SINIRDA VE GEÇİŞ KOŞULUNDA SPEKTRAL PARAMETRE İÇEREN GEÇ KALAN ARGÜMANLI BİR SINIR DEĞER PROBLEMİ

DOKTORA TEZİ

FARUK DÖNMEZ

MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK
ANABİLİM DALI

MERSİN
OCAK- 2025

SINIRDA VE GEÇİŞ KOŞULUNDA SPEKTRAL PARAMETRE İÇEREN GEÇ KALAN ARGÜMANLI BİR SINIR DEĞER PROBLEMİ

DOKTORA TEZİ

FARUK DÖNMEZ
ORCID ID: 0009-0003-7708-4978

MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK
ANABİLİM DALI

DANIŞMAN
DR. ÖĞR. ÜYESİ ÖZGÜR MIZRAK
ORCID ID: 0000-0001-5961-6019

MERSİN
OCAK- 2025

ÖZET

SINIRDA VE GEÇİŞ KOŞULUNDA SPEKTRAL PARAMETRE İÇEREN GEÇ KALAN ARGÜMANLI BİR SINIR DEĞER PROBLEMİ

Bu tezde süreksizlik içeren geç kalan argümanlı sınır değer problemi ele alınmıştır. Problemin hem sınır koşulunda hem de süreksizlik noktasındaki geçiş koşulunda spektral parametre bulunmaktadır. Ele alınan problem için özdeğer ve özfonksiyonların asimptotik davranışları incelenecektir.

Anahtar Kelimeler: Geç kalan argümanlı diferansiyel denklem, özdeğer ve özfonksiyon, spektral parametre, geçiş koşulları.

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Özgür MIZRAK, Mersin Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı, Mersin.

ABSTRACT

CONTAINING SPECTRAL PARAMETER ON THE BORDER AND TRANSITION CONDITION A BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH A RETARDED ARGUMENT

In this thesis boundary value problem with retarded argument that have discontinuity is considered. This problem contains spectral parameter both in boundary condition and the transmission conditions in the discontinuity point. For this problem, asyptotic behaviour for eigenvalues and eigenfunctions will be investigated.

Keywords: Differential equation with retarded argument, eigenvalues and eigenfunctions, spectral parameter, transmission conditions.

Advisor: Asist. Prof. Dr. Özgür MIZRAK, Department of Mathematics, Mersin University.

TEŞEKKÜR

Doktora eğitimim boyunca danışmanlığımı üstlenen, bilgi ve tecrübelerini şahsımdan esirgemeyen saygı değer hocam Dr. Öğr. Üyesi Özgür MIZRAK´a, eğitim hayatım boyunca maddi ve manevi yardımlarını esirgemeyen kıymetli annem Naciye DÖNMEZ'e, babam Muhsin DÖNMEZ´e ve eşim Ayşegül DÖNMEZ´e teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

Kısaltma/Simge	Tanım
λ	Özdeğer
$F(\lambda)$	Karakteristik fonksiyon
y'	y fonksiyonunun birinci mertebeden türevi
y''	y fonksiyonunun ikinci mertebeden türevi
O	Büyük o notasyonu
$O(1)$	Sınırlı bir fonksiyon
$U'(x,\lambda)$	x'e göre türev
$U'_{\lambda}(x,\lambda)$	λ 'ya göre türev
$\Delta(x)$	Geç kalan argüman
$W(u,v)$	u ve v fonksiyonlarının Wronskian determinantı
$q(h+0)$	q fonksiyonunun h noktasındaki sağdan limiti
$q(h-0)$	q fonksiyonunun h noktasındaki soldan limiti
$\theta_o(x)$	Başlangıç fonksiyonıu

1. GİRİŞ

Canlıların gereksinimlerinden dolayı ortaya çıkartılarak günümüzde gelişimini sürdüren biyoloji, tıp, kimya, fizik, mühendislik, ekonomi vb. bilimsel alanlardaki birçok sistemlerde zaman kavramı bulunmaktadır. Bu sistemler ekseriyetle, şimdiki durum ve değişim hızlarını baz alan denklemlere göre şekillendiği farz edilmektedir. Bu tür denklemlere adi ve kısmi diferansiyel denklem denilmektedir.

Adi diferansiyel denklemler aracılıyla yapılan modellemelerdeki gecikmeler dikkate alınmaz. Ancak, sistemdeki çok küçük bir gecikme miktarı bile modellenen bu sistemde büyük değişimlere neden olmaktadır. Sistemlerin davranışlarındaki değişim türlerini sadece şimdiki durumlarına bağlı değil aynı zamanda geçmişteki durumlarına da bağlı olabileceği fikrinin matematiksel olarak modellenmesiyle keşfedilen diferansiyel denklemlere geç kalan argümanlı diferansiyel denklemler denir.

Geç kalan argümanlı diferansiyel denklem problemlerine mühendislikte çok sık karşılaşılmaktadır. Geri bildirim kontrol içeren bütün sistemlerde genellikle zaman gecikmesi bulunmaktadır. Bu gecikme alınan bilgi ile o bilginin uygulamaya konulması arasında geçen sonlu bir zaman farkından kaynaklanmaktadır. Bu tür zaman gecikmelerine doğadan verilebilecek onlarca misaller bulunmaktadır. Bunlardan birkaçı; hasta olan bir canlıya tedavisi için verilen ilacın etkisinin belirli bir zaman geçtikten sonra etkisini göstermesi, trafikte araçların ani ivmelerinden kaynaklı olarak birtakım düzensizliklerin olması ve bu düzensizlikler sonucu istenmeyen kazaların ortaya çıkması, yanan bir ormanın tekrar eski görünümüne kavuşması için geçen süre geç kalan argümanlı diferansiyel denklemlere birer misaldir.

Bir diferansiyel denklemde bilinmeyen fonksiyonun en yüksek mertebeden türevi sadece x gibi bir bağımsız değişkene bağlı, bilinmeyen fonksiyon ve türevlerinin denklemde bulunan diğer bileşenleri x'e veya x'den küçük bir argümana bağlı ise bu tür diferansiyel denklemlere geç kalan argümanlı diferansiyel denklem denir. Geç kalan argümanlı diferansiyel denklemin genel gösterimi

$$F(x, y(x), y'(x), ..., y^{(m_0)}(x), y(h(x), ..., y^{(m_1)}(h_1(x)), ..., y(h_n(x)), y'(h_n(x), ..., y^{(m_n)}(h_n(x))) = 0 \tag{1.1}$$

biçiminde yazılır. Burada x bağımsız değişkeni, $h_1(x), ..., h_n(x)$ verilen fonksiyonlar, $y^{(j)}(h_i(x))$ ise $y(x)$ fonksiyonunun j-nci mertebeden türevinin $z = h_i(x)$ noktasındaki değeridir. Özel olarak,

$$h_i(x) = x - \tau_j(x) \text{ ve } \tau_j(x) \geq 0 \qquad (i = 1, 2, 3, ..., n) \tag{1.2}$$

olduğunda (1.1) denklemi geç kalan argümanlı denkleme dönüşür. $\tau_j(x)$ ′e argümanın gecikmesi denir.

$$y'(x) = f(x, y(x), y(x-\tau_1(x)), y(x-\tau_2(x)))$$
$$y'(x) = 1 - y\left(x - \cos^2 x\right)$$
$$y''(x) = f(x, y(x), y'(x), y(x-\tau(x)), y'(x-\tau(x)))$$

Yukarıdaki örnekler $\tau(x) \geq 0$, $\tau_1(x) \geq 0$, $\tau_2(x) \geq 0$ için geç kalan argümanlı diferansiyel denklemlere birer örnektir. $\tau_i(x)$ herhangi bir sabite eşit olduğunda bu diferansiyel denklem fark denklemine dönüşür. Birinci mertebeden $\tau > 0$ için

$$y'(x) = f(x, y(x), y(x-\tau)) \tag{1.3}$$

denklemini dikkate alalım. Burada $f, D \subset \mathbb{R}$ bölgesinde tanımlı fonksiyondur. Bir (x_0, T) aralığında türevlenebilir $\theta(x)$ fonksiyonu için

a) $\left(x, \theta(x), \theta(x-\tau)\right) \in D$, $x \in (x_0, T)$

b) $\theta'(x) = f\left(x, \theta(x), \theta(x-\tau)\right)$, $x \in (x_0, T)$

koşullarını sağlarsa, $y = \vartheta(x)$ fonksiyonuna (1.3) denkleminin (x_0, T) aralığındaki çözümü denir. Açıktır ki, x değişkeni (x_0, T) $\left(x_0 + \tau < \tau\right)$ aralığında değiştiğinde, $x - \tau$ argümenti $\left(x_0 - \tau, T - \tau\right)$ aralığında değişir. Bu nedenle (1.3) denkleminin (x_0, T) aralığında çözümü olan $y = \theta(x)$ fonksiyonunda $\left(x_0 - \tau, x_0\right]$ yarı aralığında tanımlı olması gerekir. Dolayısıyla, (1.3) denkleminin $\left(x_0, T\right]$ aralığında bir çözümünü bulmak için $\left(x_0 - \tau, x_0\right]$ yarı açık aralığında ek koşul verilmesi gerekir. $\left(x_0 - \tau, x_0\right]$ aralığında verilen $\theta_0(x)$ fonksiyonuna eşit olan ve $\left(x_0, T\right)$ aralığında (1.3) denklemini sağlayan fonksiyonun bulunması problemine başlangıç değer problemi, x_0 noktasına başlangıç noktası $\left(x_0 - \tau, x_0\right]$ yarı aralığına başlangıç kümesi, $\theta_0(x)$ fonksiyonuna ise başlangıç fonksiyonu denir.

(1.2) denklemini göz önüne alalım ve $E_i = \left\{z : z = x - \tau_i\left(x\right) < x_0, x_0 < x < T\right\}$, $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$ olsun. $\bigcup_{i=1}^{n} E_i$ başlangıç kümesi, ayrıca $x = x_0$ noktasında

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(m_0 - 1)}(x_0) = y_{m_0 - 1} \tag{1.4}$$

koşulları verilsin. Başlangıç kümesinde $\theta_0(x)$ fonksiyonuna eşit olan, x_0 noktaasında (1.4) koşullarını ve (x_0, T) aralığında (1.2) denklemi için başlangıç değer problemi bu denklemin (1.4) koşullarını sağlayan çözümünü bulmaktır. (1.2) denklemine:

1) $m_0 > p$ olduğunda geç kalan argümanlı diferansiyel denklem,

2) $m_0 = p$ olduğunda nötr tipli diferansiyel denklem,

3) $m_0 < p$ olduğunda ilerleyen argümanlı diferansiyel denklem denir.

$\tau(x) = \tau > 0$ olduğunda sabit gecikmesi olan $x > x_0$ için

$$y'(x) + a(x)y(x) + b(x)y(x-\tau) = f(x) \tag{1.5}$$

lineer denklemi için

$$y(x) = \theta_0(x), \qquad x \in E_{t_0} = [x_0 - \tau, x_0] \tag{1.6}$$

koşulunu göz önüne alalım. Burada $\tau > 0$ sabit gecikmedir. $\theta_0(x)$ başlangıç fonksiyonu $[x_0 - \tau, x_0]$ aralığında $a(x)$, $b(x)$, $f(x)$ fonksiyonları ise $[x_0, \infty)$ aralığında süreklidir. Özel olarak (1.5) denkleminde katsayılar reel sabitler ve $f(x) \equiv 0$ olduğunda

$$L[y] \equiv y'(x) + ay(x) + by(x-\tau) = 0 \tag{1.7}$$

denklemine sabit katsayılı geç kalan argümanlı lineer denklem denir. Bu denklemin çözümünü $e^{\lambda x}$ biçiminde arayalım. Açıktır ki, $h(\lambda) = \lambda + a + be^{-\lambda x}$ alırsak $L\left[e^{\lambda x}\right] = h(x)e^{\lambda x}$ olur. Buradan elde edilir ki, $e^{\lambda x}$ fonksiyonunun (1.7) ´nin çözümü olması için λ ´nın

$$\lambda + a + be^{-\lambda x} = 0 \tag{1.8}$$

denkleminin çözüm olması gerek ve yeterlidir. (1.8)´e karakteristik denklem, $h(\lambda)$ fonksiyonu ise karakteristik kuvazi polinomu denir.

Karakteristik denklemin bir basit λ köküne (1.7) denkleminin $e^{\lambda x}$ çözümü karşılık gelir. Farklı köklere karşılık gelen çözümler lineer bağımsızdır. Ayrıca karakteristik denklemin $\lambda = \alpha + i\beta$ $(\beta \neq 0)$ kompleks köküne (1.7)´nin lineer bağımsız $e^{\lambda x}\cos\beta x$, $e^{\lambda x}\sin\beta x$ çözümleri karşılık gelir. Öte yandan $h'(\lambda) = 1 - b\tau e^{-\lambda\tau}$, $h^{(k)}(\lambda) = (-1)^k b\tau^k e^{-\lambda\tau}$ $(k = 2,3,\ldots)$ olduğunda (1.8) karakteristik denkleminin her bir kökü en fazla iki kez tekrarlanabilir. λ_0 sayısı karakteristik denklemin iki defa tekrarlanan kökü olsun. Yani $h(\lambda_0) = h'(\lambda_0) = 0$ olsun. O taktirde

$$L\left[e^{\lambda_0 x}\right] = L(\lambda_0)e^{\lambda_0 x} = 0, \quad L\left[xe^{\lambda_0 x}\right] = \left[xh(\lambda_0) + h'(\lambda_0)\right]e^{\lambda_0 x} = 0$$

bağıntılarından $e^{\lambda_0 x}$, $xe^{\lambda_0 x}$ fonksiyonlarının (1.7) denkleminin lineer bağımsız çözümleri olduğu elde edilir. $h(\lambda_0) = 0$, $h'(\lambda_0) = 0$ eşitliklerinden λ_0´ı yok ettiğimizde $b\tau e^{a\tau+1} = 1$ bulunur. Bu ise (1.8) denkleminin köklerinin $b\tau e^{a\tau+1} \neq 1$ olduğunda basit olduğunu gösterir. Karakteristik denklem transandantal denklem olduğundan, kompleks düzlemde sonsuz sayıda kökü vardır. Bu nedenle, (1.7) denkleminin sonsuz sayıda lineer bağımsız çözümü vardır. $\lambda_k \alpha_k + i\beta_k$ $(k = 1,2,\ldots)$ sayıları karakteristik denklemin m_k $(m_k \leq 2)$ katlı kökü olsun. $p_k(x)$ ve $q_k(x)$ dereceleri $(m_k - 1)$´dan büyük olmayan keyfi polinomlar olsun. O halde

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{\alpha_k x}\left[p_k(x)\cos\beta_k x + q_k(x)\sin\beta_k x\right] \tag{1.9}$$

serisi yakınsaktır ve türevlenebilir olduğu aralıklarda (1.7) denkleminin çözümü olur.

Özel olarak $\alpha_k < 0$ $(k = 1,2,\ldots)$ olduğunda bu seri $(0,\infty)$ aralığında yakınsaktır ve terim terime türenlenebilir. Varsayalım ki $p_k(x)$, $q_k(x)$ polinomları öyle seçilmiştir ki, $x \in [x_0 - \tau, x_0]$ için

$$\theta_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{\alpha_k x}\left[p_k(x)\cos\beta_k x + q_k(x)\sin\beta_k x\right]$$

koşulu sağlanır. O halde (1.9) serisi (1.7) denkleminin $x \in [x_0 - \tau, x_0]$ için $y(x) = \theta_0(x)$ koşulunu sağlayan çözümüdür. (Çerçi, 2017)

2. KAYNAK ARAŞTIRMALAR

Geç kalan argümanlı diferansiyel denklemlerinin genel teorisinin temelleri ilk kez A.D. Myskis'in çalışmaları ile atılmıştır.

İkinci mertebeden geç kalan argümanlı diferansiyel denklemler için Sturm-Liouville tipli sınır değer problemlerinin özdeğer ve özfonksiyonlarının asimptotik ifadeleri ilk kez Norkin tarafından (1956) incelenmiştir. Norkin bu çalışmada;

$$y'' + \lambda^2 y(x) + q(x)y(x-\Delta(x)) = 0 \tag{2.1}$$

$$y(0) = y(\pi) = 0 \tag{2.2}$$

$$y(x-\Delta(x)) = y(0)\phi(x-\Delta(x)), \quad x-\Delta(x) < 0 \tag{2.3}$$

denklemini ele almıştır. Daha sonra Norkin (1958) sınır koşullarını genelleştirerek

$$cos\alpha\, y(0) + sin\alpha\, y'(0) = 0 \tag{2.4}$$

$$cos\beta\, y(0) + sin\beta\, y'(0) = 0 \tag{2.5}$$

sınır değerleri için (2.1) denklemini incelemiştir. Bu sınır koşulları altında problemin çözümünün varlığını, özdeğerlerin basitliğini, özdeğer ve özfonksiyonların asimptotik ifadelerini elde etmiştir. Bayramoğlu, Köklü, Baykal (2002), (2.1) denklemini

$$\lambda y(0) + y'(0) = 0 \tag{2.6}$$

$$\lambda^2 y(\pi) + y'(\pi) = 0 \tag{2.7}$$

sınır koşulları altında sınırda parametre içeren problemi ele almışlardır. Bu çalışmada özdeğerlerin basitliğini, çözümün varlığını, özdeğer ve özfonksiyonların asimptotik ifadelerini elde etmişlerdir. Bayramov, Uslu ve Çalışkan (2007),

$$u''(x) + q(x)u\left(x-\Delta(x)\right) + \lambda u(x) = 0$$

denklemini $\left[0,\pi/2\right)\cup\left(\pi/2,\pi\right]$ aralığı üzerinde,

$$u(0)\cos\alpha + u'(0)\sin\alpha = 0$$
$$u(\pi)\cos\beta + u'(\pi)\sin\beta = 0$$

sınır koşulları ve

$$u\left(\frac{\pi}{2}-0\right)+\delta u\left(\frac{\pi}{2}+0\right)=0$$
$$u'\left(\frac{\pi}{2}-0\right)+\delta u'\left(\frac{\pi}{2}+0\right)=0$$

geçiş koşulları altında sınır değer problemini araştırmıştır. Problemin süreksiz olduğu $\delta=1$ durumunda elde edilen sonuçlar Sturm – Liouville tipinde, geç kalan argümanlı ikinci mertebeden diferansiyel denklem için sınır değer problemi ile ilgili sonuçlarla örtüşmektedir.

