

KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

**KESİRLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN CLIQUE
COLLOCATION YÖNTEMİ**

AHMET BÜYÜK

KOCAELİ 2025

KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

**KESİRLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN CLIQUE
COLLOCATION YÖNTEMİ**

AHMET BÜYÜK

Doç. Dr. Mine Aylin BAYRAK

Danışman, Kocaeli Üniversitesi

.....

Prof. Dr. Ali DEMİR

Jüri Üyesi, Kocaeli Üniversitesi

.....

Prof. Dr. İrem BAĞLAN

Jüri Üyesi, Kocaeli Üniversitesi

.....

Prof. Dr. Şevket GÜR

Jüri Üyesi, Sakarya Üniversitesi

.....

Prof. Dr. Ali DEMİR

Jüri Üyesi, Sakarya Uyg. Bilimler Üniversitesi

.....

Tezin Savunulduğu Tarih: 31.01.2025

ETİK BEYAN VE ARAŞTIRMA FONU DESTEĞİ

Kocaeli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez/proje çalışmasında,

- Bu tezin/projenin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu,
- Çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı,
- Bu çalışma kapsamında elde edilen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi,
- Bu çalışmanın Kocaeli Üniversitesi'nin abone olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Fen Bilimleri Enstitüsü'nün belirlemiş olduğu ölçütlere uygun olduğunu,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Tezin/Projenin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez/proje çalışması olarak sunmadığımı,

beyan ederim.

Bu tez/proje çalışmasının herhangi bir aşaması hiçbir kurum/kuruluş tarafından maddi/alt yapı desteği ile desteklenmemiştir.

Bu tez/proje çalışması kapsamında üretilen veri ve bilgiler tarafından no'lu proje kapsamında maddi/alt yapı desteği alınarak gerçekleştirilmiştir.

Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçları kabul ettiğimi bildiririm.

Ahmet BÜYÜK

YAYIMLAMA VE FİKRİ MÜLKİYET HAKLARI

Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından onaylanan lisansüstü tezimin/projemin tamamını veya herhangi bir kısmını, basılı ve elektronik formatta arşivleme ve aşağıda belirtilen koşullarla kullanıma açma izninin Kocaeli Üniversitesi'ne verdiğimi beyan ederim. Bu izinle Üniversiteye verilen kullanım hakları dışındaki tüm fikri mülkiyet haklarım bende kalacak, tezimin/projemin tamamının ya da bir bölümünün gelecekteki çalışmalarda (makale, kitap, lisans ve patent vb.) kullanımı bana ait olacaktır.

Tezin/projenin kendi özgün çalışmam olduğunu, başkalarının haklarını ihlal etmediğimi ve tezimin/projenin tek yetkili sahibi olduğumu beyan ve taahhüt ederim. Tezimde yer alan telif hakkı bulunan ve sahiplerinden yazılı izin alınarak kullanılması zorunlu metinlerin yazılı izin alarak kullandığımı ve istenildiğinde suretlerini Üniversiteye teslim etmeyi taahhüt ederim. Yükseköğretim kurulu tarafından yayınlanan **“Lisansüstü Tezlerin Elektronik Ortamda Toplanması, Düzenlenmesi ve Erişime Açılmasına İlişkin Yönerge”** kapsamında tezim aşağıda belirtilen koşullar haricinde YÖK Ulusal Tez Merkezi/ Kocaeli Üniversitesi Kütüphaneleri Açık Erişim Sisteminde erişime açılır.

Enstitü yönetim kurulu kararı ile tezimin/projemin erişime açılması mezuniyet tarihinden itibaren 2 yıl ertelenmiştir.

Enstitü yönetim kurulu gerekçeli kararı ile tezimin/projemin erişime açılması mezuniyet tarihinden itibaren 6 ay ertelenmiştir.

Tezim/projem ile ilgili gizlilik kararı verilmemiştir.

Ahmet Büyük

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Bu tezde Kesirli Diferansiyel Denklemlerine, Clique Collocation Yöntemi uygulanarak, gerçek çözümlere daha yakın bir çözüm elde edildiği gösterilmektedir.

Bu tezin araştırma aşamasının başlangıcından tamamlanmasına kadar bana sağladığı bilgi, sürekli faydalı rehberlik, seçkin katkıları, tavsiyeleri ve rehberliği için danışman hocam Sayın Doç. Dr. Mine Aylin BAYRAK'a en içten teşekkürlerimi ve şükranlarımı sunmak istiyorum.

Çalışmalarım boyunca her zaman yakın ilgisini gördüğüm, bilgilerinden en iyi şekilde faydalandığım Sayın Prof. Dr. Ali DEMİR ve Dr. Öğr. Üyesi Sertaç ERMAN hocalarıma en derin saygı ve teşekkürlerimi sunuyorum.

Ayrıca tüm hayatım boyunca olduğu gibi maddi ve manevi destekleriyle her zaman yanımda bulunarak bu günlere gelmemde en büyük pay sahibi olan aileme minnettarlığımı ve teşekkürlerimi sunarım.

Ocak - 2025

Ahmet BÜYÜK

İÇİNDEKİLER

ETİK BEYAN VE ARAŞTIRMA FONU DESTEĞİ	i
YAYIMLAMA VE FİKRİ MÜLKİYET HAKLARI.....	ii
ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR.....	iii
İÇİNDEKİLER.....	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ	v
TABLolar DİZİNİ.....	vi
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	vii
ÖZET	viii
ABSTRACT	ix
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER	7
3. MATERYAL VE YÖNTEM.....	15
3.1. Residüel Kuvvet Serisi Metodu	15
3.2. İkinci Mertebeden Diferansiyel Denklemler	16
3.3. Uzak Kesirli Schrödinger Denklemi	17
3.4. Uzak ve Zaman Kesirli Klein-Gordon Problemleri	18
3.5. Kesirli Bagley-Torvik Problemi	18
3.6. Kokteyl Partisi Grafiğinin Clique Polinomları ile Zaman Kesirli Konveksiyon-Difüzyon Denklemi İçin Yeni Bir Analitik Yöntem.....	19
4. ALGORİTMALAR	20
4.1. İkinci Mertebeden Diferansiyel Denklemler	20
4.2. Uzak Kesirli Schrödinger Problemi	21
4.3. Uzak Kesirli Klein-Gordon Problemi	22
4.4. Zaman Kesirli Klein - Gordon Problemi	25
4.5. Kesirli Bagley - Torvik Problemi	27
4.6. Kokteyl Partisi Grafiğinin Clique Polinomları ile Zaman Kesirli Konveksiyon-Difüzyon Denklemi İçin Yeni Bir Analitik Yöntemin Algoritması	28
5. SAYISAL ÖRNEKLER.....	30
6. SONUÇLAR.....	51
KAYNAKLAR.....	53
KİŞİSEL YAYIN VE ESERLER	60
ÖZGEÇMİŞ.....	61

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 5.1. Kesirli Diferansiyel Denklemin Çeşitli n Değerleri için Yaklaşık Çözüm Grafiği.....	31
Şekil 5.2. Kesirli Diferansiyel Denklemin Çeşitli n Değerleri için Yaklaşık Çözüm Grafiği.....	32
Şekil 5.3. Kesirli Diferansiyel Denklemin Çeşitli n Değerleri için Yaklaşık Çözüm Grafiği.....	33
Şekil 5.4. β 'nın Çeşitli Değerleri için v 'nin Sayısal Çözümü.....	35
Şekil 5.5. β 'nın Çeşitli Değerleri için w 'nin Sayısal Çözümü.....	35
Şekil 5.6. β 'nın Çeşitli Değerleri için v 'nin Sayısal Çözümü.....	37
Şekil 5.7. β 'nın Çeşitli Değerleri için w 'nin Sayısal Çözümü.....	37
Şekil 5.8. Örnek 5.6. için $\alpha = 2, 1.95, 1.9$ ve Kesin Çözüm ile $k = 2, N = 2$ 'ye göre Kesikli Çözümlerin Grafikselsel Gösterimi.	38
Şekil 5.9. Örnek 5.6. için $k = 2, \alpha = 2$ 'ye göre Kesin Çözümün 3 Boyutlu Grafikselsel Gösterimi.	38
Şekil 5.10. Örnek 5.6. için $k = 2, \alpha = 2$ 'ye göre Mutlak Hatanın 3 Boyutlu Grafikselsel Gösterimi.	39
Şekil 5.11. Örnek 5.7. için $\alpha = 2, 1.95, 1.9$ ve Tam Çözüm ile $k = 2, N = 2$ 'ye göre Kesikli Çözümlerin Grafikselsel Gösterimi.	40
Şekil 5.12. Örnek 5.7. için $k = 2, \alpha = 2$ 'ye göre Analitik Çözümün 3 Boyutlu Grafikselsel Gösterimi.	40
Şekil 5.13. Örnek 5.7. için $k = 2, \alpha = 2$ 'ye göre Mutlak Hatanın 3 Boyutlu Grafikselsel Gösterimi.	41
Şekil 5.14. Örnek 5.8. için $N = 2, 3$ ' e göre Kesikli Çözümlerin (Yeşil ve Pembe Renkte) ve Tam Çözümün (Mavi Renkte) Grafikselsel Gösterimi.	42
Şekil 5.15. Örnek 5.9. için $N = 4$ 'e göre Kesilmiş Çözümlerin (Pembe Renkte) ve Tam Çözümün (Mavi Renkte) Grafikselsel Gösterimi.	43
Şekil 5.16. Örnek 5.10. için $N = 2, 3$ 'e göre Kesikli Çözümlerin (Yeşil ve Pembe Renkte) ve Tam Çözümün (Mavi Renkte) Grafikselsel Gösterimi.	45
Şekil 5.17. Örnek 5.11. $\alpha = 1, 0.9, 0.8$ için Kesikli Çözümlerin (Pembe, Yeşil ve Kırmızı Renkte) ve Tam Çözümün (Mavi Renkte) Grafikselsel Gösterimi.	46
Şekil 5.18. Örnek 5.12. Çeşitli α Değerleri için Kesin ve Sayısal Çözüm Grafiği.....	47
Şekil 5.19. Örnek 5.13. için $T = 0.5$ 'te $\alpha = 0.5$ için Sayısal ve Kesin Çözümün Grafiği.....	49

TABLolar DİZİNİ

Tablo 5.1. Örnek 5.1.'deki Kesirli Diferansiyel Denklemin için Kesirli Clique Polinomu Metodu ile Çözümünün Taylor-Matrix Metodu ile Karşılaştırılması.....	30
Tablo 5.2. Örnek 5.2.'deki Kesirli Diferansiyel Denklemin için Kesirli Clique Polinomu Metodu ile Çözümünün Taylor-Matrix Metodu ile Karşılaştırılması.....	31
Tablo 5.3. Örnek 5.3.'teki Kesirli Diferansiyel Denklemin için Kesirli Clique Polinomu Metodu ile Çözümünün Taylor-Matrix Metodu ile Karşılaştırılması.....	32
Tablo 5.4. Örnek 5.4.'te v ve w için $\beta = 2$ 'deki Hata Karşılaştırması.....	35
Tablo 5.5. Örnek 5.4.'te v ve w için $\beta = 1.8$ 'deki Hata Karşılaştırması.....	35
Tablo 5.6. Örnek 5.5.'te v ve w için $\beta = 2$ 'deki Hata Karşılaştırması.....	36
Tablo 5.7. Örnek 5.5.'te v ve w için $\beta = 1.8$ 'deki Hata Karşılaştırması.....	36
Tablo 5.8. N= 3 için Sonuçların Karşılaştırılması.....	42
Tablo 5.9. Çeşitli N Değerleri için Sonuçların Karşılaştırılması.....	44
Tablo 5.10. Çeşitli N Değerleri için Sonuçların Karşılaştırılması.....	45
Tablo 5.11. Çeşitli N Değerleri için Sonuçların Karşılaştırılması.....	46
Tablo 5.12. Örnek 5.12. için T= 0.1 ve $\alpha=0.7, 0.9, 0.95$ Değerlerinde Mutlak Hata.....	48
Tablo 5.13. Örnek 5.13. için T= 0.5 ve $\alpha=0.5$ 'teki Mutlak Hata.....	49

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$B(\xi, y)$: Beta fonksiyonu
${}^C D^\beta$: Caputo Kesirli Türevi
$E_\alpha(z)$: Bir parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu
$E_{\alpha,\beta}(z)$: İki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu
$\Gamma(\xi)$: Gamma fonksiyonu
J^β	: Riemann-Liouville İntegrali

Kısaltmalar

CCM	: Clique Collocation Metodu
FCC	: Fractional Clique Collocation (Kesirli Chebyshev Collocation Metodu)
RPSM	: Residual Power Series Method (Residüel Kuvvet Serisi Metodu)

KESİRLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN CLIQUE COLLOCATION YÖNTEMİ

ÖZET

Bu çalışmada, Kesirli Diferansiyel Denklemlerin çözümünü oluşturmak için Clique polinomları ve collocation (düğüm) noktaları kullanılarak yeni bir yaklaşım ortaya konulmaktadır.

Kesirli Clique Collocation Yöntemi, Adi Diferansiyel Denklemlere, Schrödinger Denklemine, Klein-Gordon Denklemine, Bagley-Torvik Denklemine ve Konveksiyon-Difüzyon Denklemlerine uygulanarak Kesirli Clique Collocation Yönteminin algoritması verilmektedir.

Ele alınan kesirli kısmi diferansiyel denklem herhangi bir zorlukla karşılaşılmeden kesirli adi diferansiyel ve cebirsel denklemler sistemine indirgenmektedir. Daha sonra Residüel Kuvvet Serisi Metodu kullanılarak sistemin çözümü elde edilmektedir. Önerilen yöntemin önemini göstermek için yakınsaklık analizi de sunulmaktadır. Bu yaklaşımın uygulanması, önerilen yöntemin etkinliğini ve doğruluğunu gösteren sayısal örnekler sunularak gösterilmektedir.

Anahtar Kelimeler: Kesirli Bagley-Torvik Denklemi, Kesirli Clique Collocation Yöntemi, Kesirli Klein-Gordon Denklemi, Kesirli Konveksiyon-Difüzyon Denklemi, Kesirli Schrödinger Denklemi.

CLIQUE COLLOCATION METHOD FOR FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

ABSTRACT

In this study, a new approach is presented using Clique polynomials and collocation points to create the solution of Fractional Differential Equations.

Fractional Clique Collocation Method is applied to Ordinary Differential Equations, Schrödinger Equation, Klein-Gordon Equation, Bagley-Torvik Equation and Convection-Diffusion Equations. The algorithm of Fractional Clique Collocation Method is given.

The Fractional Differential Equation considered is reduced to the system of fractional ordinary differential and algebraic equations without any difficulty. Then, the solution of the system is obtained by using the Residual Power Series Method. Convergence analysis is also presented to show the importance of the proposed method. The application of this approach is demonstrated by presenting numerical examples that demonstrate the effectiveness and accuracy of the proposed method.

Keywords: Fractional Bagley-Torvik Equation, Fractional Clique Collocation Method, Fractional Klein-Gordon Equation, Fractional Convection-Diffusion Equation, Fractional Schrödinger Equation.

1. GİRİŞ

Doğadaki birçok olay diferansiyel denklemler ile modellenenir. Uygulamalı genetik, soy bilim ve ekonomideki birçok denklem bir adi diferansiyel denklem ve denklem sistemi ile modellenmiştir. Ancak bütün bu sistemler kesin bir çözüme sahip değildir. Bunun yanında modellenen bu sistemler için çözümlerin de elde edilmesi gerekir. Bu durumlarda nümerik yöntemler çözüm için daha iyi bir yaklaşım sağlar.

Diferansiyel denklem ve denklem sistemlerinin çözümü için çeşitli nümerik yöntemler uygulanmaktadır. Örneğin, fuzzy lineer sistem metodu, homojen olmayan sistemlerin gecikmeli yansıması, homotopi pertürbasyon yöntemi (Kurulay, 2012), yüksek mertebeden adi diferansiyel denklemlerin çözümleri, Bernstein collocation yöntemi (Alshbool, Bataineh, Hashim, Isik, 2017), Laguarre dalgacıkları tam ayrıştırma çerçeve yöntemi, nonlinear Klein-Gordon denklemi için yeni yaklaşım (Khader, Kumar, 2013), sınır değer problemlerinin işlemsel entegrasyon matrisi, sürekli polinom dalgacıkları üzerine teknik çalışmalar, Rosenau-Hyman denklemi için Hermite dalgacık yöntemi, vs. (Saeed, 2014).

Grafik Teorisi, geniş uygulamaları nedeniyle birçok matematikçinin dikkatini çekmiştir. Literatür taramasında, Clique polinomlarının bir tam grafiği aracılığıyla birleştirilmiş adi diferansiyel denklemler hakkında çok fazla araştırma makalesi bulunamamıştır. Bu yüzden son zamanlarda, araştırmacılar Clique Polinomları Yöntemini araştırmaya yönelmiştir. Clique polinomları ve ilgili çalışmalar Hoede ve diğerleri tarafından tanıtılmıştır (Hoede, Li, 1994). Clique Polinomları, birleştirilmiş diferansiyel denklemler, kimya teorisi, uygulamalı elektrik mühendisliği, statik dinamik, matematiksel biyoloji gibi birçok alanda uygulanmıştır.

Bu çalışmanın birinci kısmında oluşturulan diferansiyel denklem sistemini çözmek için Clique Collocation Metodu (CCM) adı verilen yeni bir yaklaşım üzerine durulmaktadır. Elde edilen sonuçlar, Taylor Matrix Metodu ile karşılaştırılmaktadır. Önerilen yaklaşımın karmaşık diferansiyel denklem sistemlerini çözmekte kolay ve etkili bir yöntem sunduğu gösterilmeye çalışılmaktadır.

17. yy'dan itibaren fen ve mühendislikte önemli gelişmeler yaşanmıştır. Limit, türev ve

integral analizin önemli konularındandır. Matematikte her kavramda olduğu gibi bu kavramlarda da önemli gelişmeler yaşanmıştır. Türev ve integral kavramlarının kesirli sayılarla ifade edilmesiyle elde edilen dala kesirli analiz ismi verilmektedir. Analizde olduğunun tersine kesirli analizde, kesirli türev ve kesirli integral tanımları tek değildir. Biz burada Mittag-Leffler, Riemann - Liouville ve Caputo anlamında kesirli türevlerinden bahsedeceğiz.

Kesirli hesaplama kavramı Leibnitz tarafından “Tam sayı mertebeli $\frac{d^n y}{d\xi^n}$ türevinin tam sayı mertebeli olmayan türevleri için genellenebilir mi?” sorusu ile ortaya atılmıştır. Daha sonra Leibnitz, $n = \frac{1}{2}$ aldığıında bir paradoks ile karşılaşmış ve bu paradoksun ilerleyen zamanlarda faydalı sonuçlar ortaya çıkaracağını savunmuştur (Esen, Tasbozan, 2015). S.F. Lacroix ise $n \in Z^+$ olmak üzere, $y = \xi^m$ fonksiyonunun n . türevinin

$$\frac{d^n y}{d\xi^n} = \frac{m!}{(m-n)!} \xi^{m-n}, m \geq n \quad (1.1)$$

olduğunu göstermiştir. Ayrıca, Γ (Gama) fonksiyonlarını kullanarak,

$$\frac{d^n y}{d\xi^n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} \xi^{m-n} \quad (1.2)$$

formülünü elde etmiştir.

Riemann, integral tanımını yaparken Taylor serisinin geliştirilmesinden faydalanmış ve

$$D_\xi^{-\alpha} f(\xi) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_c^\xi (\xi - \eta)^{\alpha-1} f(\eta) d\eta + \psi(\xi) \quad (1.3)$$

integrasyon formülünü kullanmıştır.

Matematikte kesirli analiz, dinamik sistemler, sinyal işleme, kontrol sistemleri ve yüksek salınımlı Fredholm integral operatörlerinin spektrumlarının hesaplanması gibi birçok

bilimsel süreci modellemek ve analiz etmek için kullanılmaktadır (Brunner, Iserles, Norsett, 2011). Bu nedenle, birçok bilim adamı, kesirli diferansiyel denklemlerin analitik ve sayısal çözümlerini oluşturmak için dalgacık yöntemi (Wang , Yi, 2012), genelleştirilmiş diferansiyel dönüşüm yöntemi (Momani, Odibat, 2007), sonlu farklar yöntemi (Zhang, 2009), Varyasyonel iterasyon yöntemi (Odibat, 2010), Adomian ayrıştırma metodu (El-Sayed, El-Kalla, 1998), Clique Collocation Metodu (Buyuk, Bayrak, Demir, 2022) gibi çeşitli yöntemleri uygulamıştır.

