



T.C.
TOKAT GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS PROGRAMI

BAŞLANGIÇ ZAMANLARI FARKLI
EŞLENMİŞ ALT VE ÜST ÇÖZÜMLERLE VERİLEN
LİNEER OLMAYAN DİFERENSİYEL DENKLEMLER İÇİN
KUASİLİNEERİZASYON YÖNTEMİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Mustafa FIRAT

Danışman: Prof. Dr. Ali YAKAR

TOKAT- 2025

ETİK SÖZLEŞME

Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre, Prof. Dr. Ali YAKAR'ın danışmanlığında hazırlamıŐ olduğum “Başlangıç Zamanları Farklı EŞlenmiş Alt ve Üst Çözümlemlerle Verilen Lineer Olmayan Diferensiyel Denklemler için Kuasilineerizasyon Yöntemi” adlı Yüksek Lisans tezinin bilimsel etik değerlere ve kurallara uygun, özgün bir çalışma olduğunu, aksinin tespit edilmesi halinde her türlü yasal yaptırımını kabul edeceğimi beyan ederim.

17/04/2025

Mustafa FIRAT

JÜRİ KABUL VE ONAY

Mustafa FIRAT tarafından hazırlanan “**Başlangıç Zamanları Farklı Eşlenmiş Alt ve Üst Çözümlerle Verilen Lineer Olmayan Diferensiyel Denklemler için Kuasilineerizasyon Yöntemi**” adlı tez çalışmasının savunma sınavı 17/04/2025 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen Jüri tarafından Oy Birliği ile Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	İmza
Başkan :
Üye :
Üye :

ONAY

...../...../2025

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Müdürü

TEŐEKKÖR

Bu tez çalışmasının hazırlanması aőamasında ve öncesinde katkılarını, sabrını ve nezaketini esirgemeyen değerli danıőmanım Prof. Dr. Ali YAKAR'a ve onun nezdinde Tokat Gaziosmanpaşa Üniwersitesi Matematik Anabilim Dalı'nın birbirinden kıymetli hocalarına sonsuz teőekkürlerimi sunarım. Ayrıca desteklerinden dolayı eőime; dualarını esirgemeyen ebeveynlerime ve aileme teşekkür ederim.



ÖZET

BAŞLANGIÇ ZAMANLARI FARKLI EŞLENMİŞ ALT VE ÜST ÇÖZÜMLERLE VERİLEN LİNEER OLMAYAN DİFERENSİYEL DENKLEMLER İÇİN KUASİLİNEERİZASYON YÖNTEMİ

Fırat, Mustafa

Yüksek Lisans, Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Doç. Dr. Ali YAKAR

Nisan 2025, viii + 62 sayfa

Bu tez çalışmasında başlangıç zamanları farklı eşlenmiş alt ve üst çözümlerle birlikte verilen lineer olmayan başlangıç değer problemi (BDP)'nin yaklaşık çözümlerinin elde edilmesi amacıyla kuasilineerizasyon metodu (KLM) kullanılmıştır. Bu maksatla kullandığımız yöntemin hangi koşullar altında sonuç verebileceği test edilmiştir. Öncelikle lineer olmayan BDP'nin başlangıç zaman farklı verilen eşlenmiş alt ve üst çözümleri için karşılaştırma teoremi verilmiştir. Sonrasında KLM'deki konvekslik koşulu zayıflatılarak, verilen BDP'nin tek çözümüne yakınsayan ve de bu çözümü alttan ve üstten sınırlayan monoton fonksiyon dizileri teşkil edilmiştir. Ayrıca bu dizilerin başlangıç zaman farklı eşlenmiş alt ve üst çözümleri ile verilen lineer olmayan problemin tek çözümüne düzgün ve kuadratik olarak yakınsadığı gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Kuasilineerizasyon yöntemi, Başlangıç değer problemi, Eşlenmiş alt ve üst çözümler, Kuadratik yakınsama.

ABSTRACT

QUASILINEARIZATION METHOD FOR NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS VIA COUPLED LOWER AND UPPER SOLUTIONS WITH INITIAL TIME DIFFERENCE

Firat, Mustafa

Master's Thesis, Department of Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Ali Yakar

April 2025, viii + 62 pages

In this thesis, the quasilinearization method (QLM) is used to obtain approximate solutions of the given nonlinear initial value problem (IVP) through the usage of coupled lower and upper solutions with initial time difference. For this purpose, it is tested under which conditions the method we use can give results. First of all, the comparison results related to the coupled lower and upper solutions with initial time difference for the given nonlinear IVP are discussed. Then, by weakening the convexity assumption in the QLM, monotonic function sequences converging to the unique solution of the problem and bounding the solution from below and above have been established. It is also shown that these sequences converge uniformly and quadratically to the unique solution of the given nonlinear problem via coupled lower and upper solutions with the initial time difference.

Keywords: Quasilinearization method, Initial value problem, Coupled lower and upper solutions, Quadratic convergence.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ETİK SÖZLEŞME.....	i
JÜRİ KABUL VE ONAY	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
İÇİNDEKİLER	vi
ŞEKİLLER LİSTESİ	vii
KISALTMALAR.....	viii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER.....	4
2.1. Temel Kavramlar ve Hazırlayıcı Teoremler	4
2.2. Alt ve Üst Çözümler Yöntemine Dair Tanımlar ve Teoremler.....	15
2.3 Kuasilineerizasyon Yöntemi	33
3. BAŞLANGIÇ ZAMANLARI FARKLI EŞLENMİŞ ALT VE ÜST ÇÖZÜMLERİ İLE VERİLEN LİNEER OLMAYAN DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ İÇİN KUASİLİNEERİZASYON YÖNTEMİNİN UYGULANMASI	44
SONUÇ	55
KAYNAKÇA.....	56
ÖZGEÇMİŞ	62

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 2.1. Alt ve üst çözümler grafiği 42



KISALTMALAR

BDP: Başlangıç Değer Problemi

KLM: Kuasilineerizasyon Metodu

ODT: Ortalama Değer Teoremi



1. GİRİŞ

İlerleyen teknoloji ile birlikte hız kazanan bilimsel çalışmaların çözülmeyi bekleyen problemleri, çoğunlukla karmaşık olup doğrusal (linear) olmayan tiptedir. Analizdeki fonksiyonlar ile bu doğrusal olmayan problemlerin analitik çözümlerini elde etmek her daim mümkün olmadığından Newton-Rapson metodu, Chaplignin metodu, alt ve üst çözümler metodu gibi farklı yaklaşım metotlarına ihtiyaç duyulmuştur.

Şimdi Rus matematikçi Sergey Chaplignin tarafından geliştirilen [1]

$$\frac{du}{dt} = \Phi(t, u), \quad u(t_0) = u_0 \quad (1.1)$$

nonlinear diferensiyel denklemi ile verilen başlangıç değer problemi (BDP) için yaklaşık çözümler metodunu irdeleyelim. Bunun için aşağıda verilen şu iki denklemi ele alalım.

$$\frac{du}{dt} = \Phi_1(t, u), \quad u(t_0) = u_0$$

$$\frac{du}{dt} = \Phi_2(t, u), \quad u(t_0) = u_0$$

Bu tür denklemlerin çözümü; linear denklemlerin ve düşük mertebeden denklemlerin çözümü gibi basit olacaktır. Her (t, u) için aşağıdaki eşitsizlikler sağlansın.

$$\Phi_1(t, u) \leq \Phi(t, u) \leq \Phi_2(t, u)$$

Bu durumda (1.1) denklemine ait çözümleri sınırlayan adi türevli diferensiyel denklemlere ait çözümlerin kullanılması mümkündür. Robert E. Kalaba ve Richard Ernest Bellman tarafından ortaya çıkarılan [2] ve V. Lakshmikantham tarafından geliştirilerek genelleştirilen [3-5] kuasilineerizasyon metodu (KLM) ise bu sınırlayıcı fonksiyonları elde etmenin yollarından biri olup linear yaklaşımlar tekniğini bilgisayar

teknolojisi ile birleştirmeye imkân tanır ki KLM'nin dayandığı esas, dinamik programlama teorisinde yatmaktadır [6].

Bellman ve Kalaba'nın orijinal Kuasilineerizasyon tekniğinin birincil amacı, doğrusal olmayan diferensiyel denklemlerin yaklaşık çözümünü analitik bir formda açıkça temsil etmektir. Bu yaklaşım, özellikle temel alınan fonksiyon dışbükey olduğunda, çözümün noktasal olarak daha düşük tahminlerinin elde edilmesine izin verir. Özellikle, bu yöntem, kuadratik yakınsama sergileyen ve bileşenleri doğrusal diferensiyel denklemlerin çözümleri olan ve de lineer olmayan problemin çözümünü alttan sınırlayan monoton bir fonksiyon dizisi oluşturulmasına olanak tanır [5].

KLM zaman içerisinde birçok modern bilim ve mühendislik dallarında, problemlerin çözümünde kullanılmış ve fayda sağlamıştır [7-22]. Örneğin; nüfus artışını tahmin etmek üzere geliştirilen nüfus artış modelin çözümünü kolaylaştırmak için KLM uygulanmıştır [17]. Bu uygulamada elde edilen matrisler; kısmi-zamansal nüfus artış modelinin cebirde ve diğer birçok bilim alanında kullanılan lineer olmayan denklem sistemlerine dönüştürülmesinde kullanılmaktadır. Blasius, Duffing, Thomas Ferm, ve Lane-Emden denklemleri de dahil olmak üzere fizik alanındaki birçok doğrusal problemlere uygulanmış ve kayda değer sonuçlar vermiştir [20-22].

Monoton iterasyon tekniğinde [23] ise benzer şekilde alt ve üst çözümler yöntemiyle (1.1) probleminin çözümüne lineer olarak yakınsayan tekdüze (monoton) diziler oluşturulur. KLM'de ise konvekslik koşulu kabul edildiğinden oluşturulan fonksiyon dizilerinin kuadratik yakınsaması mümkün olmaktadır.

Yalın bir şekilde ifade edilecek olursa; KLM, verilen bir doğrusal olmayan denklemi çözebilmek için iterasyon tekniğini içeren bir yöntemdir. Bu yöntemle uygun düzenlemeler yaparak iki adet lineer diferensiyel denklem oluşturulur. Öyle ki bu denklemlerin çözümü olan fonksiyonlar esas denklemimiz için birer alt ve üst çözüm fonksiyonları teşkil etmektedirler. İterasyon tekniği uygulanarak bu şekilde bu lineer denklemlerin yenilerini elde ederiz ki bu denklemlerin çözüm fonksiyonları;

esas denkleminin çözümüne alttan ve üstten yakınsayan iki fonksiyon dizisi teşkil eder [5].

Yukarıda da bahsedildiği üzere KLM'nin daha geniş alanlarda uygulanmasını kısıtlayan $\Phi(t, u, v)$ fonksiyonun u 'da konveks olması koşulu; daha zayıf hipotezler kullanılarak aşılabilmekte ve daha farklı varsayımlar ile metodolojinin geliştirilebilmektedir [3-5]. Örneğin; $\Phi(t, u, v)$ fonksiyonunun konveks bir fonksiyon ile konkav bir fonksiyonun toplamı olarak, yani $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$ olacak biçimde ele alınabilmesi de mümkündür. Bu da bu tekniğin daha yaygın kullanılması için bir fırsattır.

KLM'nin daha zayıf hipotezler altında uygulanabilirliği ve yöntemin geliştirilmesi hususundaki çalışmaların yanı sıra yöntemin çeşitli denklem türlerinin çözümü için uygulanmasına yönelik çalışmalar mevcuttur. Örneğin; başlangıç zamanları farklı alt ve üst çözüm fonksiyonları bilinen veya elde edilebilen nonlinear diferensiyel denklemler, nonlinear integral denklemler, integro-diferensiyel denklemler, sınır değer problemleri, fraksiyonel diferensiyel veya fraksiyonel integral içeren denklemlerde v.b. denklem türleri üzerinde KLM tekniğinin uygulandığı çalışmalar mevcuttur [24-62]. Ayrıca alt ve üst çözümler yöntemi, monoton iterasyon tekniği gibi teknikler üzerine yapılan çalışmalar KLM'nin daha yaygın kullanılabilmesine katkı sağlamaktadır.

Bu çalışmada ise başlangıç zaman değerleri farklı eşlenmiş alt ve üst çözümler ile birlikte verilen BDP'nin çözümüne düzgün yakınsayan tekdüze alt ve üst çözüm dizileri inşa etmek üzere kuasilineerizasyon metodunun uygulanabilirliğini konvekslik koşulu yerine daha zayıf hipotezler altında test edeceğiz. Bunun için 2. bölümde öncelikle alt ve üst çözüm tanımlarına, ilgili karşılaştırma teoremlerine, varlık ve teklik teoremlerine ve kuasilineerizasyon yöntemi hakkında temel bilgilere değinilmiştir. 3. Bölümde ise esas teorem ifade ve ispat edilmiştir.

2. TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER

Bu kısımda sonraki bölümde KLM'nin uygulanmasına dair verilecek esas teoremlerin ispatlarında ihtiyaç duyulan temel teoremler ve lemmalar ile birlikte bazı temel kavramlar hakkında bilgiler verilecektir.

Öncelikle genel tanımlar ve teoremler verilecektir. Akabinde ise alt ve üst çözüm kavramlarına değinilecek ve alt ve üst çözümlerin karşılaştırılması ile ilgili teoremler sunulduktan sonra son aşamada kuasilineerizasyon yöntemi hakkında bilgiler verilecektir.

2.1. Temel Kavramlar ve Hazırlayıcı Teoremler

Teorem 2.1.1: [63] $\Phi \in C[I \times \mathbb{R}, \mathbb{R}]$, $u \in C^1[I, \mathbb{R}]$ ve $I = [t_0, t_0 + T]$ olsun. $u(t)$ fonksiyonunun

$$u'(t) = \Phi(t, u), \quad u(t_0) = u_0 \quad (2.1.1)$$

Başlangıç değer probleminin bir çözümü olması için gerek ve yeter koşul $u(t)$ fonksiyonunun aşağıda verilen integral denklemi sağlamasıdır.

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t \Phi(s, u(s)) ds \quad (2.1.2)$$

İspat: Kabul edelim ki $u(t)$ fonksiyonu (2.1.1) denklemini sağlasın. Yani

$$u'(t) = \Phi(t, u)$$

olsun. Eşitliğin her iki tarafının t_0 'dan t 'ye integrali alınırsa

$$\int_{t_0}^t u'(s) ds = \int_{t_0}^t \Phi(t, s) ds$$
$$u(t) - u(t_0) = \int_{t_0}^t \Phi(t, s) ds$$

elde edilir.

Şimdi de varsayalım ki (2.1.2) denklemini sağlansın. Açık ki $u(t_0) = u_0$ sağlanmaktadır.

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t \Phi(s, u(s)) ds$$

$$\frac{d}{dt} u(t) = \frac{d}{dt} \left[\int_{t_0}^t \Phi(s, u(s)) ds \right]$$

$$u'(t) = \Phi(t, u(t))$$

İntegral eşitsizlikler aracılığıyla diferensiyel denklemlerin çözümün tekliği gibi bazı özelliklerinin analiz edilmesi mümkündür. İleride bununla ilgili olarak Picard ardışık yaklaşımlar dizisi tanımı ve integral denklemlerin çözümünün tekliği ile ilgili teoremin ifadesi birlikte verilecektir.

Tanım 2.1.1: $\Phi(t, u)$ fonksiyonu bir $D \subset \mathbb{R}^2$ bölgesinde tanımlı olsun. Eğer $L > 0$ olmak üzere

$$\forall (t, u), (t, v) \in D \quad \text{için} \quad |\Phi(t, u) - \Phi(t, v)| \leq L|u - v| \quad (2.1.3)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa $\Phi(t, u)$ fonksiyonuna D 'de "*Lipschitz süreklisi*." denir.

Alternatif olarak, $\Phi(t, u)$ fonksiyonu için "*Lipschitz şartını sağlıyor*." diyebilmemiz için gerek ve yeter şart her $(t, u), (t, v) \in D$ için en az bir $L > 0$ sabiti bulunabilir öyle ki

$$\frac{|\Phi(t, u) - \Phi(t, v)|}{|u - v|} \leq L, \quad u \neq v \quad (2.1.4)$$

eşitsizliği sağlanmaktadır.

Bu L sayısı "*Lipschitz sabiti*" olarak adlandırılır. (2.1.3) ile verilen koşula da "*Lipschitz şartı*" denir.

Şimdi kısmi türev ile Lipschitz şartı arasındaki ilişkiyi ortaya koyan aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 2.1.2: [62] Kabul edelim ki $\Phi(t, u)$ fonksiyonu bir D dikdörtgensel bölgede tanımlı ve sürekli olsun.

$$D = \{(t, u) : |t - t_0| \leq c, |u - u_0| \leq d, c, d > 0\}$$

Ayrıca $\frac{\partial \Phi}{\partial u}$ kısmi türevi D kümesi üzerinde sürekli olsun. Bu takdirde Φ fonksiyonu D bölgesinde Lipschitz şartını sağlar.

İspat: D kompakt bir küme ve $\Phi_u(t, u)$, D üzerinde sürekli olduğundan

$$\left| \frac{\partial \Phi(t, u)}{\partial u} \right| \leq K, \quad (t, u) \in D$$

olacak şekilde en az bir $K > 0$ sayısı vardır.

Buna mukabil Ortalama Değer Teoremi (ODT) gereğince ve D kümesinin konveks olması sebebiyle $\forall (t, u_1), (t, u_2) \in D$ için $\exists \xi \in D$ bulunabilir öyle ki $u_2 < \xi < u_1$ ve $\Phi(t, u_1) - \Phi(t, u_2) = (u_1 - u_2) \frac{\partial \Phi(t, \xi)}{\partial u}$ olur.

Bu iki sonuç birlikte değerlendirilirse;

$$|\Phi(t, u_1) - \Phi(t, u_2)| = |u_1 - u_2| \left| \frac{\partial \Phi(t, \xi)}{\partial u} \right| \leq |u_1 - u_2| K \quad (2.1.5)$$

elde edilir. Burada Lipschitz sabiti K 'dir.

Uyarı 2.1.1: [62] Bu teoremin tersi doğru değildir. Yani $\Phi(t, u)$ fonksiyonun D bölgesinde Lipschitz şartını sağlaması; $\Phi_u(t, u)$ kısmi türevinin var olmasını gerektirmez.

