T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İKİNCİ MERTEBEDEN BİR OPERATÖR DENKLEMİN DÜZENLİ İZİ

LEYLA ÖZEN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
MATEMATİK PROGRAMI

DANIŞMAN
DOÇ. DR. SEDA KIZILBUDAK ÇALIŞKAN

İSTANBUL, 2018

T.C.

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İKİNCİ MERTEBEDEN BİR OPERATÖR DENKLEMİN DÜZENLİ İZİ

Leyla ÖZEN tarafından hazırlanan tez çalışması 28.06.2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Doç. Dr. Seda KIZILBUDAK ÇALIŞKAN

Yıldız Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Doç. Dr. Seda KIZILBUDAK ÇALIŞKAN

Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Prof. Dr. Ömek GÖK

Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Prof. Dr. Erhan ÇALIŞKAN

İstanbul Üniversitesi _____

ÖNSÖZ

Bu tez çalışmasının plânlanması, yürütülmesi ve oluşumu aşamasında, sonsuz ilgi ve desteği ile her zaman yanımda olan çok değerli hocam, Sayın Doç. Dr. Seda KIZILBUDAK ÇALIŞKAN'a her türlü yardımından dolayı teşekkür ve saygılarımı sunarım.

Eğitim hayatım ve çalışmalarım boyunca, maddi ve manevi destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan sevgili aileme teşekkür ederim.

Haziran, 2018

Leyla ÖZEN

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ŞEKİL LİSTESİ v

ÖZET vi

ABSTRACT vii

BÖLÜM 1

GİRİŞ 1

1.1 Literatür Özeti 1

1.2 Tezin Amacı 2

1.3 Bulgular 2

BÖLÜM 2

ÖN BİLGİLER 7

BÖLÜM 3

BAZI SINIRLANDIRMALAR 15

BÖLÜM 4

SONUÇ ve ÖNERİLER 23

4.1 Düzenli İzin Ait Hesaplamalar 23

KAYNAKLAR 25

ÖZGEÇMİŞ 27

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 2. 1 Çubuğun Düz Hali 11
Şekil 2. 2 Çubuğun Bükümlü Halleri 12

İKİNCİ MERTEBEDEN BİR OPERATÖR DENKLEMİN DÜZENLİ İZİ

Leyla ÖZEN

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Seda KIZILBUDAK ÇALIŞKAN

Bu çalışmada

$ly: -y'' + p(x)y$

diferansiyel ifadesi ve

$y(0) + y(\pi) = 0$

$y'(0) + y'(\pi) = 0$

anti periyodik sınır koşulları ile oluşturulmuş kendine eş bir operatörün özdeğerleri incelenerek, düzenli izi için bir formül bulunmuştur.

Anahtar Kelimeler: Özdeğer, ortonormal özfonksiyon, düzenli iz

ABSTRACT

THE REGULARIZED TRACE OF A SECOND ORDER OPERATOR EQUATION

Leyla ÖZEN

Department of Mathematics

MSc. Thesis

Adviser: Assoc. Prof. Seda KIZILBUDAK ÇALIŞKAN

In this study, firstly, we examined the eigenvalues of self-adjoint operator which is formed by

$ly: -y'' + p(x)y$

differential expression and

$y(0) + y(\pi) = 0$

$y'(0) + y'(\pi) = 0$

anti-periodic boundary condition. Then, we find the regularized trace formula for this operator.

Keywords: Eigenvalue, orthonormal eigenfunction, regularized trace

BÖLÜM 1

GİRİŞ

1.1 Literatür Özeti

1953 yılında skaler diferansiyel operatörlerin düzenli izi ile ilgili çalışmalar Gelfand ve Levitan tarafından [1] başlatılmış ve çalışmalar Dikiy [2] - [3], Halberg ve Kramer [4], Sadovniçiy [5], Fulton [6] tarafından devam ettirilmiştir. Son çalışmalardan biri de Bayramov, Uslu ve Çalışkan'a [7] aittir.

Gelfand ve Levitan 1953 yılında

$$-y'' + [q(x) - \lambda]y(x) = 0$$

$$y'(0) - hy(0) = 0$$

$$y'(\pi) + Hy(\pi) = 0$$

Sturm- Liouville problemini ele almış ve bunun yanı sıra

$$-y'' - \mu y(x) = 0$$

denklemini de aynı sınır koşullarıyla göz önüne alarak,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - \mu_n)$$

serisinin yakınsaklığını göstermiş ve böylece serinin toplamını

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - \mu_n) = \frac{1}{4}[q(0) + q(\pi)] + hH$$

şeklinde ifade ederek, diferansiyel operatörün düzenli izi için bir formül bulmuştur.

Operatör katsayılı diferansiyel operatörlerin düzenli izleri ile ilgili çalışmalar da 1976 yılında Halilova [8] ile sonrasında Bayramoğlu, Adıgüzelov [9], Maksudov [10] ile devam ettirilmiştir.

1.2 Tezin Amacı

$$ly: -y'' + p(x)y \tag{1.1}$$

diferansiyel ifadesi ve

$$y(0) + y(\pi) = 0 \quad , \quad y'(0) + y'(\pi) = 0 \tag{1.2}$$

anti periyodik sınır şartları ile belirlenen kendine eş operatör L_y ve

$$l_0 y: -y'' \tag{1.3}$$

diferansiyel ifadesi ve aynı anti periyodik sınır şartlarıyla oluşturulan kendine eş operatör L_0 olmak üzere L_0 operatörünün spektrumundan yararlanarak L_y operatörünün spektrumu için asimptotik formül ifade edilerek

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_n - \mu_n)$$

toplamının yakınsaklığı incelenecek ve dolayısıyla düzenli iz için bir formül bulunacaktır. Düzenli iz formülleri ile ters problemlerin çözümüne katkı sağlanacaktır.

1.3 Bulgular

$$ly: -y'' + p(x)y \tag{1.4}$$

$$l_o y: -y''$$

diferansiyel ifadeleri ve aynı

$$y(0) + y(\pi) = 0$$

$$y'(0) + y'(\pi) = 0 \tag{1.5}$$

sınır şartları ile oluşturulan kendine eş operatörler sırasıyla L_y ve L_o olsun. L_y'nin özdeğerlerini $\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n \leq \cdots$ ile bu özdeğerlere karşılık gelen ortonormal özfonksiyonlar ise $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n, \ldots$ olsun.

