GİRESUN ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

STOKASTİK SÜREÇLER İÇİN KOORDİNATLARDA BAZI KONVEKSLİK ÇEŞİTLERİ VE HERMITE-HADAMARD EŞİTSİZLİĞİ

MATEMATİK
YÜKSEK LİSANS TEZİ
YUSUF USTA
162110007

2018

GİRESUN

T.C.
GİRESUN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

STOKASTİK SÜREÇLER İÇİN KOORDİNATLARDA BAZI KONVEKSLİK ÇEŞİTLERİ VE HERMİTE-HADAMARD EŞİTSİZLİĞİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

YUSUF USTA

Enstitü Anabilim Dalı	:	**MATEMATİK**
Tez Danışmanı	:	**Dr.Öğr.Üyesi Nurgül OKUR BEKAR**

2018

T.C.
GİRESUN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

STOKASTİK SÜREÇLER İÇİN KOORDİNATLARDA BAZI KONVEKSLİK ÇEŞİTLERİ VE HERMİTE-HADAMARD EŞİTSİZLİĞİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Yusuf USTA

Enstitü Anabilim Dalı : Matematik

Bu tez 02/07/2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Cemil YAPAR	Doç. Dr. İmdat İŞCAN	Dr. Öğr.Üyesi Nurgül OKUR BEKAR
Jüri Başkanı	Üye	Üye

Doç. Dr.
Bahadır KOZ

Enstitü Müdürü

BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

YUSUF USTA
../../20

TEŞEKKÜR

Tez konusunun belirlenmesinden, tezde ele alınan problemin çözümüne kadar olan süreçte, emeği, öneri ve yönlendirmeleri ile çok büyük katkısı bulunan saygıdeğer danışman hocam Dr. Öğr. Üyesi Nurgül OKUR BEKAR'a teşekkür eder, sonsuz saygılarımı sunarım.

Tez çalışmalarım boyunca, her türlü bilimsel ve manevi desteği sağlayan değerli hocalarımdan Prof. Dr. Mahir KADAKAL, Prof. Dr. Cemil YAPAR, Doç. Dr. İmdat İŞCAN, lisans eğitimim boyunca emeklerinden dolayı tüm istatistik bölümü hocalarıma ve hayatım boyunca desteklerini esirgemeyen aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\forall$	: Her
$\emptyset$	: Boş küme
A	: Küme
A'	: Kümenin tümleyeni
A^0	: A kümesinin içi
$A \times B$	: A ve B kümelerinin kartezyen çarpımı
$\mathbb{R}$	: Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}^+$	: Pozitif reel sayılar
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar
X'	: X stokastik sürecinin türevi
$E(X), m_x$	: X rastgele değişkeninin beklenen değeri
$Var(X)$	: X rastgele değişkeninin varyansı
$l.i.m.$	: Kuadratik orta anlamda
Δ	: Koordinatlarda stokastik sürecin tanım kümesi
$\mathcal{C}_{st}$	: Konveks stokastik süreçler kümesi
$\leq_{st}$	: Stokastik sıralama
$\subseteq$	: Alt küme
$\mathfrak{I}$	: X'in alt kümeleri üzerinde inşa edilen sigma cebir
P	: Olasılık fonksiyonu

STOKASTİK SÜREÇLER İÇİN KOORDİNATLARDA BAZI KONVEKSLİK ÇEŞİTLERİ VE HERMİTE-HADAMARD EŞİTSİZLİĞİ

ÖZET

Bu tezde öncelikle reel sayılar kümesi üzerinde tanımlı konveks, log-konveks, φ-konveks, h-konveks, harmonik konveks ve preinveks stokastik süreçler hakkında kısaca bazı temel bilgiler verilmiştir. Tezin özgün kısmını oluşturan araştırma bulguları bölümünde ise bu süreçler koordinatlarda tanımlanmış ve bu süreçler için Hermite-Hadamard eşitsizliği elde edilmiştir.

Anahtar kelimeler: Konveks, Log-Konveks, φ-konveks, h-Konveks, Harmonik konveks, Preinveks, Stokastik Süreçler, Hermite-Hadamard Eşitsizliği.

SOME TYPES OF CONVEXITY FOR STOCHASTIC PROCESSES ON THE CO-ORDINATES AND HERMITE-HADAMARD INEQUALITY

SUMMARY

In this thesis, some basic information is briefly given about convex, log-convex, φ-convex, h-convex, harmonic convex and preinvex stochastic processes on real numbers. In the research findings which are the original part of this study, relevant these processes are defined on the co-ordinates and Hermite-Hadamard type inequalities are obtained for these processes.

Keywords: Convex, Log-Convex, φ-Convex, h-Convex, Harmonic Convex, Preinvex, Stochastic Processes, Hermite-Hadamard Inequality

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Olasılık teorisinde stokastik kavramı, ilk kez bu teorinin kurucularından olan Bernoulli (1654-1705) tarafından kullanılmaya başlamıştır. Sonra bu kavram bir süre unutulmuş olmasına rağmen Bortkiyeviç'in (1868-1913) büyük katkısıyla yirminci asrın başlarında yeniden kullanılmaya başlamıştır.

Stokastik süreçler, esasen zaman içinde gelişen olasılıksal modelleri inceleyen olasılık teorisinin önemli bir dalıdır. 1900 yılında Fransız matematikçi Bachalier ilk kez Brown hareketinin matematiksel modelini kurmuştur. 1905 yılında Einstein ve Smoluhovski bazı fizik problemlerinin incelenmesinde olasılık teorisini kullanmak zorunda kalmışlar ve Bachalier'nin kurmuş olduğu sürece benzer bir süreçle karşılaşmışlardır. 1914 yılında Planck ve Fokker, olasılık teorisini kullanarak difüzyon olayını incelemeye çalışmışlardır. Tüm bunlar matematikte yeni bir kavram olan stokastik süreç kavramının meydana çıkmasına yol açmıştır.

Stokastik süreçler teorisinin matematiksel temelleri 20. yüzyılda Markov, Slutski, Wiener, Hincin, Kolmogorov gibi matematikçiler tarafından verilmiştir. Stokastik süreçler teorisinin sonraki gelişmesi Feller, Levy, Wald, Doob, Ito, Dynkin, Skorohod, Takac ve Çınlar gibi matematikçilerin çalışmaları ile olmuştur.

Son yıllarda, konvekslik ve eşitsizlik kavramları, optimizasyon ve matematiksel programlama problemlerinin incelenmesinde daha geniş bir çalışma imkanı sağladığı için, literatürde önemli bir yere sahip olmuştur. Bilhassa, stokastik süreçler için stokastik monotonluk ve konveksliği tanımlamak optimizasyonda optimal tasarımlarda, olasılıksal nicelikler mevcut olduğunda sayısal yaklaşımlar elde edebilmek için büyük önem taşımaktadır.

1980'de Nikodem, konveks stokastik süreçleri tanımlamış ve konveks stokastik süreçler için bilinen bazı özellikleri vermiştir. Bu çalışmada, $[u, v]$ kümesi üzerinde tanımlı her reel konveks X stokastik süreci için elde edilen Hermite-Hadamard eşitsizliği aşağıdaki gibidir:

$$X\left(\frac{u+v}{2},\cdot\right) \leq \frac{1}{v-u}\int_u^v X(t,\cdot)dt \leq \frac{X\,(u,\cdot)+X\,(v,\cdot)}{2}$$

Alınan bu sonucu olasılıksal olarak aşağıdaki gibi yorumlamak mümkündür:

$$X(ET,\cdot) \leq_{st} EX(T,\cdot) \leq_{st} EX(T^{*},\cdot),\ T \in \mathcal{C}_{st}$$

Burada E beklenen değer, T (T^{*}) [u,v] aralığında ({u,v} kümesi üzerinde) düzgün dağılıma sahip bir rastgele değişken, $\mathcal{C}_{st}$ [u,v] üzerinde tanımlı bütün reel konveks stokastik süreçler kümesi ve $\leq_{st}$ ise rastgele değişkenlerin konveks sıralaması olarak tanımlanır.

Jensen-konveks, λ-konveks stokastik süreçler 1992'de Skowronski tarafından tanımlanmıştır. Ayrıca Kotrys 2012'de stokastik süreçler için konvekslik ve strongly konvekslik kavramlarını tanımlamış ve bu süreçler için Hermite-Hadamard eşitsizliği ve Jensen eşitsizliğini elde etmiş, Kuhn ve Bernstein-Doetsch teoremini ispatlamıştır.

2012'den itibaren İşcan ve çalışma ekibi, stokastik süreçler için GA konvekslik, preinvekslik ve bunun genelleştirmeleri üzerine araştırmalar yapmaktadır. Son yıllarda bu ekipten Okur ve çalışma arkadaşları da bağımsız olarak reel eksende ve koordinatlarda çeşitli konveks stokastik süreçler üzerinde yoğun olarak çalışmakta ve bu süreçler için Hermit-Hadamard tipli eşitsizlikler elde etmektedir. 2015'de Barraez h-konveks stokastik süreçleri tanımlamış ve bu süreçler için bazı integral eşitsizlikleri elde etmiştir. 2015'den beri Maden ve çalışma arkadaşları s-konveks, log-konveks stokastik süreçler üzerinde çalışmalar yapmaktadır. 2016'da Bodur φ-konveks stokastik süreçler için Hermite-Hadamard eşitsizliğini elde etmiştir. Ayrıca Set ve ekibi koordinatlarda stokastik süreçleri tanımlamış ve bu süreçler için Hermit-Hadamard tipli eşitsizlikler elde etmiştir.

Bu tezin kaynak araştırması kısmında ise stokastik süreçler ile ilgili gerekli temel kavramlar verilmiştir. Materyal ve yöntem kısmında ise, reel sayılar üzerinde tanımlı bazı konveks stokastik süreçler hakkında bazı bilgiler sunulmuştur. Son olarak, tezin araştırma bulguları kısmında söz konusu bu süreçler koordinatlarda tanımlanmıştır. Ayrıca bu süreçler için Hermite-Hadamard eşitsizliği elde edilmiştir.

BÖLÜM 2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

2.1. Stokastik Süreçler ile ilgili Temel Kavramlar

Stokastik süreçleri tanımlayabilmek için öncelikle σ-cebir, olasılık uzayı, olay, rastgele değişken, stokastik sürecin dağılımı ve beklenen değeri gibi kavramların bilinmesi gerekmektedir. Aşağıda bu kavramların tanımları verilmektedir [1].

Tanım 2.1[1]. $\Omega \neq \emptyset$ kümesinin alt kümelerinden oluşan bir $\mathfrak{I}$ sınıfı:

1) $\Omega \in \mathfrak{I}$,
2) $\forall A \in \mathfrak{I}$ için $\bar{A} \in \mathfrak{I}$,
3) İkişer ikişer ayrık $\forall (A_n) \in \mathfrak{I}$ dizisi için $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{I}$

özelliklerine sahip olsun. Bu taktirde $\mathfrak{I}$ sınıfına Ω'da bir "σ-cebir"dir denir. Bir σ-cebir, sayılabilir birleşim, kesişim ve tümleme işlemine göre kapalıdır.

Tanım 2.2[1]. $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesindeki açık aralıkların sınıfını kapsayan en küçük aralıkların σ-cebirine "Borel cebiri" denir. Borel cebirinin her bir elemanına "Borel kümesi" denir.

Tanım 2.3[1]. Sonuçlarının kümesi belli olan ancak gerçekleştiğinde hangi sonucun ortaya çıkacağı önceden bilinmeyen deneylere "olasılık deneyi" veya "stokastik deney" denir.

Tanım 2.4[1]. Bir stokastik deneyin tüm olabilir sonuçlarının kümesine "örnek uzay" denir. Örnek uzayın her alt kümesine "olay" denir.

Tanım 2.5[1]. $\mathfrak{I}$, $\Omega \neq \emptyset$ örnek uzayı üzerinde tanımlanmış bir σ-cebir olmak üzere, $P: \mathfrak{I} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

1) $\forall A \in \mathfrak{I}$ için $P(A) \geq 0$,
2) $P(\Omega) = 1$,
3) İkişer ikişer ayrık $\forall (A_n) \in \mathfrak{I}$ dizisi için $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$

özelliklerine sahip ise, P fonksiyonuna $\Im$ üzerinde bir "olasılık ölçüsü" denir. $P(A)$ değerine ise, A olayının olasılık ölçüsü veya "A olayının olasılığı" denir.

Tanım 2.6[1]. $\Omega \neq \emptyset$ bir örnek uzay, Ω'da tanımlanmış bir σ-cebir ve P, $\Im$ üzerinde tanımlanmış bir olasılık ölçüsü olmak üzere, $(\Omega, \Im, P)$ üçlüsüne bir "olasılık uzayı" denir.

Tanım 2.7[1]. $(\Omega, \Im, P)$ bir olasılık uzayı, $\xi: \Omega \to \mathbb{R}$ bir fonksiyonu $\forall x \in \mathbb{R}$ sayısı için $\{\omega: \xi(\omega) \leq x\} \in \Im$ yani $\Im$-ölçülebilir ise, ξ fonksiyonuna bir "rastgele değişken" denir.

