

ZONGULDAK BÜLENT ECEVİT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HANKEL DÖNÜŞÜMÜ VE BAZI UYGULAMALARI

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MERYEM GÜNEY

AĞUSTOS 2024

ZONGULDAK BÜLENT ECEVİT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HANKEL DÖNÜŞÜMÜ VE BAZI UYGULAMALARI

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Meryem GÜNEY

DANIŞMAN: Prof. Dr. Zekeriya USTAOĞLU

ZONGULDAK

Ağustos 2024

KABUL:

Meryem GÜNEY tarafından hazırlanan “Hankel Dönüşümü ve Bazı Uygulamaları” başlıklı bu çalışma jürimiz tarafından değerlendirilerek, Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak oybirliğiyle kabul edilmiştir 27/09/2024.

Danışman: Prof. Dr. Zekeriya USTAOĞLU

Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü

Üye: Doç. Dr. Ömer KİŞİ

Bartın Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü

Üye: Doç. Dr. Melih GÖCEN

Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü

ONAY:

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

....../....../2024

Prof. Dr. Fikret GÖLGELEYEN
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü



“Bu tezdeki tüm bilgilerin akademik kurallara ve etik ilkelere uygun olarak elde edildiğini ve sunulduğunu; ayrıca bu kuralların ve ilkelerin gerektirdiği şekilde, bu çalışmadan kaynaklanmayan bütün atıfları yaptığımı beyan ederim.”

Meryem GÜNEY

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

HANKEL DÖNÜŞÜMÜ VE BAZI UYGULAMALARI

Meryem GÜNEY

Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Zekeriya USTAOĞLU

Ağustos 2024, 57 sayfa

Tez üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, Hankel dönüşümü ile ilgili temel bilgiler verilmiş ve Hankel dönüşümünün çekirdeği olan Bessel fonksiyonlarının tanımı ve bazı temel özellikleri sunulmuştur. İkinci bölümde, Hankel integral teoremi yardımıyla Hankel dönüşüm çifti tanımlanmıştır. Hankel dönüşümü ve ters Hankel dönüşümü tanımı verilerek Hankel dönüşümünün Fourier dönüşümü ile ilişkisi incelenmiştir. Ayrıca, Hankel dönüşümünün temel özellikleri ispatları ile birlikte verilmiş ve bazı fonksiyonların Hankel dönüşümünün hesaplanmasına ilişkin örnekler ele alınmıştır. Üçüncü bölümde, Bessel diferansiyel operatörünün Hankel dönüşümü incelenmiş ardından Hankel dönüşümü yardımıyla bazı sınır değer problemlerinin çözümü araştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Bessel fonksiyonları, Fourier dönüşümü, Hankel dönüşümü, ters Hankel dönüşümü

Bilim Kodu: 403.06.01



ABSTRACT

M. Sc. Thesis

HANKEL TRANSFORM AND SOME OF ITS APPLICATIONS

Meryem GÜNEY

**Zonguldak Bülent Ecevit University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics**

Thesis Advisor: Prof. Dr. Zekeriya USTAOĞLU

August 2024, 57 pages

The thesis consists of three chapters. In the first chapter, basic information about Hankel transform is provided and the definition of Bessel functions, which are the kernel of Hankel transform, and some basic properties are presented. In the second chapter, the Hankel transformation pair is defined with the help of the Hankel integral theorem. The definition of the Hankel transform and inverse Hankel transform is given, and the relationship between the Hankel transform and the Fourier transform is examined. Additionally, the basic properties of the Hankel transform are provided with proofs, and some examples of calculating the Hankel transformation of some functions are discussed. In the third chapter, the Hankel transform of the Bessel differential operator is examined, followed by the investigation of the solution of some boundary value problems using the Hankel transform.

Keywords: Bessel functions, Fourier transform, Hankel transform, inverse Hankel transform.

Science Code: 403.06.01



TEŞEKKÜR

Tezin tüm aşamalarında değerli vaktini esirgemedi bana ayıran, görüş ve önerileriyle yardımcı olan ve beni yönlendiren değerli danışman hocam sayın Prof. Dr. Zekeriya USTAOĞLU'na (ZBEÜ) içtenlikle teşekkür ederim.

Hayatımın tüm aşamalarında olduğu gibi, bu çalışma esnasında da manevi desteğini hep yanımda hissettiğim, yoğun çalışmalarım sırasında sabrını esirgemeyen değerli eşim Ufuk GÜNEY'e; ilham kaynağım olan canım kızım Arven GÜNEY'e; daima yanımda olan değerli annem ve babama çok teşekkür ederim.



İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
KABUL	ii
ÖZET	iii
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vii
İÇİNDEKİLER.....	ix
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	xi
ÇİZELGELER DİZİNİ	xiii
EK AÇIKLAMALAR DİZİNİ.....	xv
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	xvii
 BÖLÜM 1 GİRİŞ.....	 1
 1.1 TEZİN KAPSAMI VE ÖNEMİ	 2
1.2 BESSEL FONKSİYONLARI	3
1.2.1 Bessel Diferansiyel Denklemi	3
1.2.2 Bessel Diferansiyel Denkleminin Çözümü	5
1.3 BESSEL FONKSİYONLARININ ÖZELLİKLERİ	9
1.3.1 Bessel Fonksiyonlarının Yineleme Bağlantıları	9
1.3.2 Bessel Fonksiyonları İntegral Gösterimi	12
 BÖLÜM 2 HANKEL DÖNÜŞÜMÜ	 15
 2.1 HANKEL İNTEGRAL TEOREMİ	 15
2.2 HANKEL DÖNÜŞÜMÜNÜN FOURIER DÖNÜŞÜMÜ İLE BAĞINTISI	22
2.3 HANKEL DÖNÜŞÜMÜNÜN TEMEL ÖZELLİKLERİ.....	26
2.4 HANKEL DÖNÜŞÜMÜ ÖRNEKLERİ.....	30

İÇİNDEKİLER (devam ediyor)

	<u>Sayfa</u>
BÖLÜM 3 HANKEL DÖNÜŞÜMÜNÜN UYGULAMALARI	39
3.1 BESSEL DİFERANSİYEL OPERATÖRÜNÜN HANKEL DÖNÜŞÜMÜ	39
3.2 ISI İLETİMİ	41
3.3 ELEKTRİK YÜKLÜ DİSK	45
3.4 BİR ELEKTROSTATİK PROBLEM	47
KAYNAKLAR.....	49
EK AÇIKLAMALAR.....	51
ÖZGEÇMİŞ	57

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>No</u>	<u>Sayfa</u>
Şekil 1.1 Birinci tür Bessel fonksiyonları	7
Şekil 1.2 İkinci tür Bessel fonksiyonları.	9
Şekil 3.1 Isı iletimi problemi için $v(r,z)$ çözümü.....	44
Şekil 3.2 Elektrik yüklü disk problemi için $v(r,z)$ çözümü	46





ÇİZELGELER DİZİNİ

No

Sayfa

Çizelge 1.1 Bessel fonksiyonları için bazı integral gösterimleri.....	14
Çizelge A.1 Hankel dönüşüm tablosu (Sıfırıncı mertebeden).....	51
Çizelge A.2 Hankel dönüşüm tablosu (v. mertebeden).....	54





EK AÇIKLAMALAR DİZİNİ

Sayfa

EK A: Hankel Dönüşüm Tabloları.....	51
-------------------------------------	----





SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

SİMGELER

H_ν	: ν . mertebeden Hankel dönüşüm operatörü
J_ν	: ν . mertebeden birinci çeşit Bessel fonksiyonu
H_ν^{-1}	: ν . mertebeden ters Hankel dönüşüm operatörü
$\mathcal{F}$	: Fourier dönüşüm operatörü
$\mathcal{F}^{-1}$	: Ters Fourier dönüşüm operatörü
Γ	: Gamma fonksiyonu
δ	: Dirac Delta fonksiyonu
V	: Sınırlı varyasyon operatörü
Y_ν	: ν . mertebeden ikinci çeşit Bessel fonksiyonu
$H_\nu^{(1)}$	: ν . mertebeden üçüncü çeşit Bessel fonksiyonu
$\oint^{(\alpha+)}$	: α noktasını pozitif yönlü çevreleyen bir eğri boyunca kontür integrali
$\Re$	: Reel Sayı
O	: Büyük o
Δ_ν	: Bessel diferansiyel operatörü
$\dot{e}_{gen}$	: Birim hacim başıma belirtilen ortamdaki ısı üretim hızı
K_ν	: Değiştirilmiş Bessel fonksiyonu
I_ν	: Değiştirilmiş Bessel fonksiyonu
H_0	: Struve fonksiyonu
L_0	: Struve fonksiyonu
Ker	: Kelvin fonksiyonu
Kei	: Kelvin fonksiyonu

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ (devam ediyor)

KISALTMALAR

Im	: Karmaşık sayının sanal kısmı
Re	: Karmaşık sayının reel kısmı
Sup	: Supremum



BÖLÜM 1

GİRİŞ

Hermann Hankel (1839-1873), 19. yy ortalarında yaşamış karmaşık sayı sistemleri, fonksiyonlar teorisi ve matematik tarihi üzerine yaptığı önemli çalışmalarıyla matematik bilimine katkı sağlamıştır. Karmaşık sayı sistemlerindeki en önemli katkısı gerçek, karmaşık ve hiper karmaşık sayı sistemleri hakkında yapmış olduğu detaylı çalışmalar ve sonuçların yer aldığı (Hankel 1867) eseridir. Fonksiyonlar teorisi üzerine yaptığı çalışmalar arasında (Hankel 1882) ve (Hankel 1871) makaleleri bulunmaktadır. (Hankel 1882) makalesiyle Riemann'ın integrallenebilirlik kriterini yeniden formüle etmiş ve nokta kümelerinin ölçüm teorisi özellikleri üzerine sonuçlar elde etmiştir ve (Hankel 1871) Ersch-Gruber Encyclopädie için yazdığı "Grenze" makalesinde Bernard Bolzano'nun sonsuz seriler üzerine çalışmalarının önemini ilk kez ortaya koymuş ve sonsuz sayıda noktada türevlenemeyen sürekli bir fonksiyon örneği vermiştir. Ayrıca Hankel, Mathematische Annalendeki bir dizi makalede Hankel fonksiyonları veya üçüncü tür Bessel fonksiyonları olarak bilinen fonksiyonların önemini göstermiştir (Crowe 2023).

Hermann Hankel'in matematiksel analize yaptığı sayısız katkılar arasında sadece orijine olan mesafeye bağlı fonksiyonların, yani radyal simetriye sahip fonksiyonların incelenmesinde kullanılan Hankel dönüşümü de yer alır. Hankel dönüşümlerinin çekirdeği silindirik simetriye sahip Bessel fonksiyonlarından oluşmaktadır ve Hankel dönüşümü ile Fourier dönüşümü arasında doğal bir ilişki mevcuttur. Dairesel simetrik bir fonksiyonun Fourier dönüşümü dairesel simetrik olduğundan Hankel dönüşümü iki boyutlu Fourier dönüşümünün dairesel simetrik bir versiyonu olarak bilinmektedir. Sıfırıncı mertebeden Hankel dönüşümü, Fourier-Bessel dönüşümü olarak da adlandırılır.

Bilim ve mühendisliğin birçok farklı alanında uygulamalara sahip Hankel dönüşümü; dalga yayılım problemleri ve silindirik simetriye sahip problemler gibi uygulamalarda önemli bir rol oynamaktadır. Örneğin uygun geometriye sahip ses dalgalarının yayılımı, ışık dalgalarının yayılımı ve ısı iletimi ile ilgili problemlerin çözümünde Hankel dönüşümün-

den yararlanılmaktadır (Arfken 1985, p. 795, Baddour 2019, Baruch 2013, Debnath and Bhatta 2010, p. 315, Goodman 1996, pp. 10 – 12).

1.1 TEZİN KAPSAM VE ÖNEMİ

Hankel dönüşümü, $r \geq 0$ için tanımlanmış olan $f(r)$ fonksiyonunun ν . mertebeden Hankel dönüşümü

$$F_\nu(s) = H_\nu \{f(r)\} = \int_0^\infty r f(r) J_\nu(sr) dr \quad (1.1)$$

olarak tanımlanır. Burada J_ν , ν . mertebeden birinci tür Bessel fonksiyonudur. H_ν operatörü ν . mertebeden Hankel dönüşümü operatörü olarak adlandırılır ve $F_\nu(s)$, r değişkenine bağlı f fonksiyonunun Hankel dönüşümüdür. Bunun yanında $F_\nu(s)$ verildiğinde $f(r)$ fonksiyonunu elde etmek için ters Hankel dönüşümü

$$f(r) = H_\nu^{-1} \{F_\nu(s)\} = \int_0^\infty s F_\nu(s) J_\nu(sr) ds \quad (1.2)$$

olarak ifade edilir, H_ν^{-1} operatörü ters Hankel dönüşümü operatörü olarak adlandırılır. Tezde ilk olarak, Hankel dönüşümlerinin çekirdeğini oluşturan Bessel fonksiyonlarının tanımı ve temel özellikleri ifade edilmiştir. Bessel diferansiyel denkleminin çözümleri araştırılmış birinci, ikinci ve üçüncü tür Bessel fonksiyonları elde edilmiştir. Hankel dönüşümlerinin çekirdeğinde birinci tür Bessel fonksiyonları kullanıldığından, devamında birinci tür Bessel fonksiyonun yineleme bağıntıları ispatlarıyla birlikte sunulmuş ve bu fonksiyonlar için bazı integral gösterimleri ifade edilmiştir. Bessel fonksiyonunun yineleme bağıntıları, Hankel dönüşümlerinde çözüm süreçlerini basitleştirmek ve hesaplamaları kolaylaştırmak için kullanılır. Tezin ikinci bölümünde Hankel integral teoremi verilmiş, bu teorem kullanılarak Hankel dönüşüm çiftleri tanımlanmış ve böylece Hankel dönüşümü ve ters Hankel dönüşümü tanımları elde edilmiştir. Hankel dönüşümünün tanımının ardından, Fourier dönüşümüyle olan ilişkisi incelenmiştir. İki değişkenli Fourier dönüşümünden sıfırıncı mertebeden Hankel dönüşümü elde edilmiş, ardından n . mertebeden Hankel dönüşümü ile Fourier dönüşümü arasındaki ilişki incelenmiştir. Hankel dönüşümünün temel özellikleri ispatlarıyla birlikte sunulmuş, Hankel dönüşümünün tanımı ve özelliklerinin kullanılmasıyla bazı fonksiyonların Hankel dönüşümünün hesabına yönelik örnekler verilmiştir. Son bölümde Hankel dönüşümünün uygulamaları bağlamında, Bessel diferansiyel operatörünün Hankel dönüşümü incelenmiştir. Daha sonra ısı iletimi, elektrik yüklü

disk ve elektrostatik ile ilgili bazı problemler ele alınmış, Hankel dönüşümü ve ters Hankel dönüşümü kullanılarak bu problemlerin çözümleri araştırılmıştır.

1.2 BESSEL FONKSİYONLARI

Bu bölümde

$$\nabla^2 f \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0 \quad (1.3)$$

(1.3) ile verilen Laplace denkleminin silindirik koordinatlarındaki ifadesinden yararlanılarak türetilen Bessel diferansiyel denklemi ve bu denklemin çözümleri olan Bessel fonksiyonları ve özellikleri ele alınacaktır.

1.2.1 Bessel Diferansiyel Denklemi

(1.3) ile verilen üç boyutlu Laplace denklemi

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z$$

değişken dönüşümü ile (r, θ, z) silindirik koordinatlarına geçilirse,

$$\nabla^2 f \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0 \quad (1.4)$$

denklemi elde edilir. Denklemin,

$$f(r, \theta, z) = R(r)\Phi(\theta)Z(z)$$

biçimindeki değişkenlere ayrılabilir çözümü için türevler

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{dR}{dr}\Phi(\theta)Z(z), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} = \frac{d^2 R}{dr^2}\Phi(\theta)Z(z), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} = \frac{d^2 \Phi}{d\theta^2}R(r)Z(z), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{d^2 Z}{dz^2}R(r)\Phi(\theta)$$

olacağından değerler (1.4) denkleminde yerine yazıldığında,

$$\frac{d^2 R}{dr^2}\Phi(\theta)Z(z) + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr}\Phi(\theta)Z(z) + \frac{1}{r^2} \frac{d^2 \Phi}{d\theta^2}R(r)Z(z) + \frac{d^2 Z}{dz^2}R(r)\Phi(\theta) = 0 \quad (1.5)$$

elde edilir. Buradan $R(r)\Phi(\theta)Z(z) \neq 0$ olduğundan (1.5) denklemi $R(r)\Phi(\theta)Z(z)$ ile bölünür ve düzenlenirse,

$$\begin{aligned} \frac{d^2 R}{R(r)dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{R(r)dr} + \frac{1}{r^2} \frac{d^2 \Phi}{\Phi(\theta)d\theta^2} + \frac{d^2 Z}{Z(z)dz^2} &= 0 \\ \frac{1}{R(r)} \left(\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{d^2 \Phi}{\Phi(\theta)d\theta^2} + \frac{d^2 Z}{Z(z)dz^2} &= 0 \end{aligned} \quad (1.6)$$

denklemini elde edilir. Elde edilen denklemde z değişkenine bağlı son terim bir sabite eşitlenip C ile gösterilir ve üçüncü terimdeki $\frac{d^2\Phi}{\Phi(\theta)d\theta^2}$ ifadesi diğer terimlerden bağımsız olduğundan D sabitine eşitlenirse sırasıyla

$$\frac{d^2Z}{Z(z)dz^2} = CZ, \quad (1.7)$$

$$\frac{d^2\Phi}{\Phi(\theta)d\theta^2} = D\Phi \quad (1.8)$$

olur. Bu eşitlikler (1.6) denklemine yerine yazılır ve denklem $r^2R(r)$ ile çarpılırsa,

$$\begin{aligned} \frac{1}{R(r)} \left(\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{r^2} D\Phi(\theta) + CZ(z) &= 0 \\ r^2 \frac{d^2R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} + D\Phi(\theta)R(r) + Cr^2Z(z)R(r) &= 0 \\ r^2 \frac{d^2R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} + (D\Phi(\theta) + Cr^2Z(z)) R(r) &= 0 \end{aligned} \quad (1.9)$$

elde edilir. $C = k^2$ ve $D = -\nu^2$ eşitlikleri (1.7), (1.8) ve (1.9) denklemlerinde yerine yazılırsa,

$$\frac{d^2Z}{Z(z)dz^2} = k^2Z, \quad (1.10)$$

$$\frac{d^2\Phi}{\Phi(\theta)d\theta^2} = -\nu^2\Phi, \quad (1.11)$$

$$r^2 \frac{d^2R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} + (k^2r^2Z(z) - \nu^2\Phi(\theta)) R(r) = 0 \quad (1.12)$$

olur ve (1.10) ve (1.11) denklemlerin çözümleri sırasıyla

$$Z(z) = Ae^{-kz} + Be^{kz},$$

$$\Phi(\theta) = E \cos \nu\theta + F \sin \nu\theta$$

şeklindedir. Buradan (1.12) denklemine $t = kr$ dönüşümü yardımıyla

$$\begin{aligned} \frac{dt}{dr} &= k, \quad \frac{dR}{dr} = \frac{dR}{dt} \frac{dt}{dr} \Rightarrow \frac{dR}{dr} = \frac{dR}{dt} k; \\ \frac{d}{dr} \left(\frac{dR}{dr} \right) &= \frac{d}{dr} \left(\frac{dR}{dt} \frac{dt}{dr} \right), \quad \frac{d^2R}{dr^2} = \left(\frac{d}{dr} \frac{dR}{dt} \right) \frac{dt}{dr} + \left(\frac{d}{dr} \frac{dt}{dr} \right) \frac{dR}{dt} \Rightarrow \frac{d^2R}{dr^2} = k^2 \frac{d^2R}{dt^2}; \end{aligned}$$

değişkenleri oluşur ve bu değişkenler (1.12) denklemine yerine yazılır ve düzenlenirse,

$$\begin{aligned} t^2 \frac{d^2R}{dt^2} + t \frac{dR}{dt} + (t^2 - \nu^2) R &= 0 \\ \frac{d^2R}{dt^2} + \frac{1}{t} \frac{dR}{dt} + \left(1 - \left(\frac{\nu}{t} \right)^2 \right) R &= 0 \end{aligned} \quad (1.13)$$

denklemini elde edilir. (1.13) denklemi Bessel diferansiyel denklemi olarak bilinir. Bu denklemin çözümleri olan fonksiyonlara ν . mertebeden Bessel fonksiyonları veya silindirik fonksiyonlar denir (Boyce and DiPrima 2001, p. 280, Watson 1966, p. 124).