L_0 operatörünü göz önüne alıp incelersek,

$-y'' = \mu y$ denklemini çözdüğümüzde

$\boldsymbol{\mu < 0}$ olması durumunda ;

Karakteristik denklem :

$$r^2 = \mu$$

$$r_{1,2} = \pm\sqrt{\mu}$$

$$y = c_1 e^{\sqrt{\mu}x} + c_2 e^{-\sqrt{\mu}x}$$

$$y' = c_1\sqrt{\mu} e^{\sqrt{\mu}x} - c_2\sqrt{\mu} e^{-\sqrt{\mu}x}$$

$$y(0) = c_1 + c_2$$

$$y(\pi) = c_1 e^{\sqrt{\mu}\pi} + c_2 e^{-\sqrt{\mu}\pi}$$

$$y'(0) = c_1\sqrt{\mu} - c_2\sqrt{\mu}$$

$$y'(\pi) = c_1\sqrt{\mu} e^{\sqrt{\mu}\pi} - c_2\sqrt{\mu} e^{-\sqrt{\mu}\pi}$$

$$y(0) = -y(\pi) \Rightarrow c_1 + c_2 = -c_1 e^{\sqrt{\mu}\pi} - c_2 e^{-\sqrt{\mu}\pi}$$

$$y'(0) = -y'(\pi) \Rightarrow c_1\sqrt{\mu} - c_2\sqrt{\mu} = -c_1\sqrt{\mu} e^{\sqrt{\mu}\pi} + c_2\sqrt{\mu} e^{-\sqrt{\mu}\pi}$$

$$c_1 - c_2 = -c_1 e^{\sqrt{\mu}\pi} + c_2 e^{-\sqrt{\mu}\pi}$$

1. ve 2. eşitlikten;

$$2c_1 = -2c_1 e^{\sqrt{\mu}\pi}$$

ve $e^{\sqrt{\mu}\pi} \neq 0$ olmak üzere $c_1 = 0$ ve buradan $c_2 = 0$ dır. Dolayısıyla çözüm olmaz.

$\boldsymbol{\mu = 0}$ olması durumunda;

Karakteristik denklem :

$r^2 = 0$

$y = c_1 x + c_2$

$y' = c_1$

$y(0) = c_2$

$y(\pi) = c_1\pi + c_2$

$y'(0) = c_1$

$y'(\pi) = c_1$

$y(0) = -y(\pi) \Rightarrow c_2 = -c_1\pi - c_2 \Rightarrow 2c_2 = -c_1\pi$

$y'(0) = -y'(\pi) \Rightarrow c_1 = -c_1 \Rightarrow 2c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = 0$

Buradan $c_2 = 0$ dır. Dolayısıyla çözüm olmaz.

$\boldsymbol{\mu > 0}$ olması durumunda;

$L_0 = -y'' = \mu y$

Karakteristik denklem :

$-r^2 - \mu = 0$

$r^2 + \mu = 0$

$r_{1,2} = \pm\sqrt{\mu}i$

$y = c_1 \cos\sqrt{\mu}x + c_2 \sin\sqrt{\mu}\,x$

$y' = -c_1\sqrt{\mu}\sin\sqrt{\mu}\,x + c_2\sqrt{\mu}\cos\sqrt{\mu}\,x$

$y(0) = c_1$

$y(\pi) = c_1 \cos\sqrt{\mu}\pi + c_2 \sin\sqrt{\mu}\,\pi$

$y'(0) = \sqrt{\mu}c_2$

$y'(\pi) = -c_1\sqrt{\mu}\sin\sqrt{\mu}\,\pi + c_2\sqrt{\mu}\cos\sqrt{\mu}\,\pi$

$y(0) = -y(\pi) \Rightarrow c_1 = -c_1\cos\sqrt{\mu}\pi - c_2\sin\sqrt{\mu}\,\pi$

$c_1(1+\cos\sqrt{\mu}\,\pi) + c_2\sin\sqrt{\mu}\pi = 0$

$\sqrt{\mu}c_2 = c_1\sqrt{\mu}\sin\sqrt{\mu}\,\pi - c_2\sqrt{\mu}\cos\sqrt{\mu}\,\pi$

$\sqrt{\mu}c_2(1+\cos\sqrt{\mu}\,\pi) - c_1\sqrt{\mu}\sin\sqrt{\mu}\,\pi = 0$

1. eşitlikten;

$c_1(1+\cos\sqrt{\mu}\,\pi) + c_2\sin\sqrt{\mu}\pi = 0 \Rightarrow c_2 = \frac{-c_1(1+\cos\sqrt{\mu}\pi)}{\sin\sqrt{\mu}\pi}$ dir.

$\sqrt{\mu}c_2(1+\cos\sqrt{\mu}\,\pi) - c_1\sqrt{\mu}\sin\sqrt{\mu}\,\pi = 0$ eşitliğinde yerine koyarsak

$-\sqrt{\mu}c_1\frac{(1+\cos\sqrt{\mu}\,\pi)^2}{\sin\sqrt{\mu}\pi} - c_1\sqrt{\mu}\sin\sqrt{\mu}\,\pi = 0$

$-c_1\sqrt{\mu}\left[\left(1+2\cos\sqrt{\mu}\,\pi + \cos^2\sqrt{\mu}\pi + \sin^2\sqrt{\mu}\pi\right)\right] = 0$

$2c_1\sqrt{\mu}\left(1+\cos\sqrt{\mu}\,\pi\right) = 0$

$1+\cos\sqrt{\mu}\,\pi = 0$

$\cos\sqrt{\mu}\,\pi = -1$

$\sqrt{\mu}\pi = (2k+1)\pi \qquad k = 0, 1, \ldots$

$\mu = (2k+1)^2 \qquad k = 0, 1, \ldots$

$\mu_k = \begin{cases} k^2, & k\ tek \\ (k-1)^2, & k\ çift \end{cases}$

olmak üzere , L_0 operatörünün spektrumu $\{(2n+1)^2\}_{n=0}^{\infty}$ şeklindedir. Bu dizinin her elemanı katlılığı iki olan bir özdeğerdir.

L_0 operatörünün özdeğerlerini $\{\mu_k\}$ ile gösterirsek; o zaman

$$\mu_k = \begin{cases} k^2, & k\ tek \\ (k-1)^2, & k\ çift \end{cases} \qquad (k = 1,2, \dots)$$

şeklindedir.

