T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BİKOMPLEKS SAYILAR VE CEBİRSEL YAPILARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SEVİM ASLAN

DENİZLİ, MAYIS - 2018

T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BİKOMPLEKS SAYILAR VE CEBİRSEL YAPILARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SEVİM ASLAN

DENİZLİ, MAYIS - 2018

KABUL VE ONAY SAYFASI

SEVİM ASLAN tarafından hazırlanan "**BİKOMPLEKS SAYILAR VE CEBİRSEL YAPILARI**" adlı tez çalışmasının savunma sınavı 23.05.2018 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	İmza
Danışman Doç. Dr. Serpil HALICI	....
Üye Dr. Öğr.Üyesi Bahar DEMİRTÜRK BİTİM	....
Üye Doç. Dr. Özcan SERT	....

Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 06/06/2018 tarih ve 23/13 sayılı kararıyla onaylanmıştır.

....

Prof. Dr. Uğur YÜCEL

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırmalarının yapılması ve bulgularının analizlerinde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini; bu çalışmanın doğrudan birincil ürünü olmayan bulguların, verilerin ve materyallerin bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini ve alıntı yapılan çalışmalara atfedildiğine beyan ederim.

SEVİM ASLAN

ÖZET

BİKOMPLEKS SAYILAR VE CEBİRSEL YAPILARI
YÜKSEK LİSANS TEZİ
SEVİM ASLAN
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

(TEZ DANIŞMANI:DOÇ. DR. SERRPİL HALICI)

DENİZLİ, MAYIS 2018

Bu çalışmada, bikompleks sayılar kümesi ayrıntılı biçimde ele alındı.

İkinci bölümde, önce bu kümenin cebirsel ve aritmetik özellikleri incelendi ve daha sonra bu sayıların normları, eşlenik çeşitleri, sıfır bölenleri ele alındı. Ayrıca, bu sayı kümesindeki elemanların farklı gösterimleri de ele alındı. Özellikle idempotent gösterime vurgu yapıldı.

Üçüncü bölümde bikompleks sayıların matris gösterimlerinin nasıl elde edildiği ele alınarak detaylı olarak incelendi. Üstelik, bu sayıların cebirsel yapıları da incelendi.

Dördüncü bölümde ise, bikompleks değişkenli polinomlar ve onların sıfır yerleri incelendi.

ANAHTAR KELİMELER: Bikompleks Sayılar, Bikompleks Cebir, İdempotent Gösterim, Bikompleks Polinomlar.

ABSTRACT

BICOMPLEX NUMBERS AND THEIR ALGEBRAIC STRUCTURES
MSC THESIS
SEVİM ASLAN
PAMUKKALE UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATİCS

(SUPERVISOR:ASSOC. DOÇ. DR. SERPİL HALICI)

DENİZLİ, MAY 2018

In this study, the set of bicomplex numbers was discussed in detail.

In the second part, firstly the algebraic and arithmetic properties of this set were examined and then the norms of these numbers, the conjugation varieties, the divisors of zero were discussed. In addition, different representations of the elements in this number set were also discussed. Especially the effect on idempotent representation was emphasized.

In the third part, we have examined in detail the way in which matrix representations of bicomplex numbers are obtained. Moreover, the algebraic structures of these numbers have been studied.

In the fourth chapter, polynomials with bicomplex variables and their zeros are examined.

KEYWORDS: Bicomplex Numbers**,** Bicomplex Algebra, Idempotent Representation, Bicomplex Polynomials.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

TABLO LİSTESİ

Sayfa

SEMBOL LİSTESİ

$\mathbb{BC}$	:	Bikompleks Sayılar
$\mathbb{R}$	:	Reel Sayılar
$\mathbb{C}$	:	Kompleks Sayılar
$\mathbb{D}$	:	Hiperbolik Sayılar
$\mathbb{C}(\boldsymbol{i})$	:	Kompleks Alt Küme
$\mathbb{C}(\boldsymbol{j})$	:	Kompleks Alt Küme
$\mathbf{e}$	:	İdempotent Eleman
$\boldsymbol{e}^{+}$	:	İdempotent Eleman
$\overline{\boldsymbol{Z}}$	:	i-ye Göre Eşlenik
$\boldsymbol{Z}^{\dagger}$	:	j-ye Göre Eşlenik
$\boldsymbol{Z}^{*}$	:	k-ya Göre Eşlenik
$\boldsymbol{\delta}$	:	Sıfır Bölenler Kümesi
$\boldsymbol{\phi}_{\mathbb{C}}$	:	Kompleks Sayıların Matris Gösterimi
$\boldsymbol{\phi}_{\mathbb{BC}}$	:	Bikompleks Sayıların Matris Gösterimi
$\boldsymbol{\mathcal{B}}_{\mathbb{R}}$	:	Bilineer Form
$\boldsymbol{Q}$	:	Kuadratik Form
$\| \|$	:	Modül
$\| \| \| \|$	:	Norm
$\cdot$	:	İç Çarpım
$\times$	:	Vektörel Çarpım

ÖNSÖZ

Bu tezin hazırlanmasında, değerli bilgilerini benimle paylaşan, kendisine ne zaman danışsam bana kıymetli zamanını ayırıp sabırla ve büyük bir ilgiyle bana faydalı olabilmek için elinden gelenden fazlasını sunan değerli hocam Doç. Dr. Serpil Halıcı' ya ve çalışmam boyunca manevi desteğini her zaman hissettiğim aileme teşekkür ederim.

SEVİM ASLAN

1. GİRİŞ

1.1 Tarihçe

1843 yılında W.R. Hamilton (Ahlfors 1953), kompleks sayılar cisminin bir genişlemesi olarak kuaterniyonları tanımladı. Kuaterniyonlar, değişmeli olmayan bir halka olup kompleks sayıların bir çok özelliğini taşırlar ve kompleks sayılarla benzer bir yapıya sahiptirler. Hamilton kuaterniyonlarının baz elemanlarının çarpımı aşağıdaki tablo ile verilir.

.	**1**	**i**	**j**	**k**
1	**1**	**i**	**j**	**k**
i	**i**	**-1**	**k**	**-j**
j	**j**	**-k**	**-1**	**i**
k	**k**	**-j**	**-i**	**-1**

Tablo 1.1: Kuaterniyonların Baz Elemanlarının Çarpım Tablosu

Tarihi 1800'lü yıllara dayanan bikompleks sayılar ise, ilk olarak 1892 de Corrada Segre (Segre 1892) tarafından tanımlanmıştır. Hem kuaterniyonlar hem de bikompleks sayıların kümeleri kompleks sayılar kümesinin bir genellemesi olup, aslında bu iki küme birbirinden farklıdırlar. Kuaterniyonlar, değişmeli olmayan bir bölüm cebiri oluştururken, bikompleks sayılar, sıfır bölene sahip olan değişmeli bir halka oluştururlar.

Bikompleks sayılar, kuaterniyon cebirinin alt cebirlerinden biridir. Bikompleks sayılar uzayının 4-boyutlu Euclid uzayına gömülebilir olduğunu Segre (Segre 1892) gösterdi. Dolayısıyla, bikompleks sayıların kuaterniyonlara benzerlikleri ve farklılıkları incelenmiştir. Dolayısıyla, bikompleks sayıların reel ve kompleks matris temsilleri, kuaterniyonlara benzer şekilde yapılabilir. Kuaterniyonlar kümesinde değişme özelliği olmadığından sağdan ve soldan çarpımlar sonucu farklı matrisler elde edilir. Bikompleks sayılarda ise, değişme özelliğinin varlığından dolayı matris çarpımı da değişmelidir.

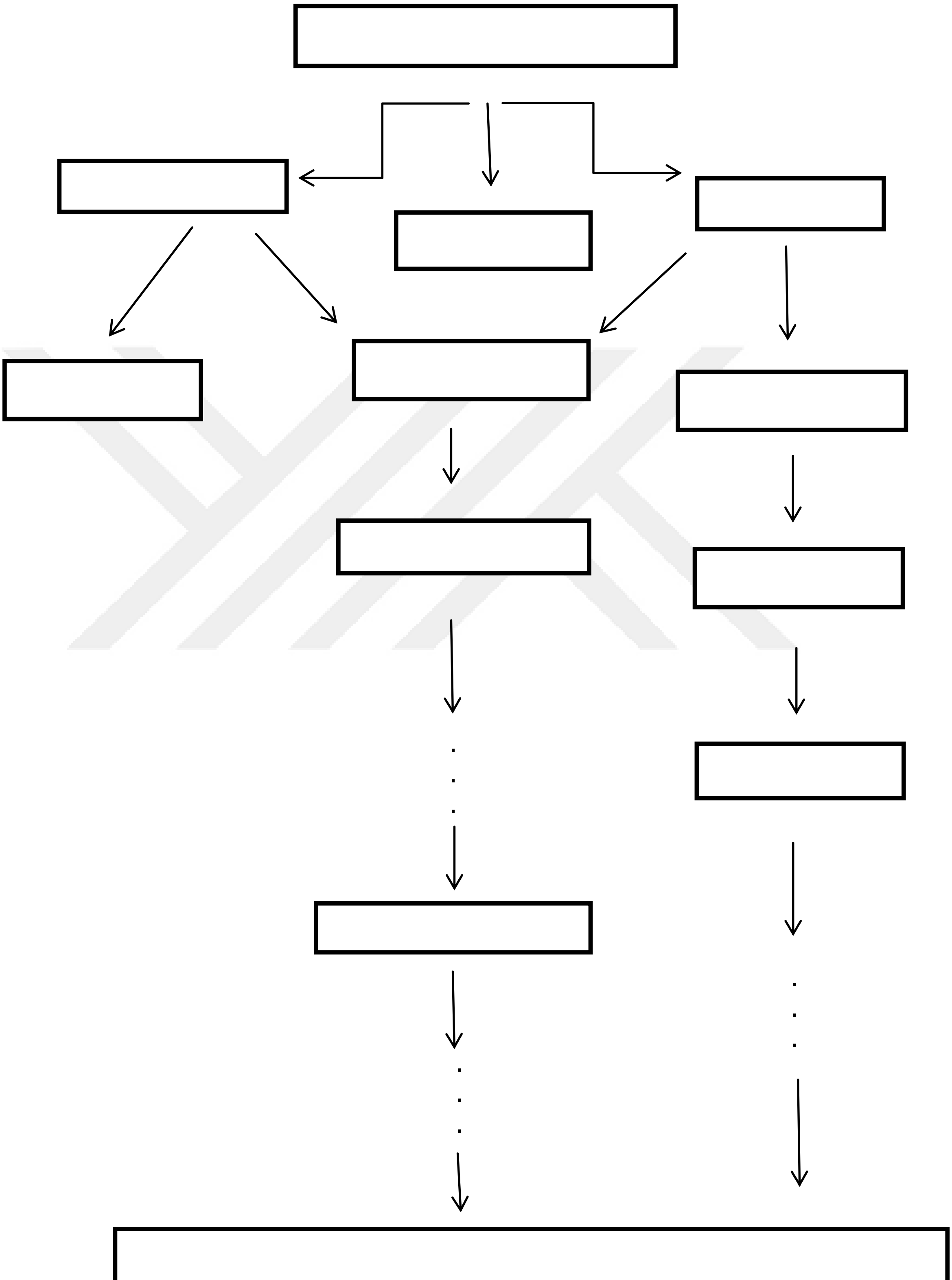
Bikompleks sayılar cebirinin özelliklerini geliştirmek amacı ile, C. Segre, trikompleks sayılar ve n-kompleks sayıları dikkate almıştır (Segre 1892). Price (Price 1991), bikompleks sayıların analizini çalışarak bu sayıları detaylı bir şekilde incelemiştir.

1893 de Scheffers (Scheffers 1893), tek değişkenli kompleks fonksiyonların bikompleks fonksiyonlara bir genelleştirmesini çalıştı. Bikompleks sayılarla ilgili gelişmelerin en çok kaydedildiği yıllar 1928-1940 yıllarıdır. Mesela, bu çalışmalardan bazıları için (Vignaux 1938, Scorza-Dragoni 1934) ve (Morin 1935) kaynaklarına bakılabilir. Özellikle Ringleb'in, 1933 de yazdığı makalesinde (Ringleb 1933), bikompleks değişkenli analitik fonksiyonlarla tek değişkenli kompleks analitik fonksiyonlar arasındaki ilişkiyi vermesi sonucu, bu konudaki çalışmalar hız kazanmıştır.

Üstelik bikompleks cebir, son yıllarda yaygın biçimde fizik ve matematik alanında çalışanların araştırma konusu haline gelmiştir. Mesela, kuantum mekaniğinin matematiksel yapısı, kompleks sayılar cismi üzerinde incelendiğinden, bu alandaki çalışmaları bikompleks sayılar üzerinde çalışan bir çok yazar vardır (Rochon 2000, Karakuş 2015, Rönn 2001, Riley 1953). Dolasıyla, standart kuantum mekaniğinin bir genellemesi olan bu yeni alan, bikompleks kuantum mekaniği olarak da bilinir. Son yıllarda bazı araştırmacılar bikompleks sayıların cebirsel, geometrik, topolojik ve dinamik özelliklerini çalışmaya başladılar (Rochon 2004, Babadağ, Hahn 1994, Vignaux 1938, Dimiev 2007). Ayrıca, bikompleks sayılar yardımıyla, hiperkompleks fonksiyonların özellikleri de literatürde incelenmektedir (Colombo 2011).

Bu çalışmada, öncelikle bikompleks sayıların eşlenik ve normlarını inceleyerek idempotent gösterim yardımıyla bu sayı sisteminin bazı önemli özellikleri verildi. Ayrıca, bikompleks değişkenli polinomlar da incelendi. Çalışmamızda, bikompleks polinomların bazı temel özellikleri ele alındı ve bikompleks polinomların sıfırları da incelendi.

Aşağıdaki tabloda, reel sayıların genişlemesi verilmiştir (Lavoie 2012).



2. BİKOMPLEKS SAYILAR

2.1 Bikompleks Sayıların Tanımı

$$\mathbb{BC} = \{\mathrm{z}_1 + j\mathrm{z}_2 \mid \mathrm{z}_1, \mathrm{z}_2 \in \mathbb{C},\ \mathrm{j}^2 = -1\}$$

biçiminde tanımlanan kümeye bikompleks sayılar kümesi denir. Burada j imajiner birim olup $i \neq j$ ve $ij = ji$ dir. Yani bikompleks sayılar; kompleks katsayılı kompleks sayılardır. $Z = z_1 + jz_2$ bikompleks sayısı kompleks sayılar üzerinde tanımlanabildiği gibi reel sayılar üzerinde de tanımlanabilir.