Tanım 2.8[1]. $(\Omega, \Im, P)$ bir olasılık uzayı ve $\emptyset \neq T \subseteq \mathbb{R}$ bir küme olsun. Reel değerli $X(t, \omega)$ fonksiyonu, her $t \in T$ için Ω kümesinde tanımlanmış bir rastgele değişken ise, bu fonksiyona bir "rastgele fonksiyon" denir. $X(t, \omega), Y(t, \omega)$ sembolleri ile gösterilebilir. Eğer burada $T = \mathbb{R}^+$ ise ve t parametresi zamanı ifade ediyorsa, bu durumda $X(t, \omega)$ rastgele fonksiyonuna bir "stokastik süreç" denir.

Tanım 2.9[1]. $X(t, \omega)$ bir stokastik süreç, $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$ olsun. Bu durumda $F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = P\{\omega: X(t_1, \omega) \leq x_1, \dots, X(t_n, \omega) \leq x_n\}$, $x_i \in \mathbb{R}$ fonksiyonuna $X(t, \omega)$ stokastik sürecinin n-boyutlu dağılım fonksiyonu denir. Her $t_1, t_2, \dots, t_n$ için n-boyutlu $F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n)$ fonksiyonlarının $\{F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n)\}$, $n \geq 1$ ailesine stokastik sürecin sonlu boyutlu dağılım fonksiyonları denir. Sonlu boyutlu dağılım fonksiyonu aşağıdaki özelliklere sahiptir:

1. $F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2 \dots, x_n) = F_{t_1, t_2, \dots, t_{n-1}}(x_1, x_2 \dots, x_{n-1}, \infty)$,
2. $F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2 \dots, x_n) = F_{t_{i_1}, t_{i_2}, \dots, t_{i_n}}(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n})$.

Tanım 2.10[1]. $X(t, \omega)$ bir stokastik süreç, $F_t(x)$ bu stokastik sürecin bir boyutlu dağılım fonksiyonu olsun. Eğer her t için $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| d\, F_t(x) < +\infty$ ise $E(X(t, \omega)) = \int_{-\infty}^{+\infty} x d\, F_t(x)$ integraline $X(t, \omega)$ stokastik sürecinin beklenen değeri denir. Stokastik sürecinin beklenen değeri $m_X(t)$ sembolü ile de gösterilmektedir.

BÖLÜM 3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde, ilk kısımda çalışma boyunca materyal olarak kullanılan kuadratik orta anlamda yakınsama, türevlenebilme ve integrallenebilme tanımları verilmiştir. Diğer kısımda ise koordinatlarda kullanılan tanım ve yöntem olarak, $\mathbb{R}$ kümesi üzerinde tanımlı konveks, log-konveks, φ-konveks, h-konveks, harmonik ve preinveks stokastik süreçlerle ilgili gerekli temel bilgiler kısaca sunulmuştur.

3.1. Materyal

Bu kısımda, kuadratik orta anlamda yakınsama, türevlenebilme ve integrallenebilme tanımları verilmiştir [1].

Tanım 3.1[1]. Aynı bir $(\Omega, \Im, P)$ olasılık uzayında $\{X_n\}$, $n \geq 1$ rastgele değişkenler dizisi ve X rastgele değişkeni verilsin. Bunun yanı sıra $E|X_n| < \infty$ ve $E|X| < \infty$ olsun. Eğer $0 < r < \infty$ ve $n \longrightarrow \infty$ iken $E|X_n - X|^r = \int |X_n(\omega) - X(\omega)|^r dP(\omega) \longrightarrow 0$ ise, bu taktirde $\{X_n\}$ dizisi X'ye r. mertebeden orta anlamda yakınsıyor denir ve bu yakınsama $n \longrightarrow \infty$ iken $X_n \xrightarrow{L_r} X$ şeklinde yazılır. Bu yakınsama çeşidine analizde L_r anlamında yakınsama denir. Özel olarak $r = 2$ olduğunda bu yakınsamaya kuadratik orta yakınsama denir. Bu yakınsama $\underset{n \longrightarrow \infty}{l.i.m.} X_n = X$ şeklinde yazılır. Burada l.i.m. "limit in mean" kelimelerinin kısaltılmış yazılımıdır.

Buna göre, kuadratik anlamda yakınsama tanımı stokastik süreçler dizisi için aşağıdaki gibi yapılabilir.

Tanım 3.2[1]. $(\Omega, \Im, P)$ olasılık uzayında $t \in T \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere $\{X_n(t,\omega)\}$, $n \geq 1$ stokastik süreçler dizisi ve $X(t,\omega)$ stokastik süreci verilsin. Bunun yanı sıra $E|X_n(t,\omega)| < \infty$ ve $E|X(t,\omega)| < \infty$ olsun. Eğer $\forall\, t \in T$ için $\underset{n \longrightarrow \infty}{l.i.m.} E\,(X_n(t,\omega) - X(t,\omega))^2 = 0$ ise $\{X_n(t,\omega)\}$, $n \geq 1$ stokastik süreçler dizisi. $X(t,\omega)$ stokastik sürecine kuadratik orta anlamda yakınsaktır denir ve $\underset{n \longrightarrow \infty}{l.i.m.} X_n(t,\omega) = X(t,\omega)$ ile gösterilir.

Tanım 3.3[1]. $X(t,\omega)$ stokastik süreci verilsin. Eğer

$$\lim_{\Delta\to 0} E(X(t+\Delta)-X(t))^2=0$$

ise, bu durumda $X(t,\omega)$ stokastik sürecine t noktasında kuadratik orta anlamda süreklidir denir ve bu durum aşağıdaki gibi gösterilir:

$$\underset{\Delta\to 0}{l.i.m.} X(t+\Delta)=X(t).$$

Tanım 3.4[1]. $(\Omega,\Im,P)$ olasılık uzayında $t\in T\subseteq\mathbb{R}$ olmak üzere $X(t,\omega)$ stokastik süreci verilsin. Eğer mevcut ise, aşağıdaki limite $X(t)=X(t,\omega)$ stokastik sürecinin kuadratik orta anlamda türevi denir.

$$\underset{\Delta\to 0}{l.i.m.}\frac{X(t+\Delta)-X(t)}{\Delta}=X'(t).$$

Bu tanımı aşağıdaki gibi yazmak mümkündür:

$$\lim_{\Delta\to 0} E\left[\frac{X(t+\Delta)-X(t)}{\Delta}-X'(t)\right]^2=0.$$

$X(t,\omega)$ stokastik sürecinin kuadratik orta anlamda türevinin bir koşulun sağlanması varlığı için gerekli koşul ise $X(t,\omega)$ stokastik sürecinin kuadratik orta anlamda sürekli olmasıdır.

Tanım 3.5[1]. $(\Omega,\Im,P)$ olasılık uzayında $t\in T\subseteq\mathbb{R}$ olmak üzere $X(t,\omega)$ stokastik stokastik süreci verilsin. Ayrıca $[u,v]$ aralığının parçalanışı $u=t_0,t_1,t_2,\dots,t_n=v$, $\Delta t_k=t_k-t_{k-1}$, $k=1,2,\dots,n$ olmak üzere $\underset{n\to\infty}{l.i.m.}\max_{k\le n}|\Delta t_k|=0$ olsun. Bu durumda

$$\underset{n\to\infty}{l.i.m.}\sum_{k=1}^{n} X(t_k,\omega)\Delta t_k=\int_u^v X(t,\omega)dt$$

eşitliğine $X(t,\omega)$ stokastik fonksiyonunun $[u,v]$ aralığındaki integrali denir.

Uyarı 3.1. Bu tez boyunca "hemen hemen her yerde" kavramı literatürde "almost everywhere" kavramıyla eş anlamda kullanılmıştır.

3.2. Yöntem

Bu kısımda, $\mathbb{R}$ kümesi üzerine tanımlı konveks, log-konveks, φ-konveks, h-konveks, harmonik konveks ve preinveks stokastik süreçlerle ilgili temel bilgiler kısaca sunulmuştur.

3.2.1. Konveks Stokastik Süreçler

Bu kısımda, konveks stokastik süreç tanımı ve bu süreç için Hermite-Hadamard eşitsizliği verilmiştir. Bu kısmın tamamında aksi belirtilmedikçe $I \subseteq \mathbb{R}$ bir aralık, $u, v \in I$, $u < v$ ve $\lambda \in [0,1]$'dır [2].

Tanım 3.6[2]. $X: I \times \Omega \to \mathbb{R}$ bir stokastik süreç olsun. Bu taktirde her $t, s \in I$ için hemen hemen her yerde aşağıdaki eşitsizliği sağlayan stokastik sürece I kümesi üzerinde konvekstir denir:

$$X(\lambda t + (1-\lambda)s, \cdot) \leq \lambda X(t, \cdot) + (1-\lambda) X(s, \cdot).$$

Eğer eşitsizlikte $\lambda = \frac{1}{2}$ alınırsa bu sürece Jensen-konveks stokastik süreç denir.

Lemma 3.1[2]. $X: [u, v] \times \Omega \to \mathbb{R}$ kuadratik orta anlamda integrallenebilir konveks bir stokastik süreç olsun. Bu taktirde hemen hemen her yerde

$$\int_0^1 X(\lambda u + (1-\lambda)v, \cdot) d\lambda = \int_0^1 X(\lambda v + (1-\lambda)u, \cdot) d\lambda = \frac{1}{v-u} \int_u^v X(t, \cdot) dt$$

eşitliği mevcuttur.

Teorem 3.1[2]. $X: [u, v] \times \Omega \to \mathbb{R}$ kuadratik orta anlamda integrallenebilir konveks bir stokastik süreç olsun. Bu taktirde aşağıdaki eşitsizlik hemen hemen her yerde mevcuttur:

$$X\left(\frac{u+v}{2}, \cdot\right) \leq \frac{1}{v-u} \int_u^v X(t, \cdot) dt \leq \frac{X(u, \cdot) + X(v, \cdot)}{2}. \quad (3.1)$$

3.2.2. Log-Konveks Stokastik Süreçler

Bu kısımda log-konveks stokastik süreç tanımı ve bu süreç için Hermite-Hadamard eşitsizliği verilmiştir. Bu kısmın tamamında aksi belirtilmedikçe $I \subseteq \mathbb{R}$ bir aralık, $u, v \in I,\ u < v\ ve\ \lambda \in [0,1]$'dır [3].

Tanım 3.7[3]. $X: I \times \Omega \to \mathbb{R}_+$ bir stokastik süreç olsun. Bu taktirde her $t, s \in I$ hemen hemen her yerde aşağıdaki eşitsizliği sağlayan stokastik sürece I kümesi üzerinde log-konvekstir denir:

$$X(\lambda t + (1-\lambda)s,\cdot) \leq [X(t,\cdot)]^{\lambda}[X(s,\cdot)]^{(1-\lambda)}.$$

Teorem 3.2[3]. $X: [u, v] \times \Omega \to \mathbb{R}_+$ log-konveks stokastik süreci kuadratik orta anlamda integrallenebilir olsun. Bu taktirde aşağıdaki eşitsizlik hemen hemen her yerde mevcuttur:

$$\begin{aligned} X\left(\frac{u+v}{2},\cdot\right) &\leq exp\left[\frac{1}{v-u}\int_u^v ln[X(t,\cdot)]dt\right] \\ &\leq \frac{1}{v-u}\int_u^v G\big(X(t,\cdot), X(u+v-t,\cdot)\big)dt \\ &\leq \frac{1}{v-u}\int_u^v X(t,\cdot)dt \leq L\big(X(u,\cdot), X(v,\cdot)\big) \end{aligned} \tag{3.2}$$

Burada $L(p, q)$ pozitif reel sayıların logaritmik ortalamasıdır:

$$L(p,q) = \begin{cases} \dfrac{p-q}{lnp - lnq}, & p \neq q \\ p\quad, & p = q \end{cases}.$$

3.2.3. φ-Konveks Stokastik Süreçler

Bu kısımda φ-konveks stokastik süreç tanımı ve φ-konveks stokastik süreçler için Hermite-Hadamard eşitsizliği verilmiştir. Bu kısmın tamamında aksi belirtilmedikçe $u < v$ olmak üzere $[u, v] \subseteq \mathbb{R}$ bir aralık, $\varphi: [u, v] \to [u, v]$ bir fonksiyon, $\lambda \in [0,1]$ ve $\varphi(u) < \varphi(v)$'dır [4].

Tanım 3.8[4]. $X: [u,v] \times \Omega \to \mathbb{R}$ bir stokastik süreç olsun. Eğer her $t,s \in [u,v]$ hemen hemen her yerde

$$X(\lambda\varphi(t) + (1-\lambda)\varphi(s),\cdot) \leq \lambda X(\varphi(t),\cdot) + (1-\lambda)X(\varphi(s),\cdot)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa X'e $[u,v]$ aralığı üzerinde φ-konveks stokastik süreç denir.

