T.C.
ERCİYES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

T_0 VE T_1 PSEUDO-QUASİ-SEMİ METRİK UZAYLAR

Hazırlayan
Tesnim Meryem BARAN

Danışman
Doç. Dr. Muammer KULA

Doktora Tezi

Temmuz 2018
KAYSERİ

T.C.
ERCİYES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

T_0 VE T_1 PSEUDO-QUASİ-SEMİ METRİK UZAYLAR
(Doktora Tezi)

Hazırlayan
Tesnim Meryem BARAN

Danışman
Doç. Dr. Muammer KULA

Bu çalışma TÜBİTAK, 114F299 proje numaralı 3001 AR-GE TÜBİTAK kodlu program, Erciyes Üniversitesi BAP birimince FDA-2015-5627 ve FDK-2017-7175 kodlu projeler ile TÜBİTAK 2211 Yurt İçi Lisansüstü Burs Programı kapsamında yürütülmekte olan 2228-B Yüksek Lisans Öğrencileri için Yurt İçi Doktora Burs Programı tarafından desteklenmiştir.

Temmuz 2018
KAYSERİ

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK

Bu çalışmadaki tüm bilgilerin, akademik ve etik kurallara uygun bir şekilde elde edildiğini beyan ederim. Aynı zamanda bu kural ve davranışların gerektirdiği gibi, bu çalışmanın özünde olmayan tüm materyal ve sonuçları tam olarak aktardığımı ve referans gösterdiğimi belirtirim.

Tesnim Meryem BARAN

"T_0 **Ve** T_1 **Pseudo-Quasi-Semi Metrik Uzaylar"** adlı Doktora tezi, Erciyes Üniversitesi Lisansüstü Tez Önerisi ve Tez Yazma Yönergesi'ne uygun olarak hazırlanmıştır.

Hazırlayan
Tesnim Meryem BARAN

Danışman
Doç. Dr. Muammer KULA

Matematik ABD Başkanı
Prof. Dr. Hüseyin ALTINDİŞ

Doç. Dr. Muammer KULA danışmanlığında **Tesnim Meryem BARAN** tarafından hazırlanan **"T0 ve T1 Pseudo-Quasi-Semi Metrik Uzaylar"** adlı bu çalışma jürimiz tarafından Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik** Anabilim Dalında **Doktora** tezi olarak kabul edilmiştir.

27 / 07 / 2018

JÜRİ:

Danışman	: **Doç. Dr. Muammer KULA**	....
Üye	: Prof. Dr. Yılmaz ALTUN	....
Üye	: Prof. Dr. İshak ALTUN	....
Üye	: Prof. Dr. Mehmet BARAN	....
Üye	: Doç. Dr. Abdulcabbar SÖNMEZ	....

ONAY:

Bu tezin kabulü Enstitü Yönetim Kurulunun 14/08/2018 tarih ve 2018/36-16 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

14 / 08 / 2018

Mehmet Akkurt

Prof. Dr. Mehmet AKKURT

Enstitü Müdürü

TEŞEKKÜR

"T_0 ve T_1 Pseudo-Quasi-Semi Metrik Uzaylar" konulu tez çalışmasının seçiminde, yürütülmesinde, sonuçlandırılmasında ve sonuçların değerlendirilmesinde yardımlarıyla beni destekleyen tez danışmanım değerli hocam Doç. Dr. Muammer KULA'ya teşekkür ederim.

Öğrenciliğim boyunca farklı bakış açıları ve bilimsel katkılarıyla beni aydınlatan, ilgi ve yardımlarını esirgemeyen ve bu günlere gelmemde büyük katkı sahibi saygıdeğer hocam Prof.Dr. Mehmet BARAN'a ve jürimde yer alan değerli hocamlarım Prof.Dr. Yılmaz ALTUN, Prof.Dr. İshak ALTUN ve Doç.Dr. Abdulcabbar SÖNMEZ'e teşekkürü bir borç bilirim.

Bu tez çalışmasına maddi destek sağlayan Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK) tarafından 114F299 proje numaralı 3001 AR-GE TÜBİTAK kodlu program, Erciyes Üniversitesi BAP birimince FDA-2015-5627 ve FDK-2017-7175 kodlu projeler tarafından desteklendiğinden dolayı teşekkür ederim.

Ayrıca, Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK) 2211 Yurt İçi Lisansüstü Burs Programı kapsamında yürütülmekte olan 2228-B Yüksek Lisans Öğrencileri için Yurt İçi Doktora Burs Programı ile doktora eğitimim süresince verdiği burstan ötürü teşekkürlerimi sunarım.

Hayatımın her safhasında bana verdikleri maddi-manevi destek, göstermiş oldukları sınırsız sevgi, sabır ve anlayıştan dolayı aileme özellikle canım anneme yürekten teşekkür ederim.

Tesnim Meryem BARAN

Temmuz 2018, KAYSERİ

T_0 VE T_1 PSEUDO-QUASİ-SEMİ METRİK UZAYLAR

Tesnim Meryem BARAN
Erciyes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü
Doktora Tezi, Temmuz 2018
Tez Danışmanı: Doç. Dr. Muammer KULA

ÖZET

Bu tez çalışmasında genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzaylarda lokal ve genel T_0 ve T_1 ayırma aksiyomları karakterize edilmiştir. İlave olarak, lokal ve genel T_0 ve T_1 uzayları arasındaki ilişkiler araştırılmıştır. Bu T_0 ve T_1 uzayları ile klasik anlamda T_0 ve T_1 uzayları arasında ilişkiler incelenmiştir.

Bu tez beş ana bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, İlk olarak değişik şekilde genişletilmiş metrik uzayları, örnekleri, özellikleri, topolojik kategorik kavramlar ve bunlarla ilgili gerekli bazı teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde, genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzaylar (ve büzülme fonksiyonların) kategorisi ∞**pqsMet** in topolojik kategori olduğu gösterilmiş ve bu kategoride önemli bazı özel objeleri ve morfizmleri karakterize edilmiştir.

Üçüncü bölümde, lokal $\overline{T}_0$ ve lokal T_0' genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzaylar karakterize edilmiş ve bunlar arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

Dördüncü bölümde ise genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzayların değişik T_0 formlarının herbiri ve T_1 karakterize edilmiş, bu değişik formlar arasında ortaya çıkan ilişkiler incelenmiş, bu uzaylarla lokal T_0 versiyonları ve klasik anlamda T_0 ve T_1 uzayları arasındaki bağlantılar araştırılmıştır. Ayrıca, bu uzayların kalıtsal ve çarpımsal olduğu gösterilmiştir.

Son bölümde tezde elde edilen sonuçlar biraraya getirilmiş, ilişkiler incelenmiş ve çözülmemiş problemlere dikkat çekilerek sonraki çalışmalar için bazı önerilere yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Topolojik kategori, genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzaylar, büzülme fonksiyonları, lokal T_0 ve T_1 pseudo-quasi-yarı metrik uzayları, T_0 ve T_1 pseudo-quasi-yarı metrik uzayları.

T_0 AND T_1 PSEUDO-QUASI-SEMI METRIC SPACES

Tesnim Meryem BARAN
Erciyes University, Graduate School of Natural and Applied Sciences
Ph.D. Thesis, July 2018
Thesis Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Muammer KULA

ABSTRACT

In this thesis, local and general T_0 and T_1 extended pseudo-quasi-semi metric spaces are characterized. Moreover , the relationship among local T_0 and T_1 extended pseudo-quasi-semi metric spaces and T_0 and T_1 extended pseudo-quasi-semi metric spaces as well as the relationship between classical T_0 and T_1 extended pseudo-quasi-semi metric spaces are investigated.

This thesis consists of five main chapters.

In the first chapter, various extended metric spaces, examples, properties, fundamental categorical notions and some necessary theorems which will be used in next chapters were given.

In the second chapter, it is shown that the category ∞**pqsMet** of extended pseudo-quasi-semi metric spaces and non-expansive maps is a topological category and some important objects and morphisms in this category are characterized.

In the third chapter, local $\overline{T}_0$ and local T_0' extended pseudo-quasi-semi metric spaces are characterized and the relationship between them is investigated.

In the fourth chapter, various forms of T_0 and T_1 extended pseudo-quasi-semi metric spaces are characterized and the relationships among these various forms of each of T_0 as well as the relationship between classical T_0 and T_1 extended pseudo-quasi-semi metric spaces are investigated. Moreover, it is shown that each of these spaces are hereditary and productive.

In the last chapter, the results we have obtained were summarized and taking attention to unresolved issues and unsolved problems various proposals for further research were discussed.

Keywords: Topological category, extended pseudo-quasi-semi metric spaces, non-expansive maps, local T_0 and T_1 extended pseudo-quasi-semi metric spaces, T_0 and T_1 extended pseudo-quasi-semi metric spaces.

İÇİNDEKİLER

T_0 VE T_1 PSEUDO-QUASİ-SEMİ METRİK UZAYLAR

TABLOLAR LİSTESİ

ŞEKİLLER LİSTESİ

GİRİŞ

1906'da Fréchet [1] analizdeki bir çok problem (özellikle süreklilik kavramı) için oldukça faydalı bir yapı olan (pseudo) metrik uzayları tanımladı. 1914' te Hausdorff [2] tarafından tanımlanan (günümüzde Hausdorff uzaylar olarak bilinen) ve 1922'de Kuratowski [3] tarafından (bugün kullandığımız anlamda) tanımlanan topolojik uzaylarda noktasal yakınsaklık tanımlanabilir. Topolojik uzayların metrik uzaylar yerine kullanılmasının bir sebebi topolojik uzaylar (ve sürekli fonksiyonlar) ın kategorisi **Top** un alt uzaylar, çarpımlar, bölümler ve dual çarpımlar gibi bütün alışılmış yapıların mevcut olmasıdır. Oysa metrik uzaylar (ve büzülme dönüşümlerin (non expansive)) kategorisi **Met** de sadece alt uzaylar ve sonlu çarpımlar oluşumu mevcuttur. Metrik uzayların keyfi çarpımlarının ve dual-çarpımlarının her zaman mevcut olmaması sorunu metrik yerine genişletilmiş pseudo metrik, genişletilmiş quasi metrik, genişletilmiş semi (yarı) metrik ve hemi metrik kavramları tanımlanarak bu problem çözülmüştür, fakat bu defa da bu genişletilmiş metriklerden elde edilen topolojinin Hausdorff olmaması problemi ortaya çıkar. Başlangıç ve bitiş yapıların önemini göz önüne alırsak, metrikten topolojiye geçişin temel sebeplerinden birisi budur.

1931'de Wilson [4] quasi metrik uzayını, metrik uzayındaki simetri şartını kaldırarak tanımladı ve sonra 1941'de Albert [5], 1943'te Ribeiro [6], 1963'te Kelly [7], 1967'de Patty [8] ve Sion ve Zemer [9], 1972'de Fletcher ve Lindgren [10], 1993'te Künzi, Mrsevic, Reilly ve Vanamamurthy [11] bu uzayları geliştirdi.

Pseudo-quasi metrik uzayları quantum mekaniği [12], deneysel psikoloji [13], biyoloji [14] ve ekonomi [12] gibi alanlarda uygulama alanı vardır.

Genişletilmiş pseudo-quasi metrik uzayları hem klasik metrik uzayların hem de ön sıralı uzayların genelleştirilmesi olup alan teorisi (domain theory) ve denotasyonel semantik (denotational semantics) alanları için uygun uzaylardır [15], [16], [17], [18], [19], ve [20].

Tanım 0.0.1. X boştan farklı bir küme olmak üzere $d\colon X \times X \to [0, \infty]$ fonksiyonu aşağıdaki şartları gözönüne alalım:

(1) $\forall x \in X, d(x, x) = 0$,

(2) $\forall x, y, z \in X, d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$ (üçgen eşitsizliği) ,

(3) $\forall x, y \in X, d(x, y) = d(y, x)$ (simetri özelliği) ,

(4) $\forall x, y \in X, d(x, y) = 0 = d(y, x) \Rightarrow x = y$ (ayırma özelliği) ,

(5) $\forall x, y \in X, d(x, y) < \infty$ (sonluluk özelliği).

Eğer d fonksiyonu (1)-(5) şartlarını sağlarsa (X, d) ikilisine metrik uzay denir.

Eğer d fonksiyonu (1)-(4) şartlarını sağlarsa (X, d) uzayına genişletilmiş metrik uzay denir ve ∞-metrik uzayı ile gösterilir.

Eğer d fonksiyonu (1)-(3) ve (5) şartlarını sağlarsa (X, d) uzayına pseudo metrik uzay denir ve p-metrik uzayı ile gösterilir.

Eğer d fonksiyonu (1)-(2) ve (4)-(5) şartlarını sağlarsa (X, d) uzayına quasi metrik uzay denir ve q-metrik uzayı ile gösterilir.

Eğer d fonksiyonu (1) ve (3)-(5) şartlarını sağlarsa (X, d) uzayına yarı (semi) metrik uzay denir ve s-metrik uzayı ile gösterilir.

Eğer d fonksiyonu (1) ve (2) şartlarını sağlarsa (X, d) uzayına genişletilmiş pseudo-quasi metrik uzay denir ve ∞pq-metrik uzayı ile gösterilir.

Eğer d fonksiyonu (1) şartını sağlarsa (X, d) uzayına genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzay denir ve ∞pqs-metrik uzayı ile gösterilir.

Yukarıda tanımlanan değişik metrik kavramları ile ilgili temel referans olarak [21], [22], [16], [23], [24], [25], [26], [20], [18], [27], [28], [29] verilebilir.

Tanım 0.0.2. (X, d) ve (Y, e) genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzayları olsun. Eğer $\forall x, y \in X, e(f(x), f(y)) \leqslant d(x, y)$ ise $f\colon (X, d) \to (Y, e)$ ye büzülme (non-expansive) fonksiyonu denir.

Topolojik uzay kavramı; yakınsak uzay, limit uzayı, bornolojik uzay ve preorder uzaylarını da içine alarak Herrlich [30] , Kent [31] , Wyler [32], Schwarz [33] ve diğerleri tarafından topolojik kategori kavramına genelleştirilmiştir. Topolojik kategori değişik yollarla tanımlanmıştır. Örneğin, 1974 te Herrlich [30] da belli bir kaynaktan başlangıç kaldırmalarının (initial lift) varlığına dayanarak topolojik kategoriyi tanımlamıştır. Wyler [32] de topolojik kategori tanımını tam lattice kategorisindeki fanktora dayandırarak tanımlamıştır. Bahsedilen topolojik kategori ile ilgili temel referans olarak [36], [37], [38], [39] [40], [41] ve kategori teorisi ile ilgili temel referans olarak [42] ve [43] verilebilir.

Genel topolojide ayırma aksiyomları farklı noktaları ve ayrık kapalı cümleleri açık cümlelerle ayırmayı sağlamaktadır. Bu aksiyomlar Urysohn metrikleşme teoremi, Urysohn lemması ve Tietze genişleme teoremi gibi çok önemli teoremlerde karşımıza çıkmaktadır. Dolayısıyla bu kavramları herhangi bir topolojik kategoriye genişletmenin yanında bunları belli topolojik kategorilerde karakterize etmek de faydalı olmaktadır. Bu kavramları herhangi bir topolojik kategoriye genelleştirebilmek için bunların her birini başlangıç kaldırmaları, bitiş kaldırmaları, diskre ve indiskre objeler ile açıklayabilmek gerekmektedir.

Sonlu topolojik uzaylar bilgisayar alanının gelişmesiyle büyük bir önem kazandı. Sierpinski uzayı Scott topolojisindeki [44], [45] açık cümleleri karakterize ettiğinden semantik ve hesaplama teorisi ile önemli ilişkileri vardır. Sonlu bir cümle üzerinde sadece bir tane Haussdorff topoloji vardır fakat bir çok T_0 topolojileri vardır. Örneğin $B = \{a, b\}$ iki elemanlı cümle ise B üzerinde toplam dört farklı topoloji vardır. Üç tanesi T_0 topolojisi olup bunlardan iki tanesi homeomorfik değildir. $B = \{a, b, c, d\}$ dört elemanlı cümle ise B üzerinde toplam 355 farklı fakat 33 tanesi homeomorfik olmayan topolojiler, 219 farklı ve homeomorfik olmayan 16 T_0 topolojileri vardır. $B = \{a, b, c, d, e\}$ beş elemanlı cümle ise B üzerinde toplam 6942 farklı fakat 139 tanesi homeomorfik olmayan topolojiler, 4231 farklı ve homeomorfik olmayan 63 T_0 topolojileri vardır. Sonlu bir cümle üzerinde T_0 topolojilerinin sayıları ile bu cümle üzerindeki kısmi sıralama bağıntılarının sayıları eşittir [46], [47].

T_0 ayırma aksiyomu cebirsel topolojide lokal yarı basit (semisimple) örtüleri karakterize etmek için [48], bilgisayar alanında lamda kalkulusu ve dil programın denotasyonel semantikte topolojik model olarak [49], [50], [51], quantum mekaniğinde [52] ve dijital topolojide Khalimsky doğrusunu karakterize etmek için [53], [54], [55], kullanılır. Ayrıca, T_0 ayırma aksiyomu T_2 ayırma aksiyomunu karakterize etmek için [56] kullanıldı.

Tanım 0.0.3. B bir cümle ve $\Delta \subset B^2$ diyagonal olsun. B^2 nin ayrık iki kopyasının Δ da çakışmasına wedge çarpımı denir ve $B^2 \vee_\Delta B^2$ ile gösterilir [34]. Diğer bir ifadeyle, $(id, id) : \Delta \to B^2$ fonksiyonunun kendisiyle pushout diyagramı $B^2 \vee_\Delta B^2$ wedge çarpımını verir. Burada, $id : B^2 \to B^2$ birim fonksiyonudur. $B^2 \vee_\Delta B^2$ wedge çarpımındaki (x, y) noktası ilk bileşende ise $(x, y)_1$ ile ikinci bileşende ise $(x, y)_2$ ile gösterilir. $(x, y)_1 = (x, y)_2$ ise $x = y$ olduğu açıktır [34].

Tanım 0.0.4. Temel eksen dönüşümü, $A : B^2 \vee_\Delta B^2 \to B^3$,$A(x, y)_1 = (x, y, x)$ ve $A(x, y)_2 = (x, x, y)$, skewed eksen dönüşümü $S : B^2 \vee_\Delta B^2 \to B^3$,$S(x, y)_1 = (x, y, y)$ ve $S(x, y)_2 = (x, x, y)$, katlama dönüşümü $\nabla : B^2 \vee_\Delta B^2 \to B^2$, $\nabla(x, y)_i = (x, y)$, $i = 1, 2$ şeklinde tanımlanır [34].

(B, τ) bir topolojik uzay olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir [56]:

1. (B, τ) uzayı T_0 dır.

2. B^3 üzerindeki çarpım topolojisi τ^* olmak üzere $A\colon B^2 \vee_\Delta B^2 \to (B^3, \tau^*)$ ve $\nabla\colon B^2 \vee_\Delta B^2 \to (B^2, P(B^2))$ fonksiyonları tarafından üretilen başlangıç topolojisi diskredir.

3. $i_1, i_2\colon B^2 \to B^2 \vee_\Delta B^2$, $(x, y) \mapsto i_1(x, y) = (x, y)_1$, $(x, y) \mapsto i_2(x, y) = (x, y)_2$ fonksiyonları tarafından üretilen $B^2 \vee_\Delta B^2$ üzerindeki bitiş topolojisi τ_* olmak üzere, $id\colon B^2 \vee_\Delta B^2 \to (B^2 \vee_\Delta B^2, \tau_*)$ birim fonksiyonu ve $\nabla\colon B^2 \vee_\Delta B^2 \to (B^2, P(B^2))$ fonksiyonu tarafından üretilen başlangıç topolojisi diskredir.

4. (B, τ) topolojik uzayı en az iki elemanlı indiskre alt uzayını ihtiva etmez.

Değişik T_0 formları 1971'de Brümmer [57], 1973'te Marny [58], 1974'te Hoffmann [59], 1977'de Harvey [60] ve 1991'de Baran [34] tarafından topolojik kategoriye genelleştirildi. Bu değişik T_0 formları arasındaki ilişkiler 1991'de

W. Schwarz [61] ve 1995'te Baran ve Altındiş [62] inceledi. Ayrıca, Baran [63] çalışmalarında T_0 objeleri kullanarak bir topolojik kategorideki Hausdorff objelerin çeşitli formlarını tanımladı.
Baran 1991 yılında (B, τ) topolojik uzayı T_1 dir ancak ve ancak B^3 üzerindeki çarpım topolojisi τ^* olmak üzere $S\colon B^2 \vee_\Delta B^2 \;\rightarrow\; (B^3, \tau^*)$ ve $\nabla\colon B^2 \vee_\Delta B^2 \;\rightarrow\; (B^2, P(B^2))$ fonksiyonları tarafından üretilen başlangıç topolololojisi diskredir ifadesini ispatladı [56], burada S skewed eksen dönüşümüdür ve bunu kullanarak T_1 ayırma aksiyomunu topolojik kategoriye genelleştirdi [34]. İlaveten 1998 yılında T_1 objeleri kullanarak herhangi bir topolojik kategorideki T_3, T_4, regüler, tam regüler ve normal objeleri tanımladı [64], [65].

Baran [34], [66], kümeler üzerinde tanımlanmış keyfi bir topolojik kategori için öncelikle bir p noktasında, yani lokal olarak ayırma aksiyomlarını tanımlamıştır. Ardından bunu topos teorideki üreteç eleman (the generic element) metodunu [67], [68] kullanarak noktadan bağımsız olan tanımlara genelleştirmiştir. Topostaki objeler noktalara sahip olmayabilir, fakat bu objelerin her zaman bir üreteç noktası mevcuttur. Bu genelleştirmeyi yapmasının bir nedeni budur. Diğer bir nedeni de keyfi topolojik kategorilerde "kapalılık" ve "kuvvetli kapalılık" kavramlarının bir noktadaki T_0 ve T_1 ayırma aksiyomları cinsinden tanımlanmış olmasıdır [69].

T_1 ayırma aksiyomu cebirde maximal idealler cinside Boolean latisi ve Stone uzaylarında sıfır boyutlu uzayların bazını teorik olarak elde etmek için cebirsel model olarak [70], bilgisayar alanında Sober uzayları ile Scott topolojisi arasındaki ilişkiyi veren modelleri [71] ve quantum mekaniğinde [52] atomik sistemin atomik durum özelliğini karakterize etmek için kullanılır [72]. Ayrıca, T_1 ayırma aksiyomu T_3 ve T_4 ayırma aksiyomlarını karakterize etmek için [65] kullanıldı.

Bu tez çalışmasında genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzaylarda lokal ve genel T_0 ve T_1 ayırma aksiyomları karakterize edilmiştir. İlave olarak, lokal ve genel T_0 ve T_1 uzayları arasındaki ilişkiler araştırılmıştır. Bu T_0 ve T_1 uzayları ile klasik anlamda T_0 ve T_1 uzayları arasında ilişkiler incelenmiştir.

Birinci bölümde, İlk olarak değişik şekilde genişletilmiş metrik uzayları, örnekleri, özellikleri, topolojik kategorik kavramlar ve bunlarla ilgili gerekli bazı teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde, genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzaylar (ve büzülme fonksiyonların) kategorisi ∞**pqsMet** in topolojik kategori olduğu gösterilmiş ve bu kategoride önemli bazı özel objeleri ve morfizmleri karakterize edilmiştir.

Üçüncü bölümde, lokal $\overline{T}_0$ ve lokal T_0' genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzaylar karakterize edilmiş ve bunlar arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

Dördüncü bölümde ise genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzayların değişik T_0 formlarının herbiri karakterize edilmiş, bu değişik formlar arasında ortaya çıkan ilişkiler incelenmiş, bu uzaylarla lokal T_0 versiyonları arasındaki bağlantılar araştırımıştır.

Son bölümde tezde elde edilen sonuçlar biraraya getirilmiş, ilişkiler incelenmiş ve sonraki çalışmalar için bazı önerilerde bulunulmuştur.

1. BÖLÜM

TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER

Bu bölümde, genişletilmiş bazı metrik uzayları, örnekleri, topolojik kategori ve bunlarla ilgili gerekli bazı teoremler verilmiştir.

1.1. Genişletilmiş Metrik Uzaylar

Tanım 1.1.1. X boştan farklı bir küme olmak üzere $d\colon X \times X \to [0,\infty]$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlasın.

(1) $\forall x \in X, d(x,x) = 0$,

(2) $\forall x,y,z \in X, d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$ (üçgen eşitsizliği) ,

(3) $\forall x,y \in X, d(x,y) = d(y,x)$ (simetri özelliği) ,

(4) $\forall x,y \in X, d(x,y) = 0 = d(y,x) \Rightarrow x = y$ (ayırma özelliği) ,

(5) $\forall x,y \in X, d(x,y) < \infty$ (sonluluk özelliği).

Eğer d fonksiyonu (1)-(5) şartlarını sağlarsa (X,d) ikilisine metrik uzay denir.

Eğer d fonksiyonu (1)-(4) şartlarını sağlarsa (X,d) uzayına genişletilmiş metrik uzay denir ve ∞-metrik uzayı ile gösterilir.

Eğer d fonksiyonu (1)-(3) ve (5) şartlarını sağlarsa (X,d) uzayına pseudo metrik uzay denir ve p-metrik uzayı ile gösterilir.

Eğer d fonksiyonu (1)-(2) ve (4)-(5) şartlarını sağlarsa (X,d) uzayına quasi metrik uzay denir ve q-metrik uzayı ile gösterilir.

Eğer d fonksiyonu (1) ve (3)-(5) şartlarını sağlarsa (X,d) uzayına yarı (semi) metrik uzay denir ve s-metrik uzayı ile gösterilir.

Eğer d fonksiyonu (1) ve (2) şartlarını sağlarsa (X,d) uzayına genişletilmiş pseudo-quasi metrik uzay denir ve ∞pq-metrik uzayı ile gösterilir.