Örnek 2.1.1: $\Phi(t, u) = |u|$ fonksiyonu, $D = \{(t, u) : |u| \leq 1, |x| \leq 1\}$ kümesi üzerinde Lipschitz şartını sağlar, ancak D 'de $\Phi_u(t, u)$ kısmi türevi mevcut değildir. Şöyle ki

$$(t, u_1), (t, u_2) \in D \text{ olmak üzere } |\Phi(t, u_1) - \Phi(t, u_2)| = \left| |u_1| - |u_2| \right| \leq |u_1 - u_2|$$

$L=1$ olmak üzere $\Phi(t, u)$ fonksiyonu D kümesi üzerinde u değişkenine göre Lipschitz şartını sağlar. Ancak $(t, 0)$ noktalarında

$$\begin{aligned} \Phi_u(t, 0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\Phi(t, u) - \Phi(t, 0)}{u - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|u|}{u} \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|u|}{u} &= 1 \neq -1 = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|u|}{u} \end{aligned}$$

olduğundan D üzerinde $\Phi_u(t, u)$ türevi mevcut değildir.

Tanım 2.1.2: $u \in C^1[I, \mathbb{R}]$ şeklinde verilen $u(t)$ fonksiyonu (2.1.1) BDP'nin bir çözümü olsun. Aşağıda şekilde inşa edilen $\{u_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$, $t \in I$ dizisine “Picard Ardışık Yaklaşımlar Dizisi” denir.

$u_0(t)$ başlangıç fonksiyonu

$$u_1(t) = u_0 + \int_{t_0}^t \Phi(s, u_0(s)) ds$$

$$u_2(t) = u_0 + \int_{t_0}^t \Phi(s, u_1(s)) ds$$

:

$$u_n(t) = u_0 + \int_{t_0}^t \Phi(s, u_{n-1}(s)) ds \quad (2.1.6)$$

$\{u_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi aşağıda verilen Cauchy-Picard teoremindeki koşulları sağlarsa (2.1.1) BDP'nin çözümü olan $u(t)$ fonksiyonuna düzgün yakınsar.

Teorem 2.1.3 (Cauchy-Picard): [62] Kabul edelim ki $\Phi(t, u)$ fonksiyonu D dikdörtgensel bölgesinde tanımlı, sürekli ve sınırlı olsun ve de Lipschitz şartı sağlansın. Yani D üzerinde bir $P > 0$ için $|\Phi(t, u)| \leq P$ ve $\forall (t, u_1), (t, u_2) \in D$ için $|\Phi(t, u_1) - \Phi(t, u_2)| \leq L|u_1 - u_2|$ olsun.

Burada $D = \{(t, u) \in \mathbb{R}^2 : |t - t_0| \leq a, |u - u_0| \leq b, a, b > 0\}$ 'dir.

Bu takdirde (2.1.1) denkleminin bir $u(t)$ çözümü mevcuttur ve bu çözüm bir tek olup, (2.2.3) ile tanımlanan $\{u_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ ardışık yaklaşımlar dizisi bu çözüme

$J = \left\{ (t, u) \in D : |t - t_0| \leq h, h = \min\left(a, \frac{b}{P}\right) \right\}$ kümesi üzerinde düzgün yakınsaktır.

Teorem 2.1.4: [65] $I \subset \mathbb{R}$ kompakt bir küme ve $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli ise f fonksiyonu sınırlıdır. Yani $\forall x \in I$ için $|f(x)| \leq \mu$ olacak şekilde bir $\mu > 0$ sayısı vardır.

Şimdi de ileriki bölümlerde verilecek olan teoremlerin ispatları esnasında karşılaşılabilecek bazı integral eşitsizliklerin daha basit ve üzerlerinde daha kolay yorum yapılabilecek integral eşitsizliklere dönüştürülmesine imkân veren Gronwall lemmasına değineceğiz. Bu lemmanın hipotezinde verilen eşitsizlik; Gronwall-Bellman eşitsizliği veya Gronwall eşitsizliği olarak da bilinir.

Lemma 2.1.1 (Gronwall Eşitsizliği): [62] Varsayalım ki $\Phi(t)$ ve $\Psi(t)$ fonksiyonları $t \geq t_0$ için negatif olmayan ve sürekli fonksiyonlar ve $c > 0$ bir sabit olsun. Bu takdirde $t \geq t_0$ için

$$\Phi(t) \leq c + \int_{t_0}^t \Psi(s)\Phi(s)ds \quad (2.1.7)$$

ise

$$\Phi(t) \leq c \exp\left(\int_{t_0}^t \Psi(s)ds\right) \quad (2.1.8)$$

olur.

İspat: Hipotez kısmındaki eşitsizliğin her iki tarafı $\Psi(t)$ ile çarpılırsa $\Psi(t)$ nonnegatif olduğundan eşitsizlik yön değiştirmeyecektir. O halde

$$\Phi(t)\Psi(t) \leq \left(c + \int_{t_0}^t \Psi(s)\Phi(s)ds \right) \Psi(t), \quad t \geq t_0$$

olur. Eşitsizliğin her iki yanını

$$c + \int_{t_0}^t \Psi(s)\Phi(s)ds$$

ifadesi ile bölünürse

$$\frac{\Psi(t)\Phi(t)}{c + \int_{t_0}^t \Psi(s)\Phi(s)ds} \leq g(t), \quad t \geq t_0$$

elde edilir.

$$c + \int_{t_0}^t \Psi(s)\Phi(s)ds = h(t) \text{ denilirse, } h'(t) = \Phi(t)\Psi(t) \text{ olur.}$$

Buradan son eşitsizlik

$$\frac{h'(t)}{h(t)} \leq \Psi(t)$$

halini alır ve bu eşitsizliğin her iki tarafının t_0 'dan t 'ye integrali alınırsa

$$\ln(h(t)) \Big|_{t_0}^t \leq \int_{t_0}^t \Psi(s)ds$$

bulunur. $h(t_0) = c$ olduğu için

$$\ln \left(\frac{c + \int_{t_0}^t \Psi(s)\Phi(s)ds}{c} \right) \leq \int_{t_0}^t g(s)ds$$

buradan

$$\Phi(t) \leq c + \int_{t_0}^t \Psi(s)\Phi(s)ds \leq c \exp \left(\int_{t_0}^t \Psi(s)ds \right)$$

olur ve ispat tamamlanır.

Sonuç 2.1.1: [62] Eğer Gronwall eşitsizliği $\forall t > t_0$ için

$$\Phi(t) \leq k \int_{t_0}^t \Phi(s)ds \tag{2.1.9}$$

şekliyle verilirse o halde $\Phi(t) \equiv 0$ olur.

İspat: Hipotezden dolayı $t > t_0$ olduğundan herhangi bir $\varepsilon > 0$ için

$$\Phi(t) < \varepsilon + k \int_{t_0}^t \Phi(s)ds$$

yazılabilir. Bu son eşitsizliği Lemma 2.1.1'in hipotezinde verilen eşitsizliğe benzemektedir ve söz konusu lemmanın hükmü gereği

$$\Phi(t) < \varepsilon \exp \left(\int_{t_0}^t K ds \right) = \varepsilon \exp k(t-t_0), \quad t > t_0$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan $\varepsilon \rightarrow 0$ limiti alınırsa $\Phi(t) \leq 0$, $t > t_0$ olur ve $\Phi(t)$ fonksiyonunun non-negatif olduğu dikkate alınırsa $\Phi(t) \equiv 0$, $t > t_0$ sonucuna ulaşılır.

Lemma 2.1.2: [62] Kabul edelim ki $\Phi(t)$, $\Psi(t)$ ve $X(t)$ fonksiyonları $I = [t_0, t_0 + T)$ kümesi üzerinde sürekli ve nonnegatif fonksiyonlar olsunlar. Bu takdirde

$$\Phi(t) \leq X(t) + \int_{t_0}^t \Psi(s)\Phi(s)ds, \quad t \in I \quad (2.1.10)$$

ise

$$\Phi(t) \leq X(t) + \int_{t_0}^t \Psi(s)X(t) \exp\left(\int_s^t \Psi(u)du\right) ds, \quad t \in I \quad (2.1.11)$$

İspat: (2.1.10) eşitsizliğinin her iki tarafı $\Psi(t)$ ile çarpılırsa hipoteze göre $\Psi(t) \geq 0$ olduğundan

$$\Psi(t)\Phi(t) \leq \Psi(t)X(t) + \Psi(t) \int_{t_0}^t \Psi(s)\Phi(s)ds \quad (2.1.12)$$

olur. Şimdi

$$Z(t) = \int_{t_0}^t \Psi(s)\Phi(s)ds \quad (2.1.13)$$

olarak seçelim. Her iki tarafın da türevi alınırsa

$$Z'(t) = \Psi(t)\Phi(t) \quad (2.1.14)$$

olur. O halde (2.1.12) eşitsizliğinde $Z(t)$ ve $Z'(t)$ ifadeleri yerlerine yazılırsa eşitsizlik

$$Z'(t) - \Psi(t)Z(t) \leq X(t)\Psi(t) \quad (2.1.15)$$

halini alır ki bu hali adi diferensiyel denkleme benzemiş olur.

$$\lambda(t) = \exp\left(-\int_{t_0}^t \Psi(s)ds\right) \quad (2.1.16)$$

integral çarpanıyla (2.1.15) eşitsizliği genişletilirse

$$\begin{aligned}
& Z'(t) \exp\left(-\int_{t_0}^t \Psi(s) ds\right) - \Psi(t)Z(t) \exp\left(-\int_{t_0}^t \Psi(s) ds\right) \leq X(t)\Psi(t) \exp\left(-\int_{t_0}^t \Psi(s) ds\right) \\
& \frac{d}{dt} \left[Z(t) \exp\left(-\int_{t_0}^t \Psi(s) ds\right) \right] \leq X(t)\Psi(t) \exp\left(-\int_{t_0}^t \Psi(s) ds\right) \\
& \left[Z(t) \exp\left(-\int_{t_0}^t \Psi(s) ds\right) \right]_{t_0}^t \leq \int_{t_0}^t X(s)\Psi(s) \exp\left(-\int_{t_0}^s \Psi(u) du\right) ds \\
& \left[Z(t) \exp\left(-\int_{t_0}^t \Psi(s) ds\right) \right] - \left[Z(t_0) \exp\left(-\int_{t_0}^{t_0} \Psi(s) ds\right) \right] \leq \int_{t_0}^t X(s)\Psi(s) \exp\left(-\int_{t_0}^s \Psi(u) du\right) ds \\
& Z(t) \leq \exp\left(\int_{t_0}^t \Psi(s) ds\right) \int_{t_0}^t X(s)\Psi(s) \exp\left(-\int_{t_0}^s \Psi(u) du\right) ds \\
& Z(t) \leq \int_{t_0}^t X(s)\Psi(s) \exp\left(-\int_{t_0}^s + \int_{t_0}^t \Psi(u) du\right) ds \\
& Z(t) \leq \int_{t_0}^t X(s)\Psi(s) \exp\left(\int_s^t \Psi(u) du\right) ds
\end{aligned}$$

(2.1.13) eşitliğinden ve teoremin hipotezindeki (2.1.7) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
\Phi(t) - X(t) &\leq Z(t) \leq \int_{t_0}^t X(s)\Psi(s) \exp\left(\int_s^t \Psi(u) du\right) ds \\
\Phi(t) &\leq X(t) + \int_{t_0}^t X(s)\Psi(s) \exp\left(\int_s^t \Psi(u) du\right) ds
\end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Lemma 2.1.3: [63] Kabul edelim ki $\Phi(t)$, $\Psi(t)$ ve $X(t)$ fonksiyonları $I = [t_0, t_0 + T)$ kümesi üzerinde sürekli ve nonnegatif fonksiyonlar olsunlar. Ayrıca $X(t)$ fonksiyonu I kümesi üzerinde azalmayan olsun. Bu takdirde

$$\Phi(t) \leq X(t) + \int_{t_0}^t \Psi(s)\Phi(s)ds, \quad t \in I \quad (2.1.17)$$

ise

$$\Psi(t) \leq X(t) \exp\left(\int_{t_0}^t \Psi(s)ds\right), \quad t \in I \quad (2.1.18)$$

olur.

İspat: (2.1.17) eşitsizliğinin her iki tarafı $X(t)$ ile bölünürse $X(t)$ nonnegatif ve azalmayan olduğundan ve de $t_0 \leq s \leq t$ olduğundan

$$\frac{\Phi(t)}{X(t)} \leq 1 + \frac{1}{X(t)} \int_{t_0}^t \Psi(s)\Phi(s)ds \leq 1 + \int_{t_0}^t \frac{\Phi(s)}{X(s)} \Psi(s)ds \quad (2.1.19)$$

yazılabilir. Şimdi

$$M(t) = \frac{\Phi(t)}{X(t)} \quad (2.1.20)$$

alınırsa (2.1.19) eşitsizliği

$$M(t) \leq 1 + \int_{t_0}^t M(s)\Psi(s)ds \quad (2.1.21)$$

olur. $M(t)$ ve $\Psi(t)$ fonksiyonları nonnegatif olduğundan $c=1$ alınırsa (2.1.21) eşitsizliği; Lemma 2.1.1'nin hipotezinde verilen (2.1.7) eşitsizliğine benzetilmiş olur ve Lemma 2.1.1'nin hükmü gereği

$$M(t) \leq 1. \exp\left(\int_{t_0}^t \Psi(s)ds\right) \quad (2.1.22)$$

olur. (2.1.20) eşitliği (2.1.22) eşitsizliğinde yerine yazılırsa $X(t)$ fonksiyonu nonnegatif olduğundan

$$\frac{\Phi(t)}{X(t)} \leq \exp\left(\int_{t_0}^t \Psi(s) ds\right)$$

ve böylece

$$\Phi(t) \leq X(t) \exp\left(\int_{t_0}^t \Psi(s) ds\right)$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Tanım 2.1.3. (Kuadratik Yakınsama): Bir $[a, b]$ kümesi üzerinde tanımlı $\Phi_n(t)$ fonksiyon dizisi $\forall t \in I$ için $\Phi(t)$ fonksiyonuna düzgün yakınsak olsun. Eğer

$$\max_I |\Phi(t) - \Phi_n(t)| \leq \lambda \max_I |\Phi(t) - \Phi_{n-1}(t)|^2$$

olacak biçimde bir $\lambda > 0$ sabiti var ise “ $\{\Phi_n(t)\}$ fonksiyon dizisi $\Phi(t)$ fonksiyonuna kuadratik olarak yakınsar.” denir.

Teorem 2.1.4 (İntegral İçin Ortalama Değer Teoremi): [64] Kabul edelim ki Φ ve Ψ fonksiyonları $[a, b]$ kümesi üzerinde integrallenebilir ve $\forall t \in [a, b]$ için $\Psi(t) \geq 0$ olsun.

Bu takdirde

$$m = \inf_{t \in [a, b]} \Phi(t) \quad \text{ve} \quad M = \sup_{t \in [a, b]} \Phi(t)$$

olmak üzere

$$\int_a^b \Phi(t) \Psi(t) dt = c \int_a^b \Psi(t) dt$$

olacak şekilde bir $c \in [a, b]$ sayısı vardır.

Eğer Φ fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde sürekli ise bu takdirde

$$\int_a^b \Phi(t) \Psi(t) dt = \Phi(t_0) \int_a^b \Psi(t) dt$$

olacak şekilde en az bir $t_0 \in [a, b]$ vardır.

2.2. Alt ve Üst Çözümler Yöntemine Dair Tanımlar ve Teoremler

Nonlinear problemler ilişkin varlık teoremlerinin ispatlamak üzere uygun ve elverişli bir teknik alt ve üst çözümler metodu olup, bu bölümde ilerisi için önem arz etmesi nedeniyle alt çözümler ve üst çözümler ile ilgili bazı tanımlar ve teoremler ele alınacaktır. İlk olarak skaler durumlar için başlangıç değer problemlerini ele alarak alt ve üst çözümler metodu ile ilgili önemli sonuçlar elde edeceğiz [59].

$\Phi \in C[I \times \mathbb{R}, \mathbb{R}]$, $u \in C^1[I, \mathbb{R}]$ ve $I = [t_0, t_0 + T]$ olmak üzere (2.1.1) ile verilen başlangıç değer problemini inceleyelim.

$$u' = \Phi(t, u), \quad u(t_0) = u_0$$

$p \in C^1[I, \mathbb{R}]$ fonksiyonu

$$p'(t) \leq \Phi(t, p), \quad p(t_0) \leq u_0, \quad t \in I$$

eşitsizliklerini sağlaması durumunda $p(t)$ fonksiyonuna (2.1.1) ile verilen BDP için I aralığı üzerinde bir **alt çözüm** denir. Benzer şekilde $q \in C^1[I, \mathbb{R}]$ fonksiyonu

$$q'(t) \geq \Phi(t, q), \quad q(t_0) \geq u_0, \quad t \in I$$

Eşitsizliklerini sağlıyorsa $q(t)$ fonksiyonu (2.1.1) ile verilen BDP için I aralığı üzerinde bir **üst çözüm** denir [5].

Bu iki kavrama literatürde “*doğal (natürel) alt ve üst*” çözüm de denilmektedir.

Şimdi esas teoremimizde kullanacağımız eşlenmiş alt ve üst çözüm kavramlarını tanımlayalım.

Tanım 2.2.1: (2.1.1) ile verilen BDP'yi ele alalım. $\Phi \in C[I \times \mathbb{R}, \mathbb{R}]$, $p, q \in C^1[I, \mathbb{R}]$ ve $I = [t_0, T]$ olmak üzere her $t \in I$ için

$$\begin{aligned} p'(t) &\leq \Phi(t, q), & p(t_0) &\leq u_0 \\ q'(t) &\geq \Phi(t, p), & q(t_0) &\geq u_0 \end{aligned}$$

eşitsizlikleri sağlanıyorsa bu durumda (p, q) ikilisine sırasıyla, "eşlenmiş alt ve üst çözüm" denir [5].

Şimdi (2.1.1) ile verilen BDP için sırasıyla alt ve üst çözüm olarak verilen fonksiyonların karşılaştırılması ile ilgili aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 2.2.1. (Karşılaştırma Teoremi):[5] $p, q \in C^1[I, \mathbb{R}]$ fonksiyonları (2.1.1) denklemi ile verilen başlangıç değer problemi (BDP) için sırasıyla birer alt ve üst çözüm olsunlar. Varsayalım ki Φ fonksiyonu tek taraflı olarak Lipschitz şartı sağlansın. Yani $u \geq v$ olmak üzere

$$\forall (t, u), (t, v) \in I \times \mathbb{R} \text{ için } \Phi(t, u) - \Phi(t, v) \leq L(u - v)$$

olsun.

Bu takdirde

$$p(t_0) \leq q(t_0) \text{ ise her } t \in I \text{ için } p(t) \leq q(t) \text{ 'dir.}$$

İspat: Bu teorem aşağıda verilen Teorem 2.2.'nin özel bir hali olduğu için ispatı yapılmadan geçilmiştir.

