



**$n = pq$ VE $n = pqr$ DURUMLARINDA TAMSAYI DÖNGÜSEL
ÇİZGELER İÇİN SO SANISI**

Kübra BATAK

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

OCAK 2025

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Kübra BATAK

31/01/2025

$n = pq$ VE $n = pqr$ DURUMLARINDA TAMSAYI DÖNGÜSEL ÇİZGELER İÇİN SO SANISI

(Yüksek Lisans Tezi)

Kübra BATAK

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Ocak 2025

ÖZET

Bütün özdeğerleri tamsayı olan döngüsel grafa tamsayı döngüsel graf adı verilir. 2006 yılında, W. So, $\tau(n)$ n 'nin bölenlerinin kümesi olmak üzere n köşe üzerinde eş spektral olmayan en fazla $2^{\tau(n)-1}$ sayıda tamsayı döngüsel çizge olduğunu belirten bir varsayım önerdi. Bu çalışmada, ilk olarak hala açık olan konjektürün mevcut durumunu sunacağız. İkinci olarak So konjektürünü n in farklı iki tek asalın çarpımı olması durumunda ispatını vereceğiz ve sonra n in farklı üç tek asalın çarpımı olması durumu için yaptığımız gözlemlere odaklanacağız.

Bilim Kodu : 20401

Anahtar Kelimeler : Tamsayı döngüsel graf, So'nun konjektürü, özdeğer, eş spektral

Sayfa Adedi : 27

Danışman : Prof. Dr. Ercan ALTINIŞIK

SO'S CONJECTURE FOR INTEGRAL CIRCULANT GRAPHS IN THE CASES

$$n = pq \text{ AND } n = pqr$$

(M. Sc. Thesis)

Kübra BATAK

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

January 2025

ABSTRACT

A cyclic graph whose eigenvalues are all integers is called an integral circulant graph. In 2006, W. So propose a conjecture which states that there are exactly $2^{\tau(n)-1}$ non-isospectral integral circulant graphs of order n , where $\tau(n)$ is the number of divisors of n . In this thesis, first we present the current state of the conjecture, which is still open. Second we show that the conjecture is true for a particular case of n which is a product of two different odd primes and then we focus on some certain observations for a case of n which is a product of three different odd primes.

Science Code : 20401

Key Words : Integral circulant graph, So's conjecture, eigenvalue, isospectral

Page Number : 27

Supervisor : Prof. Dr. Ercan ALTINIŞIK

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim ve tez yazım sürecim boyunca akademik olarak beni destekleyen bilgilerini benimle paylaşan, doğru bilgiye ulaşmamı sağlayan ve akademik araştırma ile ilgili bana birçok şey öğreten danışmanım Prof. Dr. Ercan ALTINIŞIK’a,

Bu süreçte her zaman yanımda olan, beni destekleyen sevgili eşim Tolga BATAK ve kıymetli oğlumuz Kemal Ata BATAK’a,

Eğitim-öğretim hayatım boyunca maddi ve manevi desteğini benden esirgemeyen, en büyük hayali bu süreci başarıyla tamamlamam olan annem Aysel ÇEBİŞ’e,

Hep bir yerlerden beni izlediğini bildiğim merhum babam Zeki ÇEBİŞ’e,
Lisans eğitimimi aldığım Hacettepe Üniversitesi matematik bölümü hocalarına ve yüksek lisans eğitimimi aldığım Gazi Fen Fakültesinin kıymetli hocalarına, teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
ŞEKİLLERİN LİSTESİ.....	viii
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	ix
1. GİRİŞ.....	1
2. ÖN BİLGİLER.....	3
3. $N = P.Q$ VE $N = P.Q.R$ DURUMUNDA KONJEKTÜR İLE İLGİLİ GÖZLEMLERİMİZ	15
4. SONUÇ VE ÖNERİLER	23
KAYNAKLAR	25
ÖZGEÇMİŞ	27

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 2.1. Graf.....	3
Şekil 2.2. Döngü (loop, düğüm) noktası	3
Şekil 2.3. Çoklu kenara sahip bir graf.....	4
Şekil 2.4. Yönlendirilmiş kenarlara sahip bir graf.....	4
Şekil 2.5. Bağlantılı olmayan bir graf.....	5
Şekil 2.6. Ağaç graf	5
Şekil 2.7. Bir grapta komşu kenarlar	6
Şekil 2.8. Köşeleri farklı derecelere sahip olan bir graf	6
Şekil 2.9. Graf.....	7
Şekil 2.10. Alt graf.....	7
Şekil 2.11. Graf.....	7
Şekil 2.12. Boş graf.....	8
Şekil 2.13. Tam graf.....	9
Şekil 2.14. Düzenli graflar	9
Şekil 2.15. R-düzenli graf	10
Şekil 2.16. İki parçalı graf.....	10
Şekil 2.17. Bir grafın tümleyeni.....	11
Şekil 2.18. İzomorf graflar.....	11
Şekil 2.19. Döngüsel graf	12

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile aşağıda sunulmuştur.

Simgeler

Açıklamalar

$D(n)$	n tamsayısının pozitif tamsayı bölenleri
$E(G)$	G grafının kenar kümesi
$G_n(d)$	$(n, d) = 1$ olan n 'den küçük pozitif tamsayılar kümesi
$S(G)$	G grafının sembol kümesi
$Sp(G)$	G grafının spektrumu
$V(G)$	G grafının köşe kümesi
$\tau(n)$	n tamsayısının pozitif tamsayı bölenlerinin sayısı

Kısaltmalar

Açıklamalar

Gcd-graf	En büyük ortak bölen-grafı
-----------------	----------------------------