Şen ve Bayramov (2011), $\left[0,\pi/2\right)\cup\left(\pi/2,\pi\right]$ üzerinde

$$y''+\lambda y(x)+q(x)y(x-\Delta(x))=0 \tag{2.8}$$

denklemini

$$y(0)=0 \tag{2.9}$$
$$\lambda y(\pi)+y'(\pi)=0 \tag{2.10}$$

süreksizlik içeren sınır değer problemini

$$\gamma_1 y\left(\frac{\pi}{2}+0\right)=\delta_1 y\left(\frac{\pi}{2}-0\right) \tag{2.11}$$

$$\gamma_2 y'\left(\frac{\pi}{2}+0\right)=\delta_2 y'\left(\frac{\pi}{2}-0\right) \tag{2.12}$$

geçiş koşulları altında incelemişlerdir. Problem iki aralık için ayrı ayrı ele alınmıştır. Birincisinin çözümü geçiş koşulları ile ele alınarak ikincisi için başlangıç koşulları elde edilmiştir. Şen ve Bayramov, (2011), $\left[0,\pi/2\right)\cup\left(\pi/2,\pi\right]$ üzerinde (2.8) denklemini,

$$a_1 y\left(0\right)+a_2 y'\left(0\right)=0 \tag{2.13}$$
$$y(\pi)+\lambda y'(\pi)=0 \tag{2.14}$$

sınır koşulları ve (2.11)-(2.12) geçiş koşulları altında incelemiştir. Bu çalışma Şen ve Bayramov tarafından daha önce yapılan çalışmanın genelleştirmesidir. Akgün, Bayramov ve Bayramoğlu (2012),

$$y''(t)+\lambda^2 y(t)+q(t)y\big(t-\Delta(t)\big)=0$$

denklemini $\left[0,\pi/2\right)\cup\left(\pi/2,\pi\right]$ aralığında,

$$\begin{aligned}&\lambda y(0)+y'(0)=0\\&\lambda^2 y(\pi)+y'(\pi)=0\end{aligned}$$

özdeğere bağlı olan sınır koulları ve

$$\begin{aligned}&y\left(\frac{\pi}{2}-0\right)-\delta y\left(\frac{\pi}{2}+0\right)=0\\&y'\left(\frac{\pi}{2}-0\right)-\delta y'\left(\frac{\pi}{2}+0\right)=0\end{aligned}$$

geçiş koşulları altında incelemiştir. Problemin özdeğeri ve bu özdeğere karşılık gelen özfonksiyonları için asimptotik formüller elde edmişlerdir. Bayramov ve Şen (2012),

$$p(t)x''(t)+q(t)x\big(t-\Delta(t)\big)+\lambda x(t)=0$$

denklemini $\left[0,\pi/2\right)\cup\left(\pi/2,\pi\right]$ üzerinde,

$$\begin{aligned}&\sqrt{\lambda}x(0)+p_1x'(0)=0\\&d\lambda x(\pi)+x'(\pi)=0\end{aligned}$$

spektral parametreye bağlı sınır koşulları ve

$$\gamma_1 x\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=\delta_1 x\left(\frac{\pi}{2}+0\right)$$
$$\gamma_2 x'\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=\delta_2 x'\left(\frac{\pi}{2}+0\right)$$

geçiş koşulları altında incelemiştir. Özdeğer ve özfonksiyonlar için asimptotik formüller üretmiştir. Yang (2012), $\left[0,\pi/2\right)\cup\left(\pi/2,\pi\right]$ üzerinde (2.1) denklemini (2.4)-(2.5) sınır koşulları altında ele almıştır. Süreksizlik noktasında (2.11)-(2.12) geçiş koşullarına denk koşullar altında problemi incelemiştir. Ede edilen sonuçların $\Delta=0$ ve $\delta=1$ olarak alınmasıyla önceden elde edilen klasik çözümler ile örtüştüğünü göstermiştir.

Aydin Akgun, Bayramov ve Bayramoğlu (2013) $\left[0,\pi/2\right)\cup\left(\pi/2,\pi\right]$ üzerinde (2.1) denklemini (2.6)-(2.7) sınır koşulları ve (2.11)-(2.12) geçiş koşulları altında süreksizlik içeren denklemi incelemiştir. Bu çalışma Bayramoğlu, Köklü ve Baykal (2002) ile verilen sonuçların süreksizlik içeren denkleme genelleştirilmesi olmuştur.

Şen, Bayramov (2013), $\left[0,\pi/2\right)\cup\left(\pi/2,\pi\right]$ üzerinde (2.1) denklemini (2.4)-(2.5) sınır koşulları ve

$$z\left(\frac{\pi}{2}+0\right)-\delta\sqrt[3]{\lambda}\,z\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=0 \qquad (2.15)$$

$$z'\left(\frac{\pi}{2}+0\right)-\delta\sqrt[3]{\lambda}\,z'\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=0 \qquad (2.16)$$

geçiş koşulları altında süreksizlik içeren denklemi ele almışlardır. Bu problemi diğerlerinden ayıran en önemli özellik geçiş koşulunda spektral parametre içermesidir.

Şen, Acikgöz, Araci (2013),

$$x''(t)+\left(\lambda^2-\lambda\right)x(t)+M(t)\,x\left(t-\Delta(t)\right)=0$$

denklemini $[0,\pi]$ aralında

$$x(0)\cos a + x'(0)\sin a = 0$$
$$x(\pi)\cos b + x'(\pi)\sin b = 0$$

sınır değer koşulları altında incelemiştir. Bu çalışmada, geç kalan argümanlı Sturm – Liouville probleminin asimptotik özelliklerini incelenmiştir. Önceki çalışmaların aksine diferensiyel denklem özdeğeri ikinci dereceden bir fonksiyon olarak içermektedir.

Şen, Seo, Araci (2013), $[0,h_1)\cup(h_1,h_2)\cup(h_2,\pi]$ üzerinde (2.1) denklemini (2.4)-(2.5) sınır koşulları altında ele almıştır ve

$$y(h_1+0)=\delta y(h_1-0) \tag{2.17}$$

$$y'(h_1+0)=\delta y'(h_1-0) \tag{2.18}$$

$$y(h_2+0)=\gamma y(h_2-0) \tag{2.19}$$

$$y'(h_2+0)=\gamma y'(h_2-0) \tag{2.20}$$

geçiş koşulları altında iki noktada süreksizlik içeren problemi incelemiştir. Elde edilen sonuçların $\Delta=0$ ve $\delta=\gamma=1$ olarak alınmasıyla önceden elde edilen klasik çözümler ile örtüştüğünü göstermiştir. Hira (2017), $[0,\pi/2)\cup(\pi/2,\pi]$ üzerinde (2.1) denklemini

$$(\lambda\alpha_1'+\alpha_1)y(0)-(\lambda\alpha_2'+\alpha_2)y'(0)=0 \tag{2.21}$$

$$(\lambda\beta_1'+\beta_1)y(\pi)-(\lambda\beta_2'+\beta_2)y'(\pi)=0 \tag{2.22}$$

sınır koşulları altında ve (2.11)-(2.12) geçiş koşulları ile ele almıştır. Çetinkaya, Mamedov (2017),

$$y''+\lambda^2\rho(x)+q(x)y(x-\Delta(x))=0 \tag{2.23}$$

denklemini

$$cos\alpha\, y(0)+sin\alpha\, y'(0)=0 \tag{2.24}$$

$$cos\beta\, y(\pi)+sin\beta\, y'(\pi)=0 \tag{2.25}$$

sınır koşulları altında incelemiştir. Burada $\rho(x)$ fonksiyonu tek noktada süreksizlik içeren sabit bir fonksiyondur.

Şen, Acikgöz ve Aracı (2017),

$$p(t)\,y''(t)+q(t)\,y\big(t-\Delta(t)\big)+\lambda y(t)=0$$

denklemini $[0,r_1)\cup(r_1,r_2)\cup(r_2,\pi]$ aralığında

$$\begin{aligned} &y'(0)=0 \\ &y'(\pi)+\lambda y(\pi)=0 \end{aligned}$$

sınır koşulları ve

$$\begin{aligned} &\gamma_1 y(r_1-0)=\delta_1 y(r_1+0) \\ &\gamma_2 y'(r_1-0)=\delta_2 y'(r_1+0) \\ &\theta_1 y(r_2-0)=\eta_1 y(r_2+0) \\ &\theta_2 y'(r_2-0)=\eta_2 y'(r_2+0) \end{aligned}$$

Geçiş koşulları altında spektral bir parametre içeren geç kalan argümanlı Sturm – Liouville problemini ele almıştır. Öncelikle, özdeğerin basitliğini araştırmış ve sonra varlık teoremini ispatlamıştır. Özdeğer ve özfonksiyonlar için asimptotik formüller elde etmiştir. Koparan (2019), (2.1) denklemini (2-3) sınır koşullarında ele almıştır. Çözümün varlığını, özdeğer ve özfonksiyonların asimptotik ifadelerini elde etmiştir. $\sin\beta=0$ durumunda Norkin (1958) tarafından elde edilen sonuçlar elde edilmiştir

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu kısımda çalışmada kullanılacak temel tanımlar ve teoremlere yer verilmiştir.

Tanım 3.1. (Sturm- Liouville Denklemi) λ bir parametre olmak üzere $[a,b]$ aralığında

$$a_1(x).y''(x)+a_2(x).y'(x)+\left(a_3(x)+\lambda\right).y=0 \tag{3.1}$$

ikinci mertebeden lineer diferensiyel denklemini dikkate alalım. Bu denklemde

$$p(x)=\exp^{\left(\int^{x}\frac{a_2(t)}{a_1(t)}dt\right)}\ ,\ q(x)=\frac{a_3(x)}{a_1(x)}p(x) \text{ ve } s(x)=\frac{p(x)}{a_1(x)} \tag{3.2}$$

değişimleri yapılırsa (3.1) denklemi:

$$\left(p(x).y'(x)\right)'+\left(q(x)+\lambda s(x)\right).y=0$$

denklemine indirgenmiş olur. Bu durumda,

$$L:=\left(p(x).y'(x)\right)'+q(x) \tag{3.3}$$

operatörü ile

$$L(y)+\lambda s(x)y=0 \tag{3.4}$$

denklemi yazılır. (3.4) denklemine Sturm- Liouville denklemi denir. Bu denklemde $p(x)$, $q(x)$ ve $s(x)$ reel değerli fonksiyonlardır. $[a,b]$ aralığında $q(x)$ ve $s(x)$ fonksiyonları sürekli, $p(x)$ fonksiyonu türevlenebilir olması durumunda (3.4) denkleminin çözümü vardır. $p(x)$ ve $s(x)$ fonksiyonları $[a,b]$ aralığında pozitif iseler (3.1) denklemi $[a,b]$ aralığında regülerdir (düzgün) denir.

Tanım 3.2. (Özdeğer ve Özfonksiyon) L , $D\subseteq C^{(n)}[a,b]$ bölgesinde tanımlanmış bir diferensiyel operatör olsun. $y\equiv 0$ aşikar çözümünün dışında,

$$L(y)=\lambda y$$

eşitliğini sağlayan λ değerine özdeğer ve bu özdeğere karşılık gelen fonksiyona özfonksiyon denir.

Tanım 3.3. (Sabitlerin Değişimi Yötemi) Bu yöntem Lagrance (1736-1813) tarafından geliştirilmiş olup homojen olmayan diferensiyel denklemlerin özel çözümünü bulmak için kullanılır. $P(x)$ ve $Q(x)$

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x) \tag{3.5}$$

denkleminin çözüm aralığında sürekli olmak üzere, (3.5) denkleminin homojen kısmı

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=0 \tag{3.6}$$

biçimindedir. (3.6) Denkleminin homojen çözümü:

$$y_h=c_1y_1(x)+c_2y_2(x) \tag{3.7}$$

şeklinde elde edilir. Lagrange, özel çözümü bulmak için, madem ki (1) denkleminin özel çözümünün homejen kısmın çözümlerinden hiçbiri ile aynı biçimde olmaması gerekiyor. Bu durumda $\dfrac{y_ö}{y_1}$ ve $\dfrac{y_ö}{y_2}$ birer sabit olmamalıdır, fikrini ortaya atmıştır. O halde (3.7) eşitliğinde ki c_1 ve c_2'nin $x$in çözüm aralığında $c_1=c_1(x)$ ve $c_2=c_2(x)$ biçiminde sürekli fonksiyonlar olduğunu farz ederek özel çözümü

$$y_ö=c_1(x)y_1(x)+c_2(x)y_2(x) \tag{3.8}$$

biçiminde alabiliriz. (3.8) ün türevini alalım:

$$y_ö'=c_1'y_1(x)+c_1y_1'(x)+c_2'y_2(x)+c_2y_2'(x) \tag{3.9}$$

olur. $c_1(x)$ ve $c_2(x)$ üzerine

$$c_1'y_1(x)+c_2'y_2(x)=0 \tag{3.10}$$

olacak biçimde bir koşul olsun. (bu koşul zorunlu değildir.). Şimdi, $y_ö''$ hesaplanması ile

$$y_ö'' = c_1'y_1'(x) + c_1y_1''(x) + c_2'y_2'(x) + c_2y_2''(x) \tag{3.11}$$

(3.9) ve (3.11) denklemlerini (3.5) denkleminde yerlerine yazılır.

$$c_1\left[y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1\right] + c_2\left[y_2'' + P(x)y_2' + Q(x)y_2\right] + c_1'y_1'(x) + c_2'y_2'(x) = f(x) \tag{3.12}$$

y_1 ve y_2 homojen kısmın çözümleri olduğundan, parantez içindeki terimlerin toplamı sıfırdır. Böylece (3.12) denklemi

$$c_1'y_1'(x) + c_2'y_2'(x) = f(x) \tag{3.13}$$

biçiminde olur. (3.10) ve (3.13) denklemlerini ortak çözüldüğünde

$$c_1'(x) = -\frac{y_2 f(x)}{\left(y_1y_2' - y_2y_1'\right)'} \quad \text{ve} \quad c_2'(x) = \frac{y_1 f(x)}{\left(y_1y_2' - y_2y_1'\right)'} \tag{3.14}$$

bulunur. (3.14) denklemleri integre edilerek (integre edilebiliyorsa) $c_1(x)$ ve $c_2(x)$ elde edilir. Özel çözüm:

$$y_ö = y_1\int \frac{-y_2 f(x)}{\left(y_1y_2' - y_2y_1'\right)'}dx + y_2\int \frac{y_1 f(x)}{\left(y_1y_2' - y_2y_1'\right)'}dx$$

olarak yazılabilir.

Tanım 3.4. (Lineer bağımlı) Bir $\{y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)\}$ fonksiyon kümesi, eğer $a \le x \le b$ üzerinde,

$$c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + ... + c_ny_n(x) \equiv 0$$

sağlayan ve hepsi sıfır olamayan $c_1, c_2, ..., c_n$ varsa, bu fonksiyon kümesi $a \le x \le b$ üzerinde lineer bağımlıdır denir.

Teorem 3.1. n- yinci mertebeden, lineer homojen $L(y)=0$ diferensiyel denkleminin n lineer bağımsız çözümü vardır. Eğer $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ çözümseler, $c_1, c_2, ..., c_n$ skaler olmak üzere, $L(y)=0$′ ın genel çözümü

$$y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+...+c_ny_n(x)$$

ile verilir.

Tanım 3.5. (Wronskian Determinantı) $\{z_1(x), z_2(x), ..., z_n(x)\}$ fonksiyonlar kümesi $a \le x \le b$ aralığı üzerinde tanımlı olsun. Her bir fonksiyonun bu aralıkta $n-1$ türeve sahip olmak üzere,

$$W(z_1, z_2, ..., z_n)=\begin{vmatrix} z_1 & z_2 & \cdots & z_n \\ z_1' & z_2' & \cdots & z_n' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ z_1^{(n-1)} & z_2^{(n-1)} & \cdots & z_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

determinantına wronskian determinantı denir.

Tanım 3.6. (Asimptotik Eşitsizlikler) $x \in [a,b]$, $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x,\lambda)$ fonksiyonunun $\lambda \to \infty$ için davranışı $g(x,\lambda)$ fonksiyonunun $\lambda \to \infty$ için davranışından yararlanılarak ifade edilebilir. Böyle durumlarda $f(x,\lambda)$ ve $g(x,\lambda)$ fonksiyonlarının $\lambda \to \infty$ için davranış yakınlığı incelerken "O" ve "o" simgelerinden yararlanılır.

Tanım 3.7. ("O" Asimptotik simgesi) $x \in [a,b]$, $\lambda \in \mathbb{R}$ değişkenine bağlı $g(x,\lambda)$ fonksiyonu verilsin. $f(x,\lambda)$ fonksiyonu için öyle $M>0$ ve $\mathbb{R}>0$ sabitleri için $\left|\dfrac{f(x,\lambda)}{g(x,\lambda)}\right| \le M$ eşitsizliği bütün $x \in [a,b]$ ve $|\lambda| > \mathbb{R}$ geçerli olursa, o halde $\lambda \to \infty$ için $f(x,\lambda)=O(g(x,\lambda))$ biçiminde gösterilir.

$X \subset \mathbb{R}$ olmak üzere, $f(x), g(x): X \to \mathbb{R}$ fonksiyonları verilsin. x_0 sabit bir nokta olsun. O notasyonunun bazı özellikleri aşağıdaki gibidir.

i) $\forall x \in X$ için $g(x) \neq 0$ ise $x \to x_0$ iken,

$$\frac{O(f)}{g}=O\left(\frac{f}{g}\right)$$

olur.

ii) $f_1=O(g_1)$ ve $f_2=O(g_2)$ olsun.

- $f_1 + f_2 = O\left(\max\left(g_1, g_2\right)\right)$
- $O\left(f_1\right).O\left(f_2\right) = O\left(f_1.f_2\right)$
- $k \neq 0, O\left(kf_1\right) = O\left(f_1\right)$
- $O\left(k + f_1\right) = O\left(f_1\right)$

iii) $f_1(x)$ ve $f_2(x)$ pozitif fonksiyonlar olmak üzere ,

$f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ ise $\lim_{x\to\infty} \frac{f_2(x)}{f_1(x)}$ limiti var olduğundan $f(x) = O\left(f_1(x)\right)$ olur.

iv) $f(x) = O\left(g(x)\right)$ ve $g(x) = O\left(h(x)\right)$ ise o halde $f(x) = O\left(h(x)\right)$ olur.

v) $\frac{1}{1} + O\left(f(x)\right) = 1 + O\left(f(x)\right)$

vi) $\exp\left[O\left(f(x)\right)\right] = 1 + O\left(f(x)\right)$

Tanım 3.8. ("o" Asimptotik simgesi) Eğer $[a,b]$ aralığında düzgün olarak $\lim_{x\to\infty}\left|\frac{f(x,\lambda)}{g(x,\lambda)}\right| = 0$ oluyorsa o halde $\lambda \to \infty$ için $f(x,\lambda) = o\left(g(x,\lambda)\right)$ biçiminde gösterilir.

Tanım 3.9. (Volterra İntegral Denklemleri) Çekirdeği $y > x$ için $K(x,y) = 0$ şartını sağlayan

$$\int_a^x K(x,y) f(y)\,dy = \Phi(x)\ ,\ f(x) = \Phi(x) + \lambda \int_a^x K(x,y) f(y)\,dy$$

denklemlerine, sırasıyla, birinci ve ikinci tip lineer Volterra integral denklemleri denir. $K_1(x,y) = K(x,y)$ olmak üzere;

$$K_{n+1}(x,y) = \int_a^x K(x,z) K_n(x,z)\,dz\ \ ,\ (n = 1,2,3,...)$$

şeklindeki bağıntılarıyla elde edilen $K_1, K_2, K_3, ...$ çekirdeklerine ardışık çekirdekler denir. Ele alınan Volterra integral denkleminin çekirdeği $y > x$ iken $K(x,y) = 0$ şartını sağlayan karesi integrallenebilen bir çekirdek olsun. Buna göre ardışık çekirdekler aşağıdaki özellikleri sağlar:

1) $y > x$ ise $K(x,y) = 0$ ´dır.

2) $\int_a^x K(x,z)K_n(z,y)dz = \int_y^x K(x,z)K_n(z,y)dz$, $(n=1,2,3,...)$

3) $\int_a^x K(x,z)K_n(z,y)dz = \int_a^x K_n(x,z)K(z,y)dz$, $(n=1,2,3,...)$

4) $K_{n+1}(x,y) = \int_a^x K_r(x,z)K_s(z,y)dz$, $(n=1,2,3,...,n; s+r=n+1)$

5) $\int_a^x K_r(x,z)K_s(z,y)dz = \int_a^x K_s(x,z)K_r(z,y)dz$, $(n=1,2,3,...,n; s+r=n+1)$

6) $\vartheta_0(x) = \phi(x)$ olsun. Bu taktirde;

$$\vartheta_n(x) = \int_a^x K_n(x,y)\phi(y)dy,\ (n=1,2,3,...)$$

eşitliğini sağlaması için gerek ve yeter şart

$$\vartheta_n(x) = \int_a^x K(x,y)\vartheta_{n-1}(y)dy,\ (n=1,2,3,...)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

Teorem 3.2. (Rolle) $f(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli, $f'(x)$ türevi (a,b) aralığında mevcut ve $f(a)=f(b)$ olsun. O zaman en az bir $c\in(a,b)$ için $f'(c)=0$ olur.

