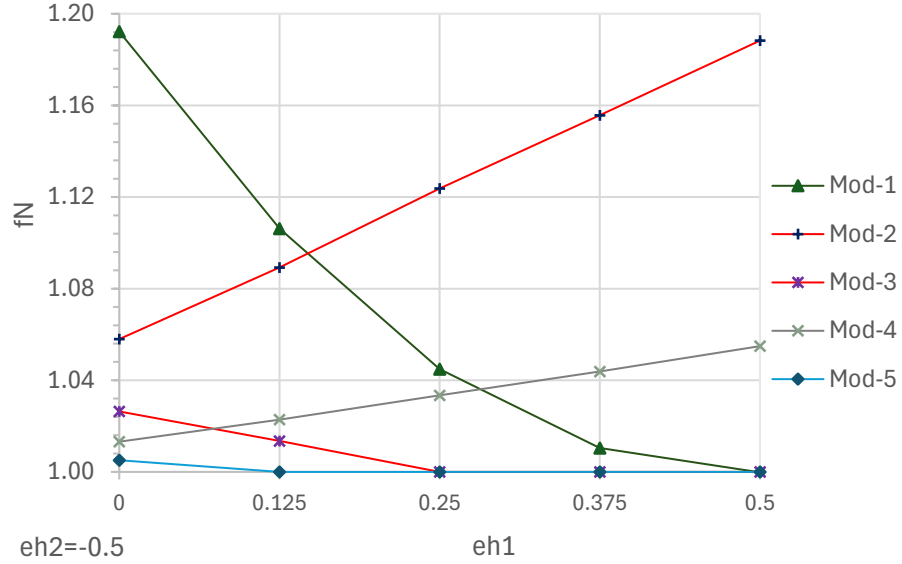
Çizelge 4.8. Durum-3'te ilk beş modun doğal frekansı

Mod	eh ₁	eh ₂	f _{analitik}
1	0,000	-0,500	59,65
	0,125		55,27
	0,250		52,14
	0,375		50,36
	0,500		49,83
2	0,000	-0,500	211,30
	0,125		217,73
	0,250		224,76
	0,375		231,85
	0,500		238,53
3	0,000	-0,500	460,96
	0,125		454,94
	0,250		450,37
	0,375		447,37
	0,500		445,93
4	0,000	-0,500	808,72
	0,125		816,71
	0,250		825,41
	0,375		834,50
	0,500		843,65
5	0,000	-0,500	1253,38
	0,125		1244,44
	0,250		1236,04
	0,375		1228,33
	0,500		1221,44

Şekil 4.4'te mesnetlenme durumu 3 için normalize eksantrisite ile normalize frekans değerlerinin değişimi verilmiştir. Mod-3 ve mod-5'te eksantrisite etkisinin 1,04'ün altında kalması ile birlikte; mod-1, mod-3 ve mod-5'e bakıldığında; eh₁, 0'dan 0,5'e doğru gittikçe yani mesnet-1 mesnet-2'den uzaklaştıkça eksantrisite etkisinin azaldığı gözlemlenmektedir. Durum-1 ve durum-2'ye göre bu farklı bir sonuçtur. Yani durum-1 ve durum-2'de tek sayılı modlarda eh arttıkça artan eksantrisite etkisi durum-3'te azalan bir davranış göstermektedir.

Mod-2 ve mod-4'e bakıldığında ise durum-2'ye benzer şekilde eh₁=0,5'e doğru yaklaştıkça eksantrisite etkisi artmaktadır. Bu etki, Şekil 4.4'e bakıldığında sırasıyla 1,13 ($f_N=1,06 \rightarrow 1,19$) ve 1,04 ($f_N=1,01 \rightarrow 1,05$) oranında olmaktadır. Bu sonuçlar Durum-2 ile

kıyaslandığında şunu ifade etmektedir: İki mesnetin eh değerinin toplamı mutlak olarak arttıkça çift sayılı modlarda eksantrisite etkisi bir o kadar artmaktadır.



Şekil 4.4. Mesnetlenme durumu 3 için normalize eksantrisite ile normalize frekans değerlerinin değişimi

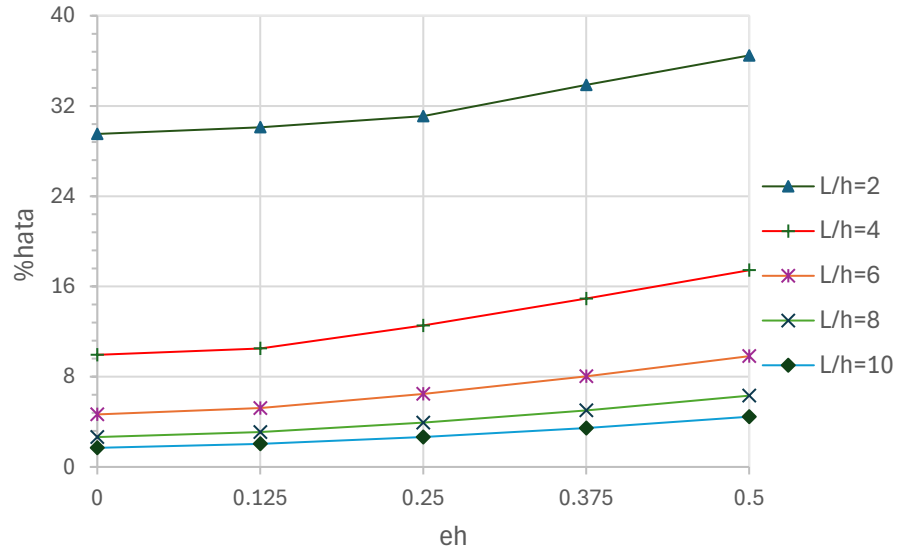
Durum-4: Bu durumda farklı L/h oranlarının eksantrisiteye etkisini incelemek amacıyla $L/h=2-10$ aralığında değişen kirişlerin doğal frekansları, ilk mod için analitik yöntem ve SEM ile bulunmuş ve Çizelge 4.9’da verilmiştir. Bu çizelgedeki değerler Şekil 4.5 ve Şekil 4.6 çizdirilerek irdelenmiştir.