Teorem 2.2.2: [5] $I = [t_0, T]$, $T > t_0 \geq 0$ olmak üzere $p, q \in C^1[I, \mathbb{R}]$ ve $G \in C[I \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R}]$ verilsin. Kabul edelim ki $u_1 \geq u_2$, $v_1 \geq v_2$ ve $L \geq 0$ olmak kaydıyla aşağıda verilen dört şarttan herhangi biri sağlansın.

$$(H_1) \quad p' \leq G(t, p, p), \quad q' \geq G(t, q, q),$$

$$G(t, u_1, v_1) - G(t, u_2, v_2) \leq L[(u_1 - u_2) + (v_1 - v_2)]$$

$$(H_2) \quad p' \leq G(t, p, q), \quad q' \geq G(t, q, p),$$

$$G(t, u_1, v) - G(t, u_2, v) \leq L(u_1 - u_2)$$

$$G(t, u, v_1) - G(t, u, v_2) \geq -L(v_1 - v_2)$$

$$(H_3) \quad p' \leq G(t, q, p), \quad q' \geq G(t, p, q),$$

$$G(t, u_1, v) - G(t, u_2, v) \geq -L(u_1 - u_2)$$

$$G(t, u, v_1) - G(t, u, v_2) \leq L(v_1 - v_2)$$

$$(H_4) \quad p' \leq G(t, q, q), \quad q' \leq G(t, p, p),$$

$$G(t, u_1, v_1) - G(t, u_2, v_2) \geq -L[(u_1 - u_2) + (v_1 - v_2)]$$

Bu takdirde $p(t_0) \leq q(t_0)$ olduğunda her $t \in I$ için $p(t) \leq q(t)$ olur.

İspat: Kabul edelim ki (H_1) hipotezi altında verilen şartlar sağlansınlar. Bu durumda $p(t_0) \leq q(t_0)$ olduğunda her $t \in I$ için $p(t) \leq q(t)$ olduğunu gösterelim. Bu şartın hipotezi ve hükmü Teorem 2.1.2'yi özel bir durum olarak kapsamaktadır. Bu nedenle yapacağımız ispat Teorem 2.1.2 için de geçerli olacaktır.

Şimdi yeteri kadar küçük seçilen $\xi > 0$ için $q_0(t) = q(t) + \xi e^{3Lt}$ fonksiyonunu tanımlayalım. Burada $q_0(t) > q(t)$ ve $q_0(t_0) = q(t_0)$ olduğu açıktır. Türev uygulanırsa

$$\begin{aligned}
q_0(t) &= q(t) + \xi e^{3Lt} \\
q'_0(t) &= q'(t) + 3L\xi e^{3Lt} \\
q'_0(t) &\geq G(t, q, q) + 3L\xi e^{3Lt}
\end{aligned} \tag{2.2.1}$$

elde edilir. Hipotez kullanılırsa

$$\begin{aligned}
G(t, q_0, q_0) - G(t, q, q) &\leq L[(q_0 - q) + (q_0 - q)], \quad L > 0 \\
G(t, q_0, q_0) - G(t, q, q) &\leq 2L(q_0 - q) = 2L\xi e^{3Lt} \\
G(t, q_0, q_0) - 2L\xi e^{3Lt} &\leq G(t, q, q)
\end{aligned} \tag{2.2.2}$$

(2.2.1) eşitsizliği (2.2.2) eşitsizliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
q'_0(t) &\geq G(t, q_0, q_0) - 2L\xi e^{3Lt} + 3L\xi e^{3Lt} \\
q'_0(t) &\geq G(t, q_0, q_0) + L\xi e^{3Lt} \\
q'_0(t) &> G(t, q_0, q_0)
\end{aligned} \tag{2.2.3}$$

her $t \in I$ için $p(t) < q_0(t)$ olduğu gösterilebilirse $\xi \rightarrow 0$ limiti için ispat tamamlanmış olur. Varsayalım ki $p(t) < q_0(t)$ eşitsizliği sağlanmasın, öyleyse en az bir $t_1 \in (t_0, T]$ vardır ki

$$p(t_1) = q_0(t_1) \text{ ve } p(t) < q_0(t), \quad t_0 < t < t_1 \tag{2.2.4}$$

olur. Bu nedenle

$$\begin{aligned}
p(t) - p(t_1) &< q_0(t) - q_0(t_1) \\
\frac{p(t) - p(t_1)}{t - t_1} &> \frac{q_0(t) - q_0(t_1)}{t - t_1}, \quad t_0 < t < t_1 \\
\lim_{t \rightarrow t_1} \frac{p(t) - p(t_1)}{t - t_1} &\geq \lim_{t \rightarrow t_1} \frac{q_0(t) - q_0(t_1)}{t - t_1}
\end{aligned}$$

$$p'(t_1) \geq q_0'(t_1)$$

olur ve bu ise (2.2.4) kabulü ile çelişir. Şimdi bu çelişkiyi gösterelim;

$$G(t_1, p(t_1), p(t_1)) \geq p'(t_1) \geq q_0'(t_1) \geq G(t_1, q_0(t_1), q_0(t_1))$$

O halde sonuç olarak her $t \in I$ için $p(t) < q_0(t)$ elde edilir. $\xi \rightarrow 0$ limiti alınırsa her $t \in I$ için $p(t) \leq q(t)$ olur.

Kabul edelim ki (H_2) hipotezi altında verilen şartlar sağlansınlar. Bu durumda $p(t_0) \leq q_0(t_0)$ olduğunda her $t \in I$ için $p(t) \leq q(t)$ olduğunu göstermek için yeteri kadar küçük seçilen $\xi > 0$ için

$$p_0(t) = p(t) - \xi e^{3Lt} \quad \text{ve} \quad q_0(t) = q(t) + \xi e^{3Lt}$$

fonksiyonlarını tanımlayalım. $\forall \xi > 0$ için $q_0(t) > q(t)$, $p_0(t) < p(t)$ ve $q_0(t_0) > p_0(t_0)$ olduğu açıktır

$$p_0'(t) = p'(t) - 3L\xi e^{3Lt} \leq G(t, p, q) - 3L\xi e^{3Lt}$$

$q_0(t) > q(t)$ için (H_2) hipotezi kullanılırsa

$$G(t, p, q_0) - G(t, p, q) \geq -L(q_0 - q), \quad L > 0$$

$$G(t, p, q) \leq G(t, p, q_0) + L\xi e^{3Lt}$$

$$p_0'(t) \leq G(t, p, q_0) + L\xi e^{3Lt} - 3L\xi e^{3Lt}$$

$p_0(t) < p(t)$ için (H_2) hipotezi kullanılırsa

$$G(t, p, q_0) - G(t, p_0, q_0) \leq L(p - p_0)$$

$$G(t, p, q_0) \leq G(t, p_0, q_0) + L\xi e^{3Lt}$$

Buradan

$$\begin{aligned} p'_0(t) &\leq G(t, p_0, q_0) + L\xi e^{3Lt} + L\xi e^{3Lt} - 3L\xi e^{3Lt} \\ p'_0(t) &\leq G(t, p_0, q_0) - L\xi e^{3Lt} \\ p'_0(t) &< G(t, p_0, q_0) \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

elde edilir. Benzer şekilde $q_0(t) = q(t) + \xi e^{3Lt}$ eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned} q'_0(t) &= q'(t) + 3L\xi e^{3Lt} \\ q'_0(t) &\geq G(t, q, p) + 3L\xi e^{3Lt} \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

$q_0(t) > q(t)$ için (H_2) hipotezi kullanılırsa

$$\begin{aligned} G(t, q_0, p) - G(t, q, p) &\leq L(q_0 - q) = L\xi e^{3Lt} \\ G(t, q, p) &\geq G(t, q_0, p) - L\xi e^{3Lt} \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

(2.2.7) eşitsizliği (2.2.6) eşitsizliğinde yerine yazılırsa

$$q'_0(t) \geq G(t, q_0, p) - L\xi e^{3Lt} + 3L\xi e^{3Lt}$$

$p_0(t) < q(t)$ için (H_2) hipotezi kullanılırsa

$$\begin{aligned} G(t, q_0, p) - G(t, q_0, p_0) &\geq -L(p - p_0) = -L\xi e^{3Lt} \\ G(t, q_0, p) &\geq G(t, q_0, p_0) - L\xi e^{3Lt} \end{aligned}$$

buradan

$$\begin{aligned} q'_0(t) &\geq G(t, q_0, p_0) - L\xi e^{3Lt} - L\xi e^{3Lt} + 3L\xi e^{3Lt} \\ q'_0(t) &\geq G(t, q_0, p_0) + L\xi e^{3Lt} \\ q'_0(t) &> G(t, q_0, p_0) \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

elde edilir. Şimdi her $t \in I$ için $p_0(t) < q_0(t)$ olduğunu gösterelim. Olmayana ergi yöntemi ile bunu ispat edelim, Varsayalım ki $p_0(t) < q_0(t)$ eşitsizliği sağlanmasın, öyleyse en az bir $t_1 \in (t_0, T]$ vardır ki

$$p_0(t_1) = q_0(t_1) \text{ ve } p_0(t) < q_0(t), \quad t_0 < t < t_1 \quad (2.2.9)$$

olur. Buradan

$$p_0(t) - p_0(t_1) < q_0(t) - q_0(t_1)$$

$$\frac{p_0(t) - p_0(t_1)}{t - t_1} > \frac{q_0(t) - q_0(t_1)}{t - t_1}, \quad t_0 < t < t_1$$

$$\lim_{t \rightarrow t_1} \frac{p_0(t) - p_0(t_1)}{t - t_1} > \lim_{t \rightarrow t_1} \frac{q_0(t) - q_0(t_1)}{t - t_1}$$

$$p'_0(t_1) \geq q'_0(t_1)$$

eşitsizliği elde edilir.

Bu durumda (2.2.5) ve (2.2.8) ile birlikte $p_0(t_1) = q_0(t_1)$ olduğu kullanılırsa

$$G(t_1, p_0(t_1), q_0(t_1)) \geq p'_0(t_1) \geq q'_0(t_1) \geq G(t_1, q_0(t_1), p_0(t_1))$$

olur ve bu ise (2.2.9) kabulü ile çelişir.

O halde sonuç olarak her $t \in I$ için $p_0(t) < q_0(t)$ elde edilir. $\xi \rightarrow 0$ limiti alınırsa her $t \in I$ için $p(t) \leq q(t)$ olur.

Şimdi (H_3) hipotezinin sağlanması durumunda teoremin ispatı için yukarıda tanımlandığı şekliyle

$$p_0(t) = p(t) - \xi e^{3Lt} \quad \text{ve} \quad q_0(t) = q(t) + \xi e^{3Lt}$$

fonksiyonlarını ele alalım. $\forall \xi > 0$ için $q_0(t) > q(t)$, $p_0(t) < p(t)$ ve $q_0(t_0) > p_0(t_0)$ olduğu açıktır. İlk olarak $p_0(t) = p(t) - \xi e^{3Lt}$ eşitliğini ele alalım.

$$p'_0(t) = p'(t) - 3L\xi e^{3Lt} \leq G(t, q, q) - 3L\xi e^{3Lt}$$

$p_0(t) < p(t)$ için (H_3) hipotezi kullanılırsa

$$G(t, q, p) - G(t, q, p_0) \leq L(p - p_0), \quad L > 0$$

$$G(t, q, p) \leq G(t, q, p_0) + L\xi e^{3Lt}$$

$$p'_0(t) \leq G(t, q, p_0) + L\xi e^{3Lt} - 3L\xi e^{3Lt}$$

$q_0(t) > q(t)$ için (H_3) hipotezi kullanılırsa

$$G(t, q_0, p_0) - G(t, q, p_0) \geq -L(q_0 - q)$$

$$G(t, q, p_0) \leq G(t, q_0, p_0) + L\xi e^{3Lt}$$

buradan

$$p'_0(t) \leq G(t, q_0, p_0) + L\xi e^{3Lt} + L\xi e^{3Lt} - 3L\xi e^{3Lt}$$

$$p'_0(t) \leq G(t, q_0, p_0) - L\xi e^{3Lt}$$

$$p'_0(t) \leq G(t, q_0, p_0) \tag{2.2.10}$$

elde edilir. Benzer şekilde $q_0(t) = q(t) + \xi e^{3Lt}$ eşitliği kullanılarak

$$q'_0(t) = q'(t) + 3L\xi e^{3Lt}$$

$$q'_0(t) \geq G(t, p, q) + 3L\xi e^{3Lt} \tag{2.2.11}$$

$p_0(t) < p(t)$ için (H_3) hipotezi kullanılırsa

$$G(t, p, q) - G(t, p_0, q) \geq -L(p - p_0) = L\xi e^{3Lt}$$

$$G(t, p, q) \geq G(t, p_0, q) - L\xi e^{3Lt} \tag{2.2.12}$$

(2.2.12) eşitsizliği (2.2.11) eşitsizliğinde yerine yazılırsa

$$q'_0(t) \geq G(t, p_0, q) - L\xi e^{3Lt} + 3L\xi e^{3Lt}$$

$q_0(t) > q(t)$ için (H_3) hipotezi kullanılırsa

$$G(t, p_0, q_0) - G(t, p_0, q) \leq L(v_0 - v) = L\xi e^{3Lt}$$

$$G(t, p_0, q) \geq G(t, p_0, q_0) - L\xi e^{3Lt}$$

buradan

$$q'_0(t) \geq G(t, q_0, p_0) - L\xi e^{3Lt} - L\xi e^{3Lt} + 3L\xi e^{3Lt}$$

$$q'_0(t) \geq G(t, q_0, p_0) - L\xi e^{3Lt}$$

$$q'_0(t) \geq G(t, q_0, p_0) \quad (2.2.13)$$

elde edilir. Şimdi her $t \in I$ için $p_0(t) < q_0(t)$ olduğunu gösterelim. Olmayana ergi yöntemi ile bunu ispat edelim, Varsayalım ki $p_0(t) < q_0(t)$ eşitsizliği sağlanmasın, öyleyse en az bir $t_1 \in (t_0, T]$ vardır ki

$$p_0(t_1) = q_0(t_1) \text{ ve } p_0(t) < q_0(t), \quad t_0 < t < t_1 \quad (2.2.14)$$

olur. Buradan

$$p_0(t) - p_0(t_1) < q_0(t) - q_0(t_1)$$

$$\frac{p_0(t) - p_0(t_1)}{t - t_1} > \frac{q_0(t) - q_0(t_1)}{t - t_1}, \quad t_0 < t < t_1$$

$$\lim_{t \rightarrow t_1} \frac{p_0(t) - p_0(t_1)}{t - t_1} > \lim_{t \rightarrow t_1} \frac{q_0(t) - q_0(t_1)}{t - t_1}$$

$$p'_0(t_1) \geq q'_0(t_1)$$

eşitsizliği elde edilir.

Bu durumda (2.2.10) ve (2.2.13) ile birlikte $p_0(t_1) = q_0(t_1)$ olduğu kullanılırsa

$$G(t_1, p_0(t_1), q_0(t_1)) \geq p'_0(t_1) \geq q'_0(t_1) \geq G(t_1, q_0(t_1), p_0(t_1))$$

olur ve bu ise (2.2.14) kabulü ile çelişir.

O halde sonuç olarak her $t \in I$ için $p_0(t) < q_0(t)$ elde edilir. $\xi \rightarrow 0$ limiti alınırsa her $t \in I$ için $p(t) \leq q(t)$ olur.

Son olarak (H_4) hipotezinin sağlanması durumunda teoremin ispatı için yukarıda tanımlandığı şekliyle

$$p_0(t) = p(t) - \xi e^{3Lt} \quad \text{ve} \quad q_0(t) = q(t) + \xi e^{3Lt}$$

fonksiyonlarını ele alalım. $\forall \xi > 0$ için $q_0(t) > q(t)$, $p_0(t) < p(t)$ ve $q_0(t_0) > p_0(t_0)$ olduğu açıktır. İlk olarak $p_0(t) = p(t) - \xi e^{3Lt}$ eşitliğini ele alalım.

$$p'_0(t) = p'(t) - 3L\xi e^{3Lt} \leq G(t, q, q) - 3L\xi e^{3Lt} \quad (2.2.15)$$

$q_0(t) > q(t)$ için (H_4) hipotezi kullanılırsa

$$G(t, q_0, q_0) - G(t, q, q) \geq -L[(q - q_0) + (q - q_0)], \quad L > 0$$

$$G(t, q, q) \leq G(t, q_0, q_0) + 2L\xi e^{3Lt} \quad (2.2.16)$$

olur. (2.2.16) eşitsizliği (2.2.15) eşitsizliğinde yerine yazılırsa

$$p'_0(t) \leq G(t, q_0, q_0) + 2L\xi e^{3Lt} - 3L\xi e^{3Lt}$$

$$p'_0(t) \leq G(t, q_0, q_0) \quad (2.2.17)$$

elde edilir. Benzer şekilde;

$$p'_0(t) \geq G(t, p, p) + 3L\xi e^{3Lt} \quad (2.2.18)$$

$p_0(t) < p(t)$ için (H_4) hipotezi kullanılırsa

$$\begin{aligned}
G(t, p, p) - G(t, p_0, p_0) &\geq -L[(p - p_0) + (p - p_0)] \\
G(t, p, p) &\geq G(t, p_0, p_0) - 2L\xi e^{3Lt}
\end{aligned} \tag{2.2.19}$$

olur. (2.2.19) eşitsizliği (2.1.18) eşitsizliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
q'_0(t) &\geq G(t, p_0, p_0) - 2L\xi e^{3Lt} + 3L\xi e^{3Lt} \\
q'_0(t) &> G(t, p_0, p_0)
\end{aligned} \tag{2.2.20}$$

elde edilir. Şimdi her $t \in I$ için $p_0(t) < q_0(t)$ olduğunu gösterelim. Olmayana ergi yöntemi ile bunu ispat edelim, Varsayalım ki $p_0(t) < q_0(t)$ eşitsizliği sağlanmasın, öyleyse en az bir $t_1 \in (t_0, T]$ vardır ki

$$p_0(t_1) = q_0(t_1) \quad \text{ve} \quad p_0(t) < q_0(t), \quad t_0 < t < t_1 \tag{2.2.21}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}
p_0(t) - p_0(t_1) &< q_0(t) - q_0(t_1) \\
\frac{p_0(t) - p_0(t_1)}{t - t_1} &> \frac{q_0(t) - q_0(t_1)}{t - t_1}, \quad t_0 < t < t_1 \\
\lim_{t \rightarrow t_1} \frac{p_0(t) - p_0(t_1)}{t - t_1} &> \lim_{t \rightarrow t_1} \frac{q_0(t) - q_0(t_1)}{t - t_1} \\
p'_0(t_1) &\geq q'_0(t_1)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Şimdi (2.2.17) ve (2.2.20) ile birlikte $p_0(t_1) = q_0(t_1)$ olduğu kullanılırsa

$$G(t_1, p_0(t_1), q_0(t_1)) \geq p'_0(t_1) \geq q'_0(t_1) \geq G(t_1, q_0(t_1), p_0(t_1))$$

olur ve bu ise (2.2.21) kabulü ile çelişir.