1. GİRİŞ

Graf teorisinden ilk defa Euler'in 1736'da yazdığı "Königsberg'in yedi köprüsü" isimli makalesinde bahsedilmiştir. O yıllarda Königsberg'deki Pregel nehri Kneiphof adasının iki yanından akmakta ve üzerinde yedi farklı köprü bulunmaktaydı. Halk, her bir köprüden sadece bir kez geçerek kıyıları dolaşıp başlangıç noktasına geçmenin mümkün olup olmadığını merak ediyordu. İsviçreli matematikçi Leonhard Euler diğerlerinin aksine köprülerden geçmek yerine problemi hat ve düğümlerden oluşan bir yapıya dönüştürerek çözmeyi başarmıştır. Bu yapıya daha sonradan graf adı verilmiştir. Graf teorisinin gelişimine baktığımızda fizik, kimya, biyoloji gibi pozitif bilimlerdeki çalışmalarda graflardan yararlanılmıştır. Örneğin Gustav Kirchhoff elektrik devrelerinde akım ve gerilimleri hesaplamaya yardımcı olan ünlü Kirchhoff devre kuramlarını yayımladı ve graf teorisine katkılar sundu. Organik kimyada Cayley graflardan yararlanmış ve yeni bir graf türü olan Cayley grafları ortaya koymuştur. Kimyasal reaksiyonların gösteriminde ve moleküler biyolojide de graf teorisinden yararlanılır. Pozitif bilimlerin dışında günlük hayatın karmaşık durumlarını çözmek için de graf teorisinin uygulamalar kullanılır. Örneğin bilgisayar ağları, web sayfaları, şebeke yapıları, sosyal ağlar, konuma bağlı uygulamalar gibi alanlarda graf teorisinin uygulama alanlarıdır.

Problem durumu / Konunun tanımı

Bu çalışmada Wasin So'nun ortaya attığı tamsayı döngüsel grafların komşuluk matrislerinin sembol kümeleri eşit değilse spektrumlarının eşit olmadığı problemi ele alınmıştır [1]. W. So'nun sembol kümesi ile karakterizasyonunun yanında W. Klotz ve T. Sander özel bir döngüsel graf sınıfı olan birimsel Cayley grafları genelleştirerek gcd grafları tanıtmış ve gcd grafların bütün özdeğerlerinin birer tamsayı olduğunu göstermiştir [2]. Daha sonra J.W. Sander ve T. Sander çarpımsal bölen kümelerine sahip iki tamsayı döngüsel grafin ancak ve ancak spektral vektörleri çakışırsa izomorf olduğunu kanıtlamışlardır [3]. J.W. Sander, bir tamsayı döngüsel grafin komşuluk matrisinin 0 özdeğerine sahip olması durumunda çekirdeğinin boyutu ile n 'nin $n = p^k$ biçimine bir asalın kuvveti olması arasındaki ilişkiyi incelemiştir [4]. Puchta, So'nun tamsayı döngüsel graflar ile ilgili olan konjektürünün zayıf bir versiyonunu kanıtlamıştır [5]. Mönius, $k \in \mathbb{Z}^+$ ve $2 \leq p < q$ asalları için $n = p^k, pq^k, p^2q$ olması durumunda So'nun konjektürünün doğru olduğunu göstermiştir [6]. Li

ve Liu sırasıyla n 'nin aşağıdaki tamsayı değerleri için varsayımın geçerliliğini kanıtlamışlardır:

- i) $n \geq 1$ tek tamsayı $n = p_1^{j_1} p_2^{j_2} \dots p_s^{j_s}$, burada $s \geq 2$ ve $\forall r \in [s-1], \prod_{i=1}^r p_i^{j_i} < p_{r+1}$.
- ii) $n \geq 1$ çift tamsayı $n = 2p_1^{j_1} p_2^{j_2} \dots p_s^{j_s}$, burada $s \geq 2$ ve $\forall r \in [s-1], \prod_{i=1}^r p_i^{j_i} < p_{r+1}$.
- iii) $2 \leq p < q$ olmak üzere $n = p^3 q$.
- iv) $2 \leq p < q$ olmak üzere $n = p^2 q^2$.

Böylece, So'nun konjektürü ile ilgili bütün önceki sonuçları genelleştirmişlerdir [7].

Bugüne kadar yapılan bu çalışmalarla problem farklı şekillerde ele alınmış çözüme dair önemli katkılarda bulunulmuştur. Ancak konjektürün tam bir ispatı halen yapılmamıştır.

Bu çalışmada tamsayı döngüsel grafların spektrumları ile karakterizasyonu üzerinde durulmuştur. Bütün özdeğerleri tamsayı olan döngüsel grafa tamsayı döngüsel graf adı verilir. $\tau(n)$, n pozitif tamsayısının pozitif tamsayı bölenlerinin sayısını göstermek üzere eş spektral olmayan (aynı özdeğerlere sahip olmayan) n köşeli tamsayı döngüsel grafların sayısının $2^{\tau(n)-1}$ olduğuna ilişkin bir konjektür ortaya atılmıştır [1].

Bu çalışmada p, q, r farklı asal sayılar olmak üzere $n = pq$ durumunda So konjektürünü ispatlayacağız, Sonra $n = pqr$ durumunda So konjektürü ile ilgili gözlemlerimizi paylaşacağız. Bütün bunlar için öncelikle G tamsayı döngüsel grafının maksimum özdeğerinin $|S(G)|$ olduğunu gözlemleyeceğiz [1].

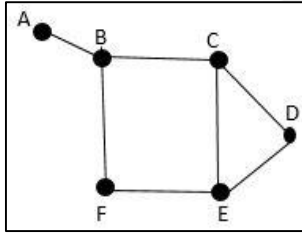
2. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde çalışmamız için önemli rol oynayan tanımları, gösterimleri ve kullanışlı sonuçları tanıtacağız.

Tanımlar

2.1 Tanım [8] $n, m \in \mathbb{N}$ olmak üzere $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ köşe kümesi ve $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ kenar kümesi olmak üzere bir G grafi, $G = (V, E)$ sıralı ikilisi şeklinde tanımlanır. Burada E kümesindeki bir kenar, V kümesindeki noktaların bir sıralı ikilisidir. $1 \leq k \leq m$, $1 \leq i, j \leq n$ için $e_k = \{v_i, v_j\}$ bir kenardır ve burada v_i ve v_j e_k kenarını oluşturan köşelerdir. Köşe kümesini $V(G)$ kenar kümesini ise $E(G)$ ile gösterilir.

Örnek

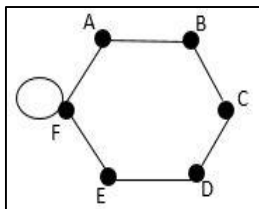


Şekil 2.1. Graf

Şekil 2.1’de A, B, C, D, E ve F köşeler, doğru parçaları kenarlar ve tüm diyagram graf olarak adlandırılır.