Bu çalışmanın ikinci kısmında Uzay Kesirli Schrödinger probleminin Kesirli Clique Collocation Yöntemi ile çözümleri aranmaktadır. Schrödinger denklemlerinin bilimde kuantum mekaniği, süper iletkenlik, nonlinear optik ve plazma fiziği gibi çeşitli uygulamaları vardır. Ayrıca nonlinear Schrödinger denklemleri, optik, plazma fiziği, sıvı dinamiği ve protein kimyasındaki birçok işlemi modellemek için kullanıldığından, fizik, biyoloji ve mühendislik alanlarındaki birçok bilim insanının ilgisini çekmektedir (Wazwaz, 2008). Schrödinger denklemi, plazma ve hidromanyetik dalgalarda, katı bir cisimde ısı iletiminde, nonlinear kararsızlık problemlerinde görülmektedir (Podlubny, 1999). Kuantum fiziğinde yer alan Schrödinger denklemin nonlinear kesirli mertebeden varyasyonları son yıllarda bilim adamlarının dikkatini çekmektedir. Naber, Mittag-Leffler fonksiyonları ile kesirli mertebeden Schrödinger denklemini ele almıştır (Naber, 2004). Hiçdurmaz ve Ashralyev, zaman kesirli Schrödinger denklemi analitik çözümlerini ve kararlılığını araştırmıştır (Hiçdurmaz, Ashralyev, 2017). Zaman kesirli Schrödinger denkleminin nümerik çözümleri, kuadratik ve kübik B-spline sonlu eleman yöntemleri ile Esen ve Taşbozan tarafından çalışılmıştır (Esen, Tasbozan, 2017). Uzay ve zaman kesirli Schrödinger denkleminin nümerik çözümleri Jakobi spektral yöntemi ile Bhrawy vd. tarafından bulunmuştur (Bhrawy ve diğ., 2014).

Kesirli mertebeden Schrödinger denkleminin nümerik çözümleri, homotopi pertürbasyon ve Laplace dönüşüm yöntemleri ile Aminikhah vd. tarafından bulunmuştur (Aminikhah ve diğ., 2014). Karaman ve Dereli ise kesirli mertebeden Schrödinger denkleminin nümerik çözümlerini radyal baz fonksiyonları ile collocation yöntemini kullanarak elde etmişlerdir (Karaman, Dereli, 2019).

Genel olarak, kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerinin analitik çözümlerinin bulunması pek mümkün olmadığı için bu tür problemlerin çözümlerini elde etmede nümerik yöntemlere başvurulmaktadır. Teknoloji alanındaki gelişmeler de nümerik yöntemlerin daha iyi sonuçlar vermesine olanak sağlamaktadır. Sonuç olarak, kesirli Schrödinger problemleri çeşitli bilim dallarında önemli bir rol oynamaktadır.

Bu çalışmanın üçüncü kısmında, Kesirli Klein-Gordon Problemini çözmek için, Clique Dalgacıkları oluşturarak farklı bir yaklaşım izlenmektedir. Fisher ve Solow tarafından tanımlanan Clique Polinomları ortogonal polinom olmasa da $L_2[0,1]$ için bir taban oluşturur (Fisher, Solow, 1990). Bu da Clique Dalgacıklarını tanımlamamıza olanak sağlar.

Standard Klein-Gordon Denklemi, kuantum teorisi, dağıtıcı dalga olayları ve optik fiberlerdeki çeşitli süreçlerin modellenmesinde önemli bir rol oynadığından, birçok araştırmacı bunu çözmek için çeşitli sayısal ve analitik yöntemler geliştirmiştir (Abbasbandy, 2007). Kesirli Diferansiyel Denklemlerin gerçek hayattaki süreçlerin davranışlarını ve bunların yerel olmayan doğasını yansıttığı görülmektedir. İlgili süreçlerin analizinde birçok matematiksel modelin kesirli genişletilmesi dikkate alınmaktadır (Singh, 2016). Bu nedenle, bu bölümde yeni tanımlanan Clique Dalgacıkları ve collocation (düğüm) noktalarını bir arada içeren yöntem aracılığıyla Zaman Kesirli Klein-Gordon Problemi veya Uzay Kesirli Klein-Gordon Probleminin Caputo anlamında çözümünü hedeflenir (Golmankhaneh, Baleanu, 2011).

Dalgacıklar, kompakt destekli salınım fonksiyonları olarak tanımlanabilir. Chebyshev, Legendre, Hermite, Bernstein ve Lucas Polinomları (Saeed, 2015) gibi çeşitli polinomlar, diferansiyel denklemlerin kesikli ve analitik çözümlerini oluşturmak için bazı dalgacık şemaları geliştirmek amacıyla dalgacık teorisinde kullanılmıştır (Yousefi ve diğ., 2005). Genellikle, bu polinomların ortogonalite özellikleri, sistem analizi, optimal kontrol, sayısal analiz, sinyal analizi ve zaman-frekans analizi gibi alanlardaki birçok problemin analitik veya nümerik çözümünde bir temel oluşturur (Guf, Jiang, 1996).

Bagley ve Torvik tarafından önerilen Kesirli Bagley-Torvik Problemleri, viskoelastitenin kesirli türevle tanımlandığı viskoelastik sönümlü yapıları modellemek için kullanılır (Ray, Bera, 2005). Kesirli Bagley-Torvik Problemleri, gerçek malzemenin nitel davranışını analiz etmemizi sağlar (Cenesiz ve diğ., 2010). Bu nedenle mühendislik ve

uygulamalı bilimlerde önemli bir rol oynar. Kesirli Bagley-Torvik Problemlerindeki sönümlenme teriminin kesirli türevinin derecesi çeşitli süreçlerin modellenmesine yol açar ancak Kesirli Bagley-Torvik Problemlerinde $3/2$ 'ye eşittir, bu da sönümlenmenin frekansa bağlı olduğu anlamına gelir (Argup, Maayah, 2018). Ayrıca Kesirli Bagley-Torvik Problemleri, bir akışkan içindeki viskoz bir akışkana gömülü bir sert plakanın veya gazın davranışının modellenmesinde kullanılır (Sakar ve diğ., 2019). Bu çalışmada, visko-elastisite teorisinde yaygın olarak kullanılan kesirli Bagley-Torvik denklemini çözmek için Clique Dalgacıkları oluşturarak farklı bir yaklaşım uygulanır. Bu çalışmanın yeni katkısı, Clique dalgacıklarının ilk kez bu çalışmada tanımlanmış ve collocation noktaları ile birlikte kullanılmış olmasıdır.

Kütle ve enerjinin taşınması, hava tahmini, reaktörlerde kimyasalların dağılımı gibi bilim ve mühendislikteki çok sayıda alanda, konveksiyon-difüzyon denklemleri bilimsel süreçleri modellemek için önemli bir araçtır (Saadatmandi ve diğ., 2012). Bernoulli polinomları, Legendre polinomları, Hermite polinomları, Chebyshev polinomları vb. gibi özel polinomlar kesirli diferansiyel denklemlerin çözümlerini oluşturmada önemli bir rol oynar (Pourbabaee, Saadatmandi, 2021). Ayrıca, diferansiyel denklemlerin çözümlerinin seri formda oluşturulduğu özel fonksiyon uzayları için bir temel oluştururlar (Xu, Zhang, Zhao, 2019). Bu nedenle, bu polinomların kullanımı, her türlü kesirli diferansiyel denklemi çözmek için yeni yöntemler geliştirmek amacıyla çok sayıda bilim alanında ortaya çıkar. Ortogonalite özelliğine sahip bazı polinomlar, hesaplamaların bunlarla daha kolay olması nedeniyle birçok araştırmacının dikkatini çeker (Amin ve diğ., 2021).

Graflar, gerçek dünyadaki çeşitli süreçleri modellemek için önemli araçlardır. Graflar bir boyutlu uzaylarda sağlanmasına rağmen, çeşitli alanlarda daha yüksek boyutlu uzaylarda kullanılabilir. Graf teorisi; sayısal analiz, matris teorisi, topoloji, grup teorisi, küme teorisi, olasılık ve kombinatorik gibi çeşitli matematik dallarının birleşimidir (Shi ve diğ., 2016). Kesirli diferansiyel denklemlerin çözümüne ulaşmak için sayısal yöntemlerin geliştirilmesinde, Clique polinomu, Karakteristik polinomları, Matching polinomları, Tutte polinomları vb. gibi çok sayıda grafik polinomu kullanılmıştır (Randić ve diğ., 1988).

Bu çalışma, altı bölümden oluşmaktadır. 1. Bölümde, giriş ve literatür taraması verilmektedir. 2. Bölümde, kesirli denklemler için bazı temel tanım ve teoremler

sunulmaktadır. 3. Bölümde, Kesirli Clique Collocation Yöntemi, Adi Diferansiyel Denklemlere, Shrödinger Denklemine, Klein-Gordon Denklemine, Bagley-Torvik Denklemine ve Konveksiyon-Difüzyon Denklemlerine uygulanmaktadır. 4. Bölümde, Kesirli Clique Collocation Yönteminin algoritması verilmektedir. 5. Bölümde, Kesirli Clique Collocation Yöntemi örneklerle açıklanmaktadır. Son olarak, 6. Bölümde ise elde edilen sonuçlara dair bilgiler verilmektedir.



2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde, kesirli analizdeki bazı temel kavramlar ifade edilmektedir (Podlubny, 1999).

Tanım 1. Gamma fonksiyonu, kesirli analiz hesaplamalarında önemli bir rol oynamaktadır. Gamma fonksiyonunun en kapsamlı tanımı Euler limiti,

$$\Gamma(\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^\xi}{\xi(\xi+1)(\xi+2)\dots(\xi+n)} \quad (2.1)$$

ile yapılmaktadır. Ancak, daha yaygın olarak,

$$\Gamma(\xi) = \int_0^{\infty} \eta^{\xi-1} e^{-\eta} d\eta, \quad \xi > 0 \quad (2.2)$$

şeklindeki tanımı kullanılmaktadır. Bu tanıma kısmi integrasyon uygulandığında en önemli özelliği olan,

$$\Gamma(\xi+1) = \xi \Gamma(\xi) \quad (2.3)$$

tekrarlama bağıntısı bulunmaktadır.

Tanım 2. $B(\xi, y)$ ile gösterilen Beta fonksiyonu,

$$B(\xi, y) = \int_0^1 \eta^{\xi-1} (1-\eta)^{y-1} d\eta, \quad \text{Re}(\xi) > 0, \text{Re}(y) > 0 \quad (2.4)$$

biçiminde tanımlanan

$$B(\xi, y) = 2 \int_0^{\pi/2} (\sin \theta)^{2\xi-1} (\cos \theta)^{2y-1} d\theta \quad (2.5)$$

$$B(\xi, y) = \int_0^{\infty} \frac{u^{\xi-1}}{(1+u)^{\xi+y}} du \quad (2.6)$$

$$B(\xi, y) = \frac{\Gamma(\xi)\Gamma(y)}{\Gamma(\xi + y)} \quad (2.7)$$

şeklinde de ifade edilebilir.

Tanım 3. β . mertebeden Riemann-Liouville integrali ($\beta \geq 0$),

$$J^\beta f(\xi) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^\xi (\xi - \eta)^{\beta-1} f(\eta) d\eta, \quad \beta > 0, \quad \xi > 0, \quad (2.8)$$

$$J^0 f(\xi) = f(\xi) \quad (2.9)$$

şeklinde verilir.

Tanım 4. β . mertebeden Caputo kesirli türevi,

$${}^C D^\beta f(\xi) = J^{m-\beta} D^m f(\xi) = \int_0^\xi (\xi - \eta)^{m-\beta-1} \frac{d^m}{d\eta^m} f(\eta) d\eta, \quad (2.10)$$

$$m-1 < \beta \leq m, \quad \xi > 0,$$

şeklinde verilir. Burada, D^m , m . mertebeden adi diferansiyel operatördür.

Tanım 5.

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m (\eta - \eta_0)^{m\beta} = c_0 + c_1 (\eta - \eta_0)^\beta + c_2 (\eta - \eta_0)^{2\beta} + \dots, \quad (2.11)$$

$$0 \leq m-1 < \beta \leq m, \quad \eta \geq \eta_0$$

şeklindeki bir kuvvet serisi kesirli kuvvet serisi olarak adlandırılır.

Tanım 6. Mittag-Leffler fonksiyonu, kesirli integral denklemlerinin çözümlerinde, Lévy uçuşlarında ve kinetik denklemlerin kesirli genelleştirilmesinde kullanılmıştır. Mittag-Leffler Fonksiyonları kesirli analizde oldukça yaygın olarak kullanılan önemli bir fonksiyondur. e^z üstel fonksiyonunun bir parametrelili genellemesi,

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \quad (2.12)$$

şeklinde verilir. $\alpha = 1$ ve $\alpha = 2$ alınırsa,

$$E_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z \quad (2.13)$$

$$E_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(2k+1)} = \cosh(\sqrt{z}) \quad (2.14)$$

bulunur. İki parametrelili Mittag-Leffler Fonksiyonu ise,

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad (\alpha > 0, \beta > 0) \quad (2.15)$$

şeklinde verilmektedir. Bu gösterime Mittag-Leffler tipi fonksiyon da denilmektedir.

Böylece,

$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z \quad (2.16)$$

$$E_{1,2}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)!} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{e^z - 1}{z} \quad (2.17)$$

$$E_{1,3}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+3)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+2)!} = \frac{1}{z^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+2}}{(k+2)!} = \frac{e^z - 1 - z}{z^2} \quad (2.18)$$

bulunur ve buradan hareketle,

$$E_{1,m}(z) = \frac{1}{z^{m-1}} \left\{ e^z - \sum_{k=0}^{m-2} \frac{z^k}{k!} \right\} \quad (2.19)$$

şeklinde genelleştirilmesi elde edilir. Ayrıca,

$$E_{2,1}(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \cosh(z) \quad (2.20)$$

$$E_{2,2}(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+2)} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{\sinh(z)}{z} \quad (2.21)$$

olup hiperbolik sinüs ve hiperbolik kosinüs fonksiyonlarının Mittag-Leffler fonksiyonunun özel durumları olduğu görülür.

Tanım 7. G , çoklu kenarlardan ve döngülerden arındırılmış bir grafik olsun. G grafiğinin Clique polinomu,

$$h(G; \eta) = \sum_{k=0}^n a_k \eta^k \quad (2.22)$$

ile gösterilir.

Grafik Teorisinde, n köşeli tam bir K_n grafiğinin Clique polinomları, diferansiyel denklemlerin çözümlerini oluşturmak için ele alınmaktadır (Hoede, Li, 1994). Clique polinomları,

$$S(K_n; \xi) = (1 + \xi)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} \xi + \binom{n}{2} \xi^2 + \dots + \binom{n}{n} \xi^n \quad (2.23)$$

şeklinde ifade edilir.

Tanım 8. Tam bir alt grafikte Cliquesinin sayısı önemli bir rol oynar. Maksimum Clique G , bir G grafiğindeki en yüksek Clique olarak tanımlanır. m boyutundaki bir Clique, m 'den fazla olmayan bir mesafede düğümleri içeren maksimum küme olarak tanımlanır. Bağlantılı bir G grafiğinde Clique polinomu,

$$C(G; \xi) = a_0(\xi) + \sum_{\theta=1}^{\rho(G)} a_{\theta} \xi^{\theta} \quad (2.24)$$

şeklinde verilir. Burada $\rho(\theta)$, G 'deki toplam θ Clique'lerini temsil eder, $a_0(\xi)$ sabiti

G'deki toplam sıfır Clique'lerini belirtir. m. dereceden kokteyl partisi grafiğinin Clique polinomu, (2.24)'te $\rho(G) = m$ 'nin yerine konulmasıyla,

$$C(K_{m(2)}; \xi) = (1 + 2\xi)^m \quad (2.25)$$

şeklinde elde edilir.

Teorem 1.

$$C = \{h_n(\eta) = h(\eta, K_n) : h(\eta, K_n), n \in N, K_n \text{ ve } h(\eta, K_0) = 1\} \quad (2.26)$$

olsun. O halde; C, R 'nin kapalı bir alt kümesi üzerinde,

$$\|h_n\| = \sup_{\forall \eta \in A} |h_n(\eta)|, \quad \forall h_n \in C(A) \quad (2.27)$$

normu ile bir Banach uzayıdır.

Teorem 2. $\eta \in [a, b]$ olmak üzere, $C([a, b])$ 'de sürekli fonksiyonların bir dizisi $\{h_n(\eta)\}$, $h(\eta)$ fonksiyonuna düzgün yakınsak olsun. Bu takdirde, $h(\eta)$ fonksiyonu $C([a, b])$ 'de süreklidir.

İspat: $h_n(\eta)$ sürekli fonksiyonların bir dizisi, $h(\eta)$ 'ye düzgün yakınsak ve $\varepsilon > 0$ sabit bir reel sayı olsun. Bu takdirde, $\forall \eta \in [a, b]$ için,

$$\|h_n(\eta_0) - h_n(\eta)\| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (2.28)$$

dır. Bundan dolayı, her $h_m(\eta)$, $C([a, b])$ 'de süreklidir. Hatta burada öyle bir $\delta > 0$ sayısı vardır ki $\forall \eta_0, \eta \in [a, b]$ için $\|\eta_0 - \eta\| < \varepsilon$ olduğunda

$$\|h_n(\eta_0) - h_n(\eta)\| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (2.29)$$

Ayrıca, Minkowski eşitsizliğinden,

$$\|h_n(\eta_0) - h_n(\eta)\| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (2.30)$$

yazılabilir. Bundan dolayı; $h(\eta)$, $C([a, b])$ 'de süreklidir.

Teorem 3: $\eta \in [a, b]$ için, $C([a, b])$ 'de $h_n(\eta)$ fonksiyonlarının dizisi düzgün yakınsak olsun. Bu durumda, $C([a, b])$ 'de sürekli bir $h(\eta)$ fonksiyonu vardır.

İspat: Riesz-Fisher teoreminden, $k \in N$ için, f_k fonksiyonlarının dizisi $L_2(\mathbb{R})$ 'de kendine yakınsak ise bu durumda burada öyle bir $f \in L_2(\mathbb{R})$ fonksiyonu vardır ki,

$$k \rightarrow \infty \text{ iken } \|f_k - f\| \rightarrow 0 \quad (2.31)$$

olup hemen hemen her yerde bu f fonksiyonu tektir. Daha sonra; $\{h_{n_i}(\eta)\}$, $i = 1, 2, \dots$ olmak üzere,

$$\|h_{n_{i+1}}(\eta) - h_{n_i}(\eta)\| < \frac{1}{2^i}, \quad \forall \eta \in [a, b] \quad (2.32)$$

alt dizisini seçmek mümkündür. Ayrıca, (2.32)'den,

$$h(\eta) = \lim_{i \rightarrow \infty} h_{n_i} = h_{n_i} + (h_{n_{i+1}} - h_{n_i}) + (h_{n_{i+2}} - h_{n_{i+1}}) + \dots \quad (2.33)$$

yazılır. (2.31) ve (2.32) kullanılarak,

$$\begin{aligned} \|h - h_{n_i}\| &\leq \|h_{n_{i+1}} - h_{n_i}\| + \|h_{n_{i+2}} - h_{n_{i+1}}\| + \dots \\ &< \frac{1}{2^i} + \frac{1}{2^{i+1}} + \dots + \frac{1}{2^{i-1}}, \quad i = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.34)$$

olur. Bu da $\{h_{n_i}(\eta)\}$, $i = 1, 2, \dots$ alt dizisinin $h(\eta)$ 'ye $C([a, b])$ 'de yakınsak olduğunu gösterir.

Teorem 4. R^n , R cismi üzerinde $n+1$ dereceli polinom uzayı olsun. Zaman kesirli konveksiyon-difüzyon denkleminin $F(\xi, \eta) : [a, b] \times [0, T] \rightarrow R^n$ çözümü,

$$F(\xi, \eta) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m(\eta) C(K_{m(2)}; \xi) \quad (2.35)$$

şeklinde verilir.

İspat: R^n , R cismi üzerinde $n+1$ dereceli polinom uzayı olsun. Zaman kesirli konveksiyon-difüzyon denkleminin $F(\xi, \eta) : [a, b] \rightarrow R^n$, en fazla n dereceli bir zaman kesirli konveksiyon-difüzyon denkleminin çözümü olsun. Bu durumda, Clique Kokteyl Parti Graf polinomlarının ortogonal polinomlarını içeren bir $B = C(K_{1(2)}; \xi), C(K_{2(2)}; \xi), \dots, C(K_{n(2)}; \xi), C(K_{n+1(2)}; \xi)$ bazı vardır, öyle ki burada $C(K_{1(2)}; \xi), C(K_{2(2)}; \xi), \dots, C(K_{n(2)}; \xi), C(K_{n+1(2)}; \xi)$ sırasıyla, $0, 1, 2, \dots, n$ derece Clique Kokteyl Parti Graf polinomlarıdır.