O halde sonuç olarak her $t \in I$ için $p_0(t) < q_0(t)$ elde edilir. $\xi \rightarrow 0$ limiti alınırsa $t \in I$ için $p(t) \leq q(t)$ olur.

Eğer (2.1.1.) probleminin I üzerinde $p(t) \leq q(t)$ şartını sağlayan p ve q alt ve üst çözümleri biliniirse aşağıda verilen Teorem 2.2.3'te ispatlanacağı üzere (2.1.1) ile verilen BDP'nin en az bir çözümü vardır.

Teorem 2.2.3 (Varlık Teoremi): [5] $p, q \in C^1[I, \mathbb{R}]$, $t \in I$ için $p(t) \leq q(t)$ olacak şekilde (2.1.1) ile verilen BDP'nin sırasıyla alt çözümü ve üst çözümü ve de $\Phi \in C[\Omega, \mathbb{R}]$ olsun. Burada $\Omega = \{(t, u) : p(t) \leq u(t) \leq q(t), t \in I\}$ 'dır.

Bu takdirde (2.1.1) BDP'nin $t \in I$ için $p(t) \leq u(t) \leq q(t)$ olacak şekilde bir $u(t)$ çözümü mevcuttur.

İspat: Kabul edelim ki $\varphi : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$\varphi(t, u) = \max\{p(t), \min[u(t), q(t)]\}$$

O halde $\Phi(t, \varphi(t, u))$, Φ fonksiyonunun $I \times \mathbb{R}$ kümesi üzerine sürekli bir genişlemesidir ve Φ fonksiyonu Ω üzerinde sınırlı olduğundan φ sınırlı bir fonksiyondur. Bu nedenle I üzerinde $u'(t) = \Phi(t, \varphi(t, u))$, $u(t_0) = u_0$ olacak şekilde bir $u(t)$ çözümü vardır.

$$\varepsilon > 0 \text{ için } q_\varepsilon(t) = q_\varepsilon(t) + \varepsilon(1+t) \text{ ve } p_\varepsilon(t) = p_\varepsilon(t) - \varepsilon(1+t)$$

fonksiyonlarını tanımlayıp ele alalım. Burada $p_\varepsilon(t_0) \leq u_0 \leq q_\varepsilon(t_0)$ olduğu aşıkardır. Şimdi $t \in I$ için $p_\varepsilon(t) < u(t) < q_\varepsilon(t)$ olduğu gösterilmelidir. Bunun için olmayan ergi yöntemi kullanalım. Kabul edelim ki öyle bir $t_1 \in (t_0, T]$ vardır ki

$$t \in [t_0, t_1) \text{ için } p_\varepsilon(t) < u(t) < q_\varepsilon(t) \text{ ve } u(t_1) = q_\varepsilon(t_1)$$

olsun. O halde $u(t_1) > q(t_1)$ ve $\varphi(t_1, u(t_1)) = q(t_1)$ olur. Yani

$$p(t_1) \leq \varphi(t_1, u(t_1)) \leq q(t_1)$$

olur. Buradan

$$q'(t_1) \geq \Phi(t_1, q(t_1)) = \Phi(t_1, \varphi(t_1, u(t_1))) = u'(t_1)$$

elde edilir. $q'_\varepsilon(t_1) > q'(t_1)$ olduğundan

$$q'_\varepsilon(t_1) > u'(t_1)$$

bulunur ve bu ise $t \in [t_0, t_1)$ için $u(t) < q_\varepsilon(t)$ kabulü ile çelişir.

$$p_\varepsilon(t) < u(t) < q_\varepsilon(t), \quad t \in I$$

olur. $\varepsilon \rightarrow 0$ için

$$p(t) < u(t) < q(t), \quad t \in I$$

elde edilir ve teoremin hükmü doğrulanmış olur.

Tanım 2.2.2: [5] $\Phi \in C[I \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n]$, $u, v \in C^1[I, \mathbb{R}^n]$ olsun. Eğer $1 \leq i \leq n$ olacak şekilde $\forall i \in \mathbb{Z}$ için $u \leq v$ ve $u_i = v_i$ iken $\Phi_i(t, u) \leq \Phi_i(t, v)$ koşulu sağlanıyor ise Φ fonksiyonu için “*kuasimonoton azalmayan özelliğe sahiptir.*” denir.

Şimdi $\Phi \in C[I \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n]$ olmak üzere aşağıda verilen vektörel diferensiyel denklemi ele alalım.

$$u' = \Phi(t, u), \quad u(t_0) = u_0 \tag{2.2.22}$$

Sıradaki teorem eşitsizlik sistemleri için Teorem 2.2.1'in sonlu sistemlere bir genişlemesidir.

Teorem 2.2.4: [5] $u, v \in C^1[I, \mathbb{R}^n]$ biçiminde tanımlanan u ve v fonksiyonları (2.2.22) ile verilen denklem sistemi için sırasıyla birer alt çözüm ve üst çözüm olsunlar. Kabul edelim ki Φ fonksiyonu da $\Phi \in C[I \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n]$ biçiminde tanımlansın ve her $t \in I$ için u 'da kuasimonoton azalmayana özellikte olsun. Bu takdirde her i için $L \geq 0$ ve $u \geq v$ olmak üzere

$$\Phi_i(t, u) - \Phi_i(t, v) \leq L \sum_{k=1}^n (u_k - v_k) \quad (2.2.23)$$

olsun. Bu takdirde $p(t_0) \leq q(t_0)$ ise her $t \in I$ için $p(t) \leq q(t)$ olur.

Teorem 2.2.5: [5] $p, q \in C^1[I, \mathbb{R}^n]$ ve $G \in C[I \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n]$ olsun. Kabul edelim ki aşağıda verilen hipotezlerden herhangi biri sağlansın.

(H1) $p' \leq G(t, p, p)$, $q' \geq G(t, q, q)$ ve de $G(t, u, v)$ fonksiyonu $\forall t \in I$ için u 'da ve v 'de kuasimonoton azalmayan olsun. Ayrıca $u_1 \geq u_2$, $v_1 \geq v_2$ ve $L \geq 0$ olmak üzere her bir i için aşağıdaki eşitsizlik sağlansın.

$$G_i(t, u_1, v_1) - G_i(t, u_2, v_2) \leq L \sum_{k=1}^n [(u_{1_k} - u_{2_k}) + (v_{1_k} - v_{2_k})]$$

(H2) $p' \leq G(t, p, q)$, $q' \geq G(t, q, p)$ ve de $G(t, u, v)$ fonksiyonu her bir (t, v) için u 'da kuasimonoton artmayan ve her bir (t, u) içinse v 'de kuasimonoton azalmayan olsun. Ayrıca $u_1 \geq u_2$, $v_1 \geq v_2$ ve $L \geq 0$ olmak üzere her bir i için aşağıdaki eşitsizlik sağlansın.

$$G_i(t, u_1, v) - G_i(t, u_2, v) \leq L \sum_{k=1}^n (u_{1_k} - u_{2_k}), \quad \forall (t, v) \in I \times \mathbb{R}^n$$

$$G_i(t, u, v_1) - G_i(t, u, v_2) \geq -L \sum_{k=1}^n (v_{1_k} - v_{2_k}), \quad \forall (t, u) \in I \times \mathbb{R}^n$$

(H3) $p' \leq G(t, q, p)$, $q' \geq G(t, p, q)$ ve de $G(t, u, v)$ fonksiyonu her bir (t, v) için u 'da kuasimonoton azalmayan ve her bir (t, u) içinse v 'de kuasimonoton artmayan olsun. Ayrıca $u_1 \geq u_2$, $v_1 \geq v_2$ ve $L \geq 0$ olmak üzere her bir i için aşağıdaki eşitsizlik sağlansın.

$$G_i(t, u_1, v) - G_i(t, u_2, v) \geq -L \sum_{k=1}^n (u_{1_k} - u_{2_k}), \quad \forall (t, v) \in I \times \mathbb{R}^n$$

$$G_i(t, u, v_1) - G_i(t, u, v_2) \leq L \sum_{k=1}^n (v_{1_k} - v_{2_k}), \quad \forall (t, u) \in I \times \mathbb{R}^n$$

(H4) $p' \leq G(t, q, q)$, $q' \geq G(t, p, p)$ ve de $G(t, u, v)$ fonksiyonu $\forall t \in I$ için u 'da ve v 'de kuasimonoton artmayan olsun. Ayrıca $u_1 \geq u_2$, $v_1 \geq v_2$ ve $L \geq 0$ olmak üzere her bir i için aşağıdaki eşitsizlik sağlansın.

$$G_i(t, u_1, v_1) - G_i(t, u_2, v_2) \geq -L \sum_{k=1}^n [(u_{1_k} - u_{2_k}) + (v_{1_k} - v_{2_k})]$$

Bu takdirde $p(t_0) \leq q(t_0)$ oluyorsa her $t \in I$ için $p(t) \leq q(t)$ olur.

Teorem 2.2.6: [5] $p, q \in C^1[I, \mathbb{R}^n]$ ve $p(t) \leq q(t)$ olacak şekilde tanımlanan p ve q fonksiyonları (2.2.22) ile verilen BDP'nin sırasıyla alt çözümü ve üst çözümü olsunlar. Ayrıca $\Phi \in C[\Omega, \mathbb{R}^n]$ ve $\Phi(t, u)$ fonksiyonu her $t \in I$ için u üzerinde kuasimonoton azalmayan özellikte olsun. Burada $\Omega = \{(t, u) : p(t) \leq u(t) \leq q(t), t \in I\}$ 'dir.

Bu takdirde (2.2.22) ile verilen BDP'nin $p(t_0) \leq u_0 \leq q(t_0)$ koşulunu sağlayan bir $u(t)$ çözümü vardır öyle ki her $t \in I$ için $p(t) \leq u(t) \leq q(t)$ olur.

Uyarı 2.2.1: [5] Teorem 2.2.6'in iddiası $\Phi(t, u)$ fonksiyonu kuasimonoton olmasa da doğrudur. Ancak (2.2.22) ile verilen BDP için tanımlanan alt ve üst çözüm kavramları aşağıdaki koşullar ile güçlendirilmelidir.

$1 \leq i \leq n$ olacak şekilde her i için

$$p'_i \leq \Phi_i(t, w) \text{ her } w \text{ için } p_i(t) = w_i(t) \text{ ve } p(t) \leq w \leq q(t)$$

$$q'_i \geq \Phi_i(t, w) \text{ her } w \text{ için } q_i(t) = w_i(t) \text{ ve } p(t) \leq w \leq q(t) \quad (2.2.24)$$

Tanım 2.2.3: $1 \leq i \leq n$ olacak şekilde $\forall i \in \mathbb{Z}$ için a_i ve b_i nonnegatif iki tamsayı ve $a_i + b_i = n - 1$ olsun. Ayrıca;

$$\begin{aligned} p'_i &\leq \Phi\left(t, p_i, [p]_{a_i}, [q]_{b_i}\right) \\ q'_i &\leq \Phi\left(t, q_i, [q]_{a_i}, [p]_{b_i}\right) \end{aligned} \quad (2.2.25)$$

şeklinde tanımlanan (p_i, q_i) ikilileri (2.1.1) ile verilen BDP için sırasıyla eşlenmiş alt ve üst çözümler olsun. Eğer $\Phi\left(t, u_i, [u]_{a_i}, [u]_{b_i}\right)$ fonksiyonu $\forall i \in \mathbb{Z}$ için $[u]_{a_i}$ üzerinde monoton azalmayan ve $[u]_{b_i}$ üzerinde monoton artmayan oluyorsa $\Phi(t, u)$ fonksiyonuna “*karışık kuasimonoton özelliğe sahiptir.*” denir.

Teorem 2.2.7: [5] $u, v \in C^1[I, \mathbb{R}^n]$ fonksiyonları (2.1.1) ile verilen BDP için sırasıyla eşlenmiş alt ve üst çözüm ve de $\Phi \in C[\Omega, \mathbb{R}^n]$ fonksiyonu karışık kuasimonoton özelliğe sahip olsun. Bu takdirde (2.1.1) ile verilen BDP'nin her $t \in I$ için $p(t) \leq u(t) \leq q(t)$ olacak şekilde bir $u(t)$ çözümü vardır.

Sonuç 2.2.1: [5] $u \in C^1[I, \mathbb{R}]$, $w \in C[I, \mathbb{R}^n]$ ve de A ise (a_{ij}) elemanlarından oluşan ve $i \neq j$ için $a_{ij} \geq 0$ olacak şekilde $n \times n$ tipinde bir matris olsun. Eğer $u' \leq Au + w$ oluyorsa aşağıda verilen eşitsizlik sağlanır.

$$u(t) \leq u(t_0) e^{At} + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)} w(s) ds, \quad t \in I$$

Şimdi ise başlangıç zaman farkıyla verilen eşlenmiş alt ve üst çözümler için karşılaştırma teoremini ifade ve ispat edeceğiz.

Teorem 2.2.8: Kabul edelim ki aşağıdaki şartlar sağlansın.

- (i) $p, q \in C^1[\mathbb{R}^+, \mathbb{R}]$, $\Phi \in C[\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R}]$ ve $p' \leq \Phi(t, q)$, $p(t_0) \leq u_0$, $t_0 \geq 0$
 $q' \geq \Phi(t, p)$, $q(\tau_0) \geq u_0$, $\tau_0 \geq 0$
- (ii) $\Phi(t, u_1) - \Phi(t, u_2) \geq -L(u_1 - u_2)$, $u_1 \geq u_2$, $L \geq 0$
- (iii) $\tau_0 > t_0$ ve $\Phi(t, u)$ fonksiyonu her u için t 'de azalmayıdır.
- (iv) $\Phi(t, u)$ fonksiyonu; her t için u 'da azalmayan iken her t için p ve q fonksiyonları da azalmayıdır.

Bu takdirde $\eta = \tau_0 - t_0$ olmak üzere

$$(a) \quad p(t) \leq q(t + \eta), \quad t \geq t_0$$

$$(b) \quad p(t - \eta) \leq q(t), \quad t \geq \tau_0$$

olur.

İspat: p_0 ve q_0 fonksiyonları

$$p_0(t) = p(t), \quad q_0(t) = q(t + \eta), \quad t \geq t_0 \quad (2.2.26)$$

olacak şekilde tanımlanırsa,

$$q_0(t_0) = q(t_0 + \eta) = q(\tau_0) \geq u_0 \geq p(t_0) \quad (2.2.27)$$

yazılabilir. Ayrıca hipotezdeki (iii) ve (iv) koşullarından

$$q'_0(t) = q'(t + \eta) \geq \Phi(t + \eta, p(t + \eta)) \geq \Phi(t, p(t + \eta)) \geq \Phi(t, p_0(t)), \quad t \geq t_0 \quad (2.2.28)$$

$$p'_0(t) = p'(t) \leq \Phi(t, q(t)) \leq \Phi(t, q(t + \eta)) = \Phi(t, q_0(t)), \quad t \geq \tau_0 \quad (2.2.29)$$

yazılabilir. Bu ise p_0 ve q_0 fonksiyonlarının sırasıyla $\Phi(t, u)$ fonksiyonu için eşleşmiş alt ve üst çözüm olduklarını gösterir.

$\xi > 0$ olmak üzere $\tilde{p}_0(t) = p_0(t) - \xi e^{2Lt}$, $t > \tau_0$ ve $\tilde{q}_0(t) = q_0(t) + \xi e^{2Lt}$, $t > t_0$ olacak şekilde \tilde{p}_0 ve \tilde{q}_0 fonksiyonları tanımlanırsa aşağıdaki eşitsizliklerin sağlandığı kolayca gösterilebilir.

$$\tilde{q}_0(t) > q_0(t) \text{ ve } \tilde{q}_0(t_0) > q_0(t_0) = q(\tau_0) \geq p(t_0) = p_0(t_0) > \tilde{p}_0(t_0) \quad (2.2.30)$$

Buradan

$$\tilde{p}'_0(t) = p'_0(t) - 2L\xi e^{2Lt} \leq \Phi(t, q_0(t)) - 2L\xi e^{2Lt} \quad (2.2.31)$$

$\tilde{q}_0(t) > q_0(t)$ olmasından ve (ii) kabulünden

$$\begin{aligned} \Phi(t, \tilde{q}_0(t)) &\geq \Phi(t, q_0(t)) - L(\tilde{q}_0 - q_0) \\ \Phi(t, q_0(t)) &\leq \Phi(t, \tilde{q}_0(t)) + L\xi e^{2Lt} \end{aligned} \quad (2.2.32)$$

Buradan (2.2.32) eşitsizliği (2.2.31) eşitsizliğinde yerine yazılırsa

$$\tilde{p}'_0(t) \leq \Phi(t, q_0(t)) - 2L\xi e^{2Lt} \leq \Phi(t, \tilde{q}_0(t)) + L\xi e^{2Lt} - 2L\xi e^{2Lt} < \Phi(t, \tilde{q}_0(t))$$

elde edilir. Yani $t \geq t_0$ için

$$\tilde{p}'_0(t) < \Phi(t, \tilde{q}_0(t)) \quad (2.2.33)$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\tilde{q}'_0(t) > \Phi(t, \tilde{p}_0(t)) \quad (2.2.34)$$

elde edilebilir.

Şimdi $t \geq t_0$ için $\tilde{q}_0(t) > \tilde{p}_0(t)$ olduğunu gösterelim. Varsayalım ki bu ifade doğru olmasın. O halde öyle bir $t_1 > t_0$ vardır ki

$$\tilde{p}_0(t_1) = \tilde{q}_0(t_1) \text{ ve } \tilde{p}_0(t) < \tilde{q}_0(t), \quad t_1 > t \geq t_0 \quad (2.2.35)$$

olur. Bu durumda

$$\lim_{t \rightarrow t_1} \frac{\tilde{p}_0(t_1) - \tilde{p}_0(t)}{t_1 - t} \geq \lim_{t \rightarrow t_1} \frac{\tilde{q}_0(t_1) - \tilde{q}_0(t)}{t_1 - t}$$

yazılabilir, yani $\tilde{p}'_0(t_1) \geq \tilde{q}'_0(t_1)$ 'dir. O halde (2.2.33) ve (2.2.34) eşitsizlikleri her $t \geq t_0$ için geçerli olduğundan $t_1 > t_0$ için

$$\Phi(t_1, \tilde{q}_0(t_1)) > \tilde{p}'_0(t_1) \geq \tilde{q}'_0(t_1) > \Phi(t_1, \tilde{p}_0(t_1)) \quad (2.2.36)$$

olur. Hipotezdeki (iv) koşulundan dolayı (2.2.36) eşitsizliği $\tilde{p}_0(t_1) = \tilde{q}_0(t_1)$ kabulümüzle çelişir. O halde her $t \geq t_0$ için $\tilde{q}_0(t) > \tilde{p}_0(t)$ olur.