1.2.2 Bessel Diferansiyel Denkleminin Çözümü

$$x^2 \frac{d^2 u}{dx^2} + x \frac{du}{dx} + (x^2 - \nu^2) u = 0 \quad (1.14)$$

ile verilen ν indeksli Bessel diferansiyel denklemi ikinci mertebeden bir lineer diferansiyel denklem olup genel çözümü

$$u(x) = C_1 u_1(x) + C_2 u_2(x)$$

şeklindedir, burada $u_1(x)$ ve $u_2(x)$ lineer bağımsız fonksiyonlardır. $\nu \in \mathbb{Z}$ olduğunda bu notasyon n harfi ile gösterilecektir. ν indeksli Bessel operatörü

$$\nabla_\nu = x^2 \frac{d^2}{dx^2} + x \frac{d}{dx} + x^2 - \nu^2$$

ile gösterilirse (1.14) denklemi $\nabla_\nu u = 0$ şeklinde yazılabilir. (1.14) denkleminin çözümü Frobenius yöntemiyle incelenecektir. $a_0 \neq 0$ olmak üzere (1.14) denkleminin çözümü seri formunda,

$$u(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+\alpha} \quad (1.15)$$

olarak araştırılacaktır. a_m katsayılarını ve α değerini belirlemek için (1.15) eşitliğinden elde edilen

$$\begin{aligned} u'(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} a_m (m + \alpha) x^{m+\alpha-1}, \\ u''(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} a_m (m + \alpha) (m + \alpha - 1) x^{m+\alpha-2}, \end{aligned}$$

birinci ve ikinci türevleri (1.14) denkleminde yerine yazılır ve x değişkeninin aynı kuvvetten olan terimlerine göre düzenlenirse,

$$\begin{aligned} \nabla_\nu u &= x^2 \sum_{m=0}^{\infty} a_m (m + \alpha) (m + \alpha - 1) x^{m+\alpha-2} \\ &\quad + x \sum_{m=0}^{\infty} a_m (m + \alpha) x^{m+\alpha-1} + (x^2 - \nu^2) u \\ &= [\alpha(\alpha - 1) + \alpha - \nu^2] a_0 x^\alpha + [\alpha(\alpha + 1) + (\alpha + 1) - \nu^2] a_1 x^{\alpha+1} \\ &\quad + \{[(\alpha + 2)(\alpha + 1) + (\alpha + 2) - \nu^2] a_2 + a_0\} x^{\alpha+2} + \dots \\ &= a_0 (\alpha^2 - \nu^2) x^\alpha + a_1 [(\alpha + 1)^2 - \nu^2] x^{\alpha+1} \\ &\quad + \sum_{m=2}^{\infty} \{a_m [(m + \alpha)^2 - \nu^2] + a_{m-2}\} x^{\alpha+m} \end{aligned} \quad (1.16)$$

elde edilir. Burada $\nabla_\nu u = 0$ olduğu için (1.16) eşitliğinde yer alan tüm katsayılar sıfır olur, yani

$$\begin{aligned}(\alpha^2 - \nu^2) a_0 &= 0, \\ [(\alpha + 1)^2 - \nu^2] a_1 &= 0, \\ [(m + \alpha)^2 - \nu^2] a_m + a_{m-2} &= 0, \quad m = 2, 3, 4, \dots\end{aligned}$$

olur. m nin çift ve tek değerleri için, sırasıyla

$$\begin{aligned}a_0 (\alpha^2 - \nu^2) &= 0, \\ [(\alpha + 2)^2 - \nu^2] a_2 + a_0 &= 0, \\ [(\alpha + 4)^2 - \nu^2] a_4 + a_2 &= 0, \\ &\vdots\end{aligned}\tag{1.17}$$

$$\begin{aligned}[(\alpha + 1)^2 - \nu^2] a_1 &= 0, \\ [(\alpha + 3)^2 - \nu^2] a_3 + a_1 &= 0, \\ &\vdots\end{aligned}\tag{1.18}$$

denklem sistemleri elde edilir. Burada $a_0 \neq 0$ olduğundan (1.17) sistemindeki ilk eşitlikten $(\alpha^2 - \nu^2) = 0$, yani $\alpha = \pm \nu$ olur. (1.17) sistemindeki ikinci ve sonraki eşitliklerden çift indisli a_m katsayıları a_0 katsayısına bağlı olarak

$$\begin{aligned}a_2 &= -\frac{a_0}{4(\alpha + 1)}, \\ a_4 &= -\frac{a_2}{8(\alpha + 2)} = \frac{a_0}{4.8.(\alpha + 1)(\alpha + 2)}, \\ &\vdots\end{aligned}$$

yineleme bağıntıları ile ifade edilir. Ayrıca $a_m = 0$, $m = 1, 3, 5, \dots$ olarak alınması durumunda (1.18) denklem sistemindeki eşitlikler sağlanır.

Böylece, $\alpha = \nu$ olarak alınırsa, (1.14) denkleminin bir özel çözümü

$$u_1(x) = a_0 x^\nu \left[1 - \frac{x^2}{4.1.(\nu + 1)} + \frac{x^4}{4^2.2!(\nu + 1)(\nu + 2)} - \frac{x^6}{4^3.3!(\nu + 1)(\nu + 2)(\nu + 3)} + \dots \right]$$

ve $\alpha = -\nu$ olarak alınırsa, (1.14) denkleminin diğer bir özel çözümü

$$u_2(x) = a'_0 x^{-\nu} \left[1 - \frac{x^2}{4.1.(-\nu + 1)} + \frac{x^4}{4^2.2!(-\nu + 1)(-\nu + 2)} - \frac{x^6}{4^3.3!(-\nu + 1)(-\nu + 2)(-\nu + 3)} + \dots \right]$$

olarak elde edilir. a_0 ve a'_0 sabitleri genellikle

$$a_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu + 1)}, \quad a'_0 = \frac{1}{2^{-\nu} \Gamma(-\nu + 1)}.$$

olarak kabul edilir. Gamma fonksiyonunun $x\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$ özelliği dikkate alınırsa $u_1(x)$ serisi yardımıyla ν mertebeden birinci tür Bessel fonksiyonu veya silindirik fonksiyon

$$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (x/2)^{2m}}{m! \Gamma(\nu + m + 1)} \quad (1.19)$$

ve benzer olarak, $u_2(x)$ serisi yardımıyla $-\nu$ mertebeden birinci tür Bessel fonksiyonu

$$J_{-\nu}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (x/2)^{2m}}{m! \Gamma(-\nu + m + 1)} \quad (1.20)$$

olarak tanımlanır. Özel olarak $\nu = 0$ için (1.19) ve (1.20) eşitliklerinden

$$J_0(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (x/2)^{2m}}{m! \Gamma(m + 1)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (x/2)^{2m}}{(m!)^2} \quad (1.21)$$

elde edilir (Korenev 2002, p. 7).

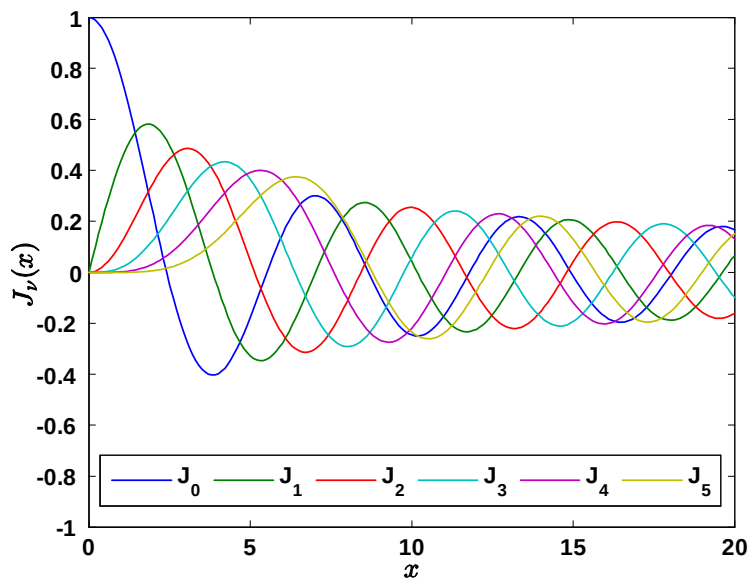
$\nu \notin \mathbb{Z}$ için $J_\nu(x)$ ve $J_{-\nu}(x)$ fonksiyonları lineer bağımsızdır. Eğer $\nu = n \in \mathbb{Z}$ ise

$$\Gamma(n) = (n - 1)!$$

olduğundan $J_n(x)$ fonksiyonu

$$J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+n}}{2^{2m+n} m! (n + m)!}$$

şeklinde yazılabilir. $\nu = 0, 1, \dots, 5$ için birinci tür Bessel fonksiyonlarının grafiği Şekil 1.1'de verilmiştir.



Şekil 1.1 Birinci tür Bessel fonksiyonları $\nu = 0, 1, \dots, 5$.

$\nu \rightarrow n \in \mathbb{Z}$ olması durumunda $J_n(x)$ ve $J_{-n}(x)$ fonksiyonları arasında

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) \quad (1.22)$$

bağıntısı olur. Gerçekten de, eğer k pozitif bir tamsayı veya sıfırsa, $s \rightarrow k$ iken $\frac{1}{\Gamma(-s)} \rightarrow 0$ olduğundan $n \in \mathbb{Z}^+$ için (1.20) serisinin ilk n terimi sıfıra eşit olur. Bu yüzden $(n+1)$ terimden başlatılarak seri yeniden yazılırsa,

$$\begin{aligned} J_{-n}(x) &= \frac{(-1)^n (x/2)^{-n+2n}}{n! \Gamma(-n+n+1)} + \frac{(-1)^{n+1} (x/2)^{-n+2n+2}}{(n+1)! \Gamma(-n+n+2)} + \dots \\ &= (-1)^n \left[\frac{(x/2)^n}{n! 0!} - \frac{(x/2)^{n+2}}{1! (n+1)!} + \frac{(x/2)^{n+4}}{2! (n+2)!} - \dots \right] \\ &= (-1)^n J_n(x) \end{aligned}$$

olduğu görülür.

$\nu \notin \mathbb{Z}$ için Bessel denkleminin genel çözümü

$$u = B_1 J_\nu(x) + B_2 J_{-\nu}(x)$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu durumda

$$Z_\nu(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 J_{-\nu}(x)$$

olmak üzere

$$u = B_3 J_\nu(x) + B_4 Z_\nu(x)$$

fonksiyonu da Bessel denkleminin bir çözümüdür. Burada $C_2 \neq 0$ olmak üzere, B_1 , B_2 , B_3 , B_4 , C_1 ve C_2 , x değişkenine bağlı değildir.

Eğer $C_1 = \cot \nu\pi$ ve $C_2 = -\csc \nu\pi$ olarak alınırsa, $Y_\nu(x)$ ile gösterilen,

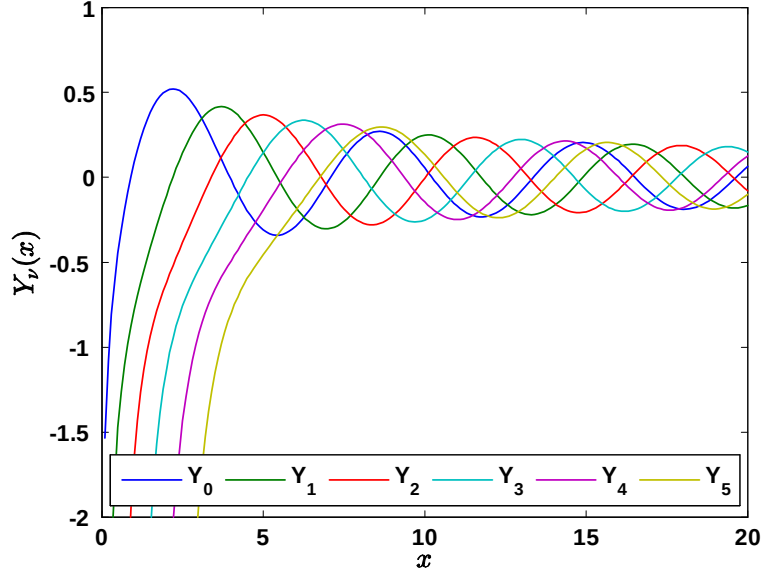
$$Y_\nu(x) = \frac{J_\nu(x) \cos \nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin \nu\pi} \quad (1.23)$$

fonksiyonu elde edilir. Bu fonksiyona genellikle Neumann fonksiyonu olarak bilinir aynı zamanda ν mertebeli ikinci tür Bessel fonksiyonu veya silindirik fonksiyon olarak da adlandırılır.

$\nu \rightarrow n \in \mathbb{Z}$ için (1.23) eşitliğinin sağ tarafında $\frac{0}{0}$ belirsizliği olup L'Hospital kuralı ile,

$$Y_n(x) = \lim_{\nu \rightarrow n} \frac{\frac{\partial}{\partial \nu} [J_\nu(x) \cos \nu\pi - J_{-\nu}(x)]}{\frac{\partial}{\partial \nu} \sin \nu\pi}$$

fonksiyonu tanımlanır. $\nu = 0, 1, \dots, 5$ için ikinci tür Bessel fonksiyonlarının grafiği Şekil 1.2'de verilmiştir. $Y_\nu(x)$ ve $J_\nu(x)$ fonksiyonları tamsayı dahil ν nin herhangi bir değeri için Bessel denkleminin temel çözüm sistemini oluştururlar.



Şekil 1.2 İkinci tür Bessel fonksiyonları $\nu = 0, 1, \dots, 5$.

Birinci ve ikinci tür Bessel fonksiyonlarının herhangi bir lineer birleşimi de Bessel denkleminin bir çözümü olup

$$H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + iY_\nu(x), \quad (1.24)$$

$$H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - iY_\nu(x) \quad (1.25)$$

fonksiyonları üçüncü tür Bessel fonksiyonları veya silindirik fonksiyonlar olarak adlandırılır. Ayrıca bu fonksiyonlar sırasıyla birinci ve ikinci tür Hankel fonksiyonları olarak da adlandırılır (Korenev 2002, pp. 7-11).

1.3 BESSEL FONKSİYONLARININ ÖZELLİKLERİ

1.3.1 Bessel Fonksiyonlarının Yineleme Bağlılıkları

Birinci tür Bessel fonksiyonları için bilinen bazı önemli yineleme bağıntıları aşağıda verilmiştir:

$$\frac{2\nu}{x} J_\nu(x) = J_{\nu+1}(x) + J_{\nu-1}(x), \quad (1.26)$$

$$2J'_\nu(x) = J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x), \quad (1.27)$$

$$xJ'_\nu(x) = \nu J_\nu(x) - xJ_{\nu+1}(x), \quad (1.28)$$

$$xJ'_\nu(x) = xJ_{\nu-1}(x) - \nu J_\nu(x), \quad (1.29)$$

$$\frac{d}{dx} \{x^\nu J_\nu(x)\} = x^\nu J_{\nu-1}(x), \quad (1.30)$$

$$\frac{d}{dx} \{x^{-\nu} J_\nu(x)\} = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x). \quad (1.31)$$

Bu bağıntıların ispatı $\nu \in \mathbb{Z}$ için verilecektir. Bessel fonksiyonlarının üreten fonksiyonu

$$e^{\frac{1}{2}x(t-\frac{1}{t})}$$

olup bu fonksiyonun t nin fonksiyonu olarak Laurent serisine açılımı yapıldığında t^ν teriminin katsayısı x argümanına bağlı ν . mertebeden Bessel fonksiyonudur ve

$$e^{\frac{1}{2}x(t-\frac{1}{t})} = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} t^\nu J_\nu(x) \quad (1.32)$$

olur (Watson 1966, p. 14). (1.32) ile verilen eşitliğin her iki tarafının t değişkenine göre türevi alınır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x \left(1 + \frac{1}{t^2}\right) e^{\frac{1}{2}x(t-\frac{1}{t})} &= \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \nu t^{\nu-1} J_\nu(x) \\ \frac{1}{2}x \left(1 + \frac{1}{t^2}\right) \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} t^\nu J_\nu(x) &= \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \nu t^{\nu-1} J_\nu(x) \\ \frac{1}{2}x \left(\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} t^\nu J_\nu(x) + \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} t^{\nu-2} J_\nu(x) \right) &= \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \nu t^{\nu-1} J_\nu(x) \\ \frac{1}{2}x \left(\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} t^{\nu+1} J_\nu(x) + \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} t^{\nu-1} J_\nu(x) \right) &= \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \nu t^\nu J_\nu(x) \\ J_{\nu+1}(x) + J_{\nu-1}(x) &= \frac{2\nu}{x} J_\nu(x) \end{aligned}$$

olur, böylece (1.26) bağıntısı elde edilmiş olur.

