

ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İDEAL YAKINSAKLIK VE BOLZANO-WEIERSTRASS ÖZELLİĞİ

Mustafa GÜLFİRAT

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2018

Her hakkı saklıdır

TEZ ONAYI

Mustafa GÜLFIRAT tarafından hazırlanan " İdeal Yakınsaklık ve Bolzano-Weierstrass Özelliği " adlı tez çalışması 11/06/2018, tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği(veya oy çokluğu) ile Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Cihan ORHAN



Jüri Üyeleri:

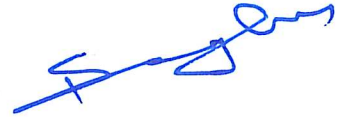
Başkan: Prof. Dr. Hatice Gül İNCE İLARSLAN
Gazi Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı



Üye : Prof. Dr. Cihan ORHAN
Ankara Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı



Üye : Prof. Dr. Şeyhmus YARDIMCI
Ankara Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı



Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Atila YETİŞEMİYEN
Enstitü Müdürü

ETİK

Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

11.06.2018



Mustafa GÜLFIRAT

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

İDEAL YAKINSAKLIK VE BOLZANO-WEIERSTRASS ÖZELLİĞİ

Mustafa GÜLFIRAT

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Cihan ORHAN

Bu tez 4 bölümden oluşmaktadır.

İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde, asimptotik ve logaritmik yoğunluk, istatistiksel yakınsak, ideal ve ideal yakınsaklık kavramları tanımlanıp bu yakınsaklığın bazı özelliklerini gösterilmiştir. Üstelik I^* -yakınsaklık kavramı tanımlanıp, I ve I^* -yakınsaklıkların hangi durumlarda denk olduğu gösterilmiştir. Devamında I -yakınsaklığın korunması tanımlanıp, sürekli fonksiyonların I -yakınsaklığı koruduğuna ilişkin bir önerme verilmiştir. Bu bölümde son olarak fonksiyon dizilerinin ideal yakınsaklığı tanımlanmıştır.

Üçüncü bölümde Riemann özelliği(R), W özelliği ve $\mathbb{R}$ üzerindeki BW özelliğine tanımlanıp ideal çeşitlerine değinilmiştir. R , W ve BW özellikleri arasındaki ilişki incelenmiştir.

Dördüncü bölümde, keyfi bir X kümesi üzerindeki BW özelliği tanımlanıp, Arzela-Ascoli ve Helly Seçim teoremlerinin orjinal ve ideal versiyonlarına yer verilmiştir.

Haziran 2018, 37 sayfa

Anahtar Kelimeler: İdeal Yakınsaklık, İstatistiksel Yakınsaklık, Bolzano-Weierstrass Özelliği, Riemann Özelliği, Arzela-Ascoli Teoremi ve Helly Seçme Teoremi

ABSTRACT

Master Thesis

IDEAL CONVERGENCE AND THE BOLZANO-WEIERSTRASS PROPERTY

Mustafa GÜLFIRAT

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Cihan ORHAN

This thesis consists of four chapters.

The first chapter is devoted to the introduction.

In chapter two, the concepts of asymptotic and logarithmic density, statistical convergence, ideal and ideal convergence have been studied. Some properties of ideal convergence has been given. Also, the concept of I^* -convergence has been considered. We have also examined the equivalence of I and I^* -convergences under some conditions. Later on, the concept of preservation of I -convergence has been given and it has been proved that continuous functions preserve I -convergence. In this chapter, finally ideal convergence of sequences of functions has been given.

In chapter three, the concept of Riemann property(R), the W property and BW property on R has been studied and their ideal versions has been recalled. The relationship among R , W and BW property have been investigated.

In chapter four, the BW property on an arbitrary set X has been given and the original and ideal versions of the Arzela-Ascoli and Helly's selection theorems have been considered.

June 2018, 37 pages

Key Words: Ideal Convergence, Statistical Convergence, The Bolzano-Weierstrass Property, Riemann's Property, The Arzela-Ascoli Theorem and Helly's Selection Theorem

TEŞEKKÜR

Bu çalışma konusunu bana vererek, çalışmalarım boyunca yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen hocam, Sayın Prof. Dr. Cihan ORHAN (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı)'a hayata ve matematiğe ilişkin öğrendiğim ve öğreneceğim her şey için en içten saygı ve minnetlerimi sunarım.

Yüksek lisans eğitimim boyunca yardımlarını esirgemeyen, çalışmalarına ışık tutan hocam, Sayın Doç. Dr. Mehmet ÜNVER (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı)'e, haftalık seminerlerimizde benimle birlikte olan arkadaşlarıma, lisans ve yüksek lisans eğitimim boyunca maddi manevi yardımlarını esirgemeyen değerli arkadaşım Yasin ATASEVEN'e ve hayatım boyunca yanımda olan, çalışmalarım boyunca fedakarlıklarını esirgemeyen değerli aileme ve Yelda ARAT'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Bu tez "TÜBİTAK 2210-A Genel Yurt İçi Yüksek Lisans Burs Programı" tarafından desteklenmiştir. TÜBİTAK'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Mustafa GÜLFİRAT
Ankara, Haziran 2018

İÇİNDEKİLER

TEZ ONAY SAYFASI

ETİK.....	i
ÖZET.....	ii
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	iv
SİMGELER DİZİNİ	vi
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	2
2.1 Temel Bilgiler	2
2.2 İdeal Yakınsaklık	3
2.3 I ve I^* - Yakınsaklık	7
2.4 I - Yakınsaklığı Koruyan Fonksiyonlar	10
2.5 I -Limit Noktaları ve I -Değme Noktalar	12
2.6 Fonksiyon Dizilerinin I - Yakınsaklığı	13
3. BW-ÖZELLİĞİ ve R-ÖZELLİĞİ	14
3.1 Temel Bilgiler	14
3.2 Analitik İdealler	15
4. I -SEÇME TEOREMLERİ.	27
4.1 Temel Bilgiler	27
4.2 Arzela-Ascoli Teoremi	28
4.3 Helly Seçim Teoremi	31
5. SONUÇ.....	35
KAYNAKLAR	36
ÖZGEÇMİŞ.....	37

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
χ_A	A kümesinin karakteristik fonksiyonu
2^X	Kuvvet kümesi
Δ	Kümeler arasındaki simetrik fark işlemi
a_n^+	$\max \{a_n, 0\}$
a_n^-	$\min \{a_n, 0\}$
$ A $	A kümesinin kardinalitesi
$\overline{A}^X$	A kümesinin X 'e göre kapamışı
I	İdeal
I^+	$P(\mathbb{N}) \setminus I$

1. GİRİŞ

H. Fast, H. Steinhaus ve I. J. Schoenberg tarafından tanıtılan istatistiksel yakınsaklık kavramı 1980 yılında Šalát, 1985 yılında J.A. Fridy, 1990 yılında J.A. Fridy ve H. Miller ve 1993 yılında J.A. Fridy ve C. Orhan tarafından geliştirilmiştir. $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin alt kümelerinin bir I ideali üzerine kurulan ve P. Kostyrko, M. Mačaj ve T. Šalát tarafından tanıtılan ideal yakınsaklık kavramı, istatistiksel yakınsaklığın bir genişlemesidir.

Dizilerin yakınsaklığını ele alan her teorem için, bu teoremlerin ideal yakınsaklık kavramına genişletilebileceği ve hangi tür ideal sınıfları üzerinde böyle bir genişlemenin doğru olabileceği sorusu akla gelmektedir. 1892 yılında B. Riemann tarafından verilen Riemann Teoreminde şartlı yakınsak bir serinin terimlerinin yerlerini sonsuz çoklukta değiştirmekle, serinin toplamının istenilen her değere eşit yapılabileceğini biliyoruz. İdeal veriyonunda ise hangi tür idealler için Riemann Teoreminde adı geçen permütasyonun bulunabileceği sorusu akla geliyor. Örneğin π , $\mathbb{N}$ üzerinde bir permütasyon olmak üzere $\{n \in \mathbb{N} : \pi(n) \neq n\}$ kümesi hangi şartlar altında I idealine aittir? Bu ve benzeri soruları bu tezimizde inceleyeceğiz. 2010 yılında R. Filipów ve P. Szuca tarafından belirli ideal türleri ve Riemann özelliği arasındaki ilişki incelenmiştir. 2007 yılında Bolzano-Weierstrass Teoreminin ideal versiyonu ve 2012 yılında Arzela-Ascoli ve Helly gibi klasik seçim teoremlerinin ideal versiyonları Filipów vd. (2012) tarafından çalışılmıştır.

Bu yüksek lisans tezi yukarıda belirtilen çalışmaların bir derlemesidir ve bu yüksek lisans tezinin amacı bazı klasik yakınsaklık teoremlerinin ideal versiyonlarını incelemektir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Cauchy anlamında yakınsak dizi veya serilerin bir diğer yakınsaklık yöntemine göre durumunun ne olacağının araştırılması Analizin önemli konularındandır. Biz de bu bölümde ilk olarak $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin alt kümelerinin bir ailesi olan I ideali yardımıyla yakınsaklığı genişleteceğiz ve bu yakınsaklığın bazı özelliklerini göreceğiz.

2.1 Temel Bilgiler

Tanım 2.1 (Asimptotik Yoğunluk) $A \subset \mathbb{N}$ olsun ve her n için

$$d_n(A) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \chi_A(k)$$

şeklinde tanımlansın.

$\underline{d}(A) = \liminf_{n \rightarrow \infty} d_n(A)$ ve $\bar{d}(A) = \limsup_{n \rightarrow \infty} d_n(A)$ sayılarına sırasıyla A kümesinin alt ve üst asimptotik yoğunluğu denir. Eğer $\underline{d}(A) = \bar{d}(A)$ ise $(d_n(A))$ dizisinin limiti mevcuttur. Dahası $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n(A) = d(A)$ ile gösterilir ve $d(A)$ sayısına A kümesinin asimptotik yoğunluğu denir (Salat ve Tijdeman 1983).

Tanım 2.2 (Logaritmik Yoğunluk) $A \subset \mathbb{N}$ olsun. Her n için

$$\delta_n(A) = \frac{1}{s_n} \sum_{k=1}^n \frac{\chi_A(k)}{k}$$

ve $s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ şeklinde tanımlansın. $\underline{\delta}(A) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \delta_n(A)$ ve $\bar{\delta}(A) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \delta_n(A)$ sayılarına sırasıyla A kümesinin alt ve üst logaritmik yoğunluğu denir. Eğer $\underline{\delta}(A) = \bar{\delta}(A)$ ise $(\delta_n(A))$ dizisinin limiti mevcut olup $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n(A) = \delta(A)$ ile gösterilir ve $\delta(A)$ sayısına A kümesinin logaritmik yoğunluğu denir (Salat ve Tijdeman 1983).

Uyarı 2.1 Biliniyor ki asimptotik yoğunluk mevcut ise logaritmik yoğunluk da mevcuttur ve bu değerler birbirine eşittir.