$\xi \rightarrow 0$ limiti alınırsa $q_0(t) = q(t + \eta) \geq p(t)$, $t \geq t_0$ sonucuna ulaşırız.

Böylece teoremin (a) hükmü sağlanmış olur. Yani $t \geq t_0$ için $p(t) \leq q(t + \eta)$, $t \geq t_0$ sonucuna ulaşılır.

Teoremin (b) hükmü benzer şekilde ispatlanabilir.

2.3 Kuasilineerizasyon Yöntemi

Kuasilineerizasyon metodunun temel prensibi uygun şartlar altında verilen bir BDP'nin bir tek çözümüne yakınsayan alt ve üst çözümler dizileri inşa etmektir. Bu metodun nasıl işlediğine genel hatları ile değinmek üzere aşağıdaki şartlar altında verilen BDP'yi ele alalım.

$\Phi \in C[I \times \Omega, \mathbb{R}]$ ve $\Phi_{uu}(t, u) > 0$, $(t, u) \in I \times \Omega$ ve $I = [t_0, T]$, Ω ise \mathbb{R} üzerinde (t_0, u_0) içeren açık kümeler olmak üzere

$$u' = \Phi(t, u), \quad u(t_0) = u_0 \quad (2.3.1)$$

olsun.

$\Phi_{uu}(t, u) > 0$, yani Φ fonksiyonu u 'ya göre konveks olduğundan ODT gereği

$$\Phi(t, u) \geq \Psi(t, u, v) = \Phi(t, v) + \Phi_u(t, u)(u - v), \quad u \geq v$$

yazılabilir. Burada $\Psi(t, u, v)$ fonksiyonu u 'ya göre lineer olduğu açıktır. Bu nedenle aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$u' = \Phi(t, u) = \max_v \Psi(t, u, v) \quad (2.3.2)$$

Her $v \in C[I \times \mathbb{R}, \mathbb{R}]$ için $u' \geq \Psi(t, u, v)$ yazılabileceğinden Teorem 2.2.1 (Karşılaştırma Teoremi) uygulanırsa

$$u(t) \geq z(t, v), \quad t_0 \leq t \leq t_0 + a \leq T \quad (2.3.3)$$

ifadesi elde edilir. Buradaki $z(t, v)$ ise

$$z' = \Psi(t, z, v(t)), \quad z(t_0) = u_0 \quad (2.3.4)$$

diferensiyel denkleminin çözümüdür. $u(t)$ ise I kümesinin kompakt $I_0 = [t_0, t_0 + a]$ alt kümesi üzerinde (2.3.1) BDP'nin bir çözümüdür. Uygun bir $v(t)$ seçilmesi durumunda (2.3.1) BDP'nin çözümüne ilişkin olarak I_0 kümesi üzerinde alt sınırlar bulunabilir.

Her $v(t)$ fonksiyonu için (2.3.3) eşitsizliği sağlanmakla birlikte $u(t) = v(t)$ olması durumunda eşitlik söz konusu olacaktır. Bu nedenle $u(t) = \max_v z(t, v)$ yazılabilir.

Buradan da anlaşılacağı üzere (2.3.2) eşitliğinin sağ tarafındaki ifadeyi maksimize eden fonksiyon aslında $u(t)$ fonksiyonunun bizzat kendisidir. Böylece ardışık yaklaşımlar yönteminin uygulanabilir olduğu anlaşılır. Bu yöntemle $v(t)$ fonksiyonu ile adım adım (2.3.1)'in arzulanan çözümü olan $u(t)$ fonksiyonuna alttan yaklaşılmaktadır.

Kabul edelim ki $v_0(t)$; (2.3.1) ile verilen BDP'nin bir alt çözümü ve başlangıç fonksiyonu olsun.

$$v_0'(t) \leq \Phi(t, v_0(t)), \quad v_0(t) \leq u_0$$

Bu halde aşağıda verilen lineer diferensiyel denklemlerin çözümlerinden oluşan monoton azalmayan $\{v_n(t)\}$ fonksiyon dizisi teşkil edilebilir.

$$v_n'(t) = \Phi(t, v_{n-1}) + \Phi_u(t, v_{n-1})(v_n - v_{n-1}), \quad v_n(t_0) = u_0$$

$$v_0(t) \leq v_1(t) \leq v_2(t) \leq \dots \leq v_{n-1}(t) \leq v_n(t) \leq u(t), \quad t \in I_0$$

Buradaki $u(t)$ fonksiyonu (2.3.1) ile verilen BDP'nin $[t_0, t_0 + a]$ kümesi üzerinde bir çözümdür ve $\{v_n(t)\}$ fonksiyon dizisi bu çözüme yakınsamaktadır. Bu yakınsamanın monoton ve düzgün olduğu standart teknik yardımıyla gösterilebilir [50].

Ayrıca bu yakınsamanın kuadratik olduğu aşağıdaki eşitsizliğin sağlanması ile ispatlanabilir.

$$\max_{I_0} |u(t) - v_n(t)| \leq k \max_{I_0} |u(t) - v_{n-1}(t)|^2$$

Buradaki k pozitif bir sabit sayıdır.

Eğer Φ fonksiyonu konkav olmak üzere $v_0(t)$ başlangıç fonksiyonu

$$v_0'(t) \geq \Phi(t, v_0(t)), \quad v_0(t_0)$$

şartıyla verilirse (2.3.1) ile verilen BDP'nin bir tek çözümü $u(t)$ fonksiyonunu üstten sınırlayan ve bu fonksiyona düzgün ve kuadratik yakınsayan bir fonksiyon dizisi teşkil edilebilir.

Şimdi KLM'ye dair en temel teoremlerden birini verelim ve yöntemi anlamaya çalışalım.

Teorem 2.3.1: [5] Kabul edelim ki $p_0, q_0 \in C^1[I, \mathbb{R}]$ ve $\Phi \in C^{0,2}[\Omega, \mathbb{R}]$ fonksiyonları için aşağıdaki şartlar sağlansın. Burada $\Omega = \{(t, u) : p_0(t) \leq u \leq q_0(t), t \in I\}$ 'dır.

$$(A_1) \quad p_0' \leq \Phi(t, p_0), \quad q_0' \geq \Phi(t, q_0), \quad q_0(t) \geq p_0(t), \quad t \in I$$

$$(A_2) \quad \Phi_{uu}(t, u) \geq 0$$

Bu takdirde I aralığı üzerinde (2.1.1) ile verilen BDP'nin çözümüne düzgün ve tekdüze olarak yakınsayan $\{p_n(t)\}$ ve $\{q_n(t)\}$ dizileri mevcuttur ve yakınsama kuadrattır.

İspat: (A_2) koşulunda verildiği üzere $\Phi_{uu}(t, u) \geq 0$ olması nedeniyle aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir.

$$\Phi(t, u_1) - \Phi(t, u_2) \geq \Phi_u(t, u_2)(u_1 - u_2) \quad (2.3.5)$$

Lipschitz koşulu ile kısmi türev arasındaki ilişki ile ilgili olan Teorem 2.1.1. gereği $\Phi(t, u)$ fonksiyonu Lipschitz şartını sağlar.

O halde $q_0(t) \geq u_1(t) \geq u_2(t) \geq p_0(t)$, $t \in I$ olmak üzere

$$-L(u_1 - u_2) \leq \Phi(t, u_1) - \Phi(t, u_2) \leq L(u_1 - u_2), \quad L > 0 \quad (2.3.6)$$

Şimdi aşağıda verilen lineer başlangıç değer problemlerini ele alalım.

$$p_1'(t) = \Phi(t, p_0) + \Phi_u(t, p_0)(p_1 - p_0), \quad p_1(t_0) = u_0 \quad (2.3.7)$$

$$q_1'(t) = \Phi(t, q_0) + \Phi_u(t, p_0)(q_1 - q_0), \quad q_1(t_0) = u_0 \quad (2.3.8)$$

Burada $q_0(t) \geq u_0 \geq p_0(t)$ 'dır.

Şimdi $\sigma_1 = p_0 - p_1$ fonksiyonunu teşkil edelim. Bu eşitliğin türevi alınır ve (2.3.5) kullanılırsa;

$$\begin{aligned}\sigma_1' &= p_0' - p_1' \leq \Phi(t, p_0) - [\Phi(t, p_0) + \Phi_u(t, p_0)(p_1 - p_0)] \\ &\leq \Phi_u(t, p_0)(p_0 - p_1) = \Phi_u(t, p_0)\sigma_1\end{aligned}$$

olur. Ayrıca $\sigma_1(t_0) = p_0(t_0) - p_1(t_0) \leq u_0 - u_0 = 0$ olduğundan aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\sigma_1' \leq \Phi_u(t, p_0)\sigma_1, \quad \sigma_1(t_0) \leq 0$$

Bu diferensiyel eşitsizlik çözülürse her $t \in I$ için $p_1(t) \geq p_0(t)$ sonucu elde edilir.

Şimdi de $\sigma_2 = p_1 - q_0$ fonksiyonunun tanımlayıp irdeleyelim. Bu eşitliğin türevi alınır ve (2.3.6) eşitliği kullanılırsa;

$$\sigma_2' = p_1' - q_0' \leq \Phi(t, p_0) + \Phi_u(t, p_0)(p_1 - p_0) - \Phi(t, q_0) \quad (2.3.9)$$

olur. $q_0(t) \geq p_0(t)$ olduğundan (2.3.5) eşitsizliğinden

$$\Phi(t, p_0) + \Phi_u(t, p_0)(q_0 - p_0) \leq \Phi(t, q_0) \quad (2.3.10)$$

eşitsizliği elde edilir. (2.3.10) ifadesi (2.3.9) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\sigma_2' &\leq \Phi(t, p_0) + \Phi_u(t, p_0)(p_1 - p_0) - [\Phi(t, p_0) + \Phi_u(t, p_0)(q_0 - p_0)] \\ \sigma_2' &\leq \Phi_u(t, p_0)\sigma_2\end{aligned}$$

Ayrıca $\sigma_2(t_0) = p_1(t_0) - q_0(t_0) \leq u_0 - u_0 = 0$ olduğundan aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\sigma_2' \leq \Phi_u(t, p_0)\sigma_2, \quad \sigma_2(t_0) \leq 0$$

Bu diferensiyel eşitsizlik çözülürse her $t \in I$ için $q_0(t) \geq p_1(t)$ sonucu elde edilir.

Elde edilen sonuçlar birleştirilirse her $t \in I$ için $q_0(t) \geq p_1(t) \geq p_0(t)$ olur.

Benzer süreçler tekrar edilerek her $t \in I$ için $q_0(t) \geq q_1(t) \geq p_0(t)$ eşitsizliğine ulaşılabilir. Şimdi $q_1(t) \geq p_1(t)$ eşitsizliğinin sağlandığını gösterelim. $q_1(t) \geq p_0(t)$ olduğundan (2.3.5) eşitsizliği kullanılırsa $p_1' \leq \Phi(t, p_1)$ elde edilir. Bu ise $p_1(t)$ fonksiyonunun (2.1.1) ile verilen BDP için bir alt çözüm olduğunu gösterir.

Benzer şekilde $q_1(t)$ fonksiyonunun (2.1.1) ile verilen BDP için bir üst çözüm olduğu gösterilebilir. Teorem 2.1.2 (Karşılaştırma Teoremi) gereği $q_1(t) \geq p_1(t)$, $t \in I$ sonucu elde edilir.

Yukarıda izlenen süreç defalarca tekrar edilirse (2.1.1) ile verilen BDP'nin alt çözümlerinden oluşan $\{p_n(t)\}$ ve üst çözümlerinden oluşan $\{q_n(t)\}$ dizileri oluşturulabilir.

$$p_0(t) \leq p_1(t) \leq \dots \leq p_{n-1}(t) \leq p_n(t) \leq q_n(t) \leq q_{n-1}(t) \leq \dots \leq q_1(t) \leq q_0(t), \quad t \in I$$

Şimdi ise tümevarım metoduyla bunu ispat edelim. O halde kabul edelim ki bazı $n > 1$ değerleri için

$$p_{k-1}' \leq \Phi_u(t, p_{k-1}), \quad q_{k-1}' \geq \Phi_u(t, q_{k-1}), \quad p_{k-1} \leq q_{k-1}, \quad t \in I$$

ve

$$p_{k-1}(t_0) = q_{k-1}(t_0) = u_0$$

olsun. Bu kabul altında öncelikle I kümesi üzerinde $p_{k-1} \leq p_k \leq q_k \leq q_{k-1}$ eşitsizliğinin sağlandığı gösterilmelidir. Bunun için çözümleri sırasıyla p_k ve q_k olan aşağıdaki lineer başlangıç değer problemlerini ele alalım.

$$p_k'(t) = \Phi(t, p_{k-1}) + \Phi_u(t, p_{k-1})(p_k - p_{k-1}), \quad p_k(t_0) = u_0 \quad (2.3.11)$$

$$q_k'(t) = \Phi(t, q_{k-1}) + \Phi_u(t, p_{k-1})(q_k - q_{k-1}), \quad q_k(t_0) = u_0 \quad (2.3.12)$$

Önceki aşamalarda yapıldığı gibi $\sigma = p_{k-1} - p_k$ fonksiyonu tanımlanmak suretiyle $\sigma' = \Phi_u(t, p_k)\sigma$ ve $\sigma(t_0) = 0$ elde edilir ve buradan her $t \in I$ için $p_{k-1}(t) \leq p_k(t)$

gerçeğine ulaşılır. Benzer işlemler uygulanarak I üzerinde $p_{k-1}(t) \leq q_k(t)$, $q_k(t) \leq q_{k-1}(t)$ ve $p_k(t) \leq q_k(t)$ elde edilir. Böylece

$$p_0 \leq p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_{n-1} \leq p_n \leq q_n \leq q_{n-1} \leq \dots \leq q_2 \leq q_1 \leq q_0, \quad t \in I$$

olacak şekilde, (2.1.1) ile verilen BDP'nin bir tek çözümü olan $u(t)$ fonksiyonuna sırasıyla alttan ve üstten yakınsayan $\{p_n(t)\}$ ve $\{q_n(t)\}$ fonksiyon dizileri teşkil edilmiş olur. Standart teknik ile gösterilebilir ki bu yakınsama monoton ve düzgündür. Şimdi yakınsamanın kuadratik olduğunu gösterelim. Yani $u(t)$ çözümü için aşağıdaki eşitsizliğin sağlandığı gösterilmelidir.

$$\max_{t \in I} |u(t) - p_n(t)| \leq k \max_{t \in I} |u(t) - p_{n-1}(t)|^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots \text{ ve } \lambda > 0$$

Şimdi $\{p_n(t)\} \rightarrow u(t)$ yakınsamasının kuadratik olduğunu gösterelim. Bunun için $a_n(t) = u(t) - p_n(t)$ fonksiyonunu tanımlayalım. $a_n(t) \geq 0$ ve $a_n(t_0) = 0$ olduğu kolayca gösterilebilir. Buradan (A_2) kabulü kullanılarak

$$\begin{aligned} a'_n(t) &= u'(t) - p'_n(t) \\ &= \Phi(t, u) - [\Phi(t, p_{n-1}) + \Phi_u(t, p_{n-1})(p_n - p_{n-1})] \\ &= \Phi(t, u) - \Phi(t, p_{n-1}) - \Phi_u(t, p_{n-1})(p_n - p_{n-1}) \\ &= \Phi_u(t, \xi_1)(u - p_{n-1}) - \Phi_u(t, p_{n-1})(a_{n-1} - a_n) \\ &\leq \Phi_u(t, u)(a_{n-1}) - \Phi_u(t, p_{n-1})(a_{n-1} - a_n) \\ &= [\Phi_u(t, u) - \Phi_u(t, p_{n-1})](a_{n-1}) + \Phi_u(t, p_{n-1})a_n \\ &= [\Phi_{uu}(t, \xi_2)(u - p_{n-1})](a_{n-1}) + \Phi_u(t, p_{n-1})a_n \\ &= \Phi_{uu}(t, \xi_2)a_{n-1}^2 + \Phi_u(t, p_{n-1})a_n \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $a_n \leq \xi_2, \xi_2 \leq u$ olup Ω kompakt küme ve bu küme üzerinde Φ , Φ_u ve Φ_{uu} sürekli olduğundan her $(t, u) \in \Omega$ için $|\Phi_u(t, u)| \leq P$ ve $|\Phi_{uu}(t, u)| \leq R$ olacak şekilde $P, R > 0$ sabitleri vardır. Böylece

$$a'_n(t) \leq R a_{n-1}^2 + P a_n, \quad a_n(t_0) = 0$$

diferensiyel eşitsizliği elde edilir ve buradan

$$\frac{d(e^{-Pt} a_n(t))}{dt} \leq e^{-Pt} R a_{n-1}^2(t)$$

$$e^{-Pt} a_n(t) \leq R \int_{t_0}^t e^{-Ps} a_{n-1}^2(s) ds$$

$$a_n(t) \leq \frac{R}{P} \max_{0 \leq s \leq t} a_n^2(s) (e^{-Pt} - 1)$$

$$a_n(t) \leq \frac{R}{P} \max_{0 \leq s \leq t} a_n^2(s) e^{-Pt}$$

ve

$$\max_{t \in I} |u(t) - p_n(t)| \leq k \max_{t \in I} |u(t) - p_{n-1}(t)|^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots \text{ ve } \lambda > 0$$

olur.