(1.32) eşitliğinin her iki tarafının x değişkenine göre türevi alınır ve gerekli düzenlemeler

yapılırsa,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) e^{\frac{1}{2}x(t-\frac{1}{t})} &= \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} t^{\nu} J'_{\nu}(x) \\ \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} t^{\nu} J_{\nu}(x) &= \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} t^{\nu} J'_{\nu}(x) \\ \frac{1}{2} \left(\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} t^{\nu+1} J_{\nu}(x) - \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} t^{\nu-1} J_{\nu}(x) \right) &= \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} t^{\nu} J'_{\nu}(x) \\ J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) &= 2J'_{\nu}(x)\end{aligned}$$

olur ve (1.27) bağıntısı elde edilir. Elde edilen (1.26), (1.27) bağıntılarında sırasıyla $J_{\nu-1}(x)$ ve $J_{\nu+1}(x)$ terimleri yok edilerek,

$$\begin{aligned}xJ_{\nu+1}(x) &= \nu J_{\nu}(x) - xJ'_{\nu}(x), \\ xJ_{\nu-1}(x) &= \nu J_{\nu}(x) + xJ'_{\nu}(x)\end{aligned}$$

eşitlikleri ve böylece (1.28) ve (1.29) bağıntıları elde edilir. (1.27) bağıntısında özel olarak $\nu = 0$ alınır ve (1.22) eşitliğinde $\nu = 1$ alınırsa, sırasıyla

$$\begin{aligned}2J'_0(x) &= J_{-1}(x) - J_1(x), \\ J_{-1}(x) &= -J_1(x)\end{aligned}$$

olur ve bu eşitliklerden $J_{-1}(x)$ yok edilerek

$$J'_0(x) = -J_1(x) \tag{1.33}$$

elde edilir.

(1.29) bağıntısının her iki yanını $x^{\nu-1}$ ile çarpılır ve düzenlenirse,

$$\begin{aligned}x^{\nu} J'_{\nu}(x) &= x^{\nu} J_{\nu-1}(x) - \nu x^{\nu-1} J_{\nu}(x) \\ x^{\nu} J'_{\nu}(x) + \nu x^{\nu-1} J_{\nu}(x) &= x^{\nu} J_{\nu-1}(x) \\ \frac{d}{dx} \{x^{\nu} J_{\nu}(x)\} &= x^{\nu} J_{\nu-1}(x)\end{aligned}$$

ile (1.30) bağıntısı ve aynı şekilde (1.28) bağıntısının her iki yanını $x^{-\nu-1}$ ile çarpılıp düzenlenirse,

$$\begin{aligned}x^{-\nu} J'_{\nu}(x) &= x^{-\nu-1} \nu J_{\nu}(x) - x^{-\nu} J_{\nu+1}(x) \\ x^{-\nu} J'_{\nu}(x) - x^{-\nu-1} \nu J_{\nu}(x) &= -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x) \\ \frac{d}{dx} \{x^{-\nu} J_{\nu}(x)\} &= -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x)\end{aligned}$$

ile (1.31) bağıntısı elde edilir.

(1.27) bağıntısının özel bir durumu olarak her iki tarafının x e göre türev alınır ve 2 ile çarpılırsa,

$$2^2 J_\nu''(x) = 2J_{\nu-1}'(x) - 2J_{\nu+1}'(x)$$

eşitliği elde edilir. Benzer şekilde k . mertebeden türev için,

$$2^k J_\nu^{(k)}(x) = \sum_{m=0}^k (-1)^m \binom{k}{m} J_{\nu-k+2m}(x)$$

elde edilir.

Elde edilen bu bağıntılar $J_\nu(x)$ için yineleme bağıntılarıdır. İkinci ve üçüncü tür Bessel fonksiyonları için benzer yineleme bağıntıları verilebilir (Watson 1966).

1.3.2 Bessel Fonksiyonlarının İntegral Gösterimi

Bu kısımda birinci tür Bessel fonksiyonu için bazı integral gösterimleri ifade edilecektir.

Öncelikle, $\nu \in \mathbb{Z}$ için Bessel tarafından $J_\nu(x)$ fonksiyonunun tanımı olarak da alınan

$$J_\nu(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\nu\theta - x \sin \theta) d\theta \quad (1.34)$$

eşitliğinin doğru olduğu gösterilecektir.

(1.34) ile verilen eşitlikteki integrasyon aralığı ikiye bölünür ve daha sonra ikinci integralde θ yerine $2\pi - \theta$ yazılırsa,

$$\begin{aligned} J_\nu(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \cos(\nu\theta - x \sin \theta) d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_\pi^{2\pi} \cos(\nu\theta - x \sin \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \cos(\nu\theta - x \sin \theta) d\theta - \frac{1}{2\pi} \int_\pi^0 \cos(\nu(2\pi - \theta) - x \sin(2\pi - \theta)) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \cos(\nu\theta - x \sin \theta) d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \cos(2\pi\nu - \nu\theta + x \sin \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \cos(\nu\theta - x \sin \theta) d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \cos(\nu\theta - x \sin \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(\nu\theta - x \sin \theta) d\theta \end{aligned} \quad (1.35)$$

olur. Ayrıca, (1.34) eşitliğinde yer alan integrand 2π periyoduna sahip olduğundan herhangi bir α değeri için (1.34) eşitliği,

$$J_\nu(x) = \frac{1}{2\pi} \int_\alpha^{2\pi+\alpha} \cos(\nu\theta - x \sin \theta) d\theta$$

şeklinde yazılabilir.

(1.34) eşitliğini ispatlamak için (1.32) eşitliğini $t^{-\nu-1}$ ile çarpıp orjini pozitif yönlü çevreleyen bir eğri boyunca kontür integrali alınırsa

$$\frac{1}{2\pi i} \oint^{(0+)} t^{-\nu-1} e^{\frac{1}{2}x(t-\frac{1}{t})} dt = \frac{1}{2\pi i} \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(x) \oint^{(0+)} t^{m-\nu-1} dt \quad (1.36)$$

olur ve

$$\oint^{(0+)} t^k dt = \begin{cases} 0 & , \quad k \neq -1 \\ 2\pi i & , \quad k = -1 \end{cases}$$

olduğundan yukarıdaki (1.36) eşitliğinin sağ tarafındaki integral $m = \nu$ hariç sıfır olur ve

$$\frac{1}{2\pi i} \oint^{(0+)} t^{-\nu-1} e^{\frac{1}{2}x(t-\frac{1}{t})} dt = J_\nu(x)$$

elde edilir. Kontür olarak yarı çapı bir birim olan çember alınır ve $t = e^{-i\theta}$ yazılırsa

$$\begin{aligned} J_\nu(x) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{2\pi+\alpha}^{\alpha} e^{i\theta(\nu+1)} e^{\frac{1}{2}x(e^{-i\theta}-e^{i\theta})} (-ie^{-i\theta}) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{2\pi+\alpha} e^{i(\nu\theta-x\sin\theta)} d\theta \end{aligned}$$

gösterimi elde edilir. Özel olarak, $\alpha = 0$ için

$$J_\nu(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(\nu\theta-x\sin\theta)} d\theta$$

olur. $\alpha = -\pi$ için, integrasyon aralığı ikiye bölünür ve daha sonra ilk integralde θ yerine $-\theta$ alınırsa,

$$\begin{aligned} J_\nu(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(\nu\theta-x\sin\theta)} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 e^{i(\nu\theta-x\sin\theta)} d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} e^{i(\nu\theta-x\sin\theta)} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (e^{i(\nu\theta-x\sin\theta)} + e^{-i(\nu\theta-x\sin\theta)}) d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(\nu\theta - x\sin\theta) d\theta \end{aligned}$$

elde edilir ve (1.35) eşitliği gösterilmiş olur. Böylece (1.34) eşitliğinin doğruluğu da gösterilmiş olur (Watson 1966, p. 20, Zill and Shanahan 2009, p. 225).

Birinci tür Bessel fonksiyonlarının diğer bazı integral gösterimleri aşağıdaki çizelge 1.1 ile verilmiştir.

Çizelge 1.1 Bessel fonksiyonları için bazı integral gösterimleri

$J_0(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(z \cos \theta) d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(z \sin \theta) d\theta,$	(Bessel)
$J_n(z) = \frac{i^{-n}}{\pi} \int_0^\pi e^{iz \cos \theta} \cos(n\theta) d\theta, \quad n \in \mathbb{Z},$	(Bessel)
$J_\nu(z) = \frac{\left(\frac{1}{2}z\right)^\nu}{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(\nu+\frac{1}{2})} \int_0^\pi \cos(z \cos \theta) (\sin \theta)^{2\nu} d\theta, \quad \Re \nu > -\frac{1}{2}$	(Poisson)
$J_\nu(x) = \frac{2\left(\frac{1}{2}x\right)^\nu}{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(\nu+\frac{1}{2})} \int_0^1 (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} \cos(xt) dt, \quad \Re \nu > -\frac{1}{2}$	(Poisson)
$J_\nu(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(z \sin \theta - \nu \theta) d\theta$ $- \frac{\sin(\nu\pi)}{\pi} \int_0^\infty e^{-z \sinh t - \nu t} dt, \quad phz < \frac{1}{2}\pi,$	(Schläfli)
$J_\nu(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sin(x \cosh t - \frac{1}{2}\nu\pi) \cosh(\nu t) dt,$ $ \Re \nu < 1, x > 0,$	(Mehler-Sonine)
$J_\nu(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\infty-\pi i}^{\infty+\pi i} e^{z \sinh t - \nu t} dt, \quad phz < \frac{1}{2}\pi,$	(Schläfli-Sommerfeld)

BÖLÜM 2

HANKEL DÖNÜŞÜMÜ

Bu bölümde, Hankel integral teoremi yardımıyla Hankel dönüşüm çifti tanımlanacaktır. Hankel dönüşümünün Fourier dönüşümü ile ilişkisi incelenerek Fourier dönüşümünden Hankel dönüşümü ve ters Hankel dönüşümü elde edilecektir. Ayrıca, Hankel dönüşümünün temel özellikleri ispatları ile birlikte verilecek ve bazı fonksiyonların Hankel dönüşümünün hesaplanmasına ilişkin örnekler incelenecektir.

2.1 HANKEL İNTEGRAL TEOREMİ

Bu bölümde (Sneddon 1951) kaynağı temel alınarak Hankel integral teoremi yardımıyla Hankel dönüşüm çifti tanımlanacaktır.

Tanım 2.1.1 $f:[a, b] \rightarrow R$ bir fonksiyon ve $[c, d], [a, b]$ aralığının kapalı bir alt aralığı olsun. Eğer

$$S = \left\{ \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| : \{x_i : 1 \leq i \leq n\}, x_i \in [c, d] \right\}$$

kümesi sınırlı ise f fonksiyonunun $[c, d]$ aralığındaki varyasyonu $V(f, [c, d]) = \sup S$ olarak tanımlanır. Eğer S sınırsız ise f fonksiyonunun varyasyonu sonsuzdur (∞) denir. Eğer $V(f, [c, d])$ sonlu ise f fonksiyonu $[c, d]$ üzerinde sınırlı varyasyondur denir (Rudin 1976, p. 113).

Teorem 2.1.2 (Hankel İntegral Teoremi) Eğer $\int_0^\infty f(y)dy$ integrali mutlak yakınsaksa ve $f(y)$ fonksiyonu x noktasının komşuluğunda sınırlı varyasyona sahipse, $\nu \geq -\frac{1}{2}$ için

$$\int_0^\infty J_\nu(xu) (xu)^{\frac{1}{2}} du \int_0^\infty J_\nu(yu) (yu)^{\frac{1}{2}} f(y) dy = \frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)] \quad (2.1)$$

eşitliği sağlanır.

Bu teoremin ispatı için öncelikle gerekli bazı lemmalar ifade edilerek ispatları verilecektir.

Lemma 1 Eğer λ pozitif ve sonlu bir sayı ise

$$\int_0^\lambda x J_\nu(ax) J_\nu(bx) dx = \frac{\lambda}{a^2 - b^2} [a J_{\nu+1}(\lambda a) J_\nu(\lambda b) - b J_{\nu+1}(\lambda b) J_\nu(\lambda a)]$$

eşitliği sağlanır.

İspat. Eğer

$$I_\nu(\varepsilon) = \int_\varepsilon^\lambda x J_\nu(ax) J_\nu(bx) dx$$

olarak ifade edilir,

$$\begin{aligned} I_\nu(\varepsilon) &= \int_\varepsilon^\lambda x^\nu x^{-\nu} x J_\nu(ax) J_\nu(bx) dx \\ &= \int_\varepsilon^\lambda x^{\nu+1} J_\nu(ax) x^{-\nu} J_\nu(bx) dx \end{aligned} \quad (2.2)$$

olduğu dikkate alınır ve (1.30)-(1.31) eşitlikleri kullanılırsa kısmi integrasyon uygulanarak,

$$\begin{aligned} I_\nu(\varepsilon) &= \int_\varepsilon^\lambda \frac{1}{a} x^{-\nu} J_\nu(bx) \frac{d}{dx} (x^{\nu+1} J_{\nu+1}(ax)) dx \\ &= \frac{1}{a} x^{-\nu} J_\nu(bx) x^{\nu+1} J_{\nu+1}(ax) \Big|_\varepsilon^\lambda - \int_\varepsilon^\lambda \frac{1}{a} x^{\nu+1} J_{\nu+1}(ax) (-b) x^{-\nu} J_{\nu+1}(bx) dx \\ &= \frac{1}{a} x^{-\nu} J_\nu(bx) x^{\nu+1} J_{\nu+1}(ax) \Big|_\varepsilon^\lambda + \frac{b}{a} \int_\varepsilon^\lambda x J_{\nu+1}(ax) J_{\nu+1}(bx) dx \\ &= \frac{x}{a} J_\nu(bx) J_{\nu+1}(ax) \Big|_\varepsilon^\lambda + \frac{b}{a} \int_\varepsilon^\lambda x J_{\nu+1}(ax) J_{\nu+1}(bx) dx \\ &= \frac{\lambda}{a} J_\nu(b\lambda) J_{\nu+1}(a\lambda) - \frac{\varepsilon}{a} J_\nu(b\varepsilon) J_{\nu+1}(a\varepsilon) + \frac{b}{a} I_{\nu+1}(\varepsilon) \end{aligned}$$

elde edilir.

$$I_\nu = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\nu(\varepsilon)$$

olmak üzere $\varepsilon \rightarrow 0$ için,

$$I_\nu = \frac{\lambda}{a} J_{\nu+1}(a\lambda) J_\nu(b\lambda) + \frac{b}{a} I_{\nu+1} \quad (2.3)$$

eşitliği elde edilir. (2.3) eşitliğinde a ve b yer değiştirilirse

$$I_\nu = \frac{\lambda}{b} J_{\nu+1}(b\lambda) J_\nu(a\lambda) + \frac{a}{b} I_{\nu+1} \quad (2.4)$$

olduğu görülür. (2.3) ve (2.4) eşitliklerinden $I_{\nu+1}$ yok edilerek

$$\frac{(a^2 - b^2)}{ab} I_\nu = \frac{\lambda}{b} J_{\nu+1}(a\lambda) J_\nu(b\lambda) - \frac{\lambda}{a} J_{\nu+1}(b\lambda) J_\nu(a\lambda)$$

veya

$$I_\nu = \frac{\lambda}{a^2 - b^2} [a J_{\nu+1}(\lambda a) J_\nu(\lambda b) - b J_{\nu+1}(\lambda b) J_\nu(\lambda a)]$$

olduğu görülür. ■

Bu durumda eğer

$$H_\nu(\alpha, \beta) = \int_0^\lambda J_\nu(xu) (xu)^{\frac{1}{2}} du \int_\beta^\alpha J_\nu(yu) (yu)^{\frac{1}{2}} f(y) dy \quad (2.5)$$

olarak alınırsa,

$$\begin{aligned} & \int_0^\lambda J_\nu(xu) (xu)^{\frac{1}{2}} du \int_0^\infty J_\nu(yu) (yu)^{\frac{1}{2}} f(y) dy \\ &= H_\nu(\infty, x + \delta) + H_\nu(x + \delta, x) + H_\nu(x, x - \delta) + H_\nu(x - \delta, 0) \end{aligned}$$

yazılabilir. Şimdi $\lambda \rightarrow \infty$ için $H_\nu(\alpha, \beta)$ integralinin davranışı incelenecektir.

Lemma 2 *Eğer δ küçük bir pozitif sayı ve*

$$\int_0^\infty f(y) dy$$

integrali mutlak yakınsak ise, $\lambda \rightarrow \infty$ için

$$H_\nu(x - \delta, 0) \rightarrow 0,$$

$$H_\nu(\infty, x + \delta) \rightarrow 0$$

olur.