Çizelge 4.9. Durum-4’te ilk modun doğal frekansı

L/h	eh	$f_{analitik}$	f_{SEM}
2	0,000	44852,69	31628,00
	0,125	44875,00	34000,00
	0,250	47463,00	36732,00
	0,375	53310,00	39424,00
	0,500	59610,00	41360,00
4	0,000	11218,00	10103,00
	0,125	11978,00	10720,00
	0,250	13747,00	12023,00
	0,375	15730,00	13382,00
	0,500	17506,00	14453,00
6	0,000	4986,16	4753,90
	0,125	5332,33	5054,20
	0,250	6143,87	5746,30
	0,375	7057,55	6490,30
	0,500	7875,28	7101,80
8	0,000	2803,29	2730,40
	0,125	2804,72	2908,40
	0,250	3001,19	3326,60
	0,375	3462,59	3783,10
	0,500	3982,80	4167,00
10	0,000	1795,02	1764,60
	0,125	1921,28	1881,90
	0,250	2218,02	2159,30
	0,375	2552,81	2464,80
	0,500	2852,15	2725,10

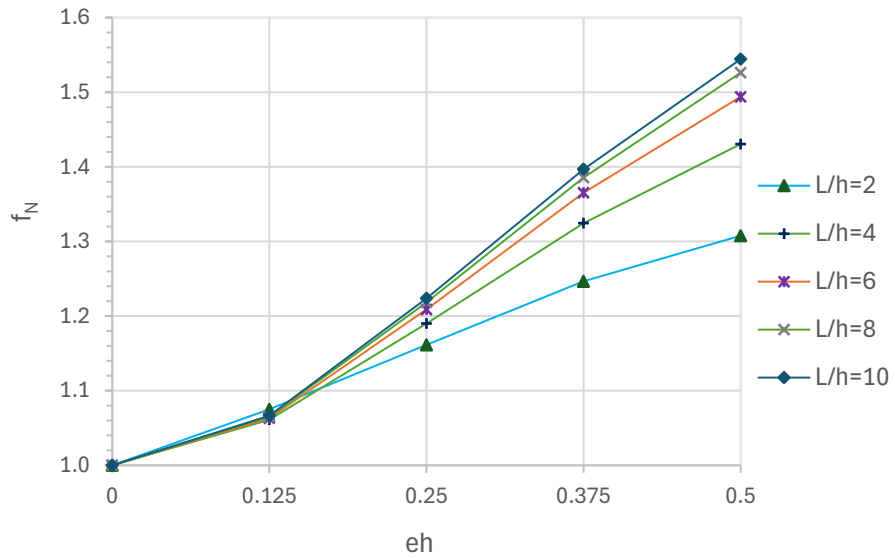
Farklı L/h oranlarında, analitik denklemle bulunan frekans ile sonlu elemanlar (SE) analiziyle elde edilen frekans arasındaki hata oranları, eksantrisitenin (*eh*) değişimine bağlı olarak Şekil 4.5’te gösterilmiştir. Burada %hata Denklem (4.3)’teki gibi elde edilmiştir.

$$\%hata = \frac{|f_{SEM} - f_A|}{f_A} * 100 \quad (4.3)$$



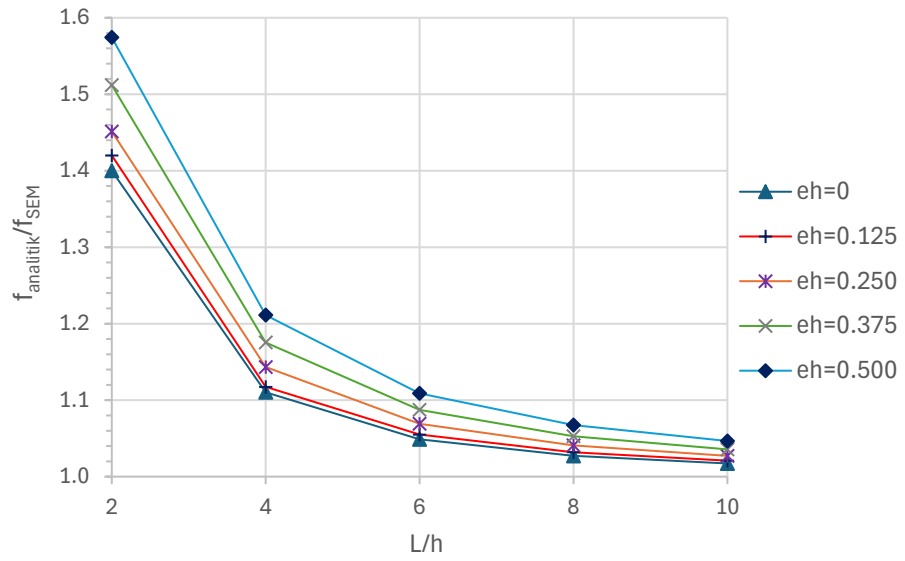
Şekil 4.5. Mesnetlenme durumu 4 için normalize eksantrisite ile %hata'nın değişimi