Teorem 3.3. (Kısmi integrasyon) $u(x)$ ve $v(x)$ fonksiyonları $[a,b]$ aralığında diferansiyellenebilir fonksiyonlar ise

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

olur.

Teorem 3.4. (Norkin, 1972) $\Phi = \max_{1\le k\le 2E_A} \sup\left|\phi_k(t)\right| < \infty$ olsun. O zaman,

$$y_k'(t) = \sum_{j=1}^{2}\left(a_{j0}{}^k(t)y_i(t) + a_{j1}{}^k(t)y_i(t-\Delta(t))\right),\quad k=1,2. \tag{3.15}$$

sistemi $[A,B)$ aralığında,

$$y_k(A) = y_A{}^{(k)} = \Phi_k(A)$$

$$y_k\left(t-\Delta(t)\right)\equiv\Phi_k\left(t-\Delta(t)\right),\quad \text{eğer } t-\Delta(t)<A \text{ ise} \tag{3.16}$$

başlangıç koşullarını sağlayan tek bir çözüme sahiptir.

Teorem 3.5. (Norkin, 1972)

$$y_k'(t)=\sum_{j=1}^{2}\left(a_{j0}{}^{k}(t,\lambda)\,y_i(t)+a_{j1}{}^{k}(t,\lambda)\,y_i\left(t-\Delta(t)\right)\right),\quad \left(k=1,2;A\le t\le C\right) \tag{3.17}$$

Sisteminde $a_{ji}^{k}(t,\lambda)$ $\left(j,k=1,2;i=0,1\right)$ λ parametresine göre $\lambda_1\le\lambda\le\lambda_2$ aralığında türevlenebilen sürekli katsayı olsun. Eğer $y_k(t,\lambda)$, (3.17) ve

$$y_k(A,\lambda)=y_A{}^{(k)}=\Phi_k(A)$$

$$y_k\left(t-\Delta(t),\lambda\right)\equiv\Phi_k\left(t-\Delta(t)\right),\ \text{eğer } t-\Delta(t)<A. \tag{3.18}$$

sisteminin bir çözümü ise o zaman $\partial y_k(t,\lambda)/\partial\lambda$ $k=1,2$ için t ve λ 'da vardır ve süreklidir.

Teorem 3.6. (Norkin, 1972)

$$x''(t)+N(t)x(t)+M(t)x\left(t-\Delta(t)\right)=0 \tag{3.19}$$

$$x(A)=x_A,\ x'(A+0)=x_A',$$

$$x\left(t-\Delta(t),\lambda\right)\equiv x_A\Phi\left(t-\Delta(t)\right),\ \text{eğer } t-\Delta(t)<A \text{ ise.} \tag{3.20}$$

denkleminin $x_1(t)$ ve $x_2(t)$ çözümleri $[A,B)$ aralığında lineer bağımsız olması için gerek ve yeter koşul,

$$W\left(x_1(A),x_2(A)\right)=\begin{vmatrix}x_1(A) & x_2(A)\\ x_1'(A) & x_2'(A)\end{vmatrix}=0$$

olmasıdır.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu çalışmada, tanım aralığı üzerinde süreksizlik içeren hem sınırda hem de geçiş koşulunda spektral parametre bulunduran geç kalan argümanlı denklem tanımlanmıştır. Ele alınan problem için genel çözüm bulunduktan sonra özdeğer ve özfonksiyonlar yazılarak asimptotik davranışları incelenmiş olup problemin özdeğer ve özfonksiyonlarının asimptotik ifadeleri iyileştirilmiştir.

4.1. Sonlu Aralıkta Geç Kalan Argümanlı Bir Sınır Değer Problemi

$\left[0,\pi/2\right)\cup\left(\pi/2,\pi\right]$ aralığı üzerinde tanımlı

$$-y''(x)+q(x)\,y\left(x-\Delta(x)\right)=\lambda^2 y(x) \tag{4.1}$$

denkleminin sınır koşulları

$$\cos\alpha\, y(0)+\sin\alpha\, y'(0)=0 \tag{4.2}$$

$$\cos\beta\, y(\pi)+\lambda\sin\beta\, y'(\pi)=0 \tag{4.3}$$

ve geçiş koşulları

$$y\left(\frac{\pi}{2}+0\right)=\frac{\delta}{\lambda}\,y\left(\frac{\pi}{2}-0\right) \tag{4.4}$$

$$y'\left(\frac{\pi}{2}+0\right)=\frac{\delta}{\lambda}\,y'\left(\frac{\pi}{2}-0\right) \tag{4.5}$$

olmak üzere $q(x)$, $x\in\left[0,\pi/2\right)\cup\left(\pi/2,\pi\right]$ aralığında reel değerli sürekli bir fonksiyondur. $q(\pi/2\pm0)=\lim\limits_{x\to\pi/2\pm0}q(x)$ sonlu limitine sahiptir. Reel değerli $\Delta(x)\geq 0$ fonksiyonu $x\in\left[0,\pi/2\right)\cup\left(\pi/2,\pi\right]$ aralığında süreklidir ve $\Delta(\pi/2\pm0)=\lim\limits_{x\to\pi/2\pm0}\Delta(x)$ sağlanır. Ayrıca eğer $x\in\left[0,\pi/2\right)$ ise $x-\Delta(x)\geq 0$ ve $x\in\left(\pi/2,\pi\right]$ ise $x-\Delta(x)\geq\dfrac{\pi}{2}$'dir. λ reel bir parametre, δ sıfırdan farklı reel keyfi bir sayıdır.

$\omega_1(x,\lambda)$ (4.1) denkleminin $\left[0,\pi/2\right)$ aralığında,

$$\omega(0,\lambda)=\sin\alpha\,,\quad \omega'(0,\lambda)=-\cos\alpha \tag{4.6}$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümü olsun. $\omega_1(x,\lambda)$ çözümünün bulunması ile (4.1) denkleminin $(\pi/2,\pi]$ aralığında,

$$\omega_2\left(\frac{\pi}{2},\lambda\right)=\frac{\delta}{\lambda}\omega_1\left(\frac{\pi}{2},\lambda\right) \tag{4.7}$$

$$\omega_2'\left(\frac{\pi}{2},\lambda\right)=\frac{\delta}{\lambda}\omega_1'\left(\frac{\pi}{2},\lambda\right) \tag{4.8}$$

geçiş koşullarının yardımıyla $\omega_2(x,\lambda)$ çözümünün elde edilmesine olanak sağlar. Bu çözümler yardımıyla, (4.1) denkleminin $[0,\pi/2)\cup(\pi/2,\pi]$ aralığındaki çözümü

$$\omega(x,\lambda)=\begin{cases}\omega_1(x,\lambda),\, x\in[0,\pi/2)\\ \omega_2(x,\lambda),\, x\in(\pi/2,\pi]\end{cases}$$

biçiminde tanımlanır. $\omega(x,\lambda)$ çözümü (4.2) sınır koşulunu ve (4.4)-(4.5) geçiş koşullarını sağlar.

Lemma 4.1.1. $\omega(x,\lambda)$, (4.1) denkleminin bir çözümü ve $\lambda>0$ olsun. O halde, aşağıdaki integral denklemleri sağlanır:

$$\omega_1(x,\lambda)=\sin\alpha.\cos\lambda x-\frac{1}{\lambda}\cos\alpha.\sin\lambda x+\int_0^x\frac{q(\tau)}{\lambda}\omega_1(\tau-\Delta(\tau))\sin\lambda(x-\tau)\,d\tau \tag{4.9}$$

$$\omega_2(x,\lambda)=\frac{\delta}{\lambda}\omega_1\left(\frac{\pi}{2},\lambda\right)\cos\lambda\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\delta}{\lambda^2}\omega_1'\left(\frac{\pi}{2},\lambda\right)\sin\lambda\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\frac{\sin\lambda(x-\tau)}{\lambda}q(\tau)\omega_2(\tau-\Delta(\tau))\,d\tau \tag{4.10}$$

İspat: (4.1) denkleminin çözümü

$$\omega_1(x,\lambda)=u_1\cos\lambda x+u_2\sin\lambda x \tag{4.11}$$

olsun. (4.1) denkleminin çözümü sabitlerin değişimi metodunu kullanarak elde edilir.

$$\omega_1'(x,\lambda) = u_1'\cos\lambda x + u_2'\sin\lambda x - u_1\lambda\sin\lambda x + u_2\lambda\cos\lambda x$$

$$u_1'\cos\lambda x + u_2'\sin\lambda x = 0 \tag{4.12}$$

olsun. Buna göre,

$$\omega_1'(x,\lambda) = -u_1\lambda\sin\lambda x + u_2\lambda\cos\lambda x \tag{4.13}$$

$$\omega_1''(x,\lambda) = -u_1'\lambda\sin\lambda x - u_1\lambda^2\cos\lambda x + u_2'\lambda\cos\lambda x - u_2\lambda^2\sin\lambda x \tag{4.14}$$

elde edilir. (4.11) , (4.13) ve (4.14) eşitliklerini (4.1) denkleminde yerlerine yazıp düzenlendiğinde

$$u_2'\lambda\cos\lambda x - u_1'\lambda\sin\lambda x = -q(x)\,y\big(x-\Delta(x)\big) \tag{4.15}$$

bulunur. (4.12) - (4.15) denklemleri ile bir denklem sistemi oluşturup u_1 ve u_2 fonksiyonlarının eşitleri elde edilir.

$$u_1'\cos\lambda x + u_2'\sin\lambda x = 0$$
$$u_2'\lambda\cos\lambda x - u_1'\lambda\sin\lambda x = -q(x)\,y\big(x-\Delta(x)\big)$$

Yukarıda ki denklem sisteminde gerekli işlemleri yapılarak

$$u_2' = \frac{-q(x)\,y\big(x-\Delta(x)\big)}{\lambda}\cos\lambda x \tag{4.16}$$

bulunur. (4.16) denklemin her iki tarafını $\sin\lambda x$ ile genişletip, $u_2'\sin\lambda x = -u_1 c\text{os}\,\lambda x$ eşitliğinden

$$u_2'\sin\lambda x = \frac{-q(x)\,y\big(x-\Delta(x)\big)}{\lambda}\cos\lambda x.\sin\lambda x$$

$$u_1' = \frac{q(x)\,y\big(x-\Delta(x)\big)}{\lambda}\sin\lambda x \tag{4.17}$$

elde edilir. (4.1.16) ve (4.1.17) eşitliklerinin her iki tarafının tanım aralığında integrali alındığında

$$u_1 = \int_0^x \frac{q(\tau)\, y(\tau - \Delta(\tau))}{\lambda} \sin \lambda \tau d\tau \tag{4.18}$$

$$u_2 = \int_0^x \frac{-q(\tau)\, y(\tau - \Delta(\tau))}{\lambda} \cos \lambda \tau d\tau \tag{4.19}$$

bulunur. (4.18) ve (4.19) eşitliklerini (4.11) de yerlerine yazıp düzenlenirse (4.9) denklemini

$$\omega_1(x,\lambda) = \sin\alpha.\cos\lambda x - \frac{1}{\lambda}\cos\alpha.\sin\lambda x + \int_0^x \frac{q(\tau)}{\lambda}\omega_1(\tau - \Delta(\tau))\sin\lambda(x-\tau)\, d\tau$$

elde edilir. $\omega_2(x,\lambda)$, (4.1) denklemini $(\pi/2, \pi]$ aralığında sağlayan çözümü olsun. Sabitlerin değişimi metodunu uygulayarak $\omega_1(x,\lambda)$'ya benzer biçimde

$$\omega_2(x,\lambda) = c_1 \cos\lambda\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + c_2 \sin\lambda\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \int_{\frac{\pi}{2}}^x \frac{q(\tau)}{\lambda}\omega_2(\tau - \Delta(\tau))\sin\lambda(x-\tau)\, d\tau \tag{4.20}$$

bulunur. (4.20) denkleminde aşağıdaki c_1 ve c_2'nin eşitleri geçiş koşulları yardımıyla bulunup yerlerine yazılır.

$$\omega_2\left(\frac{\pi}{2},\lambda\right) = c_1 = \frac{\delta}{\lambda}\omega_1\left(\frac{\pi}{2},\lambda\right)$$

$$\omega_2'\left(\frac{\pi}{2},\lambda\right) = \lambda c_2 = \frac{\delta}{\lambda}\omega_1'\left(\frac{\pi}{2},\lambda\right)$$

$$c_2 = \frac{\delta}{\lambda^2}\omega_1'\left(\frac{\pi}{2},\lambda\right)$$

böylece (4.10) bulunur.

4.2 Sınır Değer Probleminin Özellikleri

Bu bölümde 4.1´de tanımlanan sınır değer probleminin özellikleri incelenecektir.

Teorem 4.2.1. (4.1) – (4.5) sınır değer probleminin özdeğerleri basittir.

İspat: $\tilde{\lambda}$, (4.1) – (4.5) denkleminin özdeğeri olsun.

$$\tilde{u}\left(x,\tilde{\lambda}\right)=\begin{cases}\tilde{u}_1\left(x,\tilde{\lambda}\right), & x\in\left[0,\pi/2\right)\\ \tilde{u}_2\left(x,\tilde{\lambda}\right), & x\in\left(\pi/2,\pi\right]\end{cases} \tag{4.21}$$

(4.21) $\tilde{\lambda}$ özdeğerine karşılık gelen özfonksiyon olmak üzere bu özfonksiyonun wronskianı

$$\begin{aligned}W\left[\tilde{u}_1\left(0,\tilde{\lambda}\right),\omega\left(0,\tilde{\lambda}\right)\right]&=\begin{vmatrix}\tilde{u}_1\left(0,\tilde{\lambda}\right) & \omega_1\left(0,\tilde{\lambda}\right)\\ \tilde{u}_1'\left(0,\tilde{\lambda}\right) & \omega_1'\left(0,\tilde{\lambda}\right)\end{vmatrix}\\ &=\begin{vmatrix}\tilde{u}_1\left(0,\tilde{\lambda}\right) & \sin\alpha\\ \tilde{u}_1'\left(0,\tilde{\lambda}\right) & -\cos\alpha\end{vmatrix}\\ &=-\tilde{u}_1\left(0,\tilde{\lambda}\right)\cos\alpha-\tilde{u}_1'\left(0,\tilde{\lambda}\right)\sin\alpha\\ &=0\end{aligned}$$

elde edilir. $\tilde{u}_2\left(x,\tilde{\lambda}\right)=K_2\omega_2\left(x,\tilde{\lambda}\right)$ olduğunu gösterilmeli. Öyleki $K_1\neq K_2$ olsun.

$$\begin{aligned}\tilde{u}\left(\frac{\pi}{2}+0,\tilde{\lambda}\right)-\frac{\delta}{\lambda}\tilde{u}\left(\frac{\pi}{2}-0,\lambda\right)&=\tilde{u}\left(\frac{\pi}{2},\tilde{\lambda}\right)-\frac{\delta}{\lambda}\tilde{u}_1\left(\frac{\pi}{2},\lambda\right)\\ &=K_2\omega_2\left(\frac{\pi}{2},\tilde{\lambda}\right)-\frac{\delta}{\lambda}K_1\omega_1\left(x,\tilde{\lambda}\right)\\ &=K_2\frac{\delta}{\lambda}\omega_1\left(\frac{\pi}{2},\tilde{\lambda}\right)-\frac{\delta}{\lambda}K_1\omega_1\left(x,\tilde{\lambda}\right)\\ &=\frac{\delta}{\lambda}\omega_1\left(\frac{\pi}{2},\tilde{\lambda}\right)\left(K_2-K_1\right)=0\end{aligned}$$

$K_1 \neq K_2$ olduğundan $\omega_1\left(\frac{\pi}{2},\tilde{\lambda}\right)=0$ bulunur. Aynı yöntem $\tilde{u}_2'\left(x,\tilde{\lambda}\right)=K_2\omega_2'\left(x,\tilde{\lambda}\right)$ yapıldığında $\omega_1'\left(\frac{\pi}{2},\tilde{\lambda}\right)=0$ bulunur. Geçiş koşullarında $\omega_2\left(\frac{\pi}{2},\tilde{\lambda}\right)=0$ ve $\omega_2'\left(\frac{\pi}{2},\tilde{\lambda}\right)=0$ bulunur. Buradan ise $\omega_1\left(x,\tilde{\lambda}\right)=0$ ve $\omega_2\left(x,\tilde{\lambda}\right)=0$ elde edilir. Bu ise lemma 4.1.1. ile çelişir. $K_1=K_2$ elde edilir. Yani $\tilde{\lambda}$ ya karşılık gelen bütün özfonksiyonlar lineer bağımlıdır.

4.3 Varlık Teoremi

Tanımladığımız $\omega(x,\lambda)$ fonksiyonu (4.1) denkleminin (4.2) sınır koşulları ve (4.4)-(4.5) geçiş koşullarını sağlayan çözümüdür. $\omega(x,\lambda)$ fonksiyonunu (4.3) koşulunda yerine yazılırsa, karakteristik denklem

$$F(\lambda)\equiv\omega(\pi,\lambda)\cos\beta+\omega'(\pi,\lambda)\lambda\sin\beta=0 \tag{4.22}$$

elde edilir. Teorem 4.2.1.'den (4.1)-(4.1.5) sınır değer probleminin özdeğerlerinin (4.22) denklemi ile çakışık olduğunu söylenebilir.

$$q_1=\int_0^{\pi/2}\left|q(\tau)\right|d\tau \quad , \quad q_2=\int_{\pi/2}^{\pi}\left|q(\tau)\right|d\tau$$

olsun.

Lemma 4.3.1. *i)* $\lambda\geq 2q_1$ olsun. Bu durumda $\omega_1(x,\lambda)$ çözümü için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$\left|\omega_1(x,\lambda)\right|\leq\frac{1}{q_1}\sqrt{4q_1^2\sin^2\alpha+\cos^2\alpha} \tag{4.23}$$

ii) $\lambda\geq\max\left\{2q_1,2q_2\right\}$ olsun. Bu durumda $\omega_2(x,\lambda)$ çözümü için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$\left|\omega_2(x,\lambda)\right|\leq\frac{|\delta|}{\lambda q_1}\sqrt{4{q_1}^2\sin^2\alpha+\cos^2\alpha} \tag{4.24}$$

İspat: (i) $B_{1\lambda}=\max\limits_{x\in[0,\pi/2)}\left|\omega_1(x,\lambda)\right|$ olsun. (4.9)'dan

$$\left|\omega_1(x,\lambda)\right| \le \int_0^x \frac{|q(\tau)|}{\lambda}\left|\omega_1(\tau-\Delta(\tau))\right| d\tau + \sqrt{\sin^2\alpha + \frac{1}{\lambda^2}\cos^2\alpha}$$

$$\le \frac{B_{1\lambda}}{\lambda}\int_0^x |q(\tau)|\,d\lambda + \sqrt{\sin^2\alpha + \frac{1}{\lambda^2}\cos^2\alpha}$$

$$\le \frac{B_{1\lambda}}{\lambda} q_1 + \sqrt{\sin^2\alpha + \frac{1}{\lambda^2}\cos^2\alpha}$$

$$B_{1\lambda}\left(1-\frac{q_1}{\lambda}\right) \le \sqrt{\sin^2\alpha + \frac{1}{\lambda^2}\cos^2\alpha}$$

$$B_{1\lambda} \le \frac{1}{q_1}\sqrt{4q_1^2\sin^2\alpha + \cos^2\alpha} \qquad , \qquad x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\left|\omega_1(x,\lambda)\right| \le \frac{1}{q_1}\sqrt{4q_1^2\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}$$

elde edilir.