İspat. (2.5) eşitliği $\alpha = x - \delta$, $\beta = 0$ için

$$\begin{aligned} H_\nu(x - \delta, 0) &= \int_0^\lambda J_\nu(xu) (xu)^{\frac{1}{2}} du \int_0^{x-\delta} J_\nu(yu) (yu)^{\frac{1}{2}} f(y) dy \\ &= x^{\frac{1}{2}} \int_0^{x-\delta} y^{\frac{1}{2}} f(y) dy \int_0^\lambda J_\nu(xu) J_\nu(yu) u du \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir ve eşitliğin sağ tarafındaki integral için Lemma 1 kullanılırsa

$$H_\nu(x - \delta, 0) = x^{\frac{1}{2}} \lambda \int_0^{x-\delta} \frac{x J_{\nu+1}(\lambda x) J_\nu(\lambda y) - y J_{\nu+1}(\lambda y) J_\nu(\lambda x)}{x^2 - y^2} y^{\frac{1}{2}} f(y) dy \quad (2.6)$$

elde edilir.

$z \gg 1$ için

$$J_\nu(z) = \frac{A \cos z - B \sin z}{z^{\frac{1}{2}}} + O\left(z^{-\frac{3}{2}}\right) \quad (2.7)$$

olup (2.6) eşitliğinde (2.7) kullanılırsa, herhangi sabit x ve δ için

$$H_\nu(x - \delta, 0) = O(\lambda^{\frac{1}{2}}) \int_0^{x-\delta} \frac{J_\nu(\lambda y)}{x^2 - y^2} y^{\frac{1}{2}} f(y) dy + O(\lambda^{\frac{1}{2}}) \int_0^{x-\delta} \frac{J_{\nu+1}(\lambda y)}{x^2 - y^2} y^{\frac{3}{2}} f(y) dy$$

olur.

$$\int_0^{x-\delta} \frac{J_\nu(\lambda y)}{x^2 - y^2} y^{\frac{1}{2}} f(y) dy = \int_{\frac{1}{\lambda}}^{x-\delta} y^{\frac{1}{2}} J_\nu(\lambda y) \frac{f(y)}{x^2 - y^2} dy + \int_0^{\frac{1}{\lambda}} y^{\frac{1}{2}} J_\nu(\lambda y) \frac{f(y)}{x^2 - y^2} dy \quad (2.8)$$

yazılır ve (2.8) eşitliğinin sağ tarafındaki ikinci terim, $\int_0^\infty |f(y)| dy$ integrali yakınsak, yani $\int_0^\infty f(y) dy$ integrali mutlak yakınsak olduğunda,

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{\lambda}} y^{\frac{1}{2}} J_\nu(\lambda y) \frac{f(y)}{x^2 - y^2} dy &= O \left[\int_0^{\frac{1}{\lambda}} (\lambda y)^\nu y^{\frac{1}{2}} |f(y)| dy \right] \\ &= O \left[\lambda^\nu \int_0^{\frac{1}{\lambda}} y^{\nu+\frac{1}{2}} |f(y)| dy \right] \\ &= O \left[\lambda^{-\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{1}{\lambda}} |f(y)| dy \right] \\ &= O \left(\lambda^{-\frac{1}{2}} \right) \end{aligned} \quad (2.9)$$

olur. (2.8) eşitliğinin sağ tarafındaki birinci terim için de (2.7) eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{\lambda}}^{x-\delta} y^{\frac{1}{2}} J_\nu(\lambda y) \frac{f(y)}{x^2 - y^2} dy &= \lambda^{-\frac{1}{2}} \int_{\frac{1}{\lambda}}^{x-\delta} (A \cos \lambda y + B \sin \lambda y) \frac{f(y)}{x^2 - y^2} dy \\ &= O \left(\lambda^{-\frac{1}{2}} \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece,

$$H_\nu(x - \delta, 0) = O(\lambda^{-\frac{1}{2}})$$

sonucuna ulaşılır ve $\lambda \rightarrow \infty$ için

$$H_\nu(x - \delta, 0) \rightarrow 0 \quad (2.10)$$

olduğu görülür. $\lambda \rightarrow \infty$ için

$$H_\nu(\infty, x + \delta) \rightarrow 0 \quad (2.11)$$

ifadesinin ispatı benzerdir. ■

Lemma 3 Eğer $f(y)$ fonksiyonu yeterince küçük δ için $(x - \delta, x + \delta)$ aralığı üzerinde sınırlı varyasyona sahipse ve $\nu \geq -\frac{1}{2}$ ise $\lambda \rightarrow \infty$, $\delta \rightarrow 0$ için

$$\begin{aligned} H_\nu(x + \delta, x) &\rightarrow \frac{1}{2}f(x + 0), \\ H_\nu(x, x - \delta) &\rightarrow \frac{1}{2}f(x - 0) \end{aligned}$$

sağlanır.

İspat. Eğer $f(y)$ fonksiyonu $(x - \delta, x + \delta)$ aralığında sınırlı varyasyona sahipse $(x < y \leq x + \delta)$ $y^{-\nu-\frac{1}{2}}f(y)$ fonksiyonu da sınırlı varyasyona sahiptir ve

$$y^{-\nu-\frac{1}{2}}f(y) = x^{-\nu-\frac{1}{2}}f(x + 0) + \chi_1(y) - \chi_2(y)$$

yazılabilir. Burada, $\chi_1(y)$ ve $\chi_2(y)$ fonksiyonları y değişkenine bağlı pozitif artan fonksiyonlardır ve her biri δ ya bağlı olan pozitif bir ε sayısından küçüktür. (2.5) eşitliğinde $\alpha = x + \delta$ ve $\beta = x$ için integral düzenlenirse

$$\begin{aligned} H_\nu(x + \delta, x) &= x^{-\nu}f(x + 0) \int_0^\lambda J_\nu(xu)u du \int_x^{x+\delta} J_\nu(yu)y^{\nu+1}dy \\ &\quad + x^{\frac{1}{2}} \int_0^\lambda u J_\nu(xu)du \int_x^{x+\delta} J_\nu(yu)y^{\nu+1} [\chi_1(y) - \chi_2(y)] dy \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} H_\nu(x + \delta, x) &= x^{-\nu}f(x + 0) \int_0^\lambda J_\nu(xu)u du \int_x^{x+\delta} J_\nu(yu)y^{\nu+1}dy \\ &\quad + x^{\frac{1}{2}} \int_0^\lambda u J_\nu(xu)du \int_x^{x+\delta} J_\nu(yu)y^{\nu+1} \chi_1(y) dy \\ &\quad - x^{\frac{1}{2}} \int_0^\lambda u J_\nu(xu)du \int_x^{x+\delta} J_\nu(yu)y^{\nu+1} \chi_2(y) dy \end{aligned} \tag{2.12}$$

ile verilen eşitliğin sağ tarafındaki birinci terim (1.30) kullanılarak,

$$\begin{aligned} &x^{-\nu}f(x + 0) \int_0^\lambda J_\nu(xu)u du \int_x^{x+\delta} J_\nu(yu)y^{\nu+1}dy \\ &= x^{-\nu}f(x + 0) \int_0^\lambda J_\nu(xu) [J_{\nu+1}(xu + \delta u)(x + \delta)^{\nu+1} \\ &\quad - J_{\nu+1}(xu)x^{\nu+1}] du \\ &= x^{-\nu}f(x + 0) \left[(x + \delta)^{\nu+1} \int_0^\lambda J_\nu(xu)J_{\nu+1}(xu + \delta u) du \right. \\ &\quad \left. - x^{\nu+1} \int_0^\lambda J_\nu(xu)J_{\nu+1}(xu) du \right] \end{aligned}$$

şeklinde düzenlenir ve bu terim

$$\int_0^\infty J_\nu(ax) J_{\nu+1}(x) dx = \begin{cases} a^\nu & , \quad 0 < a < 1 \\ \frac{1}{2} & , \quad a = 1 \\ 0 & , \quad a > 1 \end{cases}$$

eşitliğinden $\lambda \rightarrow \infty$ için

$$x^{-\nu} f(x+0) \left(x^\nu - \frac{1}{2} x^\nu \right) = \frac{1}{2} f(x+0) \quad (2.13)$$

değerine yakınsar. (2.12) eşitliğinin $\chi_1(y)$ fonksiyonunu içeren terimi $x < \xi < x + \delta$ için

$$\begin{aligned} & x^{\frac{1}{2}} \int_0^\lambda J_\nu(xu) u du \int_x^{x+\delta} J_\nu(yu) y^{\nu+1} \chi_1(y) dy \\ &= x^{\frac{1}{2}} \chi_1(x+\delta) \int_\xi^{x+\delta} y^{\nu+1} dy \int_0^\lambda J_\nu(xu) J_\nu(yu) u du \\ &= x^{\frac{1}{2}} \chi_1(x+\delta) \int_0^\lambda J_\nu(xu) u du \int_\xi^{x+\delta} y^{\nu+1} J_\nu(yu) dy \end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Burada

$$\int_\xi^{x+\delta} y^{\nu+1} J_\nu(yu) dy$$

ifadesi, Bessel fonksiyonunun

$$\int_0^\alpha x^n J_{n-1}(x) dx = [x^n J_n(x)]_0^\alpha = \alpha^n J_n(\alpha), \quad n > 0$$

özellği kullanılarak,

$$\int_\xi^{x+\delta} y^{\nu+1} J_\nu(yu) dy = \frac{1}{u} [(x+\delta)^{\nu+1} J_{\nu+1}(xu+\delta u) - \xi^{\nu+1} J_{\nu+1}(\xi u)]$$

olarak yazılır ve

$$\begin{aligned} & x^{\frac{1}{2}} \int_0^\lambda u J_\nu(xu) du \int_x^{x+\delta} J_\nu(yu) y^{\nu+1} \chi_1(y) dy \\ &= x^{\frac{1}{2}} \chi_1(x+\delta) \int_0^\lambda J_\nu(xu) du [(x+\delta)^{\nu+1} J_{\nu+1}(xu+\delta u) - \xi^{\nu+1} J_{\nu+1}(\xi u)] \\ &= x^{\frac{1}{2}} (x+\delta)^{\nu+1} \chi_1(x+\delta) \int_0^\lambda J_\nu(xu) J_{\nu+1}(xu+\delta u) du \\ &\quad - x^{\frac{1}{2}} \xi^{\nu+1} \chi_1(x+\delta) \int_0^\lambda J_\nu(xu) J_{\nu+1}(\xi u) du \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi eğer $x \geq x_0 > 0$, $y \geq x_0$, $\nu \geq -\frac{1}{2}$ ise tüm λ değerleri için

$$\int_0^\lambda J_\nu(xu) J_{\nu+1}(yu) du = O(1)$$

olup $\chi_1(y)$ fonksiyonunu içeren terim ε mertebededir ve tüm λ değerleri için $\delta \rightarrow 0$ iken sıfıra yakınsar.

Benzer olarak, $\chi_2(y)$ fonksiyonunu içeren (2.12) eşitliğindeki üçüncü terim $\delta \rightarrow 0$ ve $\lambda \rightarrow \infty$ için sıfıra yakınsar. Bu nedenle (2.13) eşitliğinden, $\delta \rightarrow 0$ ve $\lambda \rightarrow \infty$ iken

$$H_\nu(x + \delta, x) \rightarrow \frac{1}{2}f(x + 0) \quad (2.14)$$

olduğu görülür. Lemmanın ikinci kısmı, $\delta \rightarrow 0$ ve $\lambda \rightarrow \infty$ iken

$$H_\nu(x, x - \delta) \rightarrow \frac{1}{2}f(x - 0), \quad (2.15)$$

olduğu, benzer şekilde ispatlanabilir. ■

İspat (Hankel İntegral Teoreminin ispatı). Teoremin ispatı Lemma 2 ve Lemma 3 uygulanarak doğrudan gösterilebilir. Eğer

$$\begin{aligned} & \int_0^\lambda J_\nu(xu) (xu)^{\frac{1}{2}} du \int_0^\infty J_\nu(yu) (yu)^{\frac{1}{2}} f(y) dy \\ &= H_\nu(\infty, x + \delta) + H_\nu(x + \delta, x) + H_\nu(x, x - \delta) + H_\nu(x - \delta, 0) \end{aligned}$$

eşitliği yazılır ve δ sayısı, $f(y)$ fonksiyonu $x - \delta \leq y \leq x + \delta$ üzerinde sınırlı varyasyona sahip olacak şekilde küçük seçilirse $\nu \geq -\frac{1}{2}$ için Lemma 2 ve Lemma 3'te yer alan tüm şartlar sağlanır. $\lambda \rightarrow \infty$ ve $\delta \rightarrow 0$ için (2.10), (2.11), (2.14) ve (2.15) kullanılarak Hankel integral teoreminin ispatı tamamlanır. ■

Eğer $f(x)$ fonksiyonu x noktasında sürekliyse

$$f(x + 0) = f(x - 0) = f(x)$$

olduğundan (2.1) eşitliği,

$$f(x) = \int_0^\infty J_\nu(xu) (xu)^{\frac{1}{2}} du \int_0^\infty J_\nu(yu) (yu)^{\frac{1}{2}} f(y) dy$$

şeklinde yazılır. Burada $f(x)$ yerine $x^{\frac{1}{2}}f(x)$ ifadesi yazılırsa,

$$\begin{aligned} x^{\frac{1}{2}}f(x) &= \int_0^\infty J_\nu(xu) (xu)^{\frac{1}{2}} du \int_0^\infty J_\nu(yu) (yu)^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} f(y) dy \\ x^{\frac{1}{2}}f(x) &= x^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty J_\nu(xu) u^{\frac{1}{2}} du \int_0^\infty J_\nu(yu) u^{\frac{1}{2}} y f(y) dy \\ f(x) &= \int_0^\infty J_\nu(xu) u du \int_0^\infty J_\nu(yu) y f(y) dy \end{aligned}$$

olur ve

$$\bar{f}(u) = \int_0^\infty J_\nu(yu) y f(y) dy \quad (2.16)$$

olarak alınır

$$f(x) = \int_0^\infty J_\nu(xu) u \bar{f}(u) du \quad (2.17)$$

olduğu görülür. Burada (2.16) ve (2.17) eşitlikleri Hankel dönüşüm çifti olarak adlandırılır (Sneddon 1951, pp. 48 – 53).

Tanım 2.1.3 $0 < y < \infty$ olmak üzere $f(y)$ fonksiyonunun Hankel dönüşümü

$$F_\nu(u) = H_\nu \{f(y)\} = \int_0^\infty f(y) y J_\nu(uy) dy \quad (2.18)$$

eşitliği ile tanımlanır. J_ν fonksiyonu ν . mertebeden birinci tür Bessel fonksiyonu olmak üzere, $y J_\nu(uy)$ fonksiyonuna Hankel dönüşümünün çekirdek fonksiyonu, $H_\nu \{f(y)\} = F_\nu(u)$ fonksiyonuna ise $f(y)$ fonksiyonunun ν . mertebeden Hankel dönüşümü denir (Piessens 2010, p. 9/2).

Tanım 2.1.4 (Ters Hankel Dönüşümü) $0 < y < \infty$ olmak üzere $f(y)$ fonksiyonunun Hankel Dönüşümü

$$F_\nu(u) = H_\nu \{f(y)\} = \int_0^\infty f(y) y J_\nu(uy) dy$$

olmak üzere, $F_\nu(u)$ fonksiyonunun ters Hankel dönüşümü olan $f(y)$ fonksiyonunu veren integral dönüşümü

$$f(y) = H_\nu^{-1} \{F_\nu(u)\} = \int_0^\infty F_\nu(u) u J_\nu(yu) du \quad (2.19)$$

ile verilir.

2.2 HANKEL DÖNÜŞÜMÜNÜN FOURIER DÖNÜŞÜMÜ İLE BAĞINTISI

Bu bölümde iki boyutlu Fourier dönüşümünün sıfıncı mertebeden Hankel dönüşümüne eş değer olduğu gösterilecek ardından n . mertebeden Hankel dönüşümü ile Fourier dönüşümü arasındaki ilişki incelenecektir.

Fourier dönüşümü tanımından iki değişkenli $f(y, z)$ fonksiyonunun Fourier ve ters Fourier dönüşümü sırasıyla,

$$F(q, r) = \mathcal{F}\{f(y, z)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(y, z) e^{i(qy+rz)} dy dz, \quad (2.20)$$

$$f(y, z) = \mathcal{F}^{-1}\{F(q, r)\} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(q, r) e^{-i(qy+rz)} dq dr \quad (2.21)$$

eşitlikleriyle ifade edilir ve bu eşitliklerde kartezyen sistemden kutupsal sisteme geçiş için,

$$q = s \cos \alpha,$$

$$r = s \sin \alpha, \quad 0 \leq \alpha < 2\pi, \quad 0 \leq s < \infty$$

$$y = x \cos \theta,$$

$$z = x \sin \theta, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad 0 \leq x < \infty$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} qy + rz &= s(\cos \alpha) x(\cos \theta) + s(\sin \alpha) x(\sin \theta) \\ &= sx \cos \alpha \cos \theta + sx \sin \alpha \sin \theta \\ &= sx(\cos \alpha \cos \theta + \sin \alpha \sin \theta) \\ &= sx \cos(\alpha - \theta) \end{aligned}$$

dönüşümleri tanımlanır ve (2.20) ve (2.21) eşitlikleri sırasıyla,

$$F(s, \alpha) = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} f(x, \theta) e^{isx \cos(\alpha - \theta)} x d\theta dx \quad (2.22)$$

$$f(x, \theta) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} F(s, \alpha) e^{-isx \cos(\alpha - \theta)} s d\alpha ds \quad (2.23)$$

şeklinde ifade edilir.