Lemma 3.3[4]. Eğer φ-konveks $X: [u,v] \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik süreci kuadratik orta anlamda integrallenebilir ise aşağıdaki eşitlik hemen hemen her yerde mevcuttur:

$$\int_0^1 X(\lambda\varphi(u) + (1-\lambda)\varphi(v),\cdot)d\lambda = \int_0^1 X((1-\lambda)\varphi(u) + \lambda\varphi(v),\cdot)d\lambda$$

$$= \frac{1}{\varphi(v) - \varphi(u)} \int_{\varphi(u)}^{\varphi(v)} X(t,\cdot)dt.$$

Teorem 3.3[4]. $\varphi: [u,v] \to [u,v]$ kuadratik orta anlamda sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer φ-konveks $X: [u,v] \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik süreci kuadratik orta anlamda integrallenebilir ise aşağıdaki eşitsizlik hemen hemen her yerde mevcuttur:

$$X\left(\frac{\varphi(u) + \varphi(v)}{2},\cdot\right) \leq \frac{1}{\varphi(v) - \varphi(u)} \int_{\varphi(u)}^{\varphi(v)} X(t,\cdot)dt$$

$$\leq \frac{1}{2}[X(\varphi(u),\cdot) + (\varphi(v),\cdot)]. \tag{3.3}$$

3.2.4. h-Konveks Stokastik Süreçler

Bu kısımda h-konveks stokastik süreç tanımı ve bu süreçler için Hermite-Hadamard eşitsizliği verilmiştir. Bu kısmın tamamında aksi belirtilmedikçe $h: (0,1) \to \mathbb{R}$ non-negatif bir fonksiyon, $h \not\equiv 0$, $I \subseteq \mathbb{R}$ bir aralık, $u,v \in I$, $u < v$, $h\left(\frac{1}{2}\right) > 0$ ve $\lambda \in (0,1)$'dır [5].

Tanım 3.9[5]. $X: I \times \Omega \to \mathbb{R}$ bir stokastik süreç olsun. Eğer her $t,s \in I$ hemen hemen her yerde

$$X(\lambda t + (1-\lambda)s,\cdot) \leq h(\lambda)\, X(t,\cdot) + h(1-\lambda)X(s,\cdot)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa bu sürece I kümesi üzerinde h-konvekstir denir.

Lemma 3.4[5]. Eğer non-negatif, h-konveks $X: [u, v] \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik süreci kuadratik orta anlamda integrallenebilir ise aşağıdaki eşitlik hemen hemen her yerde mevcuttur:

$$\int_0^1 X(\lambda u + (1-\lambda)v,\cdot)d\lambda = \int_0^1 X(\lambda v + (1-\lambda)u,\cdot)d\lambda = \frac{1}{v-u}\int_u^v X(t,\cdot)dt.$$

Teorem 3.4[5]. $h: (0,1) \to \mathbb{R}$ kuadratik orta anlamda sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer h-konveks $X: [u, v] \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik süreci kuadratik orta anlamda integrallenebilir ise aşağıdaki eşitsizlik hemen hemen her yerde mevcuttur [28]:

$$\frac{1}{2h\left(\frac{1}{2}\right)} X\left(\frac{u+v}{2},\cdot\right) \leq \frac{1}{v-u}\int_u^v X(t,\cdot)dt \leq \left(X(u,\cdot) + X(v,\cdot)\right)\int_0^1 h(\lambda)\, d\lambda. \quad (3.4)$$

3.2.5. Harmonik Konveks Stokastik Süreçler

Bu kısımda, harmonik konveks stokastik süreçler tanımı ve bu süreçler için Hermite-Hadamard eşitsizliği elde edilmiştir. Bu kısmın tamamında $I = [u, v] \subseteq (0, \infty)$ bir aralık, $u < v$ ve $\lambda \in [0,1]$'dır [6].

Tanım 3.10[6]. $X: I \times \Omega \to \mathbb{R}$ pozitif bir stokastik süreç olsun. Bu taktirde her $t, s \in I$ için hemen hemen her yerde aşağıdaki eşitsizliği sağlayan sürece I kümesi üzerinde harmonik konvekstir denir:

$$X\left(\frac{ts}{\lambda t + (1-\lambda)s},\cdot\right) \leq \lambda X(s,\cdot) + (1-\lambda)X(t,\cdot).$$

Lemma 3.5[6]. $X: [u, v] \times \Omega \to \mathbb{R}$ kuadratik orta anlamda integrallenebilir harmonik konveks bir stokastik süreç olsun. Bu taktirde hemen hemen her yerde

$$\int_0^1 X\left(\frac{uv}{\lambda u + (1-\lambda)v},\cdot\right) d\lambda = \int_0^1 X\left(\frac{uv}{\lambda v + (1-\lambda)u},\cdot\right) d\lambda = \frac{uv}{v-u}\int_u^v \frac{X(t,\cdot)}{t^2} dt$$

eşitliği mevcuttur.

Teorem 3.5[6]. $X: [u, v] \times \Omega \to \mathbb{R}$ kuadratik orta anlamda integrallenebilir harmonik konveks bir stokastik süreç olsun. Bu taktirde aşağıdaki eşitsizlik hemen hemen her yerde mevcuttur:

$$X\left(\frac{2uv}{u+v},\cdot\right) \leq \frac{uv}{v-u}\int_u^v \frac{X(t,\cdot)}{t^2}dt \leq \frac{X(u,\cdot)+X(v,\cdot)}{2}. \qquad (3.5)$$

3.2.6. Preinveks Stokastik Süreçler

Bu kısımda preinvex stokastik süreç tanımı verilmiş ve bu süreç için Hermite-Hadamard eşitsizliği elde edilmiştir. Bu kısmın tamamında aksi belirtilmedikçe $I \subset \mathbb{R}^n$ boştan farklı kapalı bir küme, $u, v \in I$, $u < v$, $\eta : I \times I \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonu ve $X: I \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik süreci kuadratik orta anlamda sürekli olarak kabul edilmiştir [7].

Tanım 3.11[7]. $t \in I$ olsun. Eğer her $s \in I$ ve $\lambda \in [0,1]$ için $s + \lambda\eta(t,s) \in I$ ise, I kümesine t noktasında η'ya göre inveks bir küme denir. Eğer I kümesi her bir $t \in I$ noktasında invex ise, I kümesine η'ya göre inveks bir küme denir. ($\eta(t,t) = 0$)

Ayrıca her konveks kümenin $\eta(t,s) = t - s$ fonksiyonuna göre invex olduğu açıktır. Fakat bunun tersi genelde doğru değildir.

Tanım 3.12[7]. Her $t, s \in I$ için hemen hemen her yerde aşağıdaki eşitsizliği sağlayan $X: I \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik sürecine I kümesi üzerinde η'ya göre preinvekstir denir:

$$X(t + \lambda\eta(s,t),\cdot) \leq (1-\lambda)X(t,\cdot) + \lambda X(s,\cdot).$$

Ayrıca her $X: I \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik süreci sabit $\lambda \in (0,1)$ için λ-preinvex, $\lambda = 1/2$ için Jensen-preinvex ve $\eta(t,s) = t - s$ için konvekstir.

C Koşulu: $I \subset \mathbb{R}$, η'ya göre inveks açık bir altküme olsun. Bu taktirde, herhangi bir $t, s \in I$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$\eta\big(s, s + \lambda\eta(t,s)\big) = -\lambda\eta(t,s);$$

$$\eta(t, s + \lambda\eta(t,s)) = (1-\lambda)\eta(t,s)$$

elde edilir. Ayrıca C koşulundan her $t, s \in I$ ve $\lambda_1, \lambda_2 \in [0,1]$ için aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\eta(s + \lambda_2\, \eta(s,t), s + \lambda_1\, \eta(t,s)) = (\lambda_2 - \lambda_1)\eta(t,s).$$

Lemma 3.6[7]. $X: [u, u+\eta(v,u)] \times \Omega \to \mathbb{R}$ kuadratik orta anlamda integrallenebilir preinvex bir stokastik süreç olsun. Bu taktirde hemen hemen her yerde

$$\int_0^1 X(u + \lambda\eta(v,u), \cdot)d\lambda = \int_0^1 X(u + (1-\lambda)\eta(v,u), \cdot)d\lambda = \frac{1}{\eta(v,u)} \int_u^{u+\eta(v,u)} X(t,\cdot)dt$$

eşitliği mevcuttur.

Teorem 3.6[7]. $X: [u, u+\eta(v,u)] \times \Omega \to \mathbb{R}$ kuadratik orta anlamda integrallenebilir preinveks bir stokastik süreç olsun. Bu taktirde aşağıdaki eşitsizlik hemen hemen her yerde mevcuttur:

$$X\left(\frac{2u + \eta(v,u)}{2}, \cdot\right) \leq \frac{1}{\eta(v,u)} \int_u^{u+\eta(v,u)} X(t,\cdot)dt \leq \frac{X(u,\cdot) + X(v,\cdot)}{2}. \quad (3.6)$$

BÖLÜM 4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde, koordinatlarda konveks, log-konveks, φ-konveks, h-konveks, harmonik konveks ve preinveks stokastik süreçler tanımlanmış ve bu süreçler için Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler elde edilmiştir.

4.1. Koordinatlarda Konveks Stokastik Süreçler

Bu kısımda, koordinatlarda konveks stokastik süreçler tanımı verilmiş ve bu süreçler için Hermite-Hadamard eşitsizliği elde edilmiştir. Bu kısmın tamamında aksi belirtilmedikçe $\Delta := T \times S,\ T,S \subset \mathbb{R},\ u_1,u_2 \in T,\ v_1,v_2 \in S,\ u_1 < u_2,\ v_1 < v_2$ ve $\lambda,\lambda_1,\lambda_2 \in [0,1]$'dır [8].

Tanım 4.1[8]. Eğer her $(t_1,s_1)\,,(t_2,s_2) \in \Delta$ için hemen hemen her yerde aşağıdaki eşitsizlik sağlanırsa, $X: \Delta \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik sürecine Δ kümesi üzerinde konvekstir denir:

$$\begin{aligned} &X\big((\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2, \lambda s_1 + (1-\lambda)s_2),.\big) \\ &\leq \lambda X\big((t_1,s_1),\cdot\big) + (1-\lambda)X\big((t_2,s_2),\cdot\big). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Yukarıdaki eşitsizlik yön değiştirdiğinde ise X'e Δ kümesi üzerinde konkavdır denir.

Tanım 4.2[8]. Eğer her $t \in T,\ s \in S$ için hemen hemen her yerde

$$X_s: T \times \Omega \to \mathbb{R},,\ X_s(u,\cdot) := X\big((u,s),\cdot\big),\ X_t: S \times \Omega \to \mathbb{R}\,,\ X_t(v,\cdot) := X((t,v),\cdot)$$

kısmi dönüşümleri konveks ise $X: \Delta \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik sürecine koordinatlarda konvekstir denir.

Koordinatlarda konveks stokastik süreç formal olarak aşağıdaki gibi de tanımlanmaktadır:

Tanım 4.3[8]. Eğer her $(t_1,s_1),(t_2,s_2) \in \Delta$ için hemen hemen her yerde

$$\begin{aligned} &X\big((\lambda_1 t_1 + (1-\lambda_1)t_2, \lambda_2 s_1 + (1-\lambda_2)s_2),\cdot\big) \\ &\leq \lambda_1\lambda_2 X\big((t_1,s_1),\cdot\big) + \lambda_1(1-\lambda_2)X\big((t_1,s_2),\cdot\big) \\ &+(1-\lambda_1)\lambda_2 X\big((t_2,s_1),\cdot\big) + (1-\lambda_1)(1-\lambda_2)X\big((t_2,s_2),\cdot\big). \end{aligned}$$

ise $X: \Delta \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik sürecine koordinatlarda konveks stokastik süreç denir.

Lemma 4.1[8]. Δ kümesi üzerinde konveks her $X: \Delta \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik süreci, koordinatlarda konvekstir, fakat tersi genel olarak doğru değildir.

İspat: $X: \Delta \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik süreci Δ kümesi üzerinde konveks olsun. Bu durumda $X_t: S \times \Omega \to \mathbb{R}$, $X_t(v,\cdot) := X((t,v),\cdot)$ kısmi dönüşümü için $s_1, s_2 \in S$ olmak üzere hemen hemen her yerde aşağıdaki eşitsizlik doğrudur:

$$\begin{aligned} X_t(\lambda_2 s_1 + (1-\lambda_2)s_2,\cdot) &= X\big((t, \lambda_2 s_1 + (1-\lambda_2)\, s_2),\cdot\big) \\ &= X\big((\lambda_2 t + (1-\lambda_2)t, \lambda_2 s_1 + (1-\lambda_2)\, s_2),\cdot\big) \\ &\leq \lambda_2 X\big((t,s_1),\cdot\big) + (1-\lambda_2) X\big((t,s_2),\cdot\big) \\ &= \lambda_2 X_t(s_1,\cdot) + (1-\lambda_2) X_t(s_2,\cdot). \end{aligned}$$

Yukarıdaki eşitsizliğe göre, X_t, S kümesi üzerinde konvekstir. Benzer şekilde $X_s: T \times \Omega \to \mathbb{R}$, $X_s(u,\cdot) := X\big((u,s),\cdot\big)$ kısmi dönüşümünün de T kümesi üzerinde konveks olduğu gösterilebilir.

Şimdi lemmanın tersinin genel olarak doğru olmadığı gösterilsin:

$X_0: [0,1]^2 \times \Omega \to [0,\infty)$, $X_0\big((t,s),\cdot\big) = ts$ olsun. Bu durumda X_0, $[0,1]^2$ kümesi üzerinde konveks değildir. Gerçekten, eğer $(t,0),(0,s) \in [0,1]^2$ ise hemen hemen her yerde aşağıdaki eşitlikler yazılabilir:

$$X_0\Big(\big(\lambda(t,0) + (1-\lambda)(0,s)\big),\cdot\Big) = X_0\big((\lambda t, (1-\lambda)s),\cdot\big) = \lambda(1-\lambda)ts;$$

$$\lambda X_0\big((t,0),\cdot\big) + (1-\lambda) X_0\big((0,s),\cdot\big) = 0.$$

Böylece $t,s \in (0,1)$ için hemen hemen her yerde

$$X_0\Big(\big(\lambda(t,0) + (1-\lambda)(0,s)\big),\cdot\Big) > \lambda X_0\big((t,0),\cdot\big) + (1-\lambda) X_0\big((0,s),\cdot\big)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu durumda X_0, $[0,1]^2$ kümesi üzerinde konveks değildir.