Sabit bir n için,

$$F(\xi, \eta) = \sum_{m=1}^{n+1} a_m(\eta) C(K_{m(2)}; \xi) \quad (2.36)$$

B'nin elemanlarının lineer bir kombinasyonudur. Her iki taraftaki aynı dereceli katsayıları eşitleyerek $a_m(\eta)$ katsayıları elde edilir. Buradan, $F(\xi, \eta)$ ' ye tam olarak Clique Kokteyl Parti Graf polinomlarının lineer kombinasyonu olarak yaklaşılır.

Teorem 5. $[a, b] \times [0, T]$ üzerinde düzgün reel değerli sınırlı $F(\xi, \eta)$ fonksiyonu, zaman kesirli konveksiyon-difüzyon denkleminin çözümü olsun., B tarafından oluşturulan $L_2[a, b]$ uzayı, $F(\xi, \eta)$ ' nin ortogonal Clique Kokteyl Parti Graf polinom açılımı ona yakınsar.

İspat.

$$F(\xi, \eta) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m(\eta) C(K_{m(2)}; \xi) \quad (2.37)$$

olsun. Bu denklemin sonlu bir alt uzayı alınırsa,

$$F(\xi, \eta) = \sum_{m=1}^{n+1} a_m(\eta) C(K_{m(2)}; \xi) \quad (2.38)$$

denklemini elde ederiz. Burada, $\langle \cdot, \cdot \rangle$, iç çarpım operatörü olmak üzere, $a_m(\eta) = \langle F(\xi, \eta), C(K_{m(2)}; \xi) \rangle$ şeklindedir. Daha sonra,

$$a_m(\eta) = \int_a^b F(\xi, \eta), C(K_{m(2)}; \xi) d\xi \quad (2.39)$$

şeklinde elde edilir. Buradan,

$$\int_a^b \inf_{\eta} F(\xi, \eta) C(K_{m(2)}; \xi) d\xi \leq a_m(\eta) \leq \int_a^b \sup_{\eta} F(\xi, \eta) C(K_{m(2)}; \xi) d\xi \quad (2.40)$$

yazılır. Bazı ξ_0 ve ξ_1 değerleri için genelleştirilmiş ortalama değer teoremi kullanılırsa,

$$\inf_{\eta} F(\xi_0, \eta) \int_a^b C(K_{m(2)}; \xi) d\xi \leq a_m(\eta) \leq \sup_{\eta} F(\xi_1, \eta) \int_a^b C(K_{m(2)}; \xi) d\xi \quad (2.41)$$

elde edilir. Burada, $\int_a^b C(K_{m(2)}; \xi) d\xi = \mu$ ve F 'nin reel bir K sabiti ile $|a_m(\eta)| \leq |\mu K|$

elde edilir. Bu nedenle, $\sum a_i(\eta)$ mutlak yakınsar. Dolayısıyla, $F(\xi, \eta)$ 'nin lineer kombinasyonu, B 'nin baz elemanı ile ona yakınsar.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. Residüel Kuvvet Serisi Metodu

$$D_{\eta}^{\alpha}u(\xi, \eta) + R(\xi)u(\xi, \eta) + N(\xi)u(\xi, \eta) = g(\xi, \eta) \quad (3.1)$$

$$f_0(\xi) = u(\xi, 0) = f(\xi) \quad (3.2)$$

şeklindeki nonlinear kesirli diferansiyel denklemi alalım. Burada, $\eta > 0$, $\xi \in R$ $n-1 < \alpha \leq n$, $R(\xi)$ ve $N(\xi)$ sırasıyla lineer ve nonlinear operatör ve $g(\xi, \eta)$ ise sürekli fonksiyondur. Residüel Kuvvet Serisi Metodunda (3.1) Denkleminin çözümü,

$$u(\xi, \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n(\xi)\eta^{n\alpha}}{\Gamma(1+n\alpha)}, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad \xi \in R, \quad 0 \leq \eta < R \quad (3.3)$$

olsun. Buradan, Eşitlik (3.3)'ün $k+1$ terimli kesilmiş serisi, $k = 1, 2, \dots$ olmak üzere,

$$u_k(\xi, \eta) = \sum_{n=0}^k \frac{f_n(\xi)\eta^{n\alpha}}{\Gamma(1+n\alpha)}, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad \xi \in R, \quad 0 \leq \eta < R \quad (3.4)$$

şeklinde alınsın. Denklemin başlangıç koşulu, $u(\xi, 0) = f_0(\xi) = f(\xi)$ olduğundan 1. Residüel Kuvvet Serisinin yaklaşık çözümünü elde etmek için Eşitlik (3.4)'de $k=1$ alınırsa

$$u_1(\xi, \eta) = f(\xi) + \frac{f_1(\xi)\eta^{\alpha}}{\Gamma(1+n\alpha)} \quad (3.5)$$

elde edilir. Bu durumda, (3.1) Denkleminin Residüel fonksiyonu,

$$\text{Res}u(\xi, \eta) = D_{\eta}^{n\alpha}u(\xi, \eta) + R(\xi)u(\xi, \eta) + N(\xi)u(\xi, \eta) - g(\xi, \eta) \quad (3.6)$$

şeklinde yazılabilir ve buradan $k = 1, 2, \dots$ olmak üzere, k . Residüel fonksiyon ise,

$$\text{Res}u_k(\xi, \eta) = D_{\eta}^{n\alpha}u_k(\xi, \eta) + R(\xi)u_k(\xi, \eta) + N(\xi)u_k(\xi, \eta) - g(\xi, \eta) \quad (3.7)$$

şeklinde ifade edilir. $k = 1$ için, Denklem (3.7)'de $\text{Res}u_1(\xi, 0) = 0$ ifadesi düzenlendiğinde $f_1(\xi)$ bulunur. $f_1(\xi)$, Denklem (3.5)'de yerine yazılırsa 1. Residüel Kuvvet Serisinin yaklaşık çözümü elde edilir. Daha sonra, $k = 2, 3, \dots$ için ilk adımdan daha farklı $D_\eta^{(k-1)\alpha} \text{Res}u_k(\xi, 0) = 0$ bulunur. Yani bu adımda, $\text{Res}u_2(\xi, \eta)$ ifadesinin her iki tarafının α . mertebeden türevi alınıp $\eta = 0$ 'da sifıra eşitlenir. Sonraki adımda ise $\text{Res}u_3(\xi, \eta)$ ifadesinin 2α . mertebeden türevi alınıp $\eta = 0$ 'da sifıra eşitlenir. Bu şekilde devam edilerek, $f_k(\xi)$ değerleri ve ilerledikçe $u_k(\xi, \eta)$ yaklaşık çözümleri sırasıyla elde edilir (Senol, Ata, 2018).

3.2. İkinci Mertebeden Diferansiyel Denklemler

Bu çalışmada, ilk olarak tam bir grafiğin Clique polinomlarını kullanarak diferansiyel denklem için etkili bir nümerik yöntem önerilmiştir. Burada önerilen yöntemin yeterliliğini incelemek için bazı problemler ele alınmış ve yakınsama ile de ilgili bazı teoremler tartışılmıştır. Burada, diferansiyel denklemler, Clique polinomları ve collocation tekniği kullanılarak bir cebirsel denklem sistemine dönüştürülüp çözülmüştür. Önerilen yöntemin sonuçları tablo ve grafikler aracılığıyla Taylor Matrix Metodunun çözümleri ile karşılaştırılmıştır.

$$y'' = f(\eta, y, y') \quad (3.8)$$

$$y(0) = a, \quad y(1) = b \quad (3.9)$$

diferansiyel denklemini ele alalım. Burada, (\cdot) , η bağımsız değişkenini içeren bağımlı değişkenin türevini temsil eder. Ayrıca, a ve b bilinen katsayılardır.

Burada, diferansiyel denklemin çözümü,

$$y(\eta) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i S(K_i; \xi) \quad (3.10)$$

Clique polinomları ile aranmaktadır.

3.3. Uzay Kesirli Schrödinger Denklemi

Bu kısımda, Kesirli Clique Collocation Yöntemi kullanılarak Uzay Kesirli Schrödinger Probleminin sayısal çözümlerinin oluşturulması amaçlanmaktadır. Öncelikle, Uzay Kesirli Schrödinger Problemi, collocation noktaları ve kesirli Clique polinomları aracılığıyla adi diferansiyel denklemler ve cebirsel denklemler sistemine indirgenir. Daha sonra, elde edilen sistem residüel kuvvet serisi yöntemi ile nümerik olarak çözülür. Burada önerdiğimiz Kesirli Clique Collocation Yöntemi, kesirli Clique polinomları ile residüel kuvvet serisi yönteminin bir birleşimidir. Kesirli Clique Collocation Yönteminin ne kadar çarpıcı ve etkileyici olduğunu göstermek için örnekler verilmiş ve tablolar ve grafikler ile desteklenmiştir.

Bu çalışmada, aşağıdaki Uzay Kesirli Schrödinger Problemini

$$iu_{\eta} + \lambda D_{\xi}^{\beta} u + v|u|^2 u + \sigma(\xi, \eta)u = F(\xi, \eta), \quad (3.11)$$

$$u(\xi, 0) = \varphi(\xi), \quad (3.12)$$

$$u(0, \eta) = \mu_1(\eta), \quad (3.13)$$

$$u(1, \eta) = \mu_2(\eta), \quad (3.14)$$

ele alalım. Burada, $0 \leq \xi, \eta \leq 1$, $1 \leq \beta \leq 2$, λ, v reel katsayılar, $\sigma(\xi, \eta), F(\xi, \eta), \varphi(\xi), \mu_1(\eta), \mu_2(\eta)$ kompleks fonksiyonlar ve $|\cdot|$ modüldür.

Burada, Schrödinger denklemlerinin çözümü, Clique polinomları cinsinden $u(\xi, \eta) = v(\xi, \eta) + iw(\xi, \eta)$ olmak üzere,

$$v(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^n a_i(\eta) S(K_n; \xi), \quad w(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^n b_i(\eta) S(K_n; \xi) \quad (3.15)$$

şeklinde aranmaktadır.

3.4. Uzay ve Zaman Kesirli Klein-Gordon Problemleri

Bu kısımda, Kesirli Klein - Gordon Problemini çözmek için, Clique Dalgacıkları oluşturarak farklı bir yaklaşım izlenmektedir. Fisher ve Solow tarafından tanıtılan Clique Polinomları ortogonal polinom olmasa da $L_2[0,1]$ için bir taban oluşturur. Bu da Clique Dalgacıklarını tanımlamamıza olanak sağlar (Fisher, Solow, 1990).

$$D_\eta^\alpha u(\xi, \eta) - D_\xi^\beta u(\xi, \eta) + u(\xi, \eta) = f(\xi, \eta), \quad 1 < \alpha, \beta \leq 2 \quad (3.16)$$

$$u(\xi, 0) = f_1(\xi), \quad u_\eta(\xi, 0) = f_2(\xi), \quad 0 \leq \xi \leq 1 \quad (3.17)$$

$$u(0, \eta) = h_1(\eta), \quad u(1, \eta) = h_2(\eta), \quad 0 \leq \eta \leq 1 \quad (3.18)$$

Kesirli Klein-Gordon Problemini alalım. Burada, Kesirli Klein-Gordon denklemlerinin çözümü, $\psi_{j,i}(\eta)$ Clique dalgacıkları olmak üzere,

$$u(\xi, \eta) \approx \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} c_{j,i}(\xi) \psi_{j,i}(\eta). \quad (3.19)$$

şeklinde aranmaktadır.

3.5. Kesirli Bagley-Torvik Problemi

Bu kısımda, yeni tanımlanmış Clique dalgacıkları ve collocation noktalarını içeren yeni bir yöntem geliştirilerek Kesirli Bagley-Torvik Problemleri için kesikli çözümler oluşturulmaktadır. Clique dalgacıkları, $[0,1]$ aralığındaki Clique polinomları kullanarak tanımlanır.

$$D^2 y(\eta) + \lambda_1 D^\alpha y(\eta) + \lambda_2 y(\eta) = f(\eta), \quad (3.20)$$

$$y(0) = \mu_1, \quad k_1 y'(0) + k_2 y(1) = \mu_2 \quad (3.21)$$

Bagley-Torvik Problemini alalım. Burada $0 < \alpha < 2$, D^α operatörü α . mertebeden Caputo kesirli türevi, λ_1 ve λ_2 sabitler ve $f(\eta)$ fonksiyonu $[0,1]$ aralığında süreklidir.

3.6. Kokteyl Partisi Grafiğinin Clique Polinomları ile Zaman Kesirli Konveksiyon-Difüzyon Denklemi İçin Yeni Bir Analitik Yöntem

Bu kısımda, Zaman Kesirli Konveksiyon-Difüzyon Denklemine çözümünü elde etmek için tam grafiğinin Clique polinomu yerine kokteyl partisi grafiğinin Clique polinomu kullanılır.

$$D_{\eta}^{\alpha}u(\xi, \eta) + b(\xi)u_{\xi}(\xi, \eta) + c(\xi)u_{\xi\xi}(\xi, \eta) = f(\xi, \eta), \quad 0 \leq \xi \leq 1, \quad 0 \leq \eta \leq T \quad (3.22)$$

$$u(\xi, 0) = \phi(\xi), \quad 0 \leq \xi \leq 1, \quad (3.23)$$

$$u(0, \eta) = \mu_1(\eta), \quad u(1, \eta) = \mu_2(\eta), \quad 0 \leq \eta \leq T, \quad (3.24)$$

zaman kesirli konveksiyon - difüzyon problemini göz önüne alalım.

Burada, $(m - 1 < \alpha \leq m, m \in N)$, D^{α} operatörü α mertebesinden Caputo kesirli türevi, $f(\xi, \eta)$ kaynak fonksiyonunu gösterir.

4. ALGORİTMALAR

4.1. İkinci Mertebeden Diferansiyel Denklemler

Bu bölümde, (3.8) - (3.9) probleminin sayısal çözümlerini oluşturmak için Kesirli Clique Collocation Yöntemi aşağıdaki gibi adım adım sunulmaktadır.

Adım 1. $y(\eta)$ 'nin seri açılımını

$$y(\eta) = \sum_{i=0}^n c_i P_i(\eta) \quad (4.1)$$

şeklinde alınır. Burada, $P_i(\eta)$ polinomu,

$$P_i(\eta) = \sum_{i=0}^n (1 + \eta)^i \quad (4.2)$$

Kesirli Clique Polinomu olarak tanımlanır.

Adım 2. (3.8) denkleminde seri açılımı yazılırsa,

$$\sum_{i=0}^n c_i P_i''(\eta) = f(\eta, \sum_{i=0}^n c_i P_i(\eta), \sum_{i=0}^n c_i P_i'(\eta)) \quad (4.3)$$

elde edilir.

Adım 3. $\eta_k = \cos\left(\frac{(n-k)\pi}{n}\right)$, $k = 0, 1, \dots, n$ collocation noktaları uygulanırsa,

$$\sum_{i=0}^n c_i P_i''(\eta_k) = f(\eta_k, \sum_{i=0}^n c_i P_i(\eta_k), \sum_{i=0}^n c_i P_i'(\eta_k)) \quad (4.4)$$

elde edilir.

Adım 4. Başlangıç ve sınır koşullarında seri açılımı yazılırsa,

$$\sum_{i=0}^n c_i P_i(0) = a, \quad \sum_{i=0}^n c_i P_i(1) = b \quad (4.5)$$

bulunur.

Adım 5. Ortaya çıkan cebirsel denklem sisteminin çözülmesiyle c_i , $i = 0, 1, 2, \dots, n$ katsayıları bulunur ve $y(\eta)$ çözümü bulunur.

4.2. Uzay Kesirli Schrödinger Problemi

Bu bölümde, (3.11) - (3.14) probleminin sayısal çözümlerini oluşturmak için Kesirli Clique Collocation Yöntemi aşağıdaki gibi adım adım sunulmaktadır.

Adım 1. Uzay Kesirli Schrödinger Probleminde,

$$u(\xi, \eta) = v(\xi, \eta) + iw(\xi, \eta) \quad (4.6)$$

yazılırsa aşağıdaki denklem sistemi elde edilir:

$$v_\eta + \lambda D_\xi^\beta w - v|v^2 + w^2|w - \sigma(\xi, \eta)w = F(\xi, \eta), \quad (4.7)$$

$$w_\eta - \lambda D_\xi^\beta v + v|v^2 + w^2|v + \sigma(\xi, \eta)v = F(\xi, \eta). \quad (4.8)$$

Adım 2. $v(\xi, \eta)$ ve $w(\xi, \eta)$ 'nin seri açılımları yerine yazılırsa,

$$v(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^n a_i(\eta)P_i(\xi), \quad w(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^n b_i(\eta)P_i(\xi) \quad (4.9)$$

elde edilir. Burada $P_i(\xi)$ polinomu,

$$P_i(\xi) = \sum_{i=0}^n (1 + \xi)^{\beta-(m-i)} \quad (4.10)$$

Kesirli Clique Polinomu olarak tanımlanır. $\xi_k = \frac{k}{n}$, $k = 0, 1, \dots, n$ collocation noktaları

dikkate alındığında aşağıdaki adi diferansiyel denklem sistemi elde edilir:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n a'_i(\eta)P_i(\xi_k) + \lambda \sum_{i=0}^n b_i(\eta)D_\xi^\beta P_i(\xi_k) - v \left(\left(\sum_{i=0}^n a_i(\eta)P_i(\xi_k) \right)^2 + \left(\sum_{i=0}^n b_i(\eta)P_i(\xi_k) \right)^2 \right) \\ \left(\sum_{i=0}^n b_i(\eta)P_i(\xi_k) \right) - \sigma(\xi_k, \eta) \left(\sum_{i=0}^n b_i(\eta)P_i(\xi_k) \right) = F(\xi_k, \eta), \quad m-1 < \beta \leq m, \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n b'_i(\eta)P_i(\xi_k) - \lambda \sum_{i=0}^n a_i(\eta)D_\xi^\beta P_i(\xi_k) + \nu \left(\left(\sum_{i=0}^n a_i(\eta)P_i(\xi_k) \right)^2 + \left(\sum_{i=0}^n b_i(\eta)P_i(\xi_k) \right)^2 \right) \\ \left(\sum_{i=0}^n a_i(\eta)P_i(\xi_k) \right) + \sigma(\xi_k, \eta) \left(\sum_{i=0}^n a_i(\eta)P_i(\xi_k) \right) = F(\xi_k, \eta), \quad m-1 < \beta \leq m. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Adım 3. (3.12) - (3.13) başlangıç ve sınır değerleri (4.7) - (4.8)'de yerine yazılırsa aşağıdaki cebirsel denklem sistemi elde edilir:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n a_i(0)P_i(\xi_k) = \varphi(\xi_k), \quad \sum_{i=0}^n a_i(\eta)P_i(0) = \mu_1(\eta), \quad \sum_{i=0}^n a_i(\eta)P_i(1) = \mu_2(\eta), \\ \xi_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n - [\beta], \quad m-1 < \beta \leq m, \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n b_i(0)P_i(\xi_k) = \varphi(\xi_k), \quad \sum_{i=0}^n b_i(\eta)P_i(0) = \mu_1(\eta), \quad \sum_{i=0}^n b_i(\eta)P_i(1) = \mu_2(\eta), \\ \xi_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n - [\beta], \quad m-1 < \beta \leq m. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Adım 4. Elde edilen adi diferansiyel ve cebirsel denklem sistemi, residüel kuvvet serisi yöntemi ile çözülür ve bilinmeyen $a_i(\eta), b_i(\eta)$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$ fonksiyonları bulunarak $u_n(\xi, \eta)$ yaklaşık çözümü oluşturulur.

4.3. Uzay Kesirli Klein-Gordon Problemi

Adım 1. Bu bölümde, $[0,1]$ aralığındaki Clique Polinomları kullanılarak, $j = 0, 1, \dots, 2^k - 1$ ve $i = 0, 1, \dots, N$, $[0,1)$ aralığında $\psi_{j,i}(\xi)$ Clique Dalgacıkları

$$\psi_{j,i}(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\sigma_i}} 2^{\frac{k}{2}} P_i(2^k \xi - j) & , \xi \in \left[\frac{j}{2^k}, \frac{j+1}{2^k} \right) \\ 0 & , \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (4.15)$$

kullanılır. Burada $k \geq 0$, $N \geq 0$ ve $\sigma_i = \frac{2^{2N} - 1}{2N + 1}$ 'dir.