Eğer d fonksiyonu (1) ve (3) şartlarını sağlarsa (X,d) uzayına genişletilmiş

pseudo-quasi-yarı metrik uzay denir ve ∞ps-metrik uzayı ile gösterilir.
Eğer d fonksiyonu (1), (3) ve (5) şartlarını sağlarsa (X, d) uzayına genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzay denir ve ps-metrik uzayı ile gösterilir.
Eğer d fonksiyonu (1)-(3) şartlarını sağlarsa (X, d) uzayına genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzay denir ve ∞p-metrik uzayı ile gösterilir.

(X, d) metrik uzayı ve $x, y \in X$ için $d(x, y)$ değeri x noktasından y noktasına olan uzaklığı ifade eder. Yukarıdaki tanımda d simetri özelliği sağlamazsa $d(x, y)$ değeri ile $d(y, x)$ değeri arasındaki farklılık değerlendirilebilir. Dağlık bir bölgede $d(x, y)$ değeri x noktasından y noktasına gitmek için harcanan çaba (efort) yı ifade ederse aşağıdan yukarıya gitmek için harcanan çaba yukarıdan aşağıya gitmek için harcanan çabadan daha fazladır.
Yukarıda tanımlanan değişik metrik kavramları ile ilgili temel referans olarak [22], [16], [23], [24], [25], [26], [20], [18], [27], [28], [29], [73], [74], [75], verilebilir.

Not 1.1.1. (1) pq-metrik uzayı (X, d) T_0 uzayıdır ancak ve ancak (X, d) quasi metrik uzayıdır. Diğer bir ifadeyle, pq-metrik uzayı (X, d) T_0 uzayıdır ancak ve ancak her $x, y \in X, d(x, y) = 0 = d(y, x) \Rightarrow x = y$ dir [75]. Dolayısıyla, pseudo-quasi T_0 uzayına quasi metrik uzayı denir.
(2) pq-metrik uzayı (X, d) T_1 uzayıdır ancak ve ancak (X, d) quasi metrik uzayı ve her $x, y \in X, d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$ dir [75]. Dolayısıyla, pseudo-quasi T_1 uzayına T_1 quasi metrik uzayı denir.

1.1.1. Genişletilmiş Metrik Uzay Örnekleri

Bu bölümde çeşitli genişletilmiş metrik uzay örnekleri verilmiştir.

Örnek 1.1.1. X boştan farklı bir küme olmak üzere her $x, y \in X$ için $d\colon X \times X \to [0, \infty]$ fonksiyonu

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{eğer } x = y \\ \infty, & \text{eğer } x \neq y \end{cases}$$

biçiminde tanımlansın. O halde (X, d) genişletilmiş metrik uzaydır.

Örnek 1.1.2. $\mathbf{R}$ reel sayılar kümesi olmak üzere $\forall x, y \in \mathbf{R}$ için $d\colon \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to [0, \infty]$ fonksiyonu

$$d(x,y) = \begin{cases} x - y, & \text{eğer } x \geqslant y \\ \infty, & \text{eğer } x < y \end{cases}$$

genişletilmiş quasi metriktir çünkü $d(1,2) = \infty \neq 1 = d(2,1)$.

Örnek 1.1.3. $\mathbf{R}$ reel sayılar kümesi olmak üzere her $x, y \in \mathbf{R}$ için $d\colon \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to [0, \infty]$ fonksiyonu

$$d(x,y) = \begin{cases} y - x, & \text{eğer } x \leqslant y \\ 1, & \text{eğer } x > y \end{cases}$$

biçiminde tanımlansın. O halde d quasi metriktir.

Örnek 1.1.4. Her $x, y \in [0, \infty]$ için $d\colon [0, \infty] \times [0, \infty] \to [0, \infty]$ fonksiyonu

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{eğer } x \geqslant y \\ y - x, & \text{eğer } x < y \end{cases}$$

biçinde tanımlansın. O halde d genişletilmiş pseudo-quasi metriktir.

Örnek 1.1.5. $\mathbf{R}$ reel sayılar kümesi ve $\mathbf{R}' = \mathbf{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ olsun. $\infty - \infty = 0$ ve $-\infty + \infty = 0$ olmak üzere $\forall x, y \in \mathbf{R}'$ için $d\colon \mathbf{R}' \times \mathbf{R}' \to [0, \infty]$ fonksiyonu $d(x,y) = max\{x - y, 0\}$, $\mathbf{R}'$ üzerinde genişletilmiş quasi metriktir.

Örnek 1.1.6. $a > 0$ olmak üzere $\mathbf{R}$ reel sayılar kümesi olmak üzere $\forall x, y \in \mathbf{R}$ için $d\colon \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to [0, \infty]$ fonksiyonu

$$d(x,y) = \begin{cases} y - x, & \text{eğer } y \geqslant x \\ a(x - y), & \text{eğer } y < x \end{cases}$$

$\mathbf{R}$ üzerinde bir quasi metriktir.

Çözüm Her $x \in \mathbf{R}, d(x,x) = x - x = 0$ dır. $\forall x,y,z \in \mathbf{R}, d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$ olduğunu gösterelim. $x \leqslant y \leqslant z$ için $d(x,y) + d(y,z) = y - x + z - y = z - x \geqslant z - x = d(x,z)$ olur. $x < y < z$ için $d(x,y) + d(y,z) = a(y-x) + a(z-y) = a(z-x) \geqslant a(z-x) = d(x,z)$ dır. $\forall x,y \in \mathbf{R}, d(x,y) = 0 = d(y,x)$ olsun. Eğer $x \leqslant y$ ise $d(x,y) = y - x = 0$ olduğundan $x = y$ dir. Eğer $y < x$ ise $d(x,y) = a(x-y) = 0$ olduğundan $x - y = 0$ çünkü $a > 0$ dır. Dolayısıyla, $x = y$ olur. Bu da $y < x$ ile çelişir. Benzer şekilde, eğer $y \leqslant x$ ise $d(y,x) = x - y = 0$ olduğundan $x = y$ dir. Eğer $x < y$ ise $d(y,x) = a(y-x) = 0$ olduğundan $y - x = 0$ çünkü $a > 0$ dır. Dolayısıyla, $x = y$ olur. Bu da $x < y$ ile çelişir. O halde, d $\mathbf{R}$ üzerinde bir quasi metriktir.

Örnek 1.1.7. $\mathbf{N}$ doğal sayılar kümesi olmak üzere $\forall x,y \in \mathbf{N}$ için $d\colon \mathbf{N} \times \mathbf{N} \to [0,\infty]$ fonksiyonu

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{eğer } x = y, \\ 1/x, & \text{eğer } x \neq y, \end{cases}$$

olsun. d $\mathbf{N}$ üzerinde bir quasi metriktir.

Örnek 1.1.8. Her pseudo metrik uzayından metrik uzayı elde edilir.

İspat: (X,d) pseudo metrik uzayı ve $\forall x,y \in X$ için $x \sim y \Leftrightarrow d(x,y) = 0$ olsun. $\sim$, X üzerinde bir denklik bağıntısıdır çünkü (X,d) pseudo metrik uzayıdır. $X/\sim$ bölüm uzayı olsun. $d^*\colon X/\sim \times X/\sim \to [0,\infty]$, $\forall [x],[y] \in X/\sim$, $d^*([x],[y]) = d(x,y)$ şeklinde tanımlansın. Önce d^* ın iyi tanımlı olduğunu gösterelim. $([x],[y]) = ([z],[w])$ olsun. Buradan $[x] = [z]$ ve $[y] = [w]$ dur ve $z \in [x]$ ve $w \in [y]$ olur. $d(z,w) \leqslant d(z,x) + d(x,y) + d(y,w) \leqslant d(x,y)$ ve $d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,w) + d(w,y) \leqslant d(z,w)$ den $d(x,y) = d(z,w)$ olur. Yani, $d^*([x],[y]) = d^*([z],[w])$. O halde d^* iyi tanımlıdır.

d Tanım 1.1.1 deki (1)-(3) şartlarını sağladığından d^* Tanım 1.1.1 deki (1)-(3) şartlarını sağlar. d^* ın (4). şartı sağladığını göstermek gerekir. Her $x,y \in X$ ve $[x] \neq [y]$ için $d^*([x],[y]) > 0$ olduğunu göstermek yeterlidir. Eğer $d^*([x],[y]) = 0$ ise $d^*([x],[y]) = d(x,y) = 0$ olur. $x \in [y]$ ve $[x] = [y]$, bu da çelişkidir. O halde $d^*([x],[y]) > 0$ ve d^* $X/\sim$ üzerinde bir metriktir.

Örnek 1.1.9. Her quasi metrik uzayından metrik uzayı elde edilir.

İspat: (X, d) quasi metrik uzayı ve $\forall x, y \in X$ için $d^s(x, y) = \max\{d(x, y), d(y, x)\}$ olsun. (X, d^s) metrik uzayıdır çünkü d Tanım 1.1.1 deki (1)-(2) ve (4) şartlarını sağladığından d^s de Tanım 1.1.1 deki (1)-(2)ve (4) şartlarını sağlar. d^s nin (3). şartı sağladığını göstermek gerekir. Her $x, y \in X$ için $d^s(x, y) = \max\{d(x, y), d(y, x)\} = d^s(y, x)$ dır, yani d^s simetriktir. O halde (X, d^s) metrik uzayıdır.

Örnek 1.1.10. $Y = C(X, \mathbf{R}) = \{f | f : X \to \mathbf{R}\}$ ve $x_0 \in X$ olsun. Her $f, g \in Y$ için $d(f, g) = |f(x_0) - g(x_0)|$ şeklinde tanımlanan d: $Y \times Y \to [0, \infty]$ fonksiyonu Y üzerinde bir pseudo metriktir.

Tanım 1.1.2. (X, d) metrik uzayı olsun.
(1) $a \in X$ için $S(a, r) = \{x \in X : d(x, a) < r, r > 0\}$ a merkezli r yarıçaplı açık yuvar denir.
(2) $\beta = \{S(a, r) : a \in X$ ve $r > 0\}$ bazı tarafından doğrulan topolojiye metrik topoloji denir ve τ_d ile gösterilir.
(3) (X, τ) topolojik uzayı verilsin. Eğer X üzerinde bir d metriği mevcut ve $\tau = \tau_d$ ise (X, τ) uzayına metrikleşebilir uzay denir.

Teorem 1.1.1. Sayılabilir adetteki metrikleşebilir uzayların çarpımı metrikleşebilir uzaydır.

İspat: $\{(X_i, d_i), i \in I = \mathbf{N}\}$ metrikleşebilir uzaylar olsun. $X = \prod_{i \in I} X_i$ ve $\forall x, y \in X$ için $d(x, y)$ =sup{min$\{d_i(x_i, y_i), 1\}/i + 1 : i \in I\}$ (X, d) nin metrikleşebilir uzay olduğunu gösterelim. d nin bir metrik olduğu kolayca görülür. Şimdi metrik topolojisinin çarpım topolojisine eşit olduğunu gösterelim, yani $\tau_* = \tau_d$. $U \in \tau_d$ ve $a \in U$ olduğundan en az bir $r > 0$ sayısı vardır öyleki $S(a, r) \subset U$ olur. $n \in \mathbf{N}$ ve $1/n < s = r/2 < r$ olmak üzere $V = S(a_1, s) \times S(a_2, s) \times ... \times S(a_n, s) \times X_{n+1} \times ...$ çarpım topolojisinin bir baz elemanı olup hem a yı hem de $S(a, r)$ nin alt kümesidir, yani $a \in V \subset S(a, r)$ dır. $V \subset U$ olduğunu gösterelim. $x \in V$ olsun. $i \geqslant n$ ise her $x_i \in X_i$ için min $\{d_i(x_i, y_i), 1\}/i + 1 : i \in I\} \leqslant 1/i + 1 \leqslant 1/n \leqslant s = r/2 < r$ dır. Eğer $i < n$ ise her $x_i \in S(a_i, r)$ için min $\{d_i(x_i, y_i), 1\}/i + 1 : i \in I\} \leqslant d_i(x_i, y_i)/i + 1 \leqslant s/i + 1 \leqslant s = r/2 < r$ olur. Dolayısıyla $d(x, a) \leqslant s = r/2 < r$ dır, yani $x \in S(a, r)$ olur. O halde $V \subset S(a, r) \subset U$ dır. Buradan da $U \in \tau_*$ ve $\tau_d \subset \tau_*$

dır.

Şimdi de $\tau_d \supset \tau_*$ olduğunu gösterelim. V τ_* ın bir alt baz elamanı olsun, yani $U \subset X_i$ açık küme olmak üzere $V = X_1 \times X_2 \times ... \times X_{i-1} \times U \times X_{i+1} \times ...$ ve $a \in V$ olsun. $a_i \in U$ ve U açık olduğundan $1 > \epsilon > 0, S(a_i, \epsilon) \subset U$ dır. $r = \epsilon/i+1$ olsun. $S(a, r) \subset V$ olduğunu gösterelim.$x \in S(a, r)$ ise min $\{d_i(x_i, y_i), 1\})/i+1 \leqslant sup\{min\{d_i(x_i, y_i), 1\})/i+1 : i \in I\} = d(x, a) < r = \epsilon/i+1$ ve min $\{d_i(x_i, y_i), 1\} < \epsilon$ olur ve dolayısıyla $d_i(x_i, y_i)$ = min $\{d_i(x_i, y_i), 1\} < \epsilon$ olur. Demek ki $x_i \in U$ ve $x \in V$ dır, yani $S(a, r) \subset V$ ve dolayısıyla $V \in \tau_d$ dır. Sonuç olarak, $\tau_d = \tau_*$ ve (X, d) metrikleşebilir uzaydır.

Tanım 1.1.3. (X, d) ve (Y, e) genişletilmiş metrik uzayları olsun.Eğer $\forall x, y \in X, e(f(x), f(y)) \leqslant d(x, y)$ ise $f\colon (X, d) \to (Y, e)$ ye büzülme (non-expansive) fonksiyonu denir.

Örnek 1.1.11. (X, d), (Y, e) ve (Z, m) genişletilmiş metrik uzaylar olsun.
(1) Eğer $f\colon (X, d) \to (Y, e)$ sabit fonksiyon ise f büzülme fonksiyonudur çünkü $\forall x, y \in X, e(f(x), f(y)) = e(c, c) = 0 \leqslant d(x, y)$ dır.
(2) Eğer $f\colon (X, d) \to (X, d)$ birim fonksiyon ise f büzülme fonksiyonudur çünkü $\forall x, y \in X, d(f(x), f(y)) = d(x, y) \leqslant d(x, y)$ dır.
(3) Eğer $f\colon (X, d) \to (Y, e)$ ve $g\colon (Y, e) \to (Z, m)$ büzülme fonksiyonları ise $g \circ f$ de büzülme fonksiyonudur çünkü $\forall x, y \in X, m(((g \circ f)(x), (g \circ f)(y))) \leqslant e(f(x), f(y)) \leqslant d(x, y)$ (f ve g büzülme fonksiyonları olduğundan) ve dolayısıyla, $\forall x, y \in X, m(((g \circ f)(x), (g \circ f)(y))) \leqslant d(x, y)$ olur. O halde $g \circ f$ de büzülme fonksiyonudur.
(4) Eğer $f\colon (X, d) \to (Y, e)$ büzülme fonksiyonu ise f düzgün süreklidir ve dolayısıyla f süreklidir çünkü $\forall x, y \in X, \delta = \epsilon/2$ için $e(f(x), f(y)) \leqslant d(x, y) < \delta = \epsilon/2 < \epsilon$ dır.

Tanım 1.1.4. (X, τ) topolojik uzay olsun. Eğer X'in her noktasında sayılabilir bir lokal bazı varsa (X, τ) uzayına I.sayılabilir uzay denir.

Örnek 1.1.12. Her metrik uzay I.sayılabilir uzaydır.

Teorem 1.1.2. (X, τ) I.sayılabilir uzay, $a \in X$ ve $A \subset X$ olsun. $(x_n), n \in \mathbf{N}$ A'da bir dizi ve $x_n \to a$ ise $a \in A$ dır ancak ve ancak A kapalıdır [76].

Teorem 1.1.3. Sayılamaz sonsuz adetteki metrikleşebilir uzayların çarpımı metrikleşebilir uzay olmayabilir.

İspat: $X_i = \{0,1\}, i \in \mathbf{R}$, d_i diskre metriği ve $\{(X_i, d_i), i \in \mathbf{R}\}$ metrikleşebilir uzaylardır. $X = \prod_{i\in\mathbf{R}} X_i = \{0,1\}^{\mathbf{R}}$ I.sayılabilir uzay olmadığını gösterelim. $A = \{\bar{x} \in X : x_i = 1$ sonlu sayıdaki $i \in \mathbf{R}\}$ ve $B = A^C, A$ nın tümleyeni olsun. $(\bar{x_n}), n \in \mathbf{N}$ A' da bir dizi ve $\bar{x_n} \to \bar{x}$ ise $\bar{x} \in A$ olduğunu gösterelim. $(\bar{x_n}) = (x_{n_i}), i \in \mathbf{R}$, $\bar{x} = (x_i), i \in \mathbf{R}$ ve her $i \in \mathbf{R}$ için $\bar{x_n} \to \bar{x}$ yeterince büyük n için $x_{n_i} = x_i$ ve $\{i \in \mathbf{R} : x_i = 1\} \subset \cup_{n\in\mathbf{N}}\{i \in \mathbf{R} : x_{n_i} = 1\}$ sayılabilir kümedir. O halde $\bar{x} \in A$ dır. A kapalı değildir, yani $B = A^C$ açık küme değildir. Eğer $B = A^C$ açık ise her $\hat{x} \in B$ için en az bir $\prod_{i\in\mathbf{R}} U_i$ baz elemanı vardır öyle ki $\bar{x} \in \prod_{i\in\mathbf{R}} U_i \subset B$, her $i \in \mathbf{R}$ için U_i açık ve $U_i = \{0,1\}, i \notin J \subset \mathbf{R}$ ve J sonlu kümedir.

$$y = \begin{cases} x_i, & \text{eğer } i \in J \\ 0, & \text{eğer } i \notin J \end{cases}$$

olsun. $y \in \prod_{i\in\mathbf{R}} U_i$ ve $y \in A$ olur, yani $y \notin B = A^C$ dir. Bu da $\prod_{i\in\mathbf{R}} U_i \subset B$ ile çelişir. O halde B açık değidir, yani A kapalı değildir. Teorem 1.1.2. den $X = \prod_{i\in\mathbf{R}} X_i = \{0,1\}^{\mathbf{R}}$ I.sayılabilir uzay değildir ve dolayısıyla, $X = \{0,1\}^{\mathbf{R}}$ metrikleşebilir uzay değildir.

1.1.2. Genişletilmiş Metrik Tarafından Üretilen Topoloji

Tanım 1.1.5. (X, d) uzayı genişletilmiş metrik uzayı ve $a \in X$ olsun. $S(a, r) = \{x \in X : d(x, a) < r, r > 0\}$ kümesine a merkezli r yarıçaplı açık yuvar (disk) denir.

(X, d) uzayı genişletilmiş metrik uzayı ve $\mathbb{B}_d = \{S(a, r) : a \in X, r > 0\}$ X için bir alt bazdır. Bu alt bazdan elde edilen topoloji τ_d olsun.

Örnek 1.1.13. X boştan farklı bir küme olmak üzere $\forall x, y \in X$ için $d\colon X \times X \to [0, \infty]$ fonksiyonu

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{eğer } x = y \\ \infty, & \text{eğer } x \neq y \end{cases}$$

olsun. O zaman $a \in X$ ve $r > 0$ için $S(a,r) = \{a\}$ dır.

$\mathbb{B}_d = \{S(a,r) : a \in X, r > 0\} = \{\{a\} : a \in X\}$ X için bir bazdır. Bu bazdan elde edilen topoloji $\tau_d = P(X)$ dir.

Örnek 1.1.14. **R** reel sayılar kümesi olmak üzere $\forall x, y \in \mathbf{R}$ için $d\colon \mathbf{R}\times\mathbf{R} \to [0,\infty]$ fonksiyonu

$$d(x,y) = \begin{cases} x - y, & \text{eğer } x \geqslant y \\ 1, & \text{eğer } x < y \end{cases}$$

genişletilmiş quasi metriktiği verilsin.

$$S(a,r) = \begin{cases} [a, a+r), & \text{eğer } r \leqslant 1, \\ (-\infty, a+r), & \text{eğer } r > 1, \end{cases}$$

$\mathbb{B}_d = \{S(a,r) : a \in X, r > 0\} = \{[a,a+r), (-\infty, a+r) : a \in \mathbf{R}\}$ **R** için bir bazdır. Bu bazdan elde edilen topoloji $\tau_d = \tau_l$ alt limit topolojidir [22], [25].

1.2. Topolojik Kategori

Tanım 1.2.1. [36] **E** bir kategori ve I bir indis kümesi olsun. $i \in I$ için A ve $A_i \in Ob(\mathbf{E})$ olmak üzere $f_i\colon A \to A_i$ morfizmleri verilsin. $(A, (f_i)_{i\in I})$ ikilisine bir **kaynak** denir.

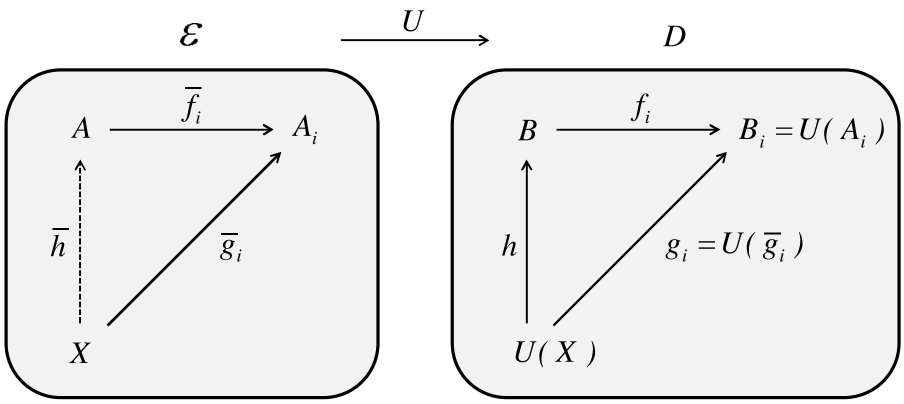
Tanım 1.2.2. [36] **E** bir kategori ve I bir indis kümesi olsun. $i \in I$ için A ve $A_i \in Ob(\mathbf{E})$ olmak üzere $f_i\colon A_i \to A$ morfizmleri verilsin. $((f_i)_{i\in I}, A)$ ikilisine bir **kavşak** denir. Kavşak kavramı kaynak kavramının dualidir.

Tanım 1.2.3. **E** ve **D** kategoriler olmak üzere $U\colon \mathbf{E} \to \mathbf{D}$ bir fanktoru verilsin.

(1) $i \in I$ için $A_i \in Ob(\mathbf{E})$, $B \in Ob(\mathbf{D})$ ve $f_i\colon B \to B_i = U(A_i)$ morfizmleri **D** kategorisinde bir $U-$kaynağı olsun. $\{f_i\}_{i\in I}$ ailesinin bir **başlangıç kaldırmasının (initial lift)** $A \in Ob(\mathbf{E})$, $U(A) = B$ ve $U(\overline{f_i}) = f_i$

olacak şekildeki $\overline{f_i}\colon A \to A_i$ morfizmler ailesi olması için aşağıdaki şart sağlanmalıdır:

$\overline{g_i}\colon X \to A_i$, **E** kategorisinde morfizmlerin bir ailesi ve $U(\overline{g_i}) = g_i$ olmak üzere her $i \in I$ için $f_i \circ h = g_i$ olacak şekilde bir $h\colon U(X) \to B$ morfizmi varsa her $i \in I$ için $\overline{f_i} \circ \overline{h} = \overline{g_i}$ olacak şekilde en az bir $\overline{h}\colon X \to A$ morfizmi vardır.



Şekil 1.1. Başlangıç Kaldırma

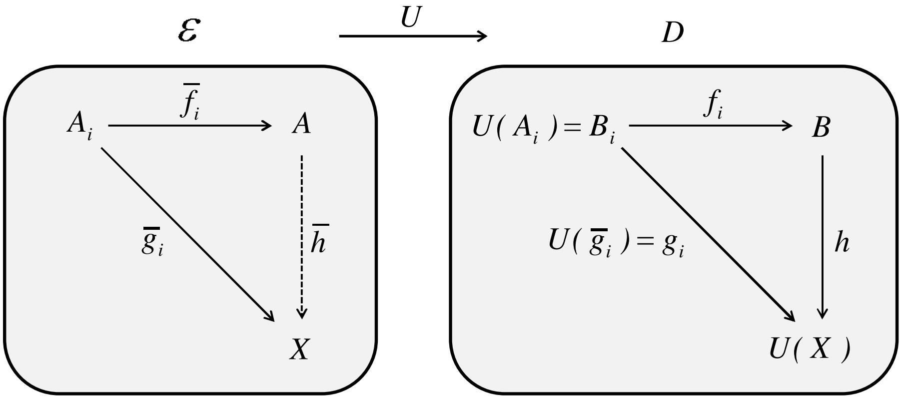
Eğer $\overline{f_i}\colon A \to A_i$ bir başlangıç kaldırma ise A üzerindeki yapıya $\overline{f_i}$ morfizmleri tarafından A_i objelerinden elde edilen yapı denir.

(2) $i \in I$ için $A_i \in Ob(\mathbf{E})$ ve $f_i\colon U(A_i) = B_i \to B$ morfizmleri **D** kategorisinde bir **E**-kavşağı olsun. $\{f_i\}_{i \in I}$ ailesinin bir **bitiş kaldırmasının (final lift)** $A \in Ob(\mathbf{E})$, $U(A) = B$ ve $U(\overline{f_i}) = f_i$ olacak şekildeki $\overline{f_i}\colon A_i \to A$ morfizmler ailesi olması için aşağıdaki şart sağlanmalıdır:

$\overline{g_i}\colon A_i \to X$, **E** kategorisinde morfizmlerin bir ailesi ve $U(\overline{g_i}) = g_i$ olmak üzere her $i \in I$ için $h \circ f_i = g_i$ olacak şekilde bir $h\colon B \to U(X)$ morfizmi varsa her $i \in I$ için $\overline{h} \circ \overline{f_i} = \overline{g_i}$ olacak şekilde en az bir $\overline{h}\colon A \to X$ morfizmi vardır.