Teorem 4.1[8]. $\Delta := [u_1,u_2] \times [v_1,v_2]$ olsun. Δ kümesi üzerinde konveks $X: \Delta \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik süreci kuadratik orta anlamda integrallenebilir olsun. Bu taktirde hemen her yerde aşağıdaki Hermite-Hadamard eşitsizliği mevcuttur:

$$X\left(\left(\frac{u_1+u_2}{2}, \frac{v_1+v_2}{2}\right),\cdot\right)$$

$$\leq \frac{1}{2(u_2-u_1)}\int_{u_1}^{u_2} X\left(\left(t,\frac{v_1+v_2}{2}\right),\cdot\right)dt + \frac{1}{2(v_2-v_1)}\int_{v_1}^{v_2} X\left(\left(\frac{u_1+u_2}{2},s\right),\cdot\right)ds$$

$$\leq \frac{1}{(u_2-u_1)(v_2-v_1)}\int_{u_1}^{u_2}\int_{v_1}^{v_2} X((t,s),\cdot)\,dsdt$$

$$\leq \frac{1}{4(u_2-u_1)}\int_{u_1}^{u_2}\Big(X((t,v_1),\cdot)+X((t,v_2),\cdot)\Big)dt$$

$$+\frac{1}{4(v_2-v_1)}\int_{v_1}^{v_2}\Big(X((u_1,s),\cdot)+X((u_2,s),\cdot)\Big)ds$$

$$\leq \frac{X((u_1,v_1),\cdot)+X((u_1,v_2),\cdot)+X((u_2,v_1),\cdot)+X((u_2,v_2),\cdot)}{4}. \qquad (4.2)$$

İspat: $X:\Delta\times\Omega\to\mathbb{R}$ stokastik süreci Δ kümesi üzerinde konveks olduğundan $X_t:[v_1,v_2]\times\Omega\to\mathbb{R}$, $X_t(v,.):=X((t,v),.)$ dönüşümü her $t\in[u_1,u_2]$ için $[v_1,v_2]$ kümesi üzerinde konvekstir. Bu durumda (3.1) eşitsizliği sağlanır ve her $t\in[u_1,u_2]$ için hemen hemen her yerde aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir:

$$X_t\left(\frac{v_1+v_2}{2},\cdot\right)\leq\frac{1}{v_2-v_1}\int_{v_1}^{v_2} X_t(s,\cdot)ds\leq\frac{X_t(v_1,\cdot)+X_t(v_2,\cdot)}{2}.$$

Yani her $t\in[u_1,u_2]$ için hemen hemen her yerde aşağıdaki eşitsizlik doğrudur:

$$X\left(\left(t,\frac{v_1+v_2}{2},\cdot\right)\right)\leq\frac{1}{v_2-v_1}\int_{v_1}^{v_2} X((t,s),\cdot)ds\leq\frac{X((t,v_1),\cdot)+X((t,v_2),\cdot)}{2}.$$

Yukarıdaki eşitsizliğin $[u_1,u_2]$ üzerinde t parametresine göre integrali alınıp eşitsizliğin her tarafı $\frac{1}{u_2-u_1}$ ile çarpılırsa hemen hemen her yerde aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\frac{1}{u_2-u_1}\int_{u_1}^{u_2} X\left(\left(t,\frac{v_1+v_2}{2}\right),\cdot\right)dt\leq\frac{1}{(u_2-u_1)(v_2-v_1)}\int_{u_1}^{u_2}\int_{v_1}^{v_2} X((t,s),\cdot)\,dsdt$$

$$\leq\frac{1}{2(u_2-u_1)}\int_{u_1}^{u_2}\Big(X((t,v_1),\cdot)+X((t,v_2),\cdot)\Big)dt. \qquad (4.3)$$

Benzer şekilde $X_s: [u_1, u_2] \times \Omega \to \mathbb{R}$, $X_s(u,\cdot) := X\big((u,s),\cdot\big)$ dönüşümü yardımıyla hemen hemen her yerde aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\frac{1}{v_2 - v_1}\int_{v_1}^{v_2} X\left(\left(\frac{u_1+u_2}{2}, s\right),\cdot\right) ds \le \frac{1}{(u_2-u_1)(v_2-v_1)}\int_{u_1}^{u_2}\int_{v_1}^{v_2} X\big((t,s),\cdot\big)\, ds dt$$

$$\le \frac{1}{2(v_2-v_1)}\int_{v_1}^{v_2}\Big(X\big((u_1,s),\cdot\big) + X\big((u_2,s),\cdot\big)\Big) ds. \qquad (4.4)$$

(4.3) ve (4.4) eşitsizlikleri taraf tarafa toplanılırsa, (4.2) eşitsizliğindeki ikinci ve üçüncü eşitsizlikler elde edilir. Benzer şekilde (3.1) eşitsizliği sağlandığından hemen hemen her yerde aşağıdaki eşitsizlikler mevcuttur:

$$X\left(\left(\frac{u_1+u_2}{2}, \frac{v_1+v_2}{2}\right),\cdot\right) \le \frac{1}{u_2-u_1}\int_{u_1}^{u_2} X\left(\left(t, \frac{v_1+v_2}{2}\right),\cdot\right) dt;$$

$$X\left(\left(\frac{u_1+u_2}{2}, \frac{v_1+v_2}{2}\right),\cdot\right) \le \frac{1}{v_2-v_1}\int_{v_1}^{v_2} X\left(\left(\frac{u_1+u_2}{2}, s\right),\cdot\right) ds.$$

Yukarıdaki eşitsizlikler taraf tarafa toplanır ve gerekli işlemler yapılırsa (4.2) eşitsizliğindeki birinci eşitsizlik elde edilir. Ayrıca (3.1) eşitsizliği sağlandığından hemen hemen her yerde aşağıdaki eşitsizlikler elde edilir:

$$\frac{1}{u_2-u_1}\int_{u_1}^{u_2} X\big((t,v_1),\cdot\big) dt \le \frac{X\big((u_1,v_1),\cdot\big) + X\big((u_2,v_1),\cdot\big)}{2};$$

$$\frac{1}{u_2-u_1}\int_{u_1}^{u_2} X\big((t,v_2),\cdot\big) dt \le \frac{X\big((u_1,v_2),\cdot\big) + X\big((u_2,v_2),\cdot\big)}{2};$$

$$\frac{1}{v_2-v_1}\int_{v_1}^{v_2} X\big((u_1,s),\cdot\big) ds \le \frac{X\big((u_1,v_1),\cdot\big) + X\big((u_1,v_2),\cdot\big)}{2};$$

$$\frac{1}{v_2-v_1}\int_{v}^{v_2} X\big((u_2,s),\cdot\big) ds \le \frac{X\big((u_2,v_1),\cdot\big) + X\big((u_2,v_2),\cdot\big)}{2}.$$

Son olarak yukarıdaki eşitsizlikler taraf tarafa toplanır ve gerekli işlemler yapılırsa, (4.2) eşitsizliğindeki son eşitsizlik elde edilir.

4.2. Koordinatlarda Log-Konveks Stokastik Süreçler

Bu kısımda koordinatlarda log-konveks stokastik süreç tanımı verilmiş ve bu süreçler için Hermite-Hadamard eşitsizliği elde edilmiştir. Bu kısmın tamamında aksi belirtilmedikçe $\Delta := T \times S$, $T, S \subset \mathbb{R}$, $u_1, u_2 \in T$, $v_1, v_2 \in S$, $u_1 < u_2$, $v_1 < v_2$ ve $\lambda, \lambda_1, \lambda_2 \in [0,1]$'dır [9].

Tanım 4.4[9]. Her (t_1, s_1), $(t_2, s_2) \in \Delta$ için hemen hemen her yerde aşağıdaki eşitsizlik sağlanırsa, $X: \Delta \times \Omega \to \mathbb{R}_+$ stokastik sürecine Δ kümesi üzerinde log-konvekstir denir:

$$\begin{aligned} &X\big((\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2, \lambda s_1 + (1-\lambda)s_2), \cdot\big) \\ &\leq X^{\lambda}\big((t_1, s_1), \cdot\big) X^{(1-\lambda)}\big((t_2, s_2), \cdot\big). \end{aligned} \tag{4.5}$$

Yukarıdaki eşitsizlik yön değiştirdiğinde ise X'e Δ kümesi üzerinde log-konkavdır denir.

Tanım 4.5[9]. Eğer her $u \in T$, $v \in S$ için hemen hemen her yerde

$$X_s: T \times \Omega \to \mathbb{R}_+ ,\ X_s(u,\cdot) := X\big((u,s),\cdot\big),\ X_t: S \times \Omega \to \mathbb{R}_+ , X_t(v,\cdot) := X\big((t,v),\cdot\big).$$

kısmi dönüşümleri log-konveks ise $X: \Delta \times \Omega \to \mathbb{R}_+$ stokastik sürecine koordinatlarda log-konvekstir denir.

Koordinatlarda konveks stokastik süreç formal olarak aşağıdaki gibi de tanımlanmaktadır:

Tanım 4.6[9]. Eğer her $(t_1, s_1), (t_2, s_2) \in \Delta$ için hemen hemen her yerde

$$X\big((\lambda_1 t_1 + (1-\lambda_1)t_2, \lambda_2 s_1 + (1-\lambda_2)s_2), \cdot\big)$$

$$\leq X^{\lambda_1\lambda_2}\big((t_1, s_1), \cdot\big) X^{\lambda_1(1-\lambda_2)}\big((t_1, s_2), \cdot\big) X^{(1-\lambda_1)\lambda_2}\big((t_2, s_1), \cdot\big) X^{(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)}\big((t_2, s_2), \cdot\big)$$

ise $X: \Delta \times \Omega \to \mathbb{R}_+$ stokastik sürecine Δ kümesi üzerinde log-konvekstir denir.

Lemma 4.2[9]. Δ kümesi üzerinde log-konveks her $X: \Delta \times \Omega \to \mathbb{R}_+$ stokastik süreci, koordinatlarda log-konvekstir, fakat tersi genel olarak doğru değildir.

İspat. $X: \Delta \times \Omega \to \mathbb{R}_+$ stokastik süreci Δ kümesi üzerinde log-konveks olsun. Bu durumda $X_t: S \times \Omega \to \mathbb{R}_+, X_t(v,\cdot) := X\big((t,v),\cdot\big)$ kısmi dönüşümü için $s_1, s_2 \in S$ olmak üzere hemen hemen her yerde aşağıdaki eşitsizlik doğrudur:

$$X_t((\lambda_2 s_1 + (1-\lambda_2)s_2,\cdot) = X\big((t, \lambda_2 s_1 + (1-\lambda_2)s_2),\cdot\big)$$

$$= X\big((\lambda_2 t + (1-\lambda_2)t, \lambda_2 s_1 + (1-\lambda_2)s_2),\cdot\big)$$

$$\leq X^{\lambda_2}\big((t,s_1),\cdot\big)X^{(1-\lambda_2)}\big((t,s_2),\cdot\big) = X_t^{\lambda_2}(s_1,\cdot)X_t^{(1-\lambda_2)}(s_2,\cdot).$$

Yukarıdaki eşitsizliğe göre, X_t, S kümesi üzerinde log-konvekstir. Benzer şekilde $X_s: T \times \Omega \to \mathbb{R}_+$, $X_s(u,\cdot) := X\big((u,s),\cdot\big)$ kısmi dönüşümünün de T kümesi üzerinde log-konveks olduğu gösterilebilir.

Şimdi lemmanın tersinin genel olarak doğru olmadığı gösterilsin:

$X_0: [0,1]^2 \times \Omega \to \mathbb{R}_+$, $X_0\big((t,s),\cdot\big) = e^{ts}$ olsun. Bu durumda X_0, $[0,1]^2$ kümesi üzerinde log-konveks değildir. Gerçekten, eğer $(t,0),(0,s) \in [0,1]^2$ ise hemen hemen her yerde aşağıdaki eşitlikler yazılabilir:

$$logX_0\Big(\big(\lambda(t,0) + (1-\lambda)(0,s)\big),\cdot\Big) = logX_0\big((\lambda t,(1-\lambda)s),\cdot\big) = \lambda(1-\lambda)ts;$$

$$\lambda logX_0\big((t,0),\cdot\big) + (1-\lambda)logX_0\big((0,s),\cdot\big) = 0.$$

Böylece $t,s \in (0,1)$ için hemen hemen her yerde

$$logX_0\Big(\big(\lambda(t,0) + (1-\lambda)(0,s)\big),\cdot\Big) > \lambda logX_0\big((t,0),\cdot\big) + (1-\lambda)logX_0\big((0,s),\cdot\big)$$

eşitsizliği elde edilir ki, bu durumda X_0, $[0,1]^2$ kümesi üzerinde log-konveks değildir.