(ii) $B_{2\lambda} = \max\limits_{x\in(\pi/2,\pi]}\left|\omega_2(x,\lambda)\right|$ olsun.

$$\omega_1'(x,\lambda) = -\lambda\sin\alpha\sin\lambda x - \cos\alpha\cos\lambda x + \int_0^x q(\tau)\omega_1(\tau-\Delta(\tau))\cos\lambda(x-\tau)\,d\tau \qquad (4.25)$$

$$\left|\omega_1'(x,\lambda)\right| = \sqrt{\lambda^2\sin^2\alpha + \cos^2\alpha} + B_{1\lambda}.q_1$$

$$= \sqrt{\lambda^2\sin^2\alpha + \cos^2\alpha} + \sqrt{4q_1^2\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}$$

$$\left|\frac{\omega_1'(x,\lambda)}{\lambda}\right| \le \sqrt{\sin^2\alpha + \frac{\cos^2\alpha}{\lambda^2}} + \frac{1}{\lambda}\sqrt{4q_1^2\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}$$

$$\le \sqrt{\sin^2\alpha + \frac{\cos^2\alpha}{4q_1^2}} + \frac{1}{2q_1}\sqrt{4q_1^2\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}$$

$$\left|\frac{\omega_1'(x,\lambda)}{\lambda}\right| \le \frac{1}{q_1}\sqrt{4q_1^2\sin^2\alpha + \cos^2\alpha} \qquad (4.26)$$

(4.23) ve (4.26) eşitsizliklerini (4.10) eşitliğinde kullanılarak

$$\left|\omega_2(x,\lambda)\right| \le \sqrt{\frac{\delta^2}{\lambda^2}\omega_1^2\left(\frac{\pi}{2},\lambda\right) + \frac{\delta^2}{\lambda^4}\omega_1^2\left(\frac{\pi}{2},\lambda\right)} + \frac{1}{\lambda}B_{2\lambda}q_2$$

$$= \sqrt{\frac{\delta^2}{\lambda^2}\left[\frac{1}{4q_1^2}\left(4q_1^2\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right)\right] + \frac{\delta^2}{\lambda^2}\left[\frac{1}{4q_1^2}\left(4q_1^2\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right)\right]} + \frac{1}{\lambda}B_{2\lambda}q_2$$

$$B_{2\lambda}(x,\lambda)\left(1-\frac{1}{\lambda}q_2\right)\le\frac{|\delta|}{\lambda q_1}\sqrt{4q_1^2\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}$$

$$B_{2\lambda}(x,\lambda)\le\frac{|\delta|}{\lambda q_1}\sqrt{4q_1^2\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}$$

$$|\omega_2(x,\lambda)|\le\frac{|\delta|}{\lambda q_1}\sqrt{4q_1^2\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}$$

elde edilir. Böylece istenilen eşitsizliklerin sağlandığı görülür.

Teorem 4.3.1. (4.1)-(4.5) sınır değer problemi sonsuz sayıda pozitif özdeğere sahiptir.

İspat: Özdeğerlerin sonsuz sayıda olduğunu göstermek için (4.22) karakteristik denkleminden faydalanarak

$$F(\lambda)\equiv\omega(\pi,\lambda)\cos\beta+\omega'(\pi,\lambda)\lambda\sin\beta=0 \tag{4.27}$$

denklemi ele alınır.

$$\cos\beta\left[\frac{\delta}{\lambda}\omega_1\left(\frac{\pi}{2},\lambda\right)\cos\lambda\frac{\pi}{2}+\frac{\delta}{\lambda^2}\omega_1'\left(\frac{\pi}{2},\lambda\right)\sin\lambda\frac{\pi}{2}+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin\lambda(\pi-\tau)}{\lambda}q(\tau)\omega_2(\tau-\Delta(\tau))d\tau\right]$$

$$+\lambda\sin\beta\left[-\delta\omega_1\left(\frac{\pi}{2},\lambda\right)\sin\lambda\frac{\pi}{2}+\frac{\delta}{\lambda}\omega_1'\left(\frac{\pi}{2},\lambda\right)\cos\lambda\frac{\pi}{2}+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos\lambda(\pi-\tau)q(\tau)\omega_2(\tau-\Delta(\tau))d\tau\right]$$

$$=\cos\beta\left[\frac{\delta}{\lambda}\cos\lambda\frac{\pi}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{q(\tau)}{\lambda}\omega_1(\tau-\Delta(\tau))\sin\lambda\left(\frac{\pi}{2}-\tau\right)d\tau+\sin\alpha\cos\lambda\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\lambda}\cos\alpha\sin\lambda\frac{\pi}{2}\right)\right.$$

$$+\frac{\delta}{\lambda^2}\sin\lambda\frac{\pi}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}q(\tau)\omega_1(\tau-\Delta)\cos\lambda\left(\frac{\lambda}{2}-\lambda\right)d\lambda-\lambda\sin\alpha\sin\lambda\frac{\pi}{2}-\cos\alpha\cos\lambda\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\left.+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin\lambda(\pi-\tau)}{\lambda}q(\tau)\omega_2(\tau-\Delta(\tau))d\tau\right]$$

$$+\lambda\sin\beta\left[-\delta\sin\lambda\frac{\pi}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{q(\tau)}{\lambda}\omega_1(\tau-\Delta(\tau))\sin\lambda\left(\frac{\pi}{2}-\tau\right)d\tau+\sin\alpha\cos\lambda\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\lambda}\cos\alpha\sin\lambda\frac{\pi}{2}\right)\right.$$

$$+\frac{\delta}{\lambda}\cos\frac{\lambda\pi}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} q(\tau)\omega_1(\tau-\Delta(\tau))\cos\lambda\left(\frac{\pi}{2}-\tau\right)d\tau-\lambda\sin\alpha\sin\lambda\frac{\pi}{2}-\cos\alpha\cos\lambda\frac{\pi}{2}-\cos\alpha\cos\lambda\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\left.+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos\lambda(\pi-\tau)q(\tau)\omega_2(\tau-\Delta(\tau))d\tau\right]$$

$$=\frac{\delta}{\lambda^2}\cos\beta\cos\lambda\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} q(\tau)\omega_1(\tau-\Delta(\tau))\sin\lambda\left(\frac{\pi}{2}-\tau\right)d\tau+\frac{\delta}{\lambda}\cos\beta\cos\lambda\frac{\pi}{2}\sin\alpha\cos\lambda\frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{\delta}{\lambda^2}\cos\beta\cos\lambda\frac{\pi}{2}\cos\alpha\sin\lambda\frac{\pi}{2}+\frac{\delta}{\lambda^2}\cos\beta\sin\lambda\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} q(\tau)\omega_1(\tau-\Delta(\tau))\cos\lambda\left(\frac{\pi}{2}-\lambda\right)d\tau$$

$$-\delta\lambda\sin\beta\sin\lambda\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{q(\tau)}{\lambda}\omega_1(\tau-\Delta(\tau))\sin\lambda\left(\frac{\pi}{2}-\tau\right)d\tau$$

$$-\delta\lambda\sin\beta\sin\lambda\frac{\pi}{2}\sin\alpha\cos\lambda\frac{\pi}{2}+\delta\sin\beta\sin\lambda\frac{\pi}{2}\cos\alpha\cos\lambda\frac{\pi}{2}$$

$$+\delta\sin\beta\cos\lambda\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} q(\tau)\omega_1(\tau-\Delta(\tau))\cos\lambda\left(\frac{\pi}{2}-\tau\right)d\tau$$

$$-\lambda\delta\sin\beta\cos\lambda\frac{\pi}{2}\sin\alpha\sin\lambda\frac{\pi}{2}-\delta\sin\beta\cos\lambda\frac{\pi}{2}\cos\alpha\cos\lambda\frac{\pi}{2}$$

$$+\lambda\delta\sin\beta\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos\lambda(\pi-\tau)q(\tau)\omega_2(\tau-\Delta(\tau))d\tau$$

$$=\frac{\delta}{\lambda}\cos\beta\sin\alpha\cos^2\lambda\frac{\pi}{2}-\frac{\delta}{\lambda}\cos\beta\sin\alpha\sin^2\lambda\frac{\pi}{2}-\frac{\delta}{\lambda^2}\cos\beta\cos\alpha\cos\lambda\frac{\pi}{2}\sin\lambda\frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{\delta}{\lambda^2}\cos\beta\cos\alpha\sin\lambda\frac{\pi}{2}\cos\lambda\frac{\pi}{2}+\frac{\delta}{\lambda^2}\cos\beta\cos\lambda\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\lambda\left(\frac{\pi}{2}-\tau\right)q(\tau)\omega_1(\tau-\Delta(\tau))d\tau$$

$$+\frac{\delta}{\lambda^2}\cos\beta\sin\lambda\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\lambda\left(\frac{\pi}{2}-\lambda\right)q(\tau)\omega_1(\tau-\Delta(\tau))d\tau+\frac{\cos\beta}{\lambda}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin\lambda(\pi-\tau)q(\tau)\omega_2(\tau-\Delta(\tau))d\tau$$

$$-\delta\sin\beta\sin\lambda\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\lambda\left(\frac{\pi}{2}-\tau\right)q(\tau)\omega_1(\tau-\Delta(\tau))d\tau+\delta\sin\beta\cos\lambda\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\lambda\left(\frac{\pi}{2}-\tau\right)q(\tau)\omega_1(\tau-\Delta(\tau))d\tau$$

$$+\lambda\sin\beta\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos\lambda(\pi-\tau)q(\tau)\omega_2(\tau-\Delta(\tau))d\tau-\delta\lambda\sin\beta\sin\alpha\sin\lambda\frac{\pi}{2}\cos\lambda\frac{\pi}{2}$$

$$+\delta\sin\beta\cos\alpha\sin^2\lambda\frac{\pi}{2}-\lambda\delta\sin\beta\sin\alpha\cos\lambda\frac{\pi}{2}\sin\lambda\frac{\pi}{2}-\delta\sin\beta\cos\alpha\cos^2\lambda\frac{\pi}{2}$$

$$=-\frac{\delta}{\lambda^2}\cos\beta\cos\alpha\sin\lambda\pi+\frac{\delta}{\lambda}\cos\beta\sin\alpha\cos\lambda\pi+\frac{\delta}{\lambda^2}\cos\beta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\lambda(\pi-\tau)\omega_1(\tau-\Delta(\tau))d\tau$$

$$+\frac{\delta}{\lambda^2}\cos\beta\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin\lambda(\pi-\tau)q(\tau)\omega_2(\tau-\Delta(\tau))d\tau+\delta\sin\beta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\lambda(\pi-\tau)q(\tau)\omega_1(\tau-\Delta(\tau))d\tau$$

$$+\lambda\sin\beta\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos\lambda(\pi-\tau)q(\tau)\omega_2(\tau-\Delta(\tau))d\tau-\delta\lambda\sin\beta\sin\alpha\sin\lambda\pi+\delta\sin\beta\cos\alpha\left(\sin^2\lambda\frac{\pi}{2}-\cos^2\lambda\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=-\frac{\delta}{\lambda^2}\cos\beta\cos\alpha\sin\lambda\pi+\frac{\delta}{\lambda}\cos\beta\sin\alpha\cos\lambda\pi+\frac{\delta}{\lambda^2}\cos\beta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\lambda\pi\cos\lambda\tau q(\tau)\omega_1(\tau-\Delta(\tau))d\tau$$

$$-\frac{\delta}{\lambda^2}\cos\beta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\lambda\tau\cos\lambda\pi q(\tau)\omega_1(\tau-\Delta(\tau))d\tau+\frac{\cos\beta}{\lambda}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin\lambda\pi\pi\cos\lambda\tau q(\tau)\omega_2(\tau-\Delta(\tau))d\tau$$

$$-\frac{\cos\beta}{\lambda}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin\lambda\pi\cos\lambda\tau q(\tau)\omega_2(\tau-\Delta(\tau))d\tau+\delta\sin\beta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\lambda\tau\cos\lambda\pi q(\tau)\omega_1(\tau-\Delta(\tau))d\tau$$

$$+\delta\sin\beta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\lambda\tau\sin\lambda\pi q(\tau)\omega_1(\tau-\Delta(\tau))d\tau+\lambda\sin\beta\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos\lambda\pi\cos\lambda\tau q(\tau)\omega_2(\tau-\Delta(\tau))d\tau$$

$$\lambda\sin\beta\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin\lambda\pi\sin\lambda\tau q(\tau)\omega_2(\tau-\Delta(\tau))d\tau-\delta\lambda\sin\beta\sin\alpha sin\lambda\pi-\delta\lambda\sin\beta\cos\alpha\cos\lambda\pi$$

$$=\sin\lambda\pi\Bigg[-\frac{\delta}{\lambda^2}\cos\beta\cos\alpha-\frac{\delta}{\lambda^2}\cos\beta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\lambda\tau q(\tau)\omega_1(\tau-\Delta(\tau))d\tau-\frac{\cos\beta}{\lambda}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\lambda\tau q(\tau)\omega_2(\tau-\Delta(\tau))d\tau$$

$$-\delta\sin\beta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\lambda\tau q(\tau)\omega_1(\tau-\Delta(\tau))d\tau-\lambda\sin\beta\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin\lambda\tau q(\tau)\omega_2(\tau-\Delta(\tau))d\tau-\delta\lambda\sin\beta\sin\alpha\Bigg]$$

$$+\cos\lambda\pi\left[\frac{\delta}{\lambda}\cos\beta\sin\alpha+\frac{\delta}{\lambda^{2}}\cos\beta\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin\lambda\tau q(\tau)\omega_{1}\left(\tau-\Delta(\tau)\right)d\tau+\frac{\cos\beta}{\lambda}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin\lambda\tau q(\tau)\omega_{2}\left(\tau-\Delta(\tau)\right)d\tau\right.$$

$$\left.-\delta\sin\beta\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos\lambda\tau q(\tau)\omega_{1}\left(\tau-\Delta(\tau)\right)d\tau-\lambda\sin\beta\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos\lambda\tau q(\tau)\omega_{2}\left(\tau-\Delta(\tau)\right)d\tau-\delta\sin\beta\cos\alpha\right]$$

$$=0 \tag{4.28}$$

elde edilir. (4.28)’den aşağıdaki gibi olası dört durum ortaya çıkmaktadır.

1. $\sin\alpha\neq 0$. $\sin\beta\neq 0$
2. $\sin\alpha=0$, $\sin\beta\neq 0$
3. $\sin\alpha\neq 0$, $\sin\beta=0$
4. $\sin\alpha=0$, $\sin\beta=0$

(3) ve (4) durumlarında sınır koşulundaki parametre yok olmaktadır. Bu sebeple bu iki durum incelenmeyecektir. 1.durumunda ($\sin\alpha\neq 0$; $\sin\beta\neq 0$) büyük λ değerleri için

$$\omega_{1}(x,\lambda)=O(1)$$

$$\omega_{1}'(x,\lambda)=O(\lambda)$$

$$\omega_{2}(x,\lambda)=O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

elde edilir. 2. Durum ($\sin\alpha=0$; $\sin\beta\neq 0$) için

$$\omega_{1}(x,\lambda)=O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

$$\omega_{1}'(x,\lambda)=O(1)$$

$$\omega_{2}(x,\lambda)=O\left(\frac{1}{\lambda^{2}}\right)$$

elde edilir. 1. durumda ayrıca büyük λ değeri için (4.28) ‘den

$$-\lambda \sin \lambda\pi + \mathrm{O}(1) = 0 \tag{4.29}$$

bulunur ki sonsuz köke sahiptir. Aynı şekilde 2. durumda λ büyük değeri için

$$\lambda \cos \lambda\pi + \mathrm{O}(1) = 0 \tag{4.30}$$

sonsuz köke sahiptir.

4.4. Özdeğer ve Özfonksiyonlar için Asimptotik Formüller

Bu bölümde özdeğerlerin ve özfonksiyonların asimptotik özelliklerini incelenip, iyileştirilmiş asimptotik formüller elde edilecek.

Lemma 4.4.1. Yeterince büyük λ için (4.1)-(4.5) problemi 1. durumda

$$\omega_1(x,\lambda) = \mathrm{O}(1)$$
$$\omega_2(x,\lambda) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

2. durumda,

$$\omega_1(x,\lambda) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$
$$\omega_2(x,\lambda) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$$

eşitliklerine sahiptir.

İspat: λ yeterince büyük olsun. (4.28) eşitliğinin 1. durum ($\sin\alpha \neq 0$; $\sin\beta \neq 0$) için (4.9) ve (4.23) faydalanılarak,

$$\begin{aligned} \omega_1(x,\lambda) &= \mathrm{O}(1) \\ \omega_1'(x,\lambda) &= \mathrm{O}(\lambda) \end{aligned} \tag{4.31}$$

(4.10) ve (4.24) ‘den

$$\omega_2(x,\lambda)=\mathrm{O}\left(\frac{1}{\lambda}\right) \tag{4.32}$$

elde edilir. (4.28) eşitliğinin 2. durum ($\sin\alpha=0$; $\sin\beta\neq 0$) için (4.9) ve (4.23)'den

$$\omega_1(x,\lambda)=\mathrm{O}\left(\frac{1}{\lambda}\right) \tag{4.33}$$

$$\omega_1'(x,\lambda)=\mathrm{O}(1)$$

(4.10) ve (4.24) 'den

$$\omega_2(x,\lambda)=\mathrm{O}\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \tag{4.34}$$

elde edilir.

Lemma 4.4.2. 1. Durumda $\sin\alpha\neq 0$; $\sin\beta\neq 0$ ve $\lambda\geq\max\{2q_1,2q_2\}$ için

$$\omega_{1\lambda}'(x,\lambda)=O(1)$$

$$\omega_{2\lambda}'(x,\lambda)=O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

biçimindedir.

İspat: (4.9) ifadesinin λ ya göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned}\omega_{1\lambda}'(x,\lambda)=&-x\sin\alpha.\sin\lambda x+\frac{1}{\lambda^2}\cos\alpha.\sin\lambda x-\frac{x}{\lambda}\cos\alpha.\cos\lambda x\\&-\frac{1}{\lambda^2}\int_0^x q(\tau)\sin\lambda(x-\tau)\,\omega_1(\tau-\Delta(\tau))\,d\tau\\&+\frac{x-\tau}{\lambda}\int_0^x q(\tau)\cos\lambda(x-\tau)\,d\tau\\&+\frac{1}{\lambda}\int_0^x q(\tau)\sin\lambda(x-\tau)\,\omega_{1\lambda}'(\tau-\Delta(\tau),\lambda)\,d\tau\end{aligned}$$

$$\omega'_{1\lambda}(x,\lambda)=\frac{1}{\lambda}\int_0^x q(\tau)\sin\lambda(x-\tau)\,\omega'_{1\lambda}(\tau-\Delta(\tau),\lambda)\,d\tau+K_1(x,\lambda) \tag{4.35}$$

$\left(\left|K_1(x,t)\right|\leq K_1\right)$ elde edilir.

$C_{1\lambda}=\max\limits_{x\in[0,\pi/2]}\left|\omega'_{1\lambda}(x,\lambda)\right|$ olsun. $[0,\pi/2]$ aralığında türevin sürekliliğinden $C_{1\lambda}$ nın varlığı açıktır. (4.35) eşitliğinden

$$C_{1\lambda}\leq\frac{1}{\lambda}q_1C_{1\lambda}+K_1$$

elde edilir. $\lambda\geq 2q_1$ için

$$\omega'_{1\lambda}(x,\lambda)=O(1)$$

elde edilir.

(4.10) denkleminin λ ya göre türevi alınırsa

$$\omega'_{2\lambda}(x,\lambda)=\frac{1}{\lambda}\int_{\frac{\pi}{2}}^x q(\tau)\sin\lambda(x-\tau)\,\omega'_{2\lambda}(\tau-\Delta(\tau),\lambda)\,d\tau+\frac{K_2(x,\lambda)}{\lambda} \tag{4.36}$$

$\left(\left|K_2(x,\lambda)\right|\leq K_2\right)$ elde edilir. $C_{2\lambda}=\max\limits_{x\in[\pi/2,\pi]}\left|\omega'_{2\lambda}(x,\lambda)\right|$ olsun. $\omega'_{1\lambda}(x,\lambda)$ için yapılan işlemler tekrar edilirse

$$\omega'_{2\lambda}(x,\lambda)=O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

elde edilir.