$z_1 = x_1 + iy_1$ ve $z_2 = x_2 + iy_2$ olup, bikompleks sayılar kümesi;

$$\mathbb{BC} = \{\, x_1 + iy_1 + jx_2 + ky_2 \mid x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}\,\}$$

biçiminde de yazılabilir. Bu çalışmada incelenecek olan $\mathbb{BC}$ nin iki alt kümesi $\mathbb{C}(i), \mathbb{C}(j)$ dir:

$$\mathbb{C}(i) = \{z_1 + jz_2 \mid z_2 = 0, z_1 \in \mathbb{C}\,\}$$

ve

$$\mathbb{C}(j) = \{z_1 + jz_2 \mid z_1, z_2 \in \mathbb{R}\,\}$$

biçiminde yazılır. $\mathbb{C}(i)$ ve $\mathbb{C}(j)$ kümeleri izomorf cisimlerdir. $\mathbb{BC}$ kümesinin bir alt kümesi olan ve

$$\mathbb{D} = \{\, x + ky \mid x, y \in \mathbb{R}\,\}$$

biçiminde tanımlanan kümeye hiperbolik sayılar kümesi denir. Burada k hiperbolik birim olup, $k^2 = 1$ dir. İki hiperbolik sayı $\xi_1 = x_1 + ky_1$ ve $\xi_2 = x_2 + ky_2$

iken, bunların toplamları ve çarpımları, sırasıyla

$$\xi_1 + \xi_2 = (x_1 + x_2) + k(y_1 + y_2)$$

ve

$$\xi_1 \xi_2 = (x_1 x_2 + y_1 y_2) + k(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

olarak tanımlanır. i ve j imajiner birim olup, $ij = ji = k$ dır. Böylece $\mathbb{BC}$ kümesinde bir alt küme, halka olarak düşünüldüğünde hiperbolik sayıların kümesine izomorf olacak şekilde vardır; yani,

$$\mathbb{D} = \{\, x + ky \mid x, y \in \mathbb{R} \,\}$$

kümesi $\mathbb{BC}$ kümesinin tüm özelliklerine sahip olur. Bikompleks sayıların baz elemanları arasındaki bağıntılar, aşağıdaki tabloyla verilebilir.

.	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	-j
j	j	k	-1	-i
k	k	-j	-i	1

Tablo 2.1: Bikompleks Baz Elemanlarının Çarpım Tablosu

2.2 Bikompleks Sayıların Farklı Yazılımları

$Z = z_1 + jz_2$ bikompleks sayısının farklı gösterimleri bu sayıların daha iyi anlaşılmasını sağlar. Bu farklı gösterimler aşağıdaki gibi sıralanabilir.

$z_1 = x_1 + iy_1$ ve $z_2 = x_2 + iy_2$; $x_1, y_1\ x_2, y_2 \in \mathbb{R}$ olsun. O zaman,

a) $Z = (x_1 + y_1 i) + j(x_2 + y_2 i) = z_1 + jz_2$

b) $Z = (x_1 + x_2 j) + i(y_1 + y_2 j) = \zeta_1 + i\zeta_2$

c) $Z = (x_1 + y_2 k) + i(y_1 - x_2 k) = \xi_1 + i\xi_2$

d) $Z = (x_1 + y_2 k) + j(x_2 - y_1 k) = \mu_1 + j\mu_2$

e) $Z = (x_1 + y_1 i) + k(y_2 - x_2 i) = w_1 + k w_2$

f) $\mathrm{Z} = (x_1 + x_2 j) + k(y_2 - y_1 j) = \omega_1 + k\omega_2$

g) $Z = x_1 + y_1 i + x_2 j + y_2 k$

Burada; $z_1, z_2, w_1, \mathrm{w}_2 \in \mathbb{C}(i)$, $\zeta_1, \zeta_2, \omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}(j)$ ve $\xi_1, \xi_2, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{D}$ dir.

Z bikompleks sayısının farklı gösterimleri aşağıdaki gibi de sıralanabilir:

a) $\mathbb{BC}$ −gösterimi : $Z = z_1 + j z_2$ (kompleks form)

b) $\mathbb{C}^2$ −gösterimi : (z_1, z_2) (kompleks çift)

c) $\mathbb{R}^4$ −gösterimi : $x_1 + y_1 i + x_2 j + y_2 k$ (vektör form)

d) $\mathbb{R}^4$ −gösterimi : (x_1, y_1, x_2, y_2) (dörtlü form)

2.3 Bikompleks Sayılar Kümesinde Aritmetik İşlemler

2.3.1 Bikompleks Sayıların Eşitliği

İki bikompleks sayı $Z = z_1 + j z_2$ ve $W = w_1 + j w_2$ olsun. Bikompleks sayılar ancak ve ancak bileşen bileşen eşittirler. Yani,

$$Z = W \Leftrightarrow z_1 = w_1 \text{ ve } z_2 = w_2$$

biçimindedir.

2.3.2 Bikompleks Sayıların Toplamı

Bikompleks sayılar kümesinin iki elemanı $Z = z_1 + jz_2$ ve $W = w_1 + jw_2$ olsun. Bikompleks sayılarda toplama işlemi;

$$Z + W = (z_1 + w_1) + j(z_2 + w_2)$$

biçiminde tanımlanabilir. Dolayısıyla, bikompleks sayılar kümesi toplama işlemine göre kapalıdır.

2.3.3 Bikompleks Sayıların Çarpımı

Bikompleks sayılar kümesinin iki elemanı $Z = z_1 + jz_2$ ve $W = w_1 + jw_2$ olsun. Bikompleks sayılarda çarpma işlemi;

$$ZW = (z_1 + jz_2)(w_1 + jw_2)$$

$$ZW = (z_1w_1 - z_2w_2) + j(z_1w_2 + z_2w_1)$$

biçiminde tanımlanabilir. Yani, bikompleks sayılar kümesi çarpma işlemine göre kapalıdır.

2.3.4 Bikompleks Sayıların Skalerle Çarpımı

$Z = z_1 + jz_2 \in \mathbb{BC}$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ olsun. Bir bikompleks sayının skalerle çarpımı;

$$\alpha Z = \alpha(z_1 + jz_2) = (\alpha z_1) + j(\alpha z_2)$$

biçiminde tanımlanabilir.

Tanımlardan $\mathbb{BC}$, $\mathbb{BC} = \{z_1 + jz_2 \mid z_1, z_2 \in \mathbb{C}\}$, deki toplama, skalerle çarpma ve çarpma işlemi gösterir ki bikompleks sayılar kümesi bir cebir yapısı oluşturur ve bikompleks cebir olarak adlandırılır. Dolayısıyla, çarpma işlemi birleşmeli, toplama üzerinde dağılmalı ve en önemlisi değişmelidir. Yani, bikompleks cebir, değişmeli bir cebirdir. Bu nedenle, bu cebir kompleks sayıların cebirsel işlemlerinin bazılarını genelleştirilmesine izin verir.

2.4 Bikompleks Sayıların Eşlenikleri

$\mathbb{BC}$ cebirinin yapısı; kompleks tipte iki imajiner birim ve bir hiperbolik birimden dolayı, üç farklı eşlenik tanımına müsaade eder. Yani, $Z = z_1 + jz_2$, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ sayısı için, aşağıdaki eşlenikler tanımlanabilir:

i. $\bar{Z} = \overline{z_1} + j\overline{z_2}$ (− - eşlenik)

ii. $Z^{\dagger} = z_1 - jz_2$ († - eşlenik)

iii. $Z^{*} = (\bar{Z})^{\dagger} = \overline{(Z^{\dagger})} = \overline{z_1} - j\overline{z_2}$ (∗ - eşlenik)

Bu eşleniklerin $\mathbb{C}(i)$, $\mathbb{C}(j)$ ve $\mathbb{D}$ kümeleri üzerinde nasıl hareket ettiği aşağıdaki gibi görülebilir;

a) $Z \in \mathbb{C}(i)$ ise, yani $z_2 = 0$, $Z = z_1 = x_1 + iy_1$ ise,

$$\bar{Z} = \overline{z_1} = x_1 - iy_1 = {z_1}^{*} = Z^{*}, \quad Z^{\dagger} = {z_1}^{\dagger} = z_1 = Z, \quad Z^{\dagger} = Z$$

olur.

b) $Z \in \mathbb{C}(j)$ ise, $Z = \zeta_1$ olup $\zeta_1 = x_1 + jx_2$ ise,

$$\overline{\zeta_1} = \zeta_1, \quad {\zeta_1}^{*} = x_1 - jx_2 = {\zeta_1}^{\dagger}$$

dır.

c) $Z \in \mathbb{D}$ ise, $Z = x_1 + ijy_2$ olup $y_1 = x_2 = 0$ ise,

$$\bar{Z} = x_1 - ijy_2 = Z^{\dagger}, \quad Z^{*} = Z$$

olur.

Yani hem $\dagger$ $-$eşlenik hem de $*$ $-$eşlenik bilinen kompleks eşlenikle çakışır, aynı olur.

Kısaca;

$$z \in \mathbb{C}(i) \;\Rightarrow\; Z = Z^{\dagger}$$

$$z \in \mathbb{C}(j) \;\Rightarrow\; Z = \bar{Z}$$

$$z \in \mathbb{D} \;\Rightarrow\; Z = Z^{*}$$

Yukarıda tanımlanan üç eşlenik, bikompleks sayıların farklı yazılımları kullanarak aşağıdaki gibi de yazılabilir;

i. $\bar{Z} = x_1 - y_1 i + x_2 j - y_2 k$ (j $-$sabit)

ii. $Z^{\dagger} = x_1 + y_1 i - x_2 j - y_2 k$ (i $-$sabit)

iii. $Z^{*} = x_1 - y_1 i - x_2 j + y_2 k$ (k $-$sabit)

Bikompleks sayılarda eşleniğe ait genel özellikler aşağıdaki gibi sıralanabilir:

i. $\overline{(Z+W)} = \bar{Z} + \bar{W}, \quad (Z+W)^{\dagger} = Z^{\dagger} + W^{\dagger}, \quad (Z+W)^{*} = Z^{*} + W^{*}$

ii. $\bar{\bar{Z}} = Z, \quad (Z^{\dagger})^{\dagger} = Z, \quad (Z^{*})^{*} = Z$

iii. $\overline{(Z.W)} = \bar{Z}.\bar{W}, \quad (Z.W)^{\dagger} = Z^{\dagger}.W^{\dagger}, \quad (Z.W)^{*} = Z^{*}.W^{*}$

2.5 Bikompleks Sayıların Modülleri

$\mathbb{C}$ kümesinde bir sayıyı eşleniği ile çarpmak, bu sayının modülüne karşılık gelir. Dolayısıyla, üç farklı eşlenik bikompleks sayılara uygulandığında üç farklı modül tanımı aşağıdaki gibi yapılabilir:

a) $|Z|_i^{\,2} = Z.\bar{Z} = (|z_1|^2 - |z_2|^2) + 2Re(z_1\overline{z_2})j$

b) $|Z|_j^{\,2} = Z.Z^{\dagger} = z_1^{\,2} + z_2^{\,2}$

c) $|Z|_k^{\,2} = Z.Z^{*} = (|z_1|^2 + |z_2|^2) - 2Im(z_1\overline{z_2})k$

biçiminde sıralanabilir. Bu modüller, reel değerli olmamalarına rağmen çarpımla ilgili aşağıdaki özellikleri sağlarlar:

a) $|Z.W|_i^{\,2} = |Z|_i^{\,2}.|W|_i^{\,2}$

b) $|Z.W|_j^{\,2} = |Z|_j^{\,2}.|W|_j^{\,2}$

c) $|Z.W|_k^{\,2} = |Z|_k^{\,2}.|W|_k^{\,2}$.

2.5.1 Bikompleks Sayıların Öklid Normu

$$\mathbb{C}(i)^2 = \mathbb{C}(i) \times \mathbb{C}(i) = \{\, (z_1, z_2) \mid z_1 + jz_2 \in \mathbb{BC} \,\}$$

ya da

$$\mathbb{C}(j)^2 = \mathbb{C}(j) \times \mathbb{C}(j) = \{\, (\zeta_1, \zeta_2) \mid \zeta_1 + i\zeta_2 \in \mathbb{BC} \,\}$$

ya da

$$\mathbb{R}^4 = \{\, (x_1, y_1, x_2, y_2) \mid (x_1 + iy_1) + j(x_2 + iy_2) \in \mathbb{BC} \,\}$$

olmak üzere $|Z|$ Öklid normu, yukarıdaki kümeler yardımıyla, aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$|Z| = \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2} = \sqrt{|\zeta_1|^2 + |\zeta_2|^2} = \sqrt{Re(|Z|_k{}^2)}$$

$$= \sqrt{x_1{}^2 + y_1{}^2 + x_2{}^2 + y_2{}^2}$$

Ayrıca;

$$|Z.W| \leq \sqrt{2}|Z|.|W|$$

olduğu görülebilir.

Örnek 2.5.1.1 $Q = 1 + i + 2j + 3k$ Fibonacci katsayılı bikompleks sayısının normu aşağıdaki gibi bulunur:

Q sayısının $\mathbb{C}(i)$ ve $\mathbb{C}(j)$ yazılımı,

$Q = (1 + i) + j(2 + 3i) = z_1 + jz_2$ ve $Q = (1 + j) + i(1 + 3j) = \zeta_1 + i\zeta_2$ iken,

$$|Q| = \sqrt{|z_1|^2 + z_2{}^2} = \sqrt{|\zeta_1|^2 + |\zeta_2|^2} = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{15}$$

olur.