Tanım 2.3 (İstatistiksel Yakınsaklık) $x = (x_n)$ reel terimli bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $d(\{n \in \mathbb{N} : |x_n - L| \geq \varepsilon\}) = 0$ olacak şekilde bir L sayısı mevcut ise $x = (x_n)$ dizisi L sayısına istatistiksel yakınsaktır denir (Fast 1951).

Bu kavram Cauchy yakınsaklık kavramının bir genişlemesidir.

Tanım 2.4 (İdeal) Bir X kümesi için $X \neq \emptyset$ olsun. $I \subset 2^X$ sınıfı için, her $A, B \in I$ iken $A \cup B \in I$ ve her $A \in I, B \subset A$ iken $B \in I$ gerçekleşiyorsa I sınıfına X üzerinde bir ideal denir.

Eğer $I \neq \emptyset$ ve $X \notin I$ ise I sınıfına aşık olmayan ideal denir (Kostyrko vd. 2000).

Tanım 2.5 (Uygun İdeal) X üzerinde I aşık olmayan ideali, her $x \in X$ için $\{x\} \in I$ şartını sağlıyorsa uygun ideal adını alır (Kostyrko vd. 2000).

Tanım 2.6 (Süzgeç) $X \neq \emptyset$ olsun. $\mathbf{F} \subset 2^X$ sınıfı için, $\emptyset \notin \mathbf{F}$, her $A, B \in \mathbf{F}$ iken $A \cap B \in \mathbf{F}$ ve her $A \in \mathbf{F}, A \subset B$ iken $B \in \mathbf{F}$ gerçekleşiyorsa $\mathbf{F}$ sınıfına X üzerinde bir süzgeç denir (Kostyrko vd. 2000).

I idealinin X üzerinde aşık olmayan bir ideal olması için gerek ve yeter şart

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(I) = \{X \setminus A : A \in I\}$$

sınıfının X üzerinde bir süzgeç olmasıdır (Kostyrko vd. 2000).

2.2 İdeal Yakınsaklık

Bu kesimde bir metrik uzayda ideal yakınsaklığı ve buna ilişkin bazı temel bilgileri hatırlatacağız.

Tanım 2.7 (İdeal Yakınsaklık) (X, ρ) bir metrik uzay ve $I, \mathbb{N}$ üzerinde aşık ar olmayan bir ideal olsun. $x = (x_n) \in X$ ve her $\varepsilon > 0$ için

$$A(\varepsilon) = \{n \in \mathbb{N} : \rho(x_n, \xi) \geq \varepsilon\} \in I$$

olacak şekilde bir $\xi \in X$ noktası mevcut ise $x = (x_n)$ dizisi ξ noktasına I -yakınsaktır denir ve $I\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$ ile gösterilir (Kostyrko vd. 2000).

Örnek 2.1 $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin tüm sonlu alt kümelerinin sınıfı Fin olsun. Fin aşık ar olmayan uygun idealdir. Fin -yakınsaklık, X uzayı üzerindeki ρ metriğine göre Cauchy yakınsaklık ile çakışır (Kostyrko vd. 2000).

Örnek 2.2 $I_d = \{A \subset \mathbb{N} : d(A) = 0\}$ sınıfı tanımlansın. O halde I_d aşık ar olmayan uygun idealdir ve I_d -yakınsaklık istatistiksel yakınsaklık ile çakışır (Kostyrko vd. 2000).

Örnek 2.3 $I_\delta = \{A \subset \mathbb{N} : \delta(A) = 0\}$ sınıfı tanımlansın. I_δ , aşık ar olmayan uygun idealdir. I_δ -yakınsaklık logaritmik istatistiksel yakınsaklık olarak adlandırılır (Kostyrko vd. 2000).

Örnek 2.4 Δ_j kümeleri ikişer ikişer ayrık ve sonsuz çoklukta elemana sahip olan kümeler olmak üzere $\mathbb{N} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \Delta_j$ doğal sayılar kümesinin bir ayrışımını göz önüne alalım.

$$I = \{A : A \cap \Delta_j \neq \emptyset ; j = 1, 2, 3, \dots, k\}$$

sınıfı, aşık ar olmayan bir idealdir (Kostyrko vd. 2000).

Uyarı 2.2 Eğer I sınıfı X uzayı üzerinde uygun ideal ise o uzayda Cauchy yakınsaklık, I -yakınsaklığı gerektirir.

Şimdi de I -yakınsaklık tarafından gerçekleştirilen yakınsaklık aksiyomlarını inceleyelim. Aşağıda verilen özellikler Cauchy yakınsaklığın en bilinen aksiyomlarıdır.

(S) Her sabit $\{\xi, \xi, \dots, \xi, \dots\}$ dizisi ξ noktasına yakınsar.

(H) Keyfi yakınsak her dizinin limiti tektir.

(F) Yakınsak bir dizinin tüm alt dizileri aynı değere yakınsar.

(U) $x = (x_n)$ dizisinin her bir alt dizisi, ξ noktasına yakınsak bir alt diziye sahip ise bu $x = (x_n)$ dizisi de ξ noktasına yakınsar (Kostyrko vd. 2000).

Önerme 2.1 Kabul edelim ki X uzayı en az iki elemana sahip olsun ve $I \subset 2^X$ uygun ideal olsun.

a) I -yakınsaklık (S), (H), (U) özelliklerini gerçekler.

b) Eğer I ideali, sonsuz çoklukta elemana sahip bir küme içeriyorsa I -yakınsaklık (F) özelliğini gerçekleştirmez (Kostyrko vd. 2000).

İspat. a) (S) özelliği açıktır. (H) özelliğinin ispatı için kabul edelim ki $x = (x_n)$, X uzayında bir dizi, $a, b \in X$ ve $a \neq b$ için

$I - \lim x_n = a$ ve $I - \lim x_n = b$ olsun.

I -yakınsaklık tanımından; her $\varepsilon > 0$ için

$$A_1(\varepsilon) = \{n \in \mathbb{N} : \rho(x_n, a) \geq \varepsilon\} \in I$$

ve

$$A_2(\varepsilon) = \{n \in \mathbb{N} : \rho(x_n, b) \geq \varepsilon\} \in I$$

olduğundan $\mathbb{N} \setminus A_1(\varepsilon), \mathbb{N} \setminus A_2(\varepsilon) \in \mathbf{F}$ elde edilir. Süzgecin tanımından

$(\mathbb{N} \setminus A_1(\varepsilon)) \cap (\mathbb{N} \setminus A_2(\varepsilon)) \neq \emptyset$. Yani

$$\mathbb{N} \setminus A_1(\varepsilon) = \{n \in \mathbb{N} : \rho(x_n, a) < \varepsilon\}$$

$$\mathbb{N} \setminus A_2(\varepsilon) = \{n \in \mathbb{N} : \rho(x_n, b) < \varepsilon\}$$

kümelerinin en az bir ortak elemanı vardır. $a \neq b$ olduğundan

$$\begin{aligned} \rho(a, b) &\leq \rho(x_n, a) + \rho(x_n, b) \\ &< \varepsilon + \varepsilon \\ &= 2\varepsilon \\ &< \rho(a, b) \end{aligned}$$

olur ki bu çelişkidir. I -yakınsaklıkta limit mevcut ise tektir.

Burada (U) özelliğinin kontrapozitifinin gerçekleştiğini gösterelim. Kabul edelim ki $x = (x_n)$ dizisi a noktasına ideal yakınsamasın.

O halde en az bir $\varepsilon_o > 0$ için

$$A(\varepsilon_o) = \{n \in \mathbb{N} \mid \rho(x_n, a) \geq \varepsilon_o\} \notin I$$

bulunur.

$A(\varepsilon_o) \notin I$ olduğundan $A(\varepsilon_o)$ sonsuz elemanlı bir kümedir. O halde

$$A(\varepsilon_o) = \{n_1 < n_2 < n_3 \dots\}$$

şeklindedir.

Her $k \in \mathbb{N}$ için $y_k := x_{n_k}$ olsun. Burada (y_k) dizisi $x = (x_k)$ dizisinin bir alt dizisi olduğu açıktır. Son olarak (y_k) alt dizisinin a 'ya I -yakınsak olmayan en az bir alt dizisi olacağından ispat tamamlanır.

b) $A \in I$ sonsuz çoklukta elemana sahip küme olsun. O halde

$$A = \{n_1 < n_2 < n_3 < \dots < n_k < \dots\}$$

şeklinde yazılabilir. I aşıkâr olmayan ideal olduğundan $B = \mathbb{N} \setminus A$ kümesi de sonsuz çoklukta elemana sahip kümedir ve

$$B = \mathbb{N} \setminus A = \{m_1 < m_2 < m_3 < \dots < m_k < \dots\}$$

şeklinde yazılabilir.

$x = (x_n)$ dizisini $a, b \in X$ elemanlarından oluşacak şekilde seçelim ve $a \neq b$ olsun. Her $k \in \mathbb{N}$ için $x_{n_k} = a$ ve $x_{m_k} = b$ alalım. Açıkça görülür ki $I - \lim x_n = b$ olur. Yani $x = (x_n)$ dizisi b noktasına I -yakınsak olur. Fakat $x = (x_n)$ dizisinin bir alt dizisi olan (x_{n_k}) dizisi sabit dizi olup a noktasına I -yakınsar.

Bu şartlar altında dizinin kendisi $b \in X$ noktasına yakınsarken aynı dizinin alt dizisi $a \in X$ noktasına yakınsak oldu. Böylece (F) özelliği gerçekleşmedi. ■

Uyarı 2.3 Eğer I , herhangi bir sonsuz çoklukta elemana sahip küme içermeyen uygun bir ideal ise I -yakınsaklık ile Cauchy yakınsaklık çıkarılır. Hatta (F) özelliği gerçekleşir.

2.3 I ve I^* Yakınsaklık

Tanım 2.8 (X, ρ) bir metrik uzay, $x = (x_n) \subset X$ ve $I, \mathbb{N}$ üzerinde aşıkak olmayan bir ideal olsun. Bir $M = \{m_1 < m_2 < m_3 < \dots < m_k < \dots\} \in \mathbf{F}(I)$ cümlesi için $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_{m_k}, \xi) = 0$ sağlamıyorsa $x = (x_n)$ dizisi ξ noktasına I^* -yakınsaktır denir ve $I^* - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$ ile gösterilir (Kostyrko vd. 2000).

Önerme 2.2 I , uygun bir ideal olsun. Eğer $I^* - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$ ise $I - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$ gerçekleşir (Kostyrko vd. 2000).