Lemma 4.4.3. 2. durumda $\sin\alpha=0$; $\sin\beta\neq 0$ ve $\lambda\geq\max\{2q_1,2q_2\}$ için

$$\omega'_{1\lambda}(x,\lambda)=O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

$$\omega'_{2\lambda}(x,\lambda)=O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$$

biçimindedir.

İspat: 2. Durumda

$$\omega_1(x,\lambda) = -\frac{1}{\lambda}\cos\alpha\sin\lambda x + \frac{1}{\lambda}\int_0^x q(\tau)\sin\lambda(x-\tau)\omega_1(\tau-\Delta(\tau),\lambda)d\tau \qquad (4.37)$$

biçimindedir. (4.37) ifadesinin λ ya göre türevi alınırsa

$$\omega'_{1\lambda}(x,\lambda) = \frac{1}{\lambda}\int_0^x q(\tau)\sin\lambda(x-\tau)\omega'_1(\tau-\Delta(\tau),\lambda)d\tau + \frac{1}{\lambda}K_1^*(x,t)$$

$\left(K_1^*(x,t) \le K_1\right)$ elde edilsin. Benzer biçiminde $\lambda \ge 2q_1$ için

$$\omega'_{1\lambda}(x,\lambda) = O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

elde edilir. Aynı biçiminde

$$\omega'_{2\lambda}(x,\lambda) = \frac{1}{\lambda}\int_{\frac{\pi}{2}}^x q(\tau)\sin\lambda(x-\tau)\omega'_{2\lambda}(\tau-\Delta(\tau),\lambda)d\tau + \frac{K_2^*(x,\lambda)}{\lambda^2}$$

$\left(K_2^*(x,t) \le K_2\right)$ elde edilir. $\lambda \ge \max\{2q_1, 2q_2\}$ için

$$\omega'_{2\lambda}(x,\lambda) = O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$$

elde edilir.

Teorem 4.4.1. n bir doğal sayı olsun. Yeterince büyük n sayısı için (4.1)-(4.5) sınır değer probleminin 1. durumda n civarında 2. durumda $n+1/2$ civarında yalnızca bir özdeğeri vardır.

İspat: 1. Durum için (4.29) ‘da $O(1)$ ile gösterdiğimiz ifadeyi ele alınır. (4.31)-(4.32) formüllerini göz önünde bulundurarak $O(1)$ ’li bu ifadenin yeterince büyük λ için λ ’ya göre sınırlı türevinin olduğunu söylenebilir. Yeterince büyük n ’ler için, n civarında (4.29)’un yalnızca bir kökü olduğunu gösterilir. $\vartheta(\lambda) = -\lambda\sin\lambda\pi + O(1)$ fonksiyonunu ele alınsın. $\vartheta'(\lambda) = -\sin\lambda\pi - \lambda^2\pi\cos\lambda\pi + O(1)$ fonksiyonu yeterince büyük n ′ler için 1`e yakın λ değerlerinde sıfır olmaz. Dolayısıyla. Rolle teoreminden $\vartheta(\lambda) = -\lambda \sin \lambda\pi + O(1)$ fonksiyonunun yeterince büyük n için n civarında tek bir kökü olduğunu söylenir.

2. Durum için, (4.30)'da $O(1)$ ile gösterilen ifade ele alınır. (4.33)-(4.34) formülleri göz önünde bulundurularak $O(1)$'li bu ifadenin yeterince büyük λ için λ'ya göre sınırlı türevinin olduğu söylenebilir. Yeterince büyük n'ler için, $n+1/2$ civarında (4.30)'un yalnızca bir kökü olduğu gösterilir. $F(\lambda) = \lambda \cos \lambda\pi + \mathrm{O}(1)$ fonksiyonu ele alınır. $F'(\lambda) = \cos \lambda\pi - \lambda\pi \sin \lambda\pi + \mathrm{O}(1)$ fonksiyonu yeterince büyük n'ler için 1'e yakın λ değerlerinde sıfır olmaz. Dolayısıyla, Rolle teoreminden $F(\lambda) = \lambda \cos \lambda\pi + \mathrm{O}(1)$ fonksiyonun yeterince büyük n için $n+1/2$ civarında tek bir kökü olduğu söylenebilir.

Teorem 4.4.2. $n \to \infty$ için (4.1)-(4.5) sınır değer probleminin özdeğerleri, 1.durumda,

$$\lambda_n = n + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

2. durumda,

$$\lambda_n = n + \frac{1}{2} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)$$

biçimindedir.

İspat: 1. durumda, (4.1)-(4.5) sınır değer probleminin n civarında yerleşen özdeğerlerini için $\lambda_n = n + \delta_n$ alalım. (4.27) ′den $\delta_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ bulunur. Böylece;

$$\lambda_n = n + O\left(\frac{1}{n}\right) \tag{4.38}$$

elde edilir. 2. durumda (4.1)-(4.5) sınır değer probleminin $n+1/2$ civarında yerleşen özdegerleri için $\lambda = n + \frac{1}{2} + \delta_n$ alalım. (4.27)'den $\delta_n = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)$ olmak üzere;

$$\lambda_n = n + \frac{1}{2} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right) \tag{4.39}$$

elde edilir.

Teorem 4.4.3. $n \to \infty$ için (4.1)-(4.5) sınır değer probleminin, 1.durumda (4.38) özdeğerine karşılık gelen özfoksiyonu $x \in [0, \pi/2)$ için,

$$u_{1n} = \sin\alpha \cos nx + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$x \in (\pi/2, \pi]$ için

$$u_{2n} = \frac{\delta}{n} \sin\alpha \cos nx + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

biçimindedir. 2. durumda (4.39) özdeğerine karşılık gelen özfonksiyonu $x \in [0, \pi/2)$ için,

$$u_{1n} = -\frac{1}{n} \cos\alpha \sin nx + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$x \in (\pi/2, \pi]$ için,

$$u_{2n} = -\frac{\delta}{n^2} \cos\alpha \sin nx + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

biçimindedir.

İspat: (4.38) formülü (4.1)-(4.5) sınır değer probleminin özfonksiyonları için asimptotik ifadelerin elde edilmesine olanak sağlar (4.38)- (4.25)-(4.31)´den

$$\omega_1(x, \lambda) = \sin\alpha \cos\lambda x + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \tag{4.40}$$

$$\omega_1'(x, \lambda) = -\lambda \sin\alpha \sin\lambda x + O(1) \tag{4.41}$$

bulunur. (4.40), (4.26), (4.32)’ den

$$\omega_2(x, \lambda) = \frac{\delta}{\lambda} \sin\alpha \cos\lambda x + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \tag{4.42}$$

bulunur. (4.38)’ i (4.40), (4.42)´de yerine yazılırsa

$$u_{1n} = u_1(x,\lambda_n) = \sin\alpha\cos nx + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right) \tag{4.43}$$

$$u_{2n} = u_2(x,\lambda_n) = \frac{\delta}{n}\sin\alpha\cos nx + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \tag{4.44}$$

bulunur. (4.39) özdeğerine karşılık gelen $[0,\pi/2)$ ve $(\pi/2,\pi]$ aralığında tanımlı (4.1)-(4.5) sınır değer probleminin özfonksiyonları için asimptotik ifadeler elde edilmesine olanak sağlar. (4.39)- (4.25)-(4.31)'den

$$\omega_1(x,\lambda) = -\frac{1}{\lambda}\cos\alpha\sin\lambda x + \mathrm{O}\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \tag{4.45}$$

$$\omega_1'(x,\lambda) = -\cos\alpha\cos\lambda x + \mathrm{O}\left(\frac{1}{\lambda}\right) \tag{4.46}$$

ve (4.45), (4.26) ve (4.32)´den

$$\omega_2(x,\lambda) = -\frac{\delta}{\lambda^2}\cos\alpha\sin\lambda x + \mathrm{O}\left(\frac{1}{\lambda^3}\right) \tag{4.47}$$

bulunur. (4.39)'yi (4.45) ve (4.47)'de yazıldığında sırasıyla $[0,\pi/2)$ için

$$u_{1n} = -\frac{1}{n}\cos\alpha\sin nx + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \tag{4.48}$$

ve $(\pi/2,\pi]$ için

$$u_{2n} = -\frac{\delta}{n^2}\cos\alpha\sin nx + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^3}\right) \tag{4.49}$$

özfonksiyonlar elde edilir.

Lemma 4.4.4. $q'(x)$ ve $\Delta''(x)$ türevleri var, $[0,\pi/2)\cup(\pi/2,\pi]$ aralığında sınırlı ve $q'(\frac{\pi}{2}\pm 0)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}\pm 0} q'(x)$ ile $\Delta''(\frac{\pi}{2}\pm 0)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}\pm 0}\Delta''(x)$ sonlu limitlere sahip olsun. $[0,\pi/2)\cup(\pi/2,\pi]$ aralığında $\Delta'(x)\le 1$, $\Delta(0)=0$ ve $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+0}\Delta(x)=0$ olmak üzere, $0\le x\le\pi$ için

$$\int_0^x q(\tau)\cos\lambda\left(2\tau-\Delta(\tau)\right)d\tau = \mathrm{O}\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$
$$\int_0^x q(\tau)\sin\lambda\left(2\tau-\Delta(\tau)\right)d\tau = \mathrm{O}\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

sağlanır. (Norkin, 1972)

İspat: Bu integrallerden ilkini ele alalım; ikincisi benzer şekilde ele alınır. Değişken dönüşümü yaparak integrasyon değişkenini $\xi=2\tau-\Delta(\tau)$ olarak alıyoruz. Bu durumda $d\xi=\left|2\tau-\Delta'(\tau)\right|d\tau$ ve $d\tau=d\xi\big/\left|2-\Delta\left(t(\xi)\right)\right|$ olur. Burada $t(\xi)=\tau-R(\xi)$ ve $R(\xi)$, $F(\tau)\equiv 2\tau-\Delta(\tau)=\xi$ fonksiyonunun tersidir. Lemmanın varsayımları gereği $F'(\tau)=2-\Delta'(\tau)>0$. Bundan dolayı $F(\tau)$ $[0,\pi]$ aralığında diferansiyellenebilir ve monoton fonksiyondur, dolayısıyla türevi pozitiftir: $F'(\tau)>0$. Buradan $t(\xi)$ fonksiyonunun var olduğu, diferansiyellenebilir olduğu ve türevinin sınırlı olduğu sonucuna varılır. Böylece şu ifadeyi elde ederiz:

$$\int_0^x q(\tau)\cos\lambda\left(2\tau-\Delta(\tau)\right)d\tau=\int_{-\Delta(0)}^{-2x-\Delta(x)}\Phi(\xi)\cos s\xi d\xi\,,$$

Burada

$$\Phi(\xi)=q\left(\frac{\xi+\Delta\left(t(\xi)\right)}{2}\right).\frac{1}{2-\Delta'\left(t(\xi)\right)}$$

Ancak, lemmanın varsayımları altında $\Phi(\xi)$ sınırlıdır ve türevi de sınırlıdır.

Teorem 4.4.4. $q(x)$ ve $\Delta(x)$ fonksiyonları lemma 4.4.4. ile verilen koşulları sağlasın. Bu durumda $n\to\infty$ için (4.1)-(4.5) sınır değer probleminin özdeğerleri: 1. durumda,

$$\lambda_n = n - \frac{1}{n\pi}\left(\cot\alpha + B(\pi)\right) + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

2. durumda,

$$\lambda_n = n + \frac{1}{2} - \frac{B(\pi)}{n\pi} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

biçimindedir.

İspat: (4.40)'dan $x-\Delta(x)\geq 0$, $x\in[0,\pi/2)$ için

$$\omega_1\left(\tau-\Delta(\tau),\lambda\right) = \sin\alpha\cos\lambda\left(\tau-\Delta(\tau)\right) + \mathrm{O}\left(\frac{1}{\lambda}\right) \tag{4.50}$$

eşitliği yazılabilir. (4.42)'den $x-\Delta(x)\geq \frac{\pi}{2}$, $x\in(\pi/2,\pi]$ için

$$\omega_2\left(\tau-\Delta(\tau),\lambda\right) = \frac{\delta}{\lambda}\sin\alpha\cos\lambda\left(\tau-\Delta(\tau)\right) + \mathrm{O}\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \tag{4.51}$$

eşitliği yazılabilir. (4.50)-(4.51) eşitlikleri (4.28) denklemde yerlerine yazıldığında.

$$\begin{aligned}
0 = \sin\lambda\pi\Bigg[& -\frac{\delta}{\lambda^2}\cos\beta\cos\alpha - \delta\lambda\sin\beta\sin\alpha - \frac{\delta}{\lambda^2}\cos\beta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\lambda\tau\left(\sin\alpha\cos\lambda\left(\tau-\Delta(\tau)\right)+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)q(\tau)\,d\tau \\
& -\frac{\cos\beta}{\lambda}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos\lambda\tau\left(\frac{\delta}{\lambda}\sin\alpha\cos\lambda\left(\tau-\Delta(\tau)\right)+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)\right)q(\tau)\,d\tau \\
& -\delta\sin\beta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\lambda\tau\left(\sin\alpha\cos\lambda\left(\tau-\Delta(\tau)\right)+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)q(\tau)\,d\tau \\
& -\lambda\sin\beta\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin\lambda\tau\left(\frac{\delta}{\lambda}\sin\alpha\cos\lambda\left(\tau-\Delta(\tau)\right)+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)\right)q(\tau)\,d\tau\Bigg]
\end{aligned}$$

$$+\cos\lambda\pi\left[\frac{\delta\cos\beta\sin\alpha}{\lambda}-\delta\sin\beta\cos\alpha+\frac{\delta\cos\beta}{\lambda^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\lambda\tau\left(\sin\alpha\cos\lambda\left(\tau-\Delta(\tau)\right)+O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)q(\tau)\,d\tau\right.$$

$$+\frac{\cos\beta}{\lambda}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin\lambda\tau\left(\frac{\delta}{\lambda}\sin\alpha\cos\lambda\left(\tau-\Delta(\tau)\right)+O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)q(\tau)\,d\tau$$

$$-\delta\sin\beta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\lambda\tau\left(\sin\alpha\cos\lambda\left(\tau-\Delta(\tau)\right)+O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)q(\tau)\,d\tau$$

$$\left.-\lambda\sin\beta\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos\lambda\tau\left(\frac{\delta}{\lambda}\sin\alpha\cos\lambda\left(\tau-\Delta(\tau)\right)+O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)\right)q(\tau)\,d\tau\right]$$

$$=\sin\lambda\pi\left[-\frac{\delta\cos\beta\cos\alpha}{\lambda^2}-\delta\lambda\sin\beta\sin\alpha-\frac{\delta\cos\beta\sin\alpha}{\lambda^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\lambda\tau\cos\lambda\left(\tau-\Delta(\tau)\right)q(\tau)\,d\tau\right.$$

$$-\frac{\delta\cos\beta\sin\alpha}{\lambda^2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos\lambda\tau\cos\lambda\left(\tau-\Delta(\tau)\right)q(\tau)\,d\tau-\sin\beta\sin\alpha\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\lambda\tau\cos\lambda\left(\tau-\Delta(\tau)\right)q(\tau)\,d\tau$$

$$\left.-\delta\sin\beta\sin\alpha\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin\lambda\tau\cos\lambda\left(\tau-\Delta(\tau)\right)q(\tau)\,d\tau+O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right]$$

$$+\cos\lambda\pi\left[\frac{\delta\cos\beta\sin\alpha}{\lambda}-\delta\sin\beta\cos\alpha+\frac{\delta\cos\beta\sin\alpha}{\lambda^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\lambda\tau\cos\lambda\left(\tau-\Delta(\tau)\right)q(\tau)\,d\tau\right.$$

$$+\frac{\delta\cos\beta\sin\alpha}{\lambda^2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin\lambda\tau\cos\lambda\left(\tau-\Delta(\tau)\right)q(\tau)\,d\tau-\delta\sin\beta\sin\alpha\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\lambda\tau\cos\lambda\left(\tau-\Delta(\tau)\right)q(\tau)\,d\tau$$

$$\left.-\delta\sin\beta\sin\alpha\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos\lambda\tau\cos\lambda\left(\tau-\Delta(\tau)\right)q(\tau)\,d\tau+O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right]$$

$$=\sin\lambda\pi\left[-\frac{\delta\cos\beta\cos\alpha}{\lambda^2}-\delta\lambda\sin\beta\sin\alpha-\frac{\delta\cos\beta\sin\alpha}{2\lambda^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\lambda\left(2\tau-\Delta(\tau)\right)q(\tau)\,d\tau\right.$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\delta\cos\beta\sin\alpha}{2\lambda^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\lambda\Delta(\tau)q(\tau)d\tau-\frac{\delta\cos\beta\sin\alpha}{2\lambda^2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos\lambda(2\tau-\Delta(\tau))q(\tau)d\tau\\
&-\frac{\delta\cos\beta\sin\alpha}{2\lambda^2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos\lambda(2\tau-\Delta(\tau))q(\tau)d\tau-\frac{\delta\sin\beta\sin\alpha}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\lambda(2\tau-\Delta(\tau))q(\tau)d\tau\\
&-\frac{\delta\sin\beta\sin\alpha}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\lambda\Delta(\tau)q(\tau)d\tau-\frac{\delta\sin\beta\sin\alpha}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin\lambda(2\tau-\Delta(\tau))q(\tau)d\tau\\
&\left.-\frac{\delta\sin\beta\sin\alpha}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin\lambda\Delta(\tau)q(\tau)d\tau+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right]\\
&+\cos\lambda\pi\left[\frac{\delta\cos\beta\sin\alpha}{\lambda}-\delta\sin\beta\cos\alpha+\frac{\delta\cos\beta\sin\alpha}{2\lambda^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\lambda(2\tau-\Delta(\tau))q(\tau)d\tau\right.\\
&+\frac{\delta\cos\beta\sin\alpha}{2\lambda^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\lambda\Delta(\tau)q(\tau)d\tau+\frac{\delta\cos\beta\sin\alpha}{2\lambda^2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin\lambda(2\tau-\Delta(\tau))q(\tau)d\tau\\
&+\frac{\delta\cos\beta\sin\alpha}{2\lambda^2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin\lambda\Delta(\tau)q(\tau)d\tau-\frac{\delta\sin\beta\sin\alpha}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\lambda(2\tau-\Delta(\tau))q(\tau)d\tau\\
&\left.-\frac{\delta\sin\beta\sin\alpha}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos\lambda(2\tau-\Delta(\tau))q(\tau)d\tau-\frac{\delta\sin\beta\sin\alpha}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos\lambda\Delta(\tau)q(\tau)d\tau+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right]
\end{aligned}
\tag{4.52}
$$

elde edilir.

$$
\begin{aligned}
A(x,\lambda,\Delta(\tau))&=\frac{1}{2}\int_0^x q(\tau)\sin\lambda\Delta(\tau)d\tau\\
B(x,\lambda,\Delta(\tau))&=\frac{1}{2}\int_0^x q(\tau)\cos\lambda\Delta(\tau)d\tau
\end{aligned}
\tag{4.53}
$$

eşitlikleri sırasıyla $0\le x<\frac{\pi}{2}$ ve $\frac{\pi}{2}<x\le\pi$ aralıklarında sınırlıdır. (Norkin, 1972)

(4.53) eşitlikleri (4.52)'da yazılırsa

$$0=\sin\lambda\pi\left[-\frac{\delta}{\lambda^2}\cos\beta\cos\alpha-\delta\lambda\sin\beta\sin\alpha-\frac{\delta}{\lambda^2}\cos\beta\sin\alpha B\left(\frac{\pi}{2}\right)\right.$$

$$-\frac{\delta}{\lambda^2}\cos\beta\sin\alpha\left(B(\pi)-B\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)-\delta\sin\beta\sin\alpha A\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\left.-\delta\sin\beta\sin\alpha\left(A(\pi)-A\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right]$$

$$+\cos\lambda\pi\left[\frac{\delta}{\lambda}\cos\beta\sin\alpha-\delta\sin\beta\cos\alpha+\frac{\delta}{\lambda^2}\cos\beta\sin\alpha A\left(\frac{\pi}{2}\right)\right.$$

$$+\frac{\delta}{\lambda^2}\cos\beta\sin\alpha\left(A(\pi)-A\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)-\delta\sin\beta\sin\alpha B\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\left.-\delta\sin\beta\sin\alpha\left(B(\pi)-B\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right]$$

$$=\sin\lambda\pi\left[-\frac{\delta}{\lambda^2}\cos\beta\cos\alpha-\delta\lambda\sin\beta\sin\alpha-\frac{\delta}{\lambda^2}\cos\beta\sin\alpha B(\pi)-\delta\sin\beta\sin\alpha A(\pi)+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right]$$

$$+\cos\lambda\pi\left[\frac{\delta}{\lambda}\cos\beta\sin\alpha-\delta\sin\beta\cos\alpha+\frac{\delta}{\lambda^2}\cos\beta\sin\alpha A(\pi)-\delta\sin\beta\sin\alpha B(\pi)+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right]$$

$$=\sin\lambda\pi\left[-\delta\lambda\sin\beta\sin\alpha-\delta\sin\beta\sin\alpha A(\pi)+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right]$$

$$+\cos\lambda\pi\left[-\delta\sin\beta\cos\alpha-\delta\sin\beta\sin\alpha B(\pi)+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right]$$

$$0=\sin\lambda\pi\left(-\lambda\sin\alpha-\sin\alpha A(\pi)\right)+\cos\lambda\pi\left(-\cos\alpha-\sin\alpha B(\pi)\right)+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

$$\frac{\sin\lambda\pi}{\cos\lambda\pi}=\frac{-\cos\alpha-\sin\alpha B(\pi)}{\lambda\sin\alpha+\sin\alpha A(\pi)}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$$

$$\tan\lambda\pi=\frac{-1}{\lambda}\left(\cot\alpha+B(\pi)\right)+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$$

$$\delta_n=\frac{-1}{n\pi}\left(\cot\alpha+B(\pi)\right)+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$\lambda_n=n+\delta_n$ ile

$$\lambda_n = n - \frac{1}{n\pi}\left(\cot\alpha + B(\pi)\right) + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \tag{4.54}$$

özdeğeri elde edilir.