Bunlara karşılık gelen ortonormal özfonksiyonlar da,

$$\psi_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin x, \quad \psi_2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos x, \dots$$

şeklindedir.

$p(x)$ üzerine konulan şartlar ile L_y operatörünün özdeğerlerinin asimptotik ifadesi

$$\lambda_k = \mu_k + O\left(\frac{1}{k}\right), \quad \varphi_k = \psi_k + O\left(\frac{1}{k}\right) \quad (k = 1,2, \dots)$$

şeklinde ifade edilmek üzere gerekli sınırlandırmalar dahilinde

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_n - \mu_n) = 0$$

düzenli iz formülünü bulduk.

BÖLÜM 2

ÖN BİLGİLER

İz kavramı matris teorisinden öne çıkmıştır.

$A = (a_{ij})_{nxn}$ reel elemanı kare matris olsun.

$$A = (a_{ij})_{nxn} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Böyle bir matrisin izi,

$$\text{İz}(A) = Tr(A) = a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{nn}$$

şeklinde tanımlanır.

λ sayısı için,

$|A - \lambda I| = 0$ denkleminin kökleri $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ve λ'ların herbiri kendi katlılığı kadar yazılmış olsun. Bu kökler, A matrisinin özdeğerleridir. A matrisi köşegenleştirilebilen matris olmak üzere A matrisinin izini

$$Tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$$

şeklinde belirleyebiliriz.

Tanım 2.1 $T : H \to H$ lineer sınırlı operatör olsun. Eğer $T = T^*$ ise yani her $x, y \in H$ için $(Tx, y) = (x, Ty)$ ise o zaman T operatörüne kendine eş operatör denir.

Tanım 2.2 X ve Y normlu uzaylar, $T : X \to Y$ bir operatör olsun. Eğer T lineerse ve her sınırlı $M \subset X$ için M'nin görüntü kümesinin kapanması $\overline{T(M)}$ kompakt ise bu T operatörü kompakt lineer (tam sürekli) operatördür.

Tanım 2.3 Eğer $T : H \to H$ lineer sınırlı operatörü için

$$TT^* = T^*T$$

koşulu sağlanıyorsa T operatörüne normal operatör denir.

Tanım 2.4 A bir kompleks E vektör uzayında bir operatör olsun. Eğer $Au = \lambda u$ eşitliğini sağlayacak şekilde sıfırdan farklı $u \in E$ vektörü varsa bir λ kompleks sayısına A'nın bir özdeğeri denir. $Au = \lambda u$ eşitliğini sağlayan her u vektörüne λ özdeğerine karşılık gelen A'nın özvektörü denir. Eğer E bir fonksiyon uzayı ise o zaman özvektörlere özfonksiyonlar denir.

Tanım 2.5 $\{\varphi_n(t)\}$ fonksiyon dizisinin herhangi iki fonksiyonu (a, b) aralığında

$$\int_a^b \varphi_m(t) \cdot \varphi_n(t) dt = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \neq 0 & m = n \end{cases}$$

$\Rightarrow \{\varphi_n(t)\}$ (a, b) aralığında ortogonaldir.

Tanım 2.6 H Hilbert uzayında $e_1 , e_2 , \dots , e_n , \dots$ elemanlar sistemi

$$(e_i, e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

özelliğine sahipse, bu sisteme ortonormal sistem denir.

$(e_i, e_i) \neq 0$, $(e_i, e_j) = 0$ $(i \neq j)$ ise ortogonal sistem denir.

Tanım 2.7 $A : H \to H$ tam sürekli bir operatör olsun.

$T = A^*A$ operatörünün gözönüne alalım.

$A^*A \geq 0$ dır.

$(A^*Af, f) \geq 0$ dır.

$(Af, Af) \geq 0$ dır.

Böyle bir T operatörünün özdeğerleri negatif değildir.

$\mu_1{}^2 \geq \mu_2{}^2 \geq \cdots$ ile gösterelim.

Karekök alırsak

$\mu_k = S_k(T) \to A$ operatörünün $s - sayıları$ denir.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k < +\infty$$

yakınsak ise o zaman A operatörüne çekirdek operatör denir.

Tanım 2.8 Eğer H'da hemen her yerde yoğun, sayılabilir alt küme varsa o zaman H'a Ayrılabilir Hilbert Uzayı denir.

Tanım 2.9 Her $x, y \in D(T)$ için $\left(D(T) \neq H \ , \overline{D(T)} = H\right)$

$T : D(T) \to H$

$(Tx, y) = (x, Ty)$ ise T'ye simetrik operatör denir.

Tanım 2.10 Sınırlı lineer bir $A : H \to H$ operatörünün bir λ özdeğerine karşılık gelen K_λ esas lineer manifoldunun boyutuna λ özdeğerinin cebirsel katlılığı denir.

Diferansiyel operatörlerin izlerine çekirdek operatörün veya matrislerin izlerinin bir genellemesi olarak bakılabilir.

H sonsuz boyutlu ayrılabilir bir Hilbert uzayı olmak üzere A operatörü tanım kümesi $D(A) \subset H$ ve $\overline{D(A)} = H$ olan $A : D(A) \to H$ bir lineer operatör olsun.

$\sigma_\infty(H) = \{A \mid A : D(A) \to H, \text{ kompakt operatör}\}$

ve $A \in \sigma_\infty(H)$ ise A^*A operatörü kendine eş, negatif olmayan bir operatördür.

$\left[(A^*A)^{1/2}\right]^2 = A^*A$ olan bir tek $(A^*A)^{1/2}$ karekök operatör vardır. Bu operatör $A^*A \geq 0$ olan kendine eş ve kompakt operatördür, yani $\sigma_\infty(H)'$ın bir elemanıdır.

Bu operatörün negatif olmayan özdeğerleri $s_1 > s_2 > \cdots > s_k > \cdots$ olsun.

Eğer A operatörü, normal operatör ise $A^*A = AA^*$ dır ve $s_i(A) = |\lambda_i(A)|$ dır. Burada λ_i'ler A operatörünün sıfırdan farklı özdeğerleridir.

$s_i(A)$ sayıları da A operatörünün s-sayılarıdır. $k < \infty$ ve $i = k+1, k+2, \ldots$ için $s_i = 0$ kabul edilir.