Eğer $\overline{f_i}\colon A_i \to A$ bir bitiş kaldırma ise A üzerindeki yapıya $\overline{f_i}$ morfizmleri tarafından A_i objelerinden elde edilen yapı denir.

Tanım 1.2.4. [36] **E** ve **D** kategoriler olmak üzere $U\colon \mathbf{E} \to \mathbf{D}$ fanktoru verilsin. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyor ise U ya bir **topolojik fanktor** veya **E** kategorisine **D** üzerinde bir **topolojik kategori** denir.



Şekil 1.2. Bitiş Kaldırma

(1) U fanktoru belirli (düzenli ve amnestik) olmalıdır.

(2) U fanktoru küçük demetlere sahip olmalıdır.

(3) Her $U-$kaynağı bir başlangıç kaldırmaya (initial lift) sahip olmalıdır.

Örnek 1.2.1. **Top** ve **Set** kategorileri verilsin. $U(X,\tau) = X$ şeklinde tanımlı U: **Top** $\to$ **Set** unutkan fanktoru bir topolojik fanktordur.

Tanım 1.2.5. [77] **E** bir kategori olmak üzere U: **E** $\to$ **Set** topolojik fanktoru bir D: **Set** $\to$ **E** sol adjointine sahip olup, bu sol adjointe **diskre fanktor** ve $A = D(U(A))$ objesine de **E** kategorisinde **diskre obje** denir.

Teorem 1.2.1. [77] **E** bir topolojik kategori olsun. $A \in Ob(\mathbf{E})$ objesi diskredir ancak ve ancak her $C \in Ob(\mathbf{E})$ için her $U(A) \to U(C)$ morfizmi $A \to C$ morfizmine kaldırılabilirdir.

Tanım 1.2.6. [77] **E** bir kategori olmak üzere U: **E** $\to$ **Set** topolojik fanktoru bir D^*: **Set** $\to$ **E** sağ adjointine sahip olup, bu sağ adjointe **indiskre fanktor** ve $B = D^*(U(B))$ objesine de **E** kategorisinde **indiskre obje** denir.

Teorem 1.2.2. [77] **E** bir topolojik kategori olsun. $B \in Ob(\mathbf{E})$ objesi indiskredir ancak ve ancak her $C \in Ob(\mathbf{E})$ için her $U(C) \to U(B)$ morfizmi $C \to B$ morfizmine kaldırılabilirdir.

Örnek 1.2.2. Tanım kümesi diskre topolojik uzay veya değer kümesi indiskre topolojik uzay olan her fonksiyon sürekli olduğundan $\mathbf{E} = \mathbf{Top}$ için diskre obje diskre topolojik uzay, indiskre obje de indiskre topolojik uzay olur.

Teorem 1.2.3. **B** kategorisi keyfi çarpımlara ve $U: \mathbf{E} \to \mathbf{B}$ fanktoru belirli ve küçük demetlere sahip olsun. **E** kategorisi **B** üzerinde topolojik kategoridir ([30], [36], [40], [41]) ancak ve ancak aşağıdaki şartlar sağlanır:
(1) **E** kategorisi keyfi çarpımlara ve alt uzaylara sahiptir,
(2) **E** kategorisi indiskre objelere sahiptir [36], [40].

1.3. Temel Amaçlar

Bu tezin temel sonuçları şunlardır:

(1) Lokal $\overline{T}_0$, lokal T_0' ve lokal T_1 genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzaylar karakterize etmek ve bunlar arasındaki ilişkileri incelemektir.

(2) Değişik T_0 formları ve T_1 genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzaylar karakterize etmek, bu değişik formları kendi aralarında ve T_1 arasında ortaya çıkan ilişkileri incelemek, bu uzaylarla lokal $\overline{T}_0$, lokal T_0' ve lokal T_1 genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzaylar arasındaki bağlantıları araştırmak. Bu uzayların herbirisinin kalıtsal ve çarpımsal olduğunu göstermektir.

(3) Değişik T_0 formları ve T_1 genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzaylar ile klasik anlamda T_0 ve T_1 uzayları arasındaki ilişkileri araştırmaktır.

1.4. Araştırmanın Önemi

Genel topolojide ayırma aksiyomları farklı noktaları ve ayrık kapalı cümleleri açık cümlelerle ayırmayı sağlamaktadır. Bu aksiyomlar Urysohn metrikleşme teoremi, Urysohn lemması, Tietze genişleme teoremi, Tychonoff teoremi gibi çok önemli teoremlerde karşımıza çıkmaktadır. Dolayısıyla bu kavramları herhangi bir topolojik kategoriye genişletmenin yanında bunları belli topolojik kategorilerde karakterize etmek de faydalı olmaktadır. Bu kavramları herhangi bir topolojik kategoriye genelleştirebilmek için bunların her birini başlangıç kaldırmaları, bitiş kaldırmaları, diskre ve indiskre objeler ile açıklayabilmek gerekmektedir.

Sonlu topolojik uzaylar bilgisayar alanının gelişmesiyle büyük bir önem kazandı. Sierpinski uzayı Scott topolojisindeki [44], [45] açık cümleleri karakterize ettiğinden semantik ve hesaplama teorisi ile önemli ilişkileri vardır. Sonlu bir cümle üzerinde sadece bir tane Haussdorff topoloji vardır fakat bir çok T_0 topolojileri vardır. Örneğin $B = \{a, b\}$ iki elemanlı cümle ise B üzerinde toplam dört farklı topoloji vardır. Üç tanesi T_0 topolojisi olup bunlardan iki tanesi homeomorfik değildir. $B = \{a, b, c, d\}$ dört elemanlı cümle ise B üzerinde toplam 355 farklı fakat 33 tanesi homeomorfik olmayan topoloji vardır. 219 farklı ve homeomorfik olmayan 16 T_0 topolojileri vardır. $B = \{a, b, c, d, e\}$ beş elemanlı cümle ise B üzerinde toplam 6942 farklı fakat 139 tanesi homeomorfik olmayan topoloji vardır. 4231 farklı ve homeomorfik olmayan 63 T_0 topolojileri vardır. Sonlu bir cümle üzerinde T_0 topolojilerinin sayıları ile bu cümle üzerindeki kısmi sıralama bağıntılarının sayıları eşittir [46], [47].

T_0 ayırma aksiyomu cebirsel topolojide lokal yarı basit (semisimple) örtüleri karakterize etmek için [48], bilgisayar alanında lamda kalkulusu ve dil programın denotasyonel semantikte topolojik model olarak [49], [50], [51], quantum mekaniğinde [52] ve dijital topolojide Khalimsky doğrusunu karakterize etmek için [53], [54], [55] kullanılır. Ayrıca, T_0 ayırma aksiyomu T_2 ayırma aksiyomunu karakterize etmek için [34] kullanıldı.

Değişik T_0 formları 1971'de Brümmer [57], 1973'te Marny [58], 1974'te Hoffmann [59], 1977'de Harvey [60], 1991'de Baran [34] ve T_1 ayırma aksiyomu 1991'de Baran [34] tarafından topolojik kategoriye genelleştirilmiştir. Bu değişik T_0 formları arasındaki ilişkiler 1991'de W. Schwarz [61] ve 1995'te Baran ve Altındiş [62] incelenmiştir.

T_1 ayırma aksiyomu cebirde maximal idealler cinside Boolean latisi ve Stone uzaylarında sıfır boyutlu uzayların bazını teorik olarak elde etmek için cebirsel model olarak [70], bilgisayar alanında Sober uzayları ile Scott topolojisi arasındaki ilişkiyi veren modelleri [71] ve quantum mekaniğinde [52] atomik sistemin atomik durum özelliğini karakterize etmek için kullanılır [72]. Ayrıca, T_1 ayırma aksiyomu T_3 ve T_4 ayırma aksiyomlarını karakterize etmek için [65] kullanıldı.

2. BÖLÜM

GENİŞLETİLMİŞ PSEUDO-QUASİ-YARI METRİK UZAYLAR

2.1. Genişletilmiş Pseudo-Quasi-Yarı Metrik Uzay Örnekleri

Bu bölümde çeşitli genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzay örnekleri verilmiştir.

Tanım 2.1.1. X boştan farklı bir küme olmak üzere her $x \in X, d(x,x) = 0$ ise $d\colon X \times X \to [0,\infty]$ fonksiyonuna ∞pqs metriği ve (X,d) uzayına da genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzayı denir [73], [78].

Tanım 2.1.2. (X,d) ve (Y,e) genişletilmiş pseudo quasi yarı metrik uzayları olsun. Eğer her $x,y \in X$ için $e(f(x),f(y)) \leqslant d(x,y)$ ise $f\colon (X,d) \to (Y,e)$ ye büzülme (non-expansive) fonksiyonu denir.

Örnek 2.1.1. X boştan farklı bir küme ve $\forall x,y \in X$ için $d\colon X \times X \to [0,\infty]$ fonksiyonu

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{eğer } x = y \\ \infty, & \text{eğer } x \neq y \end{cases}$$

genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metriktir.

Örnek 2.1.2. $\mathbf{R}$ reel sayılar kümesi ve $\forall x,y \in \mathbf{R}$ için $d\colon \mathbf{R}\times\mathbf{R} \to [0,\infty]$ fonksiyonu

$$d(x,y) = \begin{cases} x - y, & \text{eğer } x \geqslant y \\ \infty, & \text{eğer } x < y \end{cases}$$

genişletilmiş quasi metriktir.

Örnek 2.1.3. $\forall x, y \in [0, \infty]$ için $d\colon [0, \infty] \times [0, \infty] \to [0, \infty]$ fonksiyonu

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{eğer } x \geqslant y \\ y - x, & \text{eğer } x < y \end{cases}$$

genişletilmiş pseudo-quasi metriktir.

Örnek 2.1.4. X bir küme ve $\forall x, y \in X$ için $d(x, y) = 0$ şeklinde tanımlanan fonksiyon X üzerinde genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metriktir.

2.2. Genişletilmiş Pseudo-Quasi-Yarı Metrik Tarafından Üretilen Topoloji

Tanım 2.2.1. (X, d) uzayı genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzayı ve $a \in X$. $S(a, r) = \{x \in X : d(x, a) < r, r > 0\}$ kümesine a merkezli r yarıçaplı açık yuvar (disk) denir.

(X, d) uzayı genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzayı ve $\mathbb{B}_d = \{S(a, r) : a \in X, r > 0\}$ X için bir alt bazdır. Bu alt bazdan elde edilen topoloji τ_d olsun.

Örnek 2.2.1. X boştan farklı bir küme ve $\forall x, y \in X$ için $d\colon X \times X \to [0, \infty]$ fonksiyonu

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{eğer } x = y \\ \infty, & \text{eğer } x \neq y \end{cases}$$

verilsin.

$a \in X$ olmak üzere $S(a, r) = \{x \in X : d(x, a) < r, r > 0\} = \{a\}$ ve $\mathbb{B}_d = \{S(a, r) : a \in X, r > 0\} = \{\{a\} : a \in X, r > 0\}$ X için bir bazdır. Bu bazdan elde edilen topoloji $\tau_d = P(X)$ dir.

Örnek 2.2.2. $\mathbf{R}$ reel sayılar kümesi ve $\forall x, y \in \mathbf{R}$ için $d\colon \mathbf{R}\times\mathbf{R} \to [0, \infty]$ fonksiyonu

$$d(x,y) = \begin{cases} x - y, & \text{eğer } x \geqslant y \\ 1, & \text{eğer } x < y \end{cases}$$

verilsin.

$$S(a,r)=\begin{cases}[a,a+r), & \text{eğer } r\leqslant 1\\ \mathbf{R}, & \text{eğer } r>1\end{cases}$$

$\mathbb{B}_d=\{S(a,r):a\in X, r>0\}=\{[a,a+r):a\in\mathbf{R}, 0<r\leqslant 1\}$ **R** için bir bazdır. Bu bazdan elde edilen topoloji $\tau_d=\tau_l$ alt limit topolojidir [22], [25].

Örnek 2.2.3. X boştan farklı bir cümle ve her $x,y\in X$ için $d(x,y)=0$ olsun. (X,d) genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzaydır.

$\mathbb{B}_d=\{S(a,r):a\in X, r>0\}=\{X\}$, X için bir bazdır. Bu bazdan elde edilen topoloji $\tau_d=\{\emptyset,X\}$ dir.

Örnek 2.2.4. **R** reel sayılar kümesi ve $\mathbf{R}^{'}=\mathbf{R}\cup\{-\infty,\infty\}$ olsun. $\infty-\infty=0$ ve $-\infty+\infty=0$ olmak üzere $\forall x,y\in\mathbf{R}^{'}$ için $d\colon\mathbf{R}^{'}\times\mathbf{R}^{'}\to[0,\infty]$ fonksiyonu $d(x,y)=max\{x-y,0\}$, $\mathbf{R}^{'}$ üzerinde genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metriktir.

$\mathbb{B}_d=\{S(a,r):a\in\mathbf{R}^{'}, r>0\}=\{(-\infty,a+r):a\in\mathbf{R}, 0<r\}$ **R** için bir bazdır. Bu bazdan elde edilen topoloji τ_d üst sınır topolojidir [75].

Örnek 2.2.5. **N** doğal sayılar kümesi olmak üzere her $x,y\in\mathbf{N}$ için $d\colon\mathbf{N}\times\mathbf{N}\to[0,\infty]$ fonksiyonu

$$d(x,y)=\begin{cases}0, & \text{eğer } x=y\\ 1/x, & \text{eğer } x\neq y\end{cases}$$

verilsin.

$\mathbb{B}_d=\{S(a,r):a\in\mathbf{N}, r>0\}=\{\{a\}:a\in\mathbf{N}, r>0\}$ **N** için bir bazdır. Bu bazdan elde edilen topoloji $\tau_d=P(\mathbf{N})$ dir.

2.3. ∞pqsMet Kategorisi

Tanım 2.3.1. Objeleri genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzaylar, morfizmleri büzülme fonksiyonlar ve bileşkede iki büzülme fonksiyonun bileşkesi olan sınıf bir kategoridir. Buna tüm genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzayların kategorisi denir ve ∞**pqsMet** ile gösterilir [28], [29], [78] .

∞**pqsMet** kategorisinin bir topolojik kategori olduğunu gösterelim.

Teorem 2.3.1. $U\colon \infty\textbf{pqsMet} \to \textbf{Set}$, her $(X,d) \in Ob(\infty\textbf{pqsMet})$ için $U((X,d)) = X$ ve her $f : (X,d) \to (Y,e)$ büzülme fonksiyonunu $f : X \to Y$ fonksiyona götüren, unutkan fanktoru topolojik fanktordur.

İspat: (1) $U\colon \infty\textbf{pqsMet} \to \textbf{Set}$ nun belirli fanktor olduğunu gösterelim. $f, g : (X,d) \to (Y,e)$ büzülme fonksiyonlar ve $U(f) = U(g)$ olsun. $f = U(f) = U(g) = g$ olduğundan $f = g$ ve U düzenlidir. $f : (Y,d) \to (Y,e)$ izomorfizm ve $U(f) = 1_Y$, birim fonksiyon olsun. $\forall x, y \in Y, e(x,y) = e(f(x), f(y)) \leqslant d(x,y)$ ve dolayısıyla, $e \leqslant d$ olur. $\forall x, y \in Y, d(x,y) = d(f^{-1}(x), f^{-1}(y)) \leqslant e(x,y)$ ve dolayısıyla, $d \leqslant e$ olur. O halde $d = e$ dir ve U amnestiktir.

(2) U nun küçük demetlere sahip, yani, her X cümlesi için $U^{-1}(X)$ in bir cümle olduğunu gösterelim. $U^{-1}(X) = \{(X,d) : U((X,d)) = X\}$ ve $\Gamma = \{d : d, X$ üzerinde genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik $\}$ olsun. $f : U^{-1}(X) \to \Gamma$, $f((X,d)) = d$ fonksiyonu birebir ve örtendir. Dolayısıyla, Γ bir cümle olduğundan $U^{-1}(X)$ de bir cümledir.

(3) ∞**pqsMet** kategorisinin keyfi çarpımlara sahip olduğunu gösterelim. $\{(X_i, d_i), i \in I\}$ genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzaylar verilsin. $X = \prod_{i\in I} X_i$ ve $d = \sup\limits_{i\in I}(d_i \circ (\pi_i \times \pi_i))$, yani, her $x, y \in X, d(x,y) = \sup\limits_{i\in I}(d_i(\pi_i(x), \pi_i(y)))$ [28] olsun. (X,d) çarpım genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzay olduğunu gösterelim. Her $x \in X$ için $d_i(\pi_i(x), \pi_i(x))) = 0$ olduğundan $d(x,x) = \sup\limits_{i\in I}(d_i(\pi_i(x), \pi_i(x))) = 0$ dır ve dolayısıyla, d X üzerinde genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metriktir.

Her $x, y \in X$ için $d_i(\pi_i(x), \pi_i(y))) \leqslant \sup\limits_{i\in I}(d_i(\pi_i(x), \pi_i(y))) = d(x,y)$ olduğundan izdüşüm fonksiyonları büzülme fonksiyonlarıdır.

(X,d) nin çarpım uzay olduğunu gösterelim. (Y,e) herhangi bir genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzay, $f_i : (Y,e) \to (X_i, d_i), i \in I$ büzülme fonksiyonlar ve $\pi_i \circ h = f_i$ olacak şekilde bir $h : Y \to X$ fonksiyon mevcut olsun. $h : (Y,e) \to (X,d)$ fonksiyonun büzülme olduğunu göstermek yeterlidir. Her $x, y \in Y$ için $d(h(x), h(y)) = \sup\limits_{i\in I}(d_i(\pi_i(h(x)), \pi_i(h(y)))) = \sup\limits_{i\in I}(d_i(f_i(x), f_i(y))) \leqslant e(x,y)$ çünkü $f_i : (Y,e) \to (X_i, d_i), i \in I$ büzülme fonksiyonlarıdır. O halde, $d(h(x), h(y)) \leqslant e(x,y)$ dir ve dolayısıyla, $h : (Y,e) \to (X,d)$ büzülme fonksiyonudur. (X, d) çarpım genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzayıdır ve ∞**pqsMet** kategorisi keyfi çarpımlara sahiptir.

(4) ∞**pqsMet** kategorisinin keyfi altuzaylara sahip olduğunu gösterelim. (X, d) genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzay ve $M \subset X$ olsun. $i : M \to X, a \in M, i(a) = a$ altküme (inclusion) fonksiyonu olsun. $d_M = \sup(d \circ i \times i) = d \circ i \times i$ olsun. (M, d_M) nin genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzayı ve $i : (M, d_M) \to (X, d)$ nin büzülme fonksiyonudur çünkü her $x, y \in M$ için $d(x, y) = d(i(x), i(y)) = d_M(x, y)) \leqslant d_M(x, y)$ dir ve $d_M(x, x) = 0$ dır.

(5) ∞**pqsMet** kategorisinin indiskre objelere sahip olduğunu gösterelim. X boştan farklı bir cümle ve her $x, y \in X$ için $d(x, y) = 0$ olsun. (X, d) indiskre genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzay olduğunu gösterelim. (X, d) genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzaydır. (X, d) nin indiskre uzay olduğunu gösterelim. (Y, e) herhangi bir genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzay ve $f : Y \to X$ herhangi bir fonksiyon olsun. $f : (Y, e) \to (X, d)$ nin büzülme fonksiyon olduğunu gösterelim. Her $x, y \in Y$ için $0 = d(f(x), f(y)) \leqslant e(x, y)$ dir ve dolayısıyla f büzülme fonksiyonudur. O halde, ∞**pqsMet** kategorisi indiskre objelere sahiptir. Teorem 2.3.1 den $U\colon \infty$**pqsMet** $\to$ **Set** unutkan fanktoru topolojik fanktordur.

2.4. ∞pqsMet Kategorisinde Özel Objeler Ve Morfizimler

∞**pqsMet** kategorisinde önemli bazı özel objeleri ve morfizmleri karakterize edelim.

Teorem 2.4.1. (1) X boştan farklı bir cümle ve her $x, y \in X$ için

$$d_{dis}(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{eğer } x = y \\ \infty, & \text{eğer } x \neq y \end{cases}$$

verilsin. (X, d_{dis}) diskre genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzaydır.

(2) X boştan farklı bir cümle ve her $x, y \in X$ için $d(x, y) = 0$ olsun. (X, d) indiskre genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzaydır.

(3) $X = \{a\}$ olsun. (X, d) terminal (son) genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzaydır.

(4) $X = \{a\}$ olsun. (X, d) başlangıç (ilk) genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzaydır.

(5) $\{(X_i, d_i), i \in I\}$ genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzaylar verilsin. $X = \prod_{i\in I} X_i$ ve $d = \sup\limits_{i\in I}(d_i \circ (\pi_i \times \pi_i))$, yani, her $x, y \in X, d(x, y) = \sup\limits_{i\in I}(d_i(\pi_i(x), \pi_i(y)))$ olsun. (X, d) çarpım genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzaydır.

(6) (X, d) genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzay ve $M \subset X$ olsun. Her $x, y \in M$ için $d_M(x, y) = d(x, y)$ ise M, d_M uzayı (X, d) nin alt uzayıdır.

(7) $\{(X_i, d_i), i \in I\}$ genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzaylar verilsin. $X = \coprod_{i\in I} X_i$ ve her $(k, x), (j, y) \in X$ için

$$d((k, x), (j, y)) = \begin{cases} d_k(x, y), & \text{eğer } k = j \\ \infty, & \text{eğer } k \neq j \end{cases}$$

olsun. (X, d) dualçarpım (coproduct) genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzaydır.

(8) (X, d), (Y, e) iki genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzaylar, $f, g : (X, d) \to (Y, e)$ büzülme fonksiyonları ve $E = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$ olsun. (E, d_E), f ve g nin eşitleyicisi (equalizer) dir.

İspat: (1) X boştan farklı bir cümle ve her $x, y \in X$ için

$$d_{dis}(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{eğer } x = y \\ \infty, & \text{eğer } x \neq y \end{cases}$$

olsun. (X, d_{dis}) genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzayıdır. (X, d_{dis}) nin diskre uzayı olduğunu gösterelim. (Y, e) herhangi bir genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzay ve $f : X \to Y$ herhangi bir fonksiyon olsun. $f : (X, d_{dis}) \to (Y, e)$ nin büzülme fonksiyonu olduğunu gösterelim. $x, y \in X$ olsun. Eğer $f(x) = f(y)$ ise $e(f(x), f(y)) = 0 \leqslant d(x, y)$ dir. Eğer $f(x) \neq f(y)$ ise $e(f(x), f(y)) \leqslant \infty = d(x, y)$ olur ve dolayısıyla f büzülme fonksiyonudur. O halde, (X, d_{dis}) diskre genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzaydır.

(2) nin ispatı Teorem 2.3.1(5) te verilmiştir.

(3) $X = \{a\}$ ve (Y, e) herhangi bir genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzay verilsin. Her $f : (Y, e) \to (X, d)$ fonksiyonu sabittir. O halde, (X, d) terminal genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzaydır.

(4) $X = \{a\}$ ve (Y, e) herhangi bir genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzay verilsin. Her $f : (X, d) \to (Y, e)$ fonksiyonu için $e(f(a), f(a)) = 0 \leqslant d(x, y)$ dir. O halde, (X, d) ilk genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzaydır.

(5) nin ispatı Teorem 2.3.1(3) te verilmiştir.

(6) (X, d) genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzay ve $i : M \subset X$ alt küme fonksiyonu olsun. $d_M = d \circ i \times i$, yani, her $x, y \in M$ için $d_M(x, y) = d(i(x), i(y)) = d(x, y)$ dır ve $d(x, y) = d(i(x), i(y)) = d_M(x, y) \leqslant d_M(x, y)$ olduğundan $i : (M, d_M) \subset (X, d)$ başlangıç kaldırmadır ve dolayısıyla, (M, d_M) genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik alt uzaydır.

(7) $\{(X_i, d_i), i \in I\}$ genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzaylar, $X = \coprod_{i \in I} X_i$ ve her $(k, x), (j, y) \in X$ için

$$d((k, x), (j, y)) = \begin{cases} d_k(x, y), & \text{eğer } k = j, \\ \infty, & \text{eğer } k \neq j, \end{cases}$$

verilsin. (X, d) dualçarpım (coproduct) genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzaydır. $i : X_i \to X = \coprod_{i \in I} X_i$ kanonik fonksiyonlar ve her $x, y \in X_i$ için $d(i(x), i(y)) = d((i, x), (i, y)) = d_i(x, y) \leqslant d_i(x, y)$ dir ve dolayısıyla, $i : (X_i, d_i) \to (X, d)$ büzülme fonksiyonudur ve dolayısıyla, (X, d) dualçarpım genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzayıdır.

(8) in ispatı kolayca yapılır.

Önerme 2.4.1. (1) $f\colon (X, d) \to (Y, e)$ monomorfizmdir ancak ve ancak $f\colon X \to Y$ 1-1 dir.

(2) $f\colon (X, d) \to (Y, e)$ epimorfizmdir ancak ve ancak $f\colon X \to Y$ örtendir.

(3) $f, g\colon (X, d) \to (Y, e)$ büzülme fonksiyonların eşitleyicisi $E = \{a \in X : f(a) = g(a)\}$ olmak üzere (E, d_E) altuzayıdır.

(4) $f\colon (X, d) \to (Y, e)$ biomorfizmdir ancak ve ancak $(X, d) \to (Y, e)$ büzülme, 1-1 ve örtendir.

(5) $f\colon (X, d) \to (Y, e)$ izomorfizmdir ancak ve ancak $(X, d) \to (Y, e)$ büzülme, 1-1, örten ve tersi büüzülme fonksiyonudur.