Teorem 4.2[9]. $\Delta := [u_1, u_2] \times [v_1, v_2]$ olsun. Δ kümesi üzerinde log-konveks $X: \Delta \times \Omega \to \mathbb{R}_+$ stokastik süreci kuadratik orta anlamda integrallenebilir olsun. Bu taktirde aşağıdaki eşitsizlik hemen hemen her yerde mevcuttur:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{(u_2-u_1)(v_2-v_1)}\int_{u_1}^{u_2}\int_{v_1}^{v_2} X((t,s),\cdot)\,dtds \\
&\leq \frac{1}{2(u_2-u_1)}\int_{u_1}^{u_2} L\big(X((t,v_1),\cdot), X((t,v_2),\cdot)\big)\,dt \\
&+\frac{1}{2(v_2-v_1)}\int_{v_1}^{v_2} L\big(X((u_1,s),\cdot), X((u_2,s),\cdot)\big)\,ds \\
&\leq \frac{1}{4(u_2-u_1)}\int_{u_1}^{u_2} \big(X((t,v_1),\cdot) + X((t,v_2),\cdot)\big)\,dt \\
&+\frac{1}{4(v_2-v_1)}\int_{v_1}^{v_2} \big(X((u_1,s),\cdot) + X((u_2,s),\cdot)\big)\,ds \\
&\leq \frac{1}{4}\begin{pmatrix} L\big(X((u_1,v_1),\cdot), X((u_2,v_1),\cdot)\big) + L\big(X((u_1,v_2),\cdot), X((u_2,v_2),\cdot)\big) \\ +L\big(X((u_1,v_1),\cdot), X((u_1,v_2),\cdot)\big) + L\big(X((u_2,v_1),\cdot), X((u_2,v_2),\cdot)\big)\end{pmatrix} \\
&\leq \frac{1}{4}\big(X((u_1,v_1),\cdot) + X((u_2,v_1),\cdot) + X((u_1,v_2),\cdot) + X((u_2,v_2),\cdot)\big). \qquad (4.6)
\end{aligned}
$$

İspat: $X: \Delta \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik süreci Δ kümesi üzerinde log-konveks olduğundan $X_t: [v_1, v_2] \times \Omega \to \mathbb{R}$, $X_t(v,.) := X((t,v),.)$ dönüşümü her $t \in [u_1, u_2]$ için $[v_1, v_2] \times \Omega$ kümesi üzerinde log-konvekstir. Bu durumda (3.2) eşitsizliği sağlanır ve $X((t,s),\cdot)$ sürecinde her $0 \leq \lambda \leq 1$ için $s = v_1\lambda + (1-\lambda)v_2$ değişken dönüşümü yapılırsa, her $t, s > 0$ için $L(t,s) \leq \frac{t+s}{2}$ olduğundan her $t \in [u_1, u_2]$ için hemen hemen her yerde aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir:

$$
\frac{1}{(u_2-u_1)(v_2-v_1)}\int_{u_1}^{u_2}\int_{v_1}^{v_2} X((t,s),\cdot)\,dtds
$$

$$= \frac{1}{u_2 - u_1} \int_0^1 \int_{u_1}^{u_2} X\big((t, \lambda v_1 + (1-\lambda) v_2), \cdot\big)\, dt d\lambda$$

$$\leq \frac{1}{u_2 - u_1} \int_{u_1}^{u_2} \int_0^1 X^{\lambda}\big((t, v_1), \cdot\big) X^{(1-\lambda)}\big((t, v_2), \cdot\big)\, d\lambda dt$$

$$= \frac{1}{u_2 - u_1} \int_{u_1}^{u_2} L\Big(X\big((t, v_1), \cdot\big), X\big((t, v_2), \cdot\big)\Big) dt$$

$$\leq \frac{1}{2(u_2 - u_1)} \int_{u_1}^{u_2} \Big(X\big((t, v_1), \cdot\big) + X\big((t, v_2), \cdot\big)\Big) dt.$$

Ayrıca, $X_t: [v_1, v_2] \times \Omega \to \mathbb{R}$, $X_t(v, .) := X\big((t, v), .\big)$ dönüşümü her $t \in [u_1, u_2]$ için $[v_1, v_2]$ kümesi üzerinde log-konveks olduğundan aşağıdaki eşitsizlikler mevcuttur:

$$X\big((t, v_1), \cdot\big) \leq X^{\lambda}\big((u_1, v_1), \cdot\big) X^{(1-\lambda)}\big((u_2, v_1), \cdot\big);\ X\big((t, v_2), \cdot\big) \leq X^{\lambda}\big((u_1, v_2), \cdot\big) X^{(1-\lambda)}\big((u_2, v_2), \cdot\big).$$

Yukarıdaki eşitsizlikler taraf tarafa toplanır ve bu eşitsizliklerin t değişkenine göre her iki tarafın $[u_1, u_2]$ aralığı üzerinde integrali alınıp $\frac{1}{2(u_2 - u_1)}$ ile çarpılırsa aşağıdaki eşitsizlikleri yazmak mümkündür:

$$\frac{1}{2(u_2 - u_1)} \int_{u_1}^{u_2} \Big(X\big((t, v_1), \cdot\big) + X\big((t, v_2), \cdot\big)\Big) dt$$

$$\leq \frac{1}{2(u_2 - u_1)} \int_{u_1}^{u_2} \begin{pmatrix} X^{\lambda}\big((u_1, v_1), \cdot\big) X^{(1-\lambda)}\big((u_2, v_1), \cdot\big) \\ + X^{\lambda}\big((u_1, v_2), \cdot\big) X^{(1-\lambda)}\big((u_2, v_2), \cdot\big) \end{pmatrix} dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \begin{pmatrix} X^{\lambda}\big((u_1, v_1), \cdot\big) X^{(1-\lambda)}\big((u_2, v_1), \cdot\big) \\ + X^{\lambda}\big((u_1, v_2), \cdot\big) X^{(1-\lambda)}\big((u_2, v_2), \cdot\big) \end{pmatrix} d\lambda$$

$$\leq \frac{1}{2}\Big(L\Big(X\big((u_1, v_1), \cdot\big), X\big((u_2, v_1), \cdot\big)\Big) + L\Big(X\big((u_1, v_2), \cdot\big), X\big((u_2, v_2), \cdot\big)\Big)\Big)$$

$$\leq \frac{1}{4}\Big(X\big((u_1, v_1), \cdot\big) + X\big((u_2, v_1), \cdot\big) + X\big((u_1, v_2), \cdot\big) + X\big((u_2, v_2), \cdot\big)\Big). \tag{4.7}$$

Benzer şekilde $X_s: [u_1, u_2] \times \Omega \to \mathbb{R}$, $X_s(u, \cdot) := X\big((u, s), \cdot\big)$ dönüşümü yardımıyla hemen hemen her yerde aşağıdaki eşitsizlikler elde edilir:

$$\frac{1}{(u_2-u_1)(v_2-v_1)}\int_{u_1}^{u_2}\int_{v_1}^{v_2} X((t,s),\cdot)\,dtds$$

$$\leq \frac{1}{v_2-v_1}\int_{v_1}^{v_2} L\Big(X((u_1,s),\cdot),X((u_2,s),\cdot)\Big)ds$$

$$\leq \frac{1}{2(v_2-v_1)}\int_{v_1}^{v_2}\Big(X((u_1,s),\cdot)+X((u_2,s),\cdot)\Big)ds$$

$$\leq \frac{1}{2}\Big(L\Big(X((u_1,v_1),\cdot),X((u_1,v_2),\cdot)\Big)+L\Big(X((u_2,v_1),\cdot),X((u_2,v_2),\cdot)\Big)\Big)$$

$$\leq \frac{1}{4}\Big(X((u_1,v_1),\cdot)+X((u_2,v_1),\cdot)+X((u_1,v_2),\cdot)+X((u_2,v_2),\cdot)\Big). \qquad (4.8)$$

(4.7) ve (4.8) eşitsizlikleri taraf tarafa toplanılır ve gerekli işlemler yapılırsa, (4.6) eşitsizliği elde edilir.

4.3. Koordinatlarda φ-Konveks Stokastik Süreçler

Bu kısımda, φ-konveks stokastik süreç tanımı verilmiş ve bu süreçler için Hermite-Hadamard eşitsizliği elde edilmiştir. Bu kısmın tamamında aksi belirtilmedikçe $\Delta:=[u_1,u_2]\times[v_1,v_2]$, $\Delta\subseteq\mathbb{R}^2$, $u_1<u_2$, $v_1<v_2$, $\varphi:\Delta\rightarrow\Delta$ bir fonksiyon, $\varphi(u_1)<\varphi(u_2)$, $\varphi(v_1)<\varphi(v_2)$ ve $\lambda,\lambda_1,\lambda_2\in[0,1]$'dır.

Tanım 4.7. Eğer her (t_1,s_1), $(t_2,s_2)\in\Delta$ için hemen hemen her yerde aşağıdaki eşitsizlik sağlanırsa, $X:\Delta\times\Omega\rightarrow\mathbb{R}$ stokastik sürecine Δ kümesi üzerinde φ-konvekstir denir:

$$X((\lambda\varphi(t_1)+(1-\lambda)\varphi(t_2),\lambda\varphi(s_1)+(1-\lambda)\varphi(s_2)),\cdot)$$
$$\leq \lambda X((\varphi(t_1),\varphi(s_1)),\cdot)+(1-\lambda)X\Big((\varphi(t_2),\varphi(s_2)),\cdot\Big). \qquad (4.9)$$

Yukarıdaki eşitsizlik yön değiştirdiğinde ise X'e Δ kümesi üzerinde φ-konkavdır denir.

Tanım 4.8. Eğer her $u\in[u_1,u_2]$, $v\in[v_1,v_2]$ için hemen hemen her yerde

$$X_s:[u_1,u_2]\times\Omega\rightarrow\mathbb{R}, \qquad X_s(u,\cdot):=X((u,s),\cdot),$$

$$X_t\colon [v_1, v_2] \times \Omega \to \mathbb{R}, \qquad X_t(v,\cdot) := X((t,v),\cdot)$$

kısmi dönüşümleri φ-konveks ise $X\colon \Delta \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik sürecine koordinatlarda φ-konvekstir denir.

Koordinatlarda φ-konveks stokastik süreç formal olarak aşağıdaki gibi de tanımlanmaktadır:

Tanım 4.9. Eğer her $(t_1, s_1), (t_2, s_2) \in \Delta$ için hemen hemen her yerde

$$X\big((\lambda_1\varphi(t_1) + (1-\lambda_1)\varphi(t_2), \lambda_2\varphi(s_1) + (1-\lambda_2)\varphi)s_2)),\cdot\big)$$
$$\leq \lambda_1\lambda_2 X\big((\varphi(t_1), \varphi(s_1)),\cdot\big) + \lambda_1(1-\lambda_2)X\big((\varphi(t_1), \varphi(s_2)),\cdot\big)$$
$$+(1-\lambda_1)\lambda_2 X\big((\varphi(t_2), \varphi(s_1)),\cdot\big) + (1-\lambda_1)(1-\lambda_2)X\big((\varphi(t_2), \varphi(s_2)),\cdot\big).$$

ise $X\colon \Delta \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik sürecine koordinatlarda φ-konvekstir denir.

Lemma 4.3. Δ kümesi üzerinde φ-konveks her $X\colon \Delta \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik süreci, koordinatlarda φ-konvekstir, fakat tersi genel olarak doğru değildir.

İspat: $X\colon \Delta \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik süreci Δ kümesi üzerinde φ-konveks olsun. Bu durumda $X_t\colon [v_1, v_2] \times \Omega \to \mathbb{R}$, $X_t(v,\cdot) := X((t,v),\cdot)$ kısmi dönüşümü için $s_1, s_2 \in [v_1, v_2]$ olmak üzere hemen hemen her yerde aşağıdaki eşitsizlik doğrudur:

$$X_t\big((\lambda_2\varphi(s_1) + (1-\lambda_2)\varphi(s_2)),\cdot\big) = X\big((t, \lambda_2\varphi(s_1) + (1-\lambda_2)\varphi(s_2)),\cdot\big)$$
$$= X\big((\lambda_2 t + (1-\lambda_2)t, \lambda_2\varphi(s_1) + (1-\lambda_2)\varphi(s_2)),\cdot\big)$$
$$\leq \lambda_2 X((t, \varphi(s_1)),\cdot + (1-\lambda_2)X((t, \varphi(s_2)),\cdot)$$
$$= \lambda_2 X_t(\varphi(s_1),\cdot) + (1-\lambda_2)X_t(\varphi(s_2),\cdot).$$

Yukarıdaki eşitsizliğe göre X_t, $[v_1, v_2]$ kümesi üzerinde φ-konvekstir. Benzer şekilde $X_s\colon [u_1, u_2] \times \Omega \to \mathbb{R}$, $X_s(u,\cdot) := X\big((u, s),\cdot\big)$ kısmi dönüşümünün de $[u_1, u_2]$ kümesi üzerinde φ-konveks olduğu gösterilebilir.

Şimdi tersinin genel olarak doğru olmadığı gösterilsin:

$X_0\colon [0,1]^2 \times \Omega \to [0,\infty)$, $X_0\big((t,s),\cdot\big) = ts$ ve $\varphi\colon [0,1]^2 \to [0,1]^2$, $\varphi(t,s) = (t,s)$ olsun. Bu durumda X_0, $[0,1]^2$ kümesi üzerinde φ-konveks değildir.