$p \geq 1$ için

$$\sum_{i=1}^{\infty} {s_i}^p(A) < \infty$$

koşulunu sağlayan A operatörünün kümesini $\sigma_p(H)$ ile gösterelim.

Burada herhangi bir $A \in \sigma_p(H)$ için

$$\|A\|_{\sigma_p(H)} = [\sum_{i=1}^{\infty} {s_i}^p(A)]^{1/p}$$

normu ile $\sigma_p(H)$ ayrılabilir bir Banach uzayıdır.

$p = 1$ için $\sigma_1(H)$ uzayına çekirdek operatör uzayı denir.

Teorem 2.1 $A \in \sigma_1(H)$ ve $\{e_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ bir ortonormal taban ise

$$\sum_{i=1}^{\infty} (Ae_i\, , e_i)$$

serisi yakınsaktır ve bu serinin toplamına A operatörünün matris izi denir ve $tr(A)$ ile gösterilir.

$$A \in \sigma_1(H) \Rightarrow tr(A) = \sum_{i=1}^{\gamma(A)} \lambda_i\,(A)$$

dır. Burada $\gamma(A)$, A operatörünün özdeğerlerinin cebirsel katlılıklarının toplamıdır.

KURAMSAL TEMELLER

Fiziğin farklı alanlarındaki olaylara bakıldığında sık sık bu olayların aynı karakterleri olduğunu görürüz. Bu da bizi problemin matematiksel şekillendirilmesinde aynı denkleme götürür. Yani aynı bir denklem farklı olayları ifade edebilir. Örneğin;

$ay''(x) + by(x) = 0$

denklemi farklı basit sistemlerin titreşimini ifade eder.

- Salınım
- Yayın sertlik kuvveti etkisinde yükün titreşimi
- Basit kapalı elektrik devresinde indüktans etkisi ile elektrik titreşimi vs.

$$-y'' + q(x)y = \lambda y \tag{2.1}$$

$$y(0) = 0 \qquad y(\pi) = 0 \tag{2.2}$$

problemine Sturm-Liouville problemi denir.

Bu problemin özdeğer ve özfonksiyonlarının bulunması aşağıdaki problemlerin çözümünde ortaya çıkar.

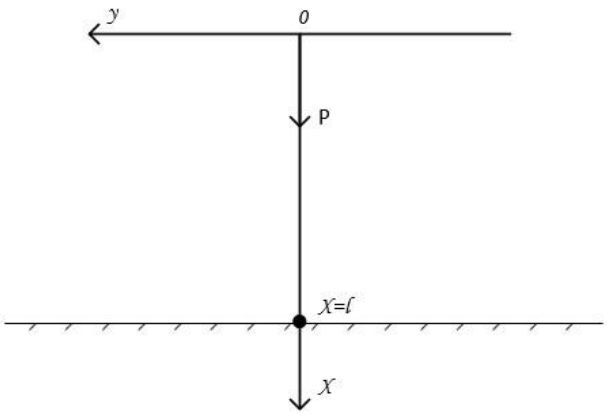
- $u_t' = a^2 u_{xx}''$ $\qquad u = u(x,t)$

  $u(x,0) = \varphi(x) \qquad\qquad 0 \le x \le l$

  $u(0,t) = 0 \quad , \quad u(l,t) = 0 \quad 0 \le t \le T$

  ısı probleminin Fourier yöntemi ile çözümünde;

- Kuantum mekaniği problemlerinde,
- Bir ucu sabit tutulmuş, diğer ucu serbest bırakılmış l uzunluğundaki çubuğa P kuvveti etki ettirildiğinde çubuktaki eğilmenin belirlenmesinde kullanılır.



Şekil 2.1 Çubuğun Düz Hali

Çubuğun serbest ucuna P kuvveti uygulansın. Kuvvet çubuk boyunca yönelmiştir. Açıktır ki P kuvvetinin yeterince küçük değerlerinde çubuk eğilmeyecek ve doğru şeklinde kalacaktır. P kuvvetinin $\exists P_0$ kritik değeri vardır ki çubuk artık doğru şekilde kalmayacak ve eğilecektir. Bu olay

$$-y'' = \lambda y$$

$$y(0) = 0 \qquad y'(l) = 0$$

şeklinde bir problem ile verilebilir. Bu problemin özdeğerleri hesaplandığında

$$\lambda = \left(\frac{2n-1}{2l}\pi\right)^2 \qquad n = 1, 2, \dots$$

özfonksiyonları ise

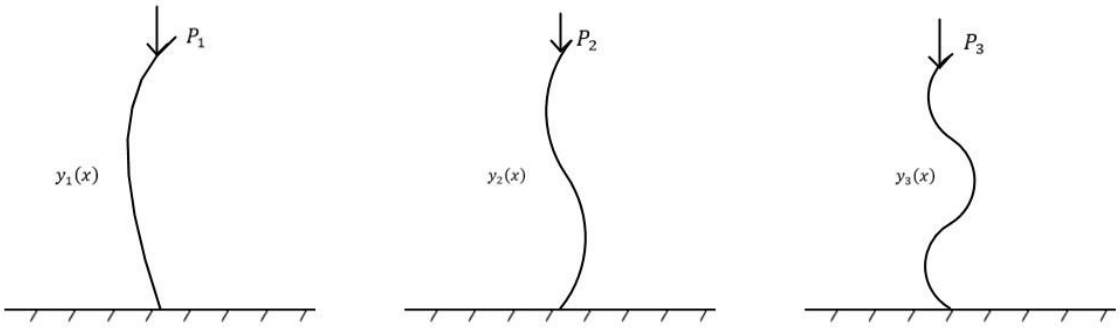
$$y(x) = \sin\frac{2n-1}{2l}\pi x$$

şeklinde elde edilir.

Burada çubuğa uygulanan kuvvet ile özdeğerlerin birbirinden bir sabit çarpan kadar farklı olduğu görülmüştür ki bu sabit çarpan çubuğun cinsine bağlı olarak değişen E : Young Modülü , I : Açısal Moment'ten oluşan bir katsayıdır. Yani her bir kritik kuvvet

$$P_n = E.I.\left(\frac{2n-1}{2l}\pi\right)^2 \qquad n = 1, 2, 3, \dots$$

şeklindedir. O halde özfonksiyonlar da bu sabit çarpım ile çubuğun eğriliğini gösterir.