Şekil 4.6 farklı L/h oranlarında normalize eksantrisitenin, normalize edilmiş ilk mod doğal frekansı üzerindeki etkisini göstermektedir. Burada L/h 2'den 10'a gittikçe eksantrisite etkisi artmaktadır. L/h=2 olduğunda 1,31 olan eksantrisite oranı L/h=10 iken 1,54'e yükselmektedir. Ayrıca, düşük eh değerlerinde ($eh < 0,125$) farklı L/h oranları arasında belirgin bir fark olmadığını, ancak eh değerinin 0,125'i geçtikten sonra bu farkların arttığı görülmektedir.



Şekil 4.6. Mesnetlenme durumu 4 için normalize eksantrisite ile normalize frekans değerlerinin değişimi

Şekil 4.7 analitik yöntem ile bulunan frekansların SEM ile bulunan frekanslara bölünmesiyle elde edilen $f_{analitik}/f_{SEM}$ oranının L/h 'ye bağlı olarak nasıl değiştiğini ve farklı eh değerlerinde etkilerini incelemektedir. Burada, analitik ve SEM sonuçları arasındaki fark $L/h=2$ iken 1,57'dir ve $L/h=10$ iken 1,05'e düştüğü görülmektedir. Bu fark Bölüm 2.3'te verilen kabullerin etkisi olarak; çıkarılan hareket denklemlerinde kesme deformasyonu ve dönme ataleti etkilerinin ihmal edilmesinden kaynaklanmaktadır. L/h oranı arttıkça, bu etkilerle karşılaştırıldığında eğilme daha belirgin hale gelmekte ve hata oranı azalmaktadır.



Şekil 4.7. Mesnetlenme durumu 4 için L/h ile $f_{analitik}/f_{SEM}$ oranının değişimi

4.2.2. Bir ucu sabit diğer ucu kayıcı mesnetli kiriş

Literatürün (Fernando vd., 2018; Li vd., 2023) bildirdiğine göre bir ucu sabit diğer ucu kayıcı mesnetlenme durumu için eksantrisite etkisi minimal düzeydedir. Burada tek durum dikkate alınmıştır.

Durum-5: $eh=0$ ve 0,5 olma durumu.

Bu durum için ilk beş modun doğal frekansı Çizelge 4.10'da verilmiştir. Doğal frekanslar, literatürde bildirilen sonuçlar ile uyumludur.

Çizelge 4.10. Durum-5'te ilk beş modun doğal frekansı

Mod	eh	$f_{analitik}$
1	0	49,86
	0,5	49,83
2	0	199,45
	0,5	198,89
3	0	448,75
	0,5	445,75
4	0	797,79
	0,5	786,27
5	0	1246,54
	0,5	1197,90

4.2.3. Bir ucu ankastre diğer ucu sabit mesnetli giriş

Eksantrisite etkisi, bir ucu ankastre diğer ucu sabit mesnetlenme türü için tek durumda incelenmiştir. Bu durum şu şekildedir:

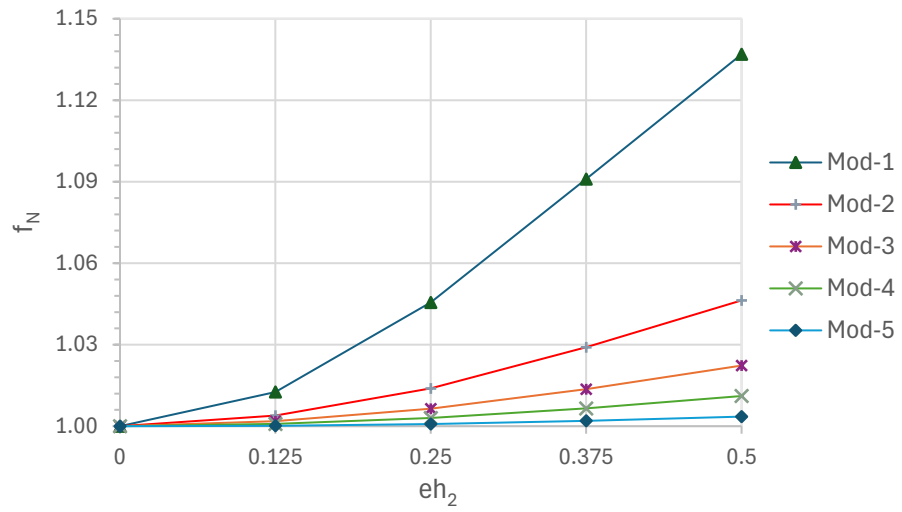
Durum-6: $eh= 0; 0,125; 0,25; 0,375; 0,5$ olma durumu.

Çizelge 4.11'de bu durum için ilk beş modun doğal frekansları verilmiştir. Bulunan doğal frekanslar literatür ile kıyaslanmış ve uyumlu sonuçlar elde edildiği gözlemlenmiştir.