(2.22) eşitliğinde $f(x, \theta)$ fonksiyonu dairesel simetri gösteren bir fonksiyon, yani verilen $f(x, \theta)$ ifadesi θ açısından bağımsız olması durumunda; $f(x, \theta) = f(x)$ olup $\varphi = \alpha - \theta - \frac{\pi}{2}$ değişken değişimi uygulandığında,

$$\begin{aligned} F(s, \alpha) &= \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} f(x) e^{isx \cos(\alpha - \theta)} x d\theta dx \\ &= \int_0^{\infty} x f(x) \left[\int_0^{2\pi} e^{isx \cos(\alpha - \theta)} d\theta \right] dx \\ &= \int_0^{\infty} x f(x) \left[\int_0^{2\pi} e^{isx \cos(\varphi + \frac{\pi}{2})} d\varphi \right] dx \\ &= \int_0^{\infty} x f(x) \left[\int_0^{2\pi} e^{-isx \sin \varphi} d\varphi \right] dx \end{aligned}$$

olur ve burada

$$\int_0^{2\pi} e^{-isx \sin \varphi} d\varphi = 2\pi J_0(sx)$$

olduğundan eşitlik

$$F(s) = 2\pi \int_0^\infty x f(x) J_0(sx) dx \quad (2.24)$$

şeklinde yazılır. (2.24) eşitliliğinde, integral $f(x)$ fonksiyonunun sıfıncı mertebeden Hankel dönüşümünü verir ve

$$F(s) = 2\pi F_0(s)$$

olduğu görülür.

(2.23) eşitliğinde $F(s)$ yerine $2\pi F_0(s)$ yazılırsa,

$$\begin{aligned} f(x, \theta) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} 2\pi F_0(s) e^{-isx \cos(\alpha-\theta)} s d\alpha ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty s F_0(s) \left[\int_0^{2\pi} e^{-isx \cos(\alpha-\theta)} d\alpha \right] ds \end{aligned}$$

olur ve eşitliğin sağ tarafında $\psi = \theta - \alpha + \frac{\pi}{2}$ için dönüşümü uygulanırsa

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty s F_0(s) \left[\int_0^{2\pi} e^{-isx \cos(\psi-\frac{\pi}{2})} d\psi \right] ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty s F_0(s) \left[\int_0^{2\pi} e^{-isx \sin \psi} d\psi \right] ds \end{aligned}$$

elde edilir. Bessel fonksiyonunun integral gösteriminden

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty s F_0(s) 2\pi J_0(sx) ds$$

yazılır ve

$$f(x) = \int_0^\infty s F_0(s) J_0(sx) ds = H_0^{-1} \{F_0(s)\}$$

eşitliğiyle Fourier dönüşümü ile sıfıncı mertebeden ters Hankel dönüşümü arasındaki ilişki gösterilmiş olur.

Şimdi n . mertebeden Hankel dönüşümü ile Fourier dönüşümü arasında ilişki için (2.22) eşitliğinde $f(x, \theta)$ fonksiyonu için θ yerine $f(x)e^{-in\theta}$ yazılırsa ve $\varphi = \alpha - \theta - \frac{\pi}{2}$ dönüşümü

uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
F(s, \alpha) &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} f(x) e^{-in\theta} e^{isx \cos(\alpha-\theta)} x d\theta dx \\
&= \int_0^\infty x f(x) \left[\int_0^{2\pi} e^{i(-n\theta+sx \cos(\alpha-\theta))} d\theta \right] dx \\
&= \int_0^\infty x f(x) \left[\int_0^{2\pi} e^{i(n(\varphi-\alpha+\frac{\pi}{2})+sx \cos(\varphi+\frac{\pi}{2}))} d\varphi \right] dx \\
&= \int_0^\infty x f(x) \left[\int_0^{2\pi} e^{i(n(\varphi-\alpha+\frac{\pi}{2})-sx \sin \varphi)} d\varphi \right] dx \\
&= \int_0^\infty x f(x) e^{in(\frac{\pi}{2}-\alpha)} \left[\int_0^{2\pi} e^{i(n\varphi-sx \sin \varphi)} d\varphi \right] dx
\end{aligned}$$

olur ve burada

$$\int_0^{2\pi} e^{i(n\varphi-sx \sin \varphi)} d\varphi = 2\pi J_n(sx)$$

olduğundan eşitlik

$$\begin{aligned}
F(s, \alpha) &= \int_0^\infty x f(x) e^{in(\frac{\pi}{2}-\alpha)} 2\pi J_n(sx) dx \\
&= 2\pi e^{in(\frac{\pi}{2}-\alpha)} \int_0^\infty x f(x) J_n(sx) dx
\end{aligned} \tag{2.25}$$

şeklinde yazılır. (2.25) eşitliğinde, integral $f(x)$ fonksiyonunun $H_n\{f(x)\} = F_n(s)$ Hankel dönüşümünü verir ve

$$F(s, \alpha) = 2\pi e^{in(\frac{\pi}{2}-\alpha)} F_n(s)$$

olduğu görülür.

(2.23) eşitliğinde $f(x, \theta) = f(x) e^{-in\theta}$ yazılır ve $F(s, \alpha)$ yerine $2\pi e^{in(\frac{\pi}{2}-\alpha)} F_n(s)$ yazılırsa,

$$\begin{aligned}
f(x) e^{-in\theta} &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} 2\pi e^{in(\frac{\pi}{2}-\alpha)} F_n(s) e^{-isx \cos(\alpha-\theta)} s d\alpha ds \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty s F_n(s) \left[\int_0^{2\pi} e^{in(\frac{\pi}{2}-\alpha)-isx \cos(\alpha-\theta)} d\alpha \right] ds
\end{aligned}$$

olur ve eşitliğin sağ tarafında $\psi = \theta - \alpha + \frac{\pi}{2}$ için dönüşümü uygulanırsa

$$\begin{aligned}
f(x) e^{-in\theta} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty s F_n(s) \left[\int_0^{2\pi} e^{in(\psi-\theta)-isx \cos(\psi-\frac{\pi}{2})} d\psi \right] ds \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty s F_n(s) e^{-in\theta} \left[\int_0^{2\pi} e^{i(n\psi-sx \sin \psi)} d\psi \right] ds
\end{aligned}$$

elde edilir. Bessel fonksiyonunun integral gösteriminden

$$f(x) e^{-in\theta} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty s F_n(s) e^{-in\theta} 2\pi J_n(sx) ds$$

yazılır ve

$$\begin{aligned} f(x)e^{-in\theta} &= e^{-in\theta} \int_0^\infty sF_n(s)J_n(sx)ds \\ f(x) &= \int_0^\infty sF_n(s)J_n(sx)ds \end{aligned}$$

olduğu görülür. Böylelikle $H_n\{f(x)\} = F_n(s)$ fonksiyonunun ters Hankel dönüşümü olan $f(x)$ fonksiyonunu veren ters Hankel dönüşümü elde edilmiş olur (Davies 2001, p. 230).

2.3 HANKEL DÖNÜŞÜMÜNÜN TEMEL ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde Hankel dönüşümünün temel işlemsel özellikleri ispatları ile birlikte verilecektir.

Teorem 2.3.1 $r > 0$, α ve β iki sabit sayı, $H_\nu\{f(r)\} = F_\nu(s)$ ve $H_\nu\{g(r)\} = G_\nu(s)$ olmak üzere,

a. Lineerlik Özelliği:

$$H_\nu\{\alpha f(r) + \beta g(r)\} = \alpha F_\nu(s) + \beta G_\nu(s).$$

b. Ölçekleme (Scaling) Özelliği:

$$H_\nu\{f(ar)\} = \frac{1}{a^2} F_\nu\left(\frac{s}{a}\right), \quad a > 0. \quad (2.26)$$

c. r ile Bölme Özelliği:

$$H_\nu\{r^{-1}f(r)\} = \frac{s}{2\nu} [F_{\nu+1}(s) + F_{\nu-1}(s)], \quad \nu \geq 1.$$

İspat.

a. Eşitliğin ispatı için $\alpha f(r) + \beta g(r)$ ifadesinin Hankel dönüşümü alınır ve düzenlenirse

$$\begin{aligned} H_\nu\{\alpha f(r) + \beta g(r)\} &= \int_0^\infty r(\alpha f(r) + \beta g(r))J_\nu(rs)dr \\ &= \int_0^\infty (r\alpha f(r)J_\nu(rs) + r\beta g(r)J_\nu(rs))dr \\ &= \alpha \int_0^\infty rf(r)J_\nu(rs)dr + \beta \int_0^\infty rg(r)J_\nu(rs)dr \\ &= \alpha F_\nu(s) + \beta G_\nu(s) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece Hankel dönüşümünün lineer olduğu görülür.

b. Eşitliğin ispatı için $f(ar)$ fonksiyonunun Hankel dönüşümü

$$H_\nu\{f(ar)\} = \int_0^\infty rf(ar)J_\nu(rs)dr \quad (2.27)$$

ile verilir. (2.27) eşitliğinde $ar = k$ dönüşümü yapılsa,

$$\begin{aligned} H_\nu \{f(ar)\} &= \int_0^\infty \frac{k}{a} f(k) J_\nu\left(\frac{ks}{a}\right) \frac{1}{a} dk \\ &= \frac{1}{a^2} \int_0^\infty k f(k) J_\nu\left(\frac{k}{a}s\right) dk \\ &= \frac{1}{a^2} F_\nu\left(\frac{s}{a}\right) \end{aligned}$$

elde edilir (Debnath and Bhatta 2010 p. 319).

c. Eşitliğin ispatı için $r^{-1}f(r)$ ifadesinin Hankel dönüşümü

$$H_\nu \{r^{-1}f(r)\} = \int_0^\infty r \frac{1}{r} f(r) J_\nu(rs) dr = \int_0^\infty f(r) J_\nu(rs) dr \quad (2.28)$$

ile verilir. Bessel fonksiyonunun yineleme bağıntısı olan (1.26) eşitliğinden $x = rs$ için

$$J_\nu(rs) = \frac{rs}{2\nu} (J_{\nu+1}(rs) + J_{\nu-1}(rs)) \quad (2.29)$$

elde edilir. Oluşan $J_\nu(rs)$ eşitliğini (2.28) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} H_\nu \{r^{-1}f(r)\} &= \int_0^\infty f(r) \frac{s}{2\nu} [r J_{\nu+1}(rs) + r J_{\nu-1}(rs)] dr \\ &= \frac{s}{2\nu} \int_0^\infty f(r) [r J_{\nu+1}(rs) + r J_{\nu-1}(rs)] dr \\ &= \frac{s}{2\nu} \left[\int_0^\infty f(r) r J_{\nu+1}(rs) dr + \int_0^\infty f(r) r J_{\nu-1}(rs) dr \right] \\ &= \frac{s}{2\nu} [F_{\nu+1}(s) + F_{\nu-1}(s)] \end{aligned}$$

elde edilir (Piessens 2010, p. 9/4). ■

Teorem 2.3.2 (Türevin Hankel Dönüşümü) $\nu \geq 1$ için $H_\nu \{f(r)\} = F_\nu(s)$ dönüşümü var ve $rf(r)$ fonksiyonu için $\lim_{r \rightarrow 0} rf(r) = 0$, $\lim_{r \rightarrow \infty} rf(r) = 0$ ise $f(r)$ fonksiyonunun türevinin Hankel dönüşümü

$$H_\nu \{f'(r)\} = \frac{s}{2\nu} [(\nu - 1) F_{\nu+1}(s) - (\nu + 1) F_{\nu-1}(s)] \quad (2.30)$$

eşitliği ile verilir.

İspat. $H_\nu \{f(r)\} = F_\nu(s)$ olmak üzere $f'(r)$ ifadesinin uygun şartlarda Hankel dönüşümü

$$H_\nu \{f'(r)\} = \int_0^\infty f'(r) r J_\nu(rs) dr$$

ile verilir. Verilen denklemde kısmi integrasyon uygulandığında,

$$\begin{aligned}
H_\nu \{f'(r)\} &= r J_\nu(rs) f(r)|_0^\infty - \int_0^\infty f(r) \frac{d}{dr} (r J_\nu(rs)) dr \\
&= - \int_0^\infty [J_\nu(rs) + rs J'_\nu(rs)] f(r) dr
\end{aligned} \tag{2.31}$$

olur. Bessel fonksiyonunun yineleme bağıntısı olan (1.29) eşitliğinde $x = sr$ alınıp eşitliğin her iki tarafına $J_\nu(sr)$ fonksiyonu eklenirse,

$$\begin{aligned}
rs J'_\nu(sr) &= -\nu J_\nu(sr) + rs J_{\nu-1}(sr) \\
rs J'_\nu(sr) + J_\nu(sr) &= J_\nu(sr) - \nu J_\nu(sr) + rs J_{\nu-1}(sr) \\
&= (1 - \nu) J_\nu(sr) + rs J_{\nu-1}(sr)
\end{aligned} \tag{2.32}$$

eşitliği elde edilir. Elde edilen eşitlik (2.31) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
H_\nu \{f'(r)\} &= - \int_0^\infty [(1 - \nu) J_\nu(sr) + rs J_{\nu-1}(sr)] f(r) dr \\
&= \int_0^\infty (\nu - 1) J_\nu(sr) f(r) dr - \int_0^\infty rs J_{\nu-1}(sr) f(r) dr \\
&= \int_0^\infty (\nu - 1) J_\nu(sr) f(r) dr - s F_{\nu-1}(s)
\end{aligned} \tag{2.33}$$

olur. $J_\nu(sr)$ Bessel fonksiyonunun yineleme bağıntısı olan (1.26) eşitliğinden $x = sr$ için,

$$J_\nu(sr) = \frac{sr}{2\nu} [J_{\nu-1}(sr) + J_{\nu+1}(sr)]$$

olur ve (2.33) eşitliğinde yerine yazılırsa ve düzenlenirse,

$$\begin{aligned}
H_\nu \{f'(r)\} &= \int_0^\infty (\nu - 1) J_\nu(sr) f(r) dr - s F_{\nu-1}(s) \\
&= \frac{s(\nu - 1)}{2\nu} \int_0^\infty r [J_{\nu-1}(sr) + J_{\nu+1}(sr)] f(r) dr - s F_{\nu-1}(s) \\
&= \frac{s(\nu - 1)}{2\nu} \left[\int_0^\infty r J_{\nu-1}(sr) f(r) dr + \int_0^\infty r J_{\nu+1}(sr) f(r) dr \right] - s F_{\nu-1}(s) \\
&= \frac{s(\nu - 1)}{2\nu} [F_{\nu-1}(s) + F_{\nu+1}(s)] - s F_{\nu-1}(s) \\
&= \frac{s}{2\nu} [(\nu - 1) F_{\nu-1}(s) + (\nu - 1) F_{\nu+1}(s) - 2\nu F_{\nu-1}(s)] \\
&= \frac{s}{2\nu} [(\nu - 1) F_{\nu+1}(s) - (\nu + 1) F_{\nu-1}(s)]
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece bir fonksiyonun Hankel dönüşümü ile bu fonksiyonun türevinin Hankel dönüşümü arasındaki bağıntıyı veren eşitlik elde edilir (Debnath and Bhatta 2010 p. 320).

■

Buradan hareketle $f(r)$ fonksiyonunun ikinci türevinin Hankel dönüşümünü veren bağıntı,

$$\begin{aligned}
H_\nu \{f''(r)\} &= \frac{s}{2\nu} [(\nu-1)H_{\nu+1} \{f'(r)\} - (\nu+1)H_{\nu-1} \{f'(r)\}], \\
&= \frac{s}{2\nu} \left[(\nu-1) \left(\frac{s}{2(\nu+1)} [\nu F_{\nu+2}(s) - (\nu+2)F_\nu(s)] \right) \right. \\
&\quad \left. - (\nu+1) \left(\frac{s}{2(\nu-1)} [(\nu-2)F_\nu(s) - \nu F_{\nu-2}(s)] \right) \right], \\
&= \frac{s^2}{4} \frac{\nu-1}{\nu(\nu+1)} [\nu F_{\nu+2}(s) - (\nu+2)F_\nu(s)] \\
&\quad - \frac{s^2}{4} \frac{\nu+1}{\nu(\nu-1)} [(\nu-2)F_\nu(s) - \nu F_{\nu-2}(s)], \\
&= \frac{s^2}{4} \frac{(\nu-1)F_{\nu+2}(s)}{\nu+1} - \frac{s^2}{4} \frac{(\nu-1)(\nu+2)F_\nu(s)}{\nu(\nu+1)} \\
&\quad - \frac{s^2}{4} \frac{(\nu+1)(\nu-2)F_\nu(s)}{\nu(\nu-1)} + \frac{s^2}{4} \frac{(\nu+1)F_{\nu-2}(s)}{\nu-1}, \\
&= \frac{s^2}{4} \frac{(\nu-1)F_{\nu+2}(s)}{\nu+1} - \frac{s^2}{4} \frac{(\nu-1)^2(\nu+2)F_\nu(s)}{\nu(\nu+1)(\nu-1)} \\
&\quad - \frac{s^2}{4} \frac{(\nu+1)^2(\nu-2)F_\nu(s)}{\nu(\nu+1)(\nu-1)} + \frac{s^2}{4} \frac{(\nu+1)F_{\nu-2}(s)}{\nu-1},
\end{aligned}$$

olur ve

$$H_\nu \{f''(r)\} = \frac{s^2}{4} \left[\frac{\nu+1}{\nu-1} F_{\nu-2}(s) - 2 \frac{\nu^2-3}{\nu^2-1} F_\nu(s) + \frac{\nu-1}{\nu+1} F_{\nu+2}(s) \right] \quad (2.34)$$

eşitliği ile verilir (Debnath and Bhatta 2010 p. 321).

Sonuç 2.3.3 (2.30) formülü kullanılarak $\nu = 1, 2, 3$ için elde edilen formüller aşağıda verilmiştir;

$$\begin{aligned}
H_1 \left\{ \frac{d}{dr} f(r) \right\} &= -s F_0(s), \\
H_2 \left\{ \frac{d}{dr} f(r) \right\} &= \frac{s}{4} [F_3(s) - 3F_1(s)], \\
H_3 \left\{ \frac{d}{dr} f(r) \right\} &= \frac{s}{6} [2F_4(s) - 4F_2(s)].
\end{aligned}$$

Teorem 2.3.4 (Parseval Teoremi) $H_\nu \{f(r)\} = F_\nu(s)$ ve $H_\nu \{g(r)\} = G_\nu(s)$ olmak üzere,

$$\int_0^\infty s F_\nu(s) G_\nu(s) ds = \int_0^\infty r f(r) g(r) dr \quad (2.35)$$

bağıntısı geçerlidir.