Gerçekten, eğer $(t,0), (0,s) \in [0,1]^2$ ise hemen hemen her yerde aşağıdaki eşitlikler yazılabilir:

$$X_0\left(\left(\lambda\varphi(t,0)+(1-\lambda)\varphi(0,s)\right),\cdot\right)=X_0\left(\left(\lambda(t,0)+(1-\lambda)(0,s)\right),\cdot\right)$$
$$=X_0\left((\lambda t,(1-\lambda)s),\cdot\right)=\lambda(1-\lambda)ts;$$
$$\lambda X_0(\varphi(t,0),\cdot)+(1-\lambda)X_0(\varphi(0,s),\cdot)$$
$$=\lambda X_0\left((t,0),\cdot\right)+(1-\lambda)X_0\left((0,s),\cdot\right)=0.$$

Böylece $t,s\in(0,1)$ için hemen hemen her yerde

$$X_0\left(\left(\lambda\varphi(t,0)+(1-\lambda)\varphi(0,s)\right),\cdot\right)>\lambda X_0(\varphi(t,0),\cdot)+(1-\lambda)X_0(\varphi(0,s),\cdot)$$

eşitsizliği elde edilir ki, bu durumda X_0, $[0,1]^2$ kümesi üzerinde φ-konveks değildir.

Teorem 4.3. Δ kümesi üzerinde φ-konveks $X:\Delta\ x\ \Omega\to\mathbb{R}$ stokastik süreci kuadratik orta anlamda integrallenebilir ve $\varphi:\Delta\to\Delta$ kuadratik orta anlamda sürekli bir fonksiyon olsun. Bu taktirde hemen hemen her yerde aşağıdaki Hermite-Hadamard eşitsizliği doğrudur:

$$X\left(\left(\frac{\varphi(u_1)+\varphi(u_2)}{2},\frac{\varphi(v_1)+\varphi(v_2)}{2}\right),\cdot\right)$$
$$\leq\frac{1}{2(\varphi(u_2)-\varphi(u_1))}\int_{\varphi(u_1)}^{\varphi(u_2)}X\left(\left(t,\frac{\varphi(v_1)+\varphi(v_2)}{2}\right),\cdot\right)dt$$
$$+\frac{1}{2(\varphi(v_2)-\varphi(v_1))}\int_{\varphi(v_1)}^{\varphi(v_2)}X\left(\left(\frac{\varphi(u_1)+\varphi(u_2)}{2},s\right),\cdot\right)ds$$
$$\leq\frac{1}{(\varphi(u_2)-\varphi(u_1))(\varphi(v_2)-\varphi(v_1))}\int_{\varphi(u_1)}^{\varphi(u_1)}\int_{\varphi(v_1)}^{\varphi(v_2)}X\left((t,s),\cdot\right)dtds$$
$$\leq\frac{1}{4(\varphi(u_2)-\varphi(u_1))}\int_{\varphi(u_1)}^{\varphi(u_2)}\left(X\left((t,\varphi(v_1)),\cdot\right)+X\left((t,\varphi(v_2)),\cdot\right)\right)dt$$
$$+\frac{1}{4(\varphi(v_2)-\varphi(v_1))}\int_{\varphi(v_1)}^{\varphi(v_2)}\left(X\left((\varphi(u_1),s),\cdot\right)+X\left((\varphi(u_2),s),\cdot\right)\right)ds$$
$$\leq\frac{1}{4}\begin{pmatrix}X\left((\varphi(u_1),\varphi(v_1)),\cdot\right)+X\left((\varphi(u_1),\varphi(v_2)),\cdot\right)\\+X\left((\varphi(u_2),\varphi(v_1)),\cdot\right)+X\left((\varphi(u_2),\varphi(v_2)),\cdot\right)\end{pmatrix}\tag{4.10}$$

İspat: $X:\Delta \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik süreci Δ kümesi üzerinde φ-konveks olduğundan $X_t:[v_1,v_2] \times \Omega \to \mathbb{R}$, $X_t(v,.) := X\big((t,v),.\big)$ dönüşümü her $t \in [u_1,u_2]$ için $[v_1,v_2]$ kümesi üzerinde φ-konvekstir. Bu durumda hemen hemen her yerde (3.1) eşitsizliği sağlanır ve her $t \in [u_1,u_2]$ için aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir:

$$X_t\left(\frac{\varphi(v_1)+\varphi(v_2)}{2},\cdot\right) \le \frac{1}{\varphi(v_2)-\varphi(v_1)} \int_{\varphi(v_1)}^{\varphi(v_2)} X_t(s,\cdot)ds$$

$$\le \frac{X_t(\varphi(v_1),\cdot)+X_t(\varphi(v_2),\cdot)}{2}.$$

Yani her $t \in [u_1,u_2]$ için aşağıdaki eşitsizlik hemen hemen her yerde doğrudur:

$$X\left(\left(t,\frac{\varphi(v_1)+\varphi(v_2)}{2},\cdot\right)\right) \le \frac{1}{\varphi(v_2)-\varphi(v_1)} \int_{\varphi(v_1)}^{\varphi(v_2)} X\big((t,s),\cdot\big)ds$$

$$\le \frac{X\big((t,\varphi(v_1)),\cdot\big)+X\big((t,\varphi(v_2)),\cdot\big)}{2}.$$

Yukarıdaki eşitsizliğin $[\varphi(u_1),\varphi(u_2)]$ üzerinde t parametresine göre integrali alınıp eşitsizliğin her tarafı $\frac{1}{\varphi(u_2)-\varphi(u_1)}$ ile çarpılırsa hemen hemen her yerde aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\frac{1}{\varphi(u_2)-\varphi(u_1)} \int_{\varphi(u_1)}^{\varphi(u_2)} X\left(\left(t,\frac{\varphi(v_1)+\varphi(v_2)}{2}\right),\cdot\right)dt$$

$$\le \frac{1}{(\varphi(u_2)-\varphi(u_1))(\varphi(v_2)-\varphi(v_1))} \int_{\varphi(u_1)}^{\varphi(u_2)} \int_{\varphi(v_1)}^{\varphi(v_2)} X\big((t,s),\cdot\big)dsdt$$

$$\le \frac{1}{2(\varphi(u_2)-\varphi(u_1))} \int_{\varphi(u_1)}^{\varphi(u_2)} \Big(X\big((t,\varphi(v_1)),\cdot\big)+X\big((t,\varphi(v_2)),\cdot\big)\Big)dt. \quad (4.11)$$

Benzer şekilde $X_s:[u_1,u_2] \times \Omega \to \mathbb{R}$, $X_s(u,\cdot) := X\big((u,s),\cdot\big)$ dönüşümü yardımıyla hemen hemen her yerde aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\frac{1}{\varphi(v_2)-\varphi(v_1)} \int_{\varphi(v_1)}^{\varphi(v_2)} X\left(\left(\frac{\varphi(u_1)+\varphi(u_2)}{2},s\right),\cdot\right)ds$$

$$\le \frac{1}{(\varphi(u_2)-\varphi(u_1))(\varphi(v_2)-\varphi(v_1))} \int_{\varphi(u_1)}^{\varphi(u_2)} \int_{\varphi(v_1)}^{\varphi(v_2)} X\big((t,s),\cdot\big)dsdt$$

$$\leq \frac{1}{2(\varphi(v_2)-\varphi(v_1))}\int_{\varphi(v_1)}^{\varphi(v_2)}\Big(X\big((\varphi(u_1),s),\cdot\big)+X\big((\varphi(u_2),s),\cdot\big)\Big)ds. \quad (4.12)$$

(4.11) ve (4.12) eşitsizlikleri taraf tarafa toplanılırsa, (4.10) eşitsizliğindeki ikinci ve üçüncü eşitsizlikler elde edilir. Benzer şekilde (3.3) eşitsizliği sağlandığından hemen hemen her yerde aşağıdaki eşitsizlikler mevcuttur:

$$X\left(\left(\frac{\varphi(u_1)+\varphi(u_2)}{2},\frac{\varphi(v_1)+\varphi(v_2)}{2}\right),\cdot\right)$$

$$\leq \frac{1}{\varphi(u_2)-\varphi(u_1)}\int_{\varphi(u_1)}^{\varphi(u_2)} X\left(\left(t,\frac{\varphi(v_1)+\varphi(v_2)}{2}\right),\cdot\right)dt;$$

$$X\left(\left(\frac{\varphi(u_1)+\varphi(u_2)}{2},\frac{\varphi(v_1)+\varphi(v_2)}{2}\right),\cdot\right)$$

$$\leq \frac{1}{\varphi(v_2)-\varphi(v_1)}\int_{\varphi(v_1)}^{\varphi(v_2)} X\left(\left(\frac{\varphi(u_1)+\varphi(u_2)}{2},s\right),\cdot\right)ds.$$

Yukarıdaki eşitsizlikler taraf tarafa toplanır ve gerekli işlemler yapılırsa (4.10) eşitsizliğindeki birinci eşitsizlik elde edilir. Ayrıca (3.3) eşitsizliği sağlandığından hemen hemen her yerde aşağıdaki eşitsizlikler elde edilir:

$$\frac{1}{\varphi(u_2)-\varphi(u_1)}\int_{\varphi(u_1)}^{\varphi(u_2)} X\big((t,\varphi(v_1)),\cdot\big)dt$$

$$\leq \frac{X\big((\varphi(u_1),\varphi(v_1)),\cdot\big)+X\big((\varphi(u_2),\varphi(v_1)),\cdot\big)}{2};$$

$$\frac{1}{\varphi(u_2)-\varphi(u_1)}\int_{\varphi(u_1)}^{\varphi(u_2)} X\big((t,\varphi(v_2)),\cdot\big)dt$$

$$\leq \frac{X\big((\varphi(u_1),\varphi(v_2)),\cdot\big)+X\big((\varphi(u_2),\varphi(v_2)),\cdot\big)}{2};$$

$$\frac{1}{\varphi(v_2)-\varphi(v_1)}\int_{\varphi(v_1)}^{\varphi(v_2)} X\big((\varphi(u_1),s),\cdot\big)ds$$

$$\leq \frac{X\big((\varphi(u_1),\varphi(v_1)),\cdot\big)+X\big((\varphi(u_1),\varphi(v_2)),\cdot\big)}{2};$$

$$\frac{1}{\varphi(v_2)-\varphi(v_1)}\int_{\varphi(v_1)}^{\varphi(v_2)} X\big((\varphi(u_2),s),\cdot\big)ds$$
$$\leq \frac{X\big((\varphi(u_2),\varphi(v_1)),\cdot\big)+X\big((\varphi(u_2),\varphi(v_2)),\cdot\big)}{2}.$$

Son olarak yukarıdaki eşitsizlikler taraf tarafa toplanır ve gerekli işlemler yapılırsa, (4.10) eşitsizliğindeki son eşitsizlik elde edilir.

4.4. Koordinatlarda h-Konveks Stokastik Süreçler

Bu kısımda koordinatlarda h-konveks stokastik süreç tanımı verilmiş ve bu süreçler için Hermite-Hadamard eşitsizliği elde edilmiştir. Bu kısmın tamamında aksi belirtilmedikçe $\Delta := T\times S$, $T,S\subset\mathbb{R}$, $u_1,u_2\in T$, $v_1,v_2\in S$, $u_1<u_2$, $v_1<v_2$, $\lambda,\lambda_1,\lambda_2\in(0,1)$ ve $h:(0,1)\to\mathbb{R}$ non-negatif bir fonksiyon, $h\not\equiv 0$, $h\left(\frac{1}{2}\right), h_1\left(\frac{1}{2}\right), h_2\left(\frac{1}{2}\right) > 0$'dır.

Tanım 4.10. Eğer her $(t_1,s_1),(t_2,s_2)\in\Delta$ için hemen hemen her yerde aşağıdaki eşitsizlik sağlanırsa, $X:\Delta\times\Omega\to\mathbb{R}$ stokastik sürecine Δ kümesi üzerinde h-konvekstir denir:

$$X\big((\lambda t_1+(1-\lambda)t_2,\lambda s_1+(1-\lambda)s_2),.\big)$$
$$\leq h(\lambda)X\big((t_1,s_1),\cdot\big)+h(1-\lambda)X\big((t_2,s_2),\cdot\big) \tag{4.13}$$

Yukarıdaki eşitsizlik yön değiştirdiğinde ise X 'e Δ üzerinde h-konkavdır denir.

Tanım 4.11. Eğer her $u\in T$, $v\in S$ için hemen hemen her yerde

$$X_s: T\times\Omega\to\mathbb{R},\; X_s(u,\cdot) := X\big((u,s),\cdot\big),\; X_t: S\times\Omega\to\mathbb{R},\; X_t(v,\cdot) := X((t,v),\cdot)$$

kısmi dönüşümleri sırasıyla h_1 ve h_2-konveks ise $X:\Delta\times\Omega\to\mathbb{R}$ stokastik sürecine koordinatlarda (h_1,h_2)-konvekstir denir.

Koordinatlarda (h_1,h_2)-konveks stokastik süreç formal olarak aşağıdaki gibi de tanımlanmaktadır:

Tanım 4.12. Eğer her $(t_1,s_1),(t_2,s_2)\in\Delta$ için hemen hemen her yerde

$$X\big((\lambda_1 t_1 + (1-\lambda_1)t_2, \lambda_2 s_1 + (1-\lambda_2)s_2),\cdot\big)$$
$$\leq h_1(\lambda_1)h_2(\lambda_2)X\big((t_1,s_1),\cdot\big) + h_1(\lambda_1)h_2(1-\lambda_2)X\big((t_1,s_2),\cdot\big)$$
$$+h_1(1-\lambda_1)h_2(\lambda_2)X\big((t_2,s_1),\cdot\big) + h_1(1-\lambda_1)h_2(1-\lambda_2)X\big((t_2,s_2),\cdot\big).$$
ise $X: \Delta \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik sürecine koordinatlarda (h_1, h_2)-konveks stokastik süreç denir.