2.6 $\mathbb{BC}$ de Sıfır Bölenler ve Terslenebilirlik

Üç farklı modül ile ilgili eşitlikler,

$$|Z|_i{}^2 = Z.\bar{Z} \in \mathbb{C}(j),$$

$$|Z|_j{}^2 = Z.Z^{\dagger} \in \mathbb{C}(i),$$

$$|Z|_k{}^2 = Z.Z^{*} \in \mathbb{D}$$

olup, önce

$$Z.\bar{Z} = |Z|_i^{\ 2}$$

eşitliği incelenirse; $Z \neq 0$ fakat $|Z|_i = 0$ iken Z bir sıfır bölendir $|Z|_i \neq 0$ ise, Z terslenebilirdir yani, $Z.\bar{Z} = |Z|_i^{\ 2}$ eşitliği $|Z|_i^{\ 2}$ ile bölünürse

$$\frac{Z.\bar{Z}}{|Z|_i^{\ 2}} = 1$$

olur, dolayısıyla Z terslenebilirdir ve Z nin tersi;

$$Z^{-1} = \frac{\bar{Z}}{|Z|_i^{\ 2}}$$

dır. Dolayısıyla $\mathbb{BC}$ de terslenebilir ve terslenemez eleman tanımı verilmiş olur. Kısaca özetlenirse;

1. $Z \neq 0$ bikompleks sayısı terslenebilirdir ancak ve ancak $|Z|_j \neq 0$ dır.

Ya da;

$Z \neq 0$ bikompleks sayısı terslenebilirdir ancak ve ancak $|Z|_k$ sıfır bölen değildir.

Bu durumda;

$$Z^{-1} = \frac{Z^{\dagger}}{|Z|_j^{\ 2}}$$

ve

$$Z^{-1} = \frac{Z^{*}}{|Z|_k^{\ 2}}$$

yazılır.

2. $Z \neq 0$ bikompleks sayısı sıfır bölendir ancak ve ancak $|Z|_i = 0$ ya da denk olarak $|Z|_k$ sıfır bölendir.

$$Z^{-1} = \frac{\bar{Z}}{|Z|_i^{\ 2}} = \frac{Z^{*}}{|Z|_k^{\ 2}}$$

Bikompleks sayıların özel gösterimleri, cebirsel işlemlerin yapılmasında avantajlıdır.

$Z = z_1 + jz_2$ olarak verilsin. O zaman, $|Z|_j^{\ 2} = z_1^{\ 2} + z_2^{\ 2}$ olup Z terslenebilirdir ancak ve ancak $z_1^{\ 2} + z_2^{\ 2} \neq 0$ dır.

$$Z^{-1} = \frac{Z^{\dagger}}{{z_1}^2 + {z_2}^2} = \frac{z_1 - jz_2}{{z_1}^2 + {z_2}^2}$$

z_1 ve z_2 her ikisi de sıfırdan farklı fakat kareleri toplamı ${z_1}^2 + {z_2}^2 = 0$ ise,

$Z = z_1 + jz_2$ bikompleks sayısı sıfır bölendir. Bu ise ${z_1}^2 = -{z_2}^2$ demektir, yani $z_1 = \pm i z_2$ dir.

Böylece $\mathbb{BC}$ de tüm sıfır bölenler

$$z = \lambda(1 \pm ij), \quad \lambda \in \mathbb{C}(i) - \{0\}$$

formundadır. Bu yazılımın Z nin farklı gösterimine bağlı olduğu görülebilir.

$Z = \zeta_1 + i\zeta_2,\ \zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{C}(j)$ ise, bu durumda;

$$ZZ^{\dagger} = 0 \Leftrightarrow |\zeta_1| = |\zeta_2| \ \text{ ve } \ \mathbb{R}\left(\zeta_1, {\zeta_2}^{\dagger}\right) = 0$$

olur. Buradan dolayı ζ_1 ve ζ_2, $\mathbb{C}(j)$ de ortogonaldir.

Böylece;

$$\zeta_1 = \pm j\zeta_2$$

dir. Buradan $Z = \zeta_1 + i\zeta_2$ sıfır bölendir ve $\zeta_1 \in \mathbb{C}(j) \setminus \{0\}$ olup

$$Z = \zeta_1 \ \pm \ ij\zeta_1 = \zeta_1(1 \pm ij)$$

olur. Son eşitlikten

$$Z.\bar{Z} = {\zeta_1}^2 + {\zeta_2}^2 = 0$$

eşitliği de elde edilir.

Aşağıdaki teoremde sıfır bölenlerin kümesi incelendi ve $\mathbb{BC}$ de sıfır bölenlerin kümesi δ ile gösterildi, ve ayrıca $\delta_0 = \delta \cup \{0\}$ gösterimi kullanıldı.

Teorem 2.6.1 $Z \neq 0$ olsun, o zaman aşağıdakiler denktir.

1. Z bikompleks sayısı terslenebilirdir.
2. Z sıfır bölen değildir.
3. $Z.Z^{\dagger} \neq 0$
4. $Z.\bar{Z} \neq 0$
5. $Z.Z^{*} \notin \delta_0$

6. $|Z|_i \neq 0$
7. $|Z|_j \neq 0$
8. $|Z|_k \notin \delta_0$
9. $Z = z_1 + jz_2$ ise ${z_1}^2 + {z_2}^2 \neq 0$ dır.
10. $Z = \zeta_1 + i\zeta_2$ ise ${\zeta_1}^2 + {\zeta_2}^2 \neq 0$ dır.

Dikkat edilirse, $\mathbb{BC}$ halka olduğundan 1. ve 2. denktir. Aslında, genel bir halkada sıfır bölen olmayan, sıfırdan farklı elemanların kümesi terslenebilir elemanların kümesinden farklıdır.

Sonuç 2.6.1 $Z \neq 0$ olsun, o zaman aşağıdakiler denktir.

1. Z terslenebilir değildir.
2. Z sıfır bölendir.
3. $Z.Z^{\dagger} = 0 = Z.\bar{Z}$
4. $Z.Z^{*} \in \delta_0$
5. $|Z|_i = 0 = |Z|_j$
6. $|Z|_k \in \delta_0$
7. $Z = z_1 + jz_2$ ise ${z_1}^2 + {z_2}^2 = 0$ dır.
8. $Z = \zeta_1 + i\zeta_2$ ise ${\zeta_1}^2 + {\zeta_2}^2 = 0$ dır.

2.7 Bikompleks Sayıların İdempotent Gösterimi

Herhangi bir halkada, karesi kendisine eşit olan elemanlara idempotent elemanlar denir. Bikompleks sayılarda bazı hesaplamaların kolayca yapılabilmesi için idempotent gösterim kullanılır. Bikompleks sayılar kümesinin idempotent elemanları,

$$e = \frac{1+ij}{2}, \qquad e^{+} = \frac{1-ij}{2}$$

bikompleks sayılarıdır. Burada, $e^2 = e$ ve $(e^{+})^2 = e^{+}$ olduğu kolayca görülür. $ee^{+} = 0$ özelliğinden e ve e^{+} her ikisi de sıfır bölendir. Ayrıca

$$e + e^{+} = 1$$

ve

$$e - e^{+} = ij$$

olur.

Sonuç 2.7.1 e ve e^{+} idempotent elemanları aşağıdaki özelliklere sahiptir:

$$ie = -je, \qquad ie^{+} = je^{+}$$

$$ke = e, \qquad ke^{+} = -e^{+}$$

İdempotent gösterim $\mathbb{C}$ de yoktur. Herhangi bir $Z = z_1 + jz_2 \in \mathbb{BC}$ için Z idempotent gösterimi aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} Z = z_1 + jz_2 &= \frac{z_1 - iz_2 + z_1 + iz_2}{2} + j\frac{z_2 + iz_1 + z_2 - iz_1}{2} \\ &= \frac{z_1 - iz_2}{2} + \frac{z_1 + iz_2}{2} + ij\frac{z_1 - iz_2}{2} - ij\frac{z_1 + iz_2}{2} \\ &= (z_1 - iz_2)\frac{1 + ij}{2} + (z_1 + iz_2)\frac{1 - ij}{2} \end{aligned}$$

öyle ki

$$Z = \beta_1 e + \beta_2 e^{+}$$

olur. Burada $\beta_1 = z_1 - iz_2$ ve $\beta_2 = z_1 + iz_2$, $\mathbb{C}(i)$ de kompleks sayılardır.

$Z = \beta_1 e + \beta_2 e^{+}$ formülüne Z bikompleks sayısının $\mathbb{C}(i) -$ idempotent gösterimi denir. β_1 ve β_2 $\in \mathbb{C}(i)$ olduğundan $\beta_1 e + \beta_2 e^{+} = 0$ dır ancak ve ancak $\beta_1 = 0$ ve $\beta_2 = 0$ dır.

Sonuç 2.7.2 Z bikompleks sayısının idempotent gösterimi bir tektir. Gerçekten, $Z \neq 0$ öyleki Z nin iki tane idempotent gösterimi var olsun.

$$Z = \beta_1 e + \beta_2 e^{+} = \beta_1{}' e + \beta_2{}' e^{+}$$

ise,

$(\beta_1 - \beta_1{}')e + (\beta_2 - \beta_2{}')e^{+} = 0$ ve burada $\beta_1 = \beta_1{}'$ ve $\beta_2 = \beta_2{}'$ olmalıdır. Dolayısıyla idempotent gösterim bir tektir.

Aşağıdaki önerme, tüm cebirsel işlemlerde bikompleks sayıların idempotent gösteriminin avantajlı olduğunu gösterir.

Önerme 2.7.1 Bikompleks sayıların toplama ve çarpma işlemi idempotent gösterimine göre terim terim yapılabilir:

Yani; $Z = \beta_1 e + \beta_2 e^+$ ve $W = \gamma_1 e + \gamma_2 e^+$

olsun o zaman;

$$Z + W = (\beta_1 + \gamma_1)e + (\beta_2 + \gamma_2)e^+$$

$$Z.W = (\beta_1.\gamma_1)e + (\beta_2.\gamma_2)e^+$$

$$Z^n = {\beta_1}^n e + {\beta_2}^n e^+$$

olur.

$Z = \beta_1 e + \beta_2 e^+$ idempotent gösterimindeki β_1 ve β_2 katsayıları, tek türlü tanımlı kompleks sayılardır. Z bikompleks sayısı $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{C}(j)$ olmak üzere $Z = \zeta_1 + i\zeta_2$ formunda olsun o zaman;

$$Z = \alpha_1 e + \alpha_2 e^+ = (\zeta_1 - j\zeta_2)e + (\zeta_1 + j\zeta_2)e^+$$

olur. Burada; $\alpha_1 = \zeta_1 - j\zeta_2$ ve $\alpha_1 = \zeta_1 + j\zeta_2$, $\mathbb{C}(j)$ de kompleks sayılardır.

Böylece görülür ki; her bikompleks sayı, kompleks katsayılı iki idempotent gösterime sahiptir. Bu gösterimden biri $\mathbb{C}(i)$ den, diğeri $\mathbb{C}(j)$ den katsayılıdır:

$$Z = \beta_1 e + \beta_2 e^+ = \alpha_1 e + \alpha_2 e^+$$

olmak üzere, bu gösterimler arasında ilişki bulunur; $Z = \beta_1 e + \beta_2 e^+$ iken;

$$eZ = \beta_1 e^2 + \beta_2 e^+ e = \alpha_1 e^2 + \alpha_2 e^+ e$$

$$eZ = \beta_1 e = \alpha_1 e$$

ve

$$e^+ Z = \beta_1 e^+ e + \beta_2 (e^+)^2 = \alpha_1 e^+ e + \alpha_2 (e^+)^2$$

$$e^+ Z = \beta_2 e^+ = \alpha_2 e^+$$

olur.

Böylece, $\alpha_1 \neq \beta_1$ olup e ile çarpımları eşit olur.

$$\beta_1 e = \alpha_1 e \implies (\beta_1 - \alpha_1)e = 0$$

O zaman e ve $(\beta_1 - \alpha_1)$ sıfır bölendir. Aynı şekilde $\alpha_2 \neq \beta_2$ olup e^+ ile çarpımları da eşit olur.

$$\beta_2 e^+ = \alpha_2 e^+ \implies (\beta_2 - \alpha_2)e^+ = 0$$

O zaman e^+ ve $(\beta_2 - \alpha_2)$ sıfır bölendir. Öyle ki $\beta_1 - \alpha_1$ sıfır bölen olduğundan $\beta_1 - \alpha_1 = Ae^+$ yazılabilir. Çünkü $Ae^+ e = 0$ iken $A \in \mathbb{C}(i)$ ya da $A \in \mathbb{C}(j)$ dir.

$\beta_1 = c_1 + id_1$, $\beta_2 = c_2 + id_2$ alınırsa, o zaman

$$Z = \beta_1 e + \beta_2 e^+$$
$$Z = (c_1 + id_1)e + (c_2 + id_2)e^+$$
$$Z = c_1 e - jd_1 e + c_2 e^+ + jd_2 e^+$$
$$Z = (c_1 - jd_1)e + (c_2 + jd_2)e^+$$
$$Z = \alpha_1 e + \alpha_2 e^+$$

elde edilir. Burada $\alpha_1 = c_1 - jd_1$, $\alpha_2 = c_2 + jd_2$; böylece

$$\begin{aligned} \beta_1 - \alpha_1 &= c_1 + id_1 - c_1 + jd_1 = d_1(i + j) \\ &= id_1(1 - ij) \\ &= 2d_1 ie^+ = 2d_1 je^+ \end{aligned}$$

olur.

Örnek 2.7.1 $Z = (1 + i) + j(3 - 2i) = z_1 + jz_2$ olsun. Buradan;

$$\beta_1 = z_1 - iz_2, \quad \beta_1 = (1 + i) - i(3 - 2i) = -1 - 2i$$
$$\beta_2 = z_1 + iz_2, \quad \beta_2 = (1 + i) + i(3 - 2i) = 3 + 4i$$

olup Z nin birinci idempotent gösterimi;

$$Z = \beta_1 e + \beta_2 e^+ = (-1 - 2i)e + (3 + 4i)e^+$$

dır. Aynı bikompleks sayısı $\mathbb{C}(j)$ katsayılı olarak da yazılabilir:

$$Z = (1+3j) + i(1-2j) = \zeta_1 + i\zeta_2$$

$\alpha_1 = \zeta_1 - j\zeta_2$ ve $\alpha_2 = \zeta_1 + j\zeta_2$ olduğundan $\alpha_1 = -1 + 2j$ ve $\alpha_2 = 3 + 4j$

bulunur. Z nin ikinci idempotent gösterimi;

$$Z = \alpha_1 e + \alpha_2 e^+ = (-1+2j)e + (3+4j)e^+$$

biçimindedir. Böylece, bu durumda,

$\beta_1 = -1 - 2i = c_1 + id_1$ ve $\beta_2 = 3 + 4i = c_2 - id_2$

$\alpha_1 = -1 + 2j = c_1 - jd_1$ ve $\alpha_2 = 3 + 4j = c_2 + jd_2$

olup

$$\beta_1 - \alpha_1 = d_1(i+j)$$

bulunur. Buradan,

$$\beta_1 - \alpha_1 = -2(i+j) = -4ie^+ = -4je^+$$

olup $d_1 = -2$ elde edilir. Bu örnekteki d_1 diğeriyle aynıdır.