İspat. $I^* - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$ olsun. O halde

$$M := \mathbb{N} \setminus E = \{m_1 < m_2 < m_3 < \dots < m_k < \dots\}$$

olacak şekilde bir $E \in I$ vardır öyleki $\lim_{k \rightarrow \infty} \rho(x_{m_k}, \xi) = 0$ gerçekleşir. Dolayısı ile her $\varepsilon > 0$ verildiğinde her $k > k_0$ için $\rho(x_{m_k}, \xi) < \varepsilon$ olacak biçimde bir $k_0 \in \mathbb{N}$ vardır. O halde $k \leq k_0$ için $\rho(x_{m_k}, \xi) \geq \varepsilon$ gerçekleşir. Yani $\{m_1 < m_2 < m_3 < \dots < m_{k_0}\}$ kümesi için $\rho(x_{m_k}, \xi) \geq \varepsilon$ olur. (I , bir uygun ideal olduğundan sonlu sayıda elemana sahip tüm alt kümeleri içerir. O halde $\{m_1 < m_2 < m_3 < \dots < m_{k_0}\} \in I$ olur).

Böylece

$$A(\varepsilon) = \{n \in \mathbb{N} : \rho(x_n, \xi) \geq \varepsilon\} \subset E \cup \{m_1 < m_2 < m_3 < \dots < m_{k_0}\} \in I$$

olur ve $A(\varepsilon) \in I$ elde edilir. O halde $I - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$ bulunur. ■

Bu kesimin devamında I -yakınsaklık ile I^* -yakınsaklığın hangi durumlarda denk olacağını inceleyeceğiz.

Teorem 2.1 (X, ρ) bir metrik uzay ve $I \subset 2^{\mathbb{N}}$ uygun bir ideal olsun. Eğer X , bir yığılma noktasına sahip değil ise I -yakınsaklık ile I^* -yakınsaklık denktir (Kostyrko vd. 2000).

İspat. Önerme 2.2'den denkliğin bir tarafı açık. Şimdide $I - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$ iken böyle bir (X, ρ) metrik uzayının yapısı altında $I^* - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$ olduğunu göstereceğiz. $I - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$ olduğundan her $\varepsilon > 0$ için $A(\varepsilon) = \{n \in \mathbb{N} : \rho(x_n, \xi) \geq \varepsilon\} \in I$ olur. X , bir yığılma noktasına sahip olmadığı için $B(\xi, \varepsilon) = \{x \in X : \rho(x, \xi) < \varepsilon\} = \{\xi\}$ olacak biçimde bir $\varepsilon > 0$ vardır. Dolayısı ile

$$\{n \in \mathbb{N} : \rho(x_n, \xi) < \varepsilon\} = \{n \in \mathbb{N} : x_n = \xi\} \in \mathbf{F}(I)$$

elde edilir. $(\{n \in \mathbb{N} : \rho(x_n, \xi) \geq \varepsilon\} \in I$ olduğundan tümleyeni için

$$\{n \in \mathbb{N} : \rho(x_n, \xi) < \varepsilon\} \in \mathbf{F}(I)$$

gerçeklenir.) Yani $M = \{n \in \mathbb{N} : x_n = \xi\} \in \mathbf{F}(I)$ cümlesi için $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, \xi) = 0$ olur ki bu da $I^* - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$ olmasını gerektirir. ■

Tanım 2.9 $I \subset 2^{\mathbb{N}}$ uygun bir ideal olsun. I idealeine ait ikişer ikişer ayrık ve sayılabilir $\{A_1, A_2, \dots\}$ kümeler ailesi için $A_n \Delta B_n$ ($n \in \mathbb{N}$) sonlu cümle ve $B = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \in I$ şartını sağlayan sayılabilir bir $\{B_1, B_2, \dots\}$ kümeler ailesi varsa, I ideali (AP) şartını sağlar denir (Kostyrko vd. 2000).

Uyarı 2.4 $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ ve $B \in I$ olup her $n \in \mathbb{N}$ için $B_n \subset B$ olduğundan ve I bir ideal olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $B_n \in I$ elde edilir (Kostyrko vd. 2000).

Teorem 2.2 $I \subset 2^{\mathbb{N}}$ uygun bir ideal olsun.

- i) I , (AP) şartını sağlıyor ve (X, ρ) keyfi bir metrik uzay ise X 'de $I - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$ olacak şekildeki bir $x = (x_n)$ dizisi için $I^* - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$ gerçekleşir.
- ii) (X, ρ) en az bir yığılma noktasına sahip bir metrik uzay ve X 'deki keyfi bir $x = (x_n)$ dizisi için $I - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$ ($\xi \in X$) iken $I^* - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$ ise I ideali (AP) şartını sağlar (Kostyrko vd. 2000).

İspat. i) Hipotezden $I, (AP)$ şartını sağlasın ve $I - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$ olsun. O halde her $\varepsilon > 0$ için $A(\varepsilon) = \{n \in \mathbb{N} : \rho(x_n, \xi) \geq \varepsilon\} \in I$ olmalıdır. Şimdi

$$A_1 = \{n \in \mathbb{N} : \rho(x_n, \xi) \geq 1\}$$

$$A_2 = \{n \in \mathbb{N} : \frac{1}{2} \leq \rho(x_n, \xi) < 1\}$$

$\vdots$

$$A_n = \{n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} \leq \rho(x_n, \xi) < \frac{1}{n-1}\} \quad (n \geq 2)$$

olarak alalım. Dikkat edilirse $i \neq j$ için $A_i \cap A_j = \emptyset$ gerçekleşir.

(AP) şartı nedeniyle $\forall j \in \mathbb{N}$ için $A_j \Delta B_j$ sonlu küme olacak şekilde $B = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \in I$ vardır.

Bizim göstermek istediğimiz $M = \mathbb{N} \setminus B$ için $\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n \in M}} \rho(x_n, \xi) = 0$ olduğudur.

$\delta > 0$ olsun ve $\frac{1}{k+1} < \delta$ olacak şekilde bir $k \in \mathbb{N}$ seçelim. O halde

$$\{n \in \mathbb{N} : \rho(x_n, \xi) \geq \delta\} \subset A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{k+1}$$

gerçeklenir. $j = 1, 2, \dots, k+1$ için $A_j \Delta B_j$ sonlu küme olduğundan

$$\left(\bigcup_{j=1}^{k+1} B_j\right) \cap \{n \in \mathbb{N} : n > n_0\} = \left(\bigcup_{j=1}^{k+1} A_j\right) \cap \{n \in \mathbb{N} : n > n_0\}$$

olacak biçimde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır.

$n > n_0$ ve $n \notin B$ ise $n \notin \bigcup_{j=1}^{k+1} B_j$ ve bir önceki küme eşitliğinden $n \notin \bigcup_{j=1}^{k+1} A_j$ olur ki

$\{n \in \mathbb{N} : \rho(x_n, \xi) \geq \delta\} \subset \bigcup_{j=1}^{k+1} A_j$ olduğundan $n \in \{n \in \mathbb{N} : \rho(x_n, \xi) < \delta\}$ elde edilir. Bu ise $I^* - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$ olmasını gösterir.

ii) X 'in yığılma noktasının $\xi \in X$ olduğunu kabul edelim. O halde $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$ ve

$(\rho(x_n, \xi))$ dizisi azalarak 0'a yakınsak olacak biçimde X 'de bir (x_n) dizisi mevcuttur.

Her $n \in \mathbb{N}$ için $\epsilon_n = \rho(x_n, \xi)$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $\{A_1, A_2, \dots, A_n, \dots\}$ kümeler ailesi I idealine ait ve boş olmayan ayrık kümeler olsunlar. Eğer $n \in A_j$ ise $y_n = x_j$ olacak biçimde bir (y_n) dizisi tanımlayalım. $\delta > 0$ olsun ve $\epsilon_m < \delta$ olacak şekilde bir $m \in \mathbb{N}$ seçelim. O halde

$$A(\delta) = \{n \in \mathbb{N} : \rho(y_n, \xi) \geq \delta\} \subset A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m \in I \quad (2.1)$$

olup $A(\delta) \in I$ 'elde edilir. Yani $I - \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \xi$ olur. Hipotezden

$$I^* - \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \xi$$

olur ki I^* -yakınsaklık tanımından $B \in I$ ve $M = \mathbb{N} \setminus B = \{m_1, m_2, \dots\}$ için $\lim_{k \rightarrow \infty} y_{m_k} = \xi$ olur. Keyfi bir $j \in \mathbb{N}$ için $B_j = A_j \cap B$ olarak alalım.

Her $j \in \mathbb{N}$ için $A_j \cap B \subset A_j \in I$ olup her $j \in \mathbb{N}$ için $B_j \in I$ elde edilir. Üstelik

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \cap B = B \cap \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \subset B$$

elde edilir, bu da $B \in I$ olduğundan $\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \in I$ olmasını gerektirir. $j \in \mathbb{N}$ sabit olsun. $\lim_{k \rightarrow \infty} y_{m_k} = \xi$ olduğundan limitin tanımı gereğince her $\delta > 0$ için $\{m_k \in \mathbb{N} : \rho(y_{m_k}, \xi) \geq \delta\} \subset M$ kümesi sonlu sayıda elemana sahiptir. (2.1)'den M kümesi ile A_j sadece sonlu sayıda ortak elemana sahiptir. Buradan

$$A_j \subset (A_j \cap B) \cup \{m_1, m_2, \dots, m_{k_0}\}$$

olacak biçimde bir $k_0 \in \mathbb{N}$ elde edilir.

Son olarak her $j \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} B_j \setminus A_j &= B_j \cap A_j^c \\ &= (A_j \cap B) \cap A_j^c \\ &= (B \cap A_j) \cap A_j^c \\ &= B \cap (A_j \cap A_j^c) \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} A_j \Delta B_j &= (A_j \setminus B_j) \cup \underbrace{(B_j \setminus A_j)}_{\emptyset} \\ &= A_j \setminus B_j \\ &\subset \{m_1, m_2, \dots, m_{k_0}\} \end{aligned}$$

olup $A_j \Delta B_j$ kümesinin sonlu olduğu elde edilir. j keyfi olup (AP) şartı sağlanır. ■

2.4 I-Yakınsaklığı Koruyan Fonksiyonlar

Bu kesimde sürekli fonksiyonların ideal yakınsaklığı koruduğuna ilişkin bir önerme vereceğiz.

Tanım 2.10 (X, ρ) bir metrik uzay ve $I \subset 2^{\mathbb{N}}$ uygun bir ideal olsun. Eğer X uzayındaki her $x = (x_n)$ dizisi için $I - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$ ($\xi \in X$) iken $I - \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = g(\xi)$ ise $g : X \rightarrow X$ fonksiyonu X uzayında I -yakınsaklığı korur denir (Kostyrko vd. 2000).

Önerme 2.3 I , keyfi bir uygun ideal olsun. $g : X \rightarrow X$ fonksiyonu X uzayında I -yakınsaklığı koruması için gerek ve yeter şart g fonksiyonunun X uzayında sürekli olmasıdır (Kostyrko vd. 2000).

İspat. Kabul edelim ki g fonksiyonu bir $\xi \in X$ noktasında sürekli olmasın. O halde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, \xi) = 0$$

ve $n \in \mathbb{N}$ için $\rho(g(x_n), g(\xi)) \geq \delta$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı ve X 'de bir (x_n) dizisi mevcuttur. Burada $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, \xi) = 0$ olduğundan $I - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$ olur.