İspat: (1) $f\colon (X, d) \to (Y, e)$ monomorfizm ve her $a, b \in X$ için $f(a) = f(b)$ olsun. $B = \{c\}$ ve $d' : B \times B \to [0, \infty]$ tek genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik olmak üzere $g, h\colon (B, d') \to (X, d)$ fonksiyonları $h(c) = a$ ve $g(c) = b$ şeklinde tanımlansınlar. $g, h\colon (B, d') \to (X, d)$ fonksiyonları büzülme fonksiyonlardır çünkü $d(h(c), h(c)) = 0 \leqslant 0 = d'(c, c)$ ve $d(g(c), g(c)) = 0 \leqslant 0 = d'(c, c)$ dır. $(f \circ g)(c) = f(g(c)) = f(b) = f(a) = f(h(c)) = (f \circ h)(c)$ ve $f\colon (X, d) \to (Y, e)$ monomorfizm olduğundan $g = h$, yani, $a = b$ ve dolasıyla, $f\colon (X, d) \to (Y, e)$ 1-1 dir.

$f\colon X \to Y$ 1-1 olsun. $f\colon (X, d) \to (Y, e)$ nin monomorfizm olduğununu gösterelim. (B, d') herhangi genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzay ve $g, h\colon (B, d') \to (X, d)$ büzülme fonksiyonları için her $a \in B$, $(f \circ g)(a) = (f \circ h)(a)$ olsun. $f\colon X \to Y$ 1-1 olduğundan $g(a) = h(a)$, yani, $g = h$ dir. O halde, $f\colon (X, d) \to (Y, e)$ monomorfizmdir.

(2) $f\colon (X, d) \to (Y, e)$ epimorfizm fakat örten olmasın. En az bir $c \in Y$ ve $c \notin f(X)$ dir. $(\{0, 1\}, \bar{d})$ indiskre genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzay olmak üzere $g, h\colon (Y, e) \to (\{0, 1\}, \bar{d})$ fonksiyonları her $a \in Y$ için $g(a) = 0$ ve

$$h(a) = \begin{cases} 0, & \text{eğer } a \in f(X) \\ 1, & \text{eğer } a \notin f(X) \end{cases}$$

şeklinde tanımlansınlar. $g, h\colon (Y, e) \to (\{0, 1\}, \bar{d})$ fonksiyonları büzülme, $g \circ f = h \circ f$ fakat $g \neq h$ dir. Bu da $f\colon (X, d) \to (Y, e)$ epimorfizm olması ile çelişir. O halde, $f\colon X \to Y$ örten olmalıdır.

$f\colon X \to Y$ örten olsun. Her $c \in Y$ için en az bir $a \in X$ vardır öyleki $f(a) = c$ dir. $f\colon (X, d) \to (Y, e)$ nin epimorfizm olduğununu gösterelim. (B, d') herhangi genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzay ve $g, h\colon (Y, e) \to (B, d')$ büzülme fonksiyonları için her $a \in X$, $(g \circ f)(a) = (h \circ f)(a)$ olsun. Her $c \in Y$ için $g(c) = (g(f(a)) = (h(f(a)) = h(c)$, yani, $g = h$ dir. O halde, $f\colon (X, d) \to (Y, e)$ epimorfizmdir.

(3) $f, g\colon (X, d) \to (Y, e)$ büzülme fonksiyonları ve $E = \{a \in X : f(a) = g(a)\}$ olsun. $i : (E, d_E) \to (X, d)$ büzülme fonksiyonu $i : E \to X$ injektif (alt küme) fonksiyonun başlangıç kaldırması olsun.

Her $a \in E$ için $g(a) = (g \circ i)(a) = (h \circ i)(a) = h(a)$, yani, $g \circ i = h \circ i$ dir. (A, d') herhangi genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzay ve her $h\colon (A, d) \to (B, \mathsf{Im})$ düzgün sürekli fonksiyonu için $g \circ h = f \circ h$ olsun. Her $c \in A$ için $(f(h(c)) = (g(h(c))$ olduğundan $h(c) \in E$ ve her $c \in A$ için $k(c) = h(c)$

şeklinde tanımlanan $k : (A, d') \to (E, d_E)$ büzülme fonksiyonudur çünkü $h = i \circ k$ büzülme ve $i : (E, d_E) \to (X, d)$ büzülme fonksiyonu $i : E \to X$ nin başlangıç kaldırmasıdır. $k : (A, d') \to (E, d_E)$ fonksiyonun tek olduğunu gösterelim. $m : (A, d') \to (E, d_E)$ büzülme ve $h = i \circ m$ olsun. Her $c \in A$ için $(i \circ k)(c) = h(c) = (i \circ m)(c)$ ve $i : E \to X$ injektif (1-1) olduğundan $k = m$ dir. Yani, $k : (A, d') \to (E, d_E)$ fonksiyonu tektir. O halde, $i : (E, d_E) \to (X, d)$, $f, g \colon (X, d) \to (Y, e)$ büzülme fonksiyonların eşitleyicisidir.

(4) Tanım 1.1.4, (1) ve (2) den $f \colon (X, d) \to (Y, e)$ biomorfizmdir ancak ve ancak $f \colon (X, d) \to (Y, e)$ büzülme, 1-1 ve örtendir.

(5) Tanım 1.1.4, (1) ve (2) den $f \colon (X, d) \to (Y, e)$ izomorfizmdir ancak ve ancak $f \colon (X, d) \to (Y, e)$ büzülme ,1-1, örten ve tersi büzülme fonksiyonudur.

Kategori	Objeler	Morfizmler
Set	Kümeler	Fonksiyonlar
Top	Topolojik uzaylar	Sürekli fonksiyonlar
Kmet	Metrik uzaylar	Sürekli fonksiyonlar
Met	Metrik uzaylar	Büzülme fonksiyonları
pMet	Pseudo metrik uzaylar	Büzülme fonksiyonları
qMet	Quasi metrik uzaylar	Büzülme fonksiyonları
pqMet	Pseudo-quasi metrik uzaylar	Büzülme fonksiyonları
pqsMet	Pseudo-quasi-yarı Metrik uzaylar	Büzülme fonksiyonları
∞**pMet**	Genişletilmiş pseudo metrik uzaylar	Büzülme fonksiyonları
∞**qMet**	Genişletilmiş quasi metrik uzaylar	Büzülme fonksiyonları
∞**pqMet**	Genişletilmiş pseudo-quasi metrik uzaylar	Büzülme fonksiyonları
∞**psMet**	Genişletilmiş pseudo-yarı metrik uzaylar	Büzülme fonksiyonları
∞**pqsMet**	Genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzaylar	Büzülme fonksiyonları

Tablo 2.1. Bazı Kategori Örnekleri

Not 2.4.1. **i.** **Kmet** kategorisi keyfi sonsuz sayılamaz çarpımlara ve indiskre objeye sahip olmadığından Teorem 1.1.3 ve Teorem 1.2.3 ten dolayı **Kmet** topolojik bir kategori değildir.

ii. **Met** ve **pMet** kategorileri keyfi sonsuz çarpımlara ve indiskre objeye sahip olmadığından Teorem 1.1.3 ve Teorem 1.2.3 ten dolayı **Met** ve **pMet** topolojik bir kategori değildirler.

iii. **pMet**, **psMet**, **pqMet** ve **pqsMet** kategorileri keyfi sonsuz sayılamaz çarpımlara sahip olmadıklarından Teorem 1.1.3 ve Teorem 1.2.3 ten dolayı bu kategoriler topolojik bir kategori değildir.

iv. Teorem 2.1.1 den ∞**pqsMet** kategorisi topolojik kategoridir.

v. ∞**pMet**, ∞**psMet** ve ∞**pqMet** kategorileri topolojik kategoridir [28], [29].

3. BÖLÜM

LOKAL T_0 VE T_1 GENİŞLETİLMİŞ PSEUDO-QUASİ-YARI METRİK UZAYLAR

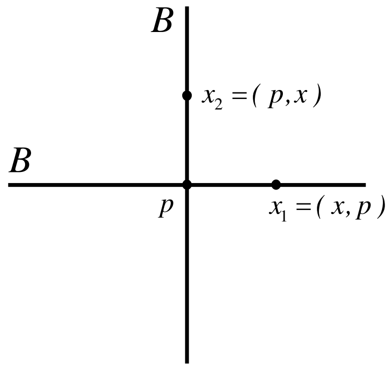
Topos teorisinin üreteç eleman metodu ([67] p. 39) kullanılarak p noktasında, yani lokal T_0 ve lokal T_1 ayırma aksiyomları 1993'te Baran [69] tarafından topolojik kategorisine genişletilmiştir. Baran [69] topolojik kategorilerde kapalılık ve kuvvetli kapalılık kavramlarını lokal T_0 ve lokal T_1 ayırma aksiyomlarını kullanarak tanımlamış ve bu kavramların bazı iyi bilinen topolojik kategorilerde Dikranjan ve Giuli anlamında [79] kapanış operatörü oluşturduğunu göstermiştir [80], [81], [82], [83]. Ayrıca bu kavramları kullanarak 1997 de kompaktlık [84], 1996 da Hausdorffluk [63] ve 2006 da bağlantılılık [85] kavramlarını topolojik kategoriye genelleştirmiştir.

Bu bölümde, lokal yani p noktasında $\overline{T}_0$, T_0', T_1 genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzayları karakterize edilmiş, bunlar arasındaki ilişkiler incelenmiş ve bu uzayların çarpımsal ve kalıtsal olduğu gösterilmiştir.

3.1. p de Temel (Principle) ve p de Eğik (Skewed) Eksen Dönüşümleri

B bir küme, $p \in B$ ve $B \sqcup B$, B nin iki ayrık kopyası olsun. B nin p noktasındaki wedge çarpımı $B \sqcup B$ nin p de çakışmasıdır ve $B \vee_p B$ şeklinde gösterilir. $B \vee_p B$ deki bir x noktası birinci bileşende ise x_1, ikinci bileşende ise x_2 olarak gösterilecektir. Ayrıca $x = p$ ise $x_1 = x_2$ dir, yani $p_1 = p_2$ olur [34].

Not 3.1.1. B bir küme, $p \in B$ ve $B \vee_p B$ de B kümesinin p noktasındaki wedge çarpımı olsun. $\{*\}$, **Set** kategorisinde bitiş objesi ve $i_1, i_2 \colon B \to B \vee_p B$ dönüşümleri de sırasıyla birinci ve ikinci içerme dönüşümleri (inclusion maps)



Şekil 3.1. p noktasında wedge çarpım

olmak üzere;

$$\begin{tikzcd}
\{*\} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d, "i_1"] \\
B \arrow[r, "i_2"'] & B \vee_p B
\end{tikzcd}$$

değişmeli diyagramı bir pushout diyagramıdır.

$id\colon B \to B$ birim dönüşüm ve $f\colon B \to B$ de p ye giden sabit dönüşüm olmak üzere; $A_p i_1 = (id, f)\colon B \to B^2$, $A_p i_2 = (f, id)\colon B \to B^2$, $S_p i_1 = (id, id)\colon B \to B^2$, $S_p i_2 = (f, id)\colon B \to B^2$ ve $\nabla_p i_1 = \nabla_p i_2 = id\colon B \to B$ dönüşümleri yukarıda verilen pushout diyagramına uygulandığında sadece Tanım 3.1.1 ile verilen A_p, S_p ve ∇_p dönüşümleri elde edilir. Örneğin A_p dönüşümünün elde edilişi aşağıda verilmiştir:

$$\begin{tikzcd}
\{*\} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d, "i_1"] \\
B \arrow[r, "i_2"'] & B \vee_p B
\end{tikzcd}$$

ve

$$\begin{tikzcd}
\{*\} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d, "A_p i_1"] \\
B \arrow[r, "A_p i_2"'] & B^2
\end{tikzcd}$$

değişmeli diyagramları için

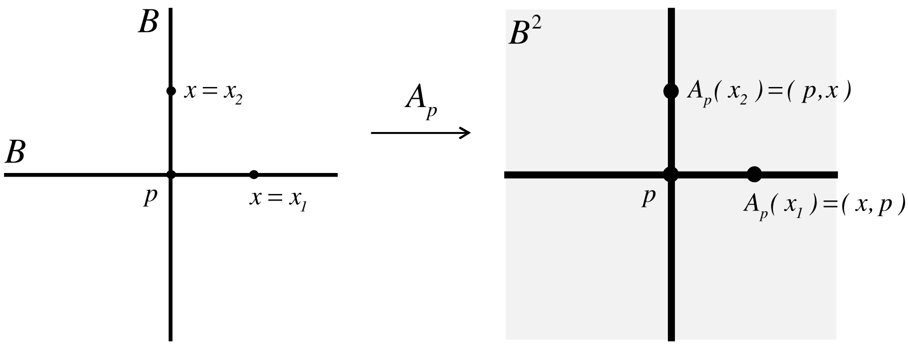
$$
\begin{tikzcd}
\{*\} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d, "i_1"] \arrow[ddr, bend left, "A_p i_1"] & \\
B \arrow[r, "i_2"] \arrow[drr, bend right, "A_p i_2"'] & B \vee_p B \arrow[dr, dotted, "A_p"] & \\
 & & B^2
\end{tikzcd}
$$

diyagramı değişmeli, yani $A_p i_1 f = A_p i_2 f = (f, f)$ olduğundan bir tek $A_p \colon B \vee_p B \to B^2$ morfizmi vardır.

Tanım 3.1.1. [34] B bir küme, $p \in B$ ve $B^2 = B \times B$ de B nin kendisi ile kartezyen çarpımı olsun.

(1) p de Temel (Principle) Eksen Dönüşümü:

$$A_p \colon B \vee_p B \to B^2, \quad A_p(x_i) = \begin{cases} (x, p) & , \quad i = 1 \\ (p, x) & , \quad i = 2 \end{cases}$$



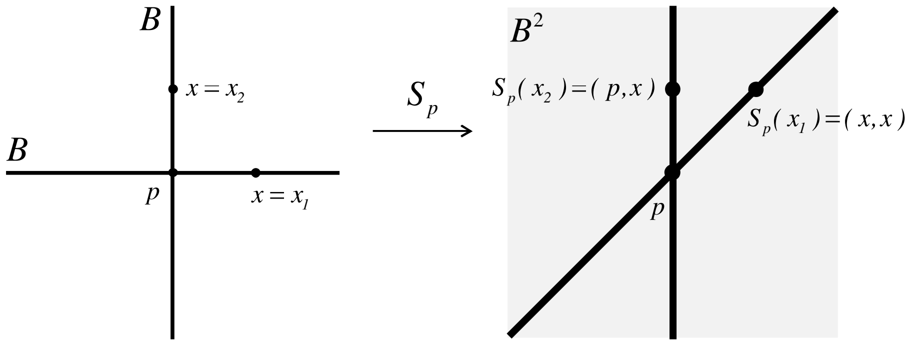
Şekil 3.2. p de Temel (Principle) Eksen Dönüşümü

(2) p de Eğik (Skewed) Eksen Dönüşümü:

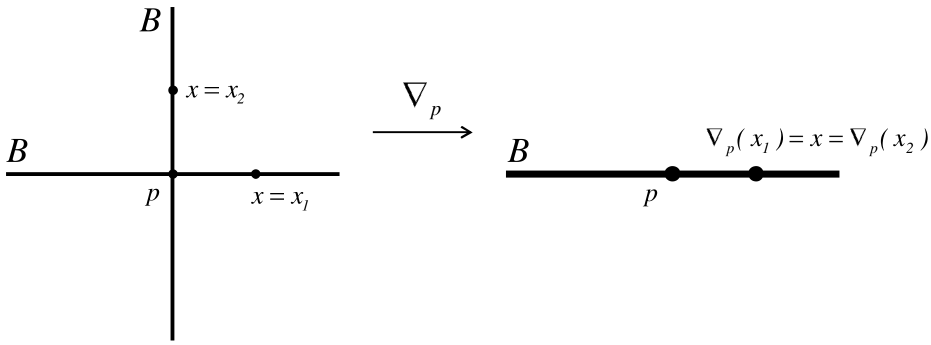
$$S_p \colon B \vee_p B \to B^2, \quad S_p(x_i) = \begin{cases} (x, x) & , \quad i = 1 \\ (p, x) & , \quad i = 2 \end{cases}$$

(3) p de Katlama (Fold) Dönüşümü:

$$\nabla_p \colon B \vee_p B \to B, \quad \nabla_p(x_i) = x, \quad i = 1, 2$$



Şekil 3.3. p de Eğik (Skewed) Eksen Dönüşümü



Şekil 3.4. p de Katlama (Fold) Dönüşümü

Örnek 3.1.1. Eğer $B = \mathbb{R}$ reel sayılar kümesi ve $p = 0$ noktası seçilirse p de temel eksen A_p dönüşümünün görüntüsü x ve y eksenlerinin birleşimi, p de eğik eksen S_p dönüşümünün görüntüsü de $y = x$ doğrusu ile y ekseninin birleşimi olur.

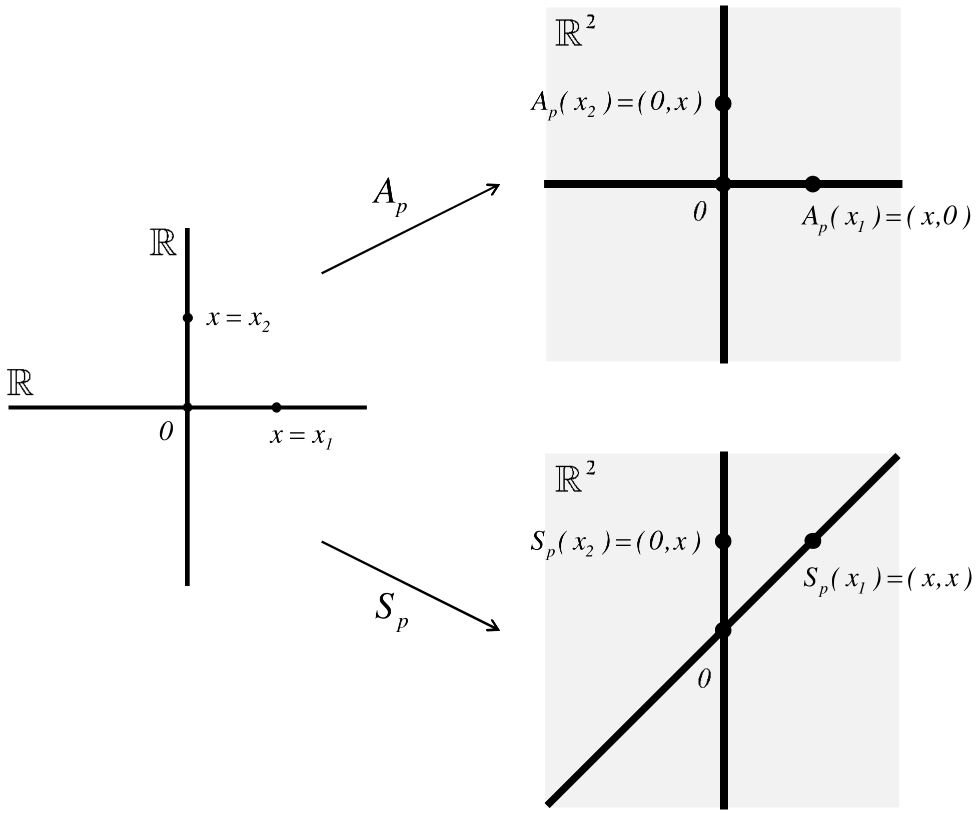
3.2. Lokal T_0 Genişletilmiş Pseudo-Quasi-Yarı Metrik Uzaylar

Tanım 3.2.1. (B, τ) bir topolojik uzay ve $p \in B$ olsun.

1. Eğer her $p \neq q$ için $q \notin N_p$ olacak şekilde p nin en az bir N_p komşuluğu veya $p \notin N_q$ olacak şekilde q nun en az bir N_q komşuluğu varsa (B, τ) uzayı p de T_0 dır.

Teorem 3.2.1. [56] (B, τ) bir topolojik uzay ve $p \in B$ olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:

1. (B, τ) uzayı p de T_0 dır.



Şekil 3.5. $B=\mathbb{R}$ ve $p=0$ için A_p ve S_p dönüşümlerinin görüntüsü

2. B^2 üzerindeki çarpım topolojisi τ^* olmak üzere $A_p\colon B\vee_p B\to(B^2,\tau^*)$ ve $\nabla_p\colon B\vee_p B\to(B,P(B))$ fonksiyonları tarafından üretilen başlangıç topololojisi diskredir.

3. $i_1,i_2\colon B\to B\vee_p B$, $x\mapsto i_1(x)=x_1$, $x\mapsto i_2(x)=x_2$ fonksiyonları tarafından üretilen $B\vee_p B$ üzerindeki bitiş topolojisi τ_* olmak üzere, $id\colon B\vee_p B\to(B\vee_p B,\tau_*)$ birim fonksiyonu ve $\nabla_p\colon B\vee_p B\to(B,P(B))$ fonksiyonu tarafından üretilen başlangıç topololojisi diskredir.

Baran [34] topolojik uzaylardaki p noktasındaki T_0 ve T_1 ayırma aksiyomlarını Tanım 3.1.1 deki dönüşümler yardımıyla herhangi bir topolojik kategoriye aşağıdaki tanımla genelleştirmiştir.

Tanım 3.2.2. $U:\mathbf{E}\longrightarrow\mathbf{Set}$ bir topolojik fanktor, $U(X)=B$ olmak üzere X, **E** nin bir objesi ve $p\in B$ olsun.

1. Eğer $\{A_p : B\vee_p B\to U(X^2)=B^2$ ve $\nabla_p : B\vee_p B\to UD(B)=B\}$

U-kaynağının başlangıç kaldırması diskre ise X nesnesine p de $\overline{T}_0$ nesnesi denir. Burada D, U nun sol adjointi olan diskre fanktordur. [34].

2. $(B \vee_p B)'$, $i_1, i_2 : U(X) \rightarrow B \vee_p B$ kanonik fonksiyonları tarafından üretilen $B \vee_p B$ üzerindeki bitiş kaldırması olsun. Eğer $id : B \vee_p B \rightarrow U(B \vee_p B, (B \vee_p B)') = B \vee_p B$ birim fonksiyonu ve $\bigtriangledown_p : B \vee_p B \rightarrow UD(B) = B$ } U-kaynağının başlangıç kaldırması diskre ise X nesnesine p de $T_0^{'}$ nesnesi denir [34].

Teorem 3.2.2. (1) X boştan farklı bir cümle ve her $x, y \in X$ için

$$d_{dis}(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{eğer } x = y \\ \infty, & \text{eğer } x \neq y \end{cases}$$

verilsin. (X, d_{dis}) diskre genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzaydır.
(2) X boştan farklı bir cümle ve her $x, y \in X$ için $d(x,y) = 0$ olsun. (X, d) indiskre genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzaydır.
(3) $\{(X_i, d_i), i \in I\}$ genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzaylar, X boştan farklı bir küme ve $f_i : X \rightarrow X_i$ fonksiyonlar olsun. Her $x, y \in X$ için $\bar{d}(x,y) = \sup\limits_{i \in I}(d_i(f_i(x), f_i(y)))$ başlangıç genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metriğidir [28] veya [29].
(4) $\{(X_i, d_i), i \in I\}$ genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzaylar, X boştan farklı bir küme ve $f_i : X_i \rightarrow X$ fonksiyonlar olsun. Her $x, y \in X$ için $d_1(x,y) = \inf\{(d_i(x_i, y_i)) : i \in I, x_i, y_i \in X_i, f_i(x_i) = x$ ve $f_i(y_i) = y\}$ bitiş genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metriğidir [28] veya [29].

İspat: (1) ve (2) nin ispatı Teorem 2.2.1 de verilmiştir.
(3) $(X, \bar{d})$ genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzay olduğunu gösterelim. Her $x \in X$ için $d_i(f_i(x), f_i(x))) = 0$ olduğundan $\bar{d}(x,x) = \sup\limits_{i \in I}(d_i(f_i(x), f_i(x))) = 0$ dır ve dolayısıyla,$\bar{d}$, X üzerinde genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metriktir. Her $x, y \in X$ için $d_i(f_i(x), f_i(y))) \leqslant \sup\limits_{i \in I}(d_i(f_i(x), f_i(y))) = \bar{d}(x,y)$ olduğundan $f_i : X \rightarrow$

X_i fonksiyonları büzülme fonksiyonlarıdır. $(X, \bar{d})$ nin başlangıç genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzay olduğunu gösterelim. (Y, e) herhangi bir genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzay, $g_i : (Y, e) \to (X_i, d_i), i \in I$ büzülme fonksiyonlar ve $f_i \circ h = g_i$ olacak şekilde bir $h : Y \to X$ fonksiyon mevcut olsun. $h : (Y, e) \to (X, \bar{d})$ fonksiyonun büzülme olduğunu göstermek yeterlidir. Her $x, y \in Y$ için $\bar{d}(h(x), h(y)) = \sup\limits_{i \in I}(d_i(f_i(h(x)), f_i(h(y)))) = \sup\limits_{i \in I}(d_i(g_i(x), g_i(y))) \leqslant e(x, y)$ çünkü $g_i : (Y, e) \to (X_i, d_i), i \in I$ büzülme fonksiyonlarıdır. O halde, $\bar{d}(h(x), h(y)) \leqslant e(x, y)$ dir ve dolayısıyla, $h : (Y, e) \to (X, \bar{d})$ büzülme fonksiyonudur.

(4) $\{(X_i, d_i), i \in I\}$ genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzaylar, $X = \coprod_{i \in I} X_i$ ve her $(k, x), (j, y) \in X$ için

$$d((k, x), (j, y)) = \begin{cases} d_k(x, y), & \text{eğer } k = j \\ \infty, & \text{eğer } k \neq j \end{cases}$$

verilsin. (X, d) dualçarpım (coproduct) genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzaydır. $i : X_i \to X = \coprod_{i \in I} X_i$ kanonik fonksiyonlar ve her $x, y \in X_i$ için $d(i(x), i(y)) = d((i, x), (i, y)) = d_i(x, y) \leqslant d_i(x, y)$ dir ve dolayısıyla, $i : (X_i, d_i) \to (X, d)$ büzülme fonksiyonudur ve dolayısıyla, (X, d) dualçarpım genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzayıdır.