Şekil 2.2 Çubuğun Bükümlü Halleri

İlk özdeğerlerin bulunması oldukça önemlidir. Özdeğerlerin nasıl hesaplanacağından bahsedelim. Bunun için çok yöntemler vardır. Bunlardan biri diferansiyel ifadeden integral denkleme geçip, sonra sınır koşullarını kullanarak özdeğer ve özfonksiyonlar için asimptotik formüller bulmaktır. Bu asimptotik ifadelerde n'in yeterince büyük değerlerinde özdeğerler yaklaşık olarak belli olur. Bir diğer yöntem ise Kurant'ın min-max yöntemidir. Biz de şimdi ilk özdeğerlerin bulunması için başka bir yöntemi gösterelim.

(2.1) ve (2.2) Sturm-Liouville problemini ele alalım. Bu operatörün tersine L^{-1} integral operatörü ve çekirdeğine de Green fonksiyonu denir. λ_n'ler bu problemin özdeğerleri olmak üzere, $G(x,y)$'de geçen Green fonksiyonu ise açıktır ki,

$$\sum {\lambda_n}^{-1} = \int_0^\pi G(x,x)\,dx$$

$$\sum {\lambda_n}^{-2} = \int_0^\pi \int_0^\pi G(x,y)G(y,x)\,dx\,dy \tag{2.3}$$

$$\sum {\lambda_n}^{-3} = \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\pi G(x,y)G(y,z)G(z,x)\,dx\,dy\,dz$$

$\vdots$

dir. n'in büyük değerlerinde özdeğerleri yaklaşık olarak hesap ederek ve (2.3)'ten faydalanarak ilk özdeğerler elde edilebilir. Ters operatörün bulunması kolay olmamakla birlikte açık şekilde yazılamamaktadır. Yani diferansiyel denklemin çözümlerini bilmek gerekmektedir. Bu ise ancak bazı basit durumlarda mümkün olmaktadır. Aynı zamanda denklemin kendisi de basit şekilde ifade edilmelidir.

Bu yüzden diferansiyel operatörün tersi olan integral operatörün izini değil, diferansiyel operatörün ve onun iterasyonlarının izini hesaplamak doğaldır. Yani,

$$\sum \lambda_n = tr\left(-\frac{d^2}{dx^2} + q(x)\right)$$

$$\sum {\lambda_n}^2 = tr\left(-\frac{d^2}{dx^2} + q(x)\right)^2 \qquad (2.4)$$

$$\sum {\lambda_n}^3 = tr\left(-\frac{d^2}{dx^2} + q(x)\right)^3$$

$\vdots$

(2.4)'ün sol tarafındaki toplamlar ıraksaktır. Bu yüzden önceleri integral operatörler kullanılırmış. Ancak Adamar, Riss, Schwarz ve başka bilim adamları tarafından ıraksak ifadelerin düzenli yakınsaklığına ait tanımın verilmesi ve çok sayıda örneklerde bunu uygulamaları sonucunda bu metodu kullanarak (2.4) formüllerinin (2.3) formüllerine göre daha yararlı olduğu görülmüştür. Burada $q(x)$'in türevlerinin varlığı yeterlidir.

Bu söylediklerimizden başka, yani özdeğerlerin yaklaşık olarak hesaplanmasından başka diferansiyel operatörün düzenli izinin hesaplanması kendi kendiliğinden matematiğin bir iç problemidir. Yani düzenli izi hesaplamak matematiksel ilginç bir problemdir.

BÖLÜM 3

BAZI SINIRLANDIRMALAR

Bu bölümde amacımız

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}[(\varphi_n\,,L\varphi_n)-(\psi_n\,,L\psi_n)]=0 \tag{3.1}$$

eşitliğini ispatlamaktır. Bu nedenle [2] çalışmasındaki gibi ortonormal $\{\varphi_k\}$ bazından

$$\psi_k=\sum_{i=1}^{\infty}u_{ik}\,\varphi_i \qquad (k=\ 1,2,\dots)$$

ortonormal bazına geçiş matrisi $(u_{ik})_{i,k=1}^{\infty}$ yi inceleyelim. Burada $u_{ik}=(\varphi_i\,,\psi_k\,)$ dır.

(u_{ik}) üniter matristir, yani

$$\sum_{i=1}^{\infty}{u_{ik}}^2=1\,, \qquad (k=\ 1,2,\dots)$$

dir. Önce u_{ik} lar için bazı değerlendirmeler verelim.

$$L\psi_k=\mu_k\psi_k+p\psi_k \tag{3.2}$$

olduğu açıktır. Buradan

$$(L\psi_k,\varphi_i)=(\mu_k\psi_k,\varphi_i)+(p\psi_k,\varphi_i)$$

$$\lambda_i(\psi_k,\varphi_i)=\mu_k(\psi_k,\varphi_i)+(p\psi_k,\varphi_i)$$

elde edilir. Böylece,

$$(\lambda_i - \mu_k)(\psi_k, \varphi_i) = (p\psi_k, \varphi_i)$$

dir.

Bu son eşitliğin karesini alıp, sonrasında i ye göre 0 dan ∞ a kadar toplam aldığımızda,

$$\sum_{i=0}^{\infty}(\lambda_i - \mu_k)^2(\psi_k, \varphi_i)^2 = \sum_{i=0}^{\infty}(p\psi_k, \varphi_i)^2 = \|p\psi_k\|^2 = \int_0^{\pi}[p(x)\psi_k(x)]^2 dx$$

$$\leq {p_0}^2 \int_0^{\pi} {\psi_k}^2(x)\, dx$$

$$= {p_0}^2 \qquad (3.3)$$

olur. Burada $p_0 = \max_{0\leq x\leq \pi} |p(x)|$ dir. $p(x)$ in aşağıdaki koşulları sağladığını kabul edelim:

1) $p(x)$ fonksiyonu, L_y operatörünün özdeğerlerinin ve özfonksiyonlarının asimptotik ifadesinin

   $$\lambda_k = \mu_k + O\left(\frac{1}{k}\right) \quad , \quad \varphi_k = \psi_k + O\left(\frac{1}{k}\right)$$

   şeklinde olmasını ve

2) $p(x)$ fonksiyonu,

   $$\int_0^{\pi} p(x)dx = 0$$

   eşitliğini sağlar.