2.2. Tanım [8] Bir grafteda herhangi bir kenar bir köşede başlayıp tekrar aynı köşede bitiyorsa bu köşeye döngü (loop, düğüm) noktası denir.

Örnek

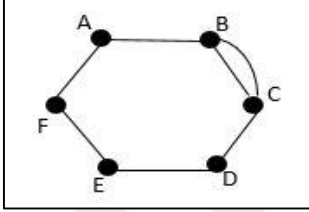


Şekil 2.2. Döngü (loop, düğüm) noktası

Şekil 2.2. de F köşesi döngü noktasıdır.

2.3. Tanım [8] Bir grafın iki komşu köşesi arasında birden fazla kenar varsa bu kenara çoklu kenar denir.

Örnek

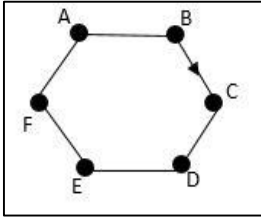


Şekil 2.3. Çoklu kenara sahip bir graf

Şekil 2.3. de $\{B, C\}$ kenarı çoklu kenardır.

2.4. Tanım [8] Bir grafın kenarlarının hangi köşede başlayıp hangi köşede bittiğini belli eden bir yön bilgisi var ise bu kenara yönlendirilmiş graf denir.

Örnek



Şekil 2.4. Yönlendirilmiş kenarlara sahip bir graf

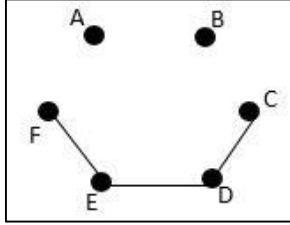
Şekil 2.4. de $\{B, C\}$ kenarı yönlendirilmiş kenardır.

2.5. Tanım [8] Bir grafın bir köşesinden başlayarak kenarlar üzerinden bir başka köşesine ulaştığımızda buna bir yol (path) denir. Eğer yol bir köşede başlayıp aynı köşede bitiyorsa buna bir devir (cycle) denir.

2.6. Tanım [8] Bir grafın herhangi iki köşesi arasında en az bir yol varsa bu grafa bağlantılı graf denir. Eğer bir grafın herhangi iki köşesi arasında bir yol bulunmuyorsa bu grafa

bağlantılı olmayan graf denir.

Örnek

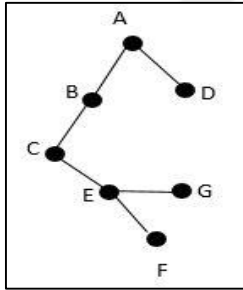


Şekil 2.5. Bağlantılı olmayan bir graf

Şekil 2.5. de bağlantılı olmayan bir graf vardır.

2.7. Tanım [8] Eğer her köşe çifti arasında yalnızca bir yol bulunuyorsa bu graflara ağaç graf adı verilir.

Örnek

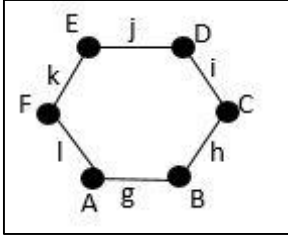


Şekil 2.6. Ağaç graf

2.8. Tanım [8] Döngü (loop) noktası, yönlendirilmiş kenarı, çoklu kenarı olmayan graflara basit graf denir. Şekil 2.1., Şekil 2.5. ve Şekil 2.6. daki graflar basit graftır.

2.9. Tanım [8] Bir G grafının v ve w köşeleri arasında bir kenar varsa bu köşelere komşu denir. Benzer şekilde G grafının e_1 ve e_2 kenarları ortak bir köşeye sahipse bu kenarlar komşudur denir.

Örnek

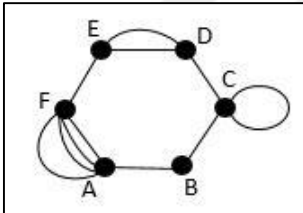


Şekil 2.7. Bir grafta komşu kenarlar

$A - B, B - C, C - D, D - E, E - F, F - A$ köşeleri komşudur. Ortak köşelere sahip j ile i , i ile h , h ile g , g ile l , l ile k kenarları komşudur.

2.10. Tanım [8] G grafinin bir v köşesinin derecesi bu köşenin oluşturduğu kenarların sayısı olarak ifade edilir. $der(v)$ olarak gösterilir. Bir köşenin derecesi hesaplanırken bir döngünün dereceye katkısı 2 dir.

Örnek

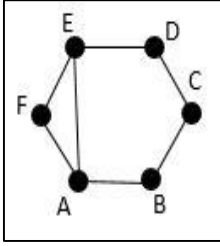


Şekil 2.8. Köşeleri farklı derecelere sahip olan bir graf

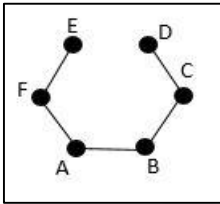
$der(A) = der(F) = 5, der(E) = der(D) = 3, der(C) = 4, der(B) = 2$ dir.

2.11. Tanım [8] G grafinin bir alt grafi, köşelerinin her biri $V(G)$ 'ye ve kenarlarının her biri $E(G)$ 'ye ait olan bir graftır.

Örnek



Şekil 2.9. Graf

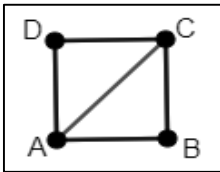


Şekil 2.10. Alt graf

Şekil 2.10.'daki graf Şekil 2.9.'daki grafın alt grafıdır.

2.12. Tanım [8] G , $\{1, 2, \dots, n\}$ etiketli köşelere sahip bir graf olmak üzere G grafının komşuluk matrisi A ij – inci girişi i ve j köşelerinin arasındaki kenar sayısını verir. A $n \times n$ kare matristir.

Örnek



Şekil 2.11. Graf

Şekil 2.11.'deki grafın komşuluk matrisi $\mathcal{A}$ ise,

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

$\mathcal{A}$ matrisinde birinci satır ve birinci sütun A köşesini, ikinci satır ve ikinci sütun B köşesini,

üçüncü satır ve üçüncü sütun C köşesini, dördüncü satır ve dördüncü sütun D köşesini temsil eder.