İspat. (2.35) eşitliğinin sol tarafında $G_\nu(s)$ fonksiyonu yerine Hankel dönüşümünün tanımından,

$$G_\nu(s) = \int_0^\infty r g(r) J(rs) dr$$

eşitliği yazılırsa,

$$\int_0^\infty s F_\nu(s) G_\nu(s) ds = \int_0^\infty s F_\nu(s) \int_0^\infty r g(r) J(rs) dr ds$$

elde edilir. İntegrallerin mutlak yakınsaklık koşulundan integral sırası yer değiştirebilir böylece

$$\int_0^\infty s F_\nu(s) G_\nu(s) ds = \int_0^\infty r g(r) \left(\int_0^\infty s F_\nu(s) J(rs) ds \right) dr$$

yazılır ve buradan $F_\nu(s)$ fonksiyonu için ters Hankel dönüşümü tanımından

$$f(r) = \int_0^\infty s F_\nu(s) J(rs) ds$$

olup,

$$\int_0^\infty s F_\nu(s) G_\nu(s) ds = \int_0^\infty r g(r) f(r) dr$$

eşitliği elde edilir. Elde edilen son eşitlikle (2.35) Parseval bağıntısı gösterilmiş olur (Debnath and Bhatta 2010 p. 319). ■

2.4 HANKEL DÖNÜŞÜMÜ ÖRNEKLERİ

Bu bölümde bazı fonksiyonların Hankel dönüşümü, Hankel dönüşümü tanımından ve özelliklerinden yararlanılarak verilecektir.

Örnek 2.4.1 (Debnath and Bhatta 2010, p. 318) $r > 0$ olmak üzere, $f(r) = \frac{e^{-ar}}{r}$ fonksiyonunun sıfırıncı mertebeden Hankel dönüşümü

$$H_0 \left\{ \frac{e^{-ar}}{r} \right\} = \int_0^\infty \frac{e^{-ar}}{r} r J_0(sr) dr = \int_0^\infty e^{-ar} J_0(sr) dr \quad (2.36)$$

olup burada $J_0(sr)$ Bessel fonksiyonu yerine (1.21) seri açılımı yazılır ve $ar = t$ dönüşümü

yapılırsa,

$$\begin{aligned}
H_0 \left\{ \frac{e^{-ar}}{r} \right\} &= \int_0^\infty e^{-ar} \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k \left(\frac{sr}{2}\right)^{2k}}{(k!)^2} dr \\
&= \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k \left(\frac{s}{2}\right)^{2k}}{(k!)^2} \int_0^\infty e^{-ar} r^{2k} dr \\
&= \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k \left(\frac{s}{2}\right)^{2k}}{(k!)^2} \int_0^\infty e^{-t} \left(\frac{t}{a}\right)^{2k} \frac{1}{a} dt \\
&= \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k \left(\frac{s}{2}\right)^{2k}}{(k!)^2 a^{2k+1}} \int_0^\infty e^{-t} t^{2k} dt
\end{aligned} \tag{2.37}$$

olur. (2.37) eşitliğinin sağ tarafındaki integralde Gamma fonksiyonunun

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$$

tanımından

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{2k} dt = \Gamma(2k+1) = (2k)!$$

olup (2.37) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
H_0 \left\{ \frac{e^{-ar}}{r} \right\} &= \frac{1}{a} \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k (2k)! s^{2k}}{2^{2k} (k!)^2 a^{2k}} \\
&= \frac{1}{a} \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{s}{a}\right)^2 + \frac{3}{8} \left(\frac{s}{a}\right)^4 - \dots \right) \\
&= \frac{1}{a} \left(1 + \left(\frac{s}{a}\right)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{s^2 + a^2}}
\end{aligned} \tag{2.38}$$

elde edilir.

Örnek 2.4.2 (Debnath and Bhatta 2010, p. 318) $r > 0$ olmak üzere, $f(r) = \frac{e^{-ar}}{r}$ fonksiyonunun birinci mertebeden Hankel dönüşümü

$$H_1 \left\{ \frac{e^{-ar}}{r} \right\} = \int_0^\infty \frac{e^{-ar}}{r} r J_1(sr) dr = \int_0^\infty e^{-ar} J_1(sr) dr$$

olup Bessel fonksiyonu için verilen (1.33) eşitliğinden yararlanılarak $J_1(sr)$ fonksiyonu yerine

$$J_1(sr) = -J_0'(sr)$$

eşiti yazılır ve $sr = z$ dönüşümü yapılırsa,

$$H_1 \left\{ \frac{e^{-ar}}{r} \right\} = - \int_0^\infty e^{-a\frac{z}{s}} J_0'(z) \frac{1}{s} dz = -\frac{1}{s} \int_0^\infty e^{-a\frac{z}{s}} J_0'(z) dz$$

olur. Elde edilen eşitlikte kısmi integrasyon uygulanır ve düzenlenirse,

$$\begin{aligned} H_1 \left\{ \frac{e^{-ar}}{r} \right\} &= -\frac{1}{s} \left(e^{-a\frac{z}{s}} J_0(z) \Big|_0^\infty - \int_0^\infty -\frac{a}{s} e^{-a\frac{z}{s}} J_0(z) dz \right) \\ &= -\frac{1}{s} \left(-J_0(0) + \frac{a}{s} \int_0^\infty e^{-a\frac{z}{s}} J_0(z) dz \right) \end{aligned} \quad (2.39)$$

elde edilir.

Bessel fonksiyonu için (1.21) seri açılımından yararlanılarak,

$$\begin{aligned} J_0(r) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k+1)} \left(\frac{r}{2} \right)^{2k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{4} r^2 \right)^k}{k! k!} \\ &= \frac{\left(-\frac{1}{4} r^2 \right)^0}{0! 0!} + \frac{\left(-\frac{1}{4} r^2 \right)^1}{1! 1!} + \frac{\left(-\frac{1}{4} r^2 \right)^2}{2! 2!} + \dots \\ &= 1 + \frac{\left(-\frac{1}{4} r^2 \right)^1}{1} + \frac{\left(-\frac{1}{4} r^2 \right)^2}{4} + \dots \end{aligned}$$

olur ve $r = 0$ için

$$J_0(0) = 1 + 0 + 0 + \dots = 1$$

olduğu görülür.

(2.39) eşitliğinde $J_0(0) = 1$ yerine yazılır ve $z = sr$ dönüşümü yapılırsa,

$$\begin{aligned} H_1 \left\{ \frac{e^{-ar}}{r} \right\} &= -\frac{1}{s} \left(-1 + \frac{a}{s} \int_0^\infty e^{-a\frac{z}{s}} J_0(z) dz \right) \\ &= \frac{1}{s} - \frac{a}{s^2} \int_0^\infty e^{-a\frac{z}{s}} J_0(z) dz \\ &= \frac{1}{s} - \frac{a}{s^2} \int_0^\infty e^{-ar} J_0(sr) s dr \\ &= \frac{1}{s} - \frac{a}{s} \int_0^\infty e^{-ar} J_0(sr) dr \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Eşitliğin sağ tarafındaki integral için Örnek 2.4.1'den yararlanılarak fonksiyonun birinci mertebeden Hankel dönüşümünün

$$H_1 \left\{ \frac{e^{-ar}}{r} \right\} = \frac{1}{s} - \frac{a}{s\sqrt{a^2 + s^2}}$$

olduğu görülür.

Örnek 2.4.3 $r > 0$ olmak üzere, $f(r) = \frac{1}{r}$ fonksiyonunun sıfırıncı mertebeden Hankel dönüşümü

$$H_0 \left\{ \frac{1}{r} \right\} = \int_0^\infty \frac{1}{r} J_0(sr) dr = \int_0^\infty J_0(sr) dr = \frac{1}{s}$$

olup burada $\int_0^\infty J_0(t) dt = 1$ özelliğinden (Piessens 2010, p. 1/38) yararlanılmıştır. Ayrıca

Örnek 2.4.1'den, $a = 0$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} H_0 \left\{ \frac{1}{r} \right\} &= H_0 \left\{ \frac{e^{-0r}}{r} \right\} \\ &= \int_0^\infty e^{-0r} J_0(sr) dr \\ &= \int_0^\infty J_0(sr) dr \\ &= \frac{1}{\sqrt{s^2 + 0^2}} \\ &= \frac{1}{s} \end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek 2.4.4 $r > 0$ olmak üzere,

$$f(r) = \frac{d}{dr} \frac{e^{-ar}}{r} = -\frac{1}{r^2} e^{-ra} - \frac{1}{r} e^{-ra} a$$

fonksiyonunun birinci mertebeden Hankel dönüşümünü hesaplayabilmek için öncelikle tanım yardımıyla

$$H_1 \left\{ \frac{d}{dr} \frac{e^{-ar}}{r} \right\} = \int_0^\infty \frac{d}{dr} \left(\frac{e^{-ar}}{r} \right) r J_1(sr) dr$$

yazılır ve (2.30) eşitliği ile verilen Hankel türev özelliğinden yararlanılırsa, $f(r)$ fonksiyonunun birinci mertebeden Hankel dönüşümü,

$$\begin{aligned} H_1 \left\{ \frac{d}{dr} \frac{e^{-ar}}{r} \right\} &= \frac{s}{2} [(1-1) F_{1+1}(s) - (1+1) F_{1-1}(s)] \\ &= -s F_0(s) \end{aligned} \tag{2.40}$$

olarak bulunur. Burada $F_0(s)$ ifadesi, $\frac{e^{-ar}}{r}$ fonksiyonunun sıfırıncı mertebeden Hankel dönüşümünü belirtir öyle ki bu dönüşüm Örnek 2.4.1'den yararlanılarak,

$$F_0(s) = H_0 \left\{ \frac{e^{-ar}}{r} \right\} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + s^2}}$$

olup (2.40) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$H_1 \left\{ \frac{d}{dr} \frac{e^{-ar}}{r} \right\} = \frac{-s}{\sqrt{a^2 + s^2}}$$

elde edilir.

Örnek 2.4.5 $a > 0$ olmak üzere, $f(r) = e^{-ar}$ fonksiyonunun sıfırıncı mertebeden Hankel dönüşümü için tanım kullanılarak,

$$H_0 \{f(r)\} = \int_0^\infty e^{-ar} r J_0(sr) dr$$

yazılır, bu eşitlik

$$H_0 \{f(r)\} = -\frac{d}{da} \int_0^\infty e^{-ar} J_0(sr) dr = -\frac{d}{da} H_0 \left\{ \frac{e^{-ar}}{r} \right\}$$

şeklinde düzenlenir ve Örnek 2.4.1 kullanılırsa

$$H_0 \{e^{-ar}\} = -\frac{d}{da} \left(\frac{1}{\sqrt{s^2 + a^2}} \right) = \frac{a}{\sqrt{(s^2 + a^2)^3}}$$

elde edilir.

Örnek 2.4.6 $a > 0$ olmak üzere, $f(r) = e^{-ar^2}$ fonksiyonunun sıfırıncı mertebeden Hankel dönüşümü için

$$H_0 \{e^{-ar^2}\} = \int_0^\infty e^{-ar^2} r J_0(sr) dr \quad (2.41)$$

yazılıp burada $J_0(sr)$ Bessel fonksiyonunun (1.21) seri açılımında $x = sr$ yazılırsa

$$J_0(sr) = \sum_{k=0}^\infty \frac{\left(-\frac{1}{4}(sr)^2\right)^k}{k! \Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k \left(\frac{sr}{2}\right)^{2k}}{(k!)^2}$$

olur ve böylece

$$H_0 \{e^{-ar^2}\} = \int_0^\infty e^{-ar^2} \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k \left(\frac{sr}{2}\right)^{2k}}{(k!)^2} r dr = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k s^{2k}}{2^{2k} (k!)^2} \int_0^\infty e^{-ar^2} r r^{2k} dr$$

olduğu görülür. Şimdi sırasıyla $r^2 = t$ ve $at = m$ dönüşümleri uygulanırsa,

$$\begin{aligned} H_0 \{e^{-ar^2}\} &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k s^{2k}}{2^{2k} (k!)^2} \int_0^\infty e^{-at} t^k dt \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k s^{2k}}{2^{2k} (k!)^2} \int_0^\infty e^{-m} \left(\frac{m}{a}\right)^k \left(\frac{1}{a}\right) dm \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k s^{2k}}{2^{2k} (k!)^2} \left(\frac{1}{a^{k+1}} \int_0^\infty e^{-m} m^k dm \right) \end{aligned}$$

olur ve Gamma fonksiyonunun

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$$

tanımından yararlanılarak gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\begin{aligned}
H_0 \{e^{-ar^2}\} &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k s^{2k}}{2^{2k} (k!)^2} \frac{1}{a^{k+1}} \Gamma(k+1) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k s^{2k}}{2^{2k} (k!)^2} \frac{k!}{a^{k+1}} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k s^{2k}}{2^{2k} (k!) a^{k+1}} \\
&= \frac{1}{2a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{s^2}{4a}\right)^k}{k!}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece e^{-ar^2} fonksiyonunun Hankel dönüşümü,

$$H_0 \{e^{-ar^2}\} = \frac{1}{2a} e^{-\frac{s^2}{4a}} \quad (2.42)$$

elde edilir.

Özel olarak $a = \frac{1}{2}$ alınırsa, $f(r) = e^{-\frac{r^2}{2}}$ fonksiyonunun sıfırıncı mertebeden Hankel dönüşümü

$$H_0 \{e^{-\frac{1}{2}r^2}\} = \int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} r J_0(sr) dr = e^{-\frac{s^2}{2}}$$

olur.

Örnek 2.4.7 (Piessens 2010, p. 9/5) $a > 0$, $\nu > -\frac{1}{2}$ için, $f(r) = \begin{cases} r^\nu & , \quad r \leq a \\ 0 & , \quad r > a \end{cases}$ fonksiyonunun ν . mertebeden Hankel dönüşümü için tanım yardımıyla

$$\begin{aligned}
H_\nu \{f(r)\} &= \int_0^{\infty} f(r) r J_\nu(rs) dr \\
&= \int_0^a r^\nu r J_\nu(rs) dr + \int_a^{\infty} 0 r J_\nu(rs) dr \\
&= \int_0^a r^{\nu+1} J_\nu(rs) dr
\end{aligned}$$

yazılır ve burada $rs = x$ dönüşümüyle,

$$H_\nu \{f(r)\} = \int_0^{as} \left(\frac{x}{s}\right)^{\nu+1} J_\nu(x) \frac{1}{s} dx = \frac{1}{s^{\nu+2}} \int_0^{as} x^{\nu+1} J_\nu(x) dx \quad (2.43)$$

elde edilir. Bessel fonksiyonunun için bilinen (1.30) bağıntısından

$$\frac{d}{dx} \{x^{\nu+1} J_{\nu+1}(x)\} = x^{\nu+1} J_\nu(x)$$

olup (2.43) eşitliğinde yerine yazıldığında

$$\begin{aligned}
H_\nu \{f(r)\} &= \frac{1}{s^{\nu+2}} \int_0^{as} \frac{d}{dx} (x^{\nu+1} J_{\nu+1}(x)) dx \\
&= \frac{1}{s^{\nu+2}} x^{\nu+1} J_{\nu+1}(x) \Big|_0^{as} \\
&= \frac{1}{s^{\nu+2}} (as)^{\nu+1} J_{\nu+1}(as) \\
&= \frac{1}{s} a^{\nu+1} J_{\nu+1}(as)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek 2.4.8 (Davies 2001, p.232) $0 < a < b$ ve $\nu > -\frac{1}{2}$ olmak üzere,

$$\int_0^\infty \frac{J_{\nu+1}(ar) J_{\nu+1}(br)}{r} dr \quad (2.44)$$

integralini hesaplayabilmek için Örnek 2.4.7'den yararlanarak $F_\nu(s)$ ve $G_\nu(s)$ fonksiyonları aşağıdaki biçimde tanımlansın

$$F_\nu(s) = \frac{J_{\nu+1}(as)}{s} \quad \text{ve} \quad G_\nu(s) = \frac{J_{\nu+1}(bs)}{s}.$$

Bu durumda

$$f(r) = \begin{cases} \frac{r^\nu}{a^{\nu+1}} & , \quad r \leq a \\ 0 & , \quad r > a \end{cases} \quad \text{ve} \quad g(r) = \begin{cases} \frac{r^\nu}{b^{\nu+1}} & , \quad r \leq b \\ 0 & , \quad r > b \end{cases}$$

olmak üzere, Hankel dönüşümü tanımından,

$$F_\nu(s) = \frac{J_{\nu+1}(as)}{s} = H_\nu \{f(r)\},$$

$$G_\nu(s) = \frac{J_{\nu+1}(bs)}{s} = H_\nu \{g(r)\}$$

olur. (2.44) integralini hesaplayabilmek için (2.35) Parseval bağıntısı kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{J_{\nu+1}(as) J_{\nu+1}(bs)}{s} ds &= \int_0^\infty s F_\nu(s) G_\nu(s) ds \\
&= \int_0^\infty r f(r) g(r) dr
\end{aligned}$$

olur ve buradan $a < b$ için,

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{J_{\nu+1}(as) J_{\nu+1}(bs)}{s} ds &= \int_0^a r \frac{r^\nu}{a^{\nu+1}} \frac{r^\nu}{b^{\nu+1}} dr \\
&= \frac{1}{(ab)^{\nu+1}} \int_0^a r^{(2\nu+1)} dr \\
&= \frac{1}{(ab)^{\nu+1}} \frac{a^{(2\nu+2)}}{2\nu+2} \\
&= \left(\frac{a}{b}\right)^{\nu+1} \frac{1}{2(\nu+1)}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek 2.4.9 $f(r) = \delta(r - a)$ fonksiyonunun sıfıncı mertebeden Hankel dönüşümü için

$$H_0 \{f(r)\} = \int_0^\infty r \delta(r - a) J_0(sr) dr$$

olup Dirac delta fonksiyonunun

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0)$$

özelliğinden (Kanwal 2004, p. 4) yararlanılırsa,

$$H_0 \{\delta(r - a)\} = \int_0^\infty r \delta(r - a) J_0(sr) dr = a J_0(as)$$

elde edilir.