Teorem 3.2.3. (X, d) genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzay ve $p \in X$ olsun. (X, d) p noktasında $\overline{T}_0$ olması için gerek ve yeter şart her $x \in X$ ve $x \neq p$ için $d(x, p) = \infty$ veya $d(p, x) = \infty$ dur.

İspat: (X, d) genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzayı p noktasında $\overline{T}_0$ ve her $x \in X$ ve $x \neq p$ olsun. $x_1, x_2 \in X \vee_p X$ dır.

$$d(\pi_1 A_p(x_1), \pi_1 A_p(x_2)) = d(x, p),$$

$$d(\pi_2 A_p(x_1), \pi_2 A_p(x_2)) = d(p, x),$$

$$d_{dis}(\nabla_p(x_1), \nabla_p(x_2)) = d(x, x) = 0$$

burada, $\pi_i : X^2 \to X$ $i = 1, 2$ iz düşüm fonksiyonlarıdır ve d_{dis}, X üzerinde genişletilmiş pseudo-quasi-yarı diskre metriktir. (X, d) p noktasında $\overline{T}_0$ ve $x_1 \neq$

x_2 olduğundan Tanım 3.2.2 ve Teorem 3.2.2 den

$$\begin{aligned}\infty &= \bar{d}(x_1, x_2)\\ &= sup\{d_{dis}(\bigtriangledown(x_1), \bigtriangledown(x_2)), d(\pi_i A_p(x_1), \pi_i A_p(x_2)), i = 1, 2\}\\ &= sup\{d(x,p), d(p,x)\}\end{aligned}$$

ve dolayısıyla, $d(x,p) = \infty$ veya $d(p,x) = \infty$ dır.
Her $x \in X$ ve $x \neq p$ için $d(x,p) = \infty$ veya $d(p,x) = \infty$ olsun. (X,d) nin p noktasında $\overline{T}_0$ olduğunu gösterelim, yani, Tanım 3.2.2 ve Teorem 3.2.2 den $X \vee_p X$ wedge çarpım üzerinde

$$A_p : B \vee_p B \to U(X^2, d^2) = B^2$$

ve

$$\bigtriangledown_p : B \vee_p B \to U(X, d_{dis}) = B$$

fonksiyonları tarafından elde edilen $\bar{d}$ genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metriğinin diskre olduğunu gösterelim, burada d^2, B^2 üzerinde çarpım genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metriğidir. u ve v $X \vee_p X$ wedge de herhangi iki nokta olsun. Eğer $u = v$ ise $\bar{d}(u,v) = 0$ dır. Kabul edelim ki $u \neq v$ olsun. Eğer $\bigtriangledown_p(u) \neq \bigtriangledown_p(v)$ ise $d_{dis}(\bigtriangledown_p(u), \bigtriangledown_p(v)) = \infty$ ve dolayısıyla,

$$\begin{aligned}\bar{d}(u,v) &= sup\{d_{dis}(\bigtriangledown(u), \bigtriangledown(v)), d(\pi_i A_p(u), \pi_i A_p(v)), i = 1, 2\}\\ &= sup\{\infty, d(\pi_i A_p(u), \pi_i A_p(v)), i = 1, 2\}\\ &= \infty\end{aligned}$$

dur. Kabul edelim ki $u \neq v$ ve $\bigtriangledown_p(u) = \bigtriangledown_p(v)$ olsun. Eğer $\bigtriangledown_p(u) = p = \bigtriangledown_p(v)$ ise $u = p = v$ olur. Bu da çelişkidir çünkü $u \neq v$ dir. Eğer $\bigtriangledown_p(u) = x = \bigtriangledown_p(v)$, $x \neq p$ ise $u = x_i$ ve $v = x_j$, $i, j = 1, 2$ ve $i \neq j$ olur çünkü $u \neq v$ dir yani, $u = x_1$ ve $v = x_2$ veya $u = x_2$ ve $v = x_1$ olur. $u = x_1$ ve $v = x_2$ olsun.

$$d(\pi_1 A_p(x_1), \pi_1 A_p(x_2)) = d(x,p),$$

$$d(\pi_2 A_p(x_1), \pi_2 A_p(x_2)) = d(p,x)$$

ve

$$d_{dis}(\bigtriangledown_p(x_1), \bigtriangledown_p(x_2)) = d(x,x) = 0$$

dır.

$$\begin{aligned}\bar{d}(u,v) &= \bar{d}(x_1,x_2)\\ &= sup\{d_{dis}(\bigtriangledown(x_1),\bigtriangledown(x_2)), d(\pi_i A_p(x_1),\pi_i A_p(x_2)), i=1,2\}\\ &= sup\{d(x,p), d(p,x)\}\end{aligned}$$

olur. Kabulden $d(x,p)=\infty$ veya $d(p,x)=\infty$ olduğundan $\bar{d}(u,v)=\infty$ dur.
$u=x_2$ ve $v=x_1$ olsun.

$$d(\pi_1 A_p(x_2),\pi_1 A_p(x_1)) = d(p,x),$$

$$d(\pi_2 A_p(x_2),\pi_2 A_p(x_1)) = d(x,p)$$

ve

$$d_{dis}(\bigtriangledown_p(x_2),\bigtriangledown_p(x_1)) = d(x,x) = 0$$

dır.

$$\begin{aligned}\bar{d}(u,v) &= \bar{d}(x_2,x_1)\\ &= sup\{d_{dis}(\bigtriangledown(x_2),\bigtriangledown(x_1)), d(\pi_i A_p(x_2),\pi_i A_p(x_1)), i=1,2\}\\ &= sup\{d(p,x), d(x,p)\}\end{aligned}$$

olur. Kabulden $d(p,x)=\infty$ veya $d(x,p)=\infty$ olduğundan $\bar{d}(u,v)=\infty$ dur.
u ve v $X\vee_p X$ wedge de herhangi iki nokta için

$$\bar{d}(u,v) = \begin{cases} 0, & \text{eğer } u=v \\ \infty, & \text{eğer } u\neq v \end{cases}$$

olduğundan Tanım 3.2.2 ve Teorem 3.2.2 den (X,d) p noktasında $\overline{T}_0$ dır.

Teorem 3.2.4. Her genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik (X,d) uzayı p noktasında T_0' dır.

İspat: u ve v, $X\vee_p X$ wedge de herhangi iki nokta olsun. d_1, $X\vee_p X$ wedge çarpımı üzerinde $i_1,i_2 : X = U((X,d)) \to X\vee_p X$ kanonik fonksiyonları tarafından üretilen bitiş genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metriği olsun. Eğer u ve v noktaları $X\vee_p X$ wedge çarpımının aynı birleşenlerinde ise $d_1(u,v) =$

$\inf\{(d(x,y)) : x, y \in X, i_k(x) = u$ ve $u \neq v$ noktaları $X \vee_p X$ wedge çarpımının farklı birleşenlerinde ise $d_1(u,v) = \infty$ dur.

$$\bar{d}(u,v) = sup\{d_{dis}(\bigtriangledown(u), \bigtriangledown(v)), d_1(id(u), id(v)) = d_1(u,v)\}$$

$$id : X \vee_p X \to U(X \vee_p X, d_1) = X \vee_p X$$

ve

$$\bigtriangledown_p : X \vee_p X \to U(X, d_{dis}) = X$$

fonksiyonları tarafından elde edilen başlangıç genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metriği olsun. $\bar{d}$ metriğinin diskre olduğunu gösterelim. Eğer $u = v$ ise $\bar{d}(u,v) = 0$ dır. Kabul edelim ki $u \neq v$ olsun. Eğer u ve v noktaları $X \vee_p X$ wedge çarpımının aynı birleşenlerinde ise $\bigtriangledown_p(u) \neq \bigtriangledown_p(v)$ dır ve $d_{dis}(\bigtriangledown_p(u), \bigtriangledown_p(v)) = \infty$ ve dolayısıyla,

$$\begin{aligned}
\bar{d}(u,v) &= sup\{d_{dis}(\bigtriangledown(u), \bigtriangledown(v)), d_1(id(u), id(v)) = d_1(u,v)\} \\
&= sup\{\infty, d_1(u,v)\} \\
&= \infty
\end{aligned}$$

dur. Kabul edelim ki $u \neq v$ noktaları $X \vee_p X$ wedge çarpımının farklı birleşenlerinde ve $\bigtriangledown_p(u) = \bigtriangledown_p(v)$ olsun. Eğer $\bigtriangledown_p(u) = p = \bigtriangledown_p(v)$ ise $u = p = v$ olur. Bu da çelişkidir çünkü $u \neq v$ dir. Eğer $\bigtriangledown_p(u) = x = \bigtriangledown_p(v)$, $x \neq p$ ise $u = x_i$ ve $v = x_j, i, j = 1, 2$ ve $i \neq j$ olur çünkü $u \neq v$ dir yani, $u = x_1$ ve $v = x_2$ veya $u = x_2$ ve $v = x_1$ olur. $u = x_1$ ve $v = x_2$ olsun.

$$d_1(id(u), id(v)) = d_1(u,v) = d_1(x_1, x_2)$$

ve

$$d_{dis}(\bigtriangledown_p(x_1), \bigtriangledown_p(x_2)) = d(x,x) = 0$$

dır.

$$\begin{aligned}
\bar{d}(u,v) &= \bar{d}(x_1, x_2) \\
&= sup\{d_{dis}(\bigtriangledown(x_1), \bigtriangledown(x_2)), d_1(x_1, x_2\} \\
&= sup\{0, d_1(x_1, x_2\} \\
&= d_1(x_1, x_2 \\
&= \infty
\end{aligned}$$

olur çünkü $u = x_2$ ve $v = x_1$ $X \vee_p X$ wedge çarpımının farklı birleşenlerindedir ve dolayısıyla, $\bar{d}(u,v) = \infty$ dur. O halde, Tanım 3.2.2 ve Teorem 3.2.2 den (X,d) p noktasında T_0' dır.

3.3. Lokal T_1 Genişletilmiş Pseudo-Quasi-Yarı Metrik Uzaylar

Tanım 3.3.1. (B,τ) bir topolojik uzay ve $p \in B$ olsun.

1. Eğer her $p \neq q$ için $q \notin N_p$ olacak şekilde p nin en az bir N_p komşuluğu ve $p \notin N_q$ olacak şekilde q nun en az bir N_q komşuluğu varsa (B,τ) uzayı p de T_1 dir.

Teorem 3.3.1. (B,τ) bir topolojik uzay ve $p \in B$ olsun. (B,τ) uzayı p de T_1 dir ancak ve ancak B^2 üzerindeki çarpım topolojisi τ^* olmak üzere $S_p\colon B \vee_p B \to (B^2,\tau^*)$ ve $\nabla_p\colon B \vee_p B \to (B, P(B))$ fonksiyonları tarafından üretilen başlangıç topolololojisi diskredir [34].

Tanım 3.3.2. $U\colon$ **E** $\to$ **Set** bir topolojik fanktor, $U(X) = B$ olmak üzere, X : **E** nin bir nesnesi ve $p \in B$ olsun.
Eğer $\{S_p : B \vee_p B \to U(X^2) = B^2$ ve $\bigtriangledown_p : B \vee_p B \to UD(B) = B\}$ U-kaynağının başlangıç kaldırması diskre ise X nesnesine p de T_1 nesnesi denir [34].

Teorem 3.3.2. (X,d) genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzay ve $p \in X$ olsun. (X,d) p noktasında T_1 olması için gerek ve yeter şart her $x \in X$ ve $x \neq p$ için $d(x,p) = \infty = d(p,x)$ dir.

İspat: (X,d) genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzayı p noktasında T_1 ve her $x \in X$ ve $x \neq p$ olsun. $x_1, x_2 \in X \vee_p X$ dır.

$$d(\pi_1 S_p(x_1), \pi_1 S_p(x_2)) = d(x,p),$$

$$d(\pi_2 S_p(x_1), \pi_2 S_p(x_2)) = d(x,x) = 0,$$

$$d_{dis}(\bigtriangledown_p(x_1), \bigtriangledown_p(x_2)) = d(x,x) = 0,$$

burada, $\pi_i : X^2 \to X$ $i = 1,2$ iz düşüm fonksiyonlarıdır ve d_{dis}, X üzerinde genişletilmiş pseudo-quasi-yarı diskre metriktir. (X,d) p noktasında T_1 ve $x_1 \neq x_2$ olduğundan Tanım 3.3.2 ve Teorem 3.2.2 den

$$\begin{aligned} \infty &= \bar{d}(x_1,x_2) \\ &= sup\{d_{dis}(\bigtriangledown(x_1),\bigtriangledown(x_2)), d(\pi_i S_p(x_1),\pi_i S_p(x_2)), i=1,2\} \\ &= sup\{d(x,p)\} \\ &= d(x,p) \end{aligned}$$

ve dolayısıyla, $d(x,p) = \infty$ dır.

$$d(\pi_1 S_p(x_2),\pi_1 S_p(x_1)) = d(x,x) = 0,$$
$$d(\pi_2 S_p(x_2),\pi_2 S_p(x_1)) = d(p,x),$$
$$d_{dis}(\bigtriangledown_p(x_1),\bigtriangledown_p(x_2)) = d(x,x) = 0.$$

(X,d) p noktasında T_1 ve $x_1 \neq x_2$ olduğundan Tanım 3.3.2 ve Teorem 3.2.2 den

$$\begin{aligned} \infty &= \bar{d}(x_1,x_2) \\ &= sup\{d_{dis}(\bigtriangledown(x_1),\bigtriangledown(x_2)), d(\pi_i S_p(x_1),\pi_i S_p(x_2)), i=1,2\} \\ &= sup\{d(p,x)\} \\ &= d(p,x) \end{aligned}$$

ve dolayısıyla, $d(p,x) = \infty$ dur.

Her $x \in X$ ve $x \neq p$ için $d(x,p) = \infty$ ve $d(p,x) = \infty$ olsun. (X,d) nin p noktasında T_1 olduğunu gösterelim, yani, Tanım 3.3.2 ve Teorem 3.2.2 den $X \vee_p X$ wedge çarpım üzerinde $S_p : B \vee_p B \to U(X^2,d^2) = B^2$ ve $\bigtriangledown_p : B \vee_p B \to U(X,d_{dis}) = B$ fonksiyonları tarafından elde edilen $\bar{d}$ genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metriğinin diskre olduğunu gösterelim, burada d^2, B^2 üzerinde çarpım genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metriğidir. u ve v $X \vee_p X$ wedge de herhangi iki nokta olsun. Eğer $u = v$ ise $\bar{d}(u,v) = 0$ dır. Kabul edelim ki $u \neq v$ olsun. Eğer $\bigtriangledown_p(u) \neq \bigtriangledown_p(v)$ ise $d_{dis}(\bigtriangledown_p(u),\bigtriangledown_p(v)) = \infty$ ve dolayısıyla,

$$\begin{aligned} \bar{d}(u,v) &= sup\{d_{dis}(\bigtriangledown(u),\bigtriangledown(v)), d(\pi_i S_p(u),\pi_i S_p(v)), i=1,2\} \\ &= sup\{\infty, d(\pi_i S_p(u),\pi_i S_p(v)), i=1,2\} \\ &= \infty \end{aligned}$$

dur. Kabul edelim ki $u \neq v$ ve $\bigtriangledown_p(u) = \bigtriangledown_p(v)$ olsun. Eğer $\bigtriangledown_p(u) = p = \bigtriangledown_p(v)$ ise $u = p = v$ olur. Bu da çelişkidir çünkü $u \neq v$ dir. Eğer $\bigtriangledown_p(u) = x = \bigtriangledown_p(v)$, $x \neq p$ ise $u = x_i$ ve $v = x_j, i, j = 1, 2$ ve $i \neq j$ olur çünkü $u \neq v$ dir yani, $u = x_1$ ve $v = x_2$ veya $u = x_2$ ve $v = x_1$ olur. $u = x_1$ ve $v = x_2$ olsun.

$$d(\pi_1 S_p(x_1), \pi_1 S_p(x_2)) = d(x, p),$$

$$d(\pi_2 S_p(x_1), \pi_2 S_p(x_2)) = d(x, x) = 0$$

ve

$$d_{dis}(\bigtriangledown_p(x_1), \bigtriangledown_p(x_2)) = d(x, x) = 0$$

dır.

$$\begin{aligned} \bar{d}(u, v) &= \bar{d}(x_1, x_2) \\ &= sup\{d_{dis}(\bigtriangledown(x_1), \bigtriangledown(x_2)), d(\pi_i S_p(x_1), \pi_i S_p(x_2)), i = 1, 2\} \\ &= sup\{d(x, p)\} \\ &= d(x, p) \end{aligned}$$

olur. Kabulden $d(x, p) = \infty$ olduğundan $\bar{d}(u, v) = \infty$ dur.

$u = x_2$ ve $v = x_1$ olsun.

$$d(\pi_1 S_p(x_2), \pi_1 S_p(x_1)) = d(p, x),$$

$$d(\pi_2 S_p(x_2), \pi_2 S_p(x_1)) = d(x, x) = 0$$

ve

$$d_{dis}(\bigtriangledown_p(x_2), \bigtriangledown_p(x_1)) = d(x, x) = 0$$

dır.

$$\begin{aligned} \bar{d}(u, v) &= \bar{d}(x_2, x_1) \\ &= sup\{d_{dis}(\bigtriangledown(x_2), \bigtriangledown(x_1)), d(\pi_i S_p(x_2), \pi_i S_p(x_1)), i = 1, 2\} \\ &= sup\{d(p, x)\} \\ &= d(p, x) \end{aligned}$$

olur. Kabulden $d(p, x) = \infty$ olduğundan $\bar{d}(u, v) = \infty$ dur.

u ve v $X \vee_p X$ wedge de herhangi iki nokta için

$$\bar{d}(u, v) = \begin{cases} 0, & \text{eğer } u = v \\ \infty, & \text{eğer } u \neq v \end{cases}$$

olduğundan Tanım 3.3.2 ve Teorem 3.2.2 den (X,d) p noktasında T_1 dir.

3.4. Lokal T_0 ve T_1 Genişletilmiş Pseudo-Quasi-Yarı Metrik Uzayların Çarpımı ve Alt Uzayı

Teorem 3.4.1. $\{(X_i,d_i) : i \in I\}$ genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzayların bir sınıfı, $(X = \prod_{i\in I} X_i, d = \sup\limits_{i\in I}(d_i \circ (\pi_i \times \pi_i)))$, $\{(X_i,d_i) : i \in I\}$ uzayların kartezyen çarpımı olsun. Bu durumda her $j \in I$ için (X_j,d_j) uzayı (X,d) çarpım uzayının bir (B,d_B) alt uzayına izomorftur.

İspat: $i \neq j$ olacak şekilde her $i \in I$ için bir $c_i \in X_i$ sabit noktası seçelim. $B = \{c_1\} \times \{c_2\} \times ... \times \{c_{j-1}\} \times X_i \times \{c_{j+1}\}... \subset X$ olsun. Teorem 2.4.1(6) dan (B,d_B) uzayı (X,d) çarpım uzayının bir alt uzayıdır. $\pi_j : (B,d_B) \to (X_j,d_j)$ j. izdüşüm fonksiyonu $\pi_j(c_1,c_2,...,c_{j-1},b_j,c_{j+1},...) = b_j$ bire-bir ve örten fonksiyondur. Her $(c_1,c_2,...,c_{j-1},b_j,c_{j+1},...),(c_1,c_2,...,c_{j-1},a_j,c_{j+1},...) \in B$ için
$d_j(\pi_j((c_1,c_2,...,c_{j-1},b_j,c_{j+1},...)),\pi_j((c_1,c_2,...,c_{j-1},a_j,c_{j+1},...)))$
$= d_j(b_j,a_j) \leqslant \sup\{d_j(b_j,a_j), d_k(c_k,c_k) = 0, k \neq j)\}$
$= d((c_1,c_2,...,c_{j-1},b_j,c_{j+1},...),(c_1,c_2,...,c_{j-1},a_j,c_{j+1},...))$
$= d_B((c_1,c_2,...,c_{j-1},b_j,c_{j+1},...),(c_1,c_2,...,c_{j-1},a_j,c_{j+1},...))$
olduğundan $\pi_j : (B,d_B) \to (X_j,d_j)$ büzülme fonksiyonudur. Şimdi her $a_j \in X_j$ için $f : (X_j,d_j) \to (B,d_B)$ fonksiyonunu $f(a_j) = (c_1,c_2,...,c_{j-1},a_j,c_{j+1},...)$ şeklinde tanımlıyalım.

$$\begin{aligned}(\pi_j \circ f)(a_j) &= \pi_j(f(a_j)\\ &= \pi_j(c_1,c_2,...,c_{j-1},a_j,c_{j+1},...)\\ &= a_j\\ &= 1_{X_j}(a_j)\end{aligned}$$

dir, yani, $\pi_j \circ f = 1_{X_j}$ dir.

$$\begin{aligned}(f \circ \pi_j)(c_1,c_2,...,c_{j-1},a_j,c_{j+1},...) &= f(\pi_j((c_1,c_2,...,c_{j-1},a_j,c_{j+1},...))\\ &= f(a_j)\\ &= (c_1,c_2,...,c_{j-1},a_j,c_{j+1},...)\\ &= 1_B(c_1,c_2,...,c_{j-1},a_j,c_{j+1},...)\end{aligned}$$

dir, yani, $f \circ \pi_j = 1_B$ dir. O halde f fonksiyonu π_j nin tersidir. Her $a_j, b_j \in X_j$ için

$$\begin{aligned} d_B(f(a_j), f(b_j)) &= \sup\{d_j(a_j, b_j), d_k(c_k, c_k) = 0, k \neq j)\} \\ &= d((c_1, c_2, ..., c_{j-1}, b_j, c_{j+1}, ...), (c_1, c_2, ..., c_{j-1}, a_j, c_{j+1}, ...)) \\ &= d_j(a_j, b_j) \leqslant d_j(a_j, b_j) \end{aligned}$$

olduğundan f büzülme fonksiyonudur. O halde, (X_j, d_j) uzayı ile (B, d_B) uzayı izomorfturlar.

(X, d) genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzay ve $A \subset X$ olsun. Her $x, y \in A$ için $d_A(x, y) = d(x, y)$ ise (A, d_M) uzayı (X, d) nin alt uzayıdır.

Teorem 3.4.2. (X, d) genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzay, $A \subset X$ ve $p \in A$ olsun.

(1) Eğer (X, d) p noktasında $\overline{T}_0$ ise (A, d_A) p noktasında $\overline{T}_0$ dır.

(2) Eğer (X, d) p noktasında T_0' ise (A, d_A) p noktasında T_0' dır.

(3) Eğer (X, d) p noktasında T_1 ise (A, d_A) p noktasında T_1 dir.

İspat: (1) Kabul edelim ki (X, d) p noktasında $\overline{T}_0$, $p \in A$ ve her $x \in A$ için $x \neq p$ olsun. $A \subset X$ ve (X, d) p noktasında $\overline{T}_0$ olduğundan Teorem 3.2.3 den $d(x, p) = \infty$ veya $d(p, x) = \infty$. $d_A(x, y) = d(x, y) = \infty$ veya $d_A(y, x) = d(y, x) = \infty$ ve dolayısıyla (A, d) p noktasında $\overline{T}_0$ dır.

(2) nin ispatı açıktır.

(3) Kabul edelim ki (X, d) p noktasında T_1, $p \in A$ ve her $x \in A$ için $x \neq p$ olsun. $A \subset X$ ve (X, d) p noktasında T_1 olduğundan Teorem 3.3.2 den $d(x, p) = \infty$ ve $d(p, x) = \infty$ dur. $d_A(x, y) = d(x, y) = \infty$ ve $d_A(y, x) = d(y, x) = \infty$ ve dolayısıyla (A, d) p noktasında T_1 dir.

Teorem 3.4.3. (1) Her $i \in I$ için $\{(X_i, d_i) : i \in I\}$ p_i noktasında $\overline{T}_0$ genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzayıdır ancak ve ancak $(X = \prod_{i \in I} X_i, d = \sup\limits_{i \in I}(d_i \circ (\pi_i \times \pi_i)))$, $\{(X_i, d_i) : i \in I\}$ kartezyen çarpımıda $p = (p_1, p_2, ...)$ noktasında $\overline{T}_0$ dır.

(2) Her $i \in I$ için $\{(X_i, d_i) : i \in I\}$ p_i noktasında T_0' genişletilmiş pseudo-quasi-yarı

metrik uzayıdır ancak ve ancak $(X = \prod_{i\in I} X_i, d = \sup_{i\in I}(d_i \circ (\pi_i \times \pi_i)))$, $\{(X_i, d_i) : i \in I\}$ kartezyen çarpımıda $p = (p_1, p_2, ...)$ noktasında $T_0^{'}$ dır.
(3) Her $i \in I$ için $\{(X_i, d_i) : i \in I\}$ p_i noktasında T_1 genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzayıdır ancak ve ancak $(X = \prod_{i\in I} X_i, d = \sup_{i\in I}(d_i \circ (\pi_i \times \pi_i)))$, $\{(X_i, d_i) : i \in I\}$ kartezyen çarpımıda $p = (p_1, p_2, ...)$ noktasında T_1 dır.