O halde

$$\{n \in \mathbb{N} : \rho(g(x_n), g(\xi)) \geq \delta\} = \mathbb{N} \notin I$$

olup

$$I - \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) \neq g(\xi)$$

bulunur.

Şimdi de $I - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$ ve g fonksiyonu sürekli olsun. O halde keyfi bir $\varepsilon > 0$ için $x \in B(\xi, \delta)$ iken $g(x) \in B(g(\xi), \varepsilon)$ olacak biçimde bir $\delta > 0$ vardır. Şimdi

$$C(\delta) = \{n \in \mathbb{N} : \rho(x_n, \xi) < \delta\} \subset \{n \in \mathbb{N} : \rho(g(x_n), g(\xi)) < \varepsilon\} = D(\varepsilon)$$

elde edilir.

$I - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$ olduğundan $\{n \in \mathbb{N} : \rho(x_n, \xi) \geq \delta\} \in I$ olur ki bu da

$$C(\delta) = \{n \in \mathbb{N} : \rho(x_n, \xi) < \delta\} \in \mathbf{F}(I)$$

olmasıdır. Üstelik $C(\delta) \subset D(\varepsilon)$ olduğundan ve $\mathbf{F}(I)$ 'nin süzgeç olmasından $D(\varepsilon) \in \mathbf{F}(I)$ elde edilir. Buradan

$$\{n \in \mathbb{N} : \rho(g(x_n), g(\xi)) \geq \varepsilon\} \in I$$

olmasını elde ederiz. O halde $I - \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = g(\xi)$ elde edilir. ■

2.5 I-Limit Noktaları ve I-Değme Noktaları

Bu kesimde I -limit noktaları ve I -değme noktalarını inceleyeceğiz.

Tanım 2.11 (X, ρ) bir metrik uzay ve $x = (x_n)$, X 'de bir dizi olsun.

1. Eğer $M \notin I$ ve $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{m_k} = \xi$ olacak şekilde bir $M = \{m_1 < m_2 < \dots\} \subset \mathbb{N}$ kümesi varsa $\xi \in X$, (x_n) dizisinin bir I -limit noktasıdır denir.
2. Eğer her $\varepsilon > 0$ için $\{n \in \mathbb{N} : \rho(x_n, \xi) < \varepsilon\} \notin I$ gerçekleşirse $\xi \in X$, (x_n) dizisinin bir I -değme noktasıdır denir (Kostyrko vd. 2000).

$x = (x_n)$ dizisinin tüm I -limit noktaları ve I -değme noktalarının kümesi sırası ile $I(\Lambda_x)$ ve $I(\Gamma_x)$ ile gösterilir.

Önerme 2.4 I , uygun bir ideal olsun. O halde X 'deki her $x = (x_n)$ dizisi için $I(\Lambda_x) \subset I(\Gamma_x)$ gerçekleşir (Kostyrko vd. 2000).

İspat. $\xi \in I(\Lambda_x)$ olsun. O halde $M \notin I$ ve $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{m_k} = \xi$ olacak şekilde bir $M = \{m_1 < m_2 < \dots\} \subset \mathbb{N}$ kümesi mevcuttur. $\delta > 0$ alalım ve $\lim_{k \rightarrow \infty} \rho(x_{m_k}, \xi) = 0$ olmasından her $k > k_0$ için $\rho(x_{m_k}, \xi) < \delta$ olacak biçimde bir $k_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Buradan yararlanarak $k < k_0$ olacak şekildeki k 'lerden sonlu tanesi için $\rho(x_{m_k}, \xi) \geq \delta$ olur.

$M = \{m_1 < m_2 < \dots\}$ kümesi için $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{m_k} = \xi$ olup

$$M \setminus \{m_1, m_2, \dots, m_{k_0}\} \subset \{n \in \mathbb{N} : \rho(x_n, \xi) < \delta\}$$

olmasından $\{n \in \mathbb{N} : \rho(x_n, \xi) < \delta\} \notin I$ elde edilir. Bu ise $\xi \in I(\Gamma_x)$ olmasıdır. ■

Teorem 2.3 I , uygun bir ideal olsun. $I(\Gamma_x)$ kümesi, X 'deki her $x = (x_n)$ dizisi için X 'de kapalıdır (Kostyrko vd. 2000).

İspat. $y \in \overline{I(\Gamma_x)}$ olsun. Keyfi bir $\varepsilon > 0$ için $a \in I(\Gamma_x) \cap B(y, \varepsilon)$ olacak şekilde bir $a \in X$ mevcuttur, yani $a \in B(y, \varepsilon)$. Buradan ise $B(a, \delta) \subset B(y, \varepsilon)$ olacak biçimde bir $\delta > 0$ vardır. O halde $\{n \in \mathbb{N} : \rho(x_n, a) < \delta\} \subset \{n \in \mathbb{N} : \rho(x_n, y) < \varepsilon\}$ olur ve $a \in I(\Gamma_x)$ olduğundan her $\delta > 0$ için $\{n \in \mathbb{N} : \rho(x_n, a) < \delta\} \notin I$ biliniyor. Son olarak ideal tanımından $\{n \in \mathbb{N} : \rho(x_n, y) < \varepsilon\} \notin I$ ile istenilen elde edilir. Böylece $y \in I(\Gamma_x)$ elde edilir. ■

2.6 Fonksiyon Dizilerinin I-Yakınsaklığı

Bu kesimde fonksiyon dizilerinin noktasal ideal yakınsaklığını tanımlayacağız.

Tanım 2.12 X boş olmayan bir küme, (Y, ρ) bir metrik uzay ve I , uygun bir ideal olsun. Her n için $f_n : X \rightarrow Y$ şeklinde tanımlansın. Her $x \in X$ için

$$I - \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$$

ise (f_n) fonksiyon dizisi $f : X \rightarrow Y$ şeklinde tanımlı fonksiyona noktasal ideal yakınsaktır denir. f fonksiyonu I -limit fonksiyonu olarak adlandırılıp

$f = I - \lim f_n$ şeklinde gösterilir ve bu I -limit fonksiyonu tektir (Kostyrko vd. 2000).

Tanım 2.13 (Maksimal İdeal) $I \subset 2^{\mathbb{N}}$ sınıfının bir maksimal uygun ideal olması için gerek ve yeter şart her $A \subset \mathbb{N}$ için $A \in I$ yada $\mathbb{N} \setminus A \in I$ olmasıdır (Kostyrko vd. 2000).

3. BW-ÖZELLİĞİ VE R-ÖZELLİĞİ

Bu bölümde hangi tür ideallerin (R) özelliğine sahip olduğunu gösterip, (R) ve (W) özelliklerinin denk olduklarını göstereceğiz.

Açıkça belirtilmedikçe bu bölümde düşünülen I ideali için $I \neq P(\mathbb{N})$ olup tüm sonlu kümeleri içermektedir.

3.1 Temel Bilgiler

Önce Riemann Teoremini hatırlatalım.

Teorem 3.1 (Riemann Teoremi) Eğer $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ serisi şartlı yakınsak bir seri ise terimlerinin yerlerini sonsuz çoklukta değiştirmekle, serinin toplamı istenilen her değere eşit yapılabilir (Yurtsever 1981).

Tanım 3.1 (Riemann Özelliği) Her şartlı yakınsak $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ serisi ve $r \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ için $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_{\pi_r(n)} = r$ ve

$$\{n \in \mathbb{N} : \pi_r(n) \neq n\} \in I$$

olacak şekilde bir $\pi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ permutasyonu varsa $I \subset P(\mathbb{N})$ ideali (R) özelliğine sahiptir denir (Filipow ve Szuca 2010).

Tanım 3.2 (W Özelliği) Her şartlı yakınsak $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ serisi için $\sum_{n \in A} a_n$ serisi de şartlı yakınsak olacak şekilde bir $A \in I$ mevcut ise I ideali (W) özelliğine sahiptir denir (Filipow ve Szuca 2010).

Tanım 3.3 (P-İdeal) Keyfi bir $(A_n) \subset I$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $A_n \setminus A \in Fin$ olacak şekilde bir $A \in I$ varsa I idealine bir P-ideal denir (Filipow ve Szuca 2010).

Tanım 3.4 (Yoğun İdeal) Her $A \notin I$ kümesi, sonsuz çoklukta elemana sahip bir B alt kümesi içeriyor ve $B \in I$ gerçekleşiyorsa I idealine yoğun denir (Filipow ve Szuca 2010).

Tanım 3.5 (Erdős-Ulam İdeali) $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ şeklinde tanımlı bir f fonksiyonu için

$$\varepsilon U_f = \left\{ A \subset \mathbb{N} : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i \in A \cap \{1,2,\dots,n\}} f(i)}{\sum_{i=1}^n f(i)} = 0 \right\}$$

sınıfı $\mathbb{N}$ üzerinde bir idealdir ve Erdős-Ulam ideali olarak adlandırılır (Filipow ve Szuca 2010).

3.2 Analitik İdealler

Bu kesimde ilk olarak $\mathbb{N}$ üzerinde bir I ideali ile alt ölçü arasındaki ilişki çalışılmıştır.

Tanım 3.6 Açık kümelerin bir sayılabilir arakesiti bir G_δ kümesi, kapalı kümelerin bir sayılabilir birleşimi bir F_σ kümesi olarak adlandırılır (Royden ve Fitzpatrick 2010).

Eğer I , Cantor uzayının G_δ alt kümelerinin bir sürekli görüntüsü ise I analitiktir denir ve Cantor Uzayının F_σ alt kümesi ise F_σ 'dir (Filipow ve Szuca 2010).

$\phi : P(\mathbb{N}) \longrightarrow [0, \infty]$ şeklinde tanımlı fonksiyonu

$$\phi(\emptyset) = 0$$

$$\phi(A) \leq \phi(A \cup B) \leq \phi(A) + \phi(B)$$

şartlarını sağlıyorsa bu ϕ fonksiyonuna $\mathbb{N}$ üzerinde alt ölçü denir.

Her $n \in \mathbb{N}$ için $\phi(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(A \cap n)$ ise ϕ alttan yarı-süreklilisc) olur. Buradaki n ile $\{0, 1, \dots, n-1\}$ kümesi simgelenmektedir.

$\mathbb{N}$ üzerinde ϕ keyfi alttan yarı-süreklilik olmak üzere

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_\phi : P(\mathbb{N}) &\longrightarrow [0, \infty] \\ A &\longrightarrow \|A\|_\phi = \limsup_{n \rightarrow \infty} \phi(A \setminus n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(A \setminus n) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı fonksiyon alt ölçüdür.

$$Exh(\phi) = \{A \subset \mathbb{N} : \|A\|_\phi = 0\}$$

$$Fin(\phi) = \{A \subset \mathbb{N} : \phi(A) < \infty\}$$

aileleri birer idealdir (Filipow ve Szuca 2010).

Teorem 3.2 $\mathbb{N}$ üzerinde bir I ideali için aşağıdakiler denktir.