Örnek 2.4.10 $f(r) = \frac{\sin ar}{r}$ fonksiyonunun sıfıncı mertebeden Hankel dönüşümü için tanımdan,

$$H_0 \{f(r)\} = \int_0^\infty \frac{\sin ar}{r} r J_0(sr) dr = \int_0^\infty \sin ar J_0(sr) dr \quad (2.45)$$

yazılır ve

$$\begin{aligned} e^{-iar} &= \cos ar - i \sin ar \\ -\sin ar &= \operatorname{Im} e^{-iar} \end{aligned}$$

özdeşliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} H_0 \{f(r)\} &= \int_0^\infty \sin ar J_0(sr) dr \\ &= -\operatorname{Im} \int_0^\infty e^{-iar} J_0(sr) dr \\ &= -\operatorname{Im} \frac{1}{\sqrt{(ia)^2 + s^2}} \\ &= -\operatorname{Im} \frac{1}{\sqrt{s^2 - a^2}} \\ &= \begin{cases} 0, & s > a \\ \operatorname{Im} \frac{i}{\sqrt{a^2 - s^2}}, & s < a \end{cases} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan fonksiyonun sıfıncı mertebeden Hankel dönüşümü

$$H_0 \left\{ \frac{\sin ar}{r} \right\} = \begin{cases} 0, & s > a \\ \frac{1}{\sqrt{a^2 - s^2}}, & s < a \end{cases}$$

olur.



BÖLÜM 3

HANKEL DÖNÜŞÜMÜNÜN UYGULAMALARI

Bu bölümde Bessel diferansiyel operatörünün Hankel dönüşümü incelenecek, ardından Hankel dönüşümünün bazı sınır değer problemlerine uygulanmasına yer verilecektir.

3.1 BESSEL DİFERANSİYEL OPERATÖRÜNÜN HANKEL DÖNÜŞÜMÜ

Bessel diferansiyel operatörünü

$$\Delta_\nu = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \left(\frac{\nu}{r}\right)^2 \quad (3.1)$$

ile verilsin. (3.1) eşitliği ile verilen Bessel diferansiyel operatörü için $f(r)$ fonksiyonu

$$\lim_{r \rightarrow \infty} f(r) = 0$$

özelliğine sahip keyfi bir fonksiyon olmak üzere

$$\Delta_\nu f(r) = \frac{d^2 f(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df(r)}{dr} - \left(\frac{\nu}{r}\right)^2 f(r)$$

olup Hankel dönüşümü,

$$\begin{aligned} H_\nu \{ \Delta_\nu f(r) \} &= \int_0^\infty \left(\frac{d^2 f(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df(r)}{dr} - \left(\frac{\nu}{r}\right)^2 f(r) \right) r J_\nu(rs) dr \\ &= H_\nu \left\{ \frac{d^2 f(r)}{dr^2} \right\} + H_\nu \left\{ \frac{1}{r} \frac{df(r)}{dr} \right\} - H_\nu \left\{ \frac{\nu^2}{r^2} f(r) \right\} \end{aligned} \quad (3.2)$$

olur. (3.2) eşitliğinin sağ tarafındaki birinci terimi ele alırsak,

$$\begin{aligned} H_\nu \left\{ \frac{d^2 f(r)}{dr^2} \right\} &= \int_0^\infty \frac{d^2 f(r)}{dr^2} r J_\nu(rs) dr \\ &= r J_\nu(rs) \frac{df(r)}{dr} \Big|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{d}{dr} [r J_\nu(rs)] \frac{df(r)}{dr} dr \end{aligned}$$

olup $r \rightarrow \infty$ için $rJ_\nu(rs) \rightarrow 0$ olduğundan,

$$\begin{aligned}
H_\nu \left\{ \frac{d^2 f(r)}{dr^2} \right\} &= - \int_0^\infty [J_\nu(rs) + srJ'(rs)] \frac{df(r)}{dr} dr \\
&= - \int_0^\infty \left(\frac{1}{r} \frac{df(r)}{dr} \right) rJ_\nu(rs) - s \int_0^\infty rJ'(rs) \frac{df(r)}{dr} dr \\
&= - \int_0^\infty \left(\frac{1}{r} \frac{df(r)}{dr} \right) rJ_\nu(rs) - s \left\{ rJ'(rs)f(r) \Big|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{d}{dr} [rJ'(rs)] f(r) dr \right\} \\
&= -H_\nu \left\{ \frac{1}{r} \frac{df(r)}{dr} \right\} + s \int_0^\infty \frac{d}{dr} [rJ'(rs)] f(r) dr
\end{aligned} \tag{3.3}$$

elde edilir. Şimdi, $J_\nu(r)$ fonksiyonu (1.14) ile verilen Bessel diferansiyel operatörünün bir çözümü olduğundan,

$$\begin{aligned}
r \frac{d^2 J_\nu(r)}{dr^2} + \frac{dJ_\nu(r)}{dr} + \left(1 - \frac{\nu^2}{r^2} \right) rJ_\nu(r) &= 0 \\
\frac{d}{dr} (rJ'(r)) + \left(1 - \frac{\nu^2}{r^2} \right) rJ_\nu(r) &= 0
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir ve $r \rightarrow rs$ için,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{s} \frac{d}{dr} (rsJ'(rs)) + \left(1 - \frac{\nu^2}{s^2 r^2} \right) rsJ_\nu(sr) &= 0 \\
\frac{d}{dr} (rJ'(rs)) + \left(1 - \frac{\nu^2}{s^2 r^2} \right) rsJ_\nu(sr) &= 0 \\
\frac{d}{dr} (rJ'(rs)) &= - \left(1 - \frac{\nu^2}{s^2 r^2} \right) rsJ_\nu(sr) \\
\frac{d}{dr} (rJ'(rs)) &= \frac{\nu^2}{sr} J_\nu(sr) - rsJ_\nu(sr)
\end{aligned} \tag{3.4}$$

elde edilir. Elde edilen (3.4) eşitliği (3.3) ifadesinde yerine yazılırsa,

$$H_\nu \left\{ \frac{d^2 f(r)}{dr^2} \right\} = -H_\nu \left\{ \frac{1}{r} \frac{df(r)}{dr} \right\} + s \int_0^\infty \left(\frac{\nu^2}{sr} J_\nu(sr) - rsJ_\nu(sr) \right) f(r) dr \tag{3.5}$$

elde edilir. (3.5) eşitliğinin sağ tarafındaki ikinci terim düzenlendiğinde,

$$\begin{aligned}
&s \int_0^\infty \left(\frac{\nu^2}{sr} J_\nu(sr) - rsJ_\nu(sr) \right) f(r) dr \\
&= s \int_0^\infty \frac{\nu^2}{sr} J_\nu(sr) f(r) dr - s \int_0^\infty rsJ_\nu(sr) f(r) dr \\
&= \int_0^\infty \frac{\nu^2}{r^2} f(r) rJ_\nu(sr) dr - s^2 \int_0^\infty rJ_\nu(sr) f(r) dr \\
&= H_\nu \left\{ \frac{\nu^2}{r^2} f(r) \right\} - s^2 F_\nu(s)
\end{aligned}$$

olur ve (3.5) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$H_\nu \left\{ \frac{d^2 f(r)}{dr^2} \right\} = -H_\nu \left\{ \frac{1}{r} \frac{df(r)}{dr} \right\} + H_\nu \left\{ \frac{\nu^2}{r^2} f(r) \right\} - s^2 F_\nu(s)$$

olur ve buradan (3.2) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
H_\nu \{ \Delta_\nu f(r) \} &= H_\nu \left\{ \frac{d^2 f(r)}{dr^2} \right\} + H_\nu \left\{ \frac{1}{r} \frac{df(r)}{dr} \right\} - H_\nu \left\{ \frac{\nu^2}{r^2} f(r) \right\} \\
&= -H_\nu \left\{ \frac{1}{r} \frac{df(r)}{dr} \right\} + H_\nu \left\{ \frac{\nu^2}{r^2} f(r) \right\} - s^2 F_\nu(s) \\
&\quad + H_\nu \left\{ \frac{1}{r} \frac{df(r)}{dr} \right\} - H_\nu \left\{ \frac{\nu^2}{r^2} f(r) \right\} \\
H_\nu \{ \Delta_\nu f(r) \} &= -s^2 F_\nu(s)
\end{aligned} \tag{3.6}$$

elde edilir. Böylece Bessel diferansiyel operatörünün ν . mertebeden Hankel dönüşümü (3.6) eşitliği ile elde edilmiş olur (Piessens 2010, p. 9/3).

3.2 ISI İLETİMİ

Isı denklemi bir malzeme içindeki ısı transferini tanımlar ve ısı transferi alanında temel bir denklemdir. Sabit termal iletkenlik durumunda genel ısı denklemi,

$$\frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \nu}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \nu}{\partial z^2} + \frac{\dot{e}_{gen}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \nu}{\partial t} \tag{3.7}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\alpha = \frac{k}{\rho c}$ malzemenin termal difüzyon katsayısıdır ve genellikle birim hacim başına belirtilen $\dot{e}_{gen}$ ise ortamdaki ısı üretim hızını temsil eder. (3.7) ile verilen genel ısı denklemi Fourier-Biot denklemi olarak bilinir ve bu denklem durağan durumda

$$\frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \nu}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \nu}{\partial z^2} + \frac{\dot{e}_{gen}}{k} = 0, \quad (\text{Poisson Denklemi})$$

zamana bağımlı ve ısı üretimi olmayan durumda,

$$\frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \nu}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \nu}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \nu}{\partial t}, \quad (\text{Difüzyon Denklemi})$$

durağan ve ısı üretimi olmayan durumda,

$$\frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \nu}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \nu}{\partial z^2} = 0, \quad (\text{Laplace Denklemi})$$

formlarına indirgenir (Çengel and Ghajar 2015). Ayrıca (3.7) ile verilen genel ısı iletim denklemi

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z$$

koordinat dönüşümü ile düzenlenirse,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(kr \frac{\partial \nu}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(k \frac{\partial \nu}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial \nu}{\partial z} \right) + \dot{e}_{gen} = \rho c \frac{\partial \nu}{\partial t} \quad (3.8)$$

eşitliği ile silindirik koordinatlarda ifade edilir. Buradan yola çıkarak dairesel bir diskte verilen ısı iletim problemi aşağıdaki şekilde ele alınsın.

$z = 0$ düzlemindeki a yarıçaplı dairesel bir diskten, $z > 0$ yarı sonsuz uzayına birim alana birim zamanda sabit bir Q hızıyla yayılması durumu ele alınacaktır. Burada diskin dışında kalan $z = 0$ düzleminin yalıtılmış olduğu kabul edilecektir. Alanın ısı iletkenlik katsayısı κ ve sıcaklık fonksiyonu $\nu(r, z)$ olmak üzere, sınır koşulları

$$-\kappa \frac{\partial \nu(r, z)}{\partial z} = Q, \quad r < a, \quad z = 0 \quad (3.9)$$

$$-\kappa \frac{\partial \nu(r, z)}{\partial z} = 0, \quad r > a, \quad z = 0 \quad (3.10)$$

olarak verilir. (3.8) genel ısı iletim denkleminde, durağan ve ısı üretimi olmayan durumda, $\frac{\partial \nu}{\partial t} = 0$, $\dot{e}_{gen} = 0$ olduğundan

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \nu}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \nu}{\partial z} \right) &= 0 \\ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \nu}{\partial r} + r \frac{\partial^2 \nu}{\partial r^2} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \nu}{\partial z} \right) &= 0 \\ \frac{\partial^2 \nu}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \nu}{\partial r} + \frac{\partial^2 \nu}{\partial z^2} &= 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

denklemini elde edilir. Şimdi (3.11) denkleminin her iki tarafının sıfırıncı mertebeden Hankel dönüşümü alındığında,

$$\begin{aligned} H_0 \left\{ \frac{\partial^2 \nu}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \nu}{\partial r} + \frac{\partial^2 \nu}{\partial z^2} \right\} &= \int_0^\infty \left(\frac{\partial^2 \nu}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \nu}{\partial r} + \frac{\partial^2 \nu}{\partial z^2} \right) r J_0(sr) dr \\ &= \int_0^\infty \left(\frac{\partial^2 \nu}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \nu}{\partial r} \right) r J_0(sr) dr + \int_0^\infty \frac{\partial^2 \nu}{\partial z^2} r J_0(sr) dr \\ &= -s^2 V(s, z) + \int_0^\infty \frac{\partial^2 \nu}{\partial z^2} r J_0(sr) dr \\ &= -s^2 V(s, z) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \int_0^\infty vr J_0(sr) dr \\ &= -s^2 V(s, z) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} V \\ &= \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - s^2 \right) V(s, z) \\ &= 0 \end{aligned}$$

adi diferansiyel denklemi elde edilir. Burada $V(s, z)$ fonksiyonu $v(r, z)$ fonksiyonunun sıfıncı mertebeden Hankel dönüşümü,

$$V(s, z) = \int_0^\infty v(r, z) r J_0(sr) dr,$$

olup elde edilen

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - s^2 \right) V(s, z) = 0$$

ikinci mertebeden lineer diferansiyel denkleminin genel çözümünün

$$V(s, z) = c_1(s)e^{sz} + c_2(s)e^{-sz}$$

olduğu görülür. Şimdi, bu genel çözümden (3.9) ve (3.10) ile verilen sınır koşullarını sağlayan bir özel çözüm araştırılacaktır. Diskin dışında kalan $z = 0$ düzleminin yalıtılmış olmasından

$$\begin{aligned} V(s, 0) &= \int_0^\infty v(r, 0) r J_0(sr) dr \\ &= \int_0^a v(r, 0) r J_0(sr) dr + \int_a^\infty v(r, 0) r J_0(sr) dr \\ &= \int_0^a v(r, 0) r J_0(sr) dr \end{aligned}$$

yazılabilir. (3.9) ve (3.10) ile verilen sınır koşullarından

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial z}(s, 0) &= \frac{\partial}{\partial z} \int_0^a v(r, 0) r J_0(sr) dr \\ -\kappa \frac{\partial V}{\partial z}(s, 0) &= -\kappa \int_0^a \frac{\partial v}{\partial z}(r, 0) r J_0(sr) dr \\ &= \int_0^a -\kappa \frac{\partial v}{\partial z}(r, 0) r J_0(sr) dr \\ &= \int_0^a Q r J_0(sr) dr \\ &= Q \int_0^a \frac{d}{dr} \left(\frac{r}{s} J_1(sr) \right) dr \\ &= Q \frac{a}{s} J_1(sa) \end{aligned} \tag{3.12}$$

olur.

$z \rightarrow \infty$ iken $V(s, z)$ sonlu olduğundan $c_1 = 0$ olacağından

$$\begin{aligned} V(s, z) &= c_2 e^{-sz} \\ \frac{\partial V(s, z)}{\partial z} &= -s c_2 e^{-sz} \end{aligned}$$

yazılabilir ve $z = 0$ için

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial z}(s, 0) &= -sc_2 \\ -\kappa \frac{\partial V}{\partial z}(s, 0) &= \kappa sc_2\end{aligned}$$

olur. Bu durumda (3.12) eşitliğinden

$$\begin{aligned}\kappa sc_2 &= Q \frac{a}{s} J_1(sa) \\ c_2(s) &= \frac{Qa}{\kappa s^2} J_1(sa)\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $V(s, z)$ özel çözümünün

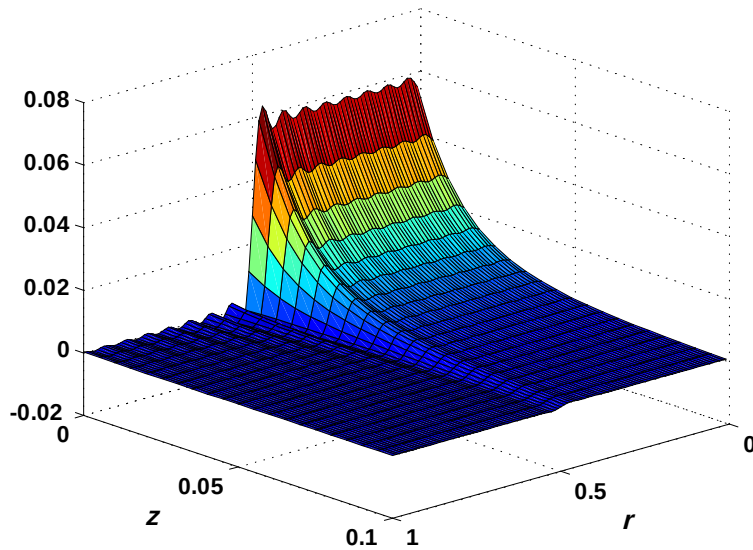
$$V(s, z) = \frac{Qa}{\kappa s^2} J_1(sa) e^{-sz} \quad (3.13)$$

olduğu görülür. (3.13) eşitliğinin her iki tarafına ters Hankel dönüşümü uygulandığında, ele alınan ısı iletimi probleminin istenen çözümü

$$\begin{aligned}v(r, z) &= \int_0^\infty V(s, z) s J_0(sr) ds \\ &= \int_0^\infty \left(\frac{Qa}{\kappa s^2} J_1(sa) e^{-sz} \right) s J_0(sr) ds \\ v(r, z) &= \frac{Qa}{\kappa} \int_0^\infty \frac{1}{s} e^{-sz} J_1(sa) J_0(sr) ds\end{aligned} \quad (3.14)$$

olarak elde edilir (Piessens 2010, p. 9/7).

$0 < r < 1$ ve $0 < z < 0.1$ olmak üzere, $Q = 0.1$, $a = 0.5$, $\kappa = 0.026$ alınarak, (3.14) fonksiyonunun grafiği Şekil 3.1'de gösterilmiştir.



Şekil 3.1 Isı iletimi problemi için $v(r, z)$ çözümü.

3.3 ELEKTRİK YÜKLÜ DİSK

Yarıçapı bir birim, merkezi üç boyutlu uzaydaki orijininde ve eksenini z -ekseni olan elektrik yüklü düz dairesel bir disk tarafından üretilen elektrik potansiyel, $v(r, z)$ olsun.