Clique Dalgacıklarının kümesi $L_2[0,1]$ için tabandır. $k=1$ ve $N=2$ için Clique dalgacıkları,

$$\psi_{0,0}(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\sigma_0}} \sqrt{2} P_0(2\xi) & , \xi \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \\ 0 & , \xi \in \left[\frac{1}{2}, 1\right) \end{cases} \quad (4.16)$$

$$\psi_{0,1}(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\sigma_1}} \sqrt{2} P_1(2\xi) & , \xi \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \\ 0 & , \xi \in \left[\frac{1}{2}, 1\right) \end{cases} \quad (4.17)$$

$$\psi_{0,2}(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\sigma_2}} \sqrt{2} P_2(2\xi) & , \xi \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \\ 0 & , \xi \in \left[\frac{1}{2}, 1\right) \end{cases} \quad (4.18)$$

$$\psi_{1,0}(\xi) = \begin{cases} 0 & , \xi \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \\ \frac{1}{\sqrt{\sigma_0}} \sqrt{2} P_0(2\xi - 1) & , \xi \in \left[\frac{1}{2}, 1\right) \end{cases} \quad (4.19)$$

$$\psi_{1,1}(\xi) = \begin{cases} 0 & , \xi \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \\ \frac{1}{\sqrt{\sigma_1}} \sqrt{2} P_1(2\xi - 1) & , \xi \in \left[\frac{1}{2}, 1\right) \end{cases} \quad (4.20)$$

$$\psi_{1,2}(\xi) = \begin{cases} 0 & , \xi \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \\ \frac{1}{\sqrt{\sigma_2}} \sqrt{2} P_2(2\xi - 1) & , \xi \in \left[\frac{1}{2}, 1\right) \end{cases} \quad (4.21)$$

ile verilmektedir.

Adım 2. Uzak Kesirli Klein-Gordon Problemi için bir $u_N(\xi, \eta)$ kesikli çözümü Clique Dalgacıkları cinsinden

$$u_N(\xi, \eta) \approx \sum_{j=0}^{2^k-1} \sum_{i=0}^N c_{j,i}(\xi) \psi_{j,i}(\eta) \quad (4.22)$$

ile aranır. Burada, $c_{j,i}(\xi)$ katsayıları,

$$c_{j,i}(\xi) = \langle \psi_{j,i}(\xi), u_N(\xi, \eta) \rangle = \int_0^1 \psi_{j,i}(\xi) u_N(\xi, \eta) d\xi \quad (4.23)$$

iç çarpımı ile elde edilir.

Adım 3. Her N için,

$$\xi_i = \frac{2i-1}{2n}, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (4.24)$$

collocation noktaları kullanılırsa herhangi bir N için, N cebirsel denklemleri içeren bir sistem elde edilir.

Adım 4. Başlangıç ve sınır koşullarında seri açılımı yazılırsa,

$$u(\xi, 0) = \sum_{j=0}^{2^k-1} \sum_{i=0}^N c_{j,i}(\xi) \psi_{j,i}(0), \quad u_\eta(\xi, 0) = \sum_{j=0}^{2^k-1} \sum_{i=0}^N c_{j,i}(\xi) \psi_{j,i}(0) \quad (4.25)$$

$$u(0, \eta) = \sum_{j=0}^{2^k-1} \sum_{i=0}^N c_{j,i}(0) \psi_{j,i}(\eta), \quad u_\eta(1, \eta) = \sum_{j=0}^{2^k-1} \sum_{i=0}^N c_{j,i}(1) \psi_{j,i}(\eta) \quad (4.26)$$

şeklindedir.

Adım 5. Elde edilen diferansiyel ve cebirsel denklem sistemi çözümlenerek $c_{j,i}$, $j, i = 0, 1, 2, \dots, N$ katsayıları bulunur ve $u(\xi, \eta)$ çözümü elde edilir.

4.4. Zaman Kesirli Klein - Gordon Problemi

Adım 1. Bu bölümde, $[0,1]$ aralığındaki Clique Polinomları kullanılarak, $j = 0,1,\dots,2^k - 1$ ve $i = 0,1,\dots,N$, $[0,1)$ aralığında $\psi_{j,i}(\eta)$ Clique Dalgacıkları,

$$\psi_{j,i}(\eta) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\sigma_i}} 2^{\frac{k}{2}} P_i(2^k \eta - j) & , \eta \in \left[\frac{j}{2^k}, \frac{j+1}{2^k} \right) \\ 0 & , \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (4.27)$$

ile aranır. Burada $k \geq 0$, $N \geq 0$ ve $\sigma_i = \frac{2^{2N} - 1}{2N + 1}$ 'dir.

Clique Dalgacıklarının kümesi $L_2[0,1]$ için tabandır. $k=1$ ve $N=2$ için Clique dalgacıkları,

$$\psi_{0,0}(\eta) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\sigma_0}} \sqrt{2} P_0(2\eta) & , \eta \in \left[0, \frac{1}{2} \right) \\ 0 & , \eta \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right) \end{cases} \quad (4.28)$$

$$\psi_{0,1}(\eta) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\sigma_1}} \sqrt{2} P_1(2\eta) & , \eta \in \left[0, \frac{1}{2} \right) \\ 0 & , \eta \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right) \end{cases} \quad (4.29)$$

$$\psi_{0,2}(\eta) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\sigma_2}} \sqrt{2} P_2(2\eta) & , \eta \in \left[0, \frac{1}{2} \right) \\ 0 & , \eta \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right) \end{cases} \quad (4.30)$$

$$\psi_{1,0}(\eta) = \begin{cases} 0 & , \eta \in \left[0, \frac{1}{2} \right) \\ \frac{1}{\sqrt{\sigma_0}} \sqrt{2} P_0(2\eta - 1) & , \eta \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right) \end{cases} \quad (4.31)$$

$$\psi_{1,1}(\eta) = \begin{cases} 0 & , \eta \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \\ \frac{1}{\sqrt{\sigma_1}} \sqrt{2} P_1(2\eta - 1) & , \eta \in \left[\frac{1}{2}, 1\right) \end{cases} \quad (4.32)$$

$$\psi_{1,2}(\eta) = \begin{cases} 0 & , \eta \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \\ \frac{1}{\sqrt{\sigma_2}} \sqrt{2} P_2(2\eta - 1) & , \eta \in \left[\frac{1}{2}, 1\right) \end{cases} \quad (4.33)$$

ile verilmektedir.

Adım 2. Zaman Kesirli Klein-Gordon Problemi için bir $u_N(\xi, \eta)$ kesikli çözümü Clique Dalgacıkları cinsinden

$$u_N(\xi, \eta) \approx \sum_{j=0}^{2^k-1} \sum_{i=0}^N c_{j,i}(\eta) \psi_{j,i}(\xi) \quad (4.34)$$

ile aranır. Burada, $c_{j,i}(\eta)$ katsayıları,

$$c_{j,i}(\eta) = \langle \psi_{j,i}(\eta), u_N(\xi, \eta) \rangle = \int_0^1 \psi_{j,i}(\eta) u_N(\xi, \eta) d\eta \quad (4.35)$$

iç çarpımı ile elde edilir.

Adım 3. Her N için,

$$\eta_i = \frac{2i-1}{2n}, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (4.36)$$

collocation noktaları kullanılırsa herhangi bir N için, N cebirsel denklemleri içeren bir sistem elde edilir.

Adım 4. Başlangıç ve sınır koşullarında seri açılımı yazılırsa,

$$u(\xi, 0) = \sum_{j=0}^{2^k-1} \sum_{i=0}^N c_{j,i}(0) \psi_{j,i}(\xi), \quad u_\eta(\xi, 0) = \sum_{j=0}^{2^k-1} \sum_{i=0}^N c_{j,i}(0) \psi_{j,i}(\xi) \quad (4.37)$$

$$u(0, \eta) = \sum_{j=0}^{2^k-1} \sum_{i=0}^N c_{j,i}(\eta) \psi_{j,i}(0), \quad u_\eta(1, \eta) = \sum_{j=0}^{2^k-1} \sum_{i=0}^N c_{j,i}(\eta) \psi_{j,i}(1) \quad (4.38)$$

şeklindedir.

Adım 5. Elde edilen diferansiyel ve cebirsel denklem sistemi çözülerek $c_{j,i}$, $j, i = 0, 1, 2, \dots, N$ katsayıları bulunur ve $u(\xi, \eta)$ yaklaşık çözümü elde edilir.

4.5. Kesirli Bağley - Torvik Problemi

Problem (3.20) - (3.21) için $y(\eta)$ yaklaşık çözümü,

$$y_n(\eta) \approx \sum_{j=0}^{2^k-1} \sum_{i=0}^n c_{j,i} \psi_{j,i}(\eta) \quad (4.39)$$

şeklindeki polinomlarla aranır.

Adım 1. Eşitlik (4.39)'un n . derece yaklaşımının Eşitlik (3.20)'de yerine konulması ile,

$$\sum_{j=0}^{2^k-1} \sum_{i=0}^n c_{j,i} \psi_{j,i}''(\eta) + \lambda_1 \sum_{j=0}^{2^k-1} \sum_{i=0}^n c_{j,i} D^\alpha \psi_{j,i}(\eta) + \lambda_2 \sum_{j=0}^{2^k-1} \sum_{i=0}^n c_{j,i} \psi_{j,i}(\eta) = f(\eta), \quad m-1 < \alpha \leq m \quad (4.40)$$

denklemini elde edilir.

Adım 2. Eşitlik (4.40)'da $\eta_r = \frac{r}{n}$, $r = 1, 2, \dots, n-1$, collocation noktaları yerine yazılırsa,

$$\sum_{j=0}^{2^k-1} \sum_{i=0}^n c_{j,i} \psi_{j,i}''(\eta_r) + \lambda_1 \sum_{j=0}^{2^k-1} \sum_{i=0}^n c_{j,i} D^\alpha \psi_{j,i}(\eta_r) + \lambda_2 \sum_{j=0}^{2^k-1} \sum_{i=0}^n c_{j,i} \psi_{j,i}(\eta_r) = f(\eta_r), \quad m-1 < \alpha \leq m \quad (4.41)$$

kesirli adi diferansiyel denklemler sistemi elde edilir.

Adım 3. Eşitlik (4.40)'ın n. derece yaklaşımını Eşitlik (3.21)'deki başlangıç ve sınır koşullarına yerleştirilmesiyle,

$$\sum_{j=0}^{2^k-1} \sum_{i=0}^n c_{j,i} \psi_{j,i}(0) = \mu_1 \quad (4.42)$$

$$k_1 \sum_{j=0}^{2^k-1} \sum_{i=0}^n c_{j,i} \psi'_{j,i}(0) + k_2 \sum_{j=0}^{2^k-1} \sum_{i=0}^n c_{j,i} \psi_{j,i}(1) = \mu_2 \quad (4.43)$$

cebirsal denklem sistemi elde edilir.

Adım 4. Son olarak, bir kesirli cebirsal denklem sistemi elde edilir. Bilinmeyen $c_{j,i}$, $j = 0, 1, \dots, 2^k - 1$, $i = 0, 1, \dots, n$ katsayıları residüel kuvvet serisi yöntemi ile belirlenir. Buradan da $y_n(\eta)$ yaklaşık çözümü oluşturulur.

4.6. Kokteyl Partisi Grafiğinin Clique Polinomları ile Zaman Kesirli Konveksiyon-Difüzyon Denklemi İçin Yeni Bir Analitik Yöntemin Algoritması

Problem (3.22) - (3.23) için yaklaşık çözümü için özel polinomlar kullanılarak

$$u(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(\eta) C(K_{i(2)}; \xi) \quad (4.44)$$

şeklinde aranır.

Adım 1. Eşitlik (4.44)'ün m. derece yaklaşımının Eşitlik (3.22)'de yerine konulması ile

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^m D_{\eta}^{\alpha} a_i(\eta) C(K_{i(2)}; \xi) + b(\xi) \sum_{i=0}^m a_i(\eta) C'(K_{i(2)}; \xi) \\ + c(\xi) L \sum_{i=0}^m a_i(\eta) C''(K_{i(2)}; \xi) = f(\xi, \eta), \quad m-1 < \alpha \leq m \end{aligned} \quad (4.45)$$

denklemini elde edilir.

Adım 2. Eşitlik (4.45)'te $\xi_k = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{k\pi}{m}\right), k = 1, 2, \dots, m-1$, collocation noktalarıyla,

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^m D_{\eta}^{\alpha} a_i(\eta) C(K_{i(2)}; \xi_k) + b(\xi_k) \sum_{i=0}^m a_i(\eta) C'(K_{i(2)}; \xi_k) \\ + c(\xi_k) L \sum_{i=0}^m a_i(\eta) C''(K_{i(2)}; \xi_k) = f(\xi_k, \eta), \quad m-1 < \alpha \leq m \end{aligned} \quad (4.46)$$

kesirli adi diferansiyel denklemler sistemi elde edilir.

Adım 3. Eşitlik (4.45)'te m. derece yaklaşımı Eşitlik (3.23) - (3.24)'deki başlangıç ve sınır koşullarına uygulanarak,

$$\sum_{i=0}^m a_i(0) C(K_{i(2)}; \xi) = \phi(\xi_k) \quad (4.47)$$

$$\sum_{i=0}^m a_i(\eta) C(K_{i(2)}; 0) = \mu_1(\eta) \quad (4.48)$$

$$\sum_{i=0}^m a_i(\eta) C(K_{i(2)}; 1) = \mu_2(\eta) \quad (4.49)$$

cebirsel denklemler sistemi elde edilir.

Adım 4. Elde edilen sistemde, bilinmeyen $a_i(\eta), i = 0, 1, \dots, m$ katsayıları Residüel Kuvvet Serisi Metodu kullanılarak belirlenir. Buradan $u_m(\xi, \eta)$ yaklaşık çözümü elde edilir.

5. SAYISAL ÖRNEKLER

Graf Teorisi, geniş uygulamaları nedeniyle birçok matematikçinin dikkatini çekmektedir. Clique Polinomları; kimya teorisi, uygulamalı elektrik mühendisliği, statik dinamik ve matematiksel biyoloji gibi birçok alanda uygulanmıştır.

Örnek 5.1.

$$y'' + \xi y' + y = e^{\xi}, y(0) = 0, y(1) = 0, -1 \leq \xi \leq 1 \quad (5.1)$$

diferansiyel denklemini inceleyelim.

Burada, collocation noktalarını $\xi_j = \cos\left(\frac{(n-j)\pi}{n}\right)$ alalım. $n = 3$ için, $\xi_0 = -1$,

$$\xi_1 = -\frac{1}{2}, \xi_2 = \frac{1}{2}, \xi_3 = 1 \text{ olur.}$$

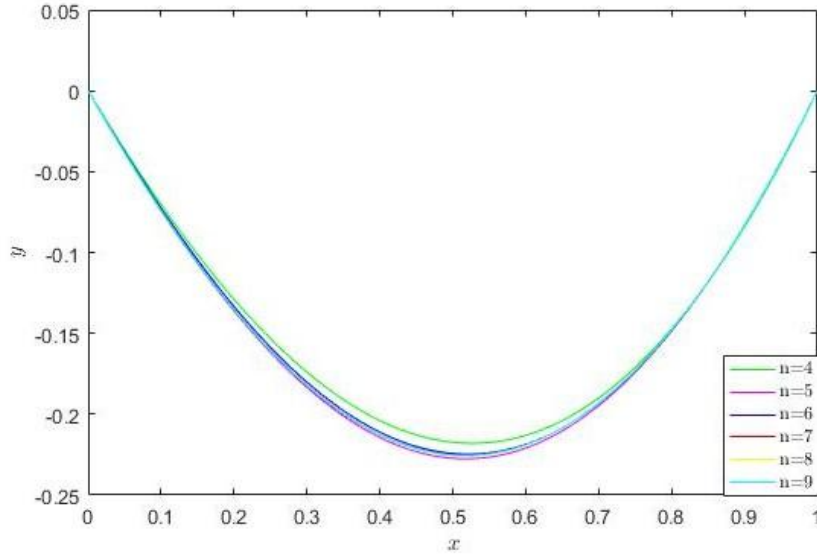
$$y(\xi) = 0,9482 + (-2,28535)(1 + \xi)^2 + (1,65024)(1 + \xi)^3 + (-0,313043)(1 + \xi)^4$$

şeklinde bulunur.

Benzer işlemler $n = 4, 5, \dots, 9$ için de yapılmış ve ortaya çıkan değerler, Tablo 5.1.'de Taylor-Matrix Metodu ile karşılaştırılmaktadır. Kesirli Diferansiyel Denklemin çeşitli n değerleri için yaklaşık çözüm grafiği Şekil 5.1.'de verilmektedir.

Tablo 5.1. Örnek 5.1.'deki Kesirli Diferansiyel Denklemin için Kesirli Clique Polinomu Metodu ile Çözümünün Taylor-Matrix Metodu ile Karşılaştırılması.

ξ	Clique Collocation Metod				Taylor- Matrix Metod
	n=4	n=7	n=8	n=9	n=9
0	-0.000000000	-0.000000000	-0.000000000	0.000000000	0
0.2	-0.129020932	-0.135476206	-0.135371013	-0.135366137	-0.135379
0.4	-0.203950507	-0.212793299	-0.212704552	-0.212660248	-0.212602
0.6	-0.213073527	-0.218975804	-0.218957451	-0.218920029	-0.218764
0.8	-0.147266973	-0.147906075	-0.147913683	-0.147911947	-0.147714
1	-0.000000000	-0.000000000	-0.000000000	0.000000000	-0.0000006



Şekil 5.1. Kesirli Diferansiyel Denklemin Çeşitli n Değerleri için Yaklaşık Çözüm Grafiği.

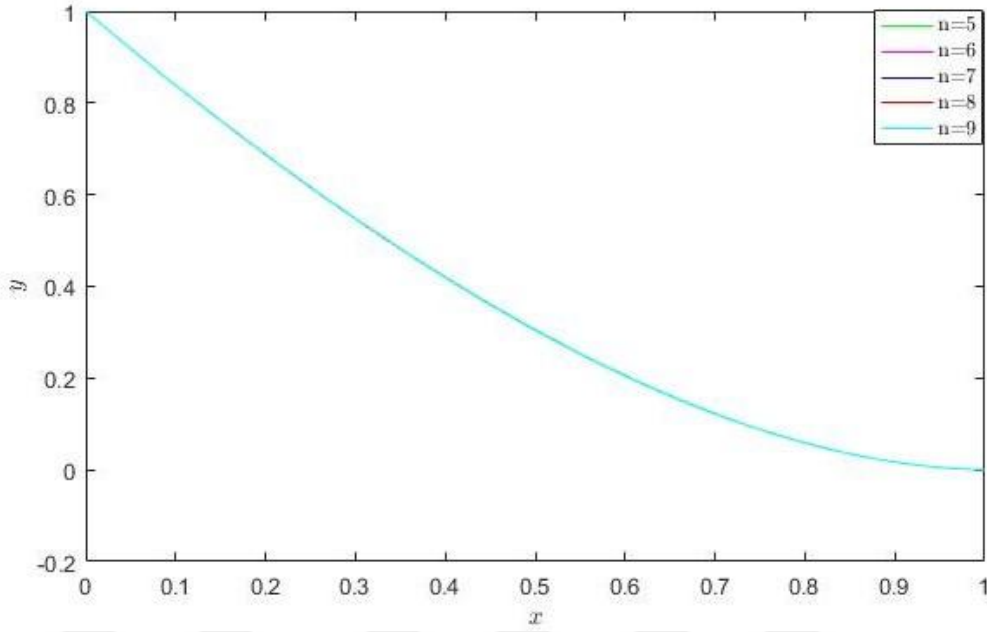
Örnek 5.2.

$$y'' + y \sin(\xi) = e^{\xi}, \quad y(0) = 1, y(1) = 0, \quad -1 \leq \xi \leq 1 \quad (5.2)$$

diferansiyel denklemini inceleyelim. Sonuçlar tablo ve grafik halinde aşağıda verilmiştir. Tablo 5.2.'de Kesirli Diferansiyel Denklem için Kesirli Clique Polinomu Metodu ile Çözümünün Taylor-Matrix Metodu ile Karşılaştırılması gösterilmektedir. Kesirli Diferansiyel Denklemin çeşitli n değerleri için yaklaşık çözüm grafiği Şekil 5.2.'de verilmektedir.

Tablo 5.2. Örnek 5.2.'deki Kesirli Diferansiyel Denklemin için Kesirli Clique Polinomu Metodu ile Çözümünün Taylor-Matrix Metodu ile Karşılaştırılması.