İspat: (1) Her $j \in I$ için Teorem 3.4.1 den (X_j, d_j) uzayı (X, d) çarpım uzayının bir alt uzayına izomorf ve çarpım uzayı $(X = \prod_{i\in I} X_i, d = \sup_{i\in I}(d_i \circ (\pi_i \times \pi_i)))$ p noktasında $\overline{T}_0$ olduğundan (X_j, d_j) uzayı p_j noktasında $\overline{T}_0$ dır.
Her $i \in I$ için $\{(X_i, d_i) : i \in I\}$ p_i noktasında $\overline{T}_0$ genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzayı ve her $x = (x_1, x_2, ...) \in X$ için $x \neq p = (p_1, p_2, ...)$ olsun. $x \neq p$ olduğundan enaz bir $j \in I$ vardır $x_j \neq p_j$ dir. (X_j, d_j) uzayı $\overline{T}_0$ olduğundan $d_j(x_j, p_j) = \infty$ veya $d_j(p_j, x_j) = \infty$. Eğer $d_j(x_j, p_j) = \infty$ ise

$$\begin{aligned} d(x,p) &= \sup_{i\in I}(d_i(\pi_i(x), \pi_i(p))) \\ &= sup\{d_1((x_1),(p_1)), d_2((x_2),(p_2)), ..., d_{j-1}((x_{j-1}),(p_{j-1})), d_j((x_j),(p_j)) \\ &= \infty, d_{j+1}((x_{j+1}),(p_{j+1})), ...\} \\ &= \infty \end{aligned}$$

dur. Eğer $d_j(p_j, x_j) = \infty$ ise

$$\begin{aligned} d(p,x) &= \sup_{i\in I}(d_i(\pi_i(p), \pi_i(x))) \\ &= sup\{d_1((p_1),(x_1)), d_2((p_2),(x_2)), ..., d_{j-1}((p_{j-1}),(x_{j-1})), d_j((p_j),(x_j)) \\ &= \infty, d_{j+1}((p_{j+1}),(x_{j+1})), ...\} \\ &= \infty \end{aligned}$$

olur. Teorem 3.2.3 ten (X, d) çarpım uzayı p noktasında $\overline{T}_0$ dır.
(2) ve (3) kısımları da benzer şekilde ispatlanır.

Not 3.4.1. (1) **Top** topolojik uzaylar kategorisinde, p noktasında $\overline{T}_0$, T_0', T_1 kavramları, Tanım 3.2.1 ve Tanım 3.3.1 den sırasıyla, p noktasında T_0 ve T_1 ayırma aksiyomlarına indirgenir [34], [56].

(2) Genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzaylar kategorisinde Teorem 3.2.3 ve Teorem 3.2.4 ten p noktasında $\overline{T}_0$ uzayı herzaman p noktasında $T_0^{'}$ uzayıdır fakat gerektirmenin karşıtı genelde doğru değildir. Örneğin, $\mathbf{R}$ reel sayılar kümesi ve $\forall x, y \in \mathbf{R}$ için $d(x, y) = 0$ olsun. Teorem 3.2.4 ten, $(\mathbf{R}, d)$ p noktasında $\overline{T}_0$ genişletilmiş pseudo-quasi metrik uzayıdır ama Teorem 3.2.3 den $(\mathbf{R}, d)$ uzayı p noktasında $\overline{T}_0$ uzayı değildir. Ayrıca, Teorem 3.2.3 ve Teorem 3.3.2 den p noktasında T_1 uzayı herzaman p noktasında $\overline{T}_0$ uzayıdır fakat gerektirmenin karşıtı genelde doğru değildir. Örnek olarak,
$\mathbf{R}$ reel sayılar kümesi ve $\forall x, y \in \mathbf{R}$

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{eğer } x = y, \\ 1, & \text{eğer } x < y, \\ \infty, & \text{eğer } x > y. \end{cases}$$

verilsin. Teorem 3.2.3 den $(\mathbf{R}, d)$ uzayı p noktasında $\overline{T}_0$ dır fakat, Teorem 3.3.2 den p noktasında T_1 uzayı değildir.

4. BÖLÜM

T_0 ve T_1 GENİŞLETİLMİŞ PSEUDO-QUASİ-YARI METRİK UZAYLAR

Bu bölümde, değişik T_0 ve T_1 genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzayları karakterize edilmiş, bunlar arasındaki ilişkiler incelenmiş ve bu uzayların çarpımsal ve kalıtsal olduğu gösterilmiştir.

4.1. T_0 Genişletilmiş Pseudo-Quasi-Yarı Metrik Uzaylar

Tanım 4.1.1. B bir cümle ve $\Delta \subset B^2$ diyagonal olsun. B^2 nin ayrık iki kopyasının Δ da çakışmasına wedge çarpımı denir ve $B^2 \vee_\Delta B^2$ ile gösterilir [34]. Diğer bir ifadeyle, $(id, id) : \Delta \to B^2$ fonksiyonunun kendisiyle pushout diyagramı $B^2 \vee_\Delta B^2$ wedge çarpımını verir. Burada, $id : B^2 \to B^2$ birim fonksiyonudur. $B^2 \vee_\Delta B^2$ wedge çarpımındaki (x, y) noktası ilk bileşende ise $(x, y)_1$ ile ikinci bileşende ise $((x, y)_2)$ ile gösterilir. $((x, y)_1) = ((x, y)_2)$ ise $x = y$ olduğu açıktır [34].

Tanım 4.1.2. Temel eksen dönüşümü, $A : B^2 \vee_\Delta B^2 \to B^3$, $A(x, y)_1 = (x, y, x)$ ve $A(x, y)_2 = (x, x, y)$, skewed eksen dönüşümü $S : B^2 \vee_\Delta B^2 \to B^3$,$S(x, y)_1 = (x, y, y)$ ve $S(x, y)_2 = (x, x, y)$, katlama dönüşümü $\nabla : B^2 \vee_\Delta B^2 \to B^2$, $\nabla(x, y)_i = (x, y)$, $i = 1, 2$ şeklinde tanımlanır [34].

T_0 topolojik uzayı aşağıdaki şekilde karakterize edilmiştir.

Teorem 4.1.1. (B, τ) bir topolojik uzay olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir:

1. (B, τ) uzayı T_0 dır.

2. B^3 üzerindeki çarpım topolojisi τ^* olmak üzere $A\colon B^2 \vee_\Delta B^2 \to (B^3, \tau^*)$ ve $\nabla\colon B^2 \vee_\Delta B^2 \to (B^2, P(B^2))$ fonksiyonları tarafından üretilen başlangıç topolojisi diskredir.

3. $i_1, i_2\colon B^2 \to B^2 \vee_\Delta B^2$, $(x,y) \mapsto i_1(x,y) = (x,y)_1$, $(x,y) \mapsto i_2(x,y) = (x,y)_2$ fonksiyonları tarafından üretilen $B^2 \vee_\Delta B^2$ üzerindeki bitiş topolojisi τ_* olmak üzere, $id\colon B^2 \vee_\Delta B^2 \to (B^2 \vee_\Delta B^2, \tau_*)$ birim fonksiyonu ve $\nabla\colon B^2 \vee_\Delta B^2 \to (B^2, P(B^2))$ fonksiyonu tarafından üretilen başlangıç topolojisi diskredir.

4. (B, τ) topolojik uzayı en az iki elemanlı indiskre alt uzayını ihtiva etmez.

İspat: (1), (2) ve (3) ün denkliği Baran [56]′ da ve (1) ile (4) ün denkliği [58] de gösterilmiştir.

Baran [34] topolojik uzaylardaki T_0 ayırma aksiyomunu Teorem 4.1.1 i kullanarak herhangi bir topolojik kategoriye aşağıdaki şekilde genelleştirmiştir.

Tanım 4.1.3. $U\colon$ **E** $\to$ **Set** bir topolojik fanktor, $X \in Ob(E)$ ve $U(X) = B$ olsun.
(1) Eğer $\{A : B^2 \vee_\Delta B^2 \to U(X^3) = B^3$ ve $\nabla : B^2 \vee_\Delta B^2 \to U(D(B^2)) = B^2\}$ U-kaynağının başlangıç kaldırması diskre ise X nesnesine $\overline{T_0}$ nesnesi denir. Burada D, U nun sol adjointi olan diskre fanktordur [34].
(2)$(B^2 \vee_\Delta B^2)'$, $\{i_1, i_2 : U(X^2) = B^2 \to B^2 \vee_\Delta B^2\}$ kanonik fonksiyonları tarafından üretilen $B^2 \vee_\Delta B^2\}$ üzerindeki bitiş kaldırması olsun. Eğer $\{id : B^2 \vee_\Delta B^2 \to U(B^2 \vee_\Delta B^2)' = B^2 \vee_\Delta B^2$ birim foksiyonu ve $\nabla : B^2 \vee_\Delta B^2 \to U(D(B^2)) = B^2\}$ U-kaynağının başlangıç kaldırması diskre ise X nesnesine T_0' nesnesi denir [34].
(3) Eğer X in en az iki elemanından oluşan alt kümesi indiskre değilse X nesnesine T_0 nesnesi denir [58].

Not 4.1.1. (1) **Top** topolojik uzaylar kategorisinde, Teorem 4.1.1′den $\overline{T_0}$, T_0' ve T_0 kavramları klasik T_0 ayırma aksiyomuna indirgenir.
(2) Herhangi bir topolojik kategoride , her $\overline{T_0}$ nesnesi T_0' nesnesidir fakat genel olarak T_0' nesnesi $\overline{T_0}$ nesnesi olmayabilir ([62], Teorem 3.2). Ayrıca, genelde T_0 nesnesi ile $\overline{T_0}$ ve T_0' nesneleri arasında ilişki yoktur ([62], Not 3.6).

Teorem 4.1.2. (X, d) genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzayın $\overline{T}_0$ olması için gerek ve yeter şart her $x, y \in X$ ve $x \neq y$ için $d(x, y) = \infty$ veya $d(y, x) = \infty$ dur.

İspat: (X, d) genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzayı $\overline{T}_0$ ve $x, y \in X$ için $x \neq y$ olsun. $u = (x, y)_1, v = (x, y)_2$ ve $u, v \in X^2 \vee_\Delta X^2$ dır.

$$\begin{aligned} d(\pi_1 A(u), \pi_1 A(v)) &= d(x, x) \\ &= 0 \\ &= d_{dis}(\bigtriangledown(u), \bigtriangledown(v)) \\ &= d_{dis}((x, y), (x, y)), \end{aligned}$$

$$d(\pi_2 A(u), \pi_2 A(v)) = d(y, x),$$

$$d(\pi_3 A(u), \pi_3 A(v)) = d(x, y),$$

burada, $\pi_i : X^3 \to X$ $i = 1, 2, 3$ iz düşüm fonksiyonları ve d_{dis}, X^2 üzerinde genişletilmiş pseudo-quasi-yarı diskre metriktir. (X, d) $\overline{T}_0$ ve $u \neq v$ olduğundan Tanım 4.1.3 ve Teorem 3.2.2 den

$$\begin{aligned} \infty &= \bar{d}(u, v) \\ &= sup\{d_{dis}(\bigtriangledown(u), \bigtriangledown(v)), d(\pi_i A(u), \pi_i A(v)), i = 1, 2, 3\} \\ &= sup\{d(x, y), d(y, x)\} \end{aligned}$$

ve dolayısıyla, $d(x, y) = \infty$ veya $d(y, x) = \infty$ dur.

Her $x, y \in X$ ve $x \neq y$ için $d(x, y) = \infty$ veya $d(y, x) = \infty$ olsun. (X, d) nin $\overline{T}_0$ olduğunu gösterelim, yani, Tanım 4.1.3 ve Teorem 3.2.2 den $X^2 \vee_\Delta X^2$ wedge çarpım üzerinde

$$A : X^2 \vee_\Delta X^2 \to U((X^3, d^3)) = X^3$$

ve

$$\bigtriangledown : X^2 \vee_\Delta X^2 \longrightarrow U((X^2, d_{dis})) = X^2$$

fonksiyonları tarafından elde edilen $\bar{d}$ genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metriğinin diskre olduğunu gösterelim, burada d^3, B^3 üzerinde genişletilmiş pseudo-quasi-yarı çarpım metriği ve d_{dis}, X^2 üzerinde genişletilmiş pseudo-quasi-yarı diskre metriğidir. u ve v $X^2 \vee_\Delta X^2$ wedge çarpımında herhangi iki nokta olsun. Eğer $u = v$ ise $\bar{d}(u, v) = 0$ dır. Kabul edelim ki $u \neq v$ olsun. Eğer $\bigtriangledown(u) \neq \bigtriangledown(v)$ ise $d_{dis}(\bigtriangledown(u), \bigtriangledown(v)) = \infty$ ve dolayısıyla,

$$\begin{aligned}
\bar{d}(u, v) &= sup\{d_{dis}(\bigtriangledown(u), \bigtriangledown(v)), d(\pi_i A(u), \pi_i A(v)), i = 1, 2, 3\} \\
&= sup\{\infty, d(\pi_i A(u), \pi_i A(v)), i = 1, 2, 3\} \\
&= \infty
\end{aligned}$$

dur. Kabul edelim ki $u \neq v$ ve $\bigtriangledown(u) = \bigtriangledown(v)$ olsun. Eğer $\bigtriangledown(u) = (x, y) = \bigtriangledown(v)$ $(x, y) \in X^2$ ise $u \neq v$ olduğundan $u = (x, y)_1$ ve $v = (x, y)_2$ veya $u = (x, y)_2$ ve $v = (x, y)_1$ olur.

$u = (x, y)_1$ ve $v = (x, y)_2$ olsun.

$$\begin{aligned}
d(\pi_1 A(u), \pi_1 A(v)) &= d(x, x) \\
&= 0 \\
&= d_{dis}(\bigtriangledown(u), \bigtriangledown(v)),
\end{aligned}$$

$$d(\pi_2 A(u), \pi_2 A(v)) = d(y, x),$$

$$d(\pi_3 A(u), \pi_3 A(v)) = d(x, y).$$

Tanım 4.1.3, Teorem 3.2.2 ve $x \neq y$ için $d(x, y) = \infty$ veya $d(y, x) = \infty$ hipotezinden,

$$\begin{aligned}
\bar{d}(u, v) &= sup\{d_{dis}(\bigtriangledown(u), \bigtriangledown(v)), d(\pi_i A(u), \pi_i A(v)), i = 1, 2, 3\} \\
&= sup\{d(x, y), d(y, x)\} \\
&= \infty
\end{aligned}$$

olur.

$u = (x, y)_2$ ve $v = (x, y)_1$ olsun.

$$\begin{aligned}
d(\pi_1 A(u), \pi_1 A(v)) &= d(x, x) \\
&= 0 \\
&= d_{dis}(\bigtriangledown(u), \bigtriangledown(v)),
\end{aligned}$$

$$d(\pi_2 A(u), \pi_2 A(v)) = d(x, y),$$

$$d(\pi_3 A(u), \pi_3 A(v)) = d(y, x).$$

Tanım 4.1.3, Teorem 3.2.2 ve $x \neq y$ için $d(x,y) = \infty$ veya $d(y,x) = \infty$ hipotezinden,

$$\begin{aligned} \bar{d}(u,v) &= sup\{d_{dis}(\bigtriangledown(u), \bigtriangledown(v)), d(\pi_i A(u), \pi_i A(v)), i = 1,2,3\} \\ &= sup\{d(x,y), d(y,x)\} \\ &= \infty \end{aligned}$$

olur.

Eğer $\bigtriangledown(u) = (x,x) = \bigtriangledown(v)$, $(x,x) \in X^2$ ise $u = v$ ve dolayısıyla $\bar{d}(u,v) = 0$ dır. O halde, $X^2 \vee_\Delta X^2$ wedge çarpımı üzerindeki $\bar{d}$ genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metriği diskredir. Yani, $X^2 \vee_\Delta X^2$ wedge çarpımında herhangi u ve v noktaları için

$$\bar{d}(u,v) = \begin{cases} 0, & \text{eğer } u = v \\ \infty, & \text{eğer } u \neq v \end{cases}$$

olduğundan Tanım 4.1.3 ve Teorem 3.2.2 den (X,d) $\overline{T}_0$ dır.

Teorem 4.1.3. Her genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik (X,d) uzayı T_0' dır.

İspat: u ve v, $X^2 \vee_\Delta X^2$ wedge çarpımında herhangi iki nokta olsun. d_1, $X^2 \vee_\Delta X^2$ wedge çarpımı üzerinde $i_1, i_2 : X^2 = U((X^2, d^2)) \to X^2 \vee_\Delta X^2$ kanonik fonksiyonları tarafından üretilen bitiş genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metriği olsun. Eğer u ve v noktaları $X^2 \vee_\Delta X^2$ wedge çarpımının aynı bileşeninde ise $d_1(u,v) = \inf\{(d^2((x,y),(a,b)) : (x,y),(a,b) \in X^2, i_k((x,y)) = u, i_k((a,b)) = v$ ve $u \neq v$ noktaları $X^2 \vee_\Delta X^2$ wedge çarpımının farklı birleşenlerinde ise $d_1(u,v) = \infty$ dur.

$$\bar{d}(u,v) = sup\{d_{dis}(\bigtriangledown(u), \bigtriangledown(v)), d_1(id(u), id(v)) = d_1(u,v)\}$$

$$id : X^2 \vee_\Delta X^2 \to U(X^2 \vee_\Delta X^2, d_1) = X^2 \vee_\Delta X^2$$

ve

$$\bigtriangledown : X^2 \vee_\Delta X^2 \to U(X^2, d_{dis}) = X^2$$

fonksiyonları tarafından elde edilen başlangıç genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metriği olsun. $\bar{d}$ metriğinin diskre olduğunu gösterelim. Eğer $u = v$ ise $\bar{d}(u, v) = 0$ dır. Kabul edelim ki $u \neq v$ olsun. Eğer u ve v noktaları $X^2 \vee_\Delta X^2$ wedge çarpımının aynı birleşenlerinde ise $\bigtriangledown(u) \neq \bigtriangledown(v)$ dır ve $d_{dis}(\bigtriangledown(u), \bigtriangledown(v)) = \infty$ ve dolayısıyla,

$$\begin{aligned} \bar{d}(u, v) &= sup\{d_{dis}(\bigtriangledown(u), \bigtriangledown(v)), d_1(id(u), id(v)) = d_1(u, v)\} \\ &= sup\{\infty, d_1(u, v)\} \\ &= \infty \end{aligned}$$

dur. Kabul edelim ki $u \neq v$ noktaları $X^2 \vee_\Delta X^2$ wedge çarpımının farklı birleşenlerinde ve $\bigtriangledown(u) = \bigtriangledown(v)$ olsun. Eğer $\bigtriangledown(u) = (x, y) = \bigtriangledown(v)$ $(x, y) \in X^2$ ise $u \neq v$ olduğundan $u = (x, y)_1$ ve $v = (x, y)_2$ veya $u = (x, y)_2$ ve $v = (x, y)_1$ olur. $d_1(u, v) = \infty$ olduğundan

$$\bar{d}(u, v) = sup\{d_{dis}(\bigtriangledown(u), \bigtriangledown(v)), d_1(id(u), id(v)) = d_1(u, v) = \infty\} = \infty.$$

Eğer $\bigtriangledown(u) = (x, x) = \bigtriangledown(v)$, $(x, x) \in X^2$ ise $u = v$ ve dolayısıyla, $\bar{d}(u, v) = 0$ dır. O halde, $X^2 \vee_\Delta X^2$ wedge çarpımı üzerindeki $\bar{d}$ genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metriği diskredir. Yani, $X^2 \vee_\Delta X^2$ wedge çarpımında herhangi u ve v noktaları için

$$\bar{d}(u, v) = \begin{cases} 0, & \text{eğer } u = v \\ \infty, & \text{eğer } u \neq v \end{cases}$$

olduğundan Tanım 4.1.3 ve Teorem 3.2.2 den (X, d) T_0' dır.

Teorem 4.1.4. (X, d) genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzayı T_0 olması için gerek ve yeter şart (X, d) genişletilmiş quasi-yarı metrik uzayıdır.

İspat: Kabul edelimki (X, d) genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzayı T_0 ve $x, y \in X$ için $d(x, y) = 0 = d(y, x)$ olsun. $B = \{x, y\}$ ve d_B B üzerindeki $i : B \to X$ alt küme fonksiyonu tarafından üretilen başlangıç genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metriği olsun. Teorem 3.2.2 den ,

$$d_B(x, y) = d(i(x), i(y)) = d(x, y) = 0$$

$$d_B(x,x) = d(i(x), i(x)) = d(x,x) = 0$$

$$d_B(y,y) = d(i(y), i(y)) = d(y,y) = 0$$

ve

$$d_B(y,x) = d(i(y), i(x)) = d(y,x) = 0$$

dır. (X,d) genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzayı T_0 olduğundan Tanım 4.1.3 ten $x = y$ dir. O halde Tanım 1.1.1 den (X,d) genişletilmiş quasi-yarı metrik uzayıdır.

Kabul edelimki (X,d) genişletilmiş quasi-yarı metrik uzayı ve B, X in en az iki elemanlı indiskre bir alt uzayı olsun. $x, y \in B$ ve $x \neq y$ olmak üzere d_B, B üzerindeki $i : B \to X$ alt küme fonksiyonu tarafından üretilen başlangıç genişletilmiş quasi-yarı metriği olsun. Teorem 3.2.2 den,

$$\begin{aligned} 0 &= d_B(x,y) \\ &= d(i(x), i(y)) \\ &= d(x,y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= d_B(y,x) \\ &= d(i(y), i(x)) \\ &= d(y,x) \end{aligned}$$

dir. (X,d) genişletilmiş quasi-yarı metrik uzayı olduğundan $x = y$ dir. Bu da $x \neq y$ ile çelişir. O halde, (X,d) genişletilmiş quasi-yarı metrik uzayı en az iki elemanlı indiskre bir alt uzayı ihtiva edemez. Tanım 4.1.3 den (X,d) genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzayı T_0 dır.

Tanım 4.1.4. (X,d) genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzayı olsun. τ_d, X üzerinde d tarafından üretilen topoloji olsun. Eğer (X, τ_d) T_0 uzayı ise (X,d) uzayına klasik anlamda T_0 uzayı denir ve CT_0 ile gösterilir.

Teorem 4.1.5. (X,d) genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzayı CT_0 olması için gerek ve yeter şart (X,d) genişletilmiş quasi-yarı metrik uzayıdır.

İspat: Kabul edelim ki (X,d) genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzayı CT_0 ve $x, y \in X$ $x \neq y$ olsun. (X,d) CT_0 uzayı olduğundan x i ihtiva eden ve y yi

içermeyen enaz bir U açığı veya y yi ihtiva eden ve x yi içermeyen enaz bir V açığı vardır. Eğer $x \in U$ açık ve $y \notin U$ olduğundan enaz bir $r > 0$ reel sayısı vardır öyleki $S(x,r) \subset U$ dur. $y \notin U$ olduğundan $y \notin S(x,r)$ dir ve dolayısıyla $d(x,y) \geqslant r > 0$ dır.
Eğer $y \in V$ açık ve $x \notin V$ olduğundan enaz bir $r > 0$ reel sayısı vardır öyleki $S(y,r) \subset V$ dur. $x \notin V$ olduğundan $x \notin S(y,r)$ dir ve dolayısıyla $d(y,x) \geqslant r > 0$ dır. O halde, (X,d) genişletilmiş quasi-yarı metrik uzayıdır.
Kabul edelim ki (X,d) genişletilmiş quasi-yarı metrik uzayının farklı her $x, y \in X$ noktaları için $d(x,y) > 0$ veya $d(y,x) > 0$ olsun. Eğer $d(x,y) > 0$ ise $r = d(x,y) > 0$ olmak üzere $x \in S(x,r)$ ve $y \notin S(x,r)$ dır. Eğer $d(y,x) > 0$ ise $\epsilon = d(y,x) > 0$ olmak üzere $y \in S(y,\epsilon)$ ve $x \notin S(y,\epsilon)$ dır. Dolayısıyla, Tanım 4.1.4 ten (X,d) uzayı CT_0 dır.

Teorem 4.1.6. (X,d) genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzayı olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.
(1) (X,d) uzayı T_0 dır.
(2) (X,d) uzayı CT_0 dır.
(3) (X,d) genişletilmiş quasi-yarı metrik uzayıdır.

İspat: Teorem 4.1.4 ve Teorem 4.1.5 ten elde edilir.

Teorem 4.1.7. (X,d) genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzayı olsun.
(1) Aşağıdaki ifadeler denktir.
(i) (X,d) $\overline{T}_0$ dır.
(ii) Her $p \in X$ için (X,d) p noktasında $\overline{T}_0$ dır.
(iii) Her $x \in X$ ve $x \neq p$ için $d(x,p) = \infty$ veya $d(p,x) = \infty$ dur.
(2) (X,d) uzayı T_0' dır ancak ve ancak her $p \in X$ için (X,d) p noktasında T_0' dır.

İspat: İspatı Teorem 3.2.3- 3.2.4 ve Teorem 4.1.2- 4.1.3 ten elde edilir.

Örnek 4.1.1. $\forall x, y \in [0,\infty]$ için $d\colon [0,\infty] \times [0,\infty] \to [0,\infty]$ fonksiyonu

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{eğer } x \geqslant y \\ y - x, & \text{eğer } x < y \end{cases}$$

$[0,\infty]$ nın herhangi farklı x, y noktaları için eğer $x < y$ ise $d(x,y) = y - x > 0$ olduğundan Teorem 4.1.4 ten $([0,\infty], d)$ T_0 uzayıdır. $d(1,2) = 1$ ve $d(2,1) = 0$ olduğundan Teorem 4.1.2 den $([0,\infty], d)$ $\overline{T}_0$ değildir.

Örnek 4.1.2. $\mathbf{R}$ reel sayılar kümesi ve her $x, y \in \mathbf{R}$ için $d(x,y) = 0$ olsun. Teorem 4.1.3 ten $(\mathbf{R}, d)$ $T_0^{'}$ uzayıdır fakat Teorem 4.1.2 ve Teorem 4.1.4 den $(\mathbf{R}, d)$ ne T_0 dır ne de $\overline{T}_0$ dır.

Not 4.1.2. Genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzaylar kategorisinde Teorem 4.1.2-4.1.4 ve Örnek 4.1.1-4.1.2 den $\overline{T}_0 \Rightarrow T_0 \Rightarrow T_0^{'}$ dır fakat her gerektirmenin karşıtı genelde doğru değildir.

4.2. T_0 Genişletilmiş Pseudo-Quasi-Yarı Metrik Uzayların Çarpımı

Bu bölümde T_0 genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzayların kalıtsal ve çarpımsal olduğu gösterimiştir.