Şimdi $\{q_n(t)\} \rightarrow u(t)$ yakınsamasının kuadratik olduğunu gösterelim. Bunun için $b_n(t) = q_n(t) - u(t)$ fonksiyonunu tanımlayalım. $b_n(t) \geq 0$ ve $b_n(t_0) = 0$ olduğu kolayca görülür.

$$\begin{aligned} b'_n(t) &= q'_n(t) - u'(t) \\ &= [\Phi(t, q_{n-1}) + \Phi_u(t, p_{n-1})(q_n - q_{n-1})] - \Phi(t, u) \\ &= \Phi(t, q_{n-1}) - \Phi(t, u) + \Phi_u(t, p_{n-1})(b_n - b_{n-1}) \\ &\leq \Phi_u(t, q_{n-1})(q_{n-1} - u) + \Phi_u(t, p_{n-1})b_n - \Phi_u(t, p_{n-1})b_{n-1} \\ &\leq [\Phi_u(t, q_{n-1}) - \Phi_u(t, p_{n-1})]b_{n-1} + \Phi_u(t, p_{n-1})b_n \\ &= \Phi_{uu}(t, \xi)[a_{n-1} + b_{n-1}]b_{n-1} + \Phi_u(t, p_{n-1})b_n \end{aligned}$$

burada $p_{n-1} \leq \xi \leq q_{n-1}$ olup yukarıda belirlenen $P, R > 0$ sabitleri yerlerine yazılırsa

$$b'_n(t) \leq \frac{3R}{2} b_{n-1}^2 + \frac{R}{2} a_{n-1}^2 + P b_n, \quad b_n(t_0) = 0$$

diferensiyel eşitsizliği elde edilir ve bu çözümlerse aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\max_{t \in I} |q_n(t) - u(t)| \leq \frac{3Re^{Pt}}{2P} \max_{t \in I} |q_{n-1}(t) - u(t)|^2 + \frac{Re^{Pt}}{2P} \max_{t \in I} |u(t) - q_{n-1}(t)|^2$$

Böylece ispat tamamlanır.

Örnek 2.3.1: $\frac{du}{dt} = \Phi(t, u) = u^2$; $u(0) = 1$ başlangıç değer problemini ele alalım.

Açıktır ki $\Phi_{uu}(t, u) = 2 > 0$ olduğundan Φ konveks bir fonksiyondur.

KLM'yi uygulamak için Teorem 2.3.1'in (A_I) kabulünü sağlayacak şekilde yani verilen BDP için sırasıyla alt ve üst çözüm şartlarını sağlayan $p_0(t) = 1$, $q_0(t) = e^{2t}$ fonksiyonlarını seçelim. Seçtiğimiz bu iki fonksiyonun söz konusu şartları sağladığını kolayca gösterebiliriz. Yani

$$p_0'(t) \leq \Phi(t, p_0); \quad p_0(0) \leq 1$$

$$q_0'(t) \geq \Phi(t, q_0); \quad q_0(0) \geq 1$$

eşitsizlikleri sağlar. O halde $p_0(t)$ ve $q_0(t)$ fonksiyonları kullanılarak KLM aşamaları uygulanmak suretiyle, verilen BDP'nin tek çözümüne sırasıyla alttan ve üstten yakınsayan fonksiyon dizileri teşkil edilebilir. Bu iki fonksiyon aynı zamanda söz konusu fonksiyon dizilerinin ilk terimleridir. Şimdi bu iki dizinin bir sonraki terimlerini belirlemek için p_1 ve q_1 fonksiyonlarını sırasıyla aşağıdaki lineer başlangıç değer probleminin çözümleri olacak şekilde seçelim.

$$p_1' = \Phi(t, p_0) + \Phi_u(t, p_0)(p_1 - p_0); \quad p_1(0) = 1$$

$$q_1' = \Phi(t, q_0) + \Phi_u(t, q_0)(q_1 - q_0); \quad q_1(0) = 1$$

Buradan gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$p_1'(t) - 2p_1(t) = -1; \quad p_1(0) = 1$$

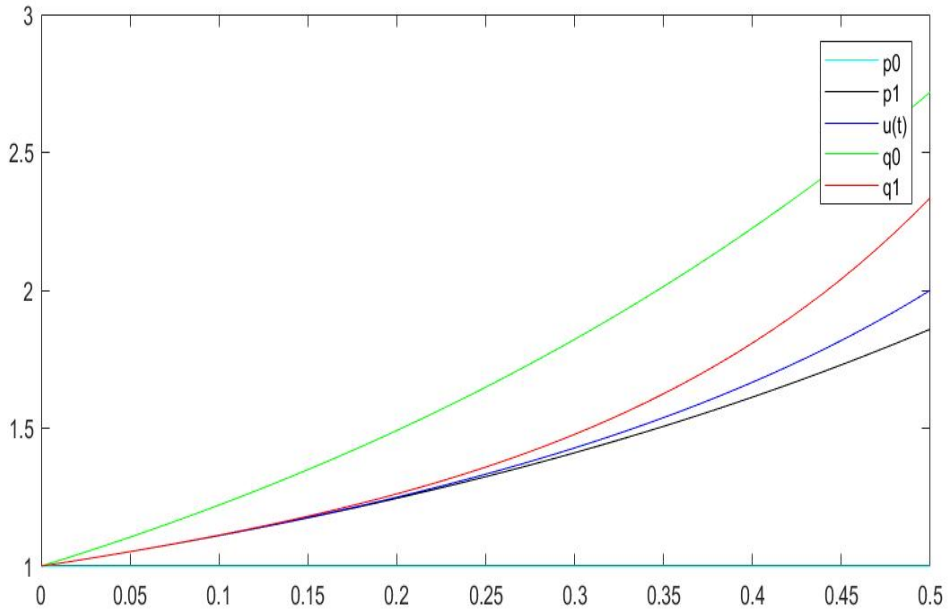
$$q_1'(t) - 2q_1(t) = e^{4t} - 2e^{2t}; \quad q_1(0) = 1$$

Bu lineer problemlerin tek çözümleri mevcut olup gerekli işlemlerden sonra kolaylıkla çözülebilir.

$$p_1(t) = \frac{1}{2}(e^{2t} + 1)$$

$$q_1(t) = \frac{e^{4t}}{2} - 2te^{2t} + \frac{1}{2}e^{2t}$$

Bu örnekte yer alan nonlinear BDP'nin çözüm fonksiyonuna ait grafik, KLM uygulandığında elde edilen alt ve üst çözüm fonksiyonlarının grafiği ile birlikte Şekil 2.1.'de verilmiştir.



Şekil 2.1. Alt ve üst çözümler grafiği

Şekil 2.1.'de de görüldüğü üzere KLM ile elde ettiğimiz alt ve üst çözüm fonksiyonları p_1 ve q_1 'in grafikleri; başlangıçta seçtiğimiz p_0 ve q_0 'in grafiklerine nazaran çözüm fonksiyonunun grafiğine daha yakındır. İterasyon ile çözüm fonksiyonunu çok daha yakından sınırlayan alt ve üst çözüm fonksiyonları elde edilebilir.

Uyarı 2.3.1: Teorem 2.3.1'in hipotezindeki şartları sağlayan alt ve üst çözümleri aynı anda her zaman basit olmayabilir. Konuyu örneklendirmek için aşağıdaki Riccati tipindeki BDP'yi irdeleyelim.

$$u' = \Phi(t, u) = u^2 + g(t), \quad u(0) = u_0 \quad (2.3.13)$$

Bu problemin çözümünü bulmak üzere alt çözüm $p_0(t)$ fonksiyonunu doğru seçmek kolaydır. $u^2 \geq 0$ olduğundan alt çözüm fonksiyonu olarak

$$p_0(t) = p_0(0) + \int_0^t a(s) ds, \quad p_0(0) \leq x_0$$

seçilebilir. $p_0'(t) = a(t)$ olması ile birlikte (2.3.13) probleminin çözümü olan $u(t)$ fonksiyonunun mevcut olduğu herhangi bir aralıkta bu çözüme yakınsayan ve azalmayan $\{p_n(t)\}$ fonksiyon dizileri oluşturulabilir. Buna mukabil bu problem için uygun bir üst çözüm bulmak çok zor olacaktır.

Bu arada Teorem 2.3.1'in ispatı için tanımlanan lineer BDP'lerin çözümleri olan $q_n(t)$ fonksiyonlarını teşkil ederken Newton-Fourier metodu uygulanmıştır.

3. BAŞLANGIÇ ZAMANLARI FARKLI EŞLENMİŞ ALT VE ÜST ÇÖZÜMLERİ İLE VERİLEN LİNEER OLMAYAN DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ İÇİN KUASİLİNEERİZASYON YÖNTEMİNİN UYGULANMASI

Esas teoremimizin verileceği bu bölümde öncelikle eşlenmiş alt ve üst çözümleri bilinen bir BDP'nin çözümünü alttan ve üstten sınırlayan fonksiyon dizileri oluşturulmasında KLM'nin kullanılabilirliği ile ilgili teoremin ifadesine yer verilecektir. Sonrasında esas teoremimiz ispatı ile birlikte verilecektir.

Teorem 3.1: [5] Kabul edelim ki $t \in I = [t_0, t_0 + T]$ olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlansın.

$$(B_1) \quad p_0, q_0 \in C^1[I, \mathbb{R}], \quad p_0 \leq \Phi(t, q_0), \quad q_0 \geq \Phi(t, p_0), \quad t \in I$$

$$(B_2) \quad \Phi \in C^{0,2}[\Omega, \mathbb{R}], \quad \Phi_{uu}(t, u) \geq 0 \text{ burada } \Omega = \{(t, u) : p_0(t) \leq u \leq q_0(t), t \in I\} \text{ 'dır.}$$

$$(B_3) \quad \Phi_u(t, u) \leq 0; \text{ yani } \Phi \text{ fonksiyonu } u \text{ 'ya göre her } t \text{ için artmayandır.}$$

Bu takdirde I üzerinde (2.1.1) ile verilen BDP'nin çözümüne düzgün ve monoton yakınsayan $\{\tilde{p}_n(t)\}$ ve $\{\tilde{q}_n(t)\}$ fonksiyon dizileri mevcuttur ve de bu yakınsama kuadrattir.

İspat: Bu teoremin ispatı esas teoremimizin ispatı ile benzer olduğundan verilmemiştir.

Şimdi ise (2.1.1) ile verilen BDP için başlangıç zamanları farklı eşlenmiş alt ve üst çözümlerinin verilmesi durumlarında KLM kullanılarak söz konusu BDP'nin tek çözümüne yakınsayan alt ve üst çözüm dizilerinin, hipotezde konvekslik koşulunun zayıflatılmasına rağmen oluşturulabileceğini aşağıdaki esas teoremimiz ile göstermeye çalışacağız. Akabinde ise bu teoreme bağlı olarak iki adet sonuç hükmü verilecektir.

Teorem 3.2. p_0 ve q_0 sırasıyla (2.1.1) ile verilen BDP'nin sırasıyla alt ve üst çözümleri olsun ve kabul edelim ki aşağıda verilen şartlar sağlansın.

(C1) $p_0 \in C^1[I_1, \mathbb{R}]$, $I_1 = [t_0, t_0 + T]$, $q_0 \in C^1[I_2, \mathbb{R}]$, $I_2 = [\tau_0, \tau_0 + T]$, $T > 0$
 $0 < t_0 < \tau_0$ olmak üzere $t \in [t_0, \tau_0 + T]$ için $p_0'(t) \leq \Phi(t, q_0(t))$, $q_0'(t) \geq \Phi(t, p_0'(t))$ ve
 $p_0(t_0) < q_0(\tau_0)$

(C2) $\Phi \in C^{0,1}[I_3 \times \mathbb{R}, \mathbb{R}]$, $I_3 = [t_0, \tau_0 + T]$ ile verilen $\Phi(t, u)$ fonksiyonu t 'de her u için azalmayan ve u 'da her t için artmayandır.

(C3) Ω üzerinde $\Phi_u(t, u)$ fonksiyonu u 'da her t için azalmayandır ve de $u_1 \geq u_2$ olmak üzere şu eşitsizlikler sağlanır.

$$\Phi(t, u_1) \geq \Phi(t, u_2) + \Phi_u(t, u_2)(u_1 - u_2) \quad (3.1.1)$$

$$|\Phi_u(t, u_1) - \Phi_u(t, u_2)| \leq L|u_1 - u_2|, \quad L > 0 \quad (3.1.2)$$

Burada $\Omega = \{(t, u) : t_0 < t < t_0 + T, \tilde{p}_0(t) \leq u \leq \tilde{q}_0(t)\}$ olup $\tilde{q}_0(t) = q_0(t + \eta_1)$, $\eta_1 = \tau_0 - t_0$, $\tilde{p}_0(t) = p_0(t)$ ve $t_0 < s_0 < \tau_0$ dir.

(C4) p_0 ve q_0 fonksiyonları I_3 aralığında artmayan fonksiyonlardır.

Bu takdirde $\{\tilde{p}_n(t)\}$ ve $\{\tilde{q}_n(t)\}$ monoton dizileri vardır ki (2.1.1) denkleminin $[s_0, s_0 + T]$ aralığı üzerinde $u(s_0) = u_0$ başlangıç koşulunu sağlayan tek çözümüne düzgüne kuadratik olarak yakınsarlar.

İspat: (C3) kabulünden $\tilde{q}_0(t) = q_0(t + \eta_1)$, $\tilde{p}_0(t) = p_0(t)$ ve (C1) kabulünden $q_0(\tau_0) \geq p_0(t_0)$ olduğundan $\tilde{q}_0(t_0) = q_0(t_0 + \eta_1) = q_0(\tau_0) \geq p_0(t_0) = \tilde{p}_0(t_0)$ yazılabilir. Yani $\tilde{q}_0(t_0) \geq \tilde{p}_0(t_0)$ olur. Ayrıca (C2), (C3) ve (C4) kabullerinden dolayı $t_0 \leq t \leq t_0 + T$ için

$$\Phi(t, p_0'(t)) = \Phi(t, p_0(t)) \leq \Phi(t, p_0(t + \eta_1)) \leq \Phi(t + \eta_1, p_0(t + \eta_1)) \leq q_0(t + \eta_1) = \tilde{q}_0'(t)$$

buradan

$$\tilde{q}'_0(t) \geq \Phi(t, \tilde{p}_0(t)) \quad (3.1.3)$$

elde edilir. Benzer gerekçelerle $t_0 \leq t \leq t_0 + T$ için

$$\tilde{p}'_0(t) = \tilde{p}_0(t) \leq \Phi(t, q_0(t)) \leq \Phi(t, q_0(t + \eta_1)) = \Phi(t, \tilde{q}_0(t))$$

buradan

$$\tilde{p}'_0(t) \leq \Phi(t, \tilde{q}_0(t)) \quad (3.1.4)$$

elde edilir. Böylece \tilde{p}_0 ve \tilde{q}_0 fonksiyonlarının (2.1.1) ile verilen BDP'nin eşlenmiş alt ve üst çözümleri olduğunu göstermiş olduk.

Hipotezdeki (C_2) ve (C_3) kabulünden $\tilde{p}_0(t) \leq u_2 \leq u_1 \leq \tilde{q}_0(t)$ olmak üzere

$$-L(u_1 - u_2) \leq \Phi(t, u_1) - \Phi(t, u_2) \leq L(u_1 - u_2) \quad (3.1.5)$$

yazılabilir.

Şimdi aşağıda tanımlanan eşlenmiş problemleri ele alalım.

$$\begin{aligned} u' &= M(t + \eta_2, \tilde{p}_0, \tilde{q}_0; v) \\ &= \Phi(t + \eta_2, \tilde{q}_0) + \Phi_u(t + \eta_2, \tilde{q}_0)(v - \tilde{q}_0), \quad u(t_0) = u_0 \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

$$\begin{aligned} v' &= N(t + \eta_2, \tilde{p}_0, \tilde{q}_0; u) \\ &= \Phi(t + \eta_2, \tilde{p}_0) + \Phi_u(t + \eta_2, \tilde{q}_0)(u - \tilde{p}_0), \quad v(t_0) = u_0 \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

burada $\tilde{p}_0(t) \leq \tilde{u}(t) \leq \tilde{q}_0(t)$ olup (3.1.5) eşitsizliği ve (C_3) kabulünden

$$\begin{aligned} \tilde{p}'_0 &\leq \Phi(t + \eta_2, \tilde{q}_0) \equiv M(t + \eta_2, \tilde{p}_0, \tilde{q}_0; \tilde{q}_0) \\ \tilde{q}'_0 &\geq \Phi(t + \eta_2, \tilde{p}_0) \geq \Phi(t + \eta_2, \tilde{q}_0) + \Phi_u(t + \eta_2, \tilde{q}_0)(\tilde{p}_0 - \tilde{q}_0) \\ &\equiv M(t + \eta_2, \tilde{p}_0, \tilde{q}_0; \tilde{p}_0) \\ \tilde{p}'_0 &\leq \Phi(t + \eta_2, \tilde{q}_0) \leq \Phi(t + \eta_2, \tilde{p}_0) + \Phi_u(t + \eta_2, \tilde{q}_0)(\tilde{q}_0 - \tilde{p}_0) \\ &\equiv N(t + \eta_2, \tilde{p}_0, \tilde{q}_0; \tilde{q}_0) \\ \tilde{q}'_0 &\geq \Phi(t + \eta_2, \tilde{p}_0) \equiv N(t + \eta_2, \tilde{p}_0, \tilde{q}_0; \tilde{p}_0) \end{aligned}$$

olur. (3.1.6) ve (3.1.7) denklemleri lineer olduğundan Teorem 2.2.3 gereği (3.1.6) ve (3.1.7) denklemleri ile verilen eşlenmiş BDP'nin $\tilde{p}_0 < \tilde{p}_1, \tilde{q}_1 < \tilde{q}_0$ olacak şekilde bir tek $(\tilde{p}_1, \tilde{q}_1)$ çözümü vardır. O halde

$$\tilde{p}'_1 \equiv M(t + \eta_2, \tilde{p}_0, \tilde{q}_0; \tilde{q}_1), \quad \tilde{p}_1(t_0) = u_0 \quad (3.1.8)$$

$$\tilde{q}'_1 \equiv N(t + \eta_2, \tilde{p}_0, \tilde{q}_0; \tilde{p}_1), \quad \tilde{q}_1(t_0) = u_0 \quad (3.1.9)$$

yazılabilir. Burada (C_3) kabulü gereği (3.1.1) eşitsizliği kullanılırsa Φ_u fonksiyonu u 'da azalmayan olduğundan

$$\begin{aligned} \tilde{p}'_1 &= \Phi(t + \eta_2, \tilde{q}_0) + \Phi_u(t + \eta_2, \tilde{q}_0)(\tilde{q}_1 - \tilde{q}_0) \\ &\leq \Phi(t + \eta_2, \tilde{q}_1) + \Phi_u(t + \eta_2, \tilde{q}_0)(\tilde{q}_0 - \tilde{q}_1) + \Phi_u(t + \eta_2, \tilde{q}_0)(\tilde{q}_1 - \tilde{q}_0) \\ &= \Phi(t + \eta_2, \tilde{q}_1) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \tilde{q}'_1 &= \Phi(t + \eta_2, \tilde{p}_0) + \Phi_u(t + \eta_2, \tilde{q}_0)(\tilde{p}_1 - \tilde{p}_0) \\ &\geq \Phi(t + \eta_2, \tilde{p}_1) + \Phi_u(t + \eta_2, \tilde{p}_1)(\tilde{p}_0 - \tilde{p}_1) + \Phi_u(t + \eta_2, \tilde{q}_0)(\tilde{p}_1 - \tilde{p}_0) \\ &= \Phi(t + \eta_2, \tilde{p}_1) + [\Phi_u(t + \eta_2, \tilde{p}_1) - \Phi_u(t + \eta_2, \tilde{q}_0)](\tilde{p}_0 - \tilde{p}_1) \\ &\geq \Phi(t + \eta_2, \tilde{p}_1) \end{aligned}$$

olur. Yani $\tilde{p}_1(t)$ ve $\tilde{q}_1(t)$ fonksiyonları (2.1.1) ile verilen BDP için eşlenmiş alt ve üst çözümler olup (C_1) kabulündeki koşulları sağlamış olurlar. Ayrıca (3.1.5) eşitsizliğinden Teorem 2.2.2'nin (H_4) hipotezi sağlanmış olur ve bu teoremin hükmü gereği her $t \in I_1$ için $\tilde{p}_1(t) \leq \tilde{q}_1(t)$ olur. Böylece her $t \in I_1$ için

$$\tilde{p}_0(t) \leq \tilde{p}_1(t) \leq \tilde{q}_1(t) \leq \tilde{q}_0(t) \quad (3.1.10)$$

sonucunu elde ederiz.