ξ	Clique Collocation Metod				Taylor- Matrix Metod
	n=5	n=7	n=8	n=9	n=7
0	1.000000000	1.000000000	1.000000000	1.000000000	1
0.2	0.687976738	0.687772427	0.687731271	0.687726140	0.687955
0.4	0.420151899	0.419468713	0.419434621	0.419413095	0.419830
0.6	0.205613356	0.204734235	0.204725310	0.204706986	0.205277
0.8	0.058985457	0.058589206	0.058589295	0.058586280	0.059194
1	-0.000000000	-0.000000000	-0.000000000	0.000000000	0



Şekil 5.2. Kesirli Diferansiyel Denklemin Çeşitli n Değerleri için Yaklaşık Çözüm Grafiği.

Örnek 5.3.

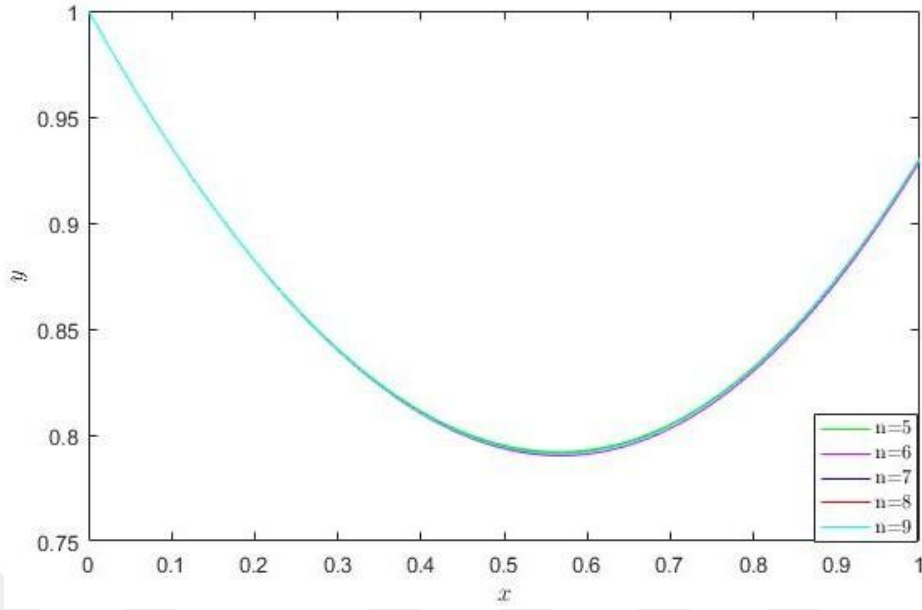
$$y'' + \xi y' + \xi y = 1 + \xi + \xi^2,$$

$$y(0) = 1, y'(0) + 2y(1) - y(-1) = -1, -1 \leq \xi \leq 1 \quad (5.3)$$

diferansiyel denklemini göz önüne alalım. Tablo 5.3.'te Kesirli Diferansiyel Denklemin için Kesirli Clique Polinomu Metodu ile çözümünün Taylor-Matrix Metodu ile karşılaştırılması gösterilmektedir. Kesirli Diferansiyel Denklemin çeşitli n değerleri için yaklaşık çözüm grafiği Şekil 5.3.'te verilmektedir.

Tablo 5.3. Örnek 5.3.'teki Kesirli Diferansiyel Denklemin için Kesirli Clique Polinomu Metodu ile Çözümünün Taylor-Matrix Metodu ile Karşılaştırılması.

ξ	Clique Collocation Metod				Taylor- Matrix Metod
	n=5	n=7	n=8	n=9	n=9
0	1.000000000	1.000000000	1.000000000	1.000000000	1
0.2	0.882265420	0.882087097	0.882067938	0.882070562	0.882055
0.4	0.811201474	0.810588347	0.810541410	0.810532381	0.810520
0.6	0.792866105	0.792024919	0.791994604	0.791964722	0.791965
0.8	0.832034395	0.831385548	0.831380537	0.831332945	0.831360
1	0.930773417	0.930325148	0.930302988	0.930245440	0.930458



Şekil 5.3. Kesirli Diferansiyel Denklemin Çeşitli n Değerleri için Yaklaşık Çözüm Grafiği.

Bu kısımda, Kesirli Clique Collocation Yöntemi ile Uzay Kesirli Schrödinger Probleminin nümerik çözümleri oluşturulmaktadır. Uzay Kesirli Schrödinger Problemi collocation noktalı kesirli Clique polinomları aracılığıyla adi diferansiyel denklemler ve cebirsel denklemler sistemine indirgenmiş, daha sonra da elde edilen sistem residüel kuvvet serisi yöntemi ile nümerik olarak çözülmüştür.

Örnek 5.4.

$$u_{\eta} - iD_{\xi}^{\beta}u = 0, \quad (5.4)$$

$$u(\xi, 0) = \exp(3i\xi), \quad (5.5)$$

$$u(0, \eta) = \exp(-9i\eta), \quad (5.6)$$

$$u(1, \eta) = \exp((3 - 9\eta)i), \quad (5.7)$$

$\beta = 2$ için analitik çözümü, $u(\xi, \eta) = \exp((3\xi - 9\eta)i)$ olan lineer uzay kesirli Schrödinger problemini göz önüne alalım.

$n = 2$ için v ve w 'yi temsil eden Kesirli Clique Polinomları

$$v(\xi, \eta) = a_0(1 + \eta)^{\beta-2} + a_1(1 + \eta)^{\beta-1} + a_2(1 + \eta)^\beta \quad (5.8)$$

$$w(\xi, \eta) = b_0(1 + \eta)^{\beta-2} + b_1(1 + \eta)^{\beta-1} + b_2(1 + \eta)^\beta \quad (5.9)$$

şeklinde tanımlanır.

$v(\xi, \eta)$ ve $w(\xi, \eta)$ 'nin seri formu lineer uzay kesirli Schrödinger probleminde yerine yazılırsa,

$$v_\eta + D_\xi^\beta w = 0, \quad (5.10)$$

$$v(\xi, 0) = \cos(3\xi), \quad (5.11)$$

$$v(0, \eta) = \cos(9\eta), \quad (5.12)$$

$$v(1, \eta) = \cos(3 - 9\eta) \quad (5.13)$$

$$w_\eta - D_\xi^\beta v = 0, \quad (5.14)$$

$$w(\xi, 0) = \sin(3\xi), \quad (5.15)$$

$$w(0, \eta) = -\sin(9\eta), \quad (5.16)$$

$$w(1, \eta) = \sin(3 - 9\eta) \quad (5.17)$$

problemleri elde edilir.

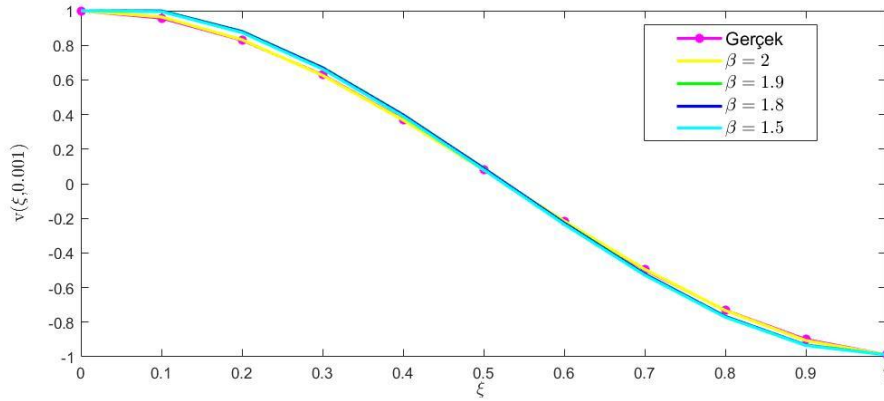
Bilinmeyen $a_i(\eta), b_i(\eta), i = 0, 1, 2, \dots, n$ fonksiyonları, residüel kuvvet serisi yöntemi ile bulunur. Şekil 5.4.-5.5.'te $n = 4$ için sırasıyla yukarıdaki algoritma kullanılarak çözümler gösterilmektedir. Grafiklerden görülmektedir ki, $n = 4$ için v ve w 'nin nümerik çözümleri, $\beta = 2$ için kesin çözüme yaklaşmaktadır. Tablo 5.4.-5.5.'te ise farklı β değerleri için sırasıyla v ve w 'nin nümerik çözümlerinin hata karşılaştırılmaları yapılmaktadır.

Tablo 5.4. Örnek 5.4.'te v ve w için $\beta = 2$ 'deki Hata Karşılaştırması.

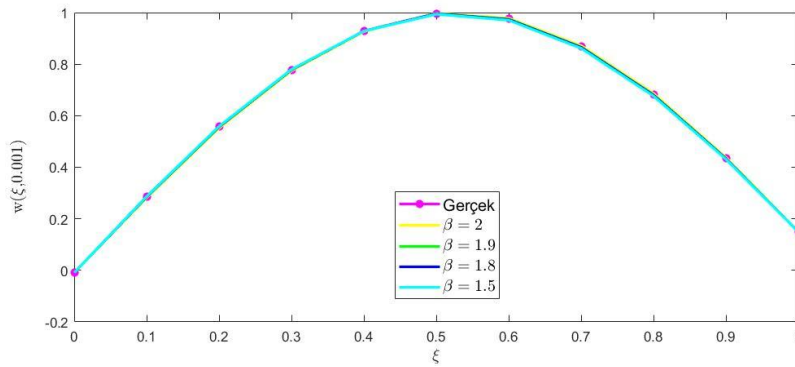
η / ξ	0.001		0.002		0.003		0.004		0.005	
	v	w	v	w	v	w	v	w	v	w
0.001	1.60e-04	1.04e-04	3.18e-04	2.06e-04	4.73e-04	3.07e-04	6.25e-04	4.07e-04	7.75e-04	5.05e-04
0.002	1.55e-04	1.46e-04	3.08e-04	2.89e-04	4.58e-04	4.31e-04	6.05e-04	5.72e-04	7.50e-04	7.11e-04
0.003	1.48e-04	1.80e-04	2.94e-04	3.58e-04	4.37e-04	5.34e-04	5.78e-04	7.08e-04	7.16e-04	8.80e-04
0.004	1.39e-04	2.07e-04	2.76e-04	4.11e-04	4.11e-04	6.14e-04	5.42e-04	8.14e-04	6.72e-04	1.01e-03
0.005	1.29e-04	2.26e-04	2.55e-04	4.50e-04	3.78e-04	6.72e-04	4.99e-04	8.90e-04	6.18e-04	1.11e-03

Tablo 5.5. Örnek 5.4.'te v ve w için $\beta = 1.8$ 'deki Hata Karşılaştırması.

η / ξ	0.001		0.002		0.003		0.004		0.005	
	v	w	v	w	v	w	v	w	v	w
0.001	6.23e-04	5.68e-05	1.24e-03	1.12e-04	1.85e-03	1.67e-04	2.46e-03	2.20e-04	3.06e-03	2.73e-04
0.002	1.08e-03	6.20e-05	2.16e-03	1.23e-04	3.23e-03	1.83e-04	4.29e-03	2.41e-04	5.34e-03	2.98e-04
0.003	1.55e-03	7.92e-05	3.08e-03	1.57e-04	4.61e-03	2.34e-04	6.12e-03	3.09e-04	7.62e-03	3.84e-04
0.004	2.01e-03	1.08e-04	4.00e-03	2.15e-04	5.99e-03	3.21e-04	7.96e-03	4.25e-04	9.91e-03	5.28e-04
0.005	2.47e-03	1.49e-04	4.93e-03	2.97e-04	7.37e-03	4.44e-04	9.79e-03	5.88e-04	1.22e-02	7.32e-04



Şekil 5.4. β 'nin Çeşitli Değerleri için v'nin Sayısal Çözümü.



Şekil 5.5. β 'nin Çeşitli Değerleri için w'nin Sayısal Çözümü.

Örnek 5.5.

$$iu_{\eta} + D_{\xi}^{\beta}u - 2|u|u = 0, \quad (5.18)$$

$$u(\xi, 0) = \exp(i\xi), \quad (5.19)$$

$$u(0, \eta) = \exp(-3i\eta), \quad (5.20)$$

$$u(1, \eta) = \exp((1 - 9\eta)i), \quad (5.21)$$

$\beta = 2$ için analitik çözümü $u(\xi, \eta) = \exp((\xi - 3\eta)i)$ olan nonlinear uzay kesirli Schrödinger problemini göz önüne alalım.

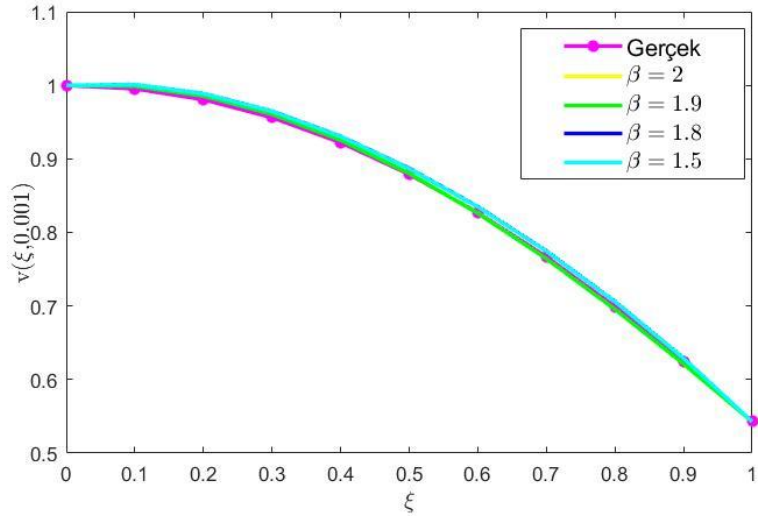
Şekil 5.6-5.7'de $n = 4$ için sırasıyla yukarıdaki algoritma kullanılarak çözümler gösterilmektedir. Grafikten görülmektedir ki, $n = 4$ için v ve w 'nin nümerik çözümleri, $\beta = 2$ için kesin çözüme yaklaşmaktadır. Tablo 5.6-5.7'de ise, farklı β değerleri için sırasıyla v ve w 'nin nümerik çözümlerinin hata karşılaştırmaları yapılmaktadır.

Tablo 5.6. Örnek 5.5.'te v ve w için $\beta = 2$ 'deki Hata Karşılaştırması.

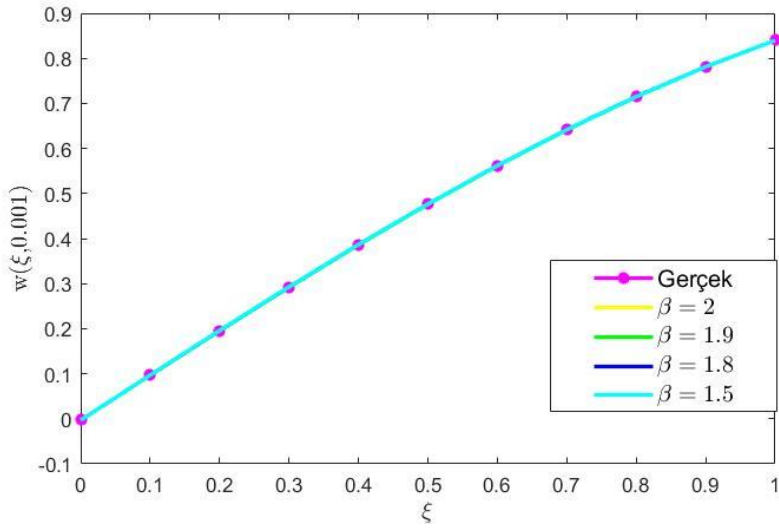
η / ξ	0.001		0.002		0.003		0.004		0.005	
	v	w	v	w	v	w	v	w	v	w
0.001	4.81e-05	5.00e-06	9.59e-05	9.97e-06	1.43e-04	1.49e-05	1.91e-04	1.98e-05	2.38e-04	2.47e-05
0.002	9.56e-05	1.72e-05	1.91e-04	3.43e-05	2.85e-04	5.14e-05	3.79e-04	6.83e-05	4.73e-04	8.53e-05
0.003	1.43e-04	3.75e-05	2.85e-04	7.48e-05	4.27e-04	1.12e-04	5.67e-04	1.49e-04	7.07e-04	1.86e-04
0.004	1.90e-04	6.59e-05	3.79e-04	1.32e-04	5.67e-04	1.97e-04	7.54e-04	2.62e-04	9.40e-04	3.27e-04
0.005	2.37e-04	1.02e-04	4.72e-04	2.04e-04	7.07e-04	3.06e-04	9.40e-04	4.07e-04	1.17e-03	5.08e-04

Tablo 5.7. Örnek 5.5.'te v ve w için $\beta = 1.8$ 'deki Hata Karşılaştırması.

η / ξ	0.001		0.002		0.003		0.004		0.005	
	v	w	v	w	v	w	v	w	v	w
0.001	8.03e-05	4.46e-08	1.60e-04	7.79e-08	2.39e-04	1.00e-07	3.18e-04	1.11e-07	3.96e-04	1.12e-07
0.002	1.59e-04	2.29e-06	3.17e-04	4.55e-06	4.74e-04	6.78e-06	6.31e-04	8.97e-06	7.86e-04	1.11e-05
0.003	2.37e-04	7.33e-06	4.73e-04	1.46e-05	7.07e-04	2.17e-05	9.39e-04	2.88e-05	1.17e-03	3.58e-05
0.004	3.14e-04	1.51e-05	6.26e-04	3.01e-05	9.36e-04	4.50e-05	1.24e-03	5.97e-05	1.55e-03	7.42e-05
0.005	3.90e-04	2.58e-05	7.77e-04	5.12e-05	1.16e-03	7.65e-05	1.54e-03	1.01e-04	1.92e-03	1.26e-04



Şekil 5.6. β 'nın Çeşitli Değerleri için v 'nin Sayısal Çözümü.



Şekil 5.7. β 'nın Çeşitli Değerleri için w 'nin Sayısal Çözümü.

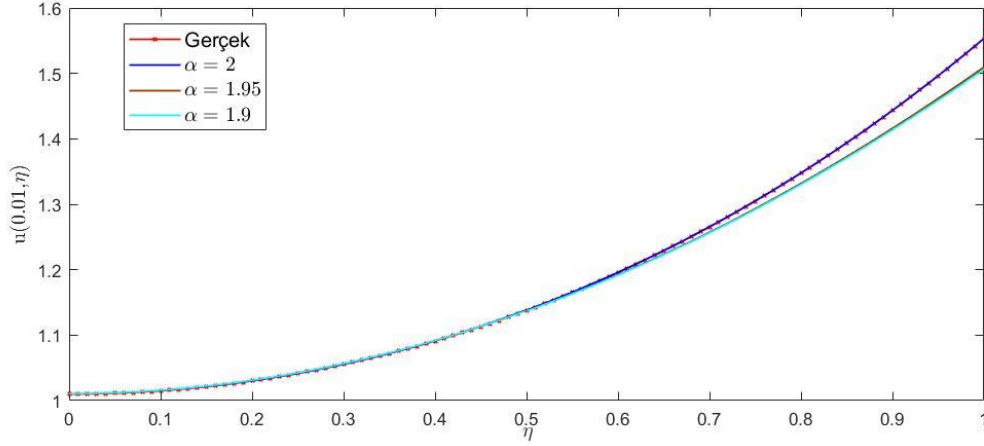
Örnek 5.6.

$$D_{\eta}^{\alpha} u(\xi, \eta) - u_{\xi\xi}(\xi, \eta) - u(\xi, \eta) = 0, \quad 1 < \alpha \leq 2 \quad (5.22)$$

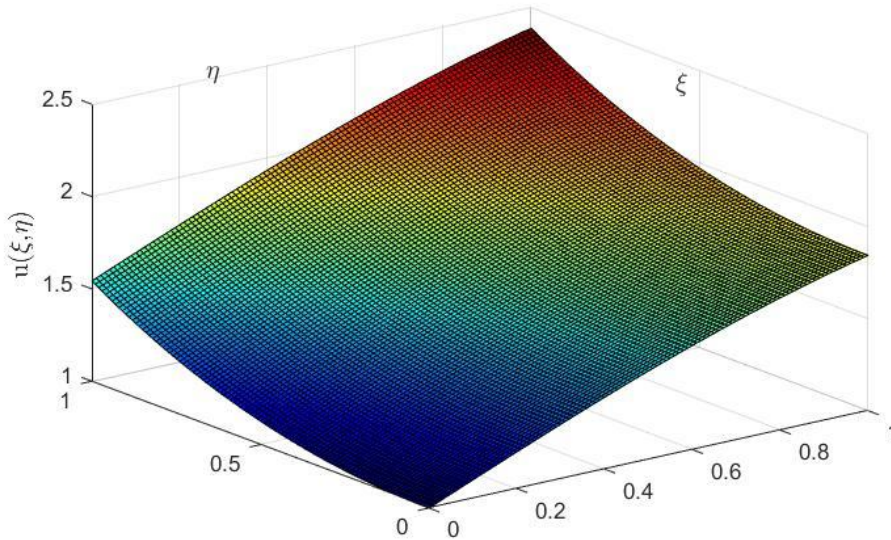
$$u(\xi, 0) = 1 + \sin(\xi), \quad u_{\eta}(\xi, 0) = 0 \quad (5.23)$$

$$u(0, \eta) = \cosh(\eta), \quad u(1, \eta) = \cosh(\eta) + \sin(1) \quad (5.24)$$

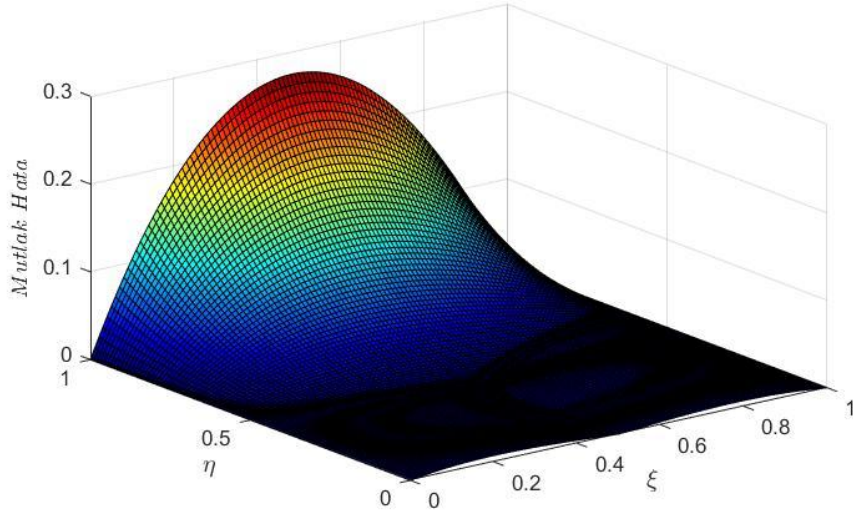
Zaman Kesirli Klein-Gordon Problemini göz önüne alalım. Bu denklemin analitik çözümü, $u(\xi, \eta) = \cosh(\eta) + \sin(\xi)$ şeklindedir. Şekil 5.8.'de $\alpha = 2, 1.95, 1.9$ ve kesin çözüm ile $k = 2, N = 2$ 'ye göre kesikli çözümlerin grafiği gösterilmektedir. Şekil 5.9.-5.10.'da $k = 2, \alpha = 2$ 'ye göre kesin çözümün ve mutlak hatanın 3 Boyutlu grafiği verilmektedir.