Şekil 4.8'de mesnetlenme durumu 6 için normalize eksantrisite ile normalize frekans değerlerinin değişimi verilmiştir. Mod-1 ve $eh=0,5$ için Durum-1'de 1,56 olan f_N Durum-7'de 1,14'e düşmüştür. Yani iki ucun eksantrik olma durumuna göre bir ucun ankastre bir ucun eksantrik sabit mesnetli olması eksantrisite etkisinin %42 azalmasına sebep olmuştur. Çift numaralı modlar olan mod-1 ve mod-4'te, eksantrisite; Durum-2'deki oranlara yakın değerlerde etki göstermiştir. $eh=0,5$; mod-3 ve mod-5'te ise durum-1 ve durum-2'ye benzer şekilde eksantrisenin etkisi daha azdır ve 1,03'ün altındadır.

Çizelge 4.11. Durum-6’da ilk beş modun doğal frekansı

Mod	eh_2	$f_{analitik}$
1	0	77,89
	0,125	78,87
	0,25	81,48
	0,375	85,06
	0,5	88,90
2	0	252,42
	0,125	253,34
	0,25	255,93
	0,375	259,82
	0,5	264,48
3	0	526,66
	0,125	527,52
	0,25	530,01
	0,375	533,86
	0,5	538,73
4	0	900,63
	0,125	901,32
	0,25	903,37
	0,375	906,63
	0,5	910,88
5	0	1374,31
	0,125	1374,64
	0,25	1375,62
	0,375	1377,22
	0,5	1379,38



Şekil 4.8. Mesnetlenme durumu 6 için normalize eksantrisite ile normalize frekans değerlerinin değişimi

4.3. Mesnet Eksantrisitesinin Petek Kirişlerin Frekansı Üzerindeki Etkisi

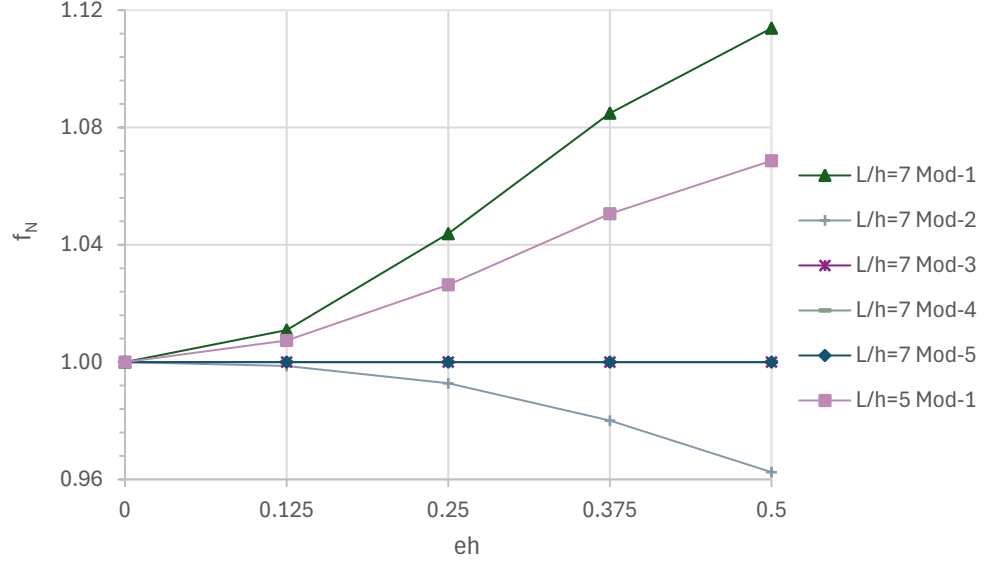
Bu alt başlıkta mesnet eksantrisitesinin petek kirişlerin frekansı üzerindeki etkisini irdeleyebilmek için $L/h=5$ ve 7 durumlarında SE analizleri yapılmıştır. Çizelge 4.12’de petek kirişin sabit-sabit mesnetlenmesi için değişken eksantrisite durumunda ilk beş modun doğal frekansı verilmiştir.

Çizelge 4.12. Sabit-sabit mesnetlenme durumunda petek kiriş için ilk beş modun doğal frekansı

Mod	eh	f_{SEM}
1	0	95,22
	0,125	96,26
	0,25	99,39
	0,375	103,3
	0,5	106,06
2	0	248,16
	0,125	247,84
	0,25	246,37
	0,375	243,21
	0,5	238,85
3	0	395,39
	0,125	395,67
	0,25	396,6
	0,375	397,93
	0,5	398,95
4	0	519,82
	0,125	542,26
	0,25	542,41
	0,375	542,73
	0,5	542,68
5	0	640,8
	0,125	640,77
	0,25	640,16
	0,375	638,98
	0,5	637,43

Şekil 4.9’da petek kiriş için normalize eksantrisite ile normalize frekans değerlerinin değişimi verilmiştir. Sonuçlar incelendiğinde en büyük değişiklik $L/h=7$ mod-1 durumu için 1,11 olarak bulunmuştur. Sonrasında ise $L/h=5$ iken 1. mod’da eksantrisite etkisi 1,07

olarak tespit edilmiştir. $L/h=5$ 'in ileri modlarına gidildikçe eksantrisite etkisinin petek kirişin frekanslarında minimal bir etki yarattığı görülmektedir.