Bu koşullar aşağıdaki sınırlandırmalarda göz önüne alınacaktır. (3.3) e göre, $\forall N$ doğal sayısı için

$$\sum_{i=N+1}^{\infty}(\lambda_i - \mu_k)^2 {u_{ik}}^2 < C \qquad (C = sbt) \qquad (k < N)$$

dir. Buradan

$$\sum_{i=N+1}^{\infty}(\lambda_i-\mu_k){u_{ik}}^2<C$$

olduğu çıkar. Böylece,

$$\sum_{i=N+1}^{\infty}(\lambda_i-\mu_k)(\lambda_i-\lambda_k){u_{ik}}^2<C$$

$$\sum_{i=N+1}^{\infty}(\lambda_i-\lambda_k)^2{u_{ik}}^2<C$$

elde ederiz ve

$$\sum_{i=N+1}^{\infty}(\lambda_{N+1}-\mu_k)(\lambda_i-\lambda_k){u_{ik}}^2\leq\sum_{i=N+1}^{\infty}(\lambda_i-\mu_k)(\lambda_i-\lambda_k){u_{ik}}^2\leq C$$

dir. Buradan $k<N$ için

$$\sum_{i=N+1}^{\infty}(\lambda_i-\lambda_k){u_{ik}}^2\leq\frac{C}{\lambda_{N+1}-\mu_k} \tag{3.4}$$

elde edilir. Bu çalışmada C sabitleri farklı olabilir.

Şimdi (3.1) i ispatlayalım.

$$(\psi_k,L\psi_k)=\left(\sum_{i=0}^{\infty}u_{ik}\varphi_i\,,\sum_{i=0}^{\infty}\lambda_iu_{ik}\varphi_i\right)=\sum_{i=0}^{\infty}\lambda_i{u_{ik}}^2$$

olduğundan

$$\sum_{k=1}^{N}(\psi_k,L\psi_k)=\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i{u_{ik}}^2$$

olur. (3.1) deki birinci toplamı hesaplarsak ve

$$\sum_{i=1}^{\infty}{u_{ki}}^2=1$$

olduğunu göz önüne alırsak

$$\sum_{k=1}^{N}(\psi_k, L\psi_k) = \sum_{k=1}^{N}\lambda_k = \sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_k {u_{ki}}^2$$

elde edilmiş olur. Şimdi,

$$\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i {u_{ik}}^2 - \sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_k {u_{ki}}^2\right) = 0 \tag{3.5}$$

eşitliğini ispatlamamız gerekir.

$$\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i {u_{ik}}^2 - \sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_k {u_{ki}}^2 = \sum_{k=1}^{N}\sum_{i=N+1}^{\infty}(\lambda_i - \lambda_k){u_{ik}}^2 + \sum_{k=1}^{N}\sum_{i=N+1}^{\infty}\lambda_k({u_{ik}}^2 - {u_{ki}}^2) \tag{3.6}$$

olduğu açıktır.

(3.6) nın sağ tarafında yer alan ilk toplamı hesaplarsak

$$\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=N+1}^{\infty}(\lambda_i - \lambda_k){u_{ik}}^2 = \sum_{k=1}^{N-1}\sum_{i=N+1}^{\infty}(\lambda_i - \lambda_k){u_{ik}}^2 + \sum_{i=N+1}^{\infty}(\lambda_i - \lambda_N){u_{iN}}^2$$

$$= \sum_{k=1}^{N-1}\sum_{i=N+1}^{\infty}(\lambda_i - \lambda_k){u_{ik}}^2 + (\lambda_{N+1} - \lambda_N){u_{(N+1)N}}^2$$

$$+ \sum_{i=N+2}^{\infty}(\lambda_i - \lambda_N){u_{iN}}^2 \tag{3.7}$$

dir. $N+1$ çift sayı olmak üzere (3.4) ten yararlanarak

$$\sum_{k=1}^{N-1}\sum_{i=N+1}^{\infty}(\lambda_i - \lambda_k){u_{ik}}^2$$

terimini sınırlandırırsak

$$\sum_{k=1}^{N-1}\sum_{i=N+1}^{\infty}(\lambda_i-\lambda_k){u_{ik}}^2<\sum_{k=1}^{N-1}\frac{C}{\lambda_{N+1}-\mu_k}=\sum_{k=2}^{N}\frac{C}{\lambda_{N+1}-\mu_{k-1}}$$

$$\leq\sum_{k=2}^{N}\frac{C}{(N+1)^2-(k-1)^2}$$

$$\frac{x-1}{N+1}=u$$

değişken dönüşümü ile

$$\leq\frac{1}{(N+1)^2-(N-1)^2}+\int_2^N\frac{dx}{(N+1)^2-(x-1)^2}$$

$$\leq\frac{1}{4N}+\int_2^N\frac{dx}{(N+1)^2\left(1-\left(\frac{x-1}{N+1}\right)^2\right)}$$

$$\leq\frac{1}{4N}+\int_{\frac{1}{N+1}}^{\frac{N-1}{N+1}}\frac{du}{(N+1)(1-u^2)}$$

$$\leq\frac{1}{4N}+\frac{1}{N+1}\int_{\frac{1}{N+1}}^{\frac{N-1}{N+1}}\left[\frac{\frac{1}{2}}{1-u}+\frac{\frac{1}{2}}{1+u}\right]du$$

$$\leq\frac{1}{4N}+\frac{1}{2(N+1)}\ln\frac{1+u}{1-u}\Big|_{\frac{1}{N}}^{\frac{N-1}{N+1}}$$

$$\leq\frac{1}{4N}+\frac{1}{2(N+1)}\left\{\ln\left[\frac{1+\frac{N-1}{N+1}}{1-\frac{N-1}{N+1}}\right]-\ln\left[\frac{1+\frac{1}{N}}{1-\frac{1}{N}}\right]\right\}$$

$$\leq\frac{1}{4N}+\frac{1}{2(N+1)}\left[\ln N-\ln\frac{N+1}{N-1}\right]$$

$$\leq\frac{1}{4N}+\frac{1}{2(N+1)}\left[\ln\frac{N^2+N}{N-1}\right]\to 0\quad(N\to\infty)\qquad(3.8)$$

ve böylece

$$\sum_{i=N+2}^{\infty}(\lambda_i-\lambda_N){u_{iN}}^2=\sum_{i=N+1}^{\infty}(\lambda_{i+1}-\lambda_N){u_{i+1N}}^2$$

$$\leq\frac{C}{\lambda_{N+2}-\mu_N}$$

$$\leq\frac{C}{(N+2)^2-N^2}=\frac{C}{4N+4}\to 0 \qquad (N\to\infty) \tag{3.9}$$

ifadesi elde edilir. Şimdi ise $N+1$ çift sayı olmak üzere $(\lambda_{i+1}-\lambda_N){u_{N+1N}}^2$ terimini sınırlandırırsak;

$$(\lambda_{i+1}-\lambda_N){u_{N+1N}}^2\leq(\lambda_{i+1}-\lambda_N)=N^2+O\left(\frac{1}{N+1}\right)$$

$$-N^2-O\left(\frac{1}{N}\right)\to 0 \quad (N\to\infty) \tag{3.10}$$

olur. Bu durumda $N+1$ in çift sayı olması halinde (3.7), (3.8), (3.9) ve (3.10) dan