Eşlenik ve modül tanımlarının idempotent gösterimleri de yapılabilir.

$\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{C}(i)$ ve $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}(j)$ olmak üzere $Z = \beta_1 e + \beta_2 e^+ = \alpha_1 e + \alpha_2 e^+$ alınırsa

o zaman,

$$\bar{Z} = \overline{\beta_2} e + \overline{\beta_1} e^+ = \alpha_2 e + \alpha_1 e^+$$

$$Z^\dagger = \beta_2 e + \beta_1 e^+ = \alpha_2{}^\dagger e + \alpha_1{}^\dagger e^+$$

$$Z^* = \overline{\beta_1} e + \overline{\beta_2} e^+ = \alpha_1{}^\dagger e + \alpha_2{}^\dagger e^+$$

olur.

Böylece üç çeşit modül kareleri şöyle olur:

- i ye göre modül;

$$|Z|_i^{\,2} = Z\bar{Z}$$

$$|Z|_i^{\,2} = (\beta_1 e + \beta_2 e^+)\left(\overline{\beta_2} e + \overline{\beta_1} e^+\right)$$

$$|Z|_i^{\,2} = \beta_1 \overline{\beta_2} e + \overline{\beta_1 \overline{\beta_2}} e^+$$

$$|Z|_i^{\,2} = (\alpha_1 e + \alpha_2 e^+)(\alpha_2 e + \alpha_1 e^+)$$

$$|Z|_i^{\,2} = \alpha_1 \alpha_2 e + \alpha_1 \alpha_2 e^+ = \alpha_1 \alpha_2 \ \in \mathbb{C}(j)$$

- j ye göre modül;

$$|Z|_j^{\,2} = ZZ^\dagger$$

$$|Z|_j^{\,2} = (\beta_1 e + \beta_2 e^+)(\beta_2\, e + \beta_1 e^+)$$

$$|Z|_j^{\,2} = \beta_1 \beta_2 e + \beta_1 \beta_2 e^+ = \beta_1 \beta_2$$

$$|Z|_j^{\,2} = (\alpha_1 e + \alpha_2 e^+)({\alpha_2}^\dagger e + {\alpha_1}^\dagger e^+)$$

$$|Z|_j^{\,2} = \alpha_1 {\alpha_2}^\dagger e + (\alpha_1 {\alpha_2}^\dagger)^\dagger e^+ \in \mathbb{C}(i)$$

- k ya göre modül;

$$|Z|_k^{\,2} = ZZ^*$$

$$|Z|_k^{\,2} = (\beta_1 e + \beta_2 e^+)\left(\overline{\beta_1} e + \overline{\beta_2} e^+\right)$$

$$|Z|_k^{\,2} = \beta_1 \overline{\beta_1} e + \beta_2 \overline{\beta_2} e^+ = |\beta_1|^2 e + |\beta_2|^2 e^+$$

$$|Z|_k^{\,2} = (\alpha_1 e + \alpha_2 e^+)({\alpha_1}^\dagger e + {\alpha_2}^\dagger e^+)$$

$$|Z|_k^{\,2} = \alpha_1 {\alpha_1}^\dagger e + \alpha_2 {\alpha_2}^\dagger e^+ = |\alpha_1|^2 e + |\alpha_2|^2 e^+ \ \in \mathbb{D}$$

yazılabilir. $|Z|_k^{\,2}$ formülünde idempotent katsayılar, negatif olmayan katsayılardır. Aslında bu özellik negatif olmayan hiperbolik sayıların karakteristik bir özelliğidir.

$\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{C}(i)$ ve $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}(j)$ iken $Z = \beta_1 e + \beta_2 e^+ = \alpha_1 e + \alpha_2 e^+$ olup

$$|Z| = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{|\beta_1|^2 + |\beta_2|^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2}$$

olur.

Teorem 2.7.1 $Z \neq 0$ bikompleks sayı olsun. $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{C}(i)$ ve $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}(j)$ iken $Z = \beta_1 e + \beta_2 e^+ = \alpha_1 e + \alpha_2 e^+$ elemanı için aşağıdakiler denktir (Luna 2015).

1. Z terslenebilirdir.
2. $\beta_1 \neq 0$ ve $\beta_2 \neq 0$ dır.
3. $\alpha_1 \neq 0$ ve $\alpha_2 \neq 0$ dır.

Z nin tersi,

$$Z^{-1} = {\beta_1}^{-1} e + {\beta_2}^{-1} e^+ = {\alpha_1}^{-1} e + {\alpha_2}^{-1} e^+$$

ile verilir.

İdempotent ayrışımına göre, bikompleks sayıların sıfır bölenleri için ikinci bir tanım yapılabilir.

Sonuç 2.7.3 $Z \neq 0$ bikompleks sayı olsun. $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{C}(i)$ ve $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}(j)$ iken $Z = \beta_1 e + \beta_2 e^+ = \alpha_1 e + \alpha_2 e^+$ sayısı için aşağıdakiler doğrudur (Luna 2015).

1. Z sıfır bölendir.
2. $\beta_1 = 0$ ve $\beta_2 \neq 0$ ya da $\beta_1 \neq 0$ ve $\beta_2 = 0$ dır.
3. $\alpha_1 = 0$ ve $\alpha_2 \neq 0$ ya da $\alpha_1 \neq 0$ ve $\alpha_2 \neq 0$ dır.

Yani, herhangi bir sıfır bölen, aşağıdaki formlardan birine göre yazılabilir:

$$Z = \beta_1 e; \quad \beta_1 \in \mathbb{C}(i) \setminus \{0\}$$

$$Z = \beta_2 e^+; \quad \beta_2 \in \mathbb{C}(i) \setminus \{0\}$$

$$Z = \alpha_1 e; \quad \alpha_1 \in \mathbb{C}(j) \setminus \{0\}$$

$$Z = \alpha_2 e^+; \quad \alpha_2 \in \mathbb{C}(j) \setminus \{0\}$$

Ayrıca, 0 ve 1 aşikar idempotent elemanlardır.

Şimdi, e ve e^+ dan başka bikompleks sayılar kümesinde başka idempotent eleman varlığına bakılırsa; β_1 ve β_2 kompleks katsayıları $\mathbb{C}(i)$ de olup $Z = \beta_1 e + \beta_2 e^+$ bikompeks sayısının idempotent elemanları olduğu varsayılırsa,

o zaman $Z^2 = Z$ eşitliğinden;

$$\beta_1{}^2 e + \beta_2{}^2 e^+ = \beta_1 e + \beta_2 e^+$$

yazılır. Bu durumda,

$$\beta_1{}^2 = \beta_1 \text{ ve } \beta_2{}^2 = \beta_2$$

elde edilir.

Bu ise $\beta_1 = \{0,1\}$ ve $\beta_2 = \{0,1\}$ olması demektir.

Böylece, olası tüm durumlar birleştirilirse bikompleks sayılar kümesinde en fazla 4 tane farklı idempotent eleman vardır, ve bu elemanlar aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$Z_1 = 0e + 0e^+ = 0$$

$$Z_2 = 1e + 1e^+ = 1$$

$$Z_3 = 1e + 0e^+ = e$$

$$Z_4 = 0e + 1e^+ = e^+$$

Böylece bikompleks sayılar kümesinde aşikar idempotent elemanlardan başka e ve e^+ vardır.

Sonuç 2.7.4 $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{C}(i)$ olup $Z = \beta_1 e + \beta_2 e^+$ ve $Z^\dagger = \beta_2 e + \beta_1 e^+$ gösterimleri bikompleks sayısının idempotent bileşenlerini bikompleks sayının kendisi ile ifade edilmesine izin verir (Luna 2015).

Gerçekten; β_1, β_2 sayıları aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\beta_1 = \beta_1 e + \beta_1 e^+ = Ze + Z^\dagger e^+$$

$$\beta_2 = \beta_2 e^+ + \beta_2 e = Ze^+ + Z^\dagger e$$

olup Z yi, $\mathbb{C}(j)$ den katsayılarla yazarsak, $Z = \gamma_1 e + \gamma_2 e^+$ iken,

$$\gamma_1 = \gamma_1 e + \gamma_1 e^+ = Ze + \bar{Z} e^+$$

$$\gamma_2 = \gamma_2 e^+ + \gamma_2 e = \bar{Z} e + Ze^+$$

yazılabilir.

2.8 Bikompleks Sayıların Çarpımı ve Öklid Normu

Herhangi Z, W bikompleks sayıları için,

$$|Z.W| \leq \sqrt{2}|Z|.|W|$$

eşitliğinin var olduğu biliniyor.

Dikkat edilirse bu eşitsizlik için $Z = e,\ W = e$ alınırsa

$$|e.e| = |e| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ve

$$\sqrt{2}|e|.|e| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

olduğu görülür.

Önerme 2.8.1 $U = u_1 + ju_2$, Z bikompleks sayıları $\mathbb{C}(i)$, $\mathbb{C}(j)$ ya da $\mathbb{D}$ kümesinde ise, o zaman,

a. $Z \in \mathbb{C}(i)$ ya da $Z \in \mathbb{C}(j)$ iken $|Z.U| = |Z|.|U|$ olur.

b. $Z = x_1 + ky_2 \in \mathbb{D}$; $x_1, y_2 \in \mathbb{R}$ iken genelde

$$|Z.U| \neq |Z|.|U|$$

dır. Kısaca;

$$|Z.U|^2 = |Z|^2.|U|^2 + 4x_1y_1\mathbb{Re}(iu_1\overline{u_2})$$

olur (Luna 2015).

İspat:

a. $Z = z_1 \in \mathbb{C}(i)$ ve $U = u_1 + ju_2 = (u_1 - iu_2)e + (u_1 + iu_2)e^+$

olsun. O zaman;

$$|Z.U|^2 = |z_1(u_1 + ju_2)|^2 = |(z_1u_1) + j(z_1u_2)|^2$$

$$|Z.U|^2 = |z_1u_1|^2 + |z_1u_2|^2 = |z_1|^2.|U|^2 = |Z|^2.|U|^2$$

olur. Burada, kompleks sayının Öklid normunun modülüne eşit olduğunu kullanıldı.

Şimdi;

$Z = x_1 + jx_2 = (x_1 - ix_2)e + (x_1 + ix_2)e^+ \in \mathbb{C}(j)$ iken,

$$|Z.U|^2 = \left|\left((x_1 - ix_2)e + (x_1 + ix_2)e^+\right).((u_1 - iu_2)e + (u_1 + iu_2)e^+)\right|^2$$

$$|Z.U|^2 = |(x_1 - ix_2)(u_1 - iu_2)e + (x_1 + ix_2)(u_1 + iu_2)e^+|^2$$

$$|Z.U|^2 = \frac{1}{2}(|x_1 - ix_2|^2.|u_1 - iu_2|^2 + |x_1 + ix_2|^2.|u_1 + iu_2|^2$$

$$|Z.U|^2 = |Z|^2.|U|^2$$

elde edilir.

b. Son olarak,

$$Z = x_1 + ijy_2 = (x_1 + y_2)e + (x_1 - y_2)e^+ \in \mathbb{D}$$

olsun. O zaman,

$$|Z.U|^2 = |(x_1 + ijy_2)(u_1 + ju_2)|^2$$

$$|Z.U|^2 = |(x_1 + y_2)(u_1 - iu_2)e + (x_1 - y_2)(u_1 + iu_2)e^+|^2$$

$$|Z.U|^2 = \frac{1}{2}((x_1 + y_2)^2.|u_1 - iu_2|^2 + (x_1 - y_2)^2.|u_1 + iu_2|^2)$$

$$|Z.U|^2 = |Z|^2.|U|^2 + 4x_1y_2\mathbb{Re}(iu_1\overline{u_2})$$

elde edilir. ■

Aşağıdaki önermede çarpımın Öklid normu ile Öklid normların çarpımlarının eşit olması için Z çarpımlarının bazı sınıfları incelendi.

Önerme 2.8.2 İki bikompleks sayı $Z = \beta_1 e + \beta_2 e^+$ ve $W = \gamma_1 e + \gamma_2 e^+$ olsun. O zaman,

$|Z.W| = |Z|.|W|$ ancak ve ancak $|\beta_1| = |\beta_2|$ ya da $|\gamma_1| = |\gamma_2|$ ya da ikisi de doğrudur (Luna 2015).

İspat:

$$Z.W = \beta_1\gamma_1 e + \beta_2\gamma_2 e^+$$

$$|Z.W|^2 = \frac{1}{2}(|\beta_1\gamma_1|^2 + |\beta_2\gamma_2|^2)$$

$$|Z|^2.|W|^2 = \frac{1}{4}(|\beta_1|^2 + |\beta_2|^2).(|\gamma_1|^2 + |\gamma_2|^2)$$

$$(|\beta_1|^2 - |\beta_2|^2).(\,|\gamma_1|^2 - |\gamma_2|^2) = 0$$

elde edilir. ■

3. BİKOMPLEKS SAYILAR KÜMESİNİN CEBİRSEL YAPILARI

3.1 Bikompleks Sayılar Halkası

Bikompleks sayıların toplama ve çarpma işlemleri, sırasıyla, karşılıklı elemanların toplanması ve çarpılmasıyla bulunur.

Teorem 3.1.1 Bikompleks sayılar kümesi toplama işlemine göre bir gruptur.

İspat: $\mathbb{BC} = \{Z = z_1 + jz_2 |\ z_1, z_2 \in \mathbb{C}, j^2 = -1\}$ bikompleks sayılar kümesi üzerinde tanımlanan, $\forall\, Z, W, V \in \mathbb{BC}$ için,

$$+: \ \mathbb{BC} \times \mathbb{BC} \longrightarrow \mathbb{BC}$$

işleminin aşağıdaki özellikleri sağladığı kolayca görülür:

1. $Z + W \in \mathbb{BC}$ (kapalılık özelliği)
2. $(Z + W) + V = Z + (W + V)$ (birleşme özelliği)
3. $\varepsilon + Z = Z + \varepsilon = Z \ \Longrightarrow \exists\, \varepsilon \in \mathbb{BC}$ ($\varepsilon = 0 + j0 = 0$ birim eleman özelliği)
4. $Z + (-Z) = (-Z) + Z = \varepsilon \Longrightarrow \exists\, (-Z) \in \mathbb{BC}$ (ters eleman özelliği)

Dolayısıyla $(\mathbb{BC}, +)$ cebirsel yapısı bir grup olur. Ayrıca,

5. $Z + W = W + Z$

olduğu için, $(\mathbb{BC}, +)$ yapısı bir değişmeli gruptur.