Şimdi bu matrisin özdeğerlerini hesaplayalım,

$|\mathcal{A} - \lambda I| = 0$ karakteristik denklemin reel kökleri özdeğerleridir.

$$\left| \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -\lambda \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\lambda^4 - 5\lambda^2 - 4\lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda^3 - 5\lambda - 4) = 0$$

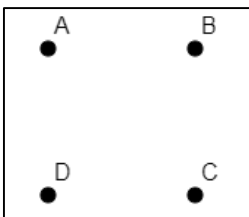
$$\lambda(\lambda+1)(\lambda^2 - \lambda - 4) = 0$$

$$\lambda(\lambda+1)\left(\lambda + \frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)\left(\lambda - \frac{\sqrt{17}+1}{2}\right) = 0$$

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = \frac{-\sqrt{17}+1}{2}, \lambda_4 = \frac{\sqrt{17}+1}{2}.$$

2.13. Tanım [8] Kenar kümesi boş küme olan graflara boş graf denir.

Örnek

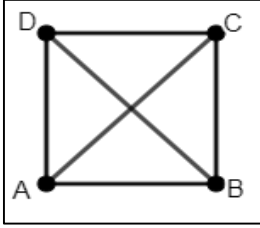


Şekil 2.12. Boş graf

Şekil 2.12.'de bir boş graf verilmiştir.

2.14. Tanım [8] Her bir farklı köşe çiftinin komşu olduğu basit bir grafa, tam graftır denir.

Örnek

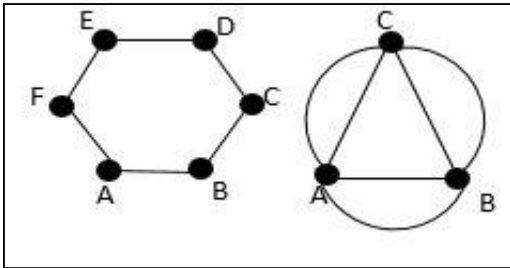


Şekil 2.13. Tam graf

Şekil 2.13.'de bir tam graf verilmiştir.

2.15. Tanım [8] Her köşesinin aynı dereceye sahip olan bir graf düzenli (regüler) bir graftır.

Örnek



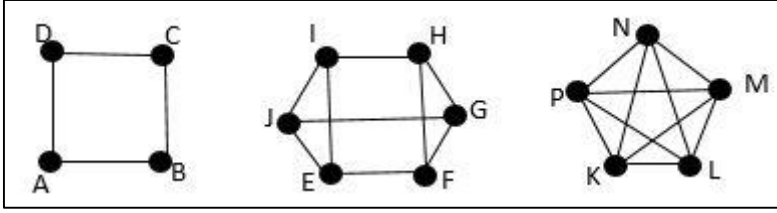
Şekil 2.14. Düzenli graflar

Şekil 2.14.'de düzenli graflar verilmiştir.

2.16. Tanım [8] Her bir köşesinin derecesi iki olan düzenli (regüler) grafa devirli graf denir.

Her köşenin derecesi r ise, graf r derecesinde düzenli veya r –düzenlidir denir.

Örnek

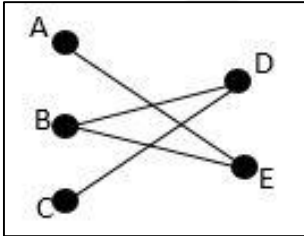


Şekil 2.15. R-düzenli graf

Şekil 2.15.'de köşeleri A, B, C, D olan graf 2 – düzenli; köşeleri E, F, G, H, I, J olan graf 3 –düzenli; köşeleri K, L, M, N, P olan graf 4 –düzenlidir.

2.17. Tanım [8] Bir G grafinin köşe kümesi, G 'nin her bir kenarı A 'nın bir köşesiyle B 'nin bir köşesini birleştirecek şekilde iki ayrı A ve B kümesine bölünebilirse, o zaman G iki parçalı bir graftır.

Örnek

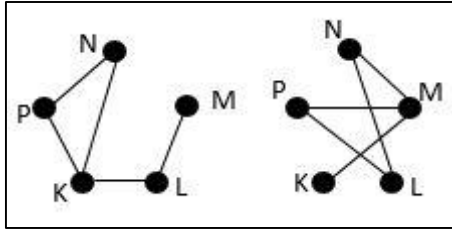


Şekil 2.16. İki parçalı graf

Şekil 2.16.'da grafta A, B, C köşeleri arasında kenarlar yoktur ve aynı şekilde D, E köşeleri arasında bir kenar yoktur. Yani köşe kümesi iki ayrı köşe kümesine bölünebilir. Böylece Şekil 2.16.'daki graf iki parçalı graftır.

2.18. Tanım [8] Eğer G , köşe kümesi $V(G)$ olan basit bir grafsa, tümleyeni $\bar{G}$, köşe kümesi $V(G)$ olan basit bir graftır; burada iki köşe ancak ve ancak G 'de komşu değilse komşulardır.

Örnek

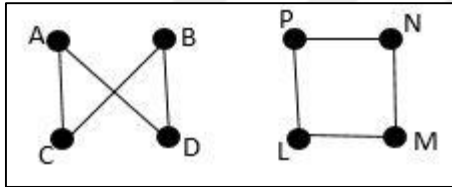


Şekil 2.17. Bir grafın tümleyeni

Şekil 2.17.'de bir grafın tümleyeni verilmiştir.

2.19. Tanım [8] G_1 ve G_2 iki graf olmak üzere G_1 'in köşeleri ile G_2 'nin köşeleri arasında G_1 'in herhangi iki köşesini birleştiren kenarların sayısı, G_2 'nin karşılık gelen köşelerini birleştiren kenarların sayısına eşit olacak şekilde bire bir eşleşme varsa G_1 ve G_2 izomorftur denir.

Örnek



Şekil 2.18. İzomorf graflar

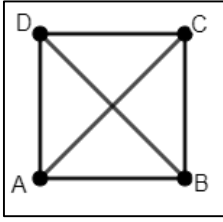
Şekil 2.18.'de izomorf graflar görünmektedir.