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=N+1}^{\infty}(\lambda_i-\lambda_k)\,{u_{ik}}^2=0 \tag{3.11}$$

elde edilir.

Benzer yöntem ile $N+1$ in tek sayı olması halinde de (3.11) ispatlanabilecektir.

Şimdi ise

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_k\,{u_{ki}}^2=0$$

olduğunu ispatlayalım.

$$u_{ik}+u_{ki}=(\varphi_i,\psi_k)+(\varphi_k,\psi_i)=-(\varphi_i-\psi_i,\varphi_k-\psi_k)$$

olduğu aşikardır. L_y operatörünün özfonksiyonlarına ait asimptotik ifadeyi ele alırsak, buradan

$$|u_{ik}+u_{ki}|\leq\|\varphi_i-\psi_i\|\|\varphi_k-\psi_k\|\leq\frac{C}{i^2k^2}<\frac{C}{ik} \tag{3.12}$$

elde edilir.

$k < N$ ve $N+1$ çift sayı olmak üzere (3.4) ten ve Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden faydalanarak aşağıda yer alan sınırlandırmalar yapılabilir:

$$\sum_{i=N+1}^{\infty}(\lambda_i-\mu_k)|{u_{ik}}^2-{u_{ki}}^2| = \sum_{i=N+1}^{\infty}(\lambda_i-\mu_k)|u_{ik}-u_{ki}||u_{ik}+u_{ki}|$$

$$\leq \sqrt{\sum_{i=N+1}^{\infty}|u_{ik}+u_{ki}|^2}\sqrt{\sum_{i=N+1}^{\infty}(\lambda_i-\mu_k)^2|u_{ik}-u_{ki}|^2}$$

$$< \frac{C}{(k-1)\sqrt{N+1}}\,.$$

Böylece buradan $k < N$ için

$$\sum_{i=N+1}^{\infty}|{u_{ik}}^2-{u_{ki}}^2| < \frac{C}{(k-1)\sqrt{N+1}(\lambda_{N+1}-\mu_k)}$$

$$< \frac{C}{(k-1)\sqrt{N+1}[N^2-(k-1)^2]} \qquad (3.13)$$

elde edilir. (3.6) eşitliğinin ikinci toplamındaki terimlerin mutlak değerinden elde edilen

$$\sum_{k=1}^{N}\lambda_k\sum_{i=N+1}^{\infty}|{u_{ik}}^2-{u_{ki}}^2| = \lambda_N\sum_{i=N+1}^{\infty}|{u_{iN}}^2-{u_{Ni}}^2| + \sum_{k=1}^{N-1}\lambda_k\sum_{i=N+1}^{\infty}|{u_{ik}}^2-{u_{ki}}^2|$$

$$= \lambda_N|{u_{N+1N}}^2-{u_{NN+1}}^2| + \lambda_N\sum_{i=N+2}^{\infty}|{u_{iN}}^2-{u_{Ni}}^2| + \sum_{k=1}^{N-1}\lambda_k\sum_{i=N+1}^{\infty}|{u_{ik}}^2-{u_{ki}}^2| \quad (3.14)$$

eşitliğini sınırlandıralım. $N+1$ çift sayı olmak üzere (3.12)'de yer alan eşitsizliğe göre (3.14) ün sağındaki ilk toplam için

$$\lambda_N|{u_{N+1N}}^2-{u_{NN+1}}^2| = \lambda_N|u_{N+1N}-u_{NN+1}||u_{N+1N}+u_{NN+1}|$$

$$\leq CN^2\frac{1}{N^2(N+1)^2}|u_{N+1N}-u_{NN+1}| \;\to 0 \quad (N\to\infty) \quad (3.15)$$

dir. $N+1$ çift sayı olmak üzere, (3.13) ten faydalanarak (3.14) ün sağ tarafındaki ikinci toplam için de

$$\lambda_N \sum_{i=N+2}^{\infty} |{u_{iN}}^2 - {u_{Ni}}^2| < \frac{CN^2}{(N-1)\sqrt{N+2}[(N+2)^2-(N+1)^2]} \to 0 \;\; N \to \infty \; (3.16)$$

bulunur.

Şimdi de yine (3.13) ten yararlanarak (3.14) ün sağ tarafındaki üçüncü toplamı değerlendirirsek;

$$\sum_{k=1}^{N-1} \lambda_k \sum_{i=N+1}^{\infty} |{u_{ik}}^2 - {u_{ki}}^2| < C \sum_{k=1}^{N-1} \frac{(k+1)^2}{k\sqrt{N+1}[N^2-k^2]}$$

$$= C \sum_{k=2}^{N} \frac{(k)^2}{(k-1)\sqrt{N+1}[N^2-(k-1)^2]}$$

$$< C \sum_{k=2}^{N} \frac{k}{\sqrt{N+1}[N^2-(k-1)^2]}$$

$$< C \frac{N}{\sqrt{N+1}} \sum_{k=2}^{N} \frac{1}{N^2-(k-1)^2} \sim C \frac{\ln N}{\sqrt{N}} \to 0 \; N \to \infty \; (3.17)$$

bulunur. O halde $N+1$ çift sayı olmak üzere (3.14), (3.15), (3.16) ve (3.17) den

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} \sum_{i=N+1}^{\infty} \lambda_k \, ({u_{ik}}^2 - {u_{ki}}^2) = 0 \qquad (3.18)$$

bulunur. Benzer yöntem ile $N+1$ in tek sayı olması halinde de bu eşitlik ispatlanabilecektir. (3.6), (3.11) ve (3.18) den (3.5) in ve buradan da (3.1) in ispatı elde edilir.