Teorem 3.1.2 Bikompleks sayılar kümesi bir halkadır.

İspat: $(\mathbb{BC}, +)$ değişmeli grup iken $\mathbb{BC}$ üzerinde tanımlanan,

$$\cdot: \ \mathbb{BC} \times \mathbb{BC} \longrightarrow \mathbb{BC}$$

işleminde, $\forall\, Z, W, V \in \mathbb{BC}$ için,

1. $W.Z \in \mathbb{BC}$ (kapalılık özelliği)
2. $Z.(W.V) = (Z.W).V$ (birleşme özelliği)
3. $Z.(W + V) = Z.W + Z.V$
   $(W + V).Z = W.Z + V.Z$ (dağılma özellikleri)

özellikleri sağlandığı için $(\mathbb{BC},+,\ \cdot\ )$ yapısı bir halkadır. Ayrıca,

4. $Z.W = W.Z$

olduğundan $(\mathbb{BC},+,\ \cdot\ )$ yapısı bir değişmeli halkadır.

Teorem 3.1.3 Bikompleks sayılar kümesi bir cisim değildir.

İspat: $(\mathbb{BC},+)$ değişmeli grubunun birim elemanı $\varepsilon = 0 + j0 = 0$ olmak üzere,

$$\mathbb{BC}^* = \mathbb{BC} - \{\varepsilon\}$$

olsun. $\mathbb{BC}^*$ kümesi üzerinde tanımlanan, her $Z, W, V \in \mathbb{BC}^*$ için,

$$\cdot : \ \mathbb{BC}^* \times \mathbb{BC}^* \longrightarrow \mathbb{BC}^*$$

işlemi kapalı ve birleşmelidir. Ayrıca,

$$Z.\delta = \delta.Z = Z \Longrightarrow \exists\, \delta \in \mathbb{BC}^*, \qquad (\delta = 1 + j0)$$

birim elemanlı olup,

$$Z.Z^{-1} = Z^{-1}Z = \delta \Longrightarrow \exists\, Z^{-1} \in \mathbb{BC}^*$$

eşitliğinin sağlanabilmesi için; $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ iken her $Z = z_1 + jz_2 \in \mathbb{BC}$ sayısının tersinin varlığı, yani

$$Z^{-1} = \frac{1}{Z} = \frac{1}{z_1 + jz_2} = \frac{z_1 - jz_2}{{z_1}^2 + {z_2}^2}$$

eşitliğinde gerekli işlemler yapılırsa,

$$Z^{-1} = \frac{1}{Z} = \frac{(x_1 + iy_1) - j(x_2 + iy_2)}{(x_1 + iy_1)^2 + (x_2 + iy_2)^2}$$

$$Z^{-1} = \frac{(x_1 + iy_1) - j(x_2 + iy_2)}{({x_1}^2 - {y_1}^2 + {x_2}^2 - {y_2}^2) + 2i(x_1y_1 + x_2y_2)}$$

bulunur. Bu eşitlikte özel olarak $z_1 = 1 + i,\quad z_2 = -1 + i$ alınırsa,

$$Z^{-1} = \frac{1}{Z}$$

tanımlı değildir. Dolayısıyla, $(\mathbb{BC}, +, .)$ yapısı bir cisim değildir.

Teorem 3.1.4 Bikompleks sayılar kümesi, reel sayılar cismi üzerinde bir vektör uzayıdır.

İspat: Her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ve $\forall\, Z, W \in \mathbb{BC}$ için,

$$\cdot : \ \mathbb{R} \times \mathbb{BC} \longrightarrow \mathbb{BC}$$

$$(\alpha, Z) \quad \longrightarrow \quad \alpha Z = \alpha(x_1 + iy_1 + jx_2 + ky_2)$$

fonksiyonu için aşağıdaki eşitliklerin doğru olduğu kolayca görülebilir.

$i.\ \alpha(Z + W) = \alpha Z + \alpha W$

$ii.\ (\alpha + \beta)Z = \alpha Z + \beta Z$

$iii.\ \alpha(\beta Z) = (\alpha\beta)Z$

$iv.\ Z = Z.1 = Z$

Dolayısıyla, bikompleks sayılar kümesi bir vektör uzaydır ve $\{1, i, j, k\}$ kümesi de $\mathbb{BC}$ nin $\mathbb{R}$ cismi üzerindeki dört boyutlu standart bazıdır.

Teorem 3.1.5 Bikompleks sayılar kümesi, kompleks sayılar cismi üzerinde de bir vektör uzaydır.

İspat: Benzer şekilde ispatlanır.

$\{1, i\}$ kümesi $\mathbb{BC}$ uzayının $\mathbb{C}$ cismi üzerindeki iki boyutlu standart bazıdır. Bilindiği gibi halka teoride terslenebilir elemanlara birimsel denir ve genel olarak sıfır bölenlerin ve birim olmayan elemanların kümesi aynı olmak zorunda değildir. Bikompleks sayılar halkasındaki birim olmayan elamanlar sıfır bölenler ile çakışır. Kısacası, birim olmayan elamanlardan sıfır bölenleri çıkarırsak geri kalan elemanlar sıfırdır. Diğer bir deyişle, $\mathbb{BC}$ deki terslenebilir elemanların kümesi $\mathbb{BC}^{-1}$ ile gösterilirse ve δ sıfır bölenler kümesi olmak üzere, $\mathbb{BC}$ kümesi aşağıdaki ayrışıma sahip olur.

$$\mathbb{BC} = \mathbb{BC}^{-1} \cup \delta \cup \{0\}$$

Herhangi aşikar olmayan bir halkada olduğu gibi, $\mathbb{BC}$ halkasının birden çok ideali vardır. Bunlardan ikisi aşağıdaki gibidir:

$$\mathbb{BC}_e = \mathbb{BC}e \text{ ve } \mathbb{BC}_{e^+} = \mathbb{BC}e^+$$

Bu ideallerin önemli özellikleri aşağıdaki gibi sıralanabilir.

$$\mathbb{BC}_e \cap \mathbb{BC}_{e^+} = \{0\}$$

olup,

$$\mathbb{BC}_e + \mathbb{BC}_{e^+} = \mathbb{BC}$$

dır. Ayrıca,

$$e\mathbb{BC}_{e^+} = 0, \quad e^+\mathbb{BC}_e = 0$$

yazılabilir.

3.2 Lineer Uzaylar ve $\mathbb{BC}$ Uzayındaki Modüller

Bilindiği gibi, $S \leq R$ yani, R nin alt halkası S iken, R halkası S üzerinde bir modüldür. Bu durumda $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}(i)$, $\mathbb{C}(j)$ ve $\mathbb{D}$ kümeleri $\mathbb{BC}$ nin alt halkaları olur. Dolayısıyla, $\mathbb{BC}$ kümesi bu alt kümeler üzerinde modüldür. Üstelik $\mathbb{BC}$ kümesi, kendisi üzerinde de bir modüldür.

$\mathbb{R}, \mathbb{C}(i)$ ve $\mathbb{C}(j)$ kümeleri birer cisim olduğundan, $\mathbb{BC}$ kümesi, sırasıyla, bir reel lineer uzaydır, $\mathbb{C}(i)$ $-$kompleks lineer uzay, $\mathbb{C}(j)$ $-$kompleks lineer uzay olur. Dolayısıyla, her bir $Z = x_1 + y_1 i + x_2 j + y_2 k \in \mathbb{BC}$ için,

$$(x_1 + y_1 i + x_2 j + y_2 k) \longmapsto (x_1, y_1, x_2, y_2) \in \mathbb{R}^4 \qquad (3.2.1)$$

dönüşümü, reel uzayların bir izomorfizmidir ve bu dönüşüm $1, i, j, k$ bikompleks sayılarını, $\mathbb{R}^4$ nin standart bazına dönüştürür. $Z \in \mathbb{BC}$ elemanı için,

$$Z = (x_1 + y_1 i) + j(x_2 + i y_2) = z_1 + j z_2$$

olup, $\mathbb{BC}$ kümesinin elemanları

$$Z = z_1 + j z_2 \longmapsto (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2(i) \qquad (3.2.2)$$

yazılabildiğinden $\mathbb{BC}$ uzayı $\mathbb{C}(i)-$ lineer uzayı olur. Bu durumdayken 1 ve j bikompleks sayıları, $\mathbb{C}^2(i)$ nin standart bazına resmedilir ve $\mathbb{R}^4$ ile $\mathbb{C}^2(i)$ arasında aşağıdaki izomorfizm yazılabilir:

$$(x_1, y_1, x_2, y_2) \longmapsto (x_1 + i y_1, x_2 + i y_2) \in \mathbb{C}^2(i) \qquad (3.2.3)$$

$\mathbb{BC}$ ye bir $\mathbb{C}^2(j)$ $-$lineer uzayı olarak bakılırsa ve

$$(x_1 + j x_2) + i(y_1 + j y_2) = \zeta_1 + i \zeta_2$$

eşitliği kullanılırsa,

$$Z = \zeta_1 + i \zeta_2 \longmapsto (\zeta_1, \zeta_2) \in \mathbb{C}^2(j) \qquad (3.2.4)$$

olur. Bu izomorfizm 1 ve i bikompleks sayılarını $\mathbb{C}^2(j)$ deki standart baza götürür ve $\mathbb{R}^4$ ve $\mathbb{C}^2(j)$ arasında

$$(x_1, y_1, x_2, y_2) \longmapsto (x_1 + jx_2, y_1 + jy_2) \in \mathbb{C}^2(j) \tag{3.2.5}$$

izomorfizmi tanımlanabilir. Bu izomorfizmaların farklı olduğu açıktır. Bu durum, yine $\mathbb{BC}$ uzayında $\mathbb{C}^2(i)$ ve $\mathbb{C}^2(j)$ kompleks kümelerinin farklı rolleri olduğunu gösterir. $\mathbb{BC}$ uzayına $\mathbb{C}(i)$ ya da $\mathbb{C}(j)$ lineer uzayları olarak bakıldığında bir fark daha göze çarpar; mesela $\{1, i\}$ kümesi, $\mathbb{BC}$ uzayına,$\mathbb{C}(j)$ $-$lineer uzay olarak bakıldığında lineer bağımsızdır, fakat $\mathbb{BC}$ ye $\mathbb{C}(i)$ $-$lineer uzay olarak bakıldığında aynı küme lineer bağımlıdır.

Ayrıca, $Z = (x_1 + iy_1) + k(y_2 - ix_2) = \omega_1 + k\omega_2$ olduğundan, $\mathbb{BC}$ uzayı ile $\mathbb{C}^2(i)$ arasında bir başka $\mathbb{C}(i)$ $-$ lineer izomorfizmi de vardır:

$$Z = (x_1 + iy_1) + k(y_2 - ix_2) = \omega_1 + k\omega_2 \longmapsto (\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{C}^2(i) \tag{3.2.6}$$

(3.2.2) ve (3.2.6) eşitliklerinde izomorfizmler arasında bir ilişki vardır: (3.2.2) eşitliğinde izomorfizma $1, j$ bikompleks sayılarını $\mathbb{C}^2(i)$ nin standart bazına resmeder, $k = ij$ bikompleks sayısı $(0, i) \in \mathbb{C}^2(i)$ elamanına bu izomorfizm ile resmedilir.

Böylece, standart baz $\{(1,0), (0, i)\}$ bazına dönüşür. Bu baz değişim matrisi aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$$

Yani, $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2(i)$ çifti, bu izomorfizma yardımıyla $(\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{C}^2(j)$ çiftine

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ -iz_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} \tag{3.2.7}$$

kuralı ile resmedilmiş olur. Dolayısıyla, bu eşitlik (3.2.2) ve (3.2.6) arasındaki kesin bağıntıyı verir. Benzer şekilde,

$$Z = (x_1 + x_2 j) + k(y_2 - y_1 j) = \omega_1 + k\omega_2$$

eşitliğinden yararlanarak, $\mathbb{C}^2(j)$ de aşağıdaki izomorfizma tanımlanabilir:

$$Z = (x_1 + jx_2) + k(y_2 - jy_1) = \omega_1 + k\omega_2 \longmapsto (\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{C}^2(j) \qquad (3.2.8)$$

Bu izomorfizm ile $\mathbb{BC} \ni Z = \zeta_1 + i\zeta_2 \longrightarrow (\zeta_1, \zeta_2) \in \mathbb{C}^2(j)$ izomorfimi arasında bir bağıntı vardır. Bu bağıntı, standart bazdan $\{(1,0), (0, j)\}$ bazına baz değişimi ile verilir. Bu baz değişiminin matrisi

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -j \end{bmatrix}$$

dir. Böylece $(\zeta_1, \zeta_2) \in \mathbb{C}^2(j)$ çifti ile $(\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{C}^2(j)$ çifti

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -j \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ -j\zeta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix}$$

biçiminde ilişkilidir. Dolayısıyla, $\mathbb{BC}$ uzayındaki farklı lineer yapılar incelenmiş olur.

$$\varphi : \mathbb{C}(i) \longrightarrow \mathbb{C}(j) \qquad (3.2.9)$$

$$x + iy \longrightarrow \varphi(x + iy) = x + jy$$

izomorfizmasının varlığına rağmen, arasındaki bazı farklılıklar vardır. $\mathbb{C}(i)$ ve $\mathbb{C}(j)$ deki katsayılar karşılaştırıldığında izomorfizma açıkça görülür. Yani;

$$Z = \beta_1 e + \beta_2 e^{+} = (c_1 + id_1)e + (c_2 + id_2)e^{+} \qquad (3.2.10)$$

$$Z = \alpha_1 e + \alpha_2 e^{+} = (c_1 - jd_1)e + (c_2 + jd_2)e^{+}$$

bu durum $\alpha_1 = (\varphi(\beta_1))^\dagger$ ve $\alpha_2 = \varphi(\beta_2)$ olduğunu gösterir.

Not: $\mathbb{BC}$ ile $\mathbb{C}^2(i)$ ve $\mathbb{C}^2(j)$ kompleks uzayları arasında tanımlanan izomorfizmler yardımıyla, idempotent gösterimler ikiden çok kompleks lineer uzay izomorfizması olduğunu belirtir.