2. Durum için; (4.45)'den

$$\omega_1\left(\tau-\Delta(\tau),\lambda\right) = -\frac{1}{\lambda}\cos\alpha\sin\lambda\left(\tau-\Delta(\tau)\right) + \mathrm{O}\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \tag{4.55}$$

yazılabilir. (4.47)'den

$$\omega_2\left(\tau-\Delta(\tau),\lambda\right) = -\frac{\delta}{\lambda^2}\cos\alpha\sin\lambda\left(\tau-\Delta(\tau)\right) + \mathrm{O}\left(\frac{1}{\lambda^3}\right) \tag{4.56}$$

yazılabilir. Elde edilen (4.52)-(4.53) eşitliklerini (4.28) denklemde yerlerine yazılırsa,

$$\sin\lambda\pi\left[-\frac{\delta}{\lambda^2}\cos\beta - \frac{\delta}{\lambda^2}\cos\beta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\lambda\tau\left(-\frac{1}{\lambda}\cos\alpha\sin\lambda\left(\tau-\Delta(\tau)\right)+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)\right)q(\tau)\,d\tau\right.$$

$$-\frac{\cos\beta}{\lambda}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos\lambda\tau\left(-\frac{\delta}{\lambda^2}\cos\alpha\sin\lambda\left(\tau-\Delta(\tau)\right)+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\lambda^3}\right)\right)q(\tau)\,d\tau$$

$$-\delta\sin\beta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\lambda\tau\left(-\frac{1}{\lambda}\cos\alpha\sin\lambda\left(\tau-\Delta(\tau)\right)+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)\right)q(\tau)\,d\tau$$

$$\left.-\lambda\sin\beta\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin\lambda\tau\left(-\frac{\delta}{\lambda^2}\cos\alpha\sin\lambda\left(\tau-\Delta(\tau)\right)+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\lambda^3}\right)\right)q(\tau)\,d\tau\right]$$

$$+\cos\lambda\pi\left[-\delta\sin\beta + \frac{\delta}{\lambda^2}\cos\beta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\lambda\tau\left(-\frac{1}{\lambda}\cos\alpha\sin\lambda\left(\tau-\Delta(\tau)\right)+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)\right)q(\tau)\,d\tau\right.$$

$$+\frac{\cos\beta}{\lambda}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin\lambda\tau\left(-\frac{\delta}{\lambda^2}\cos\alpha\sin\lambda\left(\tau-\Delta(\tau)\right)+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\lambda^3}\right)\right)q(\tau)\,d\tau$$

$$-\delta\sin\beta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\lambda\tau\left(-\frac{1}{\lambda}\cos\alpha\sin\lambda\left(\tau-\Delta\left(\tau\right)\right)+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)\right)q\left(\tau\right)d\tau$$

$$\left.-\lambda\sin\beta\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos\lambda\tau\left(-\frac{\delta}{\lambda^2}\cos\alpha\sin\lambda\left(\tau-\Delta\left(\tau\right)\right)+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\lambda^3}\right)\right)q\left(\tau\right)d\tau\right]$$

$$=\sin\lambda\pi\left[-\frac{\delta}{\lambda^2}\cos\beta+\frac{\delta\cos\beta\cos\alpha}{\lambda^3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\lambda\tau\sin\lambda\left(\tau-\Delta\left(\tau\right)\right)q\left(\tau\right)d\tau\right.$$

$$+\frac{\delta\cos\beta\cos\alpha}{\lambda^3}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos\lambda\tau\sin\lambda\left(\tau-\Delta\left(\tau\right)\right)q\left(\tau\right)d\tau+\delta\sin\beta\cos\alpha\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\lambda\tau\sin\lambda\left(\tau-\Delta\left(\tau\right)\right)q\left(\tau\right)d\tau$$

$$\left.+\delta\sin\beta\cos\alpha\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin\lambda\tau\sin\lambda\left(\tau-\Delta\left(\tau\right)\right)q\left(\tau\right)d\tau+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right]$$

$$+\cos\lambda\pi\left[-\frac{\delta\cos\beta\cos\alpha}{\lambda^3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\lambda\tau\sin\lambda\left(\tau-\Delta\left(\tau\right)\right)q\left(\tau\right)d\tau\right.$$

$$-\frac{\delta\cos\beta\cos\alpha}{\lambda^3}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin\lambda\tau\sin\lambda\left(\tau-\Delta\left(\tau\right)\right)q\left(\tau\right)d\tau+\delta\sin\beta\cos\alpha\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\lambda\tau\sin\lambda\left(\tau-\Delta\left(\tau\right)\right)q\left(\tau\right)d\tau$$

$$\left.+\delta\sin\beta\cos\alpha\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos\lambda\tau\sin\lambda\left(\tau-\Delta\left(\tau\right)\right)q\left(\tau\right)d\tau-\delta\lambda\sin\beta+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right]$$

$$=\sin\lambda\pi\left[\delta\sin\beta\cos\alpha\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\lambda\tau\sin\lambda\left(\tau-\Delta\left(\tau\right)\right)q\left(\tau\right)d\tau\right.$$

$$\left.+\delta\sin\beta\cos\alpha\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin\lambda\tau\sin\lambda\left(\tau-\Delta\left(\tau\right)\right)q\left(\tau\right)d\tau+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right]$$

$$+\cos\lambda\pi\left[\delta\sin\beta\cos\alpha\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\lambda\tau\sin\lambda\left(\tau-\Delta\left(\tau\right)\right)q\left(\tau\right)d\tau\right.$$

$$+\delta\sin\beta\cos\alpha\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos\lambda\tau\sin\lambda\left(\tau-\Delta(\tau)\right)q(\tau)\,d\tau-\delta\lambda\sin\beta+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\Bigg]$$

$$=\sin\lambda\pi\left[\frac{-\delta\sin\beta\cos\alpha}{2}\int_{0}^{\pi/2}\cos\left(2\lambda\tau-\lambda\Delta(\tau)\right)q(\tau)\,d\tau+\frac{\delta\sin\beta\cos\alpha}{2}\int_{0}^{\pi/2}\cos\left(\lambda\Delta(\tau)\right)q(\tau)\,d\tau\right.$$

$$\left.-\frac{\delta\sin\beta\cos\alpha}{2}\int_{\pi/2}^{\pi}\cos\left(2\lambda\tau-\lambda\Delta(\tau)\right)q(\tau)\,d\tau+\frac{\delta\sin\beta\cos\alpha}{2}\int_{\pi/2}^{\pi}\cos\left(\lambda\Delta(\tau)\right)q(\tau)\,d\tau\right]$$

$$+\cos\lambda\pi\left[\frac{\delta\sin\beta\cos\alpha}{2}\int_{0}^{\pi/2}\sin\left(2\lambda\tau-\lambda\Delta(\tau)\right)q(\tau)\,d\tau+\frac{\delta\sin\beta\cos\alpha}{2}\int_{0}^{\pi/2}\sin\left(\lambda\Delta(\tau)\right)q(\tau)\,d\tau\right.$$

$$\left.+\frac{\delta\sin\beta\cos\alpha}{2}\int_{\pi/2}^{\pi}\sin\left(2\lambda\tau-\lambda\Delta(\tau)\right)q(\tau)\,d\tau+\frac{\delta\sin\beta\cos\alpha}{2}\int_{\pi/2}^{\pi}\sin\left(\lambda\Delta(\tau)\right)q(\tau)\,d\tau-\delta\lambda\sin\beta\right]+O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

$$=\sin\lambda\pi\left[\delta\sin\beta\cos\alpha B\left(\frac{\pi}{2}\right)+\delta\sin\beta\cos\alpha\left(B(\pi)-B\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)\right]$$

$$+\cos\lambda\pi\left[\delta\sin\beta\cos\alpha A\left(\frac{\pi}{2}\right)+\delta\sin\beta\cos\alpha\left(A(\pi)-A\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)-\delta\lambda\sin\beta\right]+O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \qquad (4.57)$$

eşitliği bulunur. (4.57)'ten

$$\sin\lambda\pi\left[\delta\sin\beta\cos\alpha B\left(\frac{\pi}{2}\right)+\delta\sin\beta\cos\alpha\left(B(\pi)-B\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)\right]$$

$$+\cos\lambda\pi\left[\delta\sin\beta\cos\alpha A\left(\frac{\pi}{2}\right)+\delta\sin\beta\cos\alpha\left(A(\pi)-A\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)-\delta\lambda\sin\beta\right]+O\left(\frac{1}{\lambda}\right)=0$$

$$\cot\lambda\pi=-\frac{B(\pi)}{\lambda}+O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \quad \text{ve} \quad \delta_n=-\frac{B(\pi)}{n\pi}+O\left(\frac{1}{n^2}\right) \qquad (4.58)$$

bulunur. $\lambda=n+\frac{1}{2}+\delta_n$ için

$$\lambda_n=n+\frac{1}{2}-\frac{B(\pi)}{n\pi}+O\left(\frac{1}{n^2}\right) \qquad (4.59)$$

özdeğeri elde edilir.

Teorem 4.4.5. $q(x)$ ve $\Delta(x)$ fonksiyonları lemma 4.4.4. ile verilen koşulları sağlasın. Bu durumda $n \to \infty$ için (4.1)-(4.5) probleminin 1. Durumda (4.49) özdeğerine karşılık gelen özfonksiyon $[0, \pi/2)$ aralığı için

$$U_{1n}(x,\lambda_n) = \sin\alpha\left\{\cos nx\left(1+\frac{A(x)}{n}\right)+\frac{\sin nx}{n\pi}\left[\left(\cot\alpha + B(\pi)\right)x - \left(\cot\alpha + B(x)\right)\right]\right\}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$(\pi/2, \pi]$ için

$$U_{2n}(x,\lambda_n) = \frac{\delta\sin\alpha}{n}\left\{\left(\cos nx\left[1+\frac{A(x)}{n}\right]+\frac{\sin nx}{n\pi}\left[\left(\cot\alpha + B(\pi)\right)x - \left(\cot\alpha + B(\pi)\right)x\right]\right)\right\}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

biçimindedir. 2. durum için (4.56) özdeğerine karşılık gelen özfonksiyonu $[0, \pi/2)$ arallığı için

$$U_{1n}(x,\lambda_n) = \frac{-1}{n}\left(1+\frac{A(x)}{n}\right)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x + \frac{1}{n^2\pi}\left[B(\pi)x - B(x)\pi\right]\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$(\pi/2, \pi]$ için

$$U_{2n}(x,\lambda_n) = \frac{-\delta}{n^2}\left(1+\frac{A(x)}{n}\right)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x + \frac{\delta}{n^3\pi}\left(B(x)x - B(x)\pi\right)\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x + O\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

biçimindedir.

İspat:

$$\omega_1(x,\lambda) = \sin\alpha\cos\lambda x - \frac{1}{\lambda}\cos\alpha\sin\lambda x + \mathrm{O}\left(\frac{1}{\lambda}\right) - \int_0^x \frac{q(\tau)}{\lambda}\sin\lambda(x-\tau)\,\omega_1\left(\tau-\Delta(\tau)\right)d\tau$$

denkleminde

$$\omega_1\left(\tau-\Delta(\tau),\lambda\right) = \sin\alpha\cos\lambda\left(\tau-\Delta(\tau)\right)+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

eşitini yerine yazılır. Böylece,

$$\omega_1(x,\lambda)=\sin\alpha\cos\lambda x-\frac{1}{\lambda}\cos\alpha\sin\lambda x+O\left(\frac{1}{\lambda}\right)-\int_0^x\frac{q(\tau)}{\lambda}\sin\lambda(x-\tau)\left(\sin\alpha\cos\lambda(\tau-\Delta(\tau))+O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)d\tau$$

$$=\sin\alpha\cos\lambda x-\frac{1}{\lambda}\cos\alpha\sin\lambda x-\frac{\sin\alpha}{\lambda}\int_0^x\sin\lambda x\cos\lambda\tau\cos\lambda(\tau-\Delta(\tau))q(\tau)d\tau$$

$$+\frac{\sin\alpha}{\lambda}\int_0^x\sin\lambda\tau\cos\lambda x\cos\lambda(\tau-\Delta(\tau))q(\tau)d\tau+O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$$

$$=\sin\alpha\cos\lambda x-\frac{1}{\lambda}\cos\alpha\sin\lambda x-\frac{\sin\alpha\sin\lambda x}{\lambda}\int_0^x\cos\lambda\tau\cos\lambda(\tau-\Delta(\tau))q(\tau)d\tau$$

$$+\frac{\sin\alpha\sin\lambda x}{\lambda}\int_0^x\cos\lambda\tau\cos\lambda(\tau-\Delta(\tau))q(\tau)d\tau+O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$$

$$=\sin\alpha\cos\lambda x-\frac{1}{\lambda}\cos\alpha\sin\lambda x-\frac{\sin\alpha\sin\lambda x}{2\lambda}\int_0^x\cos(2\lambda\tau-\lambda\Delta(\tau))q(\tau)d\tau$$

$$-\frac{\sin\alpha\sin\lambda x}{2\lambda}\int_0^x\cos\lambda\Delta(\tau)q(\tau)d\tau+\frac{\sin\alpha\sin\lambda x}{2\lambda}\int_0^x\sin(2\lambda\tau-\lambda\Delta(\tau))q(\tau)d\tau$$

$$+\frac{\sin\alpha\sin\lambda x}{2\lambda}\int_0^x\sin\lambda\Delta(\tau)q(\tau)d\tau+O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$$

$$=\sin\alpha\cos\lambda x-\frac{1}{\lambda}\cos\alpha\sin\lambda x-\frac{\sin\alpha\sin\lambda x}{\lambda}B(x)+\frac{\sin\alpha\cos\lambda x}{\lambda}A(x)+O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$$

$$\omega_1(x,\lambda)=\sin\alpha\cos\lambda x\left(1+\frac{A(x)}{\lambda}\right)-\sin\lambda x\left(\frac{\cos\alpha+\sin\alpha B(x)}{\lambda}\right)+O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \tag{4.60}$$

bulunur. (4.54), (4.60) eşitliğinde yerine yazıldığında.

$$U_{1n}(x,\lambda)=\sin\alpha\cos(n+\lambda_n)x\left(1+\frac{A(x)}{n}\right)-\sin(n+\lambda_n)x\left(\frac{\cos\alpha+\sin\alpha B(x)}{n}\right)+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$U_{1n}(x,\lambda)=\left[\cos nx\cos\lambda_n x-\sin nx\sin\lambda_n x\right]\left(\sin\alpha+\frac{\sin\alpha A(x)}{n}\right)$$

$$-\left[\sin nx\cos\lambda_n x+\sin\lambda_n x\cos nx\right]\left(\frac{\cos\alpha+\sin\alpha B(x)}{n}\right)+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$=\left[\cos nx-\lambda_n x\sin nx\right]\left(\sin\alpha+\frac{\sin\alpha A(x)}{n}\right)$$

$$-\left[\sin nx+\lambda_n x\cos nx\right]\left(\frac{\cos\alpha+\sin\alpha B(x)}{n}\right)+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$=\cos nx\left(\sin\alpha+\frac{\sin\alpha A(x)}{n}\right)-\lambda_n x\sin nx\left(\sin\alpha+\frac{\sin\alpha A(x)}{n}\right)$$
$$-\sin nx\left(\frac{\cos\alpha+\sin\alpha B(x)}{n}\right)+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$[0,\pi/2)$ aralığında (4.54) özdeğerine karşılık gelen

$$U_{1n}(x,\lambda)=-\sin nx\left(\frac{\cos\alpha+\sin\alpha B(x)}{n}\right)-\lambda_n x\sin nx\sin\alpha-\lambda_n x\sin nx\sin\alpha\frac{A(x)}{n}$$
$$+\cos nx\left(\sin\alpha+\frac{\sin\alpha A(x)}{n}\right)+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
$$\omega_1(x,\lambda_n)=-\sin\alpha\left(\frac{\cos\alpha+\sin\alpha B(x)}{n}\right)+\frac{1}{n\pi}\left(\cot\alpha+B(\pi)\right)x\sin nx\sin\alpha$$
$$+\cos nx\left(\sin\alpha+\frac{\sin\alpha A(x)}{n}\right)+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
$$=-\sin\alpha\left[-\frac{\sin nx}{n\pi}\left(\cot\alpha+B(x)\right)x\right]+\sin\alpha\left[-\frac{\sin nx}{n\pi}\left(\cot\alpha+B(\pi)\right)\right]$$
$$+\sin\alpha\left(\cos nx\left(1+\frac{A(x)}{n}\right)\right)+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
$$\omega_1(x,\lambda_n)=\sin\alpha\left\{\cos nx\left(1+\frac{A(x)}{n}\right)+\frac{\sin nx}{n\pi}\left[\left(\cot\alpha+B(\pi)\right)x-\left(\cot\alpha+B(x)\right)\right]\right\}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \tag{4.58}$$

özfonksiyonu elde edilir. $(\pi/2,\pi]$ aralığında (4.54) özdeğerine karşılık gelen özfonksiyonunu elde edilmesi için $\omega_1(\pi/2,\lambda_n)$, $\omega_1'(\pi/2,\lambda_n)/\lambda$ ve $\omega_2(\tau-\Delta(\tau),\lambda)$ fonksiyonlarının eşitleri bulunarak $\omega_2(x,\lambda_n)$ fonksiyonunda yerlerine yazılır.