2.20. Tanım [8] Komşuluk matrisi döngüsel olan grafa, döngüsel graf adı verilir. Daha açık olarak I_{n-1} , $(n-1) \times (n-1)$ tipinden birim matris olmak üzere

$$Z = \begin{bmatrix} 0 & I_{n-1} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

matrisi ile değişmeli olan komşuluk matrisine sahip grafa döngüsel graf denir. Bütün özdeğerleri tamsayı olan döngüsel grafa, tamsayı döngüsel graf adı verilir.

Örnek: Şimdi şekilde verilen döngüsel grafın komşuluk matrisini yazalım ve özdeğerlerini hesaplayalım.



Şekil 2.19. Döngüsel graf

Şekil 2.19.'da döngüsel graf görülmektedir

$$\mathcal{A}(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Şimdi bu matrisin özdeğerlerini hesaplayalım,

$|\mathcal{A} - \lambda I| = 0$ karakteristik denklemin reel kökleri özdeğerleridir.

$$\left| \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -\lambda \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\lambda^4 - 6\lambda^2 - 8\lambda - 3 = 0$$

$$(\lambda+1)(\lambda^3 - \lambda^2 - 5\lambda - 3) = 0$$

$$(\lambda+1)(\lambda+1)(\lambda^2 - 2\lambda - 3) = 0$$

$$(\lambda+1)(\lambda+1)(\lambda+1)(\lambda-3) = 0$$

$$\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -1, \lambda_4 = -1$$

Bu özdeğerler tamsayı olduğu için bu graf tamsayı döngüsel graftır.

2.21. Tanım [8] Bir G döngüsel grafinin köşeleri $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ ile etiketlensin.

$$S(G) = \{k: a_{0,k} = 1\} \subset \{1, 2, \dots, n-1\} \quad (2.3)$$

kümesine G 'nin sembol kümesi denir. Daha açık olarak sembol kümesinin elemanları G grafinin 0 köşesine komşu olan köşelerin indislerinden oluşur.

2.22. Tanım [8] Bir G döngüsel grafinin komşuluk matrisinin özdeğerlerinin katlılıkları da hesaba katılarak oluşturulan kümeye G 'nin spektrumu denir. $sp(G)$ ile gösterilir.

2.23. Tanım [8] G mertebesi n olan bir graf olmak üzere,

$$G_n(d) = \{k: 1 \leq k \leq n-1, \gcd(k, n) = d\} \quad (2.4)$$

biçiminde tanımlanır.

- $n \geq 1$ bir tamsayı olsun. d , n 'nin bir böleni olsun.

$G_n(d) = d \cdot G_{\frac{n}{d}}(1)$ [1] olduğunu biliyoruz. Burada $d \cdot G_{\frac{n}{d}}(1) = \{dj \mid j \in G_{\frac{n}{d}}(1)\}$ dir.

$$|G_n(d)| = \left| d \cdot G_{\frac{n}{d}}(1) \right| = \left| G_{\frac{n}{d}}(1) \right| = \varphi\left(\frac{n}{d}\right), \text{ burada } \varphi \text{ Euler fonksiyonudur.} \quad (2.5)$$

- $n \geq 1$ bir tamsayı olsun.

$$\omega_n = e^{2\pi i/n} \text{ kümesi burada } i = \sqrt{-1}. \quad (2.6)$$

- $A(G)$ simetrik bir matris olduğundan $k \in S(G)$ olması için gerek ve yeter koşul $n-k \in S(G)$ olmasıdır [1].

- G 'nin spektrumu, $sp(G) = (\lambda_0(G), \lambda_1(G), \dots, \lambda_{n-1}(G))$, hesaplanabilir:

$$0 \leq t \leq n-1 \text{ için } \lambda_t(G) = \sum_{k \in S(G)} (\omega^t)^k, \quad (2.7)$$

burada $\omega = e^{2\pi i/n}$ birimin n inci köküdür.

- $n \geq 2$ olsun, Ramanujan toplamları

$$R_n(t) = \sum_{j \in G_n} (\omega^t)^j \text{ olarak tanımlanır,} \quad (2.8)$$

burada $\omega = e^{2\pi i/n}$ ve $t \in \mathbb{Z}$ dir.

2.1. Teorem [1] G n köşeli, sembol kümesi $S(G)$ olan döngüsel graf olsun. O halde G 'nin tamsayı graf olması için gerek ve yeter şart $S(G)$ 'nin $G_n(d)$ 'lerin bir birleşimi olmasıdır.

2.2. Teorem [1] $\tau(n)$, n pozitif tamsayısının pozitif tamsayı bölenlerinin sayısını gösterebilir. O zaman n köşeli tamsayı döngüsel grafların sayısı en fazla $2^{\tau(n)-1}$ dir.

2.3 Teorem [1] G , n köşe üzerinde $S(G) = G_n(d)$ sembol kümesi ile döngüsel graf olsun, burada d , n 'nin tam böleni olsun,