Önerme 3.2.1

$$e = \frac{1+ij}{2}, \quad e^+ = \frac{1-ij}{2}$$

sıfır bölenleri, bir $\mathbb{C}(i) -$ lineer uzay ya da $\mathbb{C}(j) -$ lineer uzay olarak görüldüğünde $\mathbb{BC}$ uzayında lineer bağımsız olurlar (Luna,2015).

İspat: $Z \in \mathbb{BC}$, $\quad \mathbb{BC} \longrightarrow \mathbb{C}^2(i)$

$$Z = z_1 + jz_2 \longrightarrow (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2(i)$$

izomorfizmini kullanarak e ve e^+ bikompleks sayıları aşağıdaki sayılara resmedilir:

$$e \longrightarrow \left(\frac{1}{2}, \frac{i}{2}\right) = \frac{1}{2}(1, i)$$

$$e^+ \longrightarrow \left(\frac{1}{2}, \frac{-i}{2}\right) = \frac{1}{2}(1, -i)$$

$$\lambda_1(1, i) + \lambda_2(1, -i) = 0\,; \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}(i)$$

eşitliğine dikkat edilirse,

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 0$$

$$\lambda_1 - \lambda_2 = 0; \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

olur. Yani e ve e^+ lineer bağımsız olurlar.

$\mathbb{C}^2(j)$ için,

$$\mathbb{BC} \longrightarrow \mathbb{C}^2(j)$$

izomorfizmi içinde $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ olur. ■

$$Z=\beta_1 e+\beta_2 e^{+} \longmapsto (\beta_1,\beta_2)\in \mathbb{C}^2(i)$$

izomorfizmasını kullanarak kompleks lineer uzaylar arasında aşağıdaki izomorfizmalar tanımlanır:

$$Z=\beta_1 e+\beta_2 e^{+} \longmapsto (\beta_1,\beta_2)\in \mathbb{C}^2(i) \tag{3.2.11}$$

$$Z=\alpha_1 e+\alpha_2 e^{+} \longmapsto (\alpha_1,\alpha_2)\in \mathbb{C}^2(j) \tag{3.2.12}$$

(3.2.4) ve (3.2.12) arasındaki bağıntıların yanısıra (3.2.2) ve (3.2.11) arasındaki bağıntılar, standart bazdan $\mathbb{C}^2(i)$ deki

$$\left\{\left(\frac{1}{2},\frac{i}{2}\right),\left(\frac{1}{2},\frac{-i}{2}\right)\right\}$$

bazına ve $\mathbb{C}^2(j)$ deki

$$\left\{\left(\frac{1}{2},\frac{j}{2}\right),\left(\frac{1}{2},\frac{-j}{2}\right)\right\}$$

bazına, baz değişimi yardımıyla verilir.

Baz değişim matrisleri kullanarak, aşağıdaki bağıntılar elde edilir: $\mathbb{C}^2(i)$ uzayında

$$\begin{bmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} z_1-iz_2 \\ z_1+iz_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \tag{3.2.13}$$

ve $\mathbb{C}^2(j)$ uzayında

$$\begin{bmatrix} 1 & -j \\ 1 & j \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \zeta_1-j\zeta_2 \\ \zeta_1+j\zeta_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}$$

olur.

$\mathbb{D}^2=\mathbb{D}\times\mathbb{D}$ kümesine dikkat edilirse, karşılıklı elemanların toplamı ile $\mathbb{D}$ bir toplamsal abel grup olur. $\mathbb{D}$ de skaler ile çarpma yardımıyla $\mathbb{D}^2$ hiperbolik modül, yada $\mathbb{D}$ $-$modül olur.

Böylece;

$$Z=(x_1+ky_2)+i(y_1-kx_2)=\xi_1+i\xi_2$$

$$Z=(x_1+kx_2)+j(x_2-ky_1)=\omega_1+j\omega_2$$

formülleri aşağıdaki $\mathbb{D}$ −modül izomorfizmleri verir:

$$Z=(x_1+ky_2)+i(y_1-kx_2)=\xi_1+i\xi_2 \longmapsto (\xi_1,\xi_2) \in \mathbb{D}^2 \qquad (3.2.14)$$

ve

$$Z=(x_1+ky_2)+j(x_2-ky_1)=\mu_1+j\mu_2 \longmapsto (\mu_1,\mu_2) \in \mathbb{D}^2 \qquad (3.2.15)$$

dir.

3.3 $\mathbb{BC}$ Uzayının Cebir Yapısı

$\mathbb{BC}$ lineer uzayı, üç farklı yapıya sahiptir. Bu yapılar, $\mathbb{R}$ −lineer uzay, $\mathbb{C}(i)$ −lineer uzay ve $\mathbb{C}(j)$ − lineer uzaylarıdır. $\mathbb{BC}$ kümesi bir halka olduğundan, bu uzaylar cebir üretir, sırasıyla, reel cebir ve kompleks cebir olarak adlandırılırlar.

Önce, reel cebir incelenirse,

$$(x_1+iy_1+jx_2+ky_2) \longmapsto (x_1,y_1,x_2,y_2) \in \mathbb{R}^4$$

$$(s_1+it_1+js_2+kt_2) \longmapsto (s_1,t_1,s_2,t_2) \in \mathbb{R}^4$$

ile tanımlanan reel izomorfizmler yardımıyla, $\mathbb{R}^4$ de aşağıdaki çarpma tanımlanabilir:

$$\begin{aligned}&(x_1,y_1,x_2,y_2)(s_1,t_1,s_2,t_2)\\ &=(x_1s_1-y_1t_1-x_2s_2+y_2t_2,\ x_1t_1+y_1s_1-x_2t_2-y_2s_2,\\ &\qquad x_1s_2-y_1t_2+x_2s_1-y_2t_1,\ x_1t_2+y_1s_2+x_2t_1+y_2s_1)\end{aligned} \qquad (3.2.16)$$

Dolayısıyla bikompleks çarpımın özelliklerinden, (3.2.16) eşitliği değişmeli bir reel cebir yardımıyla $\mathbb{R}^4$ ü verir.

Üstelik,

$$x_1 + iy_1 + jx_2 + ky_2 \longmapsto (x_1, y_1, x_2, y_2)$$

izomorfizmi, bir reel cebir izomorfizmine genişler.

Bilindiği gibi, $\mathbb{R}^4$ de çarpma için çok fazla seçenek yoktur. (3.2.16) da verilen çarpım bu seçeneklerden biridir ve bu çarpım kuaterniyon çarpım ile karşılaştırılabilir.

Diğer iki kompleks cebir ele alınırsa;

$$z_1 + jz_2 \longmapsto (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2(i)$$

$$\omega_1 + k\omega_2 \longmapsto (\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{C}^2(i)$$

$$\beta_1 e + \beta_2 e^+ \longmapsto (\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{C}^2(i)$$

izomorfizmleri, $\mathbb{C}(i)$ $-$lineer uzay olan $\mathbb{C}^2(i)$ uzayı üzerinde tanıtmak için üç durum verir: Her (z_1, z_2), $(p_{1,}, p_2)$, (w_1, w_2), (θ_1, θ_2), (α_1, α_2) (c_1, c_2) için;

$$(z_1, z_2)(p_1, p_2) = (z_1 p_1 - z_2 p_2,\ \ z_1 p_2 + z_2 p_1)$$

$$(w_1, w_2)(\theta_1, \theta_2) = (w_1\theta_1 + w_2\theta_2,\ \ w_1\theta_2 + w_2\theta_1)$$

$$(a_1, a_2)(c_1, c_2) = (\alpha_1 c_1,\ \ \alpha_2 c_2)$$

yazılabilir. Bikompleks çarpımın özelliklerinden dolayı, $\mathbb{C}^2(i)$ üzerinde tanımlanan yukarıdaki çarpımların her biri değişmeli birer çarpımdır. $\mathbb{C}^2(i)$ lineer uzay olarak ele alındığında yukarıdaki üç formül gerçekten üç farklı çarpım tanımlar.

$\mathbb{C}^2(i)$ uzayı için $\{\ (1,0), (0,1)\ \}$, $\{\ (1,0), (0, i)\ \}$, $\left\{\ \left(\frac{1}{2}, \frac{i}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{-i}{2}\right)\ \right\}$ bazları ve

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ -iz_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 - iz_2 \\ z_1 + iz_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$$

eşitlikleri dikkate alınarak bu üç formülün $\mathbb{C}^2(i)$ üzerinde aynı çarpımı tanımladığı görülür. Mesela;

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ -iz_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix}$$

eşitliğinden

$$\omega_1 = z_1, \ \ \omega_2 = -iz_2$$

ve

$$\theta_1 = p_1, \ \ \theta_2 = -ip_2$$

olur. Böylece,

$$(w_1, w_2)\,(\theta_1, \theta_2) = (w_1\theta_1 + w_2\theta_2, \ w_1\theta_2 + w_2\theta_1)$$

$$= (z_1p_1 - z_2p_2, -i(z_1p_2 + z_2p_1))$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1p_1 - z_2p_2 \\ z_1p_2 + z_2p_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1\theta_1 + w_2\theta_2 \\ w_1\theta_2 + w_2\theta_1 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

Not: $\mathbb{C}^2(j)$ kompleks lineer uzayında da aynı işlemler takip edilir.

$\mathbb{BC}$ halkası hem kendi üzerinde hem de $\mathbb{D}$ üzerinde bir modüldür. Dolayısıyla, $\mathbb{BC}$ uzayı hem bir $\mathbb{D}-$cebir, hem de $\mathbb{BC}-$cebiri olur. $\mathbb{BC}$ cebiri, bir $\mathbb{D}-$cebir olan $\mathbb{D}^2$ cebirine izomorftur. Bu izomorfizmalar aşağıdaki gibidir:

$$\mathbb{BC} \ni Z = (x_1 + ky_2) + i(y_1 - kx_2) = \xi_1 + i\xi_2 \longmapsto (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{D}^2$$

ve

$$\mathbb{BC} \ni Z = (x_1 + ky_2) + j(x_2 - ky_1) = \mu_1 + j\mu_2 \longmapsto (\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{D}^2$$

dir.

3.4 Bikompleks Sayıların Matris Gösterimleri

$\mathbb{C}$ kümesindeki elemanların matris gösterimi

$$\begin{bmatrix} x & -y \\ y & x \end{bmatrix}$$

biçimindedir ve 2×2 tipindeki reel matrislerin kümesine izomorftur. Yani, $z \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$ olmak üzere

$$\phi_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \mapsto \begin{bmatrix} x & -y \\ y & x \end{bmatrix}$$

dönüşümü $\mathbb{C}$ ile $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ arasında, $\mathcal{A}_{\mathbb{C}} = \left\{ \mathcal{A} = \begin{bmatrix} x & -y \\ y & x \end{bmatrix} : \ x, y \in \mathbb{R} \right\}$, bir cisim izomorfizmasıdır. Ayrıca, bu matrisler çarpma işlemine göre değişmelidir ve $\mathcal{A} \neq 0$ iken $\mathcal{A}$ matrisinin tersi vardır.

$\phi_{\mathbb{C}}$ izomorfizm altında i sayısının matris temsili aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \mathrm{I}$$

dır. $Z = x + iy$ iken

$$\phi_{\mathbb{C}}(z) = \begin{bmatrix} x & -y \\ y & x \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = x\mathrm{I}_2 + y\mathrm{I}$$

burada I_2, 2×2 birim matristir. Z nin modülünün karesi, $\det \phi_{\mathbb{C}}(z)$ ile aynıdır. Yani,

$$|z|^2 = x^2 + y^2 = \det \phi_{\mathbb{C}}(z)$$

dır. Üstelik, $\phi_{\mathbb{C}}$ dönüşümü $\mathbb{C}$ cismini $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ kümesinin bir alt kümesine dönüştürür.

Benzer sonuçlar $\mathbb{BC}$ halkasına da uygulanabilir. Dolayısıyla, aşağıdaki dönüşüm $Z \in \mathbb{BC}$, $Z = z_1 + jz_2$ olmak üzere

$$\phi_{\mathbb{C}(i)} : \mathbb{BC} \mapsto \begin{bmatrix} z_1 & -z_2 \\ z_2 & z_1 \end{bmatrix}$$

bir halka izomorfizmi oluşturur ve elde edilen matrislerin kümesi

$$\mathcal{A}_{\mathbb{BC}} = \left\{ A = \begin{bmatrix} z_1 & -z_2 \\ z_2 & z_1 \end{bmatrix} : \ z_1, z_2 \in \mathbb{C}(i) \right\}$$

olarak yazılabilir.

Aşağıdaki eşitliklere dikkat edilirse,

$$\phi_{\mathbb{C}(i)}(i) = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} = i\mathrm{I}_2$$

$$\phi_{\mathbb{C}(i)}(j) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \tau$$

$$\phi_{\mathbb{C}(i)}(e) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{bmatrix} = \varepsilon$$

$$\phi_{\mathbb{C}(i)}(e^+) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix} = \varepsilon^+$$

olup, $Z = z_1 + jz_2$ bikompleks sayısının $\phi_{\mathbb{C}(i)}(Z)$ görüntüsü

$$\phi_{\mathbb{C}(i)}(Z) = z_1\mathrm{I}_2 + z_2\tau = \beta_1\varepsilon + \beta_2\varepsilon^+$$

biçiminde olur. Beklenildiği gibi, Z bikompleks sayısını $\mathbb{C}(j)$ $-$kompleks elemanlı ya da hiperbolik elemanlı matrislerle eşleyen iki benzer dönüşüm vardır:

$Z \in \mathbb{BC}$, $Z = \zeta_1 + i\zeta_2$ ve $Z = \xi_1 + i\xi_2$ olmak üzere

$$\phi_{\mathbb{C}(j)} : \mathbb{BC} \longmapsto \begin{bmatrix} \zeta_1 & -\zeta_2 \\ \zeta_2 & \zeta_1 \end{bmatrix}$$

ve

$$\phi_{\mathbb{D}} : \mathbb{BC} \longmapsto \begin{bmatrix} \xi_1 & -\xi_2 \\ \xi_2 & \xi_1 \end{bmatrix}$$

Sonuç olarak, bikompleks sayılar, 4×4 reel matrisler yardımıyla aşağıdaki gibi temsil edilebilir: $Z = x_1 + iy_1 + jx_2 + ky_2 \in \mathbb{BC}$ olmak üzere

$$\theta_{\mathbb{R}} : \mathbb{BC} \longrightarrow \begin{bmatrix} x_1 & -y_1 & -x_2 & y_2 \\ y_1 & x_1 & -y_2 & -x_2 \\ x_2 & -y_2 & x_1 & -y_1 \\ y_2 & x_2 & y_1 & x_1 \end{bmatrix}$$

biçimindedir.