- 1) I bir analitik P – idealdir.
- 2) $\mathbb{N}$ üzerinde $I = Exh(\phi)$ olacak şekilde en az bir ϕ alttan yarı-süreklilik alt ölçü vardır (Filipow ve Szuca 2010).

Teorem 3.3 $\mathbb{N}$ üzerinde bir I ideali için aşağıdakiler denktir:

- 1) I bir F_σ idealdir.
- 2) $\mathbb{N}$ üzerinde $I = Fin(\phi)$ olacak şekilde en az bir ϕ alttan yarı-süreklilik alt ölçü vardır (Filipow ve Szuca 2010).

Not: I , $\mathbb{N}$ üzerinde bir ideal, $A \subset \mathbb{N}$ ve (x_n) reel sayıların keyfi bir dizisi olsun.

$(x_n) \upharpoonright A$ ile $(x_n)_{n \in A}$ alt dizisini ifade edeceğiz.

$(x_n)_{n \in A}$ alt dizisi verildiğinde her $\varepsilon > 0$ için

$$\{n \in A : |x_n - x| \geq \varepsilon\} \in I$$

ise $(x_n)_{n \in A}$ dizisi I -yakınsaktır (Filipow ve Szuca 2010).

Not: $\mathbb{N}$ üzerinde bir I ideali verilsin.

- 1) Keyfi $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sınırlı reel terimli dizisi için $(x_n)_{n \in A}$ dizisi yakınsak olacak şekilde bir $A \notin I$ varsa bu ideal $Fin - BW$ olarak adlandırılır.
- 2) Keyfi $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sınırlı reel terimli dizisi için $(x_n)_{n \in A}$ dizisi I -yakınsak olacak şekilde bir $A \notin I$ varsa bu ideal BW olarak adlandırılır (Filipow ve Szuca 2010).

Lemma 3.1 I ideali (R) özelliğine sahip ise yoğundur (Filipow ve Szuca 2010).

İspat. Kabul edelim ki I yoğun olmasın. O halde I idealinde olmayan en az bir A kümesi var öyleki A kümesi I idealine ait sonlu küme içerir. Bir küme I idealinde değilse $|A| = \mathbb{N}$ sağlanır. Burada $|A|$ notasyonu A kümesinin kardinalini göstermektedir. Yani $|A| = \mathbb{N}$ olacak şekilde bir $A \subset \mathbb{N}$ ($A \notin I$) olsun ve her $B \subset A$ için

$$B \in I \iff |B| < \mathbb{N} \quad (3.1)$$

gerçeklenir.

$A = \{n_k : k \in \mathbb{N}\}$ ve $n_0 < n_1 < \dots$ olsun.

Şimdi her $k \in \mathbb{N}$ için $a_{n_k} = \frac{(-1)^k}{k}$ ve $n \in \mathbb{N} \setminus A$ için $a_n = 0$ olsun. Açıkça görüldüğü gibi $\sum_{n \in A} a_n$ serisi şartlı yakınsaktır. $n \notin A$ için $a_n = 0$ olduğundan $\sum_{n \in A} a_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ sağlanır.

Şimdi de $\{n \in \mathbb{N} : \pi_r(n) \neq n\} \in I$ şartını sağladığımızı kabul edip en az bir $r \in \overline{R}$ için $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_{\pi_r(n)} = r$ olmadığını gösterelim. $D = \{n \in \mathbb{N} : \pi_r(n) \neq n\} \in I$ olsun.

$D \in I$ olup $A \cap D \subset D$ olduğundan ideal tanımı gereğince $A \cap D \in I$ sağlanır. $A \cap D \subset A$ olup (3.1)'den $B = A \cap D$ olarak alalım. Buradan $|A \cap D| < \mathbb{N}$ olup

$$\sum_{n \in D} |a_n| = \sum_{n \in D \cap A} |a_n| < \infty$$

gerçeklenir.

Sonuç olarak $\sum_{n \in D \cap A} |a_n| = r$ olup $r = +\infty$ için şart sağlanmadı. O halde I ideali, (R) özelliğine sahip değildir. ■

Tanım 3.7 (Toplam İdeal) $\sum_{n \in \mathbb{N}} u(n) = +\infty$ olacak şekildeki negatif terimli olmayan $\sum_{n \in \mathbb{N}} u(n)$ serisi için

$$I_u = \left\{ A \subset \mathbb{N} : \sum_{n \in A} u(n) < \infty \right\}$$

idealine toplam(summable) ideal denir (Filipow ve Szuca 2010).

Aşağıdaki lemmayı ispatsız vereceğiz.

Lemma 3.2 Bir toplam idealin yoğun olması için gerek ve yeter şart

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u(n) = 0$$

koşulunun gerçekleşmesidir (Farah 2000).

Lemma 3.3 Hiç bir toplam ideal (R) özelliğine sahip değildir (Filipow ve Szuca 2010).

İspat. $I = \left\{ A \subset \mathbb{N} : \sum_{n \in A} u(n) < \infty \right\}$ bir toplam ideal olsun. $u(n)$ 'in iki durumunu inceleyeceğiz.

1.durum: $A_\varepsilon = \{n \in \mathbb{N} : u(n) \geq \varepsilon\}$ kümesi sonsuz çoklukta elemana sahip küme olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ sayısı vardır.

2.durum: $\lim_{n \rightarrow \infty} u(n) = 0$ olmasıdır.

1.durumu kabul edelim. O halde $u(n)$ dizisinin 0'a yakınsak olamayacağı açıktır. O halde Lemma 3.2'den toplam ideal yoğun değildir. Lemma 3.1 gereğince de I ideali (R) özelliğine sahip değildir.

2.durumu kabul edelim. $\lim_{n \rightarrow \infty} u(n) = 0$ ve I idealinin tanımından $\sum_{n \in \mathbb{N}} u(n) = +\infty$ için

$$M_0 < N_0 < M_1 < N_1 < \dots$$

ve

$$\frac{1}{n+2} < \sum_{i=M_n}^{N_n} u(i) \leq \frac{1}{n+1}$$

olacak şekilde doğal sayıların (M_n) ve (N_n) alt dizileri mevcuttur.

$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [M_n, N_n] \cap \mathbb{N}$ olsun ve bazı $n \in \mathbb{N}$ için eğer $i \in [M_n, N_n]$ ise $a_i = (-1)^n u(i)$

ve diğer yerlerde $a_i = 0$ tanımlayalım. Leibniz kriterinden $\sum_{i \in \mathbb{N}} a_i = s$ serisi şartlı yakınsak olduğu görülüyor. Dikkat edilirse $B \in I$ olduğunda

$$\sum_{i \in B} |a_i| = \sum_{i \in B \cap A} |a_i| = \sum_{i \in B \cap A} u(i) < \sum_{i \in B} u(i) < \infty$$

olup $\sum_{i \in B} a_i$ mutlak yakınsak dolayısıyla yakınsaktır.

Kabul edelim ki $\sum_{i \in \mathbb{N}} a_{\pi(i)} = s + 1$ ve $C = \{n \in \mathbb{N} : \pi(n) \neq n\} \in I$ olacak şekilde $\pi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ ile tanımlı bir permutasyon π olsun. $r = \sum_{i \in C} a_i = \sum_{i \in C} a_{\pi(i)}$ olsun. O halde

$$\begin{aligned} s - r &= \sum_{i \in \mathbb{N}} a_i - \sum_{i \in C} a_i \\ &= \sum_{i \in \mathbb{N} \setminus C} a_i \\ &= \sum_{i \in \mathbb{N} \setminus C} a_{\pi(i)} \\ &= \sum_{i \in \mathbb{N}} a_{\pi(i)} - \sum_{i \in C} a_{\pi(i)} \\ &= s + 1 - r \end{aligned}$$

olur ki bu çelişkidir. O halde kabulümüz yanlıştır ve böylece toplam ideal (R) özelliğine sahip değildir. ■

Teorem 3.4 $I, \mathbb{N}$ üzerinde bir ideal olmak üzere aşağıdaki önermeler denktir:

- 1) I ideali (R) özelliğine sahiptir.
- 2) I ideali bir toplam ideale genişletilemez.
- 3) I ideali (W) özelliğine sahiptir (Filipow ve Szuca 2010).

İspat. $(1) \implies (2)$: Kontrapozitifini alalım. I idealinin bir J toplam ideal genişlemesi olsun. Lemma 3.3 gereğince J toplam ideal olduğundan (R) özelliğine sahip değildir. $I \subset J$ olup J ideali (R) özelliğine sahip olmadığından I ideali de (R) özelliğine sahip değildir.

$(2) \implies (3)$: Kabul edelim ki I ideali (W) özelliğine sahip olmasın. Burada sözü edilen seri $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ olsun. İddia ediyoruz ki ya her $A \in I$ için $\sum_{n \in A} a_n^+ < \infty$ ya da

$\sum_{n \in A} a_n^- > -\infty$ sağlanır. Kabul edelim ki $\sum_{n \in A} a_n^+ = +\infty$ olacak biçimde bir $A \in I$ ve $\sum_{n \in B} a_n^- = -\infty$ olacak biçimde bir $B \in I$ mevcut olsun. Üstelik $C = A \cup B \in I$ olmak üzere $\sum_{n \in C} a_n^+ = +\infty$ ve $\sum_{n \in C} a_n^- = -\infty$ gerçekleşir.

O halde $\sum_{n \in D} a_n$ şartlı yakınsak olacak şekilde bir $D \subset C$ mevcuttur. Bu ise çelişkidir, çünkü I ideali (W) özelliğine sahip değildir. O halde kabulümüz yanlıştır. Yani her $A \in I$ için $\sum_{n \in A} a_n^+ = +\infty$ ya da her $B \in I$ için $\sum_{n \in B} a_n^- = -\infty$ olmamalıdır. Genelliği bozmaksızın kabul edelim ki her $A \in I$ için $\sum_{n \in A} a_n^+ < \infty$ olsun. Şimdi

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longrightarrow f(n) = a_n^+ \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı fonksiyon için I_f toplam ideali I 'nın bir genişlemesi olur.

(3) $\implies$ (1) : I ideali (W) özelliğine sahip olsun. Üstelik $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ serisi şartlı yakınsak ve $r \in \overline{\mathbb{R}}$ olsun. $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ serisi şartlı yakınsak olduğundan ve Riemann Teoreminden $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_{\pi_r(n)} = r$ olacak şekilde bir $\pi_r(n) : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ permutasyonu mevcuttur. Göstermemiz gereken

$$\{n \in \mathbb{N} : \pi_r(n) \neq n\} \in I$$

olduğudur.

$$\begin{aligned} \{n \in A : \pi_r(n) \neq n\} \subseteq A &\implies \{n \in A : \pi_r(n) \neq n\} \in I \\ &\implies \{n \in A : \pi_r(n) = n\} \notin I \\ &\implies \{n \in \mathbb{N} : \pi_r(n) = n\} \notin I \\ &\implies \{n \in \mathbb{N} : \pi_r(n) \neq n\} \in I \end{aligned}$$

olur ki istenilen elde edilir. Böylece I ideali (R) özelliğine sahiptir. ■

Sonuç 3.1 Her maksimal ideal (R) özelliğine sahiptir (Filipow ve Szuca 2010).