$1 \leq t \leq n - 1$ için $\lambda_t(G) = R_{n/d}^t(t)$ d



3. $N = PQ$ VE $N = PQR$ DURUMUNDA KONJEKTÜR İLE İLGİLİ GÖZLEMLERİMİZ

W. So tamsayı döngüsel grafların karakterizasyonunu sembol kümesi kavramı yardımıyla Teorem 2.1 de G nin tamsayı graf olması için gerek ve yeter şartın $S(G)$ nin $G_n(d)$ 'lerin bir birleşimi olduğunu ispatlayarak gerçekleştirmiştir. $\tau(n), n$ pozitif tamsayısının pozitif tamsayı bölenlerini göstermek üzere eş spektral olmayan (aynı özdeğere sahip olmayan) n köşeli tamsayı döngüsel grafların sayısını $2^{\tau(n)-1}$ olduğuna ilişkin So tarafında bir konjektür ortaya atılmıştır. Bu konjektür halen ispatlanamamış ya da çürütülememiştir. G_1 ve G_2 sırasıyla $S(G_1)$ ve $S(G_2)$ sembollerine sahip tamsayı döngüsel graflar olsun. Eğer $S(G_1) \neq S(G_2)$ ise $sp(G_1) \neq sp(G_2)$ olur, dolayısıyla G_1 ve G_2 izomorfik değildir [1]. So'nun bu varsayımı için daha fazla ayrıntı elde etmek için $|S(G)|$ 'nin G döngüsel grafın maksimum özdeğeri olduğunu gözlemleyeceğiz. $|S(G_1)| \neq |S(G_2)|$ ise $sp(G_1) \neq sp(G_2)$ olur. So, p bir asal olmak üzere $n = p^r$ ise n 'nin öz bölenleri $1, p, p^2, \dots, p^{r-1}$ ve $G_n(d)$ lerin eleman sayılarının sırasıyla $(p-1).p^{r-1}, (p-1).p^{r-2}, \dots, (p-1).p, (p-1)$ olduğunu ispatsız olarak ifade etmiştir. Sonuç olarak p^r köşeli tamsayı döngüsel çizgelerin tüm sembolleri farklı boyutlardadır. K. Mönius ve W. So n tamsayısının, $2 \leq p < q$ asalları için $n = p^k, pq^k, p^2q$ ve $2 \leq p < q < r$ asal sayıları için $n = pqr$ özel durumları için sanıyı doğruladı. İspatı yaparken süper dizi ifadesini kullandılar. Süper dizi her terimin önceki tüm terimlerin kısmi toplamından daha büyük olduğu pozitif bir dizidir [6]. Yakın tarihte Li ve Liu sırasıyla n 'nin tamsayı değerleri için varsayımın geçerliliğini kanıtlamışlardır:

i) $n \geq 1$ tek tamsayı $n = p_1^{j_1} p_2^{j_2} \dots p_s^{j_s}$, burada $s \geq 2$ ve $\forall r \in [s-1], \prod_{i=1}^r p_i^{j_i} < p_{r+1}$.

ii) $n \geq 1$ çift tamsayı $n = 2p_1^{j_1} p_2^{j_2} \dots p_s^{j_s}$, burada $s \geq 2$ ve $\forall r \in [s-1], \prod_{i=1}^r p_i^{j_i} < p_{r+1}$.

iii) $2 \leq p < q$ olmak üzere $n = p^3 q$.

iv) $2 \leq p < q$ olmak üzere $n = p^2 q^2$.

Böylece, So'nun konjektörü ile ilgili bütün önceki sonuçları genelleştirmişlerdir [8]. Şimdi So'nun konjektüründe argümanın n 'nin iki farklı asanın çarpımı olduğu durumda geçerli olmasını gözlemleyeceğiz.

3.1. Teorem G, n köşeli bir tamsayı graf olsun. $2 < p < q$ asal sayıları için $n = p \cdot q$ ise G 'nin sembol kümelerinin mertebeleri farklı olduğundan spektrumları da farklıdır.

İspat: Sembol kümelerinin mertebesi maksimum özdeğere eşit olduğunu biliyoruz. İspatı tamamlayabilmek için bütün sembol kümelerinin mertebelerinin farklı olduğunu görmemiz yeterli olacaktır. Çünkü maksimum özdeğerler farklı ise spektrumlar da farklı olur. $n = p \cdot q$ olduğunda n 'nin öz bölenleri 1, p ve q dur. $|G_n(1)| = \varphi(n)$ olduğunu biliyoruz.

$$|G_n(1)| = \varphi(n) = (p - 1) \cdot (q - 1) \text{ olduğundan}$$

$$|S(G)| = \lambda_{max} = (p - 1) \cdot (q - 1) \quad (3.1)$$

$$G_n(p) = p \cdot G_{n/p}(1) = p \cdot G_q(1) \text{ olduğundan}$$

$$|G_n(p)| = |p \cdot G_q(1)| = |G_q(1)| = \varphi(q) = q - 1 \text{ ve böylece}$$

$$|S(G)| = \lambda_{max} = q - 1 \quad (3.2)$$

$$G_n(q) = q \cdot G_{n/q}(1) = q \cdot G_p(1). \text{ Buradan}$$

$$|G_n(q)| = |q \cdot G_p(1)| = |G_p(1)| = \varphi(p) = p - 1$$

ve böylece

$$|S(G)| = \lambda_{max} = p - 1 \quad (3.3)$$

G_n kümeleri ayrık kümeler olduğunda birleşimlerinin eleman sayısı kümelerin eleman sayıları toplamına eşittir. Buradan

$$S(G) = G_n(1) \cup G_n(p) \text{ için}$$

$$|S(G)| = \lambda_{max} = |G_n(1)| + |G_n(p)|$$

$$= (p - 1) \cdot (q - 1) + (q - 1)$$

$$= (q-1) \cdot (p-1+1)$$

$$= pq - p \quad (3.4)$$

$$S(G) = G_n(1) \cup G_n(q) \text{ için}$$

$$|S(G)| = \lambda_{max} = |G_n(1)| + |G_n(q)|$$

$$\begin{aligned}
&= (p-1) \cdot (q-1) + (p-1) \\
&= (p-1) \cdot (q-1+1) \\
&= pq - q
\end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned}
S(G) &= G_n(p) \cup G_n(q) \text{ için} \\
|S(G)| &= \lambda_{max} = |G_n(p)| + |G_n(q)| \\
&= q-1 + p-1 \\
&= q + p - 2
\end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned}
S(G) &= G_n(1) \cup G_n(p) \cup G_n(q) \text{ için} \\
|S(G)| &= \lambda_{max} = |G_n(1)| + |G_n(p)| + |G_n(q)| \\
&= (p-1) \cdot (q-1) + (q-1) + (p-1) \\
&= pq - 1
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Burada her bir λ_{max} değerleri birbirinden farklı olduğu için spektrumları da farklıdır bu ispatı tamamlar.