Örnek 3.4.1 $Z = 1 + 2i + 3j + 5k$ bikompleks sayısının matris gösterimi

$$Z = \Big(\underbrace{1 + 2i}_{z_1}\Big) + \Big(\underbrace{3 + 5i}_{z_2}\Big)\, j$$

ve kompleks matris gösterimini kullanarak,

$$\begin{bmatrix} z_1 & -z_2 \\ z_2 & z_1 \end{bmatrix}$$

matrisi yardımıyla aşağıdaki eşitlikler yardımıyla yazılabilir:

$$z_1 = 1 + 2i \quad \rightarrow \quad z = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$z_2 = 3 + 5i \quad \rightarrow \quad w = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$-z_2 = -3 - 5i \quad \rightarrow \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -5 & -3 \end{bmatrix}$$

olup

$$Z = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & -5 & -3 \\ 3 & -5 & 1 & -2 \\ 5 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

biçiminde bulunur.

4×4 her matris, $\mathbb{R}^4$ üzerinde bir reel lineer dönüşüm belirler. $\mathbb{R}^4$ uzayına $\mathbb{BC}$ uzayı olarak bakıldığında, dönüşümlerin hepsi $\mathbb{BC}$-lineer dönüşüm olmaz. $\mathbb{BC}$-lineer dönüşümü temsil eden matrisler, $\phi_{\mathbb{R}}(Z)$ formuna sahip olur.

$\mathbb{BC}$ ile $\mathbb{R}^4$ arasında aşağıdaki eşleme mevcut olduğundan

$$Z = x_1 + iy_1 + jx_2 + ky_2 \leftrightarrow (x_1, y_1, x_2, y_2)$$

$\mathbb{BC}$ ile $\mathbb{C}^2$ arasında aşağıdaki iki eşleme yapılır:

$$Z = z_1 + jz_2 \leftrightarrow (z_1, z_2) = (x_1 + iy_1, x_2 + iy_2) \in \mathbb{C}^2(i) \leftrightarrow (x_1, y_1, x_2, y_2)$$

ve

$$Z = \zeta_1 + j\zeta_2 \leftrightarrow (\zeta_1, \zeta_2) = (x_1 + jx_2, y_1 + jy_2) \in \mathbb{C}^2(j) \leftrightarrow (x_1, x_2, y_1, y_2).$$

Bir $\mathbb{C}(i)$ −lineer dönüşümün olan

$$T: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4,\ \mathbb{R} -\text{lineer}$$

dönüşümüne dikkat edilirse, o zaman T dönüşümünün matrisi,

$$\begin{bmatrix} a & -b & c & -d \\ b & a & d & c \\ l & -m & u & -v \\ m & l & v & u \end{bmatrix}$$

biçiminde olur. Halbuki, T dönüşümü, $\mathbb{C}(j)-$ lineer dönüşümü olarak dikkate alınırsa, o zaman T dönüşümünün matrisi,

$$\begin{bmatrix} A & B & -E & -F \\ C & D & -G & -H \\ E & F & A & B \\ G & H & C & D \end{bmatrix}$$

biçiminde olur. Dolayısıyla, $\theta_{\mathbb{R}}(Z)$ matrisi hem bir $\mathbb{C}(i)$ −lineer dönüşümünü, hem de bir $\mathbb{C}(j)$ −lineer dönüşümünü temsil eder.

3.5 Bilineer Form ve İç Çarpım

$\mathbb{R}$ −reel lineer uzay üzerinde bilineer form aşağıdaki formülle verilir:

Her $x, y \in \mathbb{R}$ için,

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}}(x,y) = x.y$$

biçimindedir. Karşılık gelen reel kuadratik form

$$\mathcal{Q} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}(x,x) = x^2$$

biçimindedir ve bu $\mathbb{R}$ üzerinde Öklid metriği tanımlar. $\mathbb{C}$ uzayı, hem reel hem de kompleks uzay olarak alınabilir. $\mathbb{C}$ uzayı, reel lineer uzay olarak dikkate alındığında, yani $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ iken, bilineer form aşağıdaki gibi verilir: $z = x + iy,\ w = u + iv$ iken

$$\mathcal{B}_{\mathbb{C},\mathbb{R}}(z,w) = xu + yv$$

dır. Aslında bu, $\mathbb{R}^2$ deki standart iç çarpımdır. Karşılık gelen kuadratik form ise,

$$\mathcal{Q}_{\mathbb{C},\mathbb{R}}(z) = \mathcal{B}_{\mathbb{C},\mathbb{R}}(z,z) = x^2 + y^2$$

dır. Ve bu, $\mathbb{C}$ deki Öklid metriğini tanımlar.

$\mathbb{C}$ uzayı, kompleks lineer uzay olarak dikkate alındığında, bu uzay, aşağıdaki gibi, hem lineer hem eşlenik lineer forma sahiptir:

$$\mathcal{B}_{\mathbb{C},1}(z,w) = z.w$$

$$\mathcal{B}_{\mathbb{C},2}(z,w) = z.\overline{w}$$

Yukarıdaki formlardan ikincisi $\mathbb{C}$ uzayı üzerinde, kompleks değerli standart iç çarpımdır. Bu formlar, aşağıdaki kuadratik formları üretir:

$$\mathcal{Q}_{\mathbb{C},1}(z) = \mathcal{B}_{\mathbb{C},1}(z,z) = z^2$$

$$\mathcal{Q}_{\mathbb{C},2}(z) = \mathcal{B}_{\mathbb{C},2}(z,z) = |z|^2 = x^2 + y^2$$

Burada, $\mathcal{Q}_{\mathbb{C},2}(z) = \mathcal{Q}_{\mathbb{C},\mathbb{R}}(z)$ olup bu, $\mathbb{C}$ üzerinde Öklid metriğinin karesidir.

$\mathcal{B}_{\mathbb{C},1}$ ve $\mathcal{Q}_{\mathbb{C},1}$ formları matematiğin farklı alanlarında kullanılır. Fakat, $\mathcal{B}_{\mathbb{C},1}$ formu genelde iç çarpım olarak adlandırılmaz ve $\mathcal{Q}_{\mathbb{C},1}(z)$ klasik anlamda herhangi bir metrik tanımlamaz. Bu kavramlar bikompleks uzayda da dikkate alınabilir. $\mathbb{BC}$ üzerinde bir reel yapı olarak:

$$\mathbb{R}^4 = \{ (x_1, y_1, x_2, y_2) = Z \}$$

dikkate alınırsa, reel bilineer form aşağıdaki gibi olur:

$Z = (x_1 + iy_1) + j(x_2 + iy_2)$ ve $W = (u_1 + iv_1) + j(u_2 + iv_2)$ için,

$$\mathcal{B}_{\mathbb{BC},\mathbb{R}}(Z,W) = x_1u_1 + y_1v_1 + x_2u_2 + y_2v_2$$

Ki bu form, $\mathbb{R}^4$ üzerindeki standart iç çarpımdır. Karşılık gelen kuadratik form ise aşağıdaki gibidir:

$$\mathcal{Q}_{\mathbb{BC},\mathbb{R}}(Z) = \mathcal{B}_{\mathbb{BC},\mathbb{R}}(Z,Z) = {x_1}^2 + {y_1}^2 + {x_2}^2 + {y_2}^2$$

bu form, $\mathbb{BC}$ üzerinde Öklid metriği tanımlar.

$\mathbb{BC}$ kümesi, $\mathbb{C}(i) -$ kompleks lineer uzayı olarak dikkate alındığında, yani $\mathbb{BC} = \mathbb{C}^2(i)$ olduğunda, bu uzay aşağıdaki gibi hem $\mathbb{C}(i) -$ bilineer, hem de $\mathbb{C}(i) -$eşlenik lineer forma sahiptir:

$$\mathcal{B}_{\mathbb{BC};i,1}(Z,W) = z_1w_1 + z_2w_2 = \frac{1}{2}(ZW^{\dagger} + Z^{\dagger}W)$$

$$\mathcal{B}_{\mathbb{BC};\, i,2}(Z,W) = z_1\overline{w_1} + z_2\overline{w_2} = \frac{1}{2}(ZW^{*} + Z^{\dagger}\overline{W})$$

İkinci eşitlik, $\mathbb{C}^2(i)$ üzerinde, $\mathbb{C}(i) -$ değerli standart iç çarpımdır. Bu çarpımlar, sırasıyla aşağıdaki kuadratik formları üretir:

$$\mathcal{Q}_{\mathbb{BC};i,1}(Z) = \mathcal{B}_{\mathbb{BC};i,1}(Z,Z) = {z_1}^2 + {z_2}^2 = ZZ^{\dagger} = {|Z|_j}^2$$

ve

$$\mathcal{Q}_{\mathbb{BC};\, i,2}(Z) = \mathcal{B}_{\mathbb{BC};\, i,2}(Z,Z) = |z_1|^2 + |z_2|^2 = \frac{1}{2}(ZZ^{*} + Z^{\dagger}\bar{Z})$$

$$= \frac{1}{2}({|Z|_k}^2 + {\left|Z^{\dagger}\right|_k}^2) = \frac{1}{2}({|Z|_k}^2 + {|\bar{Z}|_k}^2)$$

burada $\mathcal{Q}_{\mathbb{BC};i,2}(Z) = \mathcal{Q}_{\mathbb{BC},\mathbb{R}}(Z)$, $\mathbb{C}^2$ de standart Öklid metriğinin karesidir. $\mathcal{B}_{\mathbb{BC};i,1}$ ve $\mathcal{Q}_{\mathbb{BC};i,1}$ formları kompleks Laplas teoride kullanılır. Fakat $\mathcal{B}_{\mathbb{BC};i,1}$, $\mathbb{BC}$ üzerinde bir iç çarpım olarak adlandırılmaz. Ve $\mathcal{Q}_{\mathbb{BC};i,1}$ klasik anlamda bir metrik tanımlamaz.

$\mathbb{BC}$ üzerindeki diğer kompleks yapılar, $\mathbb{BC} = \mathbb{C}^2(j)$ aynı şekilde elde edilir.

Bu durumlarda karşılık gelen kuadratik formları yazmak önemlidir:

$$\mathcal{Q}_{\mathbb{BC};\, j,1}(Z) = {\zeta_1}^2 + {\zeta_2}^2 = Z\bar{Z} = {|Z|_i}^2$$

ve

$$\mathcal{Q}_{\mathbb{BC};\, j,2}(Z) = |\zeta_1|^2 + |\zeta_2|^2 = \frac{1}{2}(ZZ^{*} + \bar{Z}Z^{\dagger})$$

$$= \frac{1}{2}\left({|Z|_k}^2 + {\left|Z^{\dagger}\right|_k}^2\right) = \frac{1}{2}\left({|Z|_k}^2 + {|\bar{Z}|_k}^2\right).$$

Burada ikinci eşitlik, $\mathcal{Q}_{\mathbb{BC};\, i,2}(Z)$ ile çakışır. Ve her ikisi de Öklid metriğinin karesine eşittir.

$\mathbb{BC}$ kümesi $\mathbb{D}^2$ olarak yorumlandığında durumlar farklıdır:

$$\mathcal{B}_{\mathbb{BC};\,\mathbb{D},1}(Z,W) = \xi_1\mu_1 + \xi_2\mu_2 = \frac{1}{2}(ZW^* + Z^*W)$$

ve

$$\mathcal{B}_{\mathbb{BC};\,\mathbb{D},2}(Z,W) = \xi_1{\mu_1}^{\diamond} + \xi_2{\mu_2}^{\diamond} = \frac{1}{2}(ZW^{\dagger} + Z^*\overline{W}) = \frac{1}{2}(Z\overline{W} + Z^*W^{\dagger})$$

formları önceki durumlara benzer fakat, her iki form $\mathbb{C}$ değil veya $\mathbb{R}$ de değil de, $\mathbb{D}$ kümesinde değer alır. Birincisi hiperbolik bilineer form, ikincisi de hiperbolik eşlenik lineer form olarak adlandırılır. Üstelik,

$$\mathcal{Q}_{\mathbb{BC};\,\mathbb{D},1}(\xi) = \mathcal{B}_{\mathbb{BC};\,\mathbb{D},1}(Z,Z) = {\xi_1}^2 + {\xi_2}^2 = ZZ^* = {|Z|_k}^2$$

ve

$$\mathcal{Q}_{\mathbb{BC};\,\mathbb{D},2}(\xi) = \mathcal{B}_{\mathbb{BC};\,\mathbb{D},2}(Z,Z) = \xi_1{\xi_1}^{\diamond} + \xi_2{\xi_2}^{\diamond}$$

$$= \frac{1}{2}(ZZ^{\dagger} + Z^*\bar{Z}) = \frac{1}{2}(Z\bar{Z} + Z^*Z^{\dagger})$$

$$= \frac{1}{2}\left({|Z|_j}^2 + {|Z^*|_i}^2\right) = \frac{1}{2}\left({|Z|_j}^2 + {|Z^*|_j}^2\right)$$

dır. Burada, $\mathcal{Q}_{\mathbb{BC};\mathbb{D},1}$ hiperbolik değerlidir ve $\mathcal{Q}_{\mathbb{BC};\,\mathbb{D},2}$ de reel değerlidir, fakat pozitif tanımlı değildir.

Sonuç olarak, $\mathbb{BC}$ uzayı, bir bikompleks modüldür yani kendi üzerinde modüldür ve bu aşağıdaki bilineer formunu verir;

$$\mathcal{B}_{\mathbb{BC}}(Z,W) = Z.W$$

Ayrıca, aşağıdaki üç bikompleks eşlenik lineer-tip formu verir:

$\mathcal{B}_{\mathbb{BC},\ bar}(Z,W) = Z.\overline{W}$, (— - eşlenik lineer form)

$\mathcal{B}_{\mathbb{BC},\ \dagger}(Z,W) = W.W^{\dagger}$, († - eşlenik lineer form)

$\mathcal{B}_{\mathbb{BC},\ *}(Z,W) = Z.W^*$, (∗ - eşlenik lineer form).