Lemma 4.4. Δ kümesi üzerinde h-konveks her $X: \Delta \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik süreci, koordinatlarda h-konvekstir, fakat tersi genel olarak doğru değildir.

İspat: $X: \Delta \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik süreci Δ kümesi üzerinde h-konveks olsun. Bu durumda $X_t: S \times \Omega \to \mathbb{R}$, $X_t(v,\cdot) := X((t,v),\cdot)$ kısmi dönüşümü için $s_1, s_2 \in S$ olmak üzere hemen hemen her yerde aşağıdaki eşitsizlik doğrudur:
$$X_t(\lambda_2\, s_1 + (1-\lambda_2)s_2,\cdot) = X\big((t, \lambda_2 s_1 + (1-\lambda_2)\, s_2),\cdot\big)$$
$$= X\big((\lambda_2 t + (1-\lambda_2)t, \lambda_2 s_1 + (1-\lambda_2)\, s_2),\cdot\big)$$
$$\leq h_2(\lambda_2)X\big((t,s_1),\cdot\big) + h_2(1-\lambda_2)X\big((t,s_2),\cdot\big)$$
$$= h_2(\lambda_2)X_t(s_1,\cdot) + h_2(1-\lambda_2)X_t(s_2,\cdot).$$
Yukarıdaki eşitsizliğe göre, X_t, S kümesi üzerinde h_2-konvekstir. Benzer şekilde $X_s: T \times \Omega \to \mathbb{R}$, $X_s(u,\cdot) := X\big((u,s),\cdot\big)$ kısmi dönüşümünün de T kümesi üzerinde h_1-konveks olduğu gösterilebilir.

Şimdi lemmanın tersinin genel olarak doğru olmadığı gösterilsin:
$X_0: [0,1]^2 \times \Omega \to [0,\infty)$, $X_0\big((t,s),\cdot\big) = ts$ ve $h: (0,1) \to \mathbb{R}$ non-negatif, $h \not\equiv 0$, $h(\lambda) = \lambda$ olsun. Bu durumda X_0, $[0,1]^2$ kümesi üzerinde h-konveks değildir.
Gerçekten, eğer $(t,0), (0,s) \in [0,1]^2$ ise hemen hemen her yerde aşağıdaki eşitlikler yazılabilir:
$$X_0\Big(\big(\lambda(t,0) + (1-\lambda)(0,s)\big),\cdot\Big) = X_0\big((\lambda t, (1-\lambda)s),\cdot\big) = \lambda(1-\lambda)ts;$$
$$h(\lambda)X_0\big((t,0),\cdot\big) + h(1-\lambda)X_0\big((0,s),\cdot\big)$$
$$= \lambda X_0\big((t,0),\cdot\big) + (1-\lambda)X_0\big((0,s),\cdot\big) = 0.$$
Böylece $t, s \in (0,1)$ için hemen hemen her yerde
$$X_0\Big(\big(\lambda(t,0) + (1-\lambda)(0,s)\big),\cdot\Big) > h(\lambda)X_0\big((t,0),\cdot\big) + h(1-\lambda)X_0\big((0,s),\cdot\big)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu durumda X_0, $[0,1]^2$ kümesi üzerinde h-konveks değildir.

Teorem 4.4. $\Delta := [u_1, u_2] \times [v_1, v_2]$ olsun. Δ kümesi üzerinde (h_1, h_2)-konveks $X: \Delta \times \Omega \to \mathbb{R}$ kuadratik orta anlamda integrallenebilir bir stokastik süreç ve $h_1, h_2: (0,1) \to \mathbb{R}$ kuaratik orta anlamda sürekli iki fonksiyon olsun. Bu taktirde hemen hemen her yerde aşağıdaki Hermite-Hadamard eşitsizliği mevcuttur:

$$\frac{1}{4h_1\left(\frac{1}{2}\right)h_2\left(\frac{1}{2}\right)} X\left(\left(\frac{u_1+u_2}{2}, \frac{v_1+v_2}{2}\right), \cdot\right)$$

$$\leq \frac{1}{4h_2\left(\frac{1}{2}\right)(u_2-u_1)} \int_{u_1}^{u_2} X\left(\left(t, \frac{v_1+v_2}{2}\right), \cdot\right) dt$$

$$+\frac{1}{4h_1\left(\frac{1}{2}\right)(v_2-v_1)} \int_{v_1}^{v_2} X\left(\left(\frac{u_1+u_2}{2}, s\right), \cdot\right) ds$$

$$\leq \frac{1}{(u_2-u_1)(v_2-v_1)} \int_{u_1}^{u_2} \int_{v_1}^{v_2} X((t,s),\cdot)\, ds dt$$

$$\leq \frac{1}{2(u_2-u_1)} \int_0^1 h_2(\lambda_2)\, d\lambda_2 \int_{u_1}^{u_2} \left(X((t,v_1),\cdot) + X((t,v_2),\cdot)\right) dt$$

$$+\frac{1}{2(v_2-v_1)} \int_0^1 h_1(\lambda_1)\, d\lambda_1 \int_{v_1}^{v_2} \left(X((u_1,s),\cdot) + X((u_2,s),\cdot)\right) ds$$

$$\leq \left(X((u_1,v_1),\cdot) + X((u_1,v_2),\cdot) + X((u_2,v_1),\cdot) + X((u_2,v_2),\cdot)\right)$$

$$\times \int_0^1 h_1(\lambda_1)\, d\lambda_1 \int_0^1 h_2(\lambda_2)\, d\lambda_2. \tag{4.14}$$

İspat: $X: \Delta \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik süreci Δ kümesi üzerinde h-konveks olduğundan $X_t: [v_1, v_2] \times \Omega \to \mathbb{R}$, $X_t(v,.) := X((t,v),.)$ dönüşümü her $t \in [u_1, u_2]$ için $[v_1, v_2]$ kümesi üzerinde h_2-konvekstir. Bu durumda (3.1) eşitsizliği sağlanır ve her $t \in [u_1, u_2]$ için hemen hemen her yerde aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir:

$$\frac{1}{2h_2\left(\frac{1}{2}\right)} X_t\left(\frac{v_1+v_2}{2}, \cdot\right) \leq \frac{1}{v_2-v_1} \int_{v_1}^{v_2} X_t(s,\cdot) ds$$

$$\leq \left(X_t(v_1,\cdot) + X_t(v_2,\cdot)\right) \int_0^1 h_2(\lambda_2)\, d\lambda_2.$$

Yani her $t \in [u_1, u_2]$ için hemen hemen her yerde aşağıdaki eşitsizlik doğrudur:

$$\frac{1}{2h_2\left(\frac{1}{2}\right)} X\left(\left(t, \frac{v_1+v_2}{2}, \cdot\right)\right) \leq \frac{1}{v_2 - v_1} \int_{v_1}^{v_2} X\left((t,s),\cdot\right) ds$$

$$\leq \left(X\left((t,v_1),\cdot\right) + X\left((t,v_2),\cdot\right)\right) \int_0^1 h_2(\lambda_2)\, d\lambda_2.$$

Yukarıdaki eşitsizliğin $[u_1, u_2]$ üzerinde t parametresine göre integrali alınıp eşitsizliğin her tarafı $\frac{1}{u_2-u_1}$ ile çarpılırsa hemen hemen her yerde aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\frac{1}{2h_2\left(\frac{1}{2}\right)(u_2 - u_1)} \int_{u_1}^{u_2} X\left(\left(t, \frac{v_1+v_2}{2}\right), \cdot\right) dt$$

$$\leq \frac{1}{(u_2-u_1)(v_2-v_1)} \int_{u_1}^{u_2} \int_{v_1}^{v_2} X\left((t,s),\cdot\right) ds dt$$

$$\leq \frac{1}{u_2 - u_1} \int_0^1 h_2(\lambda_2)\, d\lambda_2 \int_{u_1}^{u_2} \left(X\left((t,v_1),\cdot\right) + X\left((t,v_2),\cdot\right)\right) dt. \quad (4.15)$$

Benzer şekilde $X_s: [u_1, u_2] \times \Omega \to \mathbb{R}$, $X_s(u,\cdot) := X\left((u,s),\cdot\right)$ dönüşümü yardımıyla hemen hemen her yerde aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\frac{1}{2h_1\left(\frac{1}{2}\right)(v_2 - v_1)} \int_{v_1}^{v_2} X\left(\left(\frac{u_1+u_2}{2}, s\right), \cdot\right) ds$$

$$\leq \frac{1}{(u_2-u_1)(v_2-v_1)} \int_{u_1}^{u_2} \int_{v_1}^{v_2} X\left((t,s),\cdot\right) ds dt$$

$$\leq \frac{1}{v_2 - v_1} \int_0^1 h_1(\lambda_1)\, d\lambda_1 \int_{v_1}^{v_2} \left(X\left((u_1,s),\cdot\right) + X\left((u_2,s),\cdot\right)\right) ds. \quad (4.16)$$

(4.15) ve (4.16) eşitsizlikleri taraf tarafa toplanılırsa, (4.14) eşitsizliğindeki ikinci ve üçüncü eşitsizlikler elde edilir. Benzer şekilde (3.4) eşitsizliği sağlandığından hemen hemen her yerde aşağıdaki eşitsizlikler mevcuttur:

$$\frac{1}{2h_1\left(\frac{1}{2}\right)} X\left(\left(\frac{u_1+u_2}{2}, \frac{v_1+v_2}{2}\right), \cdot\right) \leq \frac{1}{u_2-u_1} \int_{u_1}^{u_2} X\left(\left(t, \frac{v_1+v_2}{2}\right), \cdot\right) dt;$$

$$X\left(\left(\frac{u_1+u_2}{2}, \frac{v_1+v_2}{2}\right), \cdot\right) \leq \frac{1}{v_2-v_1} \int_{v_1}^{v_2} X\left(\left(\frac{u_1+u_2}{2}, s\right), \cdot\right) ds.$$

Yukarıdaki eşitsizlikler sırasıyla $2h_2\left(\frac{1}{2}\right)$ ve $2h_1\left(\frac{1}{2}\right)$ ile çarpılıp taraf tarafa toplanır ve gerekli işlemler yapılırsa (4.14) eşitsizliğindeki birinci eşitsizlik elde edilir. Ayrıca (3.4) eşitsizliği sağlandığından hemen hemen her yerde aşağıdaki eşitsizlikler elde edilir:

$$\frac{1}{u_2-u_1} \int_{u_1}^{u_2} X\left((t, v_1), \cdot\right) dt \leq \left(X\left((u_1, v_1), \cdot\right) + X\left((u_2, v_1), \cdot\right)\right) \int_0^1 h_1(\lambda_1)\, d\lambda_1;$$

$$\frac{1}{u_2-u_1} \int_{u_1}^{u_2} X\left((t, v_2), \cdot\right) dt \leq \left(X\left((u_1, v_2), \cdot\right) + X\left((u_2, v_2), \cdot\right)\right) \int_0^1 h_1(\lambda_1)\, d\lambda_1;$$

$$\frac{1}{v_2-v_1} \int_{v_1}^{v_2} X\left((u_1, s), \cdot\right) ds \leq \left(X\left((u_1, v_1), \cdot\right) + X\left((u_1, v_2), \cdot\right)\right) \int_0^1 h_2(\lambda_2)\, d\lambda_2;$$

$$\frac{1}{v_2-v_1} \int_{v}^{v_2} X\left((u_2, s), \cdot\right) ds \leq \left(X\left((u_2, v_1), \cdot\right) + X\left((u_2, v_2), \cdot\right)\right) \int_0^1 h_2(\lambda_2)\, d\lambda_2.$$

Son olarak yukarıdaki ilk iki eşitsizlik $\int_0^1 h_2(\lambda_2)\, d\lambda_2$, son iki eşitsizlik $\int_0^1 h_1(\lambda_1)\, d\lambda_1$ çarpılıp taraf tarafa toplanır ve gerekli işlemler yapılırsa, (4.14) eşitsizliğindeki son eşitsizlik elde edilir.

4.5. Koordinatlarda Harmonik Konveks Stokastik Süreçler

Bu kısımda, koordinatlarda harmonik konveks stokastik süreçler tanımı verilmiş ve bu süreçler için Hermite-Hadamard eşitsizliği elde edilmiştir. Bu kısmın tamamında aksi belirtilmedikçe $\Delta := [u_1, u_2] \times [v_1, v_2] \subseteq (0, \infty) \times (0, \infty)$, $u_1 < u_2$, $v_1 < v_2$ ve $\lambda, \lambda_1, \lambda_2 \in [0,1]$'dır [10].

Tanım 4.13[10]. Eğer her $(t_1,s_1),(t_2,s_2)\in\Delta$ için hemen hemen her yerde aşağıdaki eşitsizlik sağlanırsa, $X:\Delta\times\Omega\to\mathbb{R}$ stokastik sürecine Δ kümesi üzerinde harmonik konvekstir denir:

$$X\left(\frac{t_1t_2}{\lambda t_1+(1-\lambda)t_2},\frac{s_1s_2}{\lambda s_1+(1-\lambda)s_2},\cdot\right)$$
$$\leq \lambda X\big((t_1,s_1),\cdot\big)+(1-\lambda)X\big((t_2,s_2),\cdot\big). \tag{4.17}$$

Yukarıdaki eşitsizlik yön değiştirdiğinde ise X'e Δ kümesi üzerinde harmonik konkavdır denir.