Sonuç 3.2 Eğer bir I ideali BW özelliğine sahip değil ise (R) özelliğine sahiptir (Filipow ve Szuca 2010).

Tanım 3.8 (Yoğunluk İdeali) I_n , $\mathbb{N}$ üzerinde ikişer ikişer ayrık aralıklar ve μ_n , I_n üzerinde bir ölçü olsun. O halde $\phi = \sup_n \mu_n$ bir alttan yarı-süreklilik alt ölçü olur ve $I = Exh(\phi)$ ideale yoğunluk(density) ideali denir (Filipow ve Szuca 2010).

Bir sonraki lemma ve teoremleri ispatsız vereceğiz.

Lemma 3.4 ϕ alttan yarı-süreklilik alt ölçü ve $I = Exh(\phi)$ olsun. O halde I idealinin bir yoğun ideal olması için gerek ve yeter koşul $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(\{n\}) = 0$ olmasıdır (Hernández ve Hrušák 2007).

Teorem 3.5 Bir I yoğun yoğunluk idealinin bir Erdős-Ulam ideali olması için gerek ve yeter koşul I_n aralığının ve μ_n ölçüsünün her seçimi için $\limsup_n \mu_n(I_n) < \infty$ olmasıdır (Filipow vd. 2007).

Teorem 3.6 Bir yoğunluk idealinin BW özelliğine sahip olmaması için gerek ve yeter koşul bir Erdős-Ulam ideali olmasıdır (Filipow vd. 2007).

Önerme 3.1 Bir yoğunluk idealinin (R) özelliğine sahip olması için gerek ve yeter koşul BW özelliğine sahip olmamasıdır (Filipow ve Szuca 2010).

İspat. Yeter şart Sonuç 3.2'den açıktır.

Şimdi I , yoğunluk ideali (R) özelliğine sahip olsun, göstereceğiz ki BW özelliğine sahip değildir.

μ_n , I_n aralığı üzerinde bir ölçü ve $\phi = \sup_n \mu_n$ olacak şekilde $I = Exh(\phi)$ olsun.

O halde 2 durum incelenmelidir:

1) $\{n \in \mathbb{N} : \phi(\{n\}) > \delta\}$ kümesi sonsuz çoklukta elemana sahip olacak şekilde bir $\delta > 0$ vardır.

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(\{n\}) = 0$ gerçekleşir.

1. durumda I ideali Lemma 3.4'den yoğun değildir. Böylece Lemma 3.1 'den (R) özelliğine sahip değildir. Üstelik bu durum altında Sonuç 3.2 nedeniyle BW

özelliğine sahiptir (bu şart altında dikkat edilirse R özelliğine sahip değildir).

2.durumu inceleyelim. İlk olarak bu durum altında I yoğunluk ideali Lemma 3.4'den yoğun idealdir.

Bu durumun iki alt durumu vardır:

a) $\sup_n \mu_n(I_n) < \infty$

ve

b) $\sup_n \mu_n(I_n) = \infty$ olmasıdır.

a) Bu şartlar altında I ideali Teorem 3.5'den Erdős-Ulam idealidir ve Teorem 3.6'den hiç bir Erdős-Ulam ideali BW özelliğine sahip olmadığından Sonuç 3.2 ile (R) özelliğine sahiptir.

b) Bu alt durumda ise $\sup_n \mu_n(I_n) = \infty$ olsun. O halde Teorem 3.5'den I ideali Erdős-Ulam ideali değildir, Teorem 3.6'den ise BW özelliğine sahiptir. İspatın devamında göstereceğiz ki I ideali (R) özelliğine sahip değildir. Şimdi

i) $k_0 < k_1 < k_2 \dots$

ii) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $A_n \subset I_{k_n}$ ve

iii) $n < \mu_{k_n}(A_n) < n + 1$ olacak şekilde $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ve $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizileri vardır.

$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ olsun ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$a_i = \begin{cases} \frac{(-1)^n \mu_{k_n}(\{i\})}{n^2} & , \quad i \in A_n \\ 0 & , \quad \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

olsun. O halde

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n| = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{i \in A_n} |a_i| = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{i \in A_n} \frac{\mu_{k_n}(\{i\})}{n^2} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\mu_{k_n}(A_n)}{n^2}$$

olur ve $n < \mu_{k_n}(A_n) < n + 1$ olduğundan $\frac{n}{n^2} < \frac{\mu_{k_n}(A_n)}{n^2} < \frac{n+1}{n^2}$ olup $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ serisi mutlak yakınsak seri değildir.

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{i \in A_n} a_i = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{i \in A_n} \frac{(-1)^n \mu_{k_n}(\{i\})}{n^2} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n \mu_{k_n}(A_n)}{n^2}$$

olup

$$\frac{(-1)^n n}{n^2} < \frac{(-1)^n \mu_{k_n}(A_n)}{n^2} < \frac{(-1)^n (n+1)}{n^2}$$

olduğundan $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ serisi yakınsak seridir. O halde $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ serisi şartlı yakınsak bir seridir. Gösterelim ki $B \in I$ için $\sum_{n \in B} a_n$ serisi mutlak yakınsaktır.

Bunun için $B \in I$ olsun.

$$0 = \|B\|_\phi = \lim_{k \rightarrow \infty} \phi(B \setminus k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sup_n \mu_n((B \setminus k) \cap I_n) \right)$$

olduğundan her $n \geq N$ için $\mu_n(B \cap I_n) < 1$ olacak biçimde bir $N \in \mathbb{N}$ vardır.

Diğer taraftan

$$\begin{aligned} \sum_{i \in B} |a_i| &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{i \in I_n \cap B} |a_i| \right) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{i \in I_n \cap B} \frac{\mu_{k_n}(\{i\})}{n^2} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\mu_{k_n}(A_n \cap B)}{n^2} \\ &= \sum_{n < N} \frac{\mu_{k_n}(A_n \cap B)}{n^2} + \sum_{n \geq N} \frac{\mu_{k_n}(A_n \cap B)}{n^2} \\ &< \sum_{n < N} \frac{\mu_{k_n}(A_n \cap B)}{n^2} + \sum_{n \geq N} \frac{1}{n^2} \\ &< \infty \end{aligned}$$

olur ki bu da $\sum_{i \in B} a_i$ serisinin mutlak yakınsak olması demektir, yani I ideali (W) özelliğine sahip değildir. Buradan ise Teorem 3.4 yardımıyla I ideali (R) özelliğine sahip değildir. ■

Örnek 3.1 (Louveau-Velickovic) $(n_i)_{i \in \mathbb{N}}$ doğal sayıların artan bir dizisi ve I_i , $\mathbb{N}$ üzerinde ikişer ikişer ayırık aralıklar olsunlar öyleki $|I_i| = 2^{n_i}$ gerçeklensin. I_i üzerinde

$$\phi_i(A) = \frac{\log_2(|A \cap I_i| + 1)}{n_i}$$

ile bir ϕ_i alt ölçü tanımlansın. O halde; $\phi = \sup_i \phi_i$ bir alttan yarı-süreklilik alt ölçüdür ve özel olarak $LV_{\{n_i\}} = Exh(\phi)$ ideali Louveau-Velickovic ideali olarak adlandırılır (Filipow ve Szuca 2010).

Teorem 3.7 Bir Louveau-Velickovic ideali (R) özelliğine sahip değildir (Filipow ve Szuca 2010).

İspat. $I = LV_{\{n_i\}}$ bir Louveau-Velickovic ideali olsun.

$$i \in \mathbb{N} \text{ için } a_n = \begin{cases} \frac{(-1)^i}{i2^{n_i}} & , \quad n \in I_i \\ 0 & , \quad n \notin I_i \end{cases}$$

olsun.

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n| = \sum_{i \in \mathbb{N}} \left(\sum_{n \in I_i} |a_n| \right)$$

$$= \sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{n \in I_i} \frac{1}{i2^{n_i}}$$

$$= \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{|I_i|}{i2^{n_i}}$$

$$= \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{2^{n_i}}{i2^{n_i}}$$

$$= \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{1}{i}$$

olup seri ıraksaktır yani $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ serisi mutlak yakınsak değildir. Ayrıca

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n = \sum_{i \in \mathbb{N}} \left(\sum_{n \in I_i} a_n \right)$$

$$= \sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{n \in I_i} \frac{(-1)^i}{i2^{n_i}}$$

$$= \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^i |I_i|}{i2^{n_i}}$$

$$= \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^i 2^{n_i}}{i2^{n_i}}$$

$$= \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^i}{i}$$

olup $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ serisi yakınsaktır. Dolayısı ile $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ serisi şartlı yakınsaktır.

$A \in I$ keyfi olsun. O halde her $i \geq N$ için $|A \cap I_i| < \frac{2^{n_i}}{i}$ olacak biçimde bir

$N \in \mathbb{N}$ mevcuttur. Gerçekten de sonsuz çoklukta i için $|A \cap I_i| \geq \frac{2^{n_i}}{i}$ olduğunu

kabul edelim.

$$\begin{aligned} \phi_i(A) &= \frac{\log_2(|A \cap I_i| + 1)}{n_i} \\ &\geq \frac{\log_2\left(\frac{2^{n_i}}{i}\right)}{n_i} \\ &= 1 - \frac{\log_2 i}{n_i} \\ &\rightarrow 1 \end{aligned}$$

olup Louveau-Velickovic İdealinin tanımı gereği kabul edilen durum altında $A \notin I$ olur ki bu çelişkidir. O halde $A \in I$ ise her $i \geq \mathbb{N}$ için $|A \cap I_i| < \frac{2^{n_i}}{i}$ olacak biçimde bir $N \in \mathbb{N}$ mevcuttur.

Gösterelim ki $\sum_{n \in A} a_n$ serisi mutlak yakınsaktır.

$$\begin{aligned} \sum_{n \in A} a_n &= \sum_{i \in \mathbb{N}} \left(\sum_{n \in I_i \cap A} |a_n| \right) \\ &= \sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{n \in I_i \cap A} \frac{1}{i^{2^{n_i}}} \\ &= \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{|A \cap I_i|}{i^{2^{n_i}}} \\ &= \sum_{i < N} \frac{|A \cap I_i|}{i^{2^{n_i}}} + \sum_{i \geq N} \frac{|A \cap I_i|}{i^{2^{n_i}}} \\ &\leq \sum_{i < N} \frac{|A \cap I_i|}{i^{2^{n_i}}} + \sum_{i \geq N} \frac{\frac{2^{n_i}}{i}}{i^{2^{n_i}}} \\ &= \sum_{i < N} \frac{|A \cap I_i|}{i^{2^{n_i}}} + \sum_{i \geq N} \frac{1}{i^2} \\ &< \infty \end{aligned}$$

olur ki bu da $\sum_{n \in A} a_n$ serisi mutlak yakınsak demektir. Ayrıca $\sum_{n \in A} a_n$ serisi şartlı yakınsak değildir. O halde Louveau-Velickovic ideali (W) özelliğine sahip değildir, Teorem 3.4 'den (R) özelliğine de sahip değildir. ■



4. I SEÇME TEOREMLERİ

Bu bölümde öncelikle Arzela-Ascoli ve Helly Seçim teoremlerinin orjinal versiyonlarını daha sonra da ideal versiyonlarını inceleyeceğiz.