$$\omega_1'(x,\lambda)=-\lambda\sin\alpha\sin\lambda x-\cos\alpha\cos\lambda x-\int_0^x\cos\lambda(x-\lambda)\omega_1(\tau-\Delta(\tau))q(\tau)d\tau$$
$$=-\lambda\sin\alpha\sin\lambda x-\cos\alpha\cos\lambda x-\int_0^x\cos\lambda(x-\tau)\left(\sin\alpha\cos\lambda\left(\tau-\Delta(\tau)\right)+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)q(\tau)d\tau$$
$$=-\lambda\sin\alpha\sin\lambda x-\cos\alpha\cos\lambda x-\sin\alpha\int_0^x\cos\lambda(x-\tau)\cos\lambda\left(\tau-\Delta(\tau)\right)q(\tau)d\tau+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

$$=-\lambda\sin\alpha\sin\lambda x-\cos\alpha\cos\lambda x-\sin\alpha\int_0^x\left[\cos\lambda x\cos\lambda\tau+\sin\lambda x\sin\lambda\tau\right]\cos\lambda\left(\tau-\Delta(\tau)\right)q(\tau)\,d\tau+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

$$=-\lambda\sin\alpha\sin\lambda x-\cos\alpha\cos\lambda x-\sin\alpha\cos\lambda x\int_0^x\cos\lambda\tau\cos\lambda\left(\tau-\Delta(\tau)\right)q(\tau)\,d\tau$$

$$-\sin\alpha\sin\lambda x\int_0^x\sin\lambda\tau\cos\lambda\left(\tau-\Delta(\tau)\right)q(\tau)\,d\tau+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

$$=-\lambda\sin\alpha\sin\lambda x-\cos\alpha\cos\lambda x-\frac{\sin\alpha\cos\lambda x}{2}\int_0^x\cos\left(2\lambda\tau-\lambda\Delta(\tau)\right)q(\tau)\,d\tau$$

$$-\frac{\sin\alpha\cos\lambda x}{2}\int_0^x\cos\lambda\Delta(\tau)q(\tau)\,d\tau-\frac{\sin\alpha\cos\lambda x}{2}\int_0^x\sin\left(2\lambda\tau-\lambda\Delta(\tau)\right)q(\tau)\,d\tau$$

$$-\frac{\sin\alpha\cos\lambda x}{2}\int_0^x\sin\lambda\Delta(\tau)q(\tau)\,d\tau+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

$$=-\lambda\sin\alpha\sin\lambda x-\cos\alpha\cos\lambda x-\sin\alpha\cos\lambda xB(x)-\sin\alpha\sin\lambda xA(x)+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

$$\frac{\omega_1'(x,\lambda)}{\lambda}=-\sin\alpha\sin\lambda x-\frac{\cos\alpha\cos\lambda x}{\lambda}-\sin\alpha\cos\lambda x\frac{B(x)}{\lambda}-\sin\alpha\sin\lambda x\frac{A(x)}{\lambda}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$$

$$\frac{\omega_1'(x,\lambda)}{\lambda}=-\sin\alpha\sin\lambda x\left(1+\frac{A(x)}{\lambda}\right)+\frac{\cos\lambda x}{\lambda}\left(-\cos\alpha-\sin\alpha B(x)\right)+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)\tag{4.62}$$

$\lambda=n+\lambda_n$, $\left(\lambda_n=\dfrac{-1}{n\pi}\left(\cot\alpha+B(\pi)\right)\right)$ eşiti (4.62)' da yerine yazılır. Böylece

$$\frac{\omega_1'(x,\lambda_n)}{\lambda}=-\sin\alpha\sin(n+\lambda_n)x\left(1+\frac{A(x)}{\lambda}\right)+\frac{\cos(n+\lambda_n)x}{\lambda}\left(-\cos\alpha-\sin\alpha B(x)\right)+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$=-\sin\alpha\left[\sin nx\cos\lambda_n x+\sin\lambda_n x\cos nx\right]\left(1+\frac{A(x)}{\lambda}\right)+\frac{\cos nx}{n}\left(-\cos\alpha-\sin\alpha B(x)\right)$$

$$-\frac{\lambda_n x\sin nx}{n}\left(-\cos\alpha-\sin\alpha B(x)\right)+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$=-\sin\alpha\sin nx\left(1+\frac{A(x)}{\lambda}\right)+\frac{\cos nx}{n}\left(-\cos\alpha-\sin\alpha B(x)\right)-\frac{\lambda_n x\sin nx}{n}\left(-\cos\alpha-\sin\alpha B(x)\right)+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$=-\sin\alpha\sin nx\left(1+\frac{A(x)}{\lambda}\right)-\frac{\cos nx}{n}\left(-\cos\alpha-\sin\alpha B(x)\right)+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\frac{\omega_1'(x,\lambda_n)}{\lambda}=-\sin\alpha\sin\lambda x\left(1+\frac{A(x)}{\lambda}\right)+\frac{\cos\lambda x}{\lambda}\left(-\cos\alpha-\sin\alpha B(x)\right)+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \tag{4.63}$$

elde edilir.

$$\omega_2(x,\lambda)=\frac{\delta}{\lambda}\omega_1\left(\frac{\pi}{2},\lambda\right)\cos\lambda\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\delta}{\lambda^2}\omega_1'\left(\frac{\pi}{2},\lambda\right)\sin\lambda\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\frac{\sin\lambda(x-\tau)}{\lambda}\omega_2\left(\tau-\Delta(\tau)\right)d\tau$$

$$\omega_2\left(\tau-\Delta(\tau),\lambda\right)=\frac{\delta}{\lambda}\sin\alpha\cos\lambda\left(\tau-\Delta(\tau)\right)+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$$

$$\omega_1(\pi/2,\lambda)=\sin\alpha\cos\lambda\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{A(\pi/2)}{\lambda}\right)-\sin\lambda\frac{\pi}{2}\left(\frac{\cos\alpha+\sin\alpha B(\pi/2)}{\lambda}\right)+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$$

$$\frac{\omega_1'\left(\frac{\pi}{2},\lambda\right)}{\lambda}=-\sin\alpha\sin\lambda\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{A\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\lambda}\right)+\frac{\cos\lambda\frac{\pi}{2}}{\lambda}\left(-\cos\alpha-\sin\alpha B\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \tag{4.64}$$

bulunur. $\omega_1(\pi/2,\lambda)$, $\omega_2\left(\tau-\Delta(\tau),\lambda\right)$ ve $\omega_1'(\pi/2,\lambda)/\lambda$ fonksiyonlarının eşitlerini $\omega_2(x,\lambda)$ fonksiyonunda yerlerine yazıp gerekli düzenlemeleri yaptığında

$$\omega_2(x,\lambda)=\frac{\delta}{\lambda}\cos\lambda\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\left[\sin\alpha\cos\lambda\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{A\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\lambda}\right)-\frac{\sin\lambda\frac{\pi}{2}}{\lambda}\left(\cos\alpha+\sin\alpha B\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)\right]$$

$$+\frac{\delta}{\lambda}\sin\lambda\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\left[-\sin\alpha\sin\lambda\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{A\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\lambda}\right)+\frac{\cos\lambda\frac{\pi}{2}}{\lambda}\left(-\cos\alpha-\sin\alpha B\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)\right]$$

$$-\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\frac{\sin\lambda(x-\tau)}{\lambda}\left(\frac{\delta}{\lambda}\sin\alpha\cos\lambda\left(\tau-\Delta(\tau)\right)+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)\right)q(\tau)d\tau$$

$$=\frac{\delta}{\lambda}\sin\alpha\cos\lambda\frac{\pi}{2}\cos\lambda\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\left(1+\frac{A\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\lambda}\right)-\frac{\delta\sin\alpha}{\lambda^2}\sin\lambda\frac{\pi}{2}\cos\lambda\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\left(\cot\alpha+B\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$-\frac{\delta\sin\alpha}{\lambda}\sin\lambda\frac{\pi}{2}\sin\lambda\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\left(1+\frac{A\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\lambda}\right)-\frac{\delta\sin\alpha}{\lambda^2}\cos\lambda\frac{\pi}{2}\sin\lambda\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\left(\cot\alpha+B\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$-\frac{\delta\sin\alpha}{\lambda^2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\sin\lambda(x-\tau)\cos\lambda(\tau-\Delta(\tau))q(\tau)d\tau+O\left(\frac{1}{\lambda^3}\right)$$

$$=\frac{\delta\sin\alpha}{\lambda}\left[\cos\lambda\frac{\pi}{2}\cos\lambda\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-\sin\lambda\frac{\pi}{2}\sin\lambda\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right]\left(1+\frac{A\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\lambda}\right)$$

$$-\frac{\delta\sin\alpha}{\lambda^2}\left[\sin\lambda\frac{\pi}{2}\cos\lambda\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\sin\lambda\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cos\lambda\frac{\pi}{2}\right]\left(\cot\alpha+B\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$+\frac{\delta\sin\alpha\cos\lambda x}{\lambda^2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\sin\lambda\tau\cos\lambda(\tau-\Delta(\tau))q(\tau)d\tau-\frac{\delta\sin\alpha\sin\lambda x}{\lambda^2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\cos\lambda\tau\cos\lambda(\tau-\Delta(\tau))q(\tau)d\tau+O\left(\frac{1}{\lambda^3}\right)$$

$$=\frac{\delta\sin\alpha}{\lambda}\cos\lambda x\left(1+\frac{A\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\lambda}\right)-\frac{\delta\sin\alpha}{\lambda^2}\sin\lambda x\left(\cot\alpha+B\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$+\frac{\delta\sin\alpha\cos\lambda x}{2\lambda^2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\sin(2\lambda\tau-\lambda\Delta(\tau))q(\tau)d\tau+\frac{\delta\sin\alpha\cos\lambda x}{2\lambda^2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\sin\lambda\Delta(\tau)q(\tau)d\tau$$

$$-\frac{\delta\sin\alpha\sin\lambda x}{2\lambda^2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\cos(2\lambda\tau-\lambda\Delta(\tau))q(\tau)d\tau-\frac{\delta\sin\alpha\sin x}{2\lambda^2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\cos\lambda\Delta(\tau)q(\tau)d\tau+O\left(\frac{1}{\lambda^3}\right)$$

$$=\frac{\delta\sin\alpha}{\lambda}\cos\lambda x\left(1+\frac{A\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\lambda}\right)-\frac{\delta\sin\alpha}{\lambda^2}\sin\lambda x\left(\cot\alpha+B\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$+\frac{\delta\sin\alpha}{\lambda^2}\cos\lambda x\left(A(x)-A\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)-\frac{\delta\sin\alpha}{\lambda^2}\sin\lambda x\left(B(x)-B\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)+O\left(\frac{1}{\lambda^3}\right)$$

$$=\frac{\delta\sin\alpha}{\lambda}\cos\lambda x+\frac{\delta\sin\alpha}{\lambda^2}\cos\lambda xA\left(\frac{\pi}{2}\right)-\frac{\delta\cos\alpha}{\lambda^2}\sin\lambda x$$

$$-\frac{\delta\sin\alpha}{\lambda^2}\sin\lambda xB\left(\frac{\pi}{2}\right)-\frac{\delta\sin\alpha}{\lambda^2}\sin\lambda xB(x)+\frac{\delta\sin\alpha}{\lambda^2}\sin\lambda xB\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$+\frac{\delta\sin\alpha}{\lambda^2}\cos\lambda xA(x)-\frac{\delta\sin\alpha}{\lambda^2}\cos\lambda xA\left(\frac{\pi}{2}\right)+O\left(\frac{1}{\lambda^3}\right)$$

$$\omega_2(x,\lambda)=\frac{\delta\sin\alpha}{\lambda}\cos\lambda x\left(1+\frac{A(x)}{\lambda}\right)-\frac{\delta\sin\lambda x}{\lambda^2}\left(\cos\alpha+\sin\alpha B(x)\right)+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\lambda^3}\right) \tag{4.65}$$

bulunur. (4.65)'de $\lambda=n+\lambda_n$ eşitini yerine yazılırsa.

$$U_{2n}(x,\lambda_n)=\frac{\delta\sin\alpha}{n}\cos(n+\lambda_n)x\left(1+\frac{A(x)}{\lambda}\right)-\frac{\delta\sin(n+\lambda_n)x}{n^2}\left(\cos\alpha+\sin\alpha B(x)\right)+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$=\frac{\delta\sin\alpha}{n}\left(\cos nx\cos\lambda_n x-\sin nx\sin\lambda_n x\right)\left(1+\frac{A(x)}{n}\right)$$

$$-\frac{\delta\sin\alpha}{n^2}\left(\sin nx\cos\lambda_n x+\sin\lambda_n x\cos nx\right)\left(\cot\alpha+B(x)\right)+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$=\frac{\delta\sin\alpha}{n}\left(\cos nx-\lambda_n x\sin nx\right)\left(1+\frac{A(x)}{n}\right)-\frac{\delta\sin\alpha}{n^2}\left(\sin nx+\lambda_n x\cos nx\right)\left(\cot\alpha+B(x)\right)+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$=\frac{\delta\sin\alpha}{n}\left(\cos nx-\lambda_n x\sin nx\right)\left(1+\frac{A(x)}{n}\right)-\frac{\delta\sin\alpha}{n^2}\left(\sin nx\right)\left(\cot\alpha+B(x)\right)+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$U_{2n}(x,\lambda)=\frac{\delta\sin\alpha}{n}\left\{\left(\cos nx\left[1+\frac{A(x)}{n}\right]+\frac{\sin nx}{n\pi}\left[\left(\cot\alpha+B(\pi)\right)x-\left(\cot\alpha+B(\pi)\right)x\right]\right)\right\}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^3}\right) \tag{4.66}$$

elde edilir.

(4.55)'yi, $\sin\alpha=0$; $\sin\beta\neq 0$ değerleri için, (4.9)'da yerine yazıldığında (4.59) özdeğerinin $[0,\pi/2)$ aralığında karşılık gelen özfonksiyonu elde edilir.

$$\omega_1(x,\lambda)=-\frac{1}{\lambda}\cos\alpha\sin\lambda x-\int_0^x\frac{q(\tau)}{\lambda}\sin\lambda(x-\tau)\left(-\frac{1}{\lambda}\cos\alpha\sin\lambda\left(\tau-\Delta(\tau)\right)+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)\right)d\tau$$

$$=-\frac{1}{\lambda}\cos\alpha\sin\lambda x-\frac{\cos\alpha}{\lambda^2}\int_0^x\sin\lambda(x-\tau)\sin\lambda\left(\tau-\Delta(\tau)\right)q(\tau)\,d\tau+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\lambda^3}\right)$$

$$=-\frac{1}{\lambda}\cos\alpha\sin\lambda x-\frac{\cos\alpha}{\lambda^2}\int_0^x\left[\sin\lambda x\cos\lambda\tau-\sin\lambda\tau\cos\lambda x\right]\sin\lambda\left(\tau-\Delta(\tau)\right)q(\tau)\,d\tau+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\lambda^3}\right)$$

$$=-\frac{1}{\lambda}\cos\alpha\sin\lambda x-\frac{\cos\alpha}{\lambda^2}\int_0^x\sin\lambda x\cos\lambda\tau\sin\lambda\left(\tau-\Delta(\tau)\right)q(\tau)\,d\tau$$

$$-\frac{\cos\alpha\cos\lambda x}{\lambda^2}\int_0^x\sin\lambda x\sin\lambda\left(\tau-\Delta(\tau)\right)q(\tau)\,d\tau+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\lambda^3}\right)$$

$$=-\frac{1}{\lambda}\cos\alpha\sin\lambda x-\frac{\cos\alpha\sin\lambda x}{2\lambda^2}\int_0^x\sin\left(2\lambda\tau-\lambda\Delta(\tau)\right)q(\tau)d\tau+\frac{\cos\alpha\sin\lambda x}{2\lambda^2}\int_0^x\sin\left(\lambda\Delta(\tau)\right)q(\tau)d\tau$$

$$+\frac{\cos\alpha\cos\lambda x}{2\lambda^2}\int_0^x\cos\left(2\lambda\tau-\lambda\Delta(\tau)\right)q(\tau)d\tau+\frac{\cos\alpha\cos\lambda x}{2\lambda^2}\int_0^x\cos\left(\lambda\Delta(\tau)\right)q(\tau)d\tau+O\left(\frac{1}{\lambda^3}\right)$$

$$\omega_1(x,\lambda)=-\frac{1}{\lambda}\cos\alpha\sin\lambda x+\frac{\cos\alpha\sin\lambda x}{\lambda^2}A(x)+\frac{\cos\alpha\cos\lambda x}{\lambda^2}B(x)+O\left(\frac{1}{\lambda^3}\right) \tag{4.67}$$

yazılır. $\lambda=n+\frac{1}{2}+\delta_n$ için (4.67) eşitliği

$$U_1(x,\lambda)=\frac{\cos\alpha}{n}\left[-\sin\left(n+\frac{1}{2}+\delta_n\right)x+\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}+\delta_n\right)x}{n}A(x)+\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}+\delta_n\right)x}{n}B(x)\right]+O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$=\frac{\cos\alpha}{n}\left[-\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\cos\delta_n x+\sin\delta_n x\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x+\frac{1}{n}\left(\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\cos\delta_n x\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sin\delta_n x\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)A(x)+\frac{1}{n}\left(\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x\cos\delta_n x-\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\sin\delta_n x\right)B(x)\right]+O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

olarak bulunur. $\delta_n\to 0$ iken son eşitlik

$$U_{1n}(x,\lambda)=\frac{\cos\alpha}{n}\left[-\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x+\delta_n x\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x+\frac{1}{n}\left(\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x+\delta_n x\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)A(x)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{n}\left(\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x-\delta_n x\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)B(x)\right]+O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$=\frac{\cos\alpha}{n}\left[-\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x+\frac{1}{n}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)xA(x)-\frac{1}{n}\delta_n x\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)xB(x)\right]+O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$=\frac{\cos\alpha}{n}\left[\frac{x}{n}\left[\frac{1}{n^2\pi}\left(-\cot\beta+\frac{1}{n}\cot\beta\cos\alpha A(\pi)+\frac{\cos\alpha}{n}B(\pi)\right)\right]\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)xB(x)\right.$$

$$\left.-\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\left(1-\frac{A(x)}{n}\right)\right]+O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

olarak elde edilir. Böylece $[0,\pi/2)$ aralığında (4.59) özdeğerine karşılık gelen özfonksiyon

$$U_{1n}(x,\lambda_n)=\frac{-1}{n}\left(1+\frac{A(x)}{n}\right)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x+\frac{1}{n^2\pi}\left[B(\pi)x-B(x)\pi\right]\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x+O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

(4.68)

olarak elde edilir.