Örnek

G mertebesi n olan bir tamsayı döngüsel graf olsun. $n = 5 \cdot 7$ olsun. n nin öz bölenleri 1, 5, 7 dir.

$$|G_{35}(1)| = 4 \cdot 6 = 24 \text{ ise } |S(G)| = \lambda_{max} = 24$$

$$|G_{35}(5)| = 6 \text{ ise } |S(G)| = \lambda_{max} = 6$$

$$|G_{35}(7)| = 4 \text{ ise } |S(G)| = \lambda_{max} = 4$$

$$S(G) = G_{35}(1) \cup G_{35}(5) \text{ ise } |S(G)| = \lambda_{max} = 24 + 6 = 30$$

$$S(G) = G_{35}(1) \cup G_{35}(7) \text{ ise } |S(G)| = \lambda_{max} = 24 + 4 = 28$$

$$S(G) = G_{35}(5) \cup G_{35}(7) \text{ ise } |S(G)| = \lambda_{max} = 6 + 4 = 10$$

$$S(G) = G_{35}(1) \cup G_{35}(5) \cup G_{35}(7) \text{ ise } |S(G)| = \lambda_{max} = 24 + 6 + 4 = 34$$

Her bir maksimum özdeğer birbirinden farklı olduğu için spektrumları da farklıdır.

Örnek

G mertebesi n olan bir tamsayı döngüsel graf olsun. $n = 3 \cdot 11$ olsun. n nin öz bölenleri 1, 3 ve 11 dir.

$$|G_{33}(1)| = 2 \cdot 10 = 20 \text{ ise } |S(G)| = \lambda_{max} = 20$$

$$|G_{33}(3)| = 10 \text{ ise } |S(G)| = \lambda_{max} = 10$$

$$|G_{33}(11)| = 2 \text{ ise } |S(G)| = \lambda_{max} = 2$$

$$S(G) = G_{33}(1) \cup G_{33}(3) \text{ ise } |S(G)| = \lambda_{max} = 20 + 10 = 30$$

$$S(G) = G_{33}(1) \cup G_{33}(11) \text{ ise } |S(G)| = \lambda_{max} = 20 + 2 = 22$$

$$S(G) = G_{33}(3) \cup G_{33}(11) \text{ ise } |S(G)| = \lambda_{max} = 10 + 2 = 12$$

$$S(G) = G_{33}(1) \cup G_{33}(3) \cup G_{33}(11) \text{ ise } |S(G)| = \lambda_{max} = 20 + 10 + 2 = 32$$

Her bir maksimum özdeğer birbirinden farklı olduğu için spektrumları da farklıdır.

Şimdi G , n köşeli bir tamsayı graf olsun. $2 < p < q < r$ asal sayıları için $n = p \cdot q \cdot r$ durumuyla ilgili örnekler inceleyeceğiz.

Örnek

G , n köşeli bir tamsayı graf olsun. $n = 3 \cdot 5 \cdot 7$ olsun. n nin öz bölenleri; 1, 3, 5, 7, 15, 21, 35 dir.

$$|G_{105}(1)| = 2 \cdot 4 \cdot 6 = 48 \text{ ise } |S(G)| = \lambda_{max} = 48$$

$$|G_{105}(3)| = 4.6 = 24 \text{ ise } |S(G)| = \lambda_{max} = 24$$

$$|G_{105}(5)| = 2.6 = 12 \text{ ise } |S(G)| = \lambda_{max} = 12$$

$$|G_{105}(7)| = 2.4 = 8 \text{ ise } |S(G)| = \lambda_{max} = 8$$

$$|G_{105}(15)| = 6 = 6 \text{ ise } |S(G)| = \lambda_{max} = 6$$

$$|G_{105}(21)| = 4 = 4 \text{ ise } |S(G)| = \lambda_{max} = 4$$

$$|G_{105}(35)| = 2 = 2 \text{ ise } |S(G)| = \lambda_{max} = 2$$

$$S(G) = G_{105}(1) \cup G_{105}(3) \text{ ise } |S(G)| = \lambda_{max} = 48 + 24 = 72$$

$$S(G) = G_{105}(1) \cup G_{105}(5) \text{ ise } |S(G)| = \lambda_{max} = 48 + 12 = 60$$

$$S(G) = G_{105}(1) \cup G_{105}(7) \text{ ise } |S(G)| = \lambda_{max} = 48 + 8 = 56$$

$$S(G) = G_{105}(1) \cup G_{105}(15) \text{ ise } |S(G)| = \lambda_{max} = 48 + 6 = 54$$

$$S(G) = G_{105}(1) \cup G_{105}(21) \text{ ise } |S(G)| = \lambda_{max} = 48 + 4 = 52$$

$$S(G) = G_{105}(1) \cup G_{105}(35) \text{ ise } |S(G)| = \lambda_{max} = 48 + 2 = 50$$

$$S(G) = G_{105}(3) \cup G_{105}(5) \text{ ise } |S(G)| = \lambda_{max} = 24 + 12 = 36$$

$$\vdots$$

$$S(G) = G_{105}(5) \cup G_{105}(7) \text{ ise } |S(G)| = \lambda_{max} = 12 + 8 = 20$$

$$S(G) = G_{105}(5) \cup G_{105}(15) \text{ ise } |S(G)| = \lambda_{max} = 12 + 6 = 18$$

$$S(G) = G_{105}(5) \cup G_{105}(21) \text{ ise } |S(G)| = \lambda_{max} = 12 + 4 = 16$$

$$S(G) = G_{105}(5) \cup G_{105}(35) \text{ ise } |S(G)| = \lambda_{max} = 12 + 2 = 14$$

$$S(G) = G_{105}(7) \cup G_{105}(15) \text{ ise } |S(G)| = \lambda_{max} = 8 + 6 = 14$$

Son iki sembol kümesinin mertebeleri yani G tamsayı döngüsel grafların maksimum özdeğerleri aynı olduğu için spektrumları hakkında kesin bir bilgi bilemeyiz.