4.1 Temel Bilgiler

Tanım 4.1 Her $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde X uzayı ε yarıçaplı açık yuvarların sonlu tanesi ile örtülüyor ise (X, d) metrik uzayına tümünden sınırlı (totally bounded) denir. Diğer bir deyişle her $\varepsilon > 0$ için $X = \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \varepsilon)$ olacak şekilde

$$S_n = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset X$$

sonlu kümesinin mevcut olmasıdır (Royden ve Fitzpatrick 2010).

Tanım 4.2 (X, d) bir metrik uzay ve $D \subset X$ olsun. D kümesinin bir elemanı X 'in her boş olmayan açık alt kümesi tarafından içeriliyor ise D kümesine X 'de yoğun denir (Royden ve Fitzpatrick 2010).

Tanım 4.3 Bir (X, d) metrik uzayı sayılabilir ve yoğun bir alt kümeye sahip ise bu metrik uzaya ayrılabilir denir (Royden ve Fitzpatrick 2010).

Teorem 4.1 Bir kompakt metrik uzay tümünden sınırlıdır (Royden ve Fitzpatrick 2010).

Tanım 4.4 Eğer her $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ dizisinin $(x_n)_{n \in A}$ alt dizisi I -yakınsak olacak şekilde bir $A \notin I$ mevcut ise $(X, I) \in BW$ denir (Filipow vd. 2012).

Sonuç 4.1 Her kompakt X metrik uzayı için $I \in BW$ ise $(X, I) \in BW$ (Filipow vd. 2012).

4.2 Arzela-Ascoli Teoremi

Aşağıda Arzela-Ascoli teoreminin klasik ve ideal benzerleri ele alınacaktır.

Teorem 4.2 (Arzela-Ascoli Teoremi) $[0, 1]$ aralığı üzerinde tanımlı reel değerli sürekli fonksiyonların bir $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi düzgün sınırlı ve eşsürekli ise bu $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin düzgün yakınsak bir $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ alt dizisi vardır (Shapiro 1999).

İspat. İspatı 3 adımda yapacağız.

1. adım Bir $X = [0, 1]$ kompakt metrik uzayının ayrılabilir olduğunu yani sayılabilir yoğun bir alt kümeye sahip olduğunu gösterelim.

X kompakt metrik uzay olsun, Teorem 4.1'den tümden sınırlıdır. O halde her $n \in \mathbb{N}$ için $X = \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \frac{1}{n})$ olacak şekilde $S_n = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset [0, 1]$ sonlu kümesi mevcuttur.

$$S = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n$$

olarak alalım. S kümesi X 'in sayılabilir ve yoğun bir alt kümesidir.

2. adım Bu adımda (f_n) dizisinin S üzerinde noktasal yakınsak olan bir alt dizisini bulacağız.

S sayılabilir olduğundan $S = \{x_1, x_2, \dots\}$ olarak yazılabilir. Hipotezden (f_n) sınırlı dizi olduğundan $(f_n(x_1))$ sayı dizisi de sınırlıdır. Bolzano Weierstrass Teoreminden $(f_n(x_1))$ dizisinin yakınsak bir alt dizisi vardır, bu alt dizi $(f_{1,n}(x_1))$ olsun. $(f_{1,n})$ dizisi de sınırlı olduğundan $(f_{1,n}(x_2))$ sayı dizisi de sınırlıdır. Bolzano Weierstrass Teoreminden $(f_{1,n}(x_2))$ dizisinin yakınsak bir alt dizisi vardır, bu dizi $(f_{2,n}(x_2))$ olsun.

Dikkat edilirse $(f_{2,n})$ dizisi $(f_{1,n})$ dizisinin alt dizisi olup x_1 ve x_2 noktalarında yakın-

saktır. Bu şekilde devam edilirse,

$$\begin{array}{ccc} f_{1,1} & f_{1,2} & \dots \\ f_{2,1} & f_{2,2} & \dots \\ \vdots & & \\ f_{n,1} & f_{n,2} & \dots \end{array}$$

elde edilir ve n .sattır $(n-1)$. satırın alt dizisi olup $x_1, x_2, \dots, x_n$ noktalarında yakınsaktır. O halde $(f_{n,n})$ diyagonal dizisi (f_n) dizisinin S üzerinde yakınsak olan bir alt dizisidir.

3. adım Bir önceki adımda bulduğumuz (g_n) diyagonal dizisinin X üzerinde düzgün yakınsak olduğunu göstereceğiz.

Eşsüreklilikten, her $\varepsilon > 0$ için bir $\delta > 0$ mevcut öyle ki $d(x, y) < \delta$ şartını sağlayan her $x, y \in X$ için

$$|g_n(x) - g_n(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

gerçeklenir. $M > \frac{1}{\delta}$ olacak şekildeki $M \in \mathbb{N}$ doğal sayısını sabitleyip, $S_M \subset S$ sonlu kümesini göz önüne alalım. (g_n) diyagonal dizisi S üzerinde noktasal yakınsak olup S_M üzerinde de noktasal yakınsaktır. O halde (g_n) diyagonal dizisi S_M üzerinde Cauchy dizisi olup her $s \in S_M$ için bir $N > 0$ mevcut öyle ki her $n, m > N$ için

$$|g_n(s) - g_m(s)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

gerçeklenir.

Her $n, m > M$ için $x \in X$ sabit olsun. O zaman x elemanı için 1.adımdan $d(x, S) < \delta$ olur ki

$$\begin{aligned} |g_n(x) - g_m(x)| &\leq \underbrace{|g_n(x) - g_n(s)|}_{< \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|g_n(s) - g_m(s)|}_{< \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|g_m(s) - g_m(x)|}_{< \frac{\varepsilon}{3}} \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

bulunur. O halde (f_n) dizisinin (g_n) alt dizisi X üzerinde düzgün Cauchy dizisidir.

$C(X)$ tam uzay olduğundan, (g_n) dizisi X üzerinde düzgün yakınsaktır. ■

Şimdi Arzela-Ascoli teoreminin ideal versiyonuna geçmeden önce ispatta kullanacağımız Arzela-Ascoli teoreminin bir sonucunu verelim.

Sonuç 4.2 X kompakt metrik uzay ve X üzerinde tanımlı reel değerli tüm sürekli fonksiyonların uzayı $C(X)$ olsun. $A \subset C(X)$ olmak üzere A kümesinin kompakt olması için gerek ve yeter koşul A kümesinin kapalı, düzgün sınırlı ve eş sürekli olmasıdır (Shapiro 1999).

Teorem 4.3 (Arzela-Ascoli Teoreminin İdeal Versiyonu) $I, \mathbb{N}$ üzerinde bir ideal olsun. Aşağıdaki önermeler denktir:

- (1) $I \in BW$
- (2) $[0, 1]$ üzerinde tanımlı reel değerli sürekli fonksiyonların her düzgün sınırlı ve eş sürekli $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi için $(f_n)_{n \in A}$ alt dizisi I -yakınsak olacak şekilde bir $A \notin I$ mevcuttur (Filipow vd. 2012).

İspat. (1 $\Rightarrow$ 2): $[0, 1]$ üzerinde reel değerli sürekli fonksiyonların düzgün sınırlı ve eş sürekli keyfi bir $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisini ele alalım. $X = C[0, 1]$ ve $Y = \overline{\{f_n : n \in \mathbb{N}\}}^X$ olsun. O halde Y kapalıdır. Şimdi eş süreklilik ve düzgün sınırlılığını gösterelim.

$$\overline{A}^X = \{x \in X : d(x, A) = 0\}$$

olduğu biliniyor.

$$Y = \overline{\{f_n : n \in \mathbb{N}\}}^X = \{f \in C[0, 1] : \text{her } n \in \mathbb{N} \text{ için } d(f_n, f) = 0\}$$

$$\text{Her } n \text{ için } d(f_n, f) = \max_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

O halde bir $M > 0$ bulabiliriz öyleki her $f \in C[0, 1]$ ve her $x \in [0, 1]$ için

$$|f(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f_n(x)| \leq 0 + M = M$$

olup Y düzgün sınırlıdır.

Şimdi eş sürekliliğine bakalım. (f_n) dizisi eş sürekli olduğundan her $\varepsilon > 0$ için bir $\delta > 0$ bulabiliriz öyleki $d(x, y) < \delta$ olacak şekilde ki her $x, y \in [0, 1]$ için $|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon$ sağlanır.

Her $\varepsilon > 0$ için bir $\delta > 0$ mevcut öyleki $d(x, y) < \delta$ iken $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ sağlanır mı?

$$|f(x) - f(y)| \leq \underbrace{|f_n(x) - f(x)|}_0 + \underbrace{|f_n(x) - f_n(y)|}_{< \varepsilon} + \underbrace{|f_n(y) - f(y)|}_0 \leq \varepsilon$$

olduğu (f_n) dizisinin eş sürekliliğinden açık olup Y eş süreklidir. O halde Arzela-Ascoli teoreminin sonucundan Y kapalı, sınırlı ve eş sürekli olduğundan kompakt bir kümedir. Sonuç 4.1'den $I \in BW$ ve Y kompakt olduğundan $(Y, I) \in BW$ 'dir. O halde her $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq Y$ için $(f_n)_{n \in A}$ alt dizisi I -yakınsak olacak biçimde bir $A \notin I$ mevcuttur. Dolayısıyla $(f_n)_{n \in A}$ düzgün I -yakınsaktır.

(2⇒1): $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reel sayıların sınırlı dizisi olsun. $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} f_n &: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ a &\rightarrow f_n(a) = x_n \end{aligned}$$

sabit fonksiyon olsun. $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi sınırlı olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $|x_n| < M$ olacak şekilde bir $M > 0$ mevcuttur. Böylece bir $M > 0$ bulduk öyleki her $n \in \mathbb{N}$ ve $x \in [0, 1]$ için $|f_n(x)| = |x_n| < M$ gerçekleşir. O halde $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ düzgün sınırlıdır.

Her $\varepsilon > 0$ için bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ mevcut öyle ki $d(x, y) < \delta$ olacak şekilde ki her $x, y \in [0, 1]$ için $|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon$ sağlanır mı?