Teorem 4.2.1. (X, d) genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzay ve $A \subset X$ olsun.
(1) Eğer (X, d) $\overline{T}_0$ ise (A, d_A) $\overline{T}_0$ dır.
(2) Eğer (X, d) $T_0^{'}$ ise (A, d_A) $T_0^{'}$ dır.
(3) Eğer (X, d) T_0 ise (A, d_A) T_0 dir.
(4) Eğer (X, d) CT_0 ise (A, d_A) CT_0 dir.

İspat: (1) Kabul edelim ki (X, d) uzayı $\overline{T}_0$ ve her $x, y \in A$ için $x \neq y$ olsun. $A \subset X$ ve (X, d) uzayı $\overline{T}_0$ olduğundan Teorem 4.1.2 den $d(x,y) = \infty$ veya $d(y,x) = \infty$. Teorem 2.4.1(6) dan $d_A(x,y) = d(x,y) = \infty$ veya $d_A(y,x) = d(y,x) = \infty$ ve Teorem 4.1.2 den (A, d_A) alt uzayı $\overline{T}_0$ dır.
(2) nin ispatı aşikardır.
(3) (X, d) uzayı T_0 ve her $x, y \in A$ için $x \neq y$ olsun. $A \subset X$ ve (X, d) uzayı T_0 olduğundan Teorem 4.1.4 den $d(x,y) > 0$ veya $d(y,x) > 0$ dır. Eğer $d(x,y) > 0$ ise Teorem 2.4.1(6) dan $d_A(x,y) = d(x,y) > 0$ dır. Eğer $d(y,x) > 0$ ise $d_A(y,x) = d(y,x) > 0$ olup Teorem 4.1.4 ten (A, d_A) alt uzayı T_0 dır.
(4) ün ispatı (3) ün ispatı ile aynıdır.

Teorem 4.2.2. (1) Her $i \in I$ için (X_i, d_i) $\overline{T}_0$ genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzayıdır ancak ve ancak $(X = \prod_{i \in I} X_i, d = \sup_{i \in I}(d_i \circ (\pi_i \times \pi_i)))$ kartezyen çarpımıda

$\overline{T}_0$ dır.

(2) Her $i \in I$ için (X_i, d_i) $T_0^{'}$ genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzayıdır ancak ve ancak $(X = \prod_{i \in I} X_i, d = \sup\limits_{i \in I}(d_i \circ (\pi_i \times \pi_i)))$ kartezyen çarpımıda $T_0^{'}$ dır.

(3) Her $i \in I$ için (X_i, d_i) T_0 genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzayıdır ancak ve ancak $(X = \prod_{i \in I} X_i, d = \sup\limits_{i \in I}(d_i \circ (\pi_i \times \pi_i)))$ kartezyen çarpımıda T_0 dır.

İspat: (1) Her $j \in I$ için Teorem 3.4.1 den (X_j, d_j) uzayı (X, d) çarpım uzayının bir alt uzayına izomorf ve çarpım uzayı $(X = \prod_{i \in I} X_i, d = \sup\limits_{i \in I}(d_i \circ (\pi_i \times \pi_i)))$ $\overline{T}_0$ olduğundan (X_j, d_j) uzayı $\overline{T}_0$ dır.

Her $i \in I$ için (X_i, d_i) $\overline{T}_0$ genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzayı ve $x = (x_1, x_2, ...), y = (y_1, y_2, ...) \in X$ için $x \neq y$ olsun. $x \neq y$ olduğundan enaz bir $j \in I$ vardır öyle ki $x_j \neq y_j$ dir. (X_j, d_j) uzayı $\overline{T}_0$ olduğundan Teorem 4.1.2 den $d_j(x_j, y_j) = \infty$ veya $d_j(y_j, x_j) = \infty$ dur.

Eğer $d_j(x_j, y_j) = \infty$ ise

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \sup_{i \in I}(d_i(\pi_i(x), \pi_i(y))) \\ &= sup\{d_1(x_1,y_1), d_2(x_2,y_2), ..., d_{j-1}(x_{j-1}, y_{j-1}), d_j(x_j,y_j) \\ &= \infty, d_{j+1}(x_{j+1}, y_{j+1}), ...\} \\ &= \infty \end{aligned}$$

dur. Eğer $d_j(y_j, x_j) = \infty$ ise

$$\begin{aligned} d(y,x) &= \sup_{i \in I}(d_i(\pi_i(y), \pi_i(x))) \\ &= sup\{d_1(y_1,x_1), d_2(y_2,x_2), ..., d_{j-1}(y_{j-1}, x_{j-1}), d_j(y_j,x_j) \\ &= \infty, d_{j+1}(y_{j+1}, x_{j+1}), ...\} \\ &= \infty \end{aligned}$$

olur. Teorem 4.1.2 den (X, d) çarpım uzayı $\overline{T}_0$ dır.

(2) nin ispatı aşikardır.

(3) Her $j \in I$ için Teorem 3.4.1 den (X_j, d_j) uzayı (X, d) çarpım uzayının bir alt uzayına izomorf ve çarpım uzayı $(X = \prod_{i \in I} X_i, d = \sup\limits_{i \in I}(d_i \circ (\pi_i \times \pi_i)))$ T_0 olduğundan (X_j, d_j) uzayı T_0 dır.

Her $i \in I$ için (X_i, d_i) T_0 genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzayı ve $x =$

$(x_1, x_2, ...), y = (y_1, y_2, ...) \in X$ için $x \neq y$ olsun. $x \neq y$ olduğundan $x_j \neq y_j$ olacak şekilde enaz bir $j \in I$ vardır. (X_j, d_j) uzayı T_0 olduğundan Teorem 4.1.4 ten $d_j(x_j, y_j) > 0$ veya $d_j(y_j, x_j) > 0$ dır.
Eğer $d_j(x_j, y_j) > 0$ ise

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \sup_{i \in I}(d_i(\pi_i(x), \pi_i(y))) \\ &= sup\{d_1(x_1,y_1), ..., d_{j-1}(x_{j-1}, y_{j-1}), d_j(x_j, y_j), ...\} \\ &\geqslant d_j(x_j, y_j) \\ &> 0 \end{aligned}$$

dır. Eğer $d_j(y_j, x_j) > 0$ ise

$$\begin{aligned} d(y,x) &= \sup_{i \in I}(d_i(\pi_i(y), \pi_i(x))) \\ &= sup\{d_1(y_1,x_1), ..., d_{j-1}(y_{j-1}, x_{j-1}), d_j(y_j, x_j), ...\} \\ &\geqslant d_j(y_j, x_j) \\ &> 0 \end{aligned}$$

olur. Teorem 4.1.4 ten (X, d) çarpım uzayı T_0 dır.

4.3. T_1 Genişletilmiş Pseudo-Quasi-Yarı Metrik Uzaylar

Teorem 4.3.1. (B, τ) bir topolojik uzay olsun. (B, τ) uzayı T_1 dir ancak ve ancak B^3 üzerindeki çarpım topolojisi τ^* olmak üzere $S\colon B^2 \vee_\Delta B^2 \to (B^3, \tau^*)$ ve $\nabla\colon B^2 \vee_\Delta B^2 \to (B^2, P(B^2))$ fonksiyonları tarafından üretilen başlangıç topolololjisi diskredir, burada $S : B^2 \vee_\Delta B^2 \to B^3$,$S(x,y)_1 = (x,y,y)$ ve $S(x,y)_2 = (x,x,y)$ skewed eksen dönüşümüdür.

İspat: İspatı [56]′ da verilmiştir.
Topolojik uzaylardaki T_1 ayırma aksiyomunu herhangi bir topolojik kategoriye Teorem 4.3.1 kullanılarak aşağıdaki şekilde genelleştirmiştir.

Tanım 4.3.1. $U : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{Set}$ bir topolojik fanktor olmak üzere X, **E** nin bir objesi ve $U(X) = B$ olsun.

Eğer $\{S : B^2 \vee_\Delta B^2 \to U(X^3) = B^3$ ve $\nabla : B^2 \vee_\Delta B^2 \to UD(B^2) = B^2\}$ U-kaynağının başlangıç kaldırması diskre ise X nesnesine T_1 obje denir [56].

Şimdi T_1 genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzayları karakterize edelim.

Teorem 4.3.2. (X, d) genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzayın T_1 olması için gerek ve yeter şart her $x, y \in X$ ve $x \neq y$ için $d(x, y) = \infty = d(y, x)$ dir.

İspat: (X, d) genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzayı T_1 ve $x, y \in X$ ve $x \neq y$ olsun. $u = (x, y)_1, v = (x, y)_2$ ve $u, v \in X^2 \vee_\Delta X^2$ dır.

$$\begin{aligned} d(\pi_1 S(u), \pi_1 S(v)) &= d(x, x) \\ &= 0 \\ &= d_{dis}((x, y), (x, y)) \\ &= d_{dis}(\bigtriangledown(u), \bigtriangledown(v)), \end{aligned}$$

$$d(\pi_2 S(u), \pi_2 S(v)) = d(y, x),$$

$$d(\pi_3 S(u), \pi_3 S(v)) = d(y, y) = 0,$$

burada, $\pi_i : X^3 \to X$ $i = 1, 2, 3$ iz düşüm fonksiyonları ve d_{dis}, X^2 üzerinde genişletilmiş pseudo-quasi-yarı diskre metriktir. (X, d) T_1 ve $u \neq v$ olduğundan Tanım 4.1.3 ve Teorem 3.2.2 den

$$\begin{aligned} \infty &= \bar{d}(u, v) \\ &= sup\{d_{dis}(\bigtriangledown(u), \bigtriangledown(v)), d(\pi_i S(u), \pi_i S(v)), i = 1, 2, 3\} \\ &= sup\{0, d(y, x)\} \\ &= d(y, x) \end{aligned}$$

ve dolayısıyla, $d(y, x) = \infty$ dır.

$u = (x, y)_2, v = (x, y)_1$ ve $u, v \in X^2 \vee_\Delta X^2$ dır.

$$\begin{aligned} d(\pi_1 S(u), \pi_1 S(v)) &= d(x, x) \\ &= 0 \\ &= d_{dis}((x, y), (x, y)) \\ &= d_{dis}(\bigtriangledown(u), \bigtriangledown(v)), \end{aligned}$$

$$d(\pi_2 S(u), \pi_2 S(v)) = d(x, y),$$

$$d(\pi_3 S(u), \pi_3 S(v)) = d(y, y) = 0.$$

(X, d) T_1 ve $u \neq v$ olduğundan Tanım 4.1.3 ve Teorem 3.2.2 den

$$\begin{aligned} \infty &= \bar{d}(u, v) \\ &= sup\{d_{dis}(\bigtriangledown(u), \bigtriangledown(v)), d(\pi_i S(u), \pi_i S(v)), i = 1, 2, 3\} \\ &= sup\{0, d(x, y)\} \\ &= d(x, y) \end{aligned}$$

ve buradan , $d(x, y) = \infty$ elde edilir.

Her $x, y \in X$ ve $x \neq y$ için $d(x, y) = \infty$ ve $d(y, x) = \infty$ olsun. (X, d) nin T_1 olduğunu gösterelim. $X^2 \vee_\Delta X^2$ wedge çarpım üzerinde

$$S : X^2 \vee_\Delta X^2 \to U((X^3, d^3)) = X^3$$

ve

$$\bigtriangledown : X^2 \vee_\Delta X^2 \longrightarrow U((X^2, d_{dis})) = X^2$$

fonksiyonları tarafından elde edilen $\bar{d}$ genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metriğinin diskre olduğunu gösterelim. Burada d^3, B^3 üzerinde genişletilmiş pseudo-quasi-yarı çarpım metriği ve d_{dis}, X^2 üzerinde genişletilmiş pseudo-quasi-yarı diskre metriğidir. u ve v $X^2 \vee_\Delta X^2$ wedge çarpımında herhangi iki nokta olsun. Eğer $u = v$ ise $\bar{d}(u, v) = 0$ dır. Kabul edelim ki $u \neq v$ olsun. Eğer $\bigtriangledown(u) \neq \bigtriangledown(v)$ ise $d_{dis}(\bigtriangledown(u), \bigtriangledown(v)) = \infty$ ve dolayısıyla,

$$\begin{aligned} \bar{d}(u, v) &= sup\{d_{dis}(\bigtriangledown(u), \bigtriangledown(v)), d(\pi_i S(u), \pi_i S(v)), i = 1, 2, 3\} \\ &= sup\{\infty, d(\pi_i S(u), \pi_i S(v)), i = 1, 2, 3\} \\ &= \infty \end{aligned}$$

dur. Kabul edelim ki $u \neq v$ ve $\bigtriangledown(u) = \bigtriangledown(v)$ olsun. Eğer $\bigtriangledown(u) = (x, y) = \bigtriangledown(v)$ $(x, y) \in X^2$ ise $u \neq v$ olduğundan $u = (x, y)_1$ ve $v = (x, y)_2$ veya $u = (x, y)_2$ ve

$v = (x, y)_1$ olur. Tanım 4.1.3, Teorem 3.2.2 ve $x \neq y$ için $d(y, x) = \infty$ hipotezinden,

$$\begin{aligned} \bar{d}(u, v) &= sup\{d(\pi_1 S(u), \pi_1 S(v)) \\ &= d(x, x) \\ &= 0 \\ &= d_{dis}((x, y), (x, y)) \\ &= d_{dis}(\bigtriangledown(u), \bigtriangledown(v)), \end{aligned}$$

$$d(\pi_2 S(u), \pi_2 S(v)) = d(y, x),$$

$$d(\pi_3 S(u), \pi_3 S(v)) = d(y, y) = 0\} = sup\{0, d(y, x)\} = \infty.$$

Eğer $u = (x, y)_2$ ve $v = (x, y)_1$ ise Tanım 4.1.3, Teorem 3.2.2 ve $x \neq y$ için $d(x, y) = \infty$ hipotezinden,

$$\begin{aligned} \bar{d}(u, v) &= sup\{d(\pi_1 S(u), \pi_1 S(v)) \\ &= d(x, x) \\ &= 0 \\ &= d_{dis}((x, y), (x, y)) \\ &= d_{dis}(\bigtriangledown(u), \bigtriangledown(v)), \end{aligned}$$

$$d(\pi_2 S(u), \pi_2 S(v)) = d(x, y),$$

$$d(\pi_3 S(u), \pi_3 S(v)) = d(y, y) = 0\} = sup\{0, d(x, y)\} = \infty.$$

Eğer $\bigtriangledown(u) = (x, x) = \bigtriangledown(v)$, $(x, x) \in X^2$ ise $u = v$ ve dolayısıyla, $\bar{d}(u, v) = 0$ dır. O halde, $X^2 \vee_{\Delta} X^2$ wedge çarpımı üzerindeki $\bar{d}$ genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metriği diskredir. Yani, $X^2 \vee_{\Delta} X^2$ wedge çarpımında herhangi u ve v noktaları için

$$\bar{d}(u, v) = \begin{cases} 0, & \text{eğer } u = v \\ \infty, & \text{eğer } u \neq v \end{cases}$$

olduğundan Tanım 4.1.3 ve Teorem 3.2.2 den (X, d) T_1 dir.

Tanım 4.3.2. (X, d) genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzayı olsun. τ_d, X üzerinde d tarafından üretilen topoloji olsun. Eğer (X, τ_d) T_1 uzayı ise (X, d) uzayına T_1 uzayı (klasik anlamda) denir ve $\mathbf{T_1}$ ile gösterilir.

Teorem 4.3.3. (X, d) genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzayı $\mathbf{T_1}$ olması için gerek ve yeter şart her $x, y \in X$ ve $x \neq y$ için $d(x, y) > 0$ dır.

İspat: Kabul edelim ki (X, d) genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzayı $\mathbf{T_1}$ ve $x, y \in X$ $x \neq y$ olsun. (X, d) $\mathbf{T_1}$ uzayı olduğundan x i ihtiva eden ve y yi içermeyen enaz bir U açığı ve y yi ihtiva eden ve x yi içermeyen enaz bir V açığı vardır. $x \in U$ açık olduğundan enaz bir $r > 0$ reel sayısı vardır öyleki $S(x, r) \subset U$ dur. $y \notin U$ olduğundan $y \notin S(x, r)$ dir ve dolayısıyla $d(x, y) \geqslant r > 0$ dır.
Kabul edelim ki (X, d) genişletilmiş quasi-yarı metrik uzayının farklı her $x, y \in X$ noktaları için $d(x, y) > 0$ olsun. $r = d(x, y) > 0$ ve $\epsilon = d(y, x) > 0$ olmak üzere $x \in S(x, r)$, $y \notin S(x, r)$ ve $y \in S(y, \epsilon)$, $x \notin S(y, \epsilon)$ olduğundan (X, τ_d) topolojik uzayı T_1 dir. Tanım 4.3.2 den (X, d) uzayı $\mathbf{T_1}$ dir.

Teorem 4.3.4. (X, d) genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzayı olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.
(i) (X, d) T_1 dir.
(ii) Her $p \in X$ için (X, d) p noktasında T_1 dir.
(iii) Her $x, p \in X$ ve $x \neq p$ için $d(x, p) = \infty$ ve $d(p, x) = \infty$ dur.

İspat: İspatı Teorem 3.3.2 ve Teorem 4.3.2 den elde edilir.

Örnek 4.3.1. $\mathbf{R}$ reel sayılar kümesi ve $\forall x, y \in \mathbf{R}$ için $d\colon \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to [0, \infty]$ fonksiyonu

$$d(x, y) = \begin{cases} x - y, & \text{eğer } x \geqslant y, \\ \infty, & \text{eğer } x < y, \end{cases}$$

$\mathbf{R}$ nin herhangi farklı x, y noktaları için eğer $x > y$ ise $d(x, y) = x - y > 0$ ve eğer $x < y$ ise $d(x, y) = \infty > 0$ olduğundan Teorem 4.3.3 ten $(\mathbf{R}, d)$ $\mathbf{T_1}$ uzayıdır. $d(1, 2) = \infty$ ve $d(2, 1) = 1$ olduğundan Teorem 4.3.2 den $(\mathbf{R}, d)$ T_1 uzayı değildir.

Not 4.3.1. (1) **Top** topolojik uzaylar kategorisinde, Teorem 4.3.1 den T_1 ayırma aksiyomu klasik T_1 ayırma aksiyomuna indirgenir.
(2) Teorem 4.1.2- 4.1.4 ve Teorem 4.3.2 den her T_1 genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzayı hem T_0 uzayı hem $\overline{T}_0$ uzayı hem de T_0' uzayıdır fakat Teorem 4.3.2 ve Örnek 4.1.1-4.1.2 den ne T_0 ne $\overline{T}_0$ ne de T_0' genişletilmiş pseudo-quasi-yarı

metrik uzayı T_1 uzayı olmayabilir.
(3) Teorem 4.3.2 ve Teorem 4.3.3 ten her T_1 genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzayı $\mathbf{T_1}$ uzayıdır fakat Örnek 4.3.1 den $\mathbf{T_1}$ uzayı T_1 uzayı olmayabilir.

4.4. T_1 Genişletilmiş Pseudo-Quasi-Yarı Metrik Uzayların Çarpımı

Bu bölümde T_1 genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzayların kalıtsal ve çarpımsal olduğu gösterilmiştir.

Teorem 4.4.1. (X, d) genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzay ve $A \subset X$ olsun.
(1) Eğer (X, d) T_1 ise (A, d_A) T_1 dir.
(2) Eğer (X, d) $\mathbf{T_1}$ ise (A, d_A) $\mathbf{T_1}$ dir.

İspat: (1) (X, d) uzayı T_1 ve $x, y \in A$ için $x \neq y$ olsun. $A \subset X$ ve (X, d) uzayı T_1 olduğundan Teorem 4.3.2 den $d(x, y) = \infty = d(y, x)$. Teorem 2.4.1(6) dan $d_A(x, y) = d(x, y) = \infty = d(y, x) = d_A(y, x)$ ve Teorem 4.3.2 den (A, d_A) alt uzayı T_1 dir.
(2) (X, d) uzayı $\mathbf{T_1}$ ve $x, y \in A$ için $x \neq y$ olsun. $A \subset X$ ve (X, d) uzayı $\mathbf{T_1}$ olduğundan Teorem 4.3.3 ten her $x, y \in X$ ve $x \neq y$ için $d(x, y) > 0$ dır. Teorem 2.4.1(6) dan $d_A(x, y) = d(x, y) > 0$ ve Teorem 4.3.3 ten (A, d_A) alt uzayı $\mathbf{T_1}$ dir.

Teorem 4.4.2. (1) Her $i \in I$ için (X_i, d_i) T_1 genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzayıdır ancak ve ancak $(X = \prod_{i \in I} X_i, d = \sup\limits_{i \in I}(d_i \circ (\pi_i \times \pi_i)))$ kartezyen çarpımıda T_1 dir.
(2) Her $i \in I$ için (X_i, d_i) $\mathbf{T_1}$ genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzayıdır ancak ve ancak $(X = \prod_{i \in I} X_i, d = \sup\limits_{i \in I}(d_i \circ (\pi_i \times \pi_i)))$ kartezyen çarpımıda $\mathbf{T_1}$ dir.

İspat: (1) Her $j \in I$ için Teorem 3.4.1 den (X_j, d_j) uzayı (X, d) çarpım uzayının bir alt uzayına izomorf ve çarpım uzayı $(X = \prod_{i \in I} X_i, d = \sup\limits_{i \in I}(d_i \circ (\pi_i \times \pi_i)))$ T_1 olduğundan Teorem 4.3.1 den (X_j, d_j) uzayı T_1 dir.
Her $i \in I$ için (X_i, d_i) T_1 genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzayı ve

$x = (x_1, x_2, ...), y = (y_1, y_2, ...) \in X$ için $x \neq y$ olsun. $x \neq y$ olduğundan $x_j \neq y_j$ olacak şekilde enaz bir $j \in I$ vardır. (X_j, d_j) uzayı T_1 olduğundan Teorem 4.3.2 den $d_j(x_j, y_j) = \infty$ ve $d_j(y_j, x_j) = \infty$.

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \sup_{i\in I}(d_i(\pi_i(x), \pi_i(y))) \\ &= sup\{d_1(x_1,y_1), d_2(x_2,y_2), ..., d_{j-1}(x_{j-1}, y_{j-1}), d_j(x_j, y_j) \\ &= \infty, d_{j+1}(x_{j+1}, y_{j+1}), ...\} \\ &= \infty \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} d(y,x) &= \sup_{i\in I}(d_i(\pi_i(y), \pi_i(x))) \\ &= sup\{d_1(y_1,x_1), d_2(y_2,x_2), ..., d_{j-1}(y_{j-1}, x_{j-1}), d_j(y_j, x_j) \\ &= \infty, d_{j+1}((y_{j+1}), (x_{j+1})), ...\} \\ &= \infty \end{aligned}$$

olur. Teorem 4.3.2 den (X, d) çarpım uzayı T_1 dir.

(2) Her $j \in I$ için Teorem 3.4.1 den (X_j, d_j) uzayı (X, d) çarpım uzayının bir alt uzayına izomorf ve çarpım uzayı $(X = \prod_{i\in I} X_i, d = \sup_{i\in I}(d_i \circ (\pi_i \times \pi_i)))$ $\mathbf{T_1}$ olduğundan Teorem 4.3.1 den (X_j, d_j) uzayı $\mathbf{T_1}$ dır.

Her $i \in I$ için (X_i, d_i) T_0 genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzayı ve $x = (x_1, x_2, ...), y = (y_1, y_2, ...) \in X$ için $x \neq y$ olsun. $x \neq y$ olduğundan $x_j \neq y_j$ olacak şekilde enaz bir $j \in I$ vardır. (X_j, d_j) uzayı $\mathbf{T_1}$ olduğundan Teorem 4.3.3 ten $d_j(x_j, y_j) > 0$ dır.

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \sup_{i\in I}(d_i(\pi_i(x), \pi_i(y))) \\ &= sup\{d_1(x_1,y_1), ..., d_{j-1}(x_{j-1}, y_{j-1}), d_j(x_j, y_j), ...\} \\ &\geqslant d_j(x_j, y_j) \\ &> 0 \end{aligned}$$

dır. Teorem 4.3.3 ten (X, d) çarpım uzayı $\mathbf{T_1}$ dır.

4.5. Lokal ve Genel Arasındaki İlişkiler

Bölüm 3 ve Bölüm 4 te karakterize edilen lokal ve genel değişik T_0 ve T_1 genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzayları arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

Teorem 4.5.1. (X, d) genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzayı olsun.
(1) Aşağıdaki ifadeler denktir.
(i) (X, d) $\overline{T}_0$ dır.
(ii) Her $p \in X$ için (X, d) p noktasında $\overline{T}_0$ dır.
(iii) Her $x, p \in X$ ve $x \neq p$ için $d(x, p) = \infty$ veya $d(p, x) = \infty$ dur.
(2) Aşağıdaki ifadeler denktir.
(i) (X, d) T_1 dir.
(ii) Her $p \in X$ için (X, d) p noktasında T_1 dir.
(iii) Her $x, p \in X$ ve $x \neq p$ için $d(x, p) = \infty$ ve $d(p, x) = \infty$ dur.
(3) (X, d) uzayı $T_0^{'}$ dır ancak ve ancak Her $p \in X$ için (X, d) p noktasında $T_0^{'}$ dır.

İspat: İspatı Teorem 3.2.3-3.2.4, Teorem 3.3.2, Teorem 4.1.2-4.1.5 ve Teorem 4.3.2 den elde edilir.