Şekil 4.9. Petek kiriş için normalize eksantrisite ile normalize frekans değerlerinin değişimi

4.4. Bulonlu Birleşimli Kirişlerin Frekans Analizi

Bu alt bölümde; I ve petek kiriş olmak üzere iki farklı kiriş tipinin, değişken bulon sayısı ve yerleşimleri altında SEM ile doğal frekansları bulunmuştur ve bu parametrelerin eksantrisiteye etkisi incelenmiştir. Hesaplamalarda $L/h=5$ alınmıştır. Dikkate alınan farklı bulon sayısı ve farklı eksantrisite durumları Bölüm 3.2.2’de verilen Şekil 3.9, Şekil 3.10 Şekil 3.11’de görülmektedir.

Bulon grubunun TE’de olması durumunda ve birden fazla bulon olması durumlarında bulon merkezinin yeri değişmediği için $eh=0$ olarak alınmıştır. Birden fazla bulon olması durumunda ve bulonların eksantrik ($eh \neq 0$) yerleşmesi durumunda ise eh değerinin hesaplanması Denklem (4.4) kullanılarak yapılmıştır. Burada e_{bulon} değeri TE’e en uzak olan bulonun uzunluğunu ifade etmektedir. Bahsedilen yerleşim şekli Şekil 3.9b’de görülmektedir.

$$eh = \frac{e_{bulon}}{h} \quad (4.4)$$

I ve petek kirişlerin; farklı bulon sayılarına, eksantrik ($eh \neq 0$) ve TE eksen üzerinde ($eh=0$) yerleşimlerine göre SEM ile bulunan birinci mod doğal frekansları Çizelge 4.13'te verilmiştir.

Çizelge 4.13. Kirişlerin eksantrik ve TE üzerinde yerleşimli olması durumunda birinci mod doğal frekansları

Kiriş	Bulon Sayısı	eh	f_{SEM}
I	1	0	190,23
I	1	0,41	198,64
I	2	0	197,20
I	2	0,41	208,18
I	3	0	202,47
I	3	0,41	213,48
I	4	0	208,28
I	4	0,41	217,88
I	5	0	215,16
I	5	0,41	222,56
Petek	1	0	160,99
Petek	1	0,41	162,78
Petek	2	0	164,19
Petek	2	0,41	166,72
Petek	3	0	166,56
Petek	3	0,41	169,41
Petek	4	0	169,08
Petek	4	0,41	172,00
Petek	5	0	172,00
Petek	5	0,41	174,56

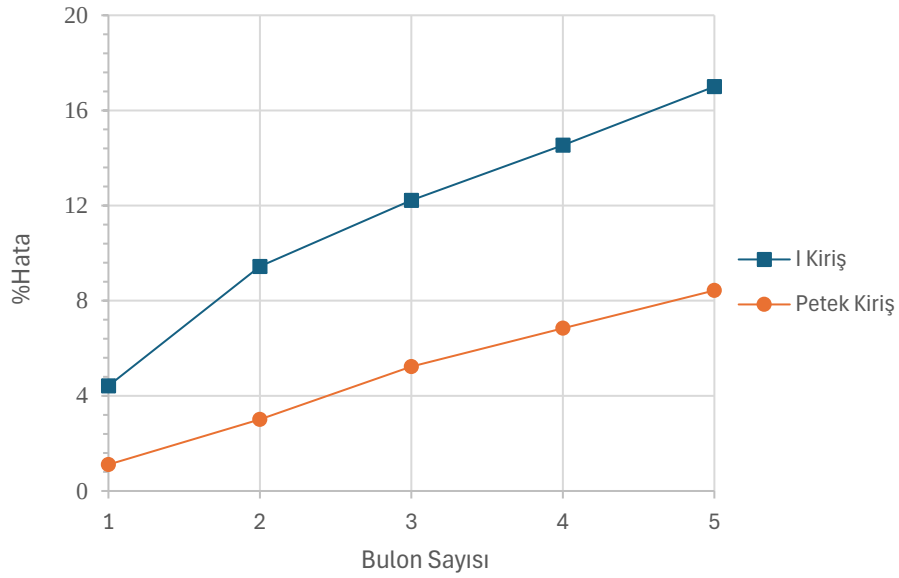
Çizelge 4.13'te verilen doğal frekans sonuçları aşağıda iki kısımda irdelenmiştir.

Eksantrik yerleşen bulon grubunda bulon sayısının etkisi:

Burada ilk olarak iki ucu Şekil 3.9a'da verildiği gibi mesnetlenen kiriş ile iki ucu sırasıyla Şekil 3.11'de verildiği gibi mesnetlenen kirişlerin birinci mod doğal frekansları kıyaslanmış ve Şekil 4.10 elde edilmiştir. Burada frekans, bağlı olduğu parametrelerle birlikte $f_{eh,i,n}$ şeklinde tanımlanmıştır ve “ n ” bulon sayısını, “ i ” mod numarasını ifade etmektedir. n bulon sayısını ifade etmektedir ve $n= 1, 2, 3, 4, 5$ olmak üzere, %hata Denklem (4.5)'teki gibi hesaplanmıştır.

$$\%hata = \frac{|f_{0,41,1,n} - f_{0,1,1}|}{f_{0,1,1}} * 100 \quad (4.5)$$

I ve petek kirişler için eksantrik 1 bulonlu durumda sırasıyla %4,4 ve %1,1 hata vardır. Bu durum eksantristenin etkisinin I kirişlerde daha fazla olduğunu göstermektedir. Eksantrik 5 bulonlu durumda %17 ve %8,5'a kadar yükselmektedir. Artış %'lerine bakıldığında bulon sayısının artması I kirişe daha fazla etki etmektedir.