Şimdi aşağıda verilen eşlenmiş başlangıç değer problemlerini ele alalım.

$$\begin{aligned} u' &= M(t + \eta_2, \tilde{p}_1, \tilde{q}_1; v) \\ &= \Phi(t + \eta_2, \tilde{q}_1) + \Phi_u(t + \eta_2, \tilde{q}_1)(v - \tilde{q}_1), \quad u(t_0) = u_0 \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

$$\begin{aligned} v' &= N(t + \eta_2, \tilde{p}_1, \tilde{q}_1; u) \\ &= \Phi(t + \eta_2, \tilde{p}_1) + \Phi_u(t + \eta_2, \tilde{q}_1)(u - \tilde{p}_1), \quad v(t_0) = u_0 \end{aligned} \quad (3.1.12)$$

(3.1.1) ve (3.1.10) eşitsizliklerinden

$$\begin{aligned} \tilde{p}'_1 &\leq \Phi(t + \eta_2, \tilde{q}_1) \equiv M(t + \eta_2, \tilde{p}_1, \tilde{q}_1; \tilde{q}_1) \\ \tilde{q}'_1 &\geq \Phi(t + \eta_2, \tilde{p}_1) \geq \Phi(t + \eta_2, \tilde{q}_1) + \Phi_u(t + \eta_2, \tilde{q}_1)(\tilde{p}_1 - \tilde{q}_1) \\ &\equiv M(t + \eta_2, \tilde{p}_1, \tilde{q}_1; \tilde{p}_1) \\ \tilde{p}'_1 &\leq \Phi(t + \eta_2, \tilde{q}_1) \leq \Phi(t + \eta_2, \tilde{p}_1) + \Phi_u(t + \eta_2, \tilde{q}_1)(\tilde{q}_1 - \tilde{p}_1) \\ &\equiv N(t + \eta_2, \tilde{p}_1, \tilde{q}_1; \tilde{q}_1) \\ \tilde{q}'_1 &\geq \Phi(t + \eta_2, \tilde{p}_1) \equiv N(t + \eta_2, \tilde{p}_1, \tilde{q}_1; \tilde{p}_1) \end{aligned}$$

olur. (3.1.11) ve (3.1.12) denklemleri lineer olduğundan Teorem 2.2.3 gereği (3.1.11) ve (3.1.12) denklemleri ile verilen eşlenmiş BDP'nin $\tilde{p}_1 < \tilde{p}_2, \tilde{q}_2 < \tilde{q}_1$ olacak şekilde bir tek $(\tilde{p}_2, \tilde{q}_2)$ çözüm çifti vardır. O halde

$$\tilde{p}'_2 \equiv M(t + \eta_2, \tilde{p}_1, \tilde{q}_1; \tilde{q}_2), \quad \tilde{p}_2(t_0) = u_0 \quad (3.1.13)$$

$$\tilde{q}'_2 \equiv N(t + \eta_2, \tilde{p}_1, \tilde{q}_1; \tilde{p}_2), \quad \tilde{q}_2(t_0) = u_0 \quad (3.1.14)$$

yazılabilir. Burada (3.1.1) eşitsizliği kullanılırsa Φ_u azalmayan olduğundan

$$\begin{aligned} \tilde{p}'_2 &= \Phi(t + \eta_2, \tilde{q}_1) + \Phi_u(t + \eta_2, \tilde{q}_1)(\tilde{q}_2 - \tilde{q}_1) \\ &\leq \Phi(t + \eta_2, \tilde{q}_2) + \Phi_u(t + \eta_2, \tilde{q}_1)(\tilde{q}_1 - \tilde{q}_2) + \Phi_u(t + \eta_2, \tilde{q}_1)(\tilde{q}_2 - \tilde{q}_1) \\ &= \Phi(t + \eta_2, \tilde{q}_2) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\tilde{q}'_2 &= \Phi(t+\eta_2, \tilde{p}_1) + \Phi_u(t+\eta_2, \tilde{q}_1)(\tilde{p}_2 - \tilde{p}_1) \\
&\geq \Phi(t+\eta_2, \tilde{p}_2) + \Phi_u(t+\eta_2, \tilde{p}_2)(\tilde{p}_1 - \tilde{p}_2) + \Phi_u(t+\eta_2, \tilde{q}_1)(\tilde{p}_2 - \tilde{p}_1) \\
&= \Phi(t+\eta_2, \tilde{p}_2) + [\Phi_u(t+\eta_2, \tilde{p}_2) - \Phi_u(t+\eta_2, \tilde{q}_1)](\tilde{p}_1 - \tilde{p}_2) \\
&\geq \Phi(t+\eta_2, \tilde{p}_2)
\end{aligned}$$

olur. Yani $\tilde{p}_2(t)$ ve $\tilde{q}_2(t)$ fonksiyonları (2.1.1) ile verilen BDP için eşlenmiş alt ve üst çözümler olup (C_1) kabulündeki koşulları sağlamış olurlar. Ayrıca (3.1.5) eşitsizliğinden Teorem 2.2.2'nin (H_4) hipotezi sağlanmış olur ve bu teoremin hükmü gereği $t \in I_1$ için $\tilde{p}_2(t) \leq \tilde{q}_2(t)$ olur. Böylece $t \in I_1$ için

$$\tilde{p}_0(t) \leq \tilde{p}_1(t) \leq \tilde{p}_2(t) \leq \tilde{q}_2(t) \leq \tilde{q}_1(t) \leq \tilde{q}_0(t) \quad (3.1.15)$$

sonucunu elde ederiz.

Benzer işlemler tekrar edilerek I_1 üzerinde

$$\tilde{p}_0(t) \leq \tilde{p}_1(t) \leq \tilde{p}_2(t) \leq \dots \leq \tilde{p}_n(t) \leq \tilde{q}_n(t) \leq \dots \leq \tilde{q}_2(t) \leq \tilde{q}_1(t) \leq \tilde{q}_0(t) \quad (3.1.16)$$

olacak şekilde $\{\tilde{p}_n\}$ ve $\{\tilde{q}_n\}$ fonksiyon dizileri inşa edilebilir.

Şimdi tümevarım metoduyla bunu göstermek üzere kabul edelim ki $\tilde{p}_{n-1}(t)$ ve $\tilde{q}_{n-1}(t)$ fonksiyonları (C_1) kabulündeki koşulları sağlasınlar ve de

$$\tilde{p}_0(t) \leq \tilde{p}_1(t) \leq \tilde{p}_2(t) \leq \dots \leq \tilde{p}_{n-1}(t) \leq \tilde{q}_{n-1}(t) \leq \dots \leq \tilde{q}_2(t) \leq \tilde{q}_1(t) \leq \tilde{q}_0(t) \quad (3.1.17)$$

olsun. Bu kabul üzerine

$$u' = M(t+\eta_2, \tilde{p}_{n-1}, \tilde{q}_{n-1}; v), \quad u(t_0) = u_0 \quad (3.1.18)$$

$$v' = N(t+\eta_2, \tilde{p}_{n-1}, \tilde{q}_{n-1}; u), \quad v(t_0) = u_0 \quad (3.1.19)$$

eşlenmiş BDP'yi ele alalım. (C_3) koşulundaki (3.1.1) eşitsizliği (3.1.17) kabulü üzerinden uygulanırsa

$$\tilde{p}'_{n-1} \leq \Phi(t + \eta_2, \tilde{q}_{n-1}) \equiv M(t + \eta_2, \tilde{p}_{n-1}, \tilde{q}_{n-1}; \tilde{q}_{n-1})$$

$$\begin{aligned} \tilde{q}'_{n-1} &\geq \Phi(t + \eta_2, \tilde{p}_{n-1}) \geq \Phi(t + \eta_2, \tilde{q}_{n-1}) + \Phi_u(t + \eta_2, \tilde{q}_{n-1})(\tilde{p}_{n-1} - \tilde{q}_{n-1}) \\ &\equiv M(t + \eta_2, \tilde{p}_{n-1}, \tilde{q}_{n-1}; \tilde{p}_{n-1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{p}'_{n-1} &\leq \Phi(t + \eta_2, \tilde{q}_{n-1}) \leq \Phi(t + \eta_2, \tilde{p}_{n-1}) + \Phi_u(t + \eta_2, \tilde{q}_{n-1})(\tilde{q}_{n-1} - \tilde{p}_{n-1}) \\ &\equiv N(t + \eta_2, \tilde{p}_{n-1}, \tilde{q}_{n-1}; \tilde{q}_{n-1}) \end{aligned}$$

$$\tilde{q}'_{n-1} \geq \Phi(t + \eta_2, \tilde{p}_{n-1}) \equiv N(t + \eta_2, \tilde{p}_{n-1}, \tilde{q}_{n-1}; \tilde{p}_{n-1})$$

elde edilir. Yani $\tilde{p}_{n-1}(t)$ ve $\tilde{q}_{n-1}(t)$ fonksiyonları (3.1.18) ve (3.1.19) ile verilen eşlenmiş BDP'nin sırasıyla alt ve üst çözümüdürler. O halde Teorem 2.2.3'ten dolayı bu eşlenmiş BDP'nin I_1 üzerinde $\tilde{p}_{n-1}(t) \leq \tilde{p}_n(t), \tilde{q}_n(t) \leq \tilde{q}_{n-1}(t)$ olacak şekilde $(\tilde{p}_n, \tilde{q}_n)$ çözümü vardır. O halde

$$\tilde{p}'_n \equiv M(t + \eta_2, \tilde{p}_{n-1}, \tilde{q}_{n-1}; \tilde{q}_n), \quad \tilde{p}_n(t_0) = u_0 \quad (3.1.20)$$

$$\tilde{q}'_n \equiv N(t + \eta_2, \tilde{p}_{n-1}, \tilde{q}_{n-1}; \tilde{p}_n), \quad \tilde{q}_n(t_0) = u_0 \quad (3.1.21)$$

olur. Burada (3.1.1) eşitsizliği kullanılırsa Φ_u fonksiyonu u 'da azalmayan olduğundan

$$\begin{aligned} \tilde{p}'_n &= \Phi(t + \eta_2, \tilde{q}_{n-1}) + \Phi_u(t + \eta_2, \tilde{q}_{n-1})(\tilde{q}_n - \tilde{q}_{n-1}) \\ &\leq \Phi(t + \eta_2, \tilde{q}_n) + \Phi_u(t + \eta_2, \tilde{q}_{n-1})(\tilde{q}_{n-1} - \tilde{q}_n) + \Phi_u(t + \eta_2, \tilde{q}_{n-1})(\tilde{q}_n - \tilde{q}_{n-1}) \\ &= \Phi(t + \eta_2, \tilde{q}_n) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \tilde{q}'_n &= \Phi(t + \eta_2, \tilde{p}_{n-1}) + \Phi_u(t + \eta_2, \tilde{q}_{n-1})(\tilde{p}_n - \tilde{p}_{n-1}) \\ &\geq \Phi(t + \eta_2, \tilde{p}_n) + \Phi_u(t + \eta_2, \tilde{p}_n)(\tilde{p}_{n-1} - \tilde{p}_n) + \Phi_u(t + \eta_2, \tilde{q}_{n-1})(\tilde{p}_n - \tilde{p}_{n-1}) \\ &= \Phi(t + \eta_2, \tilde{p}_n) + [\Phi_u(t + \eta_2, \tilde{p}_n) - \Phi_u(t + \eta_2, \tilde{q}_{n-1})](\tilde{p}_{n-1} - \tilde{p}_n) \\ &\geq \Phi(t + \eta_2, \tilde{p}_n) \end{aligned}$$

elde edilir. Yani $\tilde{p}_n(t)$ ve $\tilde{q}_n(t)$ fonksiyonları (2.1.1) ile verilen BDP için eşlenmiş alt ve üst çözümdür. Ayrıca (3.1.5) eşitsizliğinden Teorem 2.2.2'nin (H_4) hipotezi sağlanmış olur ve bu teoremin hükmü gereği $t \in I_1$ için $\tilde{p}_n(t) \leq \tilde{q}_n(t)$ olur.

Böylece (3.1.15) eşitsizliği sağlanmış olur. Bu şekilde inşa edilen $\{\tilde{p}_n\}$ ve $\{\tilde{q}_n\}$ fonksiyon dizilerinin her bir terimine karşılık gelen fonksiyonları tümü (C_1) koşulunu sağlar. Ayrıca standart tekniklerden gösterilebilir ki $\{\tilde{p}_n\}$ ve $\{\tilde{q}_n\}$ fonksiyon dizileri

$$\tilde{u}'(t) = \Phi(t + \eta_2, \tilde{u}), \quad \tilde{u}(t_0) = u_0 \quad (3.1.22)$$

denkleminin bir tek çözümü olan $\tilde{u}(t)$ fonksiyonuna düzgün ve monoton olarak yakınsarlar. $s = t + \eta_2$ değişken değişimi yapılırsa (3.1.22) ile verilen BDP şu hali alır.

$$u'(t) = \Phi(s, u), \quad u(s_0) = u_0 \quad (3.1.23)$$

Son olarak yakınsamanın kuadratik olduğunu gösterelim. Bunun için $\tilde{p}(t) \leq u(t) \leq \tilde{q}(t)$ olduğunu dikkate alarak şu iki fonksiyonu tanımlayalım.

$$a_n(t) = \tilde{u}(t) - \tilde{p}_n(t) \quad (3.1.24)$$

$$b_n(t) = \tilde{q}_n(t) - \tilde{u}(t) \quad (3.1.25)$$

Burada $a_n(t_0) = b_n(t_0) = 0$ olduğu aşıkardır.

(C_3) kabulü ve ODT gereğince (3.1.1) eşitsizliği (3.1.20) ve (3.1.21) eşitlikleri ile birlikte kullanılırsa;

$$\begin{aligned} a_n'(t) &= \tilde{u}'(t) - \tilde{p}_n'(t) \\ &= \Phi(t + \eta_2, \tilde{u}(t)) - M(t + \eta_2, \tilde{p}_{n-1}, \tilde{q}_{n-1}; \tilde{q}_n) \\ &= \Phi(t + \eta_2, \tilde{u}) - [\Phi(t + \eta_2, \tilde{q}_{n-1}) + \Phi_u(t + \eta_2, \tilde{q}_{n-1})(\tilde{q}_n - \tilde{q}_{n-1})] \\ &= [\Phi(t + \eta_2, \tilde{u}) - \Phi(t + \eta_2, \tilde{q}_{n-1})] - \Phi_u(t + \eta_2, \tilde{q}_{n-1})(b_n - b_{n-1}) \\ &= -\Phi_u(t + \eta_2, \xi_1)b_{n-1} - \Phi_u(t + \eta_2, \tilde{q}_{n-1})(b_n - b_{n-1}) \\ &\leq [-\Phi_u(t + \eta_2, \tilde{u}) + \Phi_u(t + \eta_2, \tilde{q}_{n-1})]b_{n-1} - \Phi_u(t + \eta_2, \tilde{q}_{n-1})b_n \\ &\leq R|\tilde{q}_{n-1} - \tilde{u}|b_{n-1} - \Phi_u(t + \eta_2, \tilde{q}_{n-1})b_n \end{aligned}$$

$$= R b_{n-1}^2 - \Phi_u(t + \eta_2, \tilde{q}_{n-1}) b_n$$

buradan

$$a'_n(t) \leq R b_{n-1}^2 - \Phi_u(t + \eta_2, \tilde{q}_{n-1}) b_n \quad (3.1.26)$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $\tilde{u}(t) \leq \xi_1 \leq \tilde{q}_{n-1}(t)$ 'dır. Ayrıca Ω kompakt küme ve bu küme üzerinde Φ_u kısmi türevi sürekli olduğundan her $(t, u) \in \Omega$ için $|\Phi_u(t + \eta_2, q_{n-1})| \leq P$ ve (C_3) kabulü gereği $|\Phi_u(t, u_1) - \Phi_u(t, u_2)| \leq R|u_1 - u_2|$ olacak şekilde $P, R > 0$ sabitleri vardır.