$|x - y| < \delta \Rightarrow |x_n - x_n| = 0 < \varepsilon$ olup $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eş sürekli olur. O halde (2)'deki hipotezden $(f_n)_{n \in A}$ alt dizisi I -yakınsak olacak şekilde bir $A \notin I$ mevcuttur. Yani bir $A \notin I$ var öyle ki $(f_n)_{n \in A} = (x_n)_{n \in A}$ alt dizisi I -yakınsaktır. Dolayısıyla $I \in BW$ sağlanır. ■

4.3 Helly Seçim Teoremi

Aşağıda klasik Helly teoremi ve ideal versiyonu incelenecektir.

Önerme 4.1 (Diyagonal Metot) $A = (a_{n,k})_{n,k \geq 1}$ reel veya kompleks sayıların bir matrisi olsun. Her $n, k \geq 1$ için $|a_{n,k}| < C$ olacak biçimde bir $C > 0$ mevcut ise

$$\lim_{j \rightarrow \infty} a_{n,k_j} = a_n \quad ; \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} a_{n,k(j,j)} = a_n \quad ; \quad n = 1, 2, \dots$$

olacak biçimde bir (k_j) dizisi ve bir (a_n) dizisi mevcuttur (Khan 2006).

Önerme 4.2 (Helly Seçim Teoremi) $(F_k)_{k \geq 1}$ dizisi $[a, b]$ üzerinde tanımlı azalmayan fonksiyonların bir dizisi olsun. Ayrıca bir $c > 0$ vardır öyleki her $x \in [a, b]$ ve her $k \geq 1$ için $|F_k(x)| \leq c$ olsun. O halde bir $(F_{k(j)})_{j \geq 1}$ alt dizisi ve $[a, b]$ üzerinde tanımlı azalmayan bir F fonksiyonu vardır öyleki her $x \in [a, b]$ için

$$\lim_{j \rightarrow \infty} F_{k(j)}(x) = F(x)$$

sağlanır (Khan 2006).

İspat. İspatı 4 adımda yapacağız.

1.Adım: a, b noktalarını ve (a, b) aralığındaki tüm rasyonel sayıların kümesini

$D := \{r_n : n \in \mathbb{N}\}$ olarak tanımlayalım. $a_{n,k} := F_k(r_n)$, $k \geq 1, n \geq 1$ ile bir $A := (a_{n,k})$ matrisini tanımlayalım. Diyagonal metot ile bir F_{k_j} alt dizisi ve D üzerinde tanımlı bir F fonksiyonu vardır öyleki

$$\lim_{j \rightarrow \infty} F_{k(j)}(r_n) = F(r_n), \forall r_n \in D$$

sağlanır.

2.Adım: F_k azalmayan fonksiyonlar olduğu için

$$G_1(x) = \liminf_j F_{k(j)}(x) \quad , \quad G_2(x) = \limsup_j F_{k(j)}(x)$$

ile tanımlı fonksiyonlar da $[a, b]$ üzerinde azalmayandır. Bu yüzden G_1 ve G_2 fonksiyonlarının süreksiz olduğu noktalar en fazla sayılabilir. Bu sayılabilir küme dışında süreklidirler.

3.Adım: Bir $x \in (a, b)$ elemanı G_1 ve G_2 fonksiyonlarının ortak süreklilik noktası olsun. Keyfi bir $r_n \in D$ için 1.adımı uygulayacak olursak

$$\begin{aligned} G_1(r_n) &= \liminf_j F_{k(j)}(r_n) \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} F_{k(j)}(r_n) \\ &= \limsup_j F_{k(j)}(r_n) \\ &= G_2(r_n) \end{aligned}$$

elde edilir. Gerçekten 1.adımda $F_k(r_n)$ dizisinin yakınsak bir alt dizisi bulundu ve bu da $F_{k(j)}(r_n)$ dizisiydi. Bu dizi yakınsak olduğu için haliyle

$$\lim_{j \rightarrow \infty} F_{k(j)}(r_n) = \limsup_j F_{k(j)}(r_n) = \liminf_j F_{k(j)}(r_n)$$

sağlanır. $r_n \rightarrow x$ ise süreklilik dizisel sürekliliğe denk olacağından $G_1(r_n) \rightarrow G_1(x)$ ve $G_2(r_n) \rightarrow G_2(x)$ olur. $G_1(r_n) = G_2(r_n)$ olup limitin tekliğinden $G_1(x) = G_2(x)$ elde edilir.

Bu yüzden G_1 ve G_2 fonksiyonlarının ortak süreklilik noktaları için $F_{k(j)}(x)$ dizisinin limiti mevcuttur. Böyle bir x noktası için $F(x) := G_1(x) = G_2(x)$ tanımlansın. Bu yüzden F , $[a, b]$ üzerinde G_1 ve G_2 fonksiyonlarının süreksiz olduğu bir sayılabilir küme hariç tüm $x \in [a, b]$ için tanımlıdır ve tanımlı olduğu küme üzerinde azalmayandır. G_1 ve G_2 fonksiyonları azalmayan olduğundan F 'nin azalmayan olduğu elde edilir.

4.Adım: G_1 ya da G_2 fonksiyonlarının süreksizlik noktalarında $F(x)$ 'i tanımlayabilmek için bu noktaların kümesini $(S_m)_{m \geq 1}$ olarak alalım. Şimdi

$$B := (b_{m,j}) ; b_{m,j} := F_{k_j}(S_m)$$

ile B matrisini tanımlayalım. Diyagonal metot yöntemi ile bir $(j(i))_{i \geq 1}$ alt dizisi ve bir $(c_m)_{m \geq 1}$ sayı dizisi vardır öyleki $b_{m,j(i)} \rightarrow c_m$ ($i \rightarrow \infty$) ($m = 1, 2, \dots$) sağlanır.

$$F(S_m) := c_m = \lim_{i \rightarrow \infty} F_{k_{j(i)}}(S_m)$$

olur. Buradan ise her $x \in [a, b]$ için $F(x)$ tanımlıdır. Çünkü $\lim_{i \rightarrow \infty} F_{k_{j(i)}}(x) = F(x)$ olup ve son olarak $F_{k_{j(i)}}(x)$ azalmayan olduğundan $F(x)$ 'de azalmayandır. ■

NOT : X uzayında ki her sayılabilir kümenin kapanışının kompakt ve birinci sayılabilir olması $(*)$ şartı olsun.

Sonuç 4.3 Kabul edelim ki X bir Hausdorff topolojik uzayı $(*)$ şartını gerçeklesin. Eğer,

- 1) I ideali bir F_σ ideale genişletilebilir veya
- 2) I ideali bir maksimal P-ideale genişletilebilir ise $(X, I) \in BW$ (Filipow vd. 2012).

Teorem 4.4 (Helly Seçim Teoreminin İdeal Versiyonu) $I, \mathbb{N}$ üzerinde bir ideal olsun. Kabul edelim ki

- 1) I ideali bir F_σ ideale genişletilebilir veya
- 2) I ideali bir maksimal P-ideale genişletilebilir olsun.

O halde $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı reel değerli düzgün sınırlı monoton fonksiyonların bir dizisi $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ olmak üzere $(f_n)_{n \in A}$ alt dizisi noktasal yakınsak olacak şekilde bir $A \in I^+$ mevcuttur (Filipow vd. 2012).

İspat. $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı reel değerli düzgün sınırlı monoton fonksiyonların bir dizisi $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ olsun. O halde en az bir $r > 0$ bulabiliriz öyle ki her $n \in \mathbb{N}$ ve her $x \in \mathbb{R}$ için $|f_n(x)| \leq r$ gerçekleşir. Çarpım topolojisi ile $[-r, r]$ aralığı üzerinde değerli, $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı tüm monoton fonksiyonların uzayı Steen (1995)'de 107. örneğe benzer şekilde kompakt ve birinci sayılabilir. Böylece $(*)$ şartı sağlanıp Sonuç 4.3'den $(f_n)_{n \in A}$ alt dizisi noktasal yakınsak olacak şekilde bir $A \in I^+$ mevcuttur. ■

5. SONUÇ

İdeal yakınsaklığın, Cauchy yakınsaklığın belirli teoremlerine uygulanması üzerine yapılan bu tez çalışmasında kaynaklar kısmında verilen bir çok makale ve kitaptan yararlanılmıştır. İlk olarak ideal sınıfı tanımlanıp bu sınıfla ilgili örnekler verilmiş, bu ideal sınıfı üzerinde I -yakınsaklık ve I^* - yakınsaklık kavramları tanımlanmış ve aralarındaki ilişkiler incelenmiştir. Daha sonra Riemann (R) Özelliği, Bolzano-Weierstrass Özelliği, W Özelliği tanımlanıp, aralarındaki ilişkiler ve hangi tür ideallerin bu özelliklere sahip olduğu incelenmiştir. Klasik yakınsaklık teoremleri olan Arzela-Ascoli Teoremi ve Helly Seçim Teoreminin orijinal halleri ve Bolzano-Weierstrass Özelliğine sahip belirli idealler için ideal versiyonları çalışılmıştır.

KAYNAKLAR

- Farah, I. 2000. Analytic quotients: theory of liftings for quotients over analytic ideals on the integers, Mem. Amer.Math. Soc. 148 (702) xvi+177
- Fast, H. 1951. Sur la convergence statistique, Coll. Math. 2; 241-244
- Filipow, R. and Szuca, P. 2010. Rearrangement of conditionally convergent series on a small set, J. Math.Anal.Appl. 362,64-71
- Filipow, R., Mrozek, N., Reclaw, I. and Szuca, P. 2007. Ideal convergence of bounded sequences, Journal of Symbolic Logic. 72(2); 501-512
- Filipow, R., Mrozek, N., Reclaw, I. and Szuca, P. 2012. I-selection principles for sequences of functions, J. Math.Anal.Appl. 396; 680-688
- Hernández, F.H. and Hrušák, M. 2007. Cardinal Invariants of Analytic P-Ideals, Canad. J. Math. 59 (3); 575-595
- Khan, M.K. 2006. Summer Seminars on Probabilistic Method in Summability Theory. Seminer Notu, 120, Ankara
- Kostyrko, P., Salat, T. and Wilczynski, W. 2000-2001. I-convergence, Real Anal. Exchange 26 (2); 669-685
- Royden, H.L. and Fitzpatrick, P.M. 2010. Real Analysis. Prentice Hall, 505, XXX
- Salat, T. and Tijdeman, R. 1983. Asymptotic densities of sets of positive integers, Math. Slov. 33; 199-207
- Shapiro, J.H. 1999. Notes on the Arzela-Ascoli Theorem, Ders Notu. 3
- Steen, L.A. and Seebach, J.A. 1995. Counterexamples in Topology. Dover Publications, 244, New York.
- Yurtsever, B. 1981. Matematik Analiz Dersleri Cilt I, Kısım II. Ekonomist . Yayınevi, 182, Ankara

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Mustafa GÜLFIRAT

Doğum Yeri : Manisa

Doğum Tarihi : 10/11/1993

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Erzincan Ertuğrulgazi Anadolu Lisesi (2011)

Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü (2015)

Yüksek Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı
(Eylül 2016 –Haziran 2018)

Çalıştığı Kurum ve Yıl

Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü Arş. Gör. (2017-...)