Örnek

G , n köşeli bir tamsayı graf olsun. $n = 3 \cdot 7 \cdot 11$ olsun. n nin öz bölenleri: 1, 3, 7, 11, 21, 33, 77 dir.

$$|G_{231}(1)| = 2 \cdot 6 \cdot 10 = 120 \text{ ise } |S(G)| = \lambda_{max} = 120$$

$$|G_{231}(3)| = 6 \cdot 10 = 60 \text{ ise } |S(G)| = \lambda_{max} = 60$$

$$|G_{231}(7)| = 2 \cdot 10 = 20 \text{ ise } |S(G)| = \lambda_{max} = 20$$

$$|G_{231}(11)| = 2 \cdot 6 = 12 \text{ ise } |S(G)| = \lambda_{max} = 12$$

$$|G_{231}(21)| = 10 = 10 \text{ ise } |S(G)| = \lambda_{max} = 10$$

$$|G_{231}(33)| = 6 = 6 \text{ ise } |S(G)| = \lambda_{max} = 6$$

$$|G_{231}(77)| = 2 = 2 \text{ ise } |S(G)| = \lambda_{max} = 2$$

$$S(G) = G_{231}(7) \cup G_{231}(77) \text{ ise } |S(G)| = \lambda_{max} = 20 + 2 = 22$$

$$S(G) = G_{231}(11) \cup G_{231}(21) \text{ ise } |S(G)| = \lambda_{max} = 12 + 10 = 22$$

$$S(G) = G_{231}(1) \cup G_{231}(3) \text{ ise } |S(G)| = \lambda_{max} = 120 + 60 = 180$$

⋮

$$S(G) = G_{231}(3) \cup G_{231}(7) \text{ ise } |S(G)| = \lambda_{max} = 60 + 20 = 80$$

⋮

$$S(G) = G_{231}(7) \cup G_{231}(11) \text{ ise } |S(G)| = \lambda_{max} = 20 + 12 = 32$$

$$S(G) = G_{231}(7) \cup G_{231}(21) \text{ ise } |S(G)| = \lambda_{max} = 20 + 10 = 30$$

$$S(G) = G_{231}(7) \cup G_{231}(33) \text{ ise } |S(G)| = \lambda_{max} = 20 + 6 = 6$$

$$\vdots$$

$S(G) = G_{231}(7) \cup G_{231}(77)$ ve $S(G) = G_{231}(11) \cup G_{231}(21)$ sembol kümeleri için $|S(G)| = \lambda_{max} = 22$ olduğundan G nin spektrumları hakkında kesin bir bilgi bilemeyiz.

Örnek

G , n köşeli bir tamsayı graf olsun. $n = 3 \cdot 11 \cdot 17$ olsun. n nin öz bölenleri: 1, 3, 11, 17, 33, 51, 167

$$|G_{561}(1)| = 2 \cdot 10 \cdot 16 = 320 \text{ ise } |S(G)| = \lambda_{max} = 320$$

$$|G_{561}(3)| = 10 \cdot 16 = 160 \text{ ise } |S(G)| = \lambda_{max} = 160$$

$$|G_{561}(11)| = 2 \cdot 16 = 32 \text{ ise } |S(G)| = \lambda_{max} = 32$$

$$|G_{561}(17)| = 2 \cdot 10 = 20 \text{ ise } |S(G)| = \lambda_{max} = 20$$

$$|G_{561}(33)| = 16 = 16 \text{ ise } |S(G)| = \lambda_{max} = 16$$

$$|G_{561}(51)| = 10 = 10 \text{ ise } |S(G)| = \lambda_{max} = 10$$

$$|G_{561}(167)| = 2 = 2 \text{ ise } |S(G)| = \lambda_{max} = 2$$

$$S(G) = G_{561}(1) \cup G_{561}(3) \text{ ise } |S(G)| = \lambda_{max} = 320 + 160 = 480$$

$$S(G) = G_{561}(1) \cup G_{561}(11) \text{ ise } |S(G)| = \lambda_{max} = 320 + 32 = 352$$

$$\vdots$$

$$S(G) = G_{561}(3) \cup G_{561}(11) \text{ ise } |S(G)| = \lambda_{max} = 160 + 32 = 192$$

$$\vdots$$

$$S(G) = G_{561}(11) \cup G_{561}(17) \text{ ise } |S(G)| = \lambda_{max} = 32 + 20 = 52$$

$$\vdots$$

$$S(G) = G_{561}(1) \cup G_{561}(3) \cup G_{561}(11) \text{ ise } |S(G)| = \lambda_{max} = 320 + 160 + 32 = 512$$

$$\vdots$$

$$S(G) = G_{561}(17) \cup G_{561}(51) \cup G_{561}(167) \text{ ise } |S(G)| = \lambda_{max} = 20 + 10 + 2 = 3$$

$$\vdots$$

$|G_{561}(11)| = 2 \cdot 16 = 32$ ve $|G_{561}(17) \cup G_{561}(51) \cup G_{561}(167)| = 32$ olduğu için G nin spektrumları hakkında kesin bir bilgi bilemeyiz.

Bu yaptığımız gözlemlerden $2 < p < q < r$ asal sayıları için $n = p \cdot q \cdot r$ özel durumunda elde ettiğimiz sembol kümelerinin mertebelerinde birbirine eşit durumlar olduğundan spektrumları hakkında kesin bir yorum yapamayız. Bu gözlemlerden ispata ulaşamıyoruz.



4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada tamsayı döngüsel grafların spektrumları ile karakterizasyonu üzerinde durulmuştur. p, q, r farklı asal sayılar olmak üzere $n = pq$ özel durumunda durumunda So konjektürünü [1] ispatlamış bulunmaktayız. Ancak kullandığımız yöntemin $n = pqr$ özel durumuna uygulanamayacağını gördükten sonra bu durumda So konjektörü ile ilgili bazı gözlemler elde ettik ve bunları paylaştık.





KAYNAKLAR

1. So, W. (2003). Integral circulant graphs. *Discrete Mathematics*, 306, 153-158.
2. Klotz, W., Sander T. (2007). Some properties of unitary Cayley graphs. *Mathematics Subject Classification*: 05C25, 05C50.
3. Sander, J. W., Sander T. (2015). On So's conjecture for integral circulant graphs. *Applicable Analysis and Discrete Mathematics*, 9, 59–72.
4. Sander, J. W. (2017). On the kernel of integral circulant graphs. *Linear Algebra and its Applications*, 549, 79-85.
5. Puchta, J. C. S., (2021). A determinant involving Ramanujan sums and So's conjecture. *Archiv der Mathematik*, 117, 379–384.
6. Mönius. K., So, W. (2023). How many non-isospectral integral circulant graphs are there?, *Australasian Journal of Combinatorics Volume*, 86(2), 320–335.
7. Li , H., Liu, X. (2024). So's conjecture for integer circulant graphs of 4 types. *Discrete Mathematics*, 347, 114044.
8. Wilson, R. J. (1998). *Introduction to graph theory* (4. edition), London: Longman, 2-29.





Gazili olmak ayrıcalıktır