$\mathbb{R}$ −değerli kuadratik form olan

$$\mathcal{Q}_{\mathbb{C},2}(z) = x^2 + y^2$$

ye dikkat edilirse; $\mathcal{B}_{\mathbb{C},2}(z,z)$ ile bu form çakıştığından $\mathcal{Q}_{\mathbb{C},2}$ aşağıdaki gibi çarpanlarına ayrılır.

$$\mathcal{Q}_{\mathbb{C},2} = (x+iy)(x-iy) = z.\bar{z}$$

Bu eşitlik, kompleks sayıların kullanılmasının gerekliliğinin nedenlerinden biri olarak görülebilir. Reel−değerli ve pozitif tanımlı olan $\mathcal{Q}_{\mathbb{C},2}(z)$ kuadratik formu iki lineer formun çarpımı olarak yazılmak istenirse o zaman i imajiner birimi mecburen ortaya çıkar tüm $\mathbb{C}$ uzayını üretir.

Bikompleks sayılarla bağlantılı benzer bir düşünce şudur;

$\mathbb{C}(i)$ −değerli kuadratik forma dikkat edilirse,

$$\mathcal{Q}_{\mathbb{BC};\,i,1}(Z) = {z_1}^2 + {z_2}^2$$

ifadesi aşağıdaki gibi çarpanlara ayrılır:

$$\mathcal{Q}_{\mathbb{BC};\,i,1}(Z) = (z_1 + jz_2)(z_1 - jz_2) = Z.Z^{\dagger}$$

Burada, $\mathcal{Q}_{\mathbb{BC};\,i,1}$ in değerler kümesi, $\mathbb{C}(i)$ − bir − boyutludur ancak $\mathcal{Q}_{\mathbb{BC};\,i,1}$ in çarpanları $\mathbb{C}(i)$ −iki−boyutludur. Böylece, $\mathbb{BC}$ $\mathbb{C}(i)$ −cebiri aynı reel $\mathbb{C}$ cebirinin, reel kuadratik formdan elde edildiği gibi kompleks kuadratik formdan da elde edilir.

Dikkat edilirse, çarpanların bir boyutlu değil iki boyutlu olması önemlidir. Çünkü,

$${z_1}^2 + {z_2}^2 = (z_1 + iz_2)(z_1 - iz_2)$$

ifadesinin çarpanlarına ayrılması istenilen durumu karşılamıyor.

Başka bir sayı sisteminin değil fakat $\mathbb{BC}$ nin de aynı rolü oynayabileceği görülebilir.

Varsayılır ki,

$${z_1}^2 + {z_2}^2 = (az_1 + bz_2)(cz_1 + dz_2); \;\; z_1, z_2 \in \mathbb{C}(i)$$

eşitliğini sağlayacak şekilde $\mathbb{C}(i)$ −iki−boyutlu değişmeli cebiri var olsun.

Her z_1 ve z_2 ve a, b, c, d elemanları için,

$$z_1{}^2 + z_2{}^2 = acz_1{}^2 + bdz_2{}^2 + (ad + bc)z_1z_2$$

olur. Bu eşitlikten

$$ac = 1, \quad bd = 1, \ ad + bc = 0$$

yazılır.

Böylece, tüm katsayılar terslenebilir elemanlardır ve

$$c^{-1}d + d^{-1}c = 0 \text{ yani } (c^{-1}d)^2 = -1$$

olur. Dolayısıyla $j = c^{-1}d$ gösterimini kullanarak

$$j^2 = -1 \text{ ve } j^{-1} = -j$$

yazılır. Bu durumda çarpanlara ayırma aşağıdaki gibi olur.

$$z_1{}^2 + z_2{}^2 = (z_1 + jz_2)(z_1 - jz_2)$$

Böylece, 1 ile $j = \pm i$ yeni elemanı ile üretilen kompleks cebiri arandığında tam olarak $\mathbb{BC}$ ye ulaşılmış olunur.

Aynı methodla $\mathbb{C}(j)$ −değerli kuadratik form olan $\zeta_1{}^2 + \zeta_2{}^2$ ile başlanırsa aynı $\mathbb{BC}$ elde edilir.

Son olarak $\mathbb{D}$ − cebir $\mathbb{D}^2$ üzerinde hareket eden $\mathbb{D}$ − değerli kuadratik form olan $\xi_1{}^2 + \xi_2{}^2$ kuadratik form ile başlanırsa o zaman i ya da j imajiner birimlerinden her hangi biri çarpımın iki çarpana ayrılmasında ortaya çıkar.

4. BİKOMPLEKS POLİNOMLAR

$Z = z_1 + jz_2$, bikompleks değişkenli, n dereceli polinom

$$p(z) = \sum_{k=0}^{n} A_k Z^k$$

biçiminde yazılabilir. $C(i)$ −idempotent gösterimi yardımıyla, Z sayısı aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$Z = \beta_1 e + \beta_2 e^+$$

Burada $\beta_1 = z_1 - iz_2$ ve $\beta_2 = z_1 + jz_2$, Z bikompleks sayısının idempotent katsayılarıdır.

Polinomun katsayıları ise, A_k lar olup bu katsayılar $A_k = \gamma_k e + \delta_k e^+$ olarak yazılabilir.

$$Z^k = {\beta_1}^k e + {\beta_2}^k e^+$$

olduğundan, $p(z)$ polinomununu tekrar yazarsak,

$$p(z) = \sum_{k=0}^{n} (\gamma_k {\beta_1}^k) e + \sum_{k=0}^{n} (\delta_k \beta_2) e^+ = \theta(\beta_1) e + \varphi(\beta_2) e^+$$

biçiminde olur. Şimdi, S_1 ve S_2 ile $\emptyset$ ve φ fonksiyonlarının farklı köklerinin kümesi ve S ile p polinomunun köklerinin kümesi gösterilirse, o zaman

$$S = S_1 e + S_2 e^+$$

yazılır. Böylece, n dereceli $p(Z)$ bikompleks polinomunun köklerinin yapısı aşağıdaki üç durum ile açıklanabilir:

1. Hem $\emptyset$, hem de φ polinomları en az bir dereceli ve eğer

$$S_1 = \{\beta_{1,1}, \beta_{1,2}, \dots, \beta_{1,k}\} \text{ ve } S_2 = \{\beta_{2,1}, \beta_{2,2}, \dots, \beta_{2,l}\}$$

ise, o zaman p nin farklı köklerinin kümesi

$$S = \{Z_{s,t} = \beta_{1,s}\, e + +\beta_{2,t}\, e^{+} \mid s = 1, \dots, k \; ve \;\; t = 1, \dots, l\}$$

biçiminde verilir.

2. Eğer $\emptyset$ özdeş olarak sıfırsa, o zaman

$$S_1 = \mathbb{C} \quad \text{ve} \quad S_2 = \{\beta_{2,1}, \dots, \beta_{2,l}\}, \quad l \geq n$$

biçimindedir. Buna göre S kökler kümesi

$$S = \{Z_t = \lambda e + +\beta_{2,t}\, e^{+} \mid \lambda \in \mathbb{C}, \;\; t = 1, \dots, l\}$$

bulunur. Benzer olarak, eğer φ özdeş olarak sıfır ise, o zaman

$$S_2 = \mathbb{C} \text{ ve } S_1 = \{\beta_{1,1}, \dots, \beta_{1,k}\}, \;\; k \geq n$$

biçimindedir. Bu durumda;

$$S = \{Z_s = \beta_{1,s}\, e + \lambda e^{+} \mid \lambda \in \mathbb{C}, \qquad s = 1, \dots, k\}$$

bulunur.

3. $A_0 = \gamma_0 e + \delta_0 e^{+}$ hariç, tüm A_k katsayıları e (yada e^{+}) nın kompleks katları ise ki durumda $\delta_0 \neq 0$ (yada $\gamma_0 \neq 0$) demektir, p polinomunun kökü yoktur.

Örnek 4.1 $p(Z) = (1 + ji)Z^2 - (i - j)$ polinomunun kökleri aşağıdaki gibi bulunur:

$p(Z)$ polinomuna karşılık gelen farklı kökler kümesi

$$\theta(\beta_1) = 2({\beta_1}^2 - i), \;\; \varphi(\beta_2) = 0.$$

biçimindedir. Bu durumda p nin sıfırlarının kümesi:

$$S = \{\pm(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\ \frac{\sqrt{2}}{2})\ e +\ \lambda e^{+} |\ \lambda \in \mathbb{C}\}$$

olarak bulunur.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, ilk bölümde bikompleks cebir ile ilgili kısa bir tarihçe verilmiştir.

İkinci bölümde, bikompleks sayılar ile ilgili bazı temel bilgiler verilmiştir. Bikompleks sayılara karşılık gelen idempotent özellikler incelenmiştir.

Üçüncü bölümde, bikompleks cebir ile ilgili tanım ve teoremlere yer verildikten sonra bikompleks cebire ait matris gösterimlerine yer verilmiştir.

Dördüncü bölümde, bikompleks katsayılı polinom tanımı verilmiştir. Ayrıca bikompleks polinomun kökleri incelenmiştir.

Bu çalışma, bikompleks cebir ile ilgili bilgi edinmek isteyenlere temel bilgi ve özellikleri sunan bir çalışma olmuştur. Dolayısıyla bu tezden yararlanarak, bikompleks sayılar teorisi incelenebilir.

6. KAYNAKLAR

Ahlfors, Lars V., “Complex analysis: An ıntroduction to the theory of analytic functions of one complex variable”, *New York, London*, 177, (1953).

Andreescu, T. and Andrica, D., “Complex Numbers from a to... Z”, *Birkhauser,* (2006).

Babadağ, F., “The Real Matrices forms of the Bicomplex Numbers and Homothetic Exponential motions”, *Journal of Advances in Mathematics*, (2014).

Colombo, F. Sabadini, I. Struppa, D. C. Vajiac, A., & Vajiac, M., “Bicomplex hyperfunctions”, *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 190(2), 247-261, (2011).

Dimiev, S., Lazov, R., & Slavova, S., “Remarks on bicomplex variables and other similar variables”, *In Topics In Contemporary Differential Geometry, Complex Analysis And Mathematical Physics,* 50-56, (2007).

Dixon, G. M., “*Division Algebras: Octonions Quaternions Complex Numbers and the Algebraic Design of Physics”*, Springer Science & Business Media, (290), (2013).

Hahn, L. S., “*Complex Numbers and Geometry”*, Cambridge University Press, (1994).

Karakuş, S. Ö., & Aksoyak, F. K., “Generalized Bicomplex Numbers and Lie Groups”, *Advances in Applied Clifford Algebras*, *25*(4), 943-963, (2015).

Kuipers, J. B., “*Quaternions and rotation sequences”,* Princeton: Princeton University Press, (66), 127-143, (1999).

Lavoie, R. G., & Rochon, D., “The Bicomplex Heisenberg Uncertainty Principle”, In *Theoretical Concepts of Quantum Mechanics*. InTech, (2012).

Law Bylinski, C., “The complex numbers”, *Formalized Mathematics*, 1(3), 507-513, (1990).

Luna-Elizarrarás, M. E., Shapiro, M., Struppa, D. C., & Vajiac, A., “*Bicomplex Holomorphic Functions: The Algebra, Geometry and Analysis of Bicomplex Numbers"*, Birkhäuser, (2015).

Luna-Elizarraras, M. E., Shapiro, M., Struppa, D. C., & Vajiac, A., “*Bicomplex Numbers and Their Elementary Function”*, Cubo (Temuco), 14(2), 61-80, (2012).

Melent'ev, A. I., “A normalized double sphere and a real model for a connection over the algebra of bicomplex numbers”, *Trudy Geometricheskogo Seminara*, *6*, 57-69, (1971).

Morin, U., “Bicomplex Algebra”, (In Italian) Memorie Accademia d’Italia, (1935).

Pogorui, A. A., & Rodriguez-Dagnino, R. M., “On the set of zeros of bicomplex polynomials”, *Complex Variables and Elliptic Equations*, *51*(7), 725-730, (2006).

Price, G. B., “*An Introduction to Multicomplex Spaces and Functions”,* M. Dekker, (1991).

Riley, J. D., “Contributions to the theory of functions of a bicomplex variable”, *Tohoku Mathematical Journal, Second Series*, *5*(2), 132-165, (1953).

Ringleb, F., “Beiträge zur funktionentheorie in hyperkomplexen Systemen I”, *Rendiconti del Circolo Mat,ematico di Palermo (1884-1940)*, *57*(1), 311-340, (1933).

Rochon, D., & Tremblay, S., “Bicomplex quantum mechanics: I. The generalized Schrödinger equation”, *Advances in Applied Clifford Algebras*, 14(2), 231-248, (2004).

Rochon, D., “A generalized Mandelbrot set for bicomplex numbers”, *Fractals, 8*(04), 355-368, (2000).

Rochon, D., & Shapiro, M, “On algebraic properties of bicomplex and hyperbolic numbers”, *Anal. Univ. Oradea, Fasc. Math, 11*(71), 110, (2004).

Rönn, S., "Bicomplex algebra and function theory." *arXiv preprint math/0101200*, (2001).

Scheffers G., “Generalization of the foundations of ordinary complex functions”, I, II, Leipz, Ber. XLV, 828-848, (1893).

Scorza-Dragoni, G. "The analytic functions of a bicomplex variable." *Memorie Accademia d’Italia*, (5), 597, (1934).

Segre, Corrado. "Le rappresentazioni reali delle forme complesse e gli enti iperalgebrici." *Mathematische Annalen*, 40.3, 413-467, (1892).

Sudbery, Anthony. "Quaternionic analysis." *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, (85), Cambridge University Press, (1979).

Vignaux, J. C. "On the polygenic functions of a dual bicomplex variable", *Atti. Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.,* (6) 27,641-645, (1938).

7. ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	:	SEVİM ASLAN
Doğum Yeri ve Tarihi	:	SALİHLİ/ 03.05.94
Lisans Üniversite	:	PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
Elektronik posta	:	aslansevim121@gmail.com
İletişim Adresi	:	Yunus Emre mahallesi, 6444 sokak, No:3

Konferans Listesi :

- Serpil Halıcı, Sevim Aslan, Sözlü Bildiri, “On Some Polynomials with Bicomplex Coefficients”, I. İnternational Scientific and Vocational Studies Congress, Nevşehir, 05-08 Ekim 2017.

- Serpil Halıcı, Sevim Aslan, Sözlü Bildiri, “Fibonacci Quaternion Sequences”, I. İnternational Scientific and Vocational Studies Congress, Nevşehir, 05-08 Ekim 2017.