BÖLÜM 4

SONUÇ VE ÖNERİLER

4.1 Düzenli İze Ait Hesaplamalar

$(\varphi_n, L\varphi_n) = \lambda_n$ olduğu açıktır. Dolayısıyla

$(\psi_n, L\psi_n) = \mu_n + (\psi_n, p\psi_n)$

dir. Buradan (3.1) ifadesini göz önüne alırsak;

$$\sum_{n=1}^{\infty}[(\psi_n, L\psi_n) - (\varphi_n, L\varphi_n)] = \sum_{n=1}^{\infty}(\mu_n - \lambda_n) + \sum_{n=1}^{\infty}(\psi_n, p\psi_n) \to 0 \qquad N \to \infty \qquad (4.1)$$

dir. Şimdi

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}(\psi_n, p\psi_n)$$

ifadesinin değerini bulalım. N çift sayı olmak üzere $p(x)$ için ikinci şartı göz önüne alırsak;

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\psi_n, p\psi_n) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} p(x)dx + \sum_{n=1}^{\frac{N}{2}}\left(\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} p(x)\sin^2(2n+1)xdx + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} p(x)\cos^2(2n+1)xdx\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} p(x)dx + \frac{N}{\pi}\int_0^{\pi} p(x)dx$$
$$= 0 \qquad (4.2)$$

bulunur. Benzer yöntem ile N in tek sayı olması halinde ;

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\psi_n, p\psi_n) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} p(x)dx$$
$$+ \sum_{n=1}^{\frac{N-1}{2}}\left(\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} p(x)\sin^2(2n+1)xdx + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} p(x)\cos^2(2n+1)xdx\right)$$
$$+ \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} p(x)\sin^2 Nxdx$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} p(x)dx + \frac{(N-1)}{\pi}\int_0^{\pi} p(x)dx + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} p(x)\left(\frac{1-\cos 2Nx}{2}\right)dx$$
$$= -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} p(x)\cos 2Nx\, dx \to 0 \qquad N \to \infty \qquad (4.3)$$

elde edilir. Bulduğumuz (4.2) ve (4.3) ifadelerinden

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}(\psi_n, p\psi_n) = 0$$

bulunur. Sonuç olarak buradan ve (4.1) den

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}(\lambda_n - \mu_n) = 0$$

elde edilir. Böylelikle Teorem 4.1 ispatlanmış olur.

Teorem 4.1 : Eğer $p(x)$ fonksiyonu 1-) ve 2-) şartlarını sağlıyor ise o zaman

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda_n - \mu_n) = 0$$

dır.

KAYNAKLAR

[1] Gelfand, I. M. ve Levitan, B. M., (1953). "İkinci Mertebeden Bir Diferansiyel Operatörün Özdeğerleri İçin Bir Formül Hakkında", Dokl. AN SSSR, T.88 (4): 593-596.

[2] Dikiy, L. A., (1953). "Gelfand-Levitan'ın Bir Formülü Hakkında", Uspeki Matem. Nauk, T.8 (2): 119-123.

[3] Dikiy, L. A., (1958). "Sturm-Liouville Diferansiyel Operatörleri İçin İz Formülleri", Uspeki Matem. Nauk, T.13 (3): 111-143.

[4] Halberg, C. J. ve Kramer, V. A., (1960). "Generalization of the trace concept", Duke Mathematical Journal, V. 27 (4): 607-618.

[5] Sadovniçiy, V. A., (1966). " Yüksek Mertebeden İki Diferansiyel Operatörünün Farkının İzi Hakkında", Differens. Uravneniya, T.2 (12): 1611-1624.

[6] Fulton, S. T., (1977). "Two-Point Boundary Value Problems with Eigenvalue Parameter Contained in The Boundary Conditions", Proceeding of The Royal Society Edinburgh, 77A: 293-308.

[7] Bayramov, A. , Öztürk Uslu, S. ve Kızılbudak Çalışkan, S., (2005). "Ayrılabilir Olmayan Sınır Koşulları ile Verilmiş İkinci Mertebeden Diferansiyel Denklemin İz Formülü Üzerine", Sigma Journal of Engineering and Natural Sciences, 4 (2005): 57-64.

[8] Halilova, R. Z., (1976). "Sturm-Liouville Operator Denkleminin İzinin Düzenlenmesi Hakkında", Funks. Analiz, Teoriya Funksiy i ik Pril Mahaçkala, No: 3 (1): 154-161.

[9] Bayramoğlu, M. ve Adıgüzelov, E., (2005). "Diferansiyel Operatörlerin Düzenli İzleri", Sigma Journal of Engineering and Natural Sciences, 1 (2005): 1-22.

[10] Maksudov, F. G., Bayramoğlu, M. ve Adıgüzelov, E. E., (1993). "On Asymptotics of Spectrum and Trace of High Order Differential Operator Coefficients", Doğa- Tr. J. of Mathematics, 17: 1113-128.

[11] Gasimov, M. G. ve Levitan, B. M., (1963). “İki Singular Sturm-Liouville Operatörünün Özdeğerlerinin Farklarının Toplamı Hakkında”, Dokl. AN SSSR, T.151 (5): 1014-1017.

[12] Gelfand, I. M., (1956). “İkinci Mertebeden Bir Diferansiyel Operatörün Özdeğerleri İçin Formüller”, Uspeki Matem. Nauk, T.11: 191-198.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Leyla ÖZEN

Doğum Tarihi ve Yeri : 07.02.1986 / İstanbul

Yabancı Dili : İngilizce

E-posta : ozen.leyla@gmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	**Alan**	**Okul/Üniversite**	**Mezuniyet Yılı**
Lisans	Matematik	Yıldız Teknik Üniversitesi	2010
Lise	Fen-Matematik	Kadıköy Anadolu Lisesi	2005

İŞ TECRÜBESİ

Yıl	**Firma/Kurum**	**Görevi**
2015 - …	Allianz Sigorta A.Ş.	Kıdemli İş Analisti
2014 - 2015	Denizbank A.Ş.	Performans Yönetimi Uzman Yrd.
2013 - 2014	Allianz Sigorta A.Ş.	Aktüerya Uzman Yrd.