Şekil 5.8. Örnek 5.6. için $\alpha = 2, 1.95, 1.9$ ve Kesin Çözüm ile $k = 2, N = 2$ 'ye göre Kesikli Çözümlerin Grafiks gösterimi.



Şekil 5.9. Örnek 5.6. için $k = 2, \alpha = 2$ 'ye göre Kesin Çözümün 3 Boyutlu Grafiks gösterimi.



Şekil 5.10. Örnek 5.6. için $k = 2$, $\alpha = 2$ 'ye göre Mutlak Hatanın 3 Boyutlu Grafiksel Gösterimi.

Şekil 5.8.-5.10.'da (5.22)-(5.24) Zaman Kesirli Klein-Gordon Probleminin, Clique Dalgacıkları ve collocation noktaları ile elde edilen kesikli çözümünün, diğer mevcut yöntemlerle elde edilen kesikli çözümlerden daha yüksek doğruluğa sahip olduğu görülmektedir.

Örnek 5.7.

$$u_{\eta\eta}(\xi, \eta) - D_{\xi}^{\alpha} u(\xi, \eta) = f(\xi, \eta) = 0, \quad 1 < \alpha \leq 2 \quad (5.25)$$

$$u(\xi, 0) = \xi^{\alpha} (1 - \xi), \quad u_{\eta}(\xi, 0) = \xi^{\alpha} (\xi - 1) \quad (5.26)$$

$$u(0, \eta) = 0, \quad u(1, \eta) = 0 \quad (5.27)$$

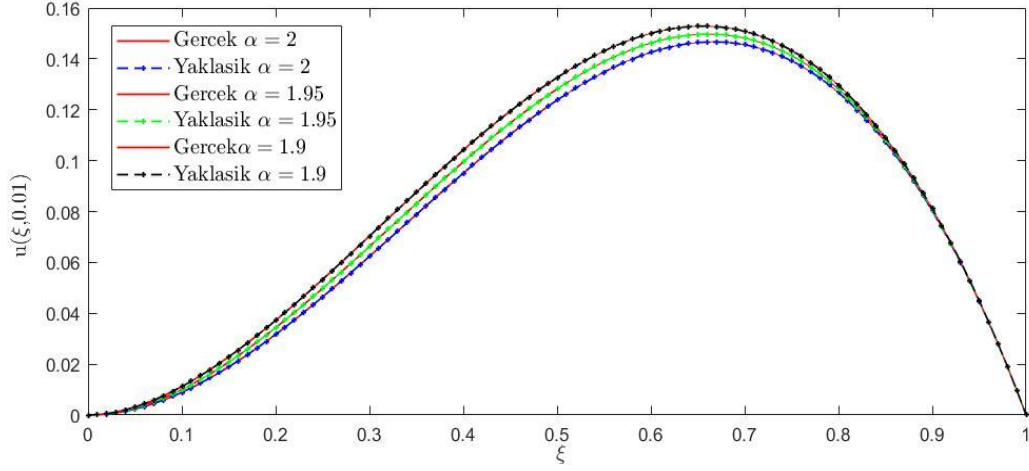
Uzay Kesirli Klein - Gordon Problemini göz önüne alalım (Randic ve dig., 2019). Burada sağ taraf fonksiyonu,

$$f(\xi, \eta) = \xi^{\alpha} (1 - \xi) \exp(-\eta) - [\Gamma(\alpha + 1) - \Gamma(\alpha + 2)\xi] \exp(-\eta) \quad (5.28)$$

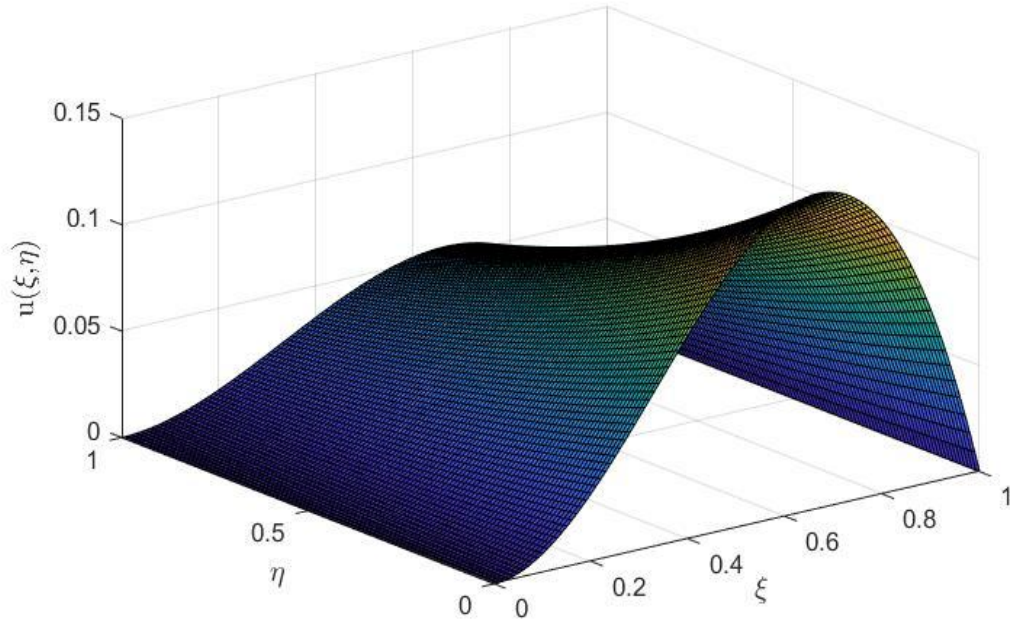
şeklindedir. Ayrıca, $u(\xi, \eta) = \xi^{\alpha} (1 - \xi) \exp(-\eta)$, bu denklemin analitik çözümüdür.

Şekil 5.11.'de $\alpha = 2, 1.95, 1.9$ ve kesin çözüm ile $k = 2, N = 2$ 'ye göre kesikli çözümlerin

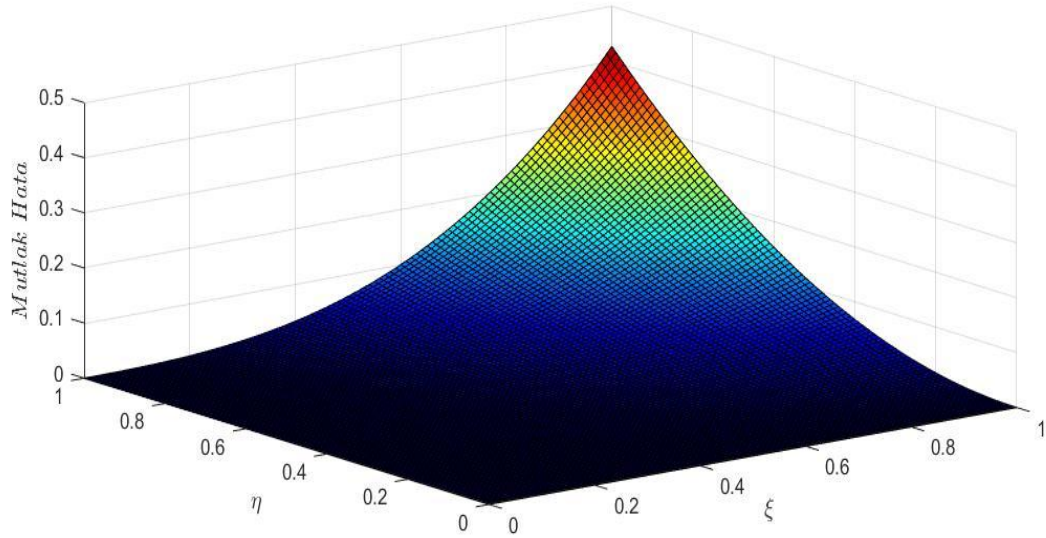
grafığı gösterilmektedir. Şekil 5.12.-5.13.'de $k = 2$, $\alpha = 2$ 'ye göre kesin çözümün ve mutlak hatanın 3 Boyutlu grafığı verilmektedir.



Şekil 5.11. Örnek 5.7. için $\alpha = 2, 1.95, 1.9$ ve Tam Çözüm ile $k = 2, N = 2$ 'ye göre Kesikli Çözümlerin Grafıksel Gösterimi.



Şekil 5.12. Örnek 5.7. için $k = 2, \alpha = 2$ 'ye göre Analitik Çözümün 3 Boyutlu Grafıksel Gösterimi.



Şekil 5.13. Örnek 5.7. için $k = 2$, $\alpha = 2$ 'ye göre Mutlak Hatanın 3 Boyutlu Grafikselsel Gösterimi.

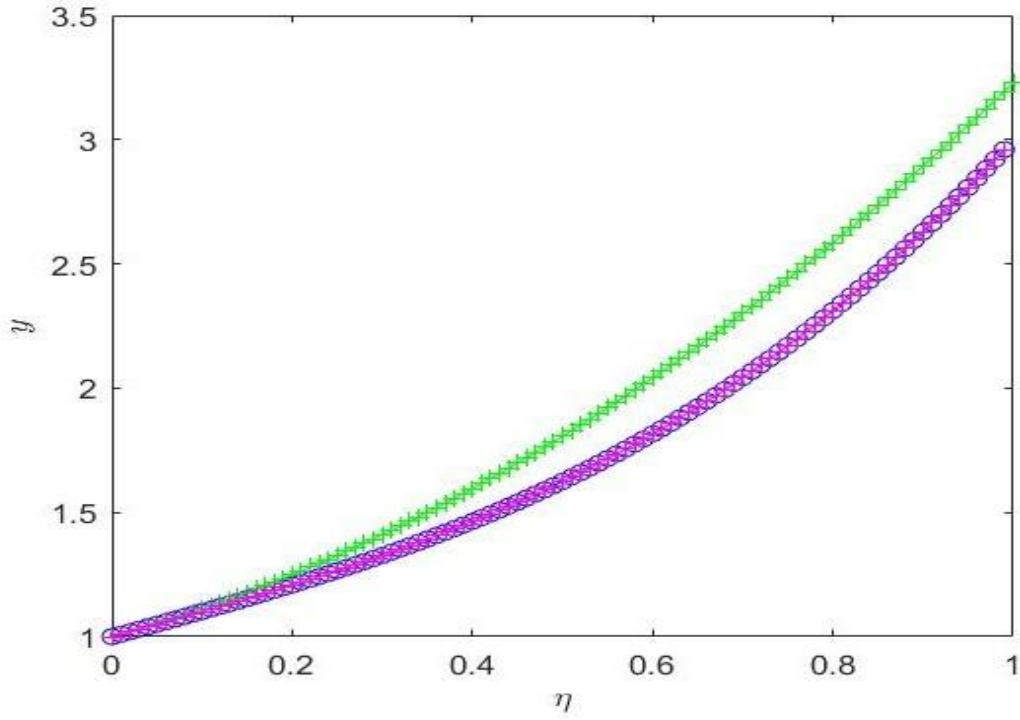
Şekil 5.11.-5.13.'te, (5.25)-(5.27) Uzak Kesirli Klein-Gordon Probleminin, Clique Dalgacıkları ve collocation noktaları ile elde edilen kesikli çözümünün, diğer mevcut yöntemlerle elde edilen kesikli çözümlerden daha yüksek doğruluğa sahip olduğu açık bir şekilde görülmektedir.

Örnek 5.8.

$$D_{\eta}^{\frac{3}{2}}y(\eta) - D^2y(\eta) + y(\eta) = 7\eta + \eta^3 + \frac{8\eta^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}} + 1 \quad (5.29)$$

$$y(0) = y'(0) = 1 \quad (5.30)$$

Kesirli Bagley-Torvik Problemini göz önüne alalım (Sakar ve dig., 2019). Bu denklemin analitik çözümü, $y(\eta) = \eta^3 + \eta + 1$ şeklindedir. Şekil 5.14.'te $N= 2, 3$ 'e göre kesikli çözümlerin ve kesin çözümün grafiği gösterilmektedir. Tablo 5.8.'de $N=3$ için sonuçların diğer yöntemlerle karşılaştırılması verilmektedir.



Şekil 5.14. Örnek 5.8. için $N= 2, 3'$ e göre Kesikli Çözümlerin (Yeşil ve Pembe Renkte) ve Tam Çözümün (Mavi Renkte) Grafikselsel Gösterimi.

Tablo 5.8. $N= 3$ için Sonuçların Karşılaştırılması.

η	VIM (Mekkaoui,2012)	FIM (Mekkaoui,2012)	SLC (El-Gamel,2017)	LWS (Koundal,2022)	CWM
0.01	0.08214	2.76e-3	2.57 e-2	1.99e-15	2.22e-16
0.25	0.17315	3.42e-3	1.51e-01	1.22e-14	4.44e-16
0.5	0.10515	1.01e-3	5.44e-01	4.90e-14	0
0.75	1.34104	4.98 e-3	1.083448	1.10e-13	0
1	4.11359	5.01 e-3	1.676130	1.96e-13	0

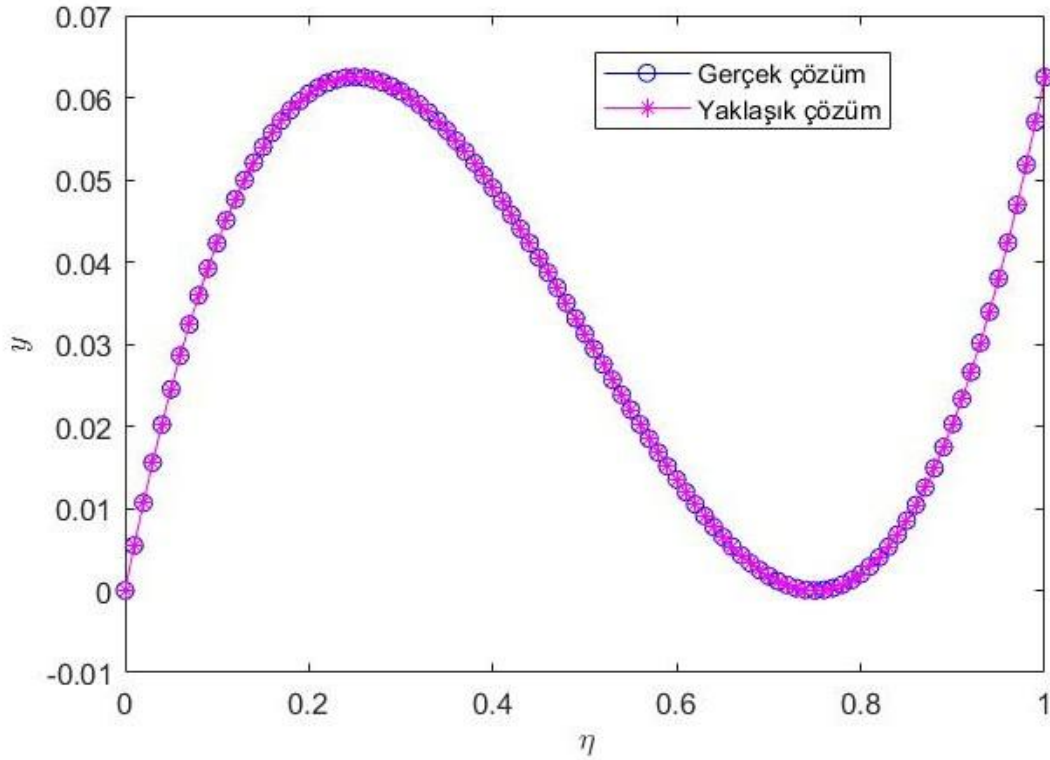
(5.29)-(5.30) probleminin Clique dalgacık çözümü, diğer mevcut yöntemlerle karşılaştırıldığında kesin çözüm için daha yüksek doğruluğa sahip kesikli çözümdür. Şekil 5.14.'te görüldüğü üzere, C_N alt uzayında Clique dalgacıklarının sayısı arttıkça, kesikli çözümler tam çözüme yaklaşmaktadır. Tablo 5.8.'de gösterildiği gibi, sunulan yöntemin doğruluğu diğer mevcut yöntemlerden daha yüksektir.

Örnek 5.9.

$$D^2 y(\eta) - \frac{2}{5} D^{\frac{3}{2}} y(\eta) - \frac{1}{2} y(\eta) = -\frac{1}{2} \eta^3 + \frac{3}{4} \eta^2 + \frac{183}{32} \eta - 3 - \frac{4 \sqrt{\eta}(-3+4\eta)}{\sqrt{\pi}} \quad (5.31)$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = \frac{9}{16} \quad (5.32)$$

Kesirli Bagley–Torvik Problemini göz önüne alalım (Fazli, Nieto, 2019). Bu denklemin analitik çözümü, $y(\eta) = \eta^3 - \frac{3}{2} \eta^2 + \frac{9}{16} \eta$ şeklindedir. Şekil 5.15.'de $N=4$ 'e göre kesikli çözümlerin ve kesin çözümün grafiği gösterilmektedir. Tablo 5.9.'da çeşitli N değerleri için sonuçların karşılaştırılması verilmektedir.



Şekil 5.15. Örnek 5.9. için $N=4$ 'e göre Kesilmiş Çözümlerin (Pembe Renkte) ve Tam Çözümün (Mavi Renkte) Grafikselsel Gösterimi.