Tanım 4.14[10]. Eğer her $t\in[u_1,u_2]$, $s\in[v_1,v_2]$ için hemen hemen her yerde

$$X_s:[u_1,u_2]\times\Omega\to\mathbb{R},,\ X_s(u,\cdot):=X\big((u,s),\cdot\big),$$
$$X_t:[v_1,v_2]\times\Omega\to\mathbb{R},\ X_t(v,\cdot):=X((t,v),\cdot)$$

kısmi dönüşümleri harmonik konveks ise $X:\Delta\times\Omega\to\mathbb{R}$ stokastik sürecine koordinatlarda harmonik konvekstir denir.

Koordinatlarda harmonik konveks stokastik süreç formal olarak aşağıdaki gibi de tanımlanmaktadır:

Tanım 4.15[10]. Eğer her $(t_1,s_1),(t_2,s_2)\in\Delta$ için hemen hemen her yerde

$$X\left(\frac{t_1t_2}{\lambda_1t_1+(1-\lambda_1)t_2},\frac{s_1s_2}{\lambda_2s_1+(1-\lambda_2)s_2},\cdot\right)$$
$$\leq \lambda_1\lambda_2X\big((t_1,s_1),\cdot\big)+\lambda_1(1-\lambda_2)X\big((t_1,s_2),\cdot\big)$$
$$+(1-\lambda_1)\lambda_2X\big((t_2,s_1),\cdot\big)+(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)X\big((t_2,s_2),\cdot\big)$$

ise $X:\Delta\times\Omega\to\mathbb{R}$ stokastik sürecine koordinatlarda harmonik konveks stokastik süreç denir.

Lemma 4.5[10]. Δ kümesi üzerinde harmonik konveks her $X:\Delta\times\Omega\to\mathbb{R}$ stokastik süreci, koordinatlarda harmonik konvekstir, fakat tersi genel olarak doğru değildir.

İspat. $X:\Delta\times\Omega\to\mathbb{R}$ stokastik süreci Δ kümesi üzerinde harmonik konveks olsun. Bu durumda $X_t:[v_1,v_2]\times\Omega\to\mathbb{R}$, $X_t(v,\cdot):=X((t,v),\cdot)$ kısmi dönüşümü için $s_1,s_2\in[v_1,v_2]$ olmak üzere hemen hemen her yerde aşağıdaki eşitsizlik doğrudur:

$$X_t\left(\frac{s_1s_2}{\lambda_2s_1+(1-\lambda_2)s_2},\cdot\right)=X\left(\left(t,\frac{s_1s_2}{\lambda_2s_1+(1-\lambda_2)s_2}\right),\cdot\right)$$
$$=X\left(\left(\frac{t^2}{\lambda_2\mathrm{t}+(1-\lambda_2)\mathrm{t}},\frac{s_1s_2}{\lambda_2s_1+(1-\lambda_2)s_2}\right),\cdot\right)$$
$$\leq\lambda_2X\big((\mathrm{t},s_1),\cdot\big)+\ (1-\lambda_2)X\big((\mathrm{t},s_1),\cdot\big)$$
$$=\lambda_2X_{\mathrm{t}}(s_1,\cdot)+(1-\lambda_2)X_{\mathrm{t}}(s_1,\cdot).$$

Yukarıdaki eşitsizliğe göre, X_t, $[v_1,v_2]$ kümesi üzerinde harmonik konvekstir. Benzer şekilde $X_s:[u_1,u_2]\times\Omega\to\mathbb{R}$, $X_s(u,\cdot):=X\big((u,s),\cdot\big)$ kısmi dönüşümünün de $[u_1,u_2]$ kümesi üzerinde harmonik konveks olduğu gösterilebilir.

Şimdi lemmanın tersinin genel olarak doğru olmadığı gösterilsin:

$X:[1,3]\times[2,3]\times\Omega\to[0,\infty)$, $X\big((t,s),\cdot\big)=(t-1)(s-2)$ olsun. Bu durumda X, $[1,3]\times[2,3]$ kümesi üzerinde harmonik konveks değildir.

Gerçekten, eğer $(1,3)\times(2,3)\in[1,3]\times[2,3]$ ve $\theta\in(0,1)$ ise hemen hemen her yerde aşağıdaki eşitlikler yazılabilir:

$$X\left(\left(\frac{2}{2\theta+(1-\theta)1},\frac{9}{3\theta+3(1-\theta)}\right),\cdot\right)=X\left(\left(\frac{2}{1+\theta},3\right),\cdot\right)=\frac{1-\theta}{1+\theta};$$
$$\theta X\big((1{,}3),\cdot\big)+(1-\theta)X\big((2{,}3),\cdot\big)=0.$$

Böylece $\theta\in(0,1)$ için hemen hemen her yerde

$$X\left(\left(\frac{2}{2\theta+(1-\theta)1},\frac{9}{3\theta+3(1-\theta)}\right),\cdot\right)>\theta X\big((1{,}3),\cdot\big)+(1-\theta)X\big((2{,}3),\cdot\big)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu durumda X, $[1,3]\times[2,3]$ kümesi üzerinde harmonik konveks değildir.

Teorem 4.5[10]. Δ kümesi üzerinde harmonik konveks $X:\Delta\times\Omega\to\mathbb{R}$ stokastik süreci kuadratik orta anlamda integrallenebilir olsun. Bu taktirde hemen her yerde aşağıdaki Hermite-Hadamard eşitsizliği mevcuttur:

$$X\left(\left(\frac{2u_1u_2}{u_1+u_2},\frac{2v_1v_2}{v_1+v_2}\right),\cdot\right)\leq\frac{u_1u_2}{2(u_2-u_1)}\int_{u_1}^{u_2}\frac{1}{t^2}X\left(\left(t,\frac{2v_1v_2}{v_1+v_2}\right),\cdot\right)dt$$

$$+\frac{v_1v_2}{2(v_2-v_1)}\int_{v_1}^{v_2}\frac{1}{s^2}X\left(\left(\frac{2u_1u_2}{u_1+u_2},s\right),\cdot\right)ds$$

$$\leq\frac{u_1u_2v_1v_2}{(u_2-u_1)(v_2-v_1)}\int_{u_1}^{u_2}\int_{v_1}^{v_2}\frac{1}{(ts)^2}X((t,s),\cdot)\,dsdt$$

$$\leq\frac{u_1u_2}{4(u_2-u_1)}\int_{u_1}^{u_2}\frac{1}{t^2}\Big(X\big((t,v_1),\cdot\big)+X\big((t,v_2),\cdot\big)\Big)dt$$

$$+\frac{v_1v_2}{4(v_2-v_1)}\int_{v_1}^{v_2}\frac{1}{s^2}\Big(X\big((u_1,s),\cdot\big)+X\big((u_2,s),\cdot\big)\Big)ds$$

$$\leq\frac{X\big((u_1,v_1),\cdot\big)+X\big((u_1,v_2),\cdot\big)+X\big((u_2,v_1),\cdot\big)+X\big((u_2,v_2),\cdot\big)}{4}. \quad (4.18)$$

İspat. $X:\Delta\times\Omega\to\mathbb{R}$ stokastik süreci Δ kümesi üzerinde harmonik konveks olduğundan $X_t:[v_1,v_2]\times\Omega\to\mathbb{R}$, $X_t(v,.):=X\big((t,v),.\big)$ dönüşümü her $t\in[u_1,u_2]$ için $[v_1,v_2]$ kümesi üzerinde harmonik konvekstir. Bu durumda (3.5) eşitsizliği sağlanır ve her $t\in[u_1,u_2]$ için hemen hemen her yerde aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir:

$$X_t\left(\frac{2v_1v_2}{v_1+v_2},\cdot\right)\leq\frac{v_1v_2}{v_2-v_1}\int_{v_1}^{v_2}\frac{1}{s^2}X_t(s,\cdot)ds\leq\frac{X_t(v_1,\cdot)+X_t(v_2,\cdot)}{2}.$$

Yani her $t\in[u_1,u_2]$ için hemen hemen her yerde aşağıdaki eşitsizlik doğrudur:

$$X\left(\left(t,\frac{2v_1v_2}{v_1+v_2},\cdot\right)\right)\leq\frac{v_1v_2}{v_2-v_1}\int_{v_1}^{v_2}\frac{1}{s^2}X((t,s),\cdot)ds\leq\frac{X\big((t,v_1),\cdot\big)+X\big((t,v_2),\cdot\big)}{2}.$$

Yukarıdaki eşitsizliğin $[u_1,u_2]$ üzerinde t parametresine göre integrali alınıp eşitsizliğin her tarafı $\frac{u_1u_2}{u_2-u_1}$ ile çarpılırsa hemen hemen her yerde aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\frac{u_1u_2}{u_2-u_1}\int_{u_1}^{u_2}\frac{1}{t^2}X\left(\left(t,\frac{2v_1v_2}{v_1+v_2}\right),\cdot\right)dt$$

$$\leq \frac{u_1u_2v_1v_2}{(u_2-u_1)(v_2-v_1)}\int_{u_1}^{u_2}\int_{v_1}^{v_2}\frac{1}{(ts)^2}X\big((t,s),\cdot\big)\,dsdt$$

$$\leq \frac{u_1u_2}{2(u_2-u_1)}\int_{u_1}^{u_2}\frac{1}{t^2}\Big(X\big((t,v_1),\cdot\big)+X\big((t,v_2),\cdot\big)\Big)\,dt. \qquad (4.19)$$

Benzer şekilde $X_s\colon [u_1,u_2]\times\Omega\to\mathbb{R},\ X_s(u,\cdot):=X\big((u,s),\cdot\big)$ dönüşümü yardımıyla hemen hemen her yerde aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\frac{v_1v_2}{v_2-v_1}\int_{v_1}^{v_2}\frac{1}{s^2}X\left(\left(\frac{2u_1u_2}{u_1+u_2},s\right),\cdot\right)ds$$

$$\leq \frac{u_1u_2v_1v_2}{(u_2-u_1)(v_2-v_1)}\int_{u_1}^{u_2}\int_{v_1}^{v_2}\frac{1}{(ts)^2}X\big((t,s),\cdot\big)\,dsdt$$

$$\leq \frac{v_1v_2}{2(v_2-v_1)}\int_{v_1}^{v_2}\frac{1}{s^2}\Big(X\big((u_1,s),\cdot\big)+X\big((u_2,s),\cdot\big)\Big)\,ds. \qquad (4.20)$$

(4.19) ve (4.20) eşitsizlikleri taraf tarafa toplanılırsa, (4.18) eşitsizliğindeki ikinci ve üçüncü eşitsizlikler elde edilir. Benzer şekilde (3.5) eşitsizliği sağlandığından hemen hemen her yerde aşağıdaki eşitsizlikler mevcuttur:

$$X\left(\left(\frac{2u_1u_2}{u_1+u_2},\frac{2v_1v_2}{v_1+v_2}\right),\cdot\right)\leq\frac{u_1u_2}{u_2-u_1}\int_{u_1}^{u_2}\frac{1}{t^2}X\left(\left(t,\frac{2v_1v_2}{v_1+v_2}\right),\cdot\right)dt;$$

$$X\left(\left(\frac{2u_1u_2}{u_1+u_2},\frac{2v_1v_2}{v_1+v_2}\right),\cdot\right)\leq\frac{v_1v_2}{v_2-v_1}\int_{v_1}^{v_2}\frac{1}{s^2}X\left(\left(\frac{2u_1u_2}{u_1+u_2},s\right),\cdot\right)ds.$$

Yukarıdaki eşitsizlikler taraf tarafa toplanır ve gerekli işlemler yapılırsa (4.18) eşitsizliğindeki birinci eşitsizlik elde edilir. Ayrıca (3.5) eşitsizliği sağlandığından hemen hemen her yerde aşağıdaki eşitsizlikler elde edilir:

$$\frac{u_1u_2}{u_2-u_1}\int_{u_1}^{u_2}\frac{1}{t^2}X\big((t,v_1),\cdot\big)dt\leq\frac{X\big((u_1,v_1),\cdot\big)+X\big((u_2,v_1),\cdot\big)}{2};$$

$$\frac{u_1u_2}{u_2-u_1}\int_{u_1}^{u_2}\frac{1}{t^2}X\big((t,v_2),\cdot\big)dt\leq\frac{X\big((u_1,v_2),\cdot\big)+X\big((u_2,v_2),\cdot\big)}{2};$$

$$\frac{v_1 v_2}{v_2 - v_1}\int_{v_1}^{v_2} \frac{1}{s^2} X((u_1, s),\cdot)ds \leq \frac{X((u_1, v_1),\cdot) + X((u_1, v_2),\cdot)}{2};$$

$$\frac{v_1 v_2}{v_2 - v_1}\int_{v_1}^{v_2} \frac{1}{s^2} X((u_2, s),\cdot)ds \leq \frac{X((u_2, v_1),\cdot) + X((u_2, v_2),\cdot)}{2}.$$

Son olarak yukarıdaki eşitsizlikler taraf tarafa toplanır ve gerekli işlemler yapılırsa, (4.18) eşitsizliğindeki son eşitsizlik elde edilir.

4.6