$$\omega_1'(x,\lambda)=-\cos\alpha\cos\lambda x-\int_0^x\cos\lambda(x-\tau)\omega_1(\tau-\Delta(\tau))q(\tau)d\tau$$

$$\omega_1'(x,\lambda)=-\cos\alpha\cos\lambda x-\int_0^x\cos\lambda(x-\tau)\left[-\frac{1}{\lambda}\cos\alpha\sin\lambda(\tau-\Delta(\tau))+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)\right]q(\tau)d\tau$$

$$=-\cos\alpha\cos\lambda x+\frac{\cos\alpha}{\lambda}\int_0^x\cos\lambda(\tau-\Delta(\tau))\sin\lambda(\tau-\Delta(\tau))+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$$

$$=-\cos\alpha\cos\lambda x+\frac{\cos\alpha}{\lambda}\int_0^x\cos\lambda x\cos\lambda\tau\sin\lambda(\tau-\Delta(\tau))q(\tau)d\tau$$

$$-\frac{\cos\alpha}{\lambda}\int_0^x\sin\lambda x\sin\lambda\tau\sin\lambda(\tau-\Delta(\tau))q(\tau)d\tau+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$$

$$=-\cos\alpha\cos\lambda x+\frac{\cos\alpha\cos\lambda x}{\lambda}\int_0^x\cos\lambda\tau\sin\lambda(\tau-\Delta(\tau))q(\tau)d\tau$$

$$-\frac{\cos\alpha\sin\lambda x}{\lambda}\int_0^x\sin\lambda\tau\sin\lambda(\tau-\Delta(\tau))q(\tau)d\tau+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$$

$$\omega_1'(x,\lambda)=-\cos\alpha\cos\lambda x+\frac{\cos\alpha\cos\lambda x}{2\lambda}\int_0^x\sin(2\lambda\tau-\lambda\Delta(\tau))q(\tau)d\tau+\frac{\cos\alpha\cos\lambda x}{2\lambda}\int_0^x\sin(\lambda\Delta(\tau))q(\tau)d\tau$$

$$+\frac{\cos\alpha\cos\lambda x}{2\lambda}\int_0^x\cos(2\lambda\tau-\lambda\Delta(\tau))q(\tau)d\tau-\frac{\cos\alpha\cos\lambda x}{2\lambda}\int_0^x\cos(\lambda\Delta(\tau))q(\tau)d\tau+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$$

$$\omega_1'(x,\lambda)=-\cos\alpha\cos\lambda x+\frac{\cos\alpha\cos\lambda x}{\lambda}A(x)-\frac{\cos\alpha\sin\lambda x}{\lambda}B(x)+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \tag{4.69}$$

olarak bulunur.

$$\omega_2(\tau-\Delta(\tau),\lambda)=-\frac{\delta}{\lambda^2}\cos\alpha\sin\lambda(\tau-\Delta(\tau))+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \tag{4.70}$$

$$\omega_1\left(\frac{\pi}{2},\lambda\right)=-\frac{1}{\lambda}\cos\alpha\sin\lambda\frac{\pi}{2}+\frac{\cos\alpha}{\lambda}\sin\lambda\frac{\pi}{2}A\left(\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\cos\alpha}{\lambda^2}\cos\lambda\frac{\pi}{2}B\left(\frac{\pi}{2}\right)+O\left(\frac{1}{\lambda^3}\right) \tag{4.71}$$

$$\omega_1'\left(\frac{\pi}{2},\lambda\right)=-\cos\alpha\cos\lambda\frac{\pi}{2}+\frac{\cos\alpha}{\lambda}\cos\lambda\frac{\pi}{2}A\left(\frac{\pi}{2}\right)-\frac{\cos\alpha}{\lambda}\sin\lambda\frac{\pi}{2}B\left(\frac{\pi}{2}\right)+O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \tag{4.72}$$

(4.70), (4.71) ve (4.72) eşitliklerini $\omega_2\left(x,\lambda\right)$ ’da yerine yazıp düzenlendiğinde

$$\omega_2\left(x,\lambda\right)=\frac{\delta}{\lambda}\omega_1\left(\frac{\pi}{2},\lambda\right)\cos\lambda\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\delta}{\lambda}\omega_1'\left(\frac{\pi}{2},\lambda\right)\sin\lambda\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin\lambda\left(x-\tau\right)}{\lambda}\omega_2\left(\tau-\Delta\left(\tau\right)\right)d\tau$$

$$=\frac{\delta}{\lambda}\left[-\frac{1}{\lambda}\cos\alpha\sin\lambda\frac{\pi}{2}+\frac{\cos\alpha}{\lambda^2}\sin\lambda\frac{\pi}{2}A\left(\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\cos\alpha}{\lambda^2}\cos\lambda\frac{\pi}{2}B\left(\frac{\pi}{2}\right)+O\left(\frac{1}{\lambda^3}\right)\right]\cos\lambda\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$+\frac{\delta}{\lambda^2}\left[\cos\alpha\cos\lambda\frac{\pi}{2}+\frac{\cos\alpha}{\lambda}\cos\lambda\frac{\pi}{2}A\left(\frac{\pi}{2}\right)-\frac{\cos\alpha}{\lambda}\sin\lambda\frac{\pi}{2}B\left(\frac{\pi}{2}\right)+O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)\right]\sin\lambda\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin\lambda\left(x-\tau\right)}{\lambda}\left[-\frac{\delta}{\lambda^2}\cos\alpha\sin\lambda\left(\tau-\Delta\left(\tau\right)\right)+O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)\right]d\tau$$

$$=-\frac{\delta}{\lambda^2}\cos\alpha\sin\lambda\frac{\pi}{2}\cos\lambda\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\delta}{\lambda^3}\cos\alpha\sin\lambda\frac{\pi}{2}\cos\lambda\left(x-\frac{\pi}{2}\right)A\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$+\frac{\delta}{\lambda^3}\cos\alpha\cos\lambda\frac{\pi}{2}\cos\lambda\left(x-\frac{\pi}{2}\right)B\left(\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\delta}{\lambda^2}\cos\alpha\cos\lambda\frac{\pi}{2}\sin\lambda\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$+\frac{\delta}{\lambda^3}\cos\alpha\cos\lambda\frac{\pi}{2}\sin\lambda\left(x-\frac{\pi}{2}\right)A\left(\frac{\pi}{2}\right)-\frac{\delta}{\lambda^3}\cos\alpha\sin\lambda\frac{\pi}{2}\sin\lambda\left(x-\frac{\pi}{2}\right)B\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$+\frac{\delta\cos\alpha}{\lambda^3}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin\lambda\left(x-\tau\right)\sin\lambda\left(\tau-\Delta\left(\tau\right)\right)q\left(\tau\right)d\tau+O\left(\frac{1}{\lambda^4}\right)$$

$$=-\frac{\delta}{\lambda^2}\cos\alpha\left[\sin\lambda\frac{\pi}{2}\cos\lambda\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\cos\lambda\frac{\pi}{2}\sin\lambda\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$+\frac{\delta}{\lambda^3}\cos\alpha\left[\sin\lambda\frac{\pi}{2}\cos\lambda\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\cos\lambda\frac{\pi}{2}\sin\lambda\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right]A\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$+\frac{\delta}{\lambda^3}\cos\alpha\left[\cos\lambda\frac{\pi}{2}\cos\lambda\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-\sin\lambda\frac{\pi}{2}\sin\lambda\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right]B\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$+\frac{\delta\cos\alpha}{\lambda^3}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin\lambda x\cos\lambda\tau\sin\lambda\left(\tau-\Delta\left(\tau\right)\right)q\left(\tau\right)d\tau$$

$$-\frac{\delta\cos\alpha}{\lambda^3}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin\lambda x\cos\lambda x\sin\lambda\left(\tau-\Delta(\tau)\right)q(\tau)d\tau+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\lambda^4}\right)$$

$$=-\frac{\delta\cos\alpha}{\lambda^2}\sin\lambda x+\frac{\delta\cos\alpha}{\lambda^3}\sin\lambda xA\left(\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\delta\cos\alpha}{\lambda^3}\cos\lambda xB\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$+\frac{\delta\cos\alpha\sin\lambda x}{2\lambda^3}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin\left(2\lambda\tau-\lambda\Delta(\tau)\right)q(\tau)d\tau+\frac{\delta\cos\alpha\sin\lambda x}{2\lambda^3}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin\left(\lambda\Delta(\tau)\right)q(\tau)d\tau$$

$$-\frac{\delta\cos\alpha\cos\lambda x}{2\lambda^3}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin\left(2\lambda\tau-\lambda\Delta(\tau)\right)q(\tau)d\tau+\frac{\delta\cos\alpha\cos\lambda x}{2\lambda^3}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos\left(\lambda\Delta(\tau)\right)q(\tau)d\tau+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\lambda^4}\right)$$

$$=-\frac{\delta\cos\alpha}{\lambda^2}\sin\lambda x\left(1-\frac{A\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\lambda}\right)+\frac{\delta\cos\alpha}{\lambda^3}\cos\lambda xB\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$+\frac{\delta\cos\alpha}{\lambda^2}\sin\lambda x\left(A(\pi)-A\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)+\frac{\delta\cos\alpha}{\lambda^2}\cos\lambda x\left(B(\pi)-B\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\lambda^4}\right)$$

$$\omega_2(x,\lambda)=-\frac{\delta\cos\alpha}{\lambda^2}\sin\lambda x+\frac{\delta\cos\alpha}{\lambda^3}\sin\lambda xA(x)+\frac{\delta\cos\alpha}{\lambda^3}\cos\lambda xB(\pi)+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\lambda^4}\right) \tag{4.73}$$

olarak elde edilir. $\lambda=n+\frac{1}{2}+\delta_n$ (4.73)'de yerine yazıldığında.

$$U_2(x,\lambda)=-\frac{\delta\cos\alpha}{n^2}\cos\left(n+\frac{1}{2}+\lambda_n\right)x+\frac{\delta\cos\alpha}{n^3}\sin\left(n+\frac{1}{2}+\lambda_n\right)xA(x)$$

$$+\frac{\delta\cos\alpha}{n^3}\cos\left(n+\frac{1}{2}+\lambda_n\right)xB(\pi)+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

$$=-\frac{\delta\cos\alpha}{n^2}\left(\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x\cos\lambda_n x-\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\sin\lambda_n x\right)$$

$$+\frac{\delta\cos\alpha}{n^3}\left(\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\cos\lambda_n x+\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x\sin\lambda_n x\right)A(x)$$

$$+\frac{\delta\cos\alpha}{n^3}\left(\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x\cos\lambda_n x-\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\sin\lambda_n x\right)B(\pi)+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

böylece $(\pi/2,\pi]$ aralığında (4.59) özdegerine karşılık gelen özfoksiyonu

$$U_{2n}(x,\lambda_n)=\frac{-\delta}{n^2}\left(1+\frac{A(x)}{n}\right)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x+\frac{\delta}{n^3\pi}\left(B(x)x-B(x)\pi\right)\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x+O\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

elde edilir.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

5.1 Sonuçlar

Ele alınan problem için ilk olarak $[0,\pi/2)$ aralığında çözüm integral denklem biçiminde yazılmıştır. (4.4)-(4.5) geçiş koşulları kullanılarak problemin $(\pi/2,\pi]$ aralığındaki çözümü elde edilmiştir. Böylece problemin çözümünün varlığı gösterilmiştir. Devamında problemin özdeğerlerinin basit olduğu gösterilmiştir. Yani bir özdeğere karşılık gelen iki çözümün birbirinin katı olduğu yani lieneer bağımlı olduğu gösterilmiştir. Elde edilen çözüm fonksiyonu (4.1) denklemini (4.2) sınır koşulunu ve (4.4)-(4.5) geçiş koşulunu sağlamaktadır. Bu çözüm (4.3) denkleminde yazılarak karakteristik denklem elde edilmiştir. Özdeğerlerinin basit olmasının bir sonucu olarak problemin özdeğerleri ile karakteristik denklemin kökleri çakışıktır. Çözüm için elde edilen integral denklemler kullanılarak çözümün sınırlı olduğu gösterilmiştir. Çözümün sınırlılığının bir çözümü olarak karakteristik denklemin sonsuz sayıda pozitif köke sahip olduğu elde edilmiştir. Dolayısıyla ele alınan problemin sonsuz sayıda özdeğere sahip olduğu gösterilmiştir. karakteristik denklemin köklerinden 4 durum ortaya çıkmaktadır. Bu durumlar :

1. $\sin\alpha \neq 0$. $\sin\beta \neq 0$
2. $\sin\alpha = 0$, $\sin\beta \neq 0$
3. $\sin\alpha \neq 0$, $\sin\beta = 0$
4. $\sin\alpha = 0$, $\sin\beta = 0$

biçimindedir. 3. ve 4. durumlarda sınır koşulundaki parametre kaybolmaktadır. Bu sebeple bu iki durum incelenmemiştir. 1. ve 2. durumlar için ele alınan problemin özdeğerleri, karşılık gelen özfonksiyonlar ve bu özfonksiyonların spektral parametreye göre türevlerinin asimptotik ifadeleri kaba bir biçimde yazılmıştır. İncelenen problemin yeterince büyük n doğal sayısı için birinci durumda n civarında ikinci durumda $n+1/2$ civarında yalnızca bir özdeğere sahip olduğu gösterilmiştir. Problemde tanımlanan $q(x)$ ve $\Delta(x)$ fonksiyonları üzerine ek koşullar konularak daha önceden asimptotik ifadeleri kaba bir biçimde elde edilen özdeğerler ve özfonksiyonların asimptotik ifadeleri kesinleştirilmiştir.

Sonuç olarak 1. durumda $\sin\alpha \neq 0$, $\sin\beta \neq 0$ için özdeğerler

$$\lambda_n = n - \frac{1}{n\pi}\left(\cot\alpha + B(\pi)\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

ve karşılık gelen özfonksiyonlar

$$U_{1n}\left(x,\lambda_n\right)=\sin\alpha\left\{\cos nx\left(1+\frac{A\left(x\right)}{n}\right)+\frac{\sin nx}{n\pi}\left[\left(\cot\alpha+B\left(\pi\right)\right)x-\left(\cot\alpha+B\left(x\right)\right)\right]\right\}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$U_{2n}\left(x,\lambda_n\right)=\frac{\delta\sin\alpha}{n}\left\{\left(\cos nx\left[1+\frac{A\left(x\right)}{n}\right]+\frac{\sin nx}{n\pi}\left[\left(\cot\alpha+B\left(\pi\right)\right)x-\left(\cot\alpha+B\left(\pi\right)\right)x\right]\right)\right\}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

biçiminde elde edilmiştir.

2. durumda $\sin\alpha=0$, $\sin\beta\neq 0$ için özdeğerler

$$\lambda_n=n+\frac{1}{2}-\frac{B\left(\pi\right)}{n\pi}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

ve karşılık gelen özfonksiyonlar

$$U_{1n}\left(x,\lambda_n\right)=\frac{-1}{n}\left(1+\frac{A\left(x\right)}{n}\right)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x+\frac{1}{n^2\pi}\left[B\left(\pi\right)x-B\left(x\right)\pi\right]\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x+O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$U_{2n}(x,\lambda_n)=\frac{-\delta}{n^2}\left(1+\frac{A\left(x\right)}{n}\right)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x+\frac{\delta}{n^3\pi}\left(B\left(x\right)x-B\left(x\right)\pi\right)\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x+O\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

biçiminde elde edilmiştir.

Bu sonuçlardan görüldüğü gibi geçiş koşulundaki δ ve sınır koşulundaki β'nın özdeğere bir etkisinin olmadığı elde edilmiştir. Bu tezde ele alınan problem Koparan (2019) tarafından incelenen denklemin süreksizlik içeren ve geçiş koşulunda spektral parametre bulunan halidir. Elde edilen özdeğerler karşılaştırıldığında problemin süreksizlik içermesinin veya geçiş koşulunda parametre içermesinin bir etkisinin olmadığı görülmektedir. Çünkü her iki problemde de elde edilen özdeğerler aynıdır. Diğer taraftan süreksizlik noktasına kadar her iki problemde de elde edilen özfonksiyonlar aynıdır.

Ayrıca her iki durumda da geçiş koşulundaki süreksizlik özelliğinin özfonksiyonlarda da ortaya çıktığı görülmektedir. Yani fonksiyonun süreksizlik noktasındaki sağ ve sol değerler arasındaki ilişki özfonksiyonların sağ ve sol değerleri arasında da aşağıda verildiği gibi bulunmaktadır.

$$U_{2n}\left(x\right)=\frac{\delta}{\lambda}U_{1n}\left(x\right)$$

5.2 Öneriler

Değişik sınır değer koşulları yardımıyla ikinci mertebeden geç kalan argümanlı sınır değer problemleri üretilip asimptotik davranışları incelenebilir. Daha önceden incelenmiş geciken argümanlı sınır değer problemleri bu tezde ele alınan spektral parametre içeren geçiş koşulları altında incelenerek spektral parametreye bağlı geçiş koşulunun özdeğerler ve karşılık gelen özfonksiyonları etkisi incelenebilir. Ayrıca daha önceden ele alınmamış sınır koşulları içeren geciken argümanlı sınır değer problemleri içinde normal geçiş koşulu ve spektral parametreye bağlı altında elde edilen sonuçlar karşılaştırılarak spektral parametreye bağlı geçiş koşulunun özdeğer ve özfonksiyonlar üzerindeki etkisi incelenebilir.

KAYNAKLAR

Aydin Akgun, F.Bayramov, A. , Bayramoğlu, M. (2012). "Discontinuous boundary value problems with retarded argument and eigenparameter-dependent boundary conditions''.Mediterranean journal of mathematics, Vol. 10, No.1, pp. 277-288.

Bayramov, A. Çalışkan, S.,Uslu S., (2007). "Computation of eigenvalues and eigenfunctions of a discontinuous boundary value problem with retarded argument" Appl. Math. Comput, Vol. 19, No. 1, pp. 592-600.

Bayramoğlu, M. Köklü, K. Ö. , Baykal, O. (2002)."On the spectral properties of the regular Sturm-Liouville Problem with the lag argument for which its boundary conditions depends on the spectral parameter''. Turkish Journal of Mathematics, Vol.26, No. 4, pp. 421-432.

Cetinkaya, F. A. , Mamedov, K. R. (2017). "A boundary value problem with retarded argument and discontinuous coefficient in the differential equation." Azerbaijan Journal of Mathematics, Vol. 7, No. 1, pp. 135-145.

Çerçi, G. (2017) "Geciken Argümanlı Bir Başlangıç Değer Problemi Üzerine," Yüksek lisans tezi.

Hira, F. (2017). "A trace formula for the Sturm-Liouville type equation with retarded argument." Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Sér. A1 Math. Stat, Vol. 66, No. 1, pp. 124-132.

Koparan, K. (2019). "Sınırda parametre içeren geç kalan argümanlı Sturm Liouville probleminin özdeğerlerinin ve özfonksiyonlarının asimtotik özellikleri," Yüksek Lisans Tezi.

Myskis, A. D., Linear Differential Equations with Retarded Argument, GITTL, Moscow, 1951; German transl., VEB Deutscher Verlag, Berlin, 1955.

Mukhtarov, O.S.H., Kadakal, V., Altınışık, N., (2003). "Eigenvalues and eigenfuctions of discontions Sturm-Liouville problems with eigenparameter in the boundary conditions", Indian J Pure App. Math. Vol. 4, No. 3, pp. 501-516.

Norkin, S. B. (1956). Boundary problem for a second order differential equation with a retarded argument. Uchenye Zapiski Moskovskogo Gosudarstvennogo Universiteta, 181, p. 59-72.

Norkin, S.B., (1972). "Differantial Equations of the Second with Retarted Argument'', American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, p. 258.

Norkin, S. B. (1958). "On periodic solutions of a linear homogeneous differential equation of second order with retarded argument.'' Matematicheskii Sbornik, Vol. 87, No. 1, pp. 71-104.

Şen, E. , Bayramov, A. (2012). "On calculation of eigenvalues and eigenfunctions of a Sturm Liouville type problem with retarded argument which contains a spectral parameter in the boundary condition.'' Journal of Inequalities and Applications, 2011(1), pp. 1-9.

Şen, E. ,Bayramov, A. (2011). "Calculation of eigenvalues and eigenfunctions of a discontinuous boundary value problem with retarded argument which contains a spectral parameter in the boundary condition.''Mathematical and Computer Modelling, Vol. 54, No. 11-12, pp. 3090-3097.

Şen, E. , Bayramov, A. (2013). "Asymptotic formulations of the eigenvalues and eigenfunctions for a boundary value problem.'' Mathematical Methods in the Applied Sciences, Vol. 36, No. 12, pp. 1512-1519.

Şen, E.Seo, J. J. , Araci, S. (2013). "Asymptotic behaviour of eigenvalues and eigenfunctions of a Sturm-Liouville problem with retarded argument." Journal of Applied Mathematics, 2013.

Yang, C. F. (2012). Trace and inverse problem of a discontinuous Sturm–Liouville operator with retarded argument. Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 395, No. 1, pp. 30-41.10.