Tablo 5.9. Çeşitli N Değerleri için Sonuçların Karşılaştırılması

x	$N = 2$	$N = 3$	$N = 4$
0.1	1.71e-02	7.13e-04	6.25e-16
0.25	9.74e-02	3.70e-03	5.00e-16
0.50	3.27e-01	9.77e-03	1.11e-16
0.75	5.95e-01	1.07e-02	1.67e-16
1	8.09e-01	1.11e-13	2.22e-16

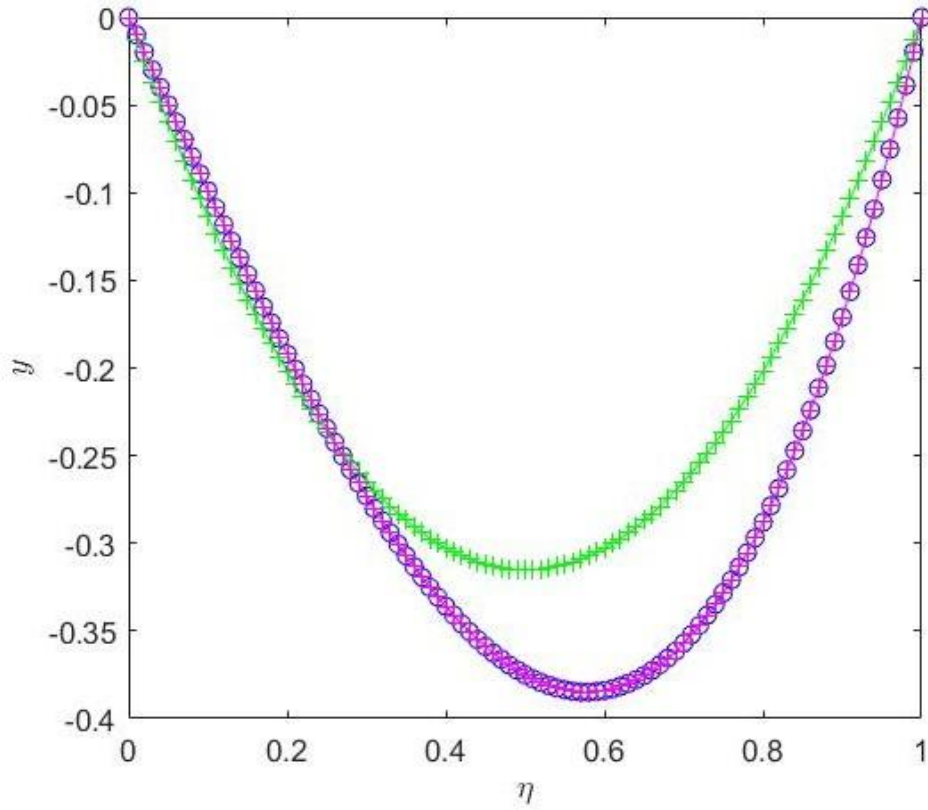
(5.31)-(5.32) probleminin Clique dalgacık çözümü, diğer mevcut yöntemlerle karşılaştırıldığında kesin çözüm için daha yüksek doğruluğa sahip kesikli çözümdür. Şekil 5.15.'te görüldüğü üzere, C_N alt uzayında Clique dalgacıklarının sayısı arttıkça, kesikli çözümler tam çözüme yaklaşmaktadır. Tablo 5.9.'da gösterildiği gibi, sunulan yöntemin doğruluğu diğer mevcut yöntemlerden daha yüksektir.

Örnek 5.10.

$$D^2 y(\eta) + D^{\frac{3}{2}} y(\eta) + y(\eta) = \eta^3 + 5\eta + \frac{8\eta^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}} \quad (5.33)$$

$$y(0) = y'(0) = 0 \quad (5.34)$$

Kesirli Bagley - Torvik Problemini göz önüne alalım (Sakar ve diğ. 2019). Bu denklemin analitik çözümü, $y(\eta) = \eta(\eta^2 - 1)$ şeklindedir. Şekil 5.16.'de $N= 2,3$ 'e göre kesikli çözümlerin ve kesin çözümün grafiği gösterilmektedir. Tablo 5.10.'da çeşitli N değerleri için sonuçların karşılaştırılması verilmektedir.



Şekil 5.16. Örnek 5.10. için $N=2, 3$ 'e göre Kesikli Çözümlerin (Yeşil ve Pembe Renkte) ve Tam Çözümün (Mavi Renkte) Grafıksel Gösterimi.

Tablo 5.10. Çeşitli N Değerleri için Sonuçların Karşılaştırılması.

η	$N=3$	(Koundal, 2022)
0.2	$5.551e-17$	$9.575e-15$
0.4	$1.665e-16$	$3.758e-14$
0.6	$1.110e-16$	$8.426e-14$
0.8	0	$1.497e-13$
1	0	0

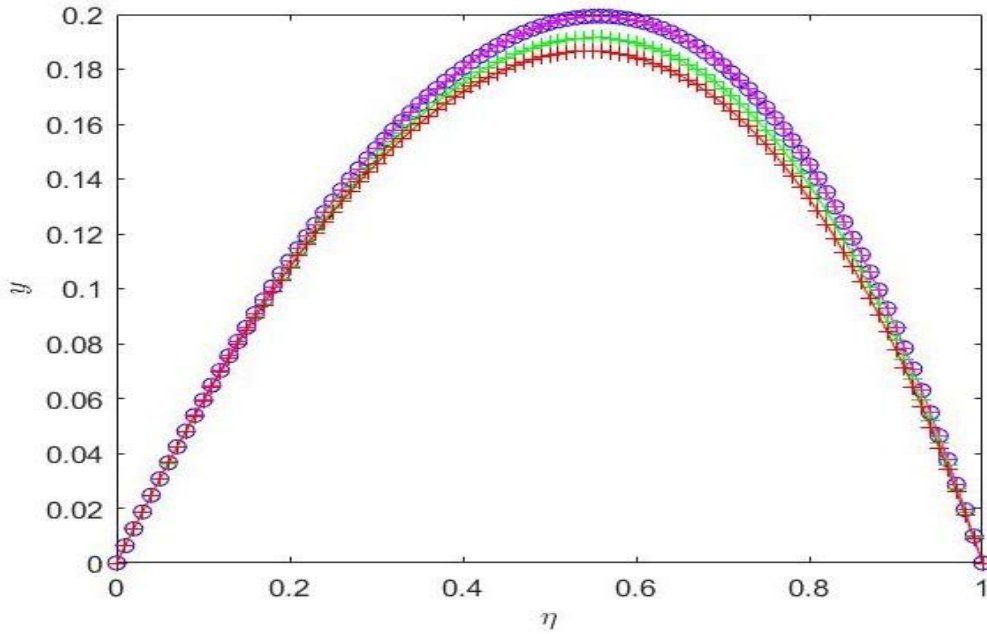
(5.33)-(5.34) probleminin Clique dalgacık çözümü, diğer mevcut yöntemlerle karşılaştırıldığında kesin çözüm için daha yüksek doğruluğa sahip kesikli çözümdür. Şekil 5.16.'da görüldüğü üzere, C_N alt uzayında Clique dalgacıklarının sayısı arttıkça, kesikli çözümler tam çözüme yaklaşmaktadır. Tablo 5.10.'da gösterildiği gibi, sunulan yöntemin doğruluğu diğer mevcut yöntemlerden daha yüksektir.

Örnek 5.11.

$$D^2 y(\eta) - D^\alpha y(\eta) = -1 - E_\alpha((\eta - 1)^\alpha), \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad (5.35)$$

$$y(0) = y(1) = 0 \quad (5.36)$$

Kesirli Bagley - Torvik Problemini göz önüne alalım (Fazli, Nieto, 2019). Bu denklemin analitik çözümü, $y(\eta) = \eta(1 - E_\alpha((\eta - 1)^\alpha))$ şeklindedir. Şekil 5.17.'de $\alpha = 1, 0.9, 0.8$ için kesikli çözümlerin ve kesin çözümün grafiği gösterilmektedir. Tablo 5.11.'de çeşitli N değerleri için sonuçların karşılaştırılması verilmektedir.



Şekil 5.17. Örnek 5.11. $\alpha = 1, 0.9, 0.8$ için Kesikli Çözümlerin (Pembe, Yeşil ve Kırmızı Renkte) ve Tam Çözümün (Mavi Renkte) Grafikselsel Gösterimi.

Tablo 5.11. Çeşitli N Değerleri için Sonuçların Karşılaştırılması.

x	$N = 2$	$N = 3$	$N = 4$	$N = 5$
0.1	1.29e-02	2.71e-03	2.47e-04	9.35e-05
0.25	1.86e-02	3.63e-03	5.47e-04	8.75e-05
0.50	4.07e-03	1.20e-01	2.76e-05	4.05e-05
0.75	1.53e-02	9.60e-02	1.05e-04	2.51e-05
1	0	0	4.16e-17	2.22e-16

(5.35) - (5.36) probleminin Clique dalgacık çözümü, diğer mevcut yöntemlere kıyasla kesin çözüm için daha yüksek doğruluğa sahip kesikli çözümdür. Şekil 5.17.'de C_N alt uzayında Clique dalgacıklarının sayısı arttıkça kesikli çözümlerin tam çözüme yaklaştığı görülmektedir. Tablo 5.11.'de gösterildiği gibi, sunulan yöntemin doğruluğu diğer mevcut yöntemlerden daha yüksektir.

Örnek 5.12.

$$D_{\eta}^{\alpha} u(\xi, \eta) + \xi u_{\xi}(\xi, \eta) - u_{\xi\xi}(\xi, \eta) = f(\xi, \eta), \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad (\xi, \eta) \in (0, 1) \times (0, 1] \quad (5.37)$$

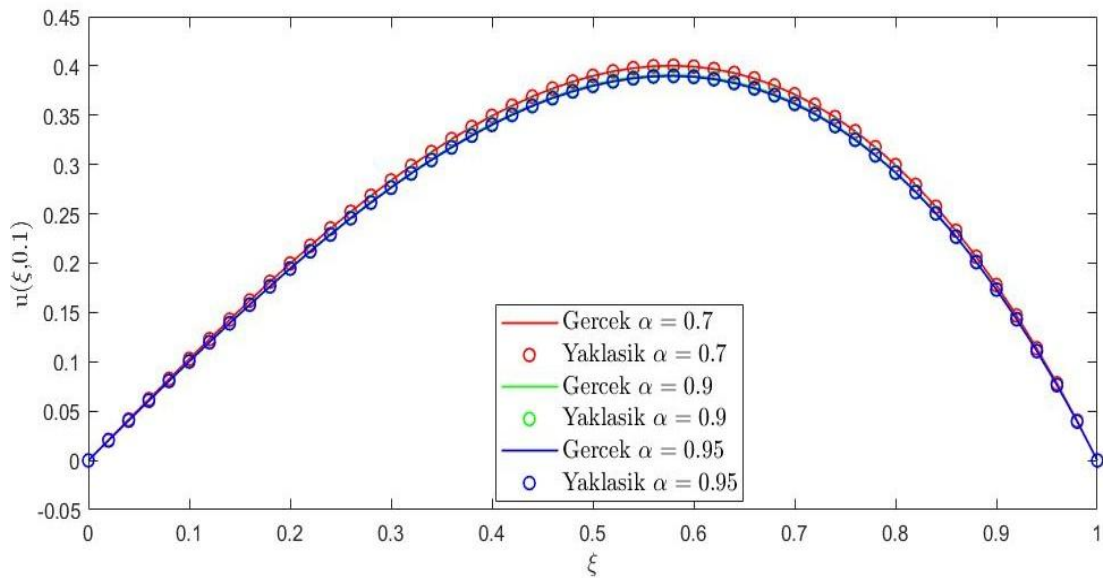
$$u(\xi, 0) = \xi - \xi^3 \quad (5.38)$$

$$u(0, \eta) = u(1, \eta) = 0 \quad (5.39)$$

Zaman Kesirli Konveksiyon-Difüzyon Problemini inceleyelim. Burada,

$$f(\xi, \eta) = \frac{\Gamma(1+2\alpha)}{\Gamma(1+\alpha)} \eta^{\alpha} (\xi - \xi^3) + (1 + \eta^{\alpha})(7\xi - 3\xi^3) \quad \text{şeklindedir. Bu denklemin}$$

analitik çözümü, $u(\xi, \eta) = (1 + \eta^{2\alpha})(\xi - \xi^3)$ şeklindedir. Şekil 5.18.'de çeşitli α değerleri için kesin ve sayısal çözümün grafiği gösterilmektedir. Tablo 5.12.'de $m=3$ ve $T=0.1$ 'de çeşitli α değerleri için sonuçların karşılaştırılması verilmektedir.



Şekil 5.18. Örnek 5.12. Çeşitli α Değerleri için Kesin ve Sayısal Çözüm Grafiği.

Tablo 5.12. Örnek 5.12. için $T=0.1$ ve $\alpha=0.7, 0.9, 0.95$ Değerlerinde Mutlak Hata.

ξ	$\alpha = 0.7$		$\alpha = 0.9$		$\alpha = 0.95$	
	m=6 (FCC) (Kumar, 2021)	CCM	m=6 (FCC) (Kumar, 2021)	CCM	m=6 (FCC) (Kumar, 2021)	CCM
0.1	3.0250e-03	6.9389e-17	2.4473e-03	2.7756e-17	2.3521e-03	4.1633e-17
0.2	5.8222e-03	2.7756e-17	4.7146e-03	2.7756e-17	4.5138e-03	5.5511e-17
0.3	8.1614e-03	2.7756e-16	6.6114e-03	2.2204e-16	6.3227e-03	1.6653e-16
0.4	9.8394e-03	0	7.9728e-03	5.5511e-17	7.6213e-03	1.1102e-16
0.5	1.0675e-02	1.1102 e-16	8.6566e-03	2.2204 e-16	8.2740e-03	0
0.6	1.0492e-02	1.6653 e-16	8.5537e-03	5.5511 e-17	8.1765e-03	1.1102 e-16
0.7	9.3727e-03	2.7756 e-16	7.5997e-03	3.8858 e-16	7.2674e-03	1.1102 e-16
0.8	7.1396e-03	0	5.7900e-03	1.1102e-16	5.5422e-03	3.8858e-16
0.9	3.9436e-03	1.1102e-16	3.1971e-03	1.6653e-16	3.0699e-03	4.1633e-16

Önerilen yöntemle elde edilen mutlak hatalar, Tablo 5.12.'de $\alpha = 0.7, 0.9, 0.95$ ve $T = 0.1$ için verilmiştir. Şekil 5.18.'de, $T = 0.1$ ve $m = 3$ 'teki çeşitli α değerleri için kesin ve sayısal çözüm grafiği sunulmaktadır. Şekil 5.18.'den sayısal sonuçlar kesin çözümle iyi bir uyum içindedir.

Örnek 5.13.

$$D_{\eta}^{\alpha} u(\xi, \eta) + \xi u_{\xi}(\xi, \eta) + u_{\xi\xi}(\xi, \eta) = f(\xi, \eta), \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad (\xi, \eta) \in (0, 1) \times (0, 1] \quad (5.40)$$

$$u(\xi, 0) = \xi^2 \quad (5.41)$$

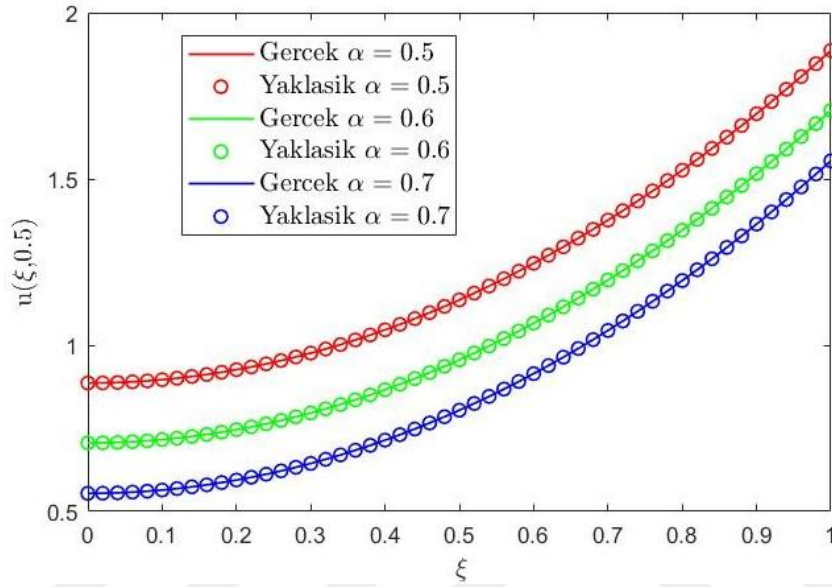
$$u(0, \eta) = 2 \frac{\Gamma(1 + \alpha)}{\Gamma(1 + 2\alpha)} \eta^{2\alpha}, \quad (5.42)$$

$$u(1, \eta) = 1 + 2 \frac{\Gamma(1 + \alpha)}{\Gamma(1 + 2\alpha)} \eta^{2\alpha}, \quad (5.43)$$

Zaman Kesirli Konveksiyon-Difüzyon Problemini inceleyelim. Burada, $f(\xi, \eta) = 2\eta^{\alpha} + 2\xi^2 + 2$ şeklindedir. Bu denklemin analitik çözümü,

$u(\xi, \eta) = \xi^2 + 2 \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+2\alpha)} \eta^{2\alpha}$ şeklindedir. Şekil 5.19.'da $T=0.5$ 'te $\alpha=0.5$ 'de çeşitli α

değerleri için kesin ve sayısal çözümün grafiği gösterilmektedir. Tablo 5.13.'te $T=0.5$ 'te $\alpha=0.5$ 'deki mutlak hatanın diğer yöntemle karşılaştırılması verilmektedir.



Şekil 5.19. Örnek 5.13. için $T=0.5$ 'te $\alpha=0.5$ için Sayısal ve Kesin Çözümün Grafiği.

Tablo 5.13. Örnek 5.13. için $T=0.5$ ve $\alpha=0.5$ 'teki Mutlak Hata.

ξ	$\alpha = 0.5$	
	m=5 (FCC) (Kumar,2021)	CCM
0.1	7.964e-06	0
0.2	3.912e-06	0
0.3	6.162e-06	0
0.4	5.953e-06	0
0.5	2.103e-06	0
0.6	7.639e-06	0
0.7	1.967e-06	0
0.8	8.103e-06	0
0.9	6.019e-06	0

Önerilen yöntemle elde edilen mutlak hatalar, Tablo 5.13.'te $\alpha = 0.5$ ve $T = 0,5$ için verilmiştir. Şekil 5.19.'da $T = 0.5$ ile $m = 2$ 'de çeşitli α değerleri için kesin ve sayısal çözüm grafiği gösterilmektedir. Şekil 5.19.'da sayısal sonuçların kesin çözümle iyi bir uyum içinde olduğunu görülmektedir.



6. SONUÇLAR

Bu çalışmada, ilk olarak ikinci mertebeden nonlinear diferansiyel denklem sistemi, grafik teorisinde kullanılan ve yeni bir yöntem olan Clique Collocation Metodu ile nümerik olarak çözülmüştür. Verilen örneklerde, Clique Collocation Metodunun Taylor-Matrix Metodu ile karşılaştırılması yapılmıştır. Elde edilen sonuçlara göre, önerilen yöntemin diğer yonteme göre daha kullanışlı ve daha yakın sonuçlar verdiği görülmüştür. Ayrıca, alınan nonlinear örneklerin analitik çözümü elde edilemeyip öngörülen yaklaşım ile çözümünün elde edildiği gösterilmiştir.

İkinci olarak, etkili ve doğru bir yöntem olan Kesirli Clique Collocation Yöntemi, Uzak Kesirli Schrödinger probleminin sayısal çözümünü oluşturmak için geliştirilmekte ve kullanılmaktadır. Uzak Kesirli Schrödinger Denkleminin Çözümü, adi ve cebirsel denklem sistemlerine indirgenerek kesirli Clique Polinomları kullanılarak elde edilir. Bu sistem, residual kuvvet serisi yöntemi ile çözülür. Clique polinomlarının özellikleri, çözüme büyük bir doğrulukla ulaşmamızı sağlar. Sonuçlar, etkili örnekler ile gösterilmektedir.

Üçüncü olarak, özellikle Zaman Kesirli Klein – Gordon Problemi ve Uzak Kesirli Klein-Gordon Problemi için zaman veya uzak kesirli problemlerinde Clique Dalgacıklarının tanımlanması ve bunların collocation noktaları ile birlikte kullanılmasıyla yeni bir yöntem tanıtılmaktadır. Clique Dalgacıkları $[0,1]$ aralığındaki Clique Polinomları kullanılarak geliştirilmiştir. Bu yöntemin önemli avantajlarından bir tanesi hem zaman hem de uzak kesirli problemler için kullanılabilmesidir. Problemi daha az zorlukla çözmeye olanak sağlayan bu yöntem ile, kesirli kısmi diferansiyel denklemler, kesirli adi diferansiyel denklem ve cebirsel denklem sistemine indirgenir. Elde edilen kesikli çözümlerin doğruluğunun, mevcut diğer yöntemlerin kesikli çözümlerine göre daha yüksek olduğu açıklayıcı örneklerle desteklenmektedir.