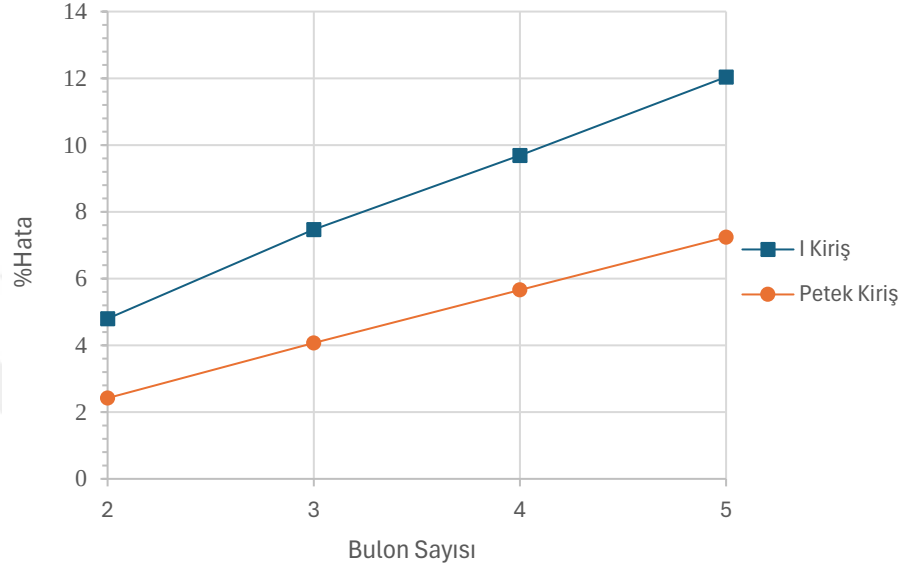
Şekil 4.10. Eksantrik yerleşen bulonlarda bulon sayısına göre %hatanın değişimi (mesnetlerin TE'de olma durumu ile kıyaslandığında)

Sonraki kıyaslama da ise iki ucu Şekil 3.9b'de verildiği gibi mesnetlenen kiriş ile iki ucu sırasıyla Şekil 3.11'de verildiği gibi mesnetlenen kirişlerin birinci mod doğal frekansları kıyaslanmış ve Şekil 4.11 elde edilmiştir. Burada %hata Denklem (4.6)'daki gibi hesaplanmıştır.

$$\%hata = \frac{|f_{0,41,1,n+1} - f_{0,41,1,1}|}{f_{0,41,1,1}} * 100 \quad (4.6)$$

Bu kıyaslama, eksantrik durumda bir bulonla birden fazla bulon olmasının senaryoyu nasıl değiştirdiğini göstermektedir. 2 bulonlu durumda I ve petek kiriş için de hata oranı sırasıyla %5 ve %2,5 olmaktadır. %hata, I kirişte bulon sayısının artışıyla birlikte daha

hızlı bir artış göstermektedir ve 5 bulonlu durumda I kirişte hata oranı %12, petek kirişte ise %7,2 seviyesindedir. Bu sonuçlar, artış %'lerine bakıldığında eksantrik durumda bulon sayısının artması I kirişe daha fazla etki etmektedir ve 5 bulondan sonra %10'un üzerine çıkmaktadır.



Şekil 4.11. Eksantrik yerleşen bulon grubunda bulon sayısına göre %hatanın değişimi (eh=0,41 tek bulonlu yerleşim ile kıyaslandığında)

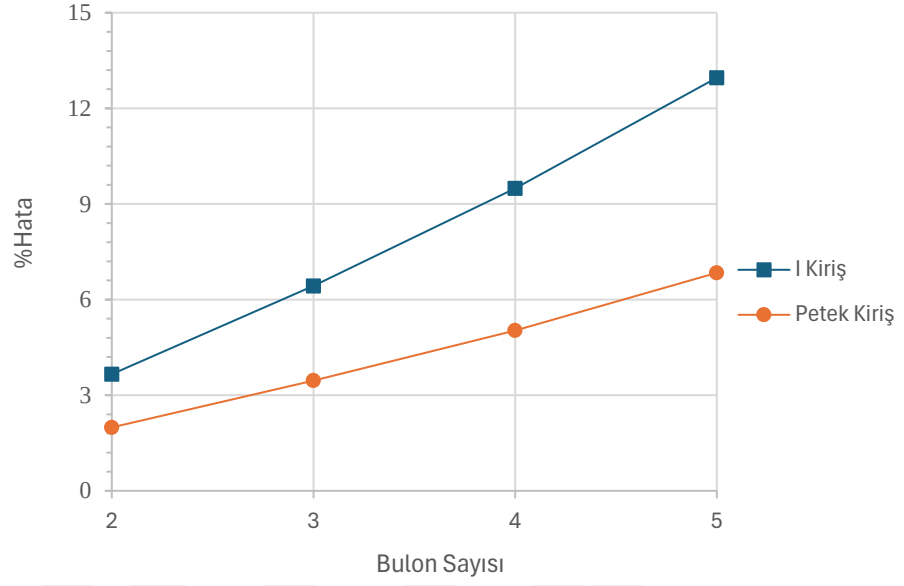
TE üzerinde yerleşen bulon grubunda bulon sayısının etkisi:

Burada iki ucu Şekil 3.9a'da verildiği gibi mesnetlenen kiriş ile iki ucu sırasıyla Şekil 3.10'da verildiği gibi mesnetlenen kirişlerin birinci mod doğal frekansları kıyaslanmış ve Şekil 4.12 elde edilmiştir. Burada %hata Denklem (4.7)'deki gibi hesaplanmıştır.

$$\%hata = \frac{|f_{0,1,n+1} - f_{0,1,1}|}{f_{0,1,1}} * 100 \quad (4.7)$$

Bu kıyaslama, bulonların ağırlık merkezi tarafsız eksenin üzerinde olması durumunda ve birden fazla bulon olması durumunda eksantrisite etkisinin ne düzeyde olduğunu incelemektedir. 2 bulonlu durumda hata oranları her iki kiriş tipi için de %4'ün altındadır. Bulon sayısı arttıkça I kirişteki hata oranı petek kirişe göre daha yüksek seviyelere ulaşmıştır ve 5 bulonlu durumda I kirişteki hata %13 petek kirişte %7'dir. Bulonların

ağırlık merkezi tarafsız eksenin üzerinde olsa da birden fazla bulonun doğal frekansları etkilediği görülmektedir.



Şekil 4.12. TE üzerinde yerleşen bulon grubunda bulon sayısına göre %hatanın değişimi

5. SONUÇ

Bu çalışmada, farklı giriş tipleri, mesnet şartları ve geometrik özellikler altında eksantrisitenin etkisi incelenmiştir. Analitik yöntemler kullanılarak farklı modlar için doğal frekanslar belirlenmiş ve elde edilen sonuçlar literatürdeki çalışmalar ve sonlu elemanlar yöntemi (SE) ile karşılaştırılmıştır. Çalışma kapsamında ulaşılan temel sonuçlar aşağıda özetlenmiştir:

- Analitik denklemlerin doğrulanması:

Hamilton prensibi ile elde edilen ve eksantrik mesnetli girişlerin frekanslarını veren diferansiyel denklemlerin çözümleri, literatürdeki çalışmalar ve SE analizleri ile karşılaştırılmış ve sonuçların yüksek uyum gösterdiği tespit edilmiştir. Bu doğrultuda, türetilen analitik denklemlerin doğruluğu kanıtlanmıştır.

- Eksantrisitenin mesnet koşullarına etkisi:

Farklı mesnet koşulları altında eksantrisitenin etkisi değerlendirildiğinde, ankastre-sabit mesnet koşullarında doğal frekanslarda %14 artış, sabit-sabit mesnet koşullarında ise %56'ya varan frekans artışları gözlemlenmiştir. Ayrıca, her iki ucun eksantrik olması durumuna kıyasla, bir ucun ankastre, diğer ucun eksantrik olması durumunda eksantrisite etkisinin %42 azaldığı belirlenmiştir. Sabit-kayıcı mesnet koşullarında ise literatürdeki çalışmalarla uyumlu sonuçlar elde edilmiş olup, eksantrisitenin doğal frekanslar üzerindeki etkisinin minimal seviyede olduğu görülmüştür.

- Mod şekillerine göre eksantrisitenin etkisi:

Çalışma kapsamında ilk beş mod incelenmiş ve birinci modda eksantrisitenin doğal frekanslar üzerinde belirgin bir fark yarattığı gözlemlenmiştir. Daha yüksek modlara geçildikçe eksantrisitenin etkisinin azaldığı tespit edilmiştir.

- L/h oranının eksantrisite etkisine katkısı:

Farklı L/h oranlarında eksantrisitenin doğal frekanslar üzerindeki etkisi incelenmiş ve L/h oranı arttıkça eksantrisitenin etkisinin de arttığı görülmüştür. Analitik ve SE sonuçlarının kıyaslanması amacıyla $f_{analitik}/f_{SEM}$ oranı incelenmiş ve L/h oranı arttıkça bu oranın 1'e yaklaştığı, yani analitik ve SE sonuçlarının birbirine yakınsadığı tespit edilmiştir. Bu durum, Euler-Bernoulli teorisinin

kabullerinden kaynaklanmaktadır. Çünkü türetilen analitik denklemler, düşük L/h oranlarında kayma deformasyonlarını dikkate almadığı için, SE analizlerinden elde edilen sonuçlardan sapma göstermektedir. Ancak L/h oranı arttıkça eğilme etkisi baskın hale gelmekte ve analitik denklemler ile SE analizleri arasında daha iyi bir uyum sağlanmaktadır.

- Eksantrisitenin petek kirişlerdeki etkisi:

Mesnet eksantrisitesinin petek kirişlerin doğal frekanslarına olan etkisi sabit-sabit mesnet koşullarında $L/h = 7$ ve $L/h = 5$ için incelenmiştir. En büyük değişimin birinci modda meydana geldiği ve eksantrisitenin frekans üzerindeki etkisinin sırasıyla 1,11 ve 1,07 oranında olduğu belirlenmiştir. Daha yüksek modlara geçildikçe eksantrisitenin petek kirişlerin frekansları üzerindeki etkisinin minimal seviyeye indiği görülmüştür.