Not 4.5.1. **i.** **Top** topolojik uzaylar kategorisinde, Teorem 4.1.1'den $\overline{T_0}$, T_0', T_0 kavramları ve Teorem 4.3.1 den T_1 ayırma aksiyomu klasik T_0 ve T_1 ayırma aksiyomuna indirgenir.

ii. Genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzaylar kategorisinde Teorem 4.1.2-4.1.4 ve Örnek 4.1.1-4.1.2 den $\overline{T}_0 \Rightarrow T_0 = CT_0 \Rightarrow T_0^{'}$ dır fakat her gerektirmenin karşıtı genelde doğru değildir. Teorem 4.1.2- 4.1.4 ve Teorem 4.3.2 den her T_1 genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzayı hem T_0 uzayı hem $\overline{T}_0$ uzayı hem de $T_0^{'}$ uzayıdır fakat Teorem 4.3.2 ve Örnek 4.1.1-4.1.2 den ne T_0 ne $\overline{T}_0$ ne de $T_0^{'}$ genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzayı T_1 uzayı olmayabilir. Teorem 4.3.2 ve Teorem 4.3.3 ten her T_1 genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzayı $\mathbf{T_1}$ uzayıdır fakat Örnek 4.3.1 den $\mathbf{T_1}$ uzayı T_1 uzayı olmayabilir [86].

iii. **Top** topolojik uzaylar kategorisinde, p noktasında $\overline{T_0}$, T_0', T_1 kavramları, Tanım 3.2.1 ve Tanım 3.3.1 den sırasıyla, p noktasında T_0 ve T_1 ayırma aksiyomlarına indirgenir [34], [56].

iv. Genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzaylar kategorisinde Teorem 3.2.3 ve Teorem 3.2.4 ten p noktasında $\overline{T}_0$ uzayı her zaman p noktasında T_0' uzayıdır fakat gerektirmenin karşıtı genelde doğru değildir. Örneğin, $\mathbf{R}$ reel sayılar kümesi ve $\forall x, y \in \mathbf{R}$ için $d(x, y) = 0$ olsun. Teorem 3.2.4 ten, $(\mathbf{R}, d)$ p noktasında $\overline{T}_0$ genişletilmiş pseudo-quasi metrik uzayıdır ama Teorem 3.2.3 den $(\mathbf{R}, d)$ uzayı p noktasında $\overline{T}_0$ uzayı değildir [87]. Ayrıca, Teorem 3.2.3 ve Teorem 3.3.2 den p noktasında T_1 uzayı her zaman p noktasında $\overline{T}_0$ uzayıdır fakat gerektirmenin karşıtı genelde doğru değildir. Örnek olarak,
$\mathbf{R}$ reel sayılar kümesi ve $\forall x, y \in \mathbf{R}$

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{eğer } x = y \\ 1, & \text{eğer } x < y \\ \infty, & \text{eğer } x > y \end{cases}$$

verilsin. Teorem 3.2.3 den $(\mathbf{R}, d)$ uzayı p noktasında $\overline{T}_0$ dır fakat, Teorem 3.3.2 den p noktasında T_1 uzayı değildir.

v. Herhangi bir topolojik kategoride , her $\overline{T}_0$ nesnesi T_0' nesnesidir fakat genel olarak T_0' nesnesi $\overline{T}_0$ nesnesi olmayabilir ([62], Teorem 3.2). Ayrıca, T_0 nesnesi ile $\overline{T}_0$ ve T_0' nesneleri arasında ilişki yoktur ([62], Not 3.6).

vi. p noktasında $\overline{T_0}$ ve T_1 ile genel $\overline{T_0}$ ve T_1 ayırma aksiyomları aynı olabilirler. Örneğin Kula [88] de p noktasında $\overline{T_0}$, T_0', T_1 ile genel $\overline{T_0}$, T_0', T_1 Cauchy uzayların [89] aynı olduklarını göstermiştir. Baran [90] de p noktasında $\overline{T_0}$ ile p noktasında T_1 ve genel $\overline{T_0}$ ve T_1, yarı-düzgün limit uzayların (semiuniform limit spaces) [91] aynı olduklarını göstermiştir.

Tanım 4.5.1. $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ fanktoru verilsin. Eğer $G \circ F = 1_C$ ve $F \circ G = 1_D$ olacak şekilde $G\colon \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ fanktoru varsa bu kategorilere izomorf kategoriler denir ve $\mathbf{C} \equiv \mathbf{D}$ olarak yazılır, burada $1_{\mathbf{D}}$ ve $1_{\mathbf{C}}$ birim fanktorlerdir [40].

Not 4.5.2. **i.** Teorem 3.2.2 ve Teorem 4.3.3 ten dolayı **DisMet** ve $T_1\infty$**pqsMet** kategorileri izomorfturlar. Ayrıca, $T_1\infty$**pqsMet** kategorisi indiskre objelere sahip olmadığından Teorem 1.2.3 ten topolojik kategori değildir.

Kategori	Objeler	Morfizmler
DisMet	Genişletilmiş pseudo-quasi-yarı diskre metrik uz.	Büzülme fonk.
∞**pqsMet**	Genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uz.	Büzülme fonk.
$T_1\infty$**pqsMet**	T_1 Genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uz.	Büzülme fonk.
$CT_0\infty$**pqsMet**	CT_0 Genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uz.	Büzülme fonk.
$T_0\infty$**pqsMet**	T_0 Genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uz.	Büzülme fonk.
$\overline{T}_0\infty$**pqsMet**	$\overline{T}_0$ Genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uz.	Büzülme fonk.
$T_0^{'}\infty$**pqsMet**	$T_0^{'}$ Genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uz.	Büzülme fonk.

Tablo 4.1. ∞**pqsMet** Kategorisinin Bazı Alt Kategorileri

ii. Teorem 4.1.6 dan dolayı $CT_0\infty$**pqsMet** ve $T_0\infty$**pqsMet** kategorileri izomorfturlar. Ayrıca, $T_0\infty$**pqsMet** kategorisi indiskre objelere sahip olmadığından Teorem 1.2.3 ten topolojik kategori değildir.

iii. Teorem 4.1.3 ten dolayı $T_0^{'}\infty$**pqsMet** ve ∞**pqsMet** kategorileri izomorfturlar ve ∞**pqsMet** topolojik kategori olduğundan $T_0^{'}\infty$**pqsMet** topolojik kategoridir.

5. BÖLÜM

SONUÇLAR VE ÖNERİLER

5.1. Sonuçlar

Metrik uzayların keyfi çarpımlarının ve dual-çarpımlarının her zaman mevcut olmaması sorunu metrik yerine genişletilmiş pseudo metrik, genişletilmiş quasi metrik, genişletilmiş semi (yarı) metrik ve hemi metrik kavramları tanımlanarak bu problem çözülmüştür. Pseudo-quasi metrik uzaylar quantum mekaniği [12], deneysel psikoloji [13], biyoloji [14] ve ekonomi [12] gibi alanlarda uygulama alanı vardır.

Genişletilmiş pseudo-quasi metrik uzayları hem klasik metrik uzayların hem de ön sıralı uzayların genelleştirilmesi olup alan teorisi (domain theory) ve denotasyonel semantik (denotational semantics) alanları için uygun uzaylardır [15], [16], [17], [18], [19], ve [20].

Bu tez çalışmasında öncelikle genişletilmiş değişik metrik uzaylar, örnekleri, özellikleri, topolojik kategori ve bunlarla ilgili gerekli bazı teoremler verilmiştir. Ardından genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzaylar (ve büzülme fonksiyonların) kategorisi ∞**pqsMet** in topolojik kategori olduğu gösterilmiş ve bu kategoride önemli bazı özel objeleri ve morfizmleri karakterize edilmiştir. Daha sonra bir p noktasındaki wedge çarpımı, temel eksen, skewed eksen ve katlama dönüşümler tanımlanarak herhangi bir topolojik kategori için lokal yani, p noktasında T_0 ve T_1 ayırma aksiyomlarının tanımları verilmiştir.

Tezde elde edilen sonuçlar aşağıda verilmiştir.

1. ∞**pqsMet** kategorisinde lokal $\overline{T}_0$, lokal T_0' ve T_1 ayırma aksiyomları

karakterize edilmiş ve bunlar arasındaki ilişkiler incelenmiştir (Teorem 3.2.3-3.2.4 ve Teorem 3.3.2).

2. ∞**pqsMet** kategorisinde $\overline{T}_0$, T_0', T_0, CT_0 (klasik anlamda), $\mathbf{T_1}$ (klasik anlamda) ve T_1 ayırma aksiyomları karakterize edilmiş (Teorem 4.1.2-4.1.7 ve Teorem 4.3.2-4.3.4) ve bunlar arasındaki ilişkiler incelenmiştir (Teorem 4.5.1 ve Not 4.5.1). Bu uzayların herbirinin kalıtsal ve çarpımsal olduğu gösterilmiştir (Teorem 4.2.1-4.2.2 ve Teorem 4.4.1-4.4.2).

3. Genişletilmiş pseudo-quasi-yarı diskre metrik uzayların kategorisi **DisMet** ile T_1 genişletilmiş pseudo-quasi-yarı metrik uzayların kategorisi $T_1\infty$**pqsMet** nin izomorf oldukları gösterilmiştir (Teorem 3.2.2 ve Teorem 4.3.3).

4. $CT_0\infty$**pqsMet** ve $T_0\infty$**pqsMet** kategorilerinin izomorf oldukları gösterilmiştir (Teorem 4.1.6).

5. $T_0'\infty$**pqsMet** ve ∞**pqsMet** kategorileri izomorfturlar ve ∞**pqsMet** topolojik kategori olduğundan $T_0'\infty$**pqsMet** topolojik kategori olduğu gösterilmiştir (Teorem 4.1.3).

5.2. Öneriler

Bundan sonraki çalışmalarda

1. ∞**pqsMet** kategorisinde lokal ve genel $PreT_2$, T_2, T_3 ve T_4 ayırma aksiyomları, kapalılık, kuvvetli kapalılık, bağlantılılık, kompaktlık gibi önemli topolojik kavramlar karakterize edilebilir mi?

2. ∞**pqsMet** kategorisinde karakterize edilen $PreT_2$, T_2, T_3 ve T_4 uzayları arasındaki ilişkiler incelenebilir mi?

3. Genel topolojideki ayırma aksiyomları ile ilgili Urysohn Metrikleştirme Teoremi, Urysohn Lemması, Tietze Genişleme Teoremi gibi çok önemli teoremler ∞**pqsMet** kategorisinde yorumlanabilir mi?

KAYNAKLAR

1. Fréchet, M., 1906. Sur quelques points du calcul fonctionnel. **Rend. Palermo**, **22**: 1-74.
2. Hausdorff, F., 1914. Grundzuge der Mengenlehre. Veit, Leipzig. (Reprint:1949, 1965, Chelsea, New York).
3. Kuratowski, C., 1922. Sur operation A de Analysis Situs, **Fund. Math.**, **3**, 182-199.
4. Wilson, W. A., 1931. On quasi-metric spaces, **Amer. Math.**, **53**, 675-684.
5. Albert, G. E., 1941. A note on quasi-metric spaces. **Bull. Amer. Math. Soc.**,**47**, 479-482.
6. Ribeiro, H., 1943. Sur les espaces à métrique faible. **Portugaliae Math.4**, 21-40.
7. Kelly, J. C., 1963. Bitopological spaces, **Proc. London Math. Soc. 13**, 71-84.
8. Patty, C. W., 1967. Bitopological spaces. **Duke Math. J.34**, 387-391.
9. Sion, M., Zelmer, G.,1967. On quasi-metrizability. **Canad. J. Math.19**, 1243-1249.
10. Fletcher, P., Lindgren, W. F., 1972. Transitive quasi-uniformities. **J. Math. Anal. Appl.39**, 397-405.
11. Kúnzi, H. P. A., Mršević, M., Reilly, I. L., and Vamanamurthy, M. K., 1993. Convergence, precompactness and symmetry in quasi-uniform spaces. **Math. Japonica**, **38**, 239-253.
12. Kúnzi, H. P. A., 2001. Nonsymmetric distances and their associated topologies: about the origins of basic ideas in the area of asymmetric topology. in: **Handbook of General Topology**, **Vol. 3**, edited by C. E. Aull, and R. Lowen, Springer-Science and Busines Media, B. V.
13. Cunningham, J. P., 1978. Free trees and bidirectional trees as representations of psychological distance, **J Mat Psychology**, **17**: 165-188.

14. Waterman, M. S., Smith, T. F., Beyer, W. A., 1976. Some biological sequence metrics, **Adv Math., 20**: 367-387.

15. America, P., Rutten, J. J. M. M., 1989. Solving reflexive domain equations in a category of complete metric spaces, **Journal of Computer and System Sciences.,39**(3): 343-375.

16. Bonsangue, M. M., van Breugel, F., and Rutten, J. J. M. M., 1998. Generalized Metric Spaces: Completion, Topology, and Powerdomains via the Yoneda Embedding, **Theoret. Comput. Sci. 193**, 1-51.

17. De Bakker, J. W., de Vink, E. P., 1996. Control Flow Semantics, Foundations of Computing Series. Cambridge Massachusetts : The MIT Press.

18. Smyth, M. B.,1988. Quasi-uniformities: reconciling domains with metric spaces, in Proc. of 3rd Workshop on Mathematical Foundations of Programming Language Semantics, New Orleans 1987, ed. M. Main, A. Melton, M. Mislove, D. Schmidt, **Lecture Notes in Computer Science bf 298**, Springer-Verlang, Berlin, 236-253.

19. Winskel, G., 1993. The Formal Semantics of Programming Languages, an Introduction, Foundations of Computing Series, The MIT Press.

20. Lawvere, F. W., 1973. Metric spaces, Generalized logic, and closed categories, **Rend Sem Mat Fis Milano., 43** : 135-166.

21. Adámek, J. and Reiterman, J., 1990. Cartesian closed hull for metric spaces, **Comment. Math. Univ. Carolinae 31**, 1-6.

22. Willard, S., 1970. General Topology, Addison-Wesley Publishing Company.

23. Fletscher, P., Lindgren, W. F., 1982. Quasi-Uniform Spaces. Marcel Dekker, New York.

24. Császár, A., 1963. Foundations of General Topology , Macmillan, New York.

25. Mucuk, O., 2009. Topoloji, Nobel Yayınları, Ankara, Şubat.

26. Bourbaki, N., 1966. Elements of Mathematics General Topology, Addison-Wesley Publishing Company.

27. Smyth, M. B., 1991. Totally bounded spaces and compact ordered spaces as domains of computation, in Topology and Category Theory in Computer Science, eds. G. M. Reed, A. W. Roscoe, R. F. Wachter, Clarendon Press, Oxford, 207-229.

28. Lowen, R., 1997. Approach Spaces: The Missing Link in the Topology-Uniformity-Metric Triad, Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press.

29. Nauwelaerts, M., 2000. Cartesian closed hull for (quasi-) metric spaces, **Comment. Math. Univ. Carolinae 41**,3, 559-573.

30. Herrlich, H., 1974. Topological Functors, **Gen. Top. Appl., 4**, 125-142.

31. Kent, D. C., 1969. Convergence Quotient Maps, **Fund. Math. 165**, 197-205.

32. Wyler, O., 1971. Top. Categories And Categorical Topology, **Gen. Top. Appl., 11**,17-28.

33. Schwarz, F., 1978. Connections Between Convergence and Nearness, **Lecture Notes in Math., Springer-Verlag 719**, 345-354.

34. Baran, M., 1991. Separation Properties, **Indian J. Pure Appl. Math., 23** , 333-341.

35. Mielke, M. V., 1994. Separation Axioms and Geometric Realizations, **Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, 25,** 711–722.

36. J. Adámek, H. Herrlich, and G.E. Strecker, 1990. Abstract and Concrete Categories, Wiley, New York.

37. Salbany, S., 1976. Reflective Subcategories and Closure Operators, in in Proc. First Categorical Topology Symposium, **Lecture Notes in Math., 540** (Springer, Berlin), 548-565.

38. Dikranjan, D. and Tholen, W., 1995. Categorical Structure of Closure Operators, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

39. Kent, D. C., 1964. Convergence Functions and Their Related Topologies, **Fund. Math., 54**, 125-133.

40. Preuss, G., 1988. Theory of Topological Structures. An Approach to Topological Categories, D. Reidel Publ. Co., Dordrecht.

41. Herrlich, H., 1974. Topological Structures, In: **Math. Centre Tracts, Math. Centrum, Amsterdam, 52**, 59-122.

42. Spivak, D. I., 2013. Category Theory for Scientists. http://mitpress.mit.edu/books/ category-theory-sciences.

43. MacLane, S., 1971. Categories for the Working Mathematician, Springer, New york.

44. Scott, D., 1972. Continuous lattices. In Lawvere, Bill. Toposes, Algebraic Geometry and Logic. Lecture Notes in Mathematics. 274. Springer-Verlag.

45. Gierz, G., Hofmann, K. H., Keimel, K., Lawson, J. D., Mislove, M. W., Scott, D. S., 2003. Continuous Lattices and Domains, Cambridge University Press, Cambridge.

46. Thurston, W. P., 1994. On Proof and Progress in Mathematics. **Bulletin of the American Mathematical Society , 30** .

47. Stong, R. E., 1966. Finite topological spaces. **Transactions of the American Mathematica** **123** .

48. Janelidze, G., 2009. Light morphisms for generalized T_0-reflections, **Topology and its Applications , 156** (12), 2109-2115.

49. Taylor, P., 2002. Sober spaces and continuations, **Theory and Applications of Categories** **10** (12):248-300.

50. Stoy, J. E., 1977. Denotational semantics: the Scott-Strachey approach to programming language theory, volume 45, MIT press Cambridge.

51. Salibra, A., 2001. A continuum of theories of lambda calculus without semantics, in Logic in Computer Science, 2001. Proceedings. 16th Annual IEEE Symposium on, 334-343.

52. Van Steirteghem, B., 2000. T_0 separation in axiomatic quantum mechanics, **International Journal of Theoretical Physics**, **39**(3):955-962.

53. Kovalevsky, V. A., 1989. Finite topology as applied to image analysis, **Computer vision, graphics, and image processing, 46**(2):141-161.

54. Herman, G. T., 1990. On topology as applied to image analysis, **Computer Vision, Graphics, and Image Processing**, **52**(3):409-415.

55. Kovalevsky, V., Kopperman, R., 1994. Some Topology-based Image Processing Algorithms, **Annals of the New York Academy of Sciences, 728**,1, 174-182.

56. Baran, M., 1996, Separation Properties in Topological Categories, **Math. Balkanica, 10** , 39-48.

57. Brümmer, G. C., 1971. A categorial study of initiality in uniform topology, Ph.D. thesis, University of Cape Town.

58. Marny, Th., 1973. Rechts-Bikategoriestrukturen in topologischen Kategorien , Dissertation, Freie Universität Berlin.

59. Hoffmann, R. E., 1974. (E, M)-universally topological functors, Habilitationsschrift, Universität Düsseldorf.

60. Harvey, J., 1977. T_0-separation in topological categories, **Quaestiones Mathematicae**, **2**(1-3):177-190.

61. Weck-Schwarz, S., 1991. T_0-objects and separated objects in topological categories, **Quaestiones Mathematicae**, **14**(3):315-325.

62. Baran, M., Altindis, H., 1995. T_0-Objects in Topological Categories, **J. Univ. Kuwait (Sci.)**, **22**: 123-127.

63. Baran, M., Altindis, H., 1996. T_2-Objects in topological categories, **Acta Math Hungar., 71**: 41-48.

64. Baran, M., 1998. Completely regular objects and normal objects in topological categories, **Acta Math Hungar., 80**: 211-224.

65. Baran, M., 1988. T_3 and T_4 -objects in topological categories, **Indian J Pure Appl Math., 29**: 59-69.

66. Baran, M., 1994. Generalized Local Separation Properties, **Indian J. pure appl. 25**, 6, 615-620.

67. Johnstone, P. T., 1977. Topos Theory, L.M.S. Mathematical Monographs No. 10, Academic Press, New York.

68. MacLane, S., Moerdijk, I., 1992. Sheaves in Geometry and Logic, Springer-Verlag.

69. Baran, M., 1993. The Notion of Closedness in Topological Categories, **Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, 34**, 383-395.

70. Erné, M., 2011. Algebraic models for T_1-spaces, **Topology and its Applications, 158**(7):945-962.

71. Zhao, D. Xi, X., 2016. Directed complete poset models of T_1 spaces, in Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 1-10, Cambridge University Press.

72. Van der Voorde, A., 2000. A categorical approach to T_1 separation and the product of state property systems, **International Journal of Theoretical Physics, 39**(3):947-953.

73. Lowen, R., 1989. Approach spaces: a common supercategory of TOP and MET, **Math Nachr., 141**: 183-226.

74. Clementino, M. M., Hofmann, D., Tholen, W., 2004. One setting for all: metric, topology, uniformity, approach structure, **Appl Categor Struct., 12**: 127-154.

75. Larrecq J. G., 2013. Non-Hausdorff Topology and Domain Theory, Cambridge University Press.

76. Munkres, J. R., 1975. Topology: A First Course, Prentice Hall, Inc. New Jersey.

77. Mielke, M. V., 1985. Geometric Topological Completions with Universal Final Lifts, **Topology and its Applications**, **19**: 277–293.

78. Lowen, E., Lowen, R., 1988. A quasitopos containing CONV and MET as full subcategories, **Internat J Math Math Sci.**, **11**(3): 417-438.

79. Dikranjan, D., Giuli, E. 1987. Closure operators I, **Topology Appl.**, **27**, 129-143.

80. Baran, M. 2000. Closure operators in convergence spaces, **Acta Mathematica Hungarica**, **87**, 33-45.

81. Baran, M. 2002. Compactness, perfectness, separation, minimality and closedness with respect to closure operators, **Applied Categorical Structures**, **10**, 403-415.

82. Baran M., Al-Safar J. 2011. Quotient-Reflective and Bireflective Subcategories of the category of Preordered Sets, **Topology and its Appl.**, **158**, 2076-2084.

83. Baran, M., Kula, S., Baran, T. M., and Qasim, M., 2016. Closure operators in semiuniform convergence spaces, **Filomat**, **30** , 131-140.

84. Baran, M. 1997., A notion of compactness in topological categories, **Publ. Math. Debrecen**, **50** no. 3-4, 221-234.

85. Baran, M., Kula, M. 2006. A note on connectedness, **Publ. Math. Debrecen**, **68**/3-4, 489-501.

86. Baran, T. M., Kula, M., 2017. Local T_1 Extended Pseudo-Semi Metric Spaces, **Mathematical Sciences and Application E-Notes (MSAEN)**, **Volume 5**, Issue 1, Page 46-56.

87. Baran, T. M., Local T_0 Pseudo-Semi Metric Spaces, 2016. Proceedings of 1st International Mediterranean Science and Engineering Congress (IMSEC 2016), Adana, Turkey, Pages 266-271.

88. Kula, M., 2011. A Note on Cauchy Spaces, **Acta Math. Hungar.**, **133**, 14-32.

89. Lowen-Colebunders, E., 1989. Function Classes of Cauchy Continuous Maps, Marcel Dekker, New York.

90. Baran, M., Kula, S., and Erciyes, A., 2013., T_0 and T_1 semiuniform convergence spaces, **Filomat**, **27** , 537-546.

91. Preuss, G., 2002. Foundations of topology: an approach to convenient topology, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı, Soyadı	:	Tesnim Meryem BARAN
Doğum Tarihi	:	11.06.1990
Doğum Yeri	:	Coral Gables/A.B.D
E-Posta	:	mor.takunya@gmail.com

EĞİTİM

Derece	Kurum	Mezuniyet Tarihi
Doktora	Erciyes Üniversitesi, Fen Bil. Enst. Matematik Anabilim Dalı	2018 (Mezuniyet Notu: 4.00/4.00)
Yüksek Lisans	Erciyes Üniversitesi, Fen Bil. Enst. Matematik Anabilim Dalı	2015 (Mezuniyet Notu: 4.00/4.00)
Lisans	Erciyes Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü	2012 (Mezuniyet Notu: 3.82/4.00)

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	Kurum	Görev
2018–Halen	Pazarören Anadolu Lisesi MEB	Öğretmen
2015–2018	Sarız Anadolu İmam Hatip Lisesi MEB	Öğretmen

YABANCI DİL

İngilizce

ÖDÜLLER

1. Üniversiteyi 3 yılda ve ikincilikle bitirmek.
2. TÜBİTAK 2211 Yurt İçi Lisansüstü Burs Programı kapsamında yürütülmekte olan 2228-B Yüksek Lisans Öğrencileri için Yurt İçi Doktora Bursu kazanmak.

YAYINLAR

1. Baran, M., Kula, S., Baran, T. M., Qasim, M., 2016. Closure Operators in Semi-uniform Convergence Spaces, Filomat, **30**, Issue 1, Page 131-140.

2. Baran, T. M., Local T_0 Pseudo-Semi Metric Spaces, 2016. Proceedings of 1st International Mediterranean Science and Engineering Congress (IMSEC 2016), Adana, Turkey, Pages 266-271.

3. Baran, T. M., T_0 Extended Pseudo-Semi Metric Spaces, 2016. Proceedings of 3rd International Conference on Advanced Technology Sciences (ICAT 2016), Konya, Turkey, Pages 1448-1451.

4. Baran, T. M., Kula, M., 2017. Local T_1 Extended Pseudo-Semi Metric Spaces, Mathematical Sciences and Application E-Notes (MSAEN), Volume 5, Issue 1, Page 46-56.

KONFERANSLAR

1. Baran, T. M., T_0 Extended Pseudo-Semi Metric Spaces, ICAT 3rd International Conference on Advanced Technology Sciences, Selçuk University, Konya, Turkey, 1-3 September 2016.

2. Baran, T. M., Local T_0 Pseudo-Semi Metric Spaces, 1st International Mediterranean Science and Engineering Congress (IMSEC 2016), Adana, Turkey, October 26-28, 2016.

3. Baran, T. M., Kula, M., T_1 Extended Pseudo-Semi Metric Spaces, International Conference on Mathematics and Mathematics Education, Fırat University, Elazığ, Turkey, 9-12 May 2016.

4. Baran, T. M., Local T_1 Pseudo-Semi Metric Spaces, International Conference on Mathematics and Mathematics Education, Harran University, Urfa, Turkey, 11-13 May 2017.

PROJELER

1. Araştırmacı, Closure Operators in Semi-uniform Convergence Spaces, 3001 AR-GE TÜBİTAK programı proje no: 114F299, 2016.

2. Araştırmacı, Closure Operators in Semi-uniform Convergence Spaces, Erciyes Üniversitesi BAP proje no: FDA-2015-5627.

3. Araştırmacı, T_0 ve T_1 Extended Pseudo-Semi Metric Spaces, Erciyes Üniversitesi BAP proje no: FDK-2017-7175.