Dördüncü olarak, Bagley-Torvik Problemlerinin kesikli çözümlerini oluşturmak için Clique dalgacıklarını tanımlayarak ve bunları collocation noktaları ile birlikte kullanarak yeni bir yöntem geliştirilmiştir. Yakınsama analizi de sunulmuş ve açıklayıcı örneklerle desteklenmiştir. Elde edilen kesikli çözümlerin diğer yöntemlere kıyasla daha yüksek doğruluğa sahip olduğu gösterilmiştir. Sonuç olarak, bu Clique dalgacıkları yönteminin

etkinliği ve doğruluğu araştırılmış ve gösterilmiştir. Bu etkili yaklaşım, uygulamalı bilimlerdeki diğer kesirli problemleri elde etmek için de kullanılabilir. Gelecekteki çalışmalarda, bu yöntem zaman kesirli başlangıç değer problemlerinin ve ters problemlerin kesikli çözümlerini oluşturmak için dikkate alınacaktır.

Bu araştırmada son olarak, Zaman Kesirli Konveksiyon-Difüzyon Probleminin çözümünü oluşturmak için Clique polinomları ve collocation noktaları kullanılarak yeni bir yaklaşım ortaya konulmaktadır. İlk olarak Zaman Kesirli Konveksiyon-Difüzyon Denklemi herhangi bir zorlukla karşılaşmadan elde edilen kesirli adi diferansiyel ve cebirsel denklemler sistemine indirgenmektedir. Daha sonra Residüel Kuvvet Serisi Metodu kullanılarak bilinmeyen katsayılar ve akabinde de sistemin çözümü elde edilmektedir. Önerilen yöntemin önemini göstermek için yakınsaklık analizi de sunulmaktadır. Bu yaklaşımın uygulanması, önerilen yöntemin etkinliğini ve doğruluğunu gösteren iki sayısal örnek sunularak gösterilmektedir.

Özetle, bu yöntem birçok kesirli problemlerde etkili ve efektiftir. Sonuç olarak, mevcut yöntemin sonucu, bilim adamlarının ve araştırmacıların matematik problemlerini daha yüksek doğrulukla analiz etmelerine olanak tanımaktadır.

KAYNAKLAR

- Abbasbandy, S. (2007). Numerical Solutions of Nonlinear Klein-Gordon Equation by Variational Iteration Method, *Int. J. Num. Meth. Engg.*, 70, 876–81.
- Abd-Elhameed, W. M., Youssri, Y. H. (2017). Generalized Lucas Polynomial Sequence Approach for Fractional Differential Equations, *Nonlinear Dyn.*, 89(2), 1341-1355.
- Adel, W., Srinivasa, K. (2022). A New Clique Polynomial Approach for Fractional Partial Differential Equations, *Intern J. of Nonlinear Sci. and Num. Simul.*, 24(8).
- Agrawal, G. (2013). *Nonlinear Fiber Optics*, Elsevier.
- Alshbool, M.H.T., Bataineh, A. S., Hashim, I., Isik, O. R. (2017). Solution of Fractional-Order Differential Equations Based on The Operational Matrices of New Fractional Bernstein Functions, *J King Saud Univ Sci.*, 29(1), 1-18.
- Aminikhah, H., Sheikhani, A.R., Rezazadeh, H. (2014). An Efficient Method for Time-Fractional Coupled Schrödinger System, *International Journal of Partial Differential Equations*, 10, 1–12.
- Amin, R., Alshahrani, B., Mahmoud, M., Abdel-Aty, A.H., Shah, K., Deebani, W. (2021). Haar Wavelet Method for The Solution Of Distributed Order Time Fractional Differential Equations, *Alex. Eng. J.*, 60(3), 3295–3303.
- Arqub O. A., Maayah, B. (2018). Solutions of Bagley-Torvik and Painleve Equations of Fractional Order Using Iterative Reproducing Kernel Algorithm with Error Estimates, *Neural Comput. Appl.*, 29(5), 1465-1479.
- Bayrak M. A., Demir A. (2021). Solving Time Fractional Schrodinger Equation in the Sense of Local Fractional Derivative, *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 16(8).
- Bayrak M. A., Demir A., Ozbilge E. (2022). An Improved Version of Residual Power Series Method for Space-Time Fractional Problems, *Advances in Mathematical Physics*, 4, 1-9.
- Bhrawy, A.H., Doha, E.H., Ezz-Eldien, S.S., Gorder, R.A.V. (2014). A New Jacobi Spectral Collocation Method for Solving 1+1 Fractional Schrödinger Equations and Fractional Coupled Schrödinger Systems, *The European Physical Journal Plus*, 129(12).
- Brunner, H., Iserles, A., Nørsett, S. P. (2011). The Computation of the Spectra of Highly Oscillatory Fredholm Operators, *J. Integral Equations Appl.*, 23, 1-40.
- Buyuk, A., Bayrak, M. A., Demir A. (2022). A New Approach to Differential Equations Using Clique Collocation Method, *5th International Conference on Life and Engineering Sciences*, Alanya, Turkey.

- Caputo, M. (1969). *Elasticita E Dissipazione*, Zani-Chelli, Bologna.
- Cenesiz, Y., Keskin Y., Kurnaz, A. (2010). The Solution of The Bagley–Torvik Equation with The Generalized Taylor Collocation Method, *J.Franklin Inst.*, 347(2), 452-466.
- Dolapcı, I.T. (1996). Chebyshev Collocation Method for Solving Linear Differential Equations, *Dumlupınar University, Dep. of Math.*, 9(1), 107-115.
- Diethelm K., Ford, J. (2002). Numerical Solution of The Bagley-Torvik Equation, *BIT Numer. Math.* 42(3), 490-507.
- Diethelm, K. (2010). The Analysis of Fractional Differential Equations, *Springer-Verlag*, Berlin.
- Diudea, M.V., Gutman I., Lorentz J. (1999). *Molecular Topology*.
- El-Gamel M., El-Hady, M. A. (2017). Numerical Solution of The Bagley-Torvik Equation by Legendre-Collocation Method, *SeMA J.*, 74(4), 371-383.
- EI-Kalla, I. L. (2011). Error Estimate of The Series Solution to A Class of Nonlinear Fractional Differential Equations, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, 16, 1408–1403.
- EI-Sayed, A. (1998). Nonlinear Functional Differential Equations of Arbitrary Orders, *Nonlinear Analysis*, 33, 2, 181–186.
- Esen, A., Tasbozan, O. (2015). Numerical Solution of Time Fractional Nonlinear Schrödinger Equation Arising in Quantum Mechanics by Cubic B-Spline Finite Elements, *Malaya J. Mat.*, 3(4), 387–397.
- Esen, A., Tasbozan, O. (2017). Numerical Solution of Time Fractional Schrödinger Equation by Using Quadratic B-Spline Finite Elements, *Annales Mathematicae Silesianae*, 31(1), 83–98.
- Fazli H., Nieto, J. J. (2019). An Investigation of Fractional Bagley-Torvik Equation, *Open Mathematics*, 17, 499-512.
- Fisher, D.C., Solow, A.E. (1990). Dependence Polynomials, *Discrete Math*, 82, 251-258.
- Gepreel, K.A., Mohamed, M.S. (2013). Analytical Approximate Solution for Nonlinear Space-Time Fractional Klein-Gordon Equation, *Chin Phys. B.*, 22, 010201.
- Golmankhaneh, A.K., Baleanu, D. (2011). On Nonlinear Fractional Klein-Gordon Equation, *Signal Proc.*, 91, 446–51.
- Guf, J.S., Jiang, W.S. (1996). The Haar Wavelets Operational Matrix of Integration, *Int. J. Syst. Sci.*, 27, 623-628.

- Harary, F. (1969). *Graph Theory*, Addison-Wesley, Reading.
- Hicdurmaz, B., Ashyralyev, A. (2017). On The Stability of Time-Fractional Schrödinger Differential Equations, *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 38(10), 1215–1225.
- Hoede, C., Li, X. (1994). Clique Polynomials and Independent Set Polynomials of Graphs, *Discrete Math.*, 125 pp., 219-228.
- Horadam, A. F., Mahon, J. M. (1985). Pell and Pell-Lucas Polynomials, *Fibonacci Quart*, 23(1), 7-20.
- Izadi, M., Samei, M. E. (2022). Time Accurate Solution to Benjamin-Bonamahony Burgers Equation Via Taylor-Boubaker Series Scheme, *Boundary Value Problems*, 17.
- Izadkhah, M.M., Saberi, J., Nadjafi J. (2015). Gegenbauer Spectralmethod for Time-Fractional Convection-Diffusion Equations with Variable Coefficients, *Math. Meth. Appl. Sci.* 38(15), 3183-3194.
- Jibenja, N., Yuttanan, B., Razzaghi, M. (2018). An Efficient Method for Numerical Solutions Of Distributed-Order Fractional Differential Equations, *J. Com Put. Nonlinear Dyn.* 13(11), 111003.
- Karaman, B., Dereli, Y. (2019). Lineer Olmayan İkili Schrödinger Denklemi için Ağsız Bir Yöntem, *Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Fen Dergisi*, 418–435.
- Khader, M.M., Kumar, S. (2013). An Accurate Numerical Method for Solving the Linear Fractional Klein–Gordon Equation, *Math. Meth. Appl. Sci.*, 37, 2972-9.
- Khan, H., Khan, Q., Kumam, P., Tchier, F., Ahmed, S. (2022). The fractional view analysis of the Navier-Stokes equations within Caputo operator. *Elsevier*, 8, 100076.
- Kilbas, A.A., Srivastava, H.M., Trujillo, J. (2006). Theory and Applications of Fractional Differential Equations, *Elsevier*, 204, Netherlands.
- Koundal, R., Kumar, R., Srivastava K., Baleanu, D. (2022). Lucas Wavelet Scheme for Fractional Bagley-Torvik Equations: Gauss-Jacobi Approach, *Int. J. Appl. Comput. Math.*, 8(1).
- Kumar, D., Singh, J., Baleanu, D. (2017). A Hybrid Computational Approach for Klein-Gordon Equations on Cantor Sets, *Nonlin. Dyn.*, 87, 511–7.
- Kumar, D., Singh, J., Kumar, S., Sushila, S. (2014). Numerical Computation of Klein-Gordon Equations Arising in Quantum Field Theory by Using Homotopy Analysis Transform Method, *Alexandria Eng. J.*, 53, 469–74.

- Kumar, V. S.S. (2021). The Chebyshev Collocation Method for A Class of Time Fractional Convection-Diffusion Equation with Variable Coefficients, *Math. Meth. Appl. Sci.*, 44, 6666–6678.
- Kumbinarasaiah, S. (2020). A New Approach for the Numerical Solution for Nonlinear Klein–Gordon Equation, *SeMA*, 77, pp. 435–456.
- Kumbinarasaiah, S., Manohara, G. (2022). A Novel Approach for the System of Coupled Differential Equations Using Clique Polynomials of Graph, *Partial Diff. Eq. in Applied Math.*, 5, 100181.
- Kumbinarasaiah, S. Ramane, H.S. Pise, K., Hariharan, G. (2021). Numerical-Solution for Nonlinear Klein–Gordon Equation Via Operational Matrix by Clique Polynomial of Complete Graphs, *Int. J. Appl. Comput. Math.*, 7, pp. 12.
- Kurulay, M. (2012). Solving the Fractional Nonlinear Klein-Gordon Equation by Means of the Homotopy Analysis Method, *Adv. Diff. Eqs.*, 13, 529-39., 8(3), 1-16.
- Lazopoulos, A. K. (2016). On Fractional Peridynamic Deformations, *Arch. Appl. Mech.*, 86, 1987–94.
- Mainardi, F. (2010). *Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity (First Ed.)*, Imperial College Press, London.
- Mekkaoui T., Hammouch, Z. (2012). Approximate Analytical Solutions to The Bagley-Torvik Equation by The Fractional Iteration Method, *Ann. Univ. Craiova Math. Comput. Sci. Ser.* 39(2), 251-256.
- Miller, K. S., Ross, B. (1993). *An Introduction to The Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*, Wiley, USA.
- Mohyud-Din, S. T., Noor, M.A., Noor, K.I. (2009). Some Relatively New Techniques for Nonlinear Problems, *Math. Prob. Eng.*, 234849.
- Momani, S., Odibat, Z. (2007). Generalized Differential Transform Method for Solving A Space And Time-Fractional Diffusion-Wave Equation, *Physics Letters A*, 370, 379–387.
- Naber, M. (2004). Time Fractional Schrödinger Equation, *Journal of Mathematical Physics*, 45(8), 3339–3352.
- Odibat, Z. M. (2010). A Study on the Convergence of Variational Iteration Method, *Mathematical and Computer Modeling*, 51, 1181–1192.
- Odibat, Z., Momani, S. (2008). A Generalized Differential Transform Method for Linear Partial Differential Equations of Fractional Order, *Applied Mathematics Letters*, 21, 194–199.

- Odibat, Z., Momani, S. (2008). Generalized Differential Transform Method: Application to Differential Equations of Fractional Order, *Applied Mathematics and Computation*, 197, 467–477.
- Oruc, O. (2017). A New Algorithm Based on Lucas Polynomials for Approximate Solution of 1D and 2D Nonlinear Generalized Benjamin-Bona-Mahonyburgers Equation, *Comput Math Appl.*, 74(12), 3042-3057.
- Podlubny, I. (1999). Fractional Differential Equations, Cilt198 of Mathematics in Science and Engineering, *Academic Press, Inc.*, San Diego, CA.
- Pourbabae, M., Saadatmandi, A. (2021). Collocation Method Based On Chebyshev Polynomials for Solving Distributed Order Fractional Differential Equations, *Comput. Methods Differ. Equ.*, 9(3), 858–873.
- Randic, M., Hansen, P.J., Jurs, P.C. (1988). Search for Useful Graph Theoretic Invariants of Molecular Structure, *J. Chem. Inf. Comput. Sci.*, 28(2), 60–8.
- Ray, S. S. (2012). On Haar Wavelet Operational Matrix of General Order and Its Application for The Numerical Solution of Fractional Bagley Torvik Equation, *Appl. Math. Comput.* 218(9), 5239-5248.
- Ray, S. S., Bera, R. (2005). Analytical Solution of The Bagley Torvik Equation By Adomian Decom Position Method, *Appl. Math. Comput.* 168(1), 398-410.
- Razzaghi, M., Yousefi, S. (2001). Legendre Wavelets Operational Matrix of Integration, *Int. J. Syst. Sci.*, 32, 495-502.
- Rehman, M. U., Khan, R. A. (2012). A Numerical Method for Solving Boundary Value Problems for Fractional Differential Equations, *Appl. Math. Model.*, 36, 894-907.
- Saadatmandi, A., Dehghan, M., Azizi, M.R. (2012). The Sinc-Legendre Collocation Method for A Class of Fractional Convection-Diffusion Equations with Variable Coefficients, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 17(11), 4125-4136.
- Saeed, U. (2014). Hermite Wavelet Method for Fractional Delay Differential Equations, *J. Differ. Equ.*, 1(8).
- Saeed, U., Rehman, M., Iqbal, M.A. (2015). Modified Chebyshev Wavelet Methods for Fractional Delay-Type Equations, *Appl Math Comput*, 264, 431–442.
- Sakar, M. G., Saldir O., Akgul, A. (2019). A Novel Technique for Fractional Bagley–Torvik Equation, *Proc. Natl. Acad. Sci. India Sect. A Phys. Sci.*, 89(3), 539-545.
- Senol, M. and Ata, A. (2018). Approximate solution of time-fractional KdV equations by residual power series method, *J. BAUN Inst. Sci. Technol.*, 20(1), 430-439.

- Shi, Y., Dehmer, M., Li, X., Gutman, I. (2016). *Graph Polynomials*, CRC Press (List of Graph Polynomials).
- Singh, H. (2016). A New Numerical Algorithm for Fractional Model of Bloch Equation in Nuclear Magnetic Resonance, *Alex Engl. J.*, 55, 2863–9.
- Singh, H. (2017). Solution of Fractional Lienard Equation Using Chebyshev Operationalmatrix Method, *Nonlin. Sci. Lett. A.*, 8, 397–404.
- Singh, H., Srivastava, H. M., Kumar, D. (2017). A Reliable Numerical Algorithm for the Fractional Vibration Equation, *Chaos Solitons Fractals*, 103, 131–138.
- Singh, H., Wazwaz, A.M. (2021). Computational Method for Reaction Diffusionmodel Arising in A Spherical Catalyst, *Int J Appl Comput Math.* 7(3), 1–11.
- Sumelka, W. (2015). Non-Local Kirchhoff–Love Plates in Terms of Fractional Calculus, *Arch Civil Mech. Eng.*, 15, 231–42.
- Wang, Y.X., Fan, Q.B. (2012). The Second Kind Chebyshev Wavelet Method for Solving Fractional Differential Equations, *Applied Mathematics and Computation*, 218, 8592–8601.
- Wazwaz, A. M. (2002). *Partial Differential Equations: Methods and Applications*, The Netherlands, NL: *Balkema Publishers*, 200.
- Wazwaz, A.M. (2006). The Modified Decomposition Method for Analytic Treatment of Differential Equations, *Appl. Math. Comput.*, 173, 165–76.
- Wazwaz, A. M. (2008). A Study on Linear and Nonlinear Schrodinger Equations by the Variational Iteration Method, *Chaos, Solitons, Fractals*, 37(4), 1136–1142.
- Wei, L., He, Y., Zhang, X., Wang, S. (2012). Analysis of an Implicit Fully Discrete Local Discontinuous Galerkin Method for the Time-Fractional Schrödinger Equation, *Finite Elements in Analysis and Design*, 59, 28–34.
- Whitham, G.B. (1974). *Linear and Nonlinear Waves*, Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], *Pure and Applied Mathematics*, New York-London-Sydney.
- Xu, Y., Zhang, Y., Zhao, J. (2019). Error Analysis of The Legendre-Gauss Collocation Methods for The Nonlinear Distributed-Order Fractional Differential Equation, *Appl. Numer. Math.*, 142, 122–138.
- Yi, M.X., Chen, Y.M. (2012). Haar Wavelet Operational Matrix Method For Solving Fractional Partial Differential Equations, *Computer Modeling in Engineering and Sciences*, 88, 3, 229–2442.

- Ying, Y.P., Lian, Y.P., Tang, S.Q., Liu, W.K. (2017). High-Order Central Difference Scheme for Caputo Fractional Derivative, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 317, 42–54.
- Yousefi, S., Razzaghi, M. (2005). Legendre Wavelets Method for The Nonlinear Volterra-Fredholm Integral Equations, *Math. Comput. Simul.*, 70(1), 1–8.
- Yousif, M.A., Mahmood, B.A. (2017). Approximate Solutions for Solving the Klein-Gordon Sine-Gordon Equations, *J. Assoc. Arab. Univ. Bas. Appl. Sci.*, 22, 83–90.
- Zhang, J., Zhang, X., Yang, B. (2018). An Approximation Scheme for The Time Fractional Convection-Diffusion Equation, *Appl. Math. Comput.*, 335, 305-312.
- Zhang, Y. (2009). A Finite Difference Method for Fractional Partial Differential Equation, *Applied Mathematics and Computation*, 215, 524–529.
- Zolfaghari, M., Ghaderi, R., Sheikholeslami, A., Ranjbar, A., Hosseinnia, S., Momani S., Sadati, J. (2009). Application of The Enhanced Homotopy Perturbation Method to Solve The Fractional-Order Bagley–Torvik Differential Equation, *Phys. Scr. (T136)*, 014032.

KİŞİSEL YAYIN VE ESERLER

- Bayrak, M.A., Demir, A., **Buyuk, A.** (2025). A Novel Analytical Method For Time Fractional Convection-Diffusion Equation Through Clique Polynomials of the Cocktail Party Graph, *Journal of Applied Analysis and Computation*, 15(1), 564–573.
- Bayrak, M.A., Demir, A., Erman, S., **Buyuk, A.** (2026). Novel Wavelet Approach for Solving Fractional Bagley-Torvik Problems, *Kragujevac Journal of Mathematics*, 50(5), 745–757.
- Bayrak, M. A., Erman, S., Demir, A., **Buyuk, A.** (2023). Novel Wavelet Approach for Solving Time or Space Fractional Klein-Gordon Problems, *6th International Conference on Life and Engineering Sciences*, Alanya, Turkey, 02-05 Kasım 2023.
- Buyuk, A.**, Bayrak, M. A., Demir, A. (2022). A New Approach to Differential Equations Using Clique Collocation Method, *5th International Conference on Life and Engineering Sciences*, Alanya, Turkey, 19-22 Mayıs 2022.

ÖZGEÇMİŞ

İlk, orta ve lise öğrenimini İstanbul'da tamamladı. 2008 yılında girdiği Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nden Ağustos 2012'de Matematikçi unvanıyla mezun oldu. Aralık 2015'te Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'ndaki Yüksek Lisans öğrenimini bitirdi. Eylül 2019'da başladığı Kocaeli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Doktora Programını Ocak 2025'te bitirerek Doktor unvanını aldı. İngilizce bilmektedir.