Kutupsal koordinatlarda potansiyel

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0 \quad (3.15)$$

Laplace denkleminin ve

$$\begin{aligned} v(r, z) &= v_0, \quad 0 \leq r < 1, \quad z = 0 \\ \frac{\partial v(r, z)}{\partial z} &= 0, \quad r > 1, \quad z = 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

sınır koşullarını sağlar. Burada v_0 diskin potansiyelidir. Bir önceki bölümde olduğu gibi

$$H_0 \left\{ \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right\} = -s^2 V(s, z) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} V(s, z) \quad (3.17)$$

bulunur, burada

$$V(s, z) = H_0 \{v(r, z)\} = \int_0^\infty v(r, z) r J_0(sr) dr.$$

Bu durumda (3.15) denkleminin her iki tarafının sıfırıncı mertebeden Hankel dönüşümü alınırsa,

$$\begin{aligned} H_0 \left\{ \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right\} &= H_0 \{0\} \\ -s^2 V(s, z) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} V(s, z) &= 0 \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - s^2 \right) V(s, z) &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu denklemin $V(s, z)$ genel çözümü

$$V(s, z) = c_1(s)e^{sz} + c_2(s)e^{-sz}$$

olup $z \rightarrow \infty$ iken $V(s, z) \rightarrow 0$ olduğundan $c_1 = 0$ elde edilir ve

$$V(s, z) = c_2(s)e^{-sz} \quad (3.18)$$

yazılabilir. (3.18) eşitliğinden, (2.19) ile verilen ters Hankel dönüşümünün tanımı kullanılarak,

$$\begin{aligned} v(r, z) &= \int_0^\infty V(s, z) s J_0(sr) ds \\ &= \int_0^\infty c_2(s) e^{-sz} s J_0(sr) ds \end{aligned} \quad (3.19)$$

eşitliği yazılır. Problemin çözümü için (3.16) sınır koşulları dikkate alınırsa,

$$\begin{aligned} v(r, 0) &= \int_0^\infty c_2(s) s J_0(sr) ds, \quad 0 \leq r < 1 \\ v_0 &= \int_0^\infty c_2(s) s J_0(sr) ds \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial z}(r, 0) &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\int_0^\infty c_2 e^{-sz} s J_0(sr) ds \right) \Big|_{z=0}, \quad r > 1 \\ 0 &= - \int_0^\infty c_2(s) s^2 J_0(sr) ds \end{aligned}$$

elde edilir. Bu sınır koşullarından, Hankel dönüşüm çizelge (Ek A) yardımıyla

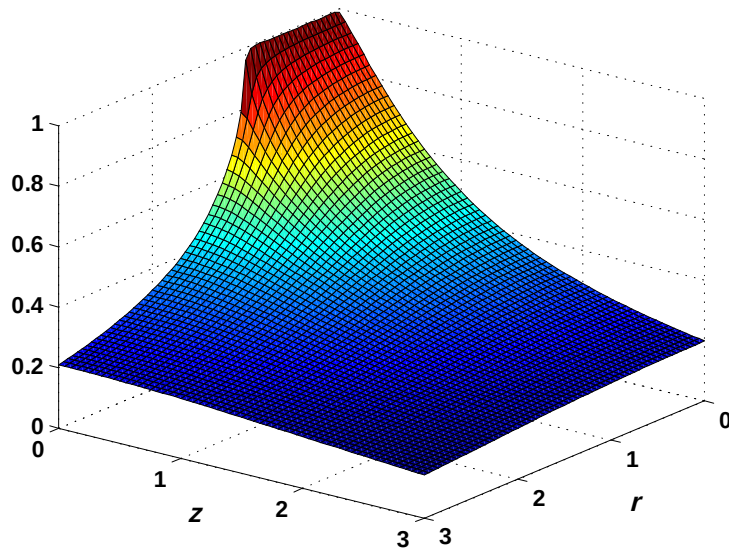
$$c_2(s) = \frac{2v_0 \sin s}{\pi s^2}$$

olarak bulunur. Buradan (3.19) eşitliğinde c_2 yerine yazılırsa, istenilen

$$v(r, z) = \frac{2v_0}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin s}{s} e^{-sz} J_0(sr) ds \quad (3.20)$$

çözümü elde edilir (Piessens 2010, p. 9/6).

$0 < r < 3$ ve $0 < z < 3$ olmak üzere, $v_0 = 1$ alınarak, (3.20) fonksiyonunun grafiği Şekil 3.2'de gösterilmiştir.



Şekil 3.2 Elektrik yüklü disk problemi için $v(r, z)$ çözümü.

3.4 BİR ELEKTROSTATİK PROBLEM

$z = \pm l$ de bulunan iki yalıtılmış yatay plaka arasında $r = z = 0$ noktasındaki bir q noktasal yükü tarafından üretilen elektrostatik potansiyel orijin noktasında tekil davranış gösterir. Bu davranışı veren denklem

$$v(r, z) = \phi(r, z) + q(r^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \quad (3.21)$$

şeklinde, burada $\phi(r, z)$ fonksiyonu polar koordinatlardaki

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (3.22)$$

Laplace denklemini sağlar ve sınır koşulları

$$\phi(r, \pm l) + q(r^2 + l^2)^{-\frac{1}{2}} = 0 \quad (3.23)$$

şeklinde ifade edilir. (3.22) denkleminin her iki tarafının sıfırıncı mertebeden Hankel dönüşümü alınırsa,

$$\begin{aligned} H_0 \left\{ \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right\} &= \frac{\partial^2}{\partial z^2} \Phi(s, z) - s^2 \Phi(s, z) \\ &= \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - s^2 \right) \Phi(s, z) \\ &= 0 \end{aligned}$$

denklemini elde edilir, burada

$$\Phi(s, z) = H_0 \{ \phi(r, z) \} = \int_0^\infty \phi(r, z) r J_0(sr) dr.$$

Bu denklemin genel çözümü

$$\Phi(s, z) = c_1 e^{sz} + c_2 e^{-sz}$$

olup (3.23) sınır koşulları dikkate alındığında Hankel dönüşüm tablosu (Ek A) yardımıyla

$$\begin{aligned} \Phi(s, \pm l) &= \int_0^\infty \phi(r, \pm l) r J_0(sr) dr \\ &= - \int_0^\infty q(r^2 + l^2)^{-\frac{1}{2}} r J_0(sr) dr \\ &= - \frac{q e^{-sl}}{s} \end{aligned} \quad (3.24)$$

olduğu görülür ve genel çözümden

$$\Phi(s, \pm l) = c_1(s) e^{\pm ls} + c_2(s) e^{\mp ls} \quad (3.25)$$

yazılabilir. Bu durumda (3.24) ve (3.25) eşitliklerinden,

$$\begin{aligned} c_1 e^{\pm ls} + c_2 e^{\mp ls} &= -\frac{q e^{-sl}}{s} \\ c_1 e^{sl} + c_2 e^{-sl} &= -\frac{q e^{-sl}}{s} \\ c_1 e^{-sl} + c_2 e^{sl} &= -\frac{q e^{-sl}}{s} \\ c_1(s) = c_2(s) &= -\frac{q e^{-sl}}{2s \cosh(sl)} \end{aligned}$$

olur ve buradan

$$\Phi(s, z) = -\frac{q e^{-sl} \cosh(sz)}{s \cosh(sl)} \quad (3.26)$$

elde edilir. Böylece ters Hankel dönüşümü tanımı kullanılarak,

$$\begin{aligned} \phi(r, z) &= H_0^{-1} \{ \Phi(s, z) \} \\ &= \int_0^\infty \left(-\frac{q e^{-sl} \cosh(sz)}{s \cosh(sl)} \right) s J_0(sr) ds \\ &= -q \int_0^\infty \frac{e^{-sl} \cosh(sz)}{\cosh(sl)} J_0(sr) ds \end{aligned}$$

elde edilir. Elde edilen $\phi(r, z)$ fonksiyonu (3.21) eşitliğinde yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned} v(r, z) &= \phi(r, z) + q(r^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \\ &= -q \int_0^\infty \frac{e^{-sl} \cosh(sz)}{\cosh(sl)} J_0(sr) ds + q(r^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

elde edilir (Piessens 2010, p. 9/8).

KAYNAKLAR

- Abramowitz M (Ed) and Stegun I A (Ed)** (1965) *Handbook of Mathematical Functions*. Dover Publications, New York.
- Arfken G** (1985) *Mathematical Methods for Physicists*. 3rd edition, Academic Press, Hollanda.
- Baddour N** (2019) The Discrete Hankel Transform. *Fourier Transform: Century of Digitalization and Increasing Expectations*. Markovic D (Ed) and Nikolic G (Ed), IntechOpen, London.
- Baruch E M** (2013) The Classical Hankel Transform in the Kirillov Model of the Discrete Series. *Integral Transforms and Special Functions*, 24(5): 339-356.
- Boyce W E and DiPrima R C** (2001) *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. 7th edition, Von Hoffmann Press, United States of America.
- Çengel Y and Ghajar A J** (2015) *Heat and Mass Transfer*. 5th edition, McGraw-Hill Education, Newyork.
- Davies B** (2001) *Integral Transforms and Their Applications*. 3rd edition, Springer Science Business Medya, New York.
- Debnath L and Bhatta D** (2010) *Integral Transforms and Their Applications*. 2nd edition, CRC Press, Edinburg.
- Encyclopedia.** (22.07.2023) Crowe M J, Hankel, Hermann, Address: <https://www.encyclopedia.com/science/dictionaries-thesauruses-pictures-and-press-releases/hankel-hermann>.
- Goodman J W** (1996) *Introduction to Fourier Optics*. 2nd edition, McGraw-Hill Companies, United States of America.
- Hankel H** (1867) *Vorlesungen über die Complexen Zahlen und ihre Funktionen*. 1st edition, Leopold Boss, Leipzig.
- Hankel H** (1871) Grenze. *Allgemeine Encyclopadie der Wissenschaften und Künste*, 90: 185-211.
- Hankel H** (1882) Untersuchungen Über die Unendlich oft Oscillirenden und Unstetigen Functionen. *Mathematische Annalen*, 20(1882): 63-112.
- Kanwal R P** (2004) *Generalized Functions Theory and Applications*. 3rd edition, Springer Science Business Media, New York.

KAYNAKLAR (devam ediyor)

- Korenev B G** (2002) *Bessel functions and Their Applications*. Taylor and Francis, United Kingdom.
- Miles J W** (1971) *Integral Transforms in Applied Mathematics*, Cambridge University Press, New York.
- Piessens R** (2010) Hankel Transform. *Transforms and Applications Handbook Poularikas A D* (Ed.), 3rd edition, CRC Press LLC, Boca Raton.
- Rudin W** (1976) *Principles of Mathematical Analysis*. 3rd edition, McGraw-Hill, New York.
- Rudin W** (1987) *Real and Complex Analysis*. 3rd edition, McGraw-Hill, Singapore.
- Sneddon I N** (1951) *Fourier Transforms*. Dover Publications, New York.
- Voegtle I** (2015) The Bessel function, the Hankel Transform and an Application to Differential Equations. *Master Thesis*, Georgia Southern University, Statesboro, 43s.
- Watson G N** (1966) *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*. 2nd edition, The Syndics of Cambridge University Press, Cambridge.
- Zill D G and Shanahan P D** (2009) *A First Course in Complex Analysis with Applications*. Jones & Bartlett, Learning.

EK AÇIKLAMALAR

EK A: Hankel Dönüşüm Tabloları

Çizelge A.1 Hankel Dönüşüm Tablosu (Sıfırıncı mertebeden)

$f(r)$	$H_0\{f(r)\} = F_0(s)$
$\frac{1}{r}$	$\frac{1}{s}$
$r^{-\mu}, \quad \frac{1}{2} < \mu < 2$	$2^{1-\mu} \frac{\Gamma(1-\frac{\mu}{2})}{\Gamma(\frac{\mu}{2})} \frac{1}{s^{2-\mu}}$
$h(a-r)$	$\frac{a}{s} J_1(as)$
e^{-ar}	$\frac{a}{(s^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}$
$\frac{e^{-ar}}{r}$	$\frac{1}{\sqrt{s^2 + a^2}}$
$\frac{1 - e^{-ar}}{r^2}$	$\log \left(\frac{a + \sqrt{s^2 + a^2}}{s} \right)$

$\log\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)$	$\frac{2}{s}\left[\frac{1}{s} - aK_1(as)\right]$
$\frac{\sin r}{r}$	$\frac{1}{\sqrt{1-s^2}}, \quad s < 1$ $0, \quad s > 1$
$\frac{\sin r}{r^2}$	$\frac{\pi}{2}, \quad s \leq 1$ $\arcsin \frac{1}{s}, \quad s > 1$
$\frac{\sin(ar)}{r^2 + b^2}$	$\frac{\pi}{2} e^{-ab} I_0(bs), \quad 0 < s < a$
$\frac{\cos(ar)}{r^2 + b^2}$	$\cos h(ab) K_0(bs), \quad a < s < \infty$
$e^{-a^2 r^2}$	$\frac{e^{-s^2/4a^2}}{2a^2}$
$\frac{1}{r(r+a)}$	$\frac{\pi}{2} [\mathbf{H}_0(as) - Y_0(as)]$
$\frac{1}{r^2 + a^2}$	$K_0(as)$
$\frac{1}{r(r^2 + a^2)}$	$\frac{\pi}{2a} [I_0(as) - \mathbf{L}_0(as)]$
$\frac{1}{1 + r^4}$	$-\text{Kei}(s)$

$\frac{r^3}{1+r^4}$	$Ker(s)$
$\frac{1}{\sqrt{r^2+a^2}}$	$\frac{e^{-as}}{s}$
$\frac{1}{\sqrt{r^4+a^4}}$	$K_0(as/\sqrt{2})J_0(as/\sqrt{2})$
$\frac{1-J_0(ar)}{r^2}$	$\log \frac{a}{s}, \quad s \leq a$ $0, \quad s \geq a$
$\frac{a}{r}J_1(ar)$	$1, \quad 0 < s < a$ $0, \quad s > a$
$\frac{1}{r}J_0(2\sqrt{ar})$	$\frac{1}{s}J_0\left(\frac{a}{s}\right)$

Çizelge A.2 Hankel Dönüşüm Tablosu (v. mertebeden)

$f(r)$	$H_v\{f(r)\} = F_v(s)$
$\frac{1}{r}$	$\frac{1}{s}$
$r^{-\mu}, \quad \frac{1}{2} < \mu < v + 2$	$\frac{2^{1-\mu} \Gamma(\frac{v+2-\mu}{2})}{s^{2-\mu} \Gamma(\frac{v+\mu}{2})}$
$x^v(a^2 - r^2)^\mu h(a - r), \quad \mu > -1$	$2^\mu a^{\mu+v+1} s^{-\mu-1} \Gamma(\mu + 1) J_{v+\mu+1}(as)$
$\frac{\sin ar}{r}$	$\frac{1}{\sqrt{s^2 - a^2}} \sin\left(v \arcsin\left(\frac{a}{s}\right)\right), \quad s > a$ $\cos\left(\frac{nv}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{a^2 - s^2}} \frac{s^v}{(a + \sqrt{a^2 - s^2})^v}, \quad s < a$
$\frac{\sin ar}{r^2}$	$\frac{s^v v^{-1}}{(a + \sqrt{a^2 - s^2})^v} \sin \frac{v\pi}{2}, \quad s \leq a$ $v^{-1} \sin\left(v \arcsin\left(\frac{a}{s}\right)\right), \quad s > a$
$\frac{e^{-ar}}{r}$	$\frac{(\sqrt{s^2 + a^2} - a)^v}{s^v \sqrt{s^2 + a^2}}$
$\frac{e^{-ar}}{r^2}$	$\frac{(\sqrt{s^2 + a^2} - a)^v}{v s^v}$
$r^{v-1} e^{-ar}$	$\frac{(2s)^v \Gamma(v + 1/2)}{((s^2 + a^2)^{v+1/2} \sqrt{\pi})}$

$r^v e^{-ar}$	$\frac{2a(2s)^v \Gamma(v + 3/2)}{(s^2 + a^2)^{v+3/2} \sqrt{\pi}}$
$e^{-a^2 r^2} r^v$	$\frac{s^v}{(2a^2)^{v+1}} \exp\left(-\frac{s^2}{4a^2}\right)$
$e^{-a^2 r^2} r^\mu$	$\frac{\Gamma((v + \mu + 2)/2) \left(\frac{1}{2} \frac{s}{a}\right)^v}{2a^{\mu+2} \Gamma(v + 1)} {}_x F_1\left(\frac{v + \mu + 2}{2}; \frac{s^2}{4a^2}\right)$
$\frac{r^v}{(r^2 + a^2)^{\mu+1}}$	$\frac{s^\mu a^{v-\mu}}{2^\mu \Gamma(\mu + 1)} K_{v-\mu}(as)$
$\frac{r^{v+2}}{(r^4 + 4a^4)^{v+\frac{1}{2}}}$	$\frac{\left(\frac{1}{2}s\right)^v \sqrt{\pi}}{2(2a)^{2v-2} \Gamma\left(v + \frac{1}{2}\right)} J_{v-1}(as) K_{v-1}(as)$
$r^{\mu-v} J_\mu(ar)$	$0, \quad 0 < s < a$ $\frac{2^{\mu-v+1} a^\mu (s^2 - a^2)^{r-\mu-1}}{s^v \Gamma(v - \mu)}, \quad a < s$

Çizelge A.1’de Hankel dönüşümünün $v=0$ durumunu ifade eder. Tablo A.2’de Hankel dönüşümünün v . mertebeden genel durumunu ifade eder. Bu tablolarda $h(x)$ birim adım fonksiyonudur. I_v ve K_v değiştirilmiş Bessel fonksiyonlardır, $\mathbf{L}_0$ ve $\mathbf{H}_0$ Struve fonksiyonlardır ve Ker ve Kei Kelvin fonksiyonlarıdır (Abramowitz and Stegun 1965).



ÖZGEÇMİŞ

Meryem GÜNEY, ilk ve orta öğrenimini Zonguldak Ereğli’de tamamladıktan sonra 2008 yılında girdiği Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden 2012 yılında mezun oldu. Halen 2022 yılında girdiği Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans programını sürdürmektedir.