Sonuç olarak (3.1.26) diferensiyel eşitliği aşağıdaki eşitsizliğe dönüşür.

$$a'_n \leq P b_n + R b_{n-1}^2 \quad (3.1.27)$$

Şimdi de (3.1.24) ile verilen eşitlik için benzer işlemleri uygulayalım.

$$\begin{aligned} b'_n(t) &= \tilde{q}'_n(t) - \tilde{u}'(t) \\ &= N(t + \eta_2, \tilde{p}_{n-1}, \tilde{q}_{n-1}; \tilde{p}_n) - \Phi(t + \eta_2, \tilde{u}(t)) \\ &= [\Phi(t + \eta_2, \tilde{p}_{n-1}) + \Phi_u(t + \eta_2, \tilde{q}_{n-1})(\tilde{p}_n - \tilde{p}_{n-1})] - \Phi(t + \eta_2, \tilde{u}) \\ &= [\Phi(t + \eta_2, \tilde{p}_{n-1}) - \Phi(t + \eta_2, \tilde{u})] + \Phi_u(t + \eta_2, \tilde{q}_{n-1})(a_{n-1} - a_n) \\ &= \Phi_u(t + \eta_2, \xi_2)(\tilde{p}_{n-1} - \tilde{u}) + \Phi_u(t + \eta_2, \tilde{q}_{n-1})(a_{n-1} - a_n) \\ &= \Phi_u(t + \eta_2, \xi_2)(-a_{n-1}) + \Phi_u(t + \eta_2, \tilde{q}_{n-1})(a_{n-1} - a_n) \\ &\leq [-\Phi_u(t + \eta_2, \tilde{p}_{n-1}) + \Phi_u(t + \eta_2, \tilde{q}_{n-1})] a_{n-1} - \Phi_u(t + \eta_2, \tilde{q}_{n-1}) a_n \\ &= |\tilde{q}_{n-1} - \tilde{p}_{n-1}| R a_{n-1} - \Phi_u(t + \eta_2, \tilde{q}_{n-1}) a_n \\ &= R |a_{n-1} + b_{n-1}| a_{n-1} - \Phi_u(t + \eta_2, \tilde{q}_{n-1}) a_n \\ &= R a_{n-1}^2 + R b_{n-1} a_{n-1} - \Phi_u(t + \eta_2, \tilde{q}_{n-1}) a_n \end{aligned}$$

buradan

$$b'_n(t) \leq R a_{n-1}^2 + R b_{n-1} a_{n-1} - \Phi_u(t + \eta_2, \tilde{q}_{n-1}) a_n \quad (3.1.28)$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $\tilde{p}_{n-1}(t) \leq \xi_2 \leq \tilde{u}(t)$ olup yukarıda seçilmiş olan $P, R > 0$ sabitleri uygun şekilde kullanılırsa (3.1.28) diferensiyel eşitsizliği aşağıdaki eşitsizliğe dönüşür.

$$b'_n \leq P a_n + R a_{n-1}^2 + R a_{n-1} b_{n-1} \quad (3.1.29)$$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için $(\alpha - \beta)^2 \geq 0$ ve dolayısıyla $\frac{\alpha^2}{2} + \frac{\beta^2}{2} \geq \alpha\beta$ olduğu kullanılarak bu eşitsizlik aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$b'_n \leq P a_n + \frac{3R}{2} a_{n-1}^2 + \frac{R}{2} b_{n-1}^2 \quad (3.1.30)$$

(3.1.27) ve (3.1.30) diferensiyel eşitsizlikleri ile oluşturulacak sistem vektörel formda yazılırsa;

$$v_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}, \lambda = \begin{pmatrix} a_n^2 \\ b_n^2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & P \\ P & 0 \end{pmatrix} \text{ ve } D = \begin{pmatrix} 0 & R \\ \frac{3R}{2} & \frac{R}{2} \end{pmatrix} \text{ olmak üzere}$$

$$v'_n \leq C v_n + D \lambda \quad (3.1.31)$$

eşitsizliği elde edilir. Sonuç 2.1.2 gereği

$$0 \leq v_n \leq \int_{t_0}^t e^{C(t-s)} D \lambda(s) ds, \quad t \in I_3 \quad (3.1.32)$$

yazılabilir. Buradan

$$\max_I |v_n(t)| \leq C^{-1} e^{CT} B \max_I |v_{n-1}(t)|^2 \quad (3.1.33)$$

elde edilir ve ispat sonuçlanır.

Sonuç 3.1: Teorem 3.2. ile verilen tüm hipotezler $s_0 = t_0$ için sağlansın. Bu takdirde Teorem 3.2.'nin hükmü geçerlidir.

İspat: İspat için $\tilde{q}_0(t) = q(t + \eta_1)$, $\tilde{p}_0(t) = p(t)$ ve $\tilde{u}(t) = u(t)$ seçilmesi ve Teorem 3.2.'nin ispatındaki proseslerin izlenmesi yeterli olacaktır.

Sonuç 3.2: Teorem 3.2. ile verilen tüm hipotezler $s_0 = \tau_0$ için sağlansın. Bu takdirde Teorem 3.2.'nin hükmü geçerlidir.

İspat: İspat için $\tilde{q}_0(t) = q(t)$, $\tilde{p}_0(t) = p(t - \eta_1)$ ve $\tilde{u}(t) = u(t)$ seçilmesi ve Teorem 3.2.'nin ispatındaki proseslerin izlenmesi yeterli olacaktır.

SONUÇ

Tanım aralıkları birbirinden farklı eşlenmiş alt ve üst çözümlerle verilen bir başlangıç değer probleminin tek çözümünü alttan ve üstten sınırlayan ve bu çözüme yakınsayan iki ayrı fonksiyon dizisinin kuasilineerizasyon yöntemiyle oluşturulabilmesi için denklemin sağ tarafında bulunan Φ fonksiyonunun konveks olma şartı zayıflatılmıştır. KLM'nin uygulanması için başlangıçta seçilen eşlenmiş alt ve üst çözüm fonksiyonlarının, artmayan olması durumunda arzu edilen sonuçlara ulaşılmıştır. Söz konusu koşullar altında kuasilineerizasyon yöntemi uygulanarak elde edilen monoton alt ve üst çözüm fonksiyon dizilerinin problemin çözümüne düzgün ve kuadratik yakınsadığı gösterilmiştir.

KAYNAKÇA

- [1] Lakshmikantham, V., and Leela, S., *Differential and Integral Inequalities Vol. I and Vol. II*, Academic Press, New York 1969.
- [2] R.E. Bellman, R.E. Kalaba, *Quasilinearization and nonlinear boundary-value problems*, American Elsevier, 1965.
- [3] Lakshmikantham, *An extension of the method of quasilinearization*, J Optim Theory Appl, 82 (1994), no. 2, 315–321.
- [4] V. Lakshmikantham, *Further improvement of generalized quasilinearization method*, Nonlinear Anal Theory Methods Appl, 27 (1996), 223–227.
- [5] V. Lakshmikantham, A.S. Vatsala, *Generalized Quasilinearization for Nonlinear Problems*, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht, 1998. <https://doi.org/10.1007/978-1-4757-2874-3>.
- [6] Belman, R.. *Method of Nonlinear Analysis, Vol. I and Vol. II* , Academic Press, New York 1973.
- [7] Krivic, R. and Mandelzweig, V.B., *Quasilinearization approach to quantum mechanics*. Computer Physics Communications 152 (2003) 165–174
- [8] S. Mt Aznam, N.A. Che Ghani, M.S.H. Chowdhury, *A numerical solution for nonlinear heat transfer of fin problems using the Haar wavelet quasilinearization method*, Results Phys, 14 (2019), 1-8. <https://doi.org/10.1016/j.rinp.2019.102393>.
- [9] V.B. Mandelzweig, F. Tabakin, *Quasilinearization approach to nonlinear problems in physics with application to nonlinear ODEs*, Comput Phys Commun, 141 (2001), 268-281. [https://doi.org/10.1016/S0010-4655\(01\)00415-5](https://doi.org/10.1016/S0010-4655(01)00415-5).
- [10] M.N. Koleva, L.G. Vulkov, *Two-grid quasilinearization approach to ODEs with applications to model problems in physics and mechanics*, Comput Phys Commun, 181 (2010), 663–670. <https://doi.org/10.1016/j.cpc.2009.11.015>.
- [11] M. Razavy, V.J. Cote, *Quasilinearization method applied to multidimensional quantum tunneling*, Phys Rev A (Coll Park), 49(1994), 2266. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.49.2266>.
- [12] V.B. Mandelzweig, *Quasilinearization method and its verification on exactly solvable models in quantum mechanics*, J Math Phys, 40 (1999), 6266–6291. <https://doi.org/10.1063/1.533092>.
- [13] E.S. Lee, *Quasilinearization and invariant imbedding: with applications to chemical engineering and adaptive control*, Elsevier, 41 (2016).

- [14] Ş. Yüzbaşı, M. Izadi, *Bessel-quasilinearization technique to solve the fractional-order HIV-1 infection of CD4+ T-cells considering the impact of antiviral drug treatment*, Appl Math Comput, 431 (2022), 1-14. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2022.127319>.
- [15] M. Magodora, H. Mondal, P. Sibanda, *Dual solutions of a micropolar nanofluid flow with radiative heat mass transfer over stretching/shrinking sheet using spectral quasilinearization method*, Multidiscipline Modeling in Materials and Structures, 16(2020), 238-255. <https://doi.org/10.1108/MMMS-01-2019-0028>.
- [16] E.S. Lee, K.M. Wang, *Quasilinearization in biological systems modeling*, in: Modeling and Control of Systems, 121 (2006), 413-421. <https://doi.org/10.1007/bfb0041208>.
- [17] H.M. Srivastava, F.A. Shah, M. Irfan, *Generalized wavelet quasilinearization method for solving population growth model of fractional order*, Math Methods Appl Sci, 43 (2020), 8753–8762.
- [18] F.A. Shah, M. Irfan, K.S. Nisar, *Gegenbauer wavelet quasi-linearization method for solving fractional population growth model in a closed system*, Math Methods Appl Sci, 45 (2022), 3605–3623.
- [19] E. Fathizadeh, R. Ezzati, K. Maleknejad, *Hybrid rational Haar wavelet and block pulse functions method for solving population growth model and Abel integral equations*, Mathematical Problems in Engineering, 2017 (2017), 1-7. <https://doi.org/10.1155/2017/2465>
- [20] K. Parand, H. Yousefi, M. Delkhosh, A. Ghaderi, *A novel numerical technique to obtain an accurate solution to the Thomas-Fermi equation*, Eur Phys J Plus, 131 (2016), 1-16. <https://doi.org/10.1140/epjp/i2016-16228-x>.
- [21] B. Ahmad, A. Alsaedi, B.S. Alghamdi, *Analytic approximation of solutions of the forced Duffing equation with integral boundary conditions*, Nonlinear Anal Real World Appl, 9 (2008), 1727-1740. <https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2007.05.005>.
- [22] M. Izadi, H.M. Srivastava, *Generalized Bessel quasilinearization technique applied to Bratu and Lane-Emden-type equations of arbitrary order*, Fractal and Fractional, 5 (2021). 179. <https://doi.org/10.3390/fractalfract5040179>
- [23] Ladde, G.S., Lakshmikantham, V., and Vatsala A.S., *Monotone Iterative Techniques for Nonlinear Differential Equations*, Pitman, Boston 1985.
- [24] Lakshmikantham, V., and Vatsala A.S., *Differential inequalities with initial time difference and application*. Accepted for publication in Journal of Inequalities and Applications. (to appear)
- [25] Lakshmikantham, V. and Vatsala A.S., *Theory of differential and integral inequalities with initial time difference and applications*. Accepted for publication in Journal of Inequalities and Applications. (to appear)

- [26] Lakshmikantham, V., Leela, S. and Vasundhara D., J., An other approach to the theory of differential inequalities relative to changes in the initial times. (to appear)
- [27] Köksal, S. and Yakar, C., Generalized Quasilinearization Method with Initial Time Diference. *Jornal of Engineering simulation* (to appear).
- [28] C. Yakar, A. Yakar, *An Extension of the Quasilinearization Method with Initial Time Difference, Dynamics of continuous, discrete and impulsive systems. Ser A Math Anal*, 14 (2007), 275-279.
- [29] J. Nieto, *Generalized quasilinearization method for a second order ordinary differential equation with Dirichlet boundary conditions*, Proceedings of the American Mathematical Society, 125 (1997), no. 9, 2599–2604.
- [30] A. Cabada, J.J. Nieto, *Quasilinearization and rate of convergence for higher-order nonlinear periodic boundary-value problems*, J Optim Theory Appl, 108 (2001), 97–107.
- [31] B. Ahmad, J.J. Nieto, N. Shahzad, *The Bellman–Kalaba–Lakshmikantham quasilinearization method for neumann problems*, J Math Anal Appl, 257 (2001), 356–363.
- [32] B. Hu, Z. Wang, M. Xu, D. Wang, *Quasilinearization method for an impulsive integro-differential system with delay*, Mathematical Biosciences and Engineering, 19 (2022), 612-623. <https://doi.org/10.3934/mbe.2022027>.
- [33] B. Ahmad, J.J. Nieto, N. Shahzad, *Generalized quasilinearization method for mixed boundary value problems*, Appl Math Comput, 133 (2002), 423–429.
- [34] F.M. Atici, P.W. Eloe, B. Kaymakçalan, *The quasilinearization method for boundary value problems on time scales*, J Math Anal Appl, 276 (2002), 357–372. [https://doi.org/10.1016/S0022-247X\(02\)00466-3](https://doi.org/10.1016/S0022-247X(02)00466-3).
- [35] M.A. El-Gebeily and D. O'Regan, *Existence and quasilinearization for a class of nonlinear elliptic second order partial differential equations*, Dynamic Systems and Applications, 17 (2008), 445-458.
- [36] T. Jankowski, *The generalized quasilinearization for integro-differential equations of volterra type on time scales*, Rocky Mt J Math, 37 (2007), no. 3. <https://doi.org/10.1216/rmj/1183990677>.
- [37] C. Yakar, M. Arslan, *Quasilinearization method for causal terminal value problems involving riemann-liouville fractional derivatives*, Electronic Journal of Differential Equations, 2019 (2019), no. 11, 1–11.
- [38] P. Eloe, J. Jonnalagadda, *Quasilinearization applied to boundary value problems at resonance for riemann-liouville fractional differential equations*, Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series S, 13 (2020). <https://doi.org/10.3934/dcdss.2020220>.

- [39] G. Su, L. Lu, B. Tang, Z. Liu, *Quasilinearization technique for solving nonlinear Riemann-Liouville fractional-order problems*, Appl Math Comput, 378 (2020). <https://doi.org/10.1016/j.amc.2020.125199>.
- [40] P. Wang, C. Li, J. Zhang, T. Li, *Quasilinearization method for first-order impulsive integro-differential equations*, Electronic Journal of Differential Equations, 2019 (2019), no. 46, 1–14.
- [41] S. Torkaman, M. Heydari, G.B. Loghmani, *A combination of the quasilinearization method and linear barycentric rational interpolation to solve nonlinear multi-dimensional Volterra integral equations*, Math Comput Simul, 208 (2023), 366-397 <https://doi.org/10.1016/j.matcom.2023.01.039>.
- [42] M. Delkhosh, K. Parand, *A hybrid numerical method to solve nonlinear parabolic partial differential equations of time-arbitrary order*, Computational and Applied Mathematics, 38 (2019), no. 76. <https://doi.org/10.1007/s40314-019-0840-6>.
- [43] E. Najafi, *Nyström-quasilinearization method and smoothing transformation for the numerical solution of nonlinear weakly singular Fredholm integral equations*, J Comput Appl Math, 368 (2020), 1-13. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2019.112538>.
- [44] V.K. Sinha, P. Maraju, *New Development of Variational Iteration Method Using Quasilinearization Method for Solving Nonlinear Problems*, Mathematics, 11(2023), no. 4, 935. <https://doi.org/10.3390/math11040935>.
- [45] Z. Denton, J.D. Ramírez, *Quasilinearization method for finite systems of nonlinear RL fractional differential equations*, Opuscula Mathematica, 40 (2020), no. 6, 667–683. <https://doi.org/10.7494/OpMath.2020.40.6.667>.
- [46] V. Lakshmikantham, S. Leela, J.V. Devi, *Stability criteria for solutions of differential equations relative to initial time difference*, Nonlinear Analysis and Appl.(to Appear), (1999).
- [47] V. Lakshmikantham, A.S. Vatsala, *Differential inequalities with initial time difference and applications*, J Inequal Appl, 3 (1999), 233-244. 586479.
- [48] V. Lakshmikantham, A.S. Vatsala, *Theory of differential and integral inequalities with initial time difference and applications*, Analytic and Geometric Inequalities and Applications, (1999), 191–203.
- [49] E.S. Lee, *Quasilinearization, difference approximation, and nonlinear boundary value problems*, AIChE Journal, 14 (1968), no. 3, 490-496. <https://doi.org/10.1002/aic.690140327>.
- [50] A. Yakar, *Quasilinearization method for nonlinear equations*, Master Thesis, Gebze Institute of Technology, 2004

- [51] A. Yakar, *Initial time difference quasilinearization for Caputo Fractional Differential Equations*, *Adv Differ Equ*, 2012 (2012), no. 92. <https://doi.org/10.1186/1687-1847-2012-92>.
- [52] Pandey, R. K., & Tomar, S. (2021). *An effective scheme for solving a class of nonlinear doubly singular boundary value problems through quasilinearization approach*. *Journal of Computational and Applied mathematics*, 392, 113411.
- [53] Alanazi, K., Alshammari, M., & Eloe, P. (2021). *Quasilinearization and boundary value problems at resonance*. *Georgian Mathematical Journal*, 28(2), 173-184.
- [54] Hu, B., Wang, Z., Xu, M., & Wang, D. (2022). *Quasilinearization method for an impulsive integro-differential system with delay*. *Mathematical Biosciences. And Engineering*, 19(1), 612-623.
- [55] Sinha, V. K., & Maroju, P. (2023). *New development of variational iteration method using quasilinearization method for solving nonlinear problems*. *Mathematics*, 11(4), 935.
- [56] Izadi, M., Yüzbaşı, Ş., & Noeiaghdam, S. (2021). *Approximating solutions of non-linear Troesch's problem via an efficient quasi-linearization Bessel approach*. *Mathematics*, 9(16), 1841.
- [57] Almusawi, Q. A., & Najafi, E. (2024). *Quasilinearization-Collocation Method for the Numerical Solution of Nonlinear Fractional Volterra Integro-Differential Equations With Logarithmic Weakly Singular Kernel* *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 2024(1), 8218632.
- [58] M.M. Nefale, *Overlapping multidomain paired quasilinearization methods for solving boundary layer flow problems*, Master Thesis, Computer Science and Applied Mathematics, University of the Witwatersrand, 2024
- [59] C. Yakar, A. Yakar, *Monotone iterative technique with initial time difference for fractional differential equations*, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 40 (2011), no. 2, 331 – 340.
- [60] A. Yakar, H. Kutlay, *Monotone iterative technique via initial time different coupled lower and upper solutions for fractional differential equations*, *Filomat*, 31 (2017), no. 4, 1031-1039. <https://doi.org/10.2298/FIL1704031Y>.
- [61] M. Alhussem, *Quasilinearization technique for an integro differential equation with initial time difference*, Master Thesis, Graduate Education Institute of Tokat Gazosmanpasa University, 2024
- [62] S.G. Deo, V. Raghavendra, R. Kar, V. Lakshmikantham, *Textbook of ordinary differential equations*, McGraw-Hill Education, New Delhi, 1997.
- [63] R.P. Agarwal, D. O'Regan, *An Introduction to Ordinary Differential Equations*, Springer, New York, 2008.

[64] W. R. Wade, *An Introduction to Analysis, Global Edition*, Pearson Higher Ed, New Jersey, 2021.

[65] S. Ö. Kaptanođlu, *Analiz I*, Ankara: Nobel Akademik Yayıncılık, 2022, s. 282.



ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı

Kişisel Bilgiler

İletişim Bilgileri

Öğrenim Bilgileri

İş Deneyimleri