- Eksantrisitenin bulonlu birleşimli kirişlerdeki etkisi:

$L/h = 5$ için I kesitli ve petek kirişlerde, farklı bulon sayılarının ve yerleşimlerinin eksantrisiteye etkisi incelenmiştir. Tarafsız eksenin üzerinde bulunan bulonlar için hali hazırda var olan doğal frekans denklemlerinin, eksantrik durumda başarılı tahmin yapamadığı tespit edilmiştir. Özellikle, frekanslarda %17'ye varan sapmalar gözlemlenmiştir. Ayrıca, bulonların ağırlık merkezinin tarafsız eksen üzerinde olduğu, ancak birden fazla bulonun bulunduğu durumlarda, doğal frekanslarda %13'e varan değişimler olduğu belirlenmiştir. Bu sonuç, bulonların ağırlık merkezi tarafsız eksen üzerinde olsa bile, bulon sayısının artmasının doğal frekanslar üzerinde önemli değişimlere yol açtığını göstermektedir.

KAYNAKLAR

- ABAQUS. (2012). *Abaqus Analysis User's Manual* (6.12). Dassault Systèmes Simulia Corp.
- Balachandran, B. (2019). *Balakumar Balachandran, Edward B. Magrab - Vibrations-Cambridge University Press (2018)* (3. bs). Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/9781108615839>
- Carrera, Erasmo., Giunta, Gaetano., & Petrolo, Marco. (2011). *Beam structures : classical and advanced theories*. Wiley. <https://doi.org/https://doi.org/10.1002/9781119978565>
- de Silva, C. W. (2006). *VIBRATION Second Edition Fundamentals and Practice* (2. bs). CRC Press, Taylor & Francis Group. <https://doi.org/https://doi.org/10.1201/b18521>
- Dwaikat, M., & Kodur, V. (2010). Effect of location of restraint on fire response of steel beams. *Fire Technology*, 46(1), 109-128. <https://doi.org/10.1007/s10694-009-0085-9>
- Eltaher, M. A., Alshorbagy, A. E., & Mahmoud, F. F. (2013). Determination of neutral axis position and its effect on natural frequencies of functionally graded macro/nanobeams. *Composite Structures*, 99, 193-201. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.11.039>
- Fernandes da Silva, J., Dias do Nascimento, L. A., & dos Santos Hoefel, S. (2015). Free Vibration Analysis Of Euler-Bernoulli Beams Under Non-Classical Boundary Conditions. *CONEM 2016 - Congresso Nacional de Engenharia Mecânica*.
- Fernando, D., Wang, C. M., & Roy Chowdhury, A. N. (2018). Vibration of laminated-beams based on reference-plane formulation: Effect of end supports at different heights of the beam. *Engineering Structures*, 159, 245-251. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2018.01.004>
- Grünbauer BV. (2024, Aralık 11). *The Peiner-Schnittführung (also known as: Litzka-Schnittführung)*.
- Jin, G., Ye, T., & Su, Z. (2015). *Structural Vibration A Uniform Accurate Solution for Laminated Beams, Plates and Shells with General Boundary Conditions*. Science Press. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-46364-2>
- Kelly, S. G. (2000). *Fundamentals of mechanical vibration* (2. bs). McGraw-Hill.
- Li, B., Wen, D., Shang, X. C., & Zhang, R. (2023). Non-local effect of eccentrically simply supported beam on free vibration. *Forces in Mechanics*, 12. <https://doi.org/10.1016/j.finmec.2023.100218>
- Meirovitch, L. (1967). *Analytical methods in vibrations* (1. bs). New York: Macmillan Publishing Co.

- Öchsner, A. (2021). Classical Beam Theories of Structural Mechanics. İçinde *Classical Beam Theories of Structural Mechanics*. Springer International Publishing. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-76035-9>
- Qatu, M. S. (2004). *Vibration of Laminated Shells and Plates* (1. bs). Elsevier Academic Press. <https://doi.org/10.1016/j.apacoust.2006.07.017>
- Radice, J. J. (2012). On the effect of local boundary condition details on the natural frequencies of simply-supported beams: Eccentric pin supports. *Mechanics Research Communications*, 39(1), 1-8. <https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2011.08.007>
- Rao, S. S. (2007). *Vibration of Continuous Systems* (1. bs). Wiley. <https://doi.org/10.1002/9780470117866>
- Simitses, G., & Hodges, D. H. (2006). *Fundamentals of Structural Stability* (1. bs). Elsevier Academic Press. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/B978-0-7506-7875-9.X5000-2>
- Tajima, K., Chen, K.-K., Takahashi, N., Noda, N., Nagamatsu, Y., & Kakigawa, H. (2009). Three-dimensional finite element modeling from CT images of tooth and its validation. *Dental Materials Journal*, 28(2), 219-226. <https://doi.org/10.4012/dmj.28.219>
- Timoshenko, S. P. (1921). On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 41(245), 744-746. <https://doi.org/https://doi.org/10.1080/14786442108636264>
- Türker, H. T. (2022). A modified beam theory for bending of eccentrically supported beams. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 50(2), 576-587. <https://doi.org/10.1080/15397734.2020.1738246>
- Wang, C. M., Ke, L. L., Roy Chowdhury, A. N., Yang, J., Kitipornchai, S., & Fernando, D. (2017). Critical examination of midplane and neutral plane formulations for vibration analysis of FGM beams. *Engineering Structures*, 130, 275-281. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2016.10.051>
- Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L., & Zhu, J. Z. (2005). *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals Sixth edition* (6. bs). Elsevier Butterworth-Heinemann. <https://doi.org/https://doi.org/10.1002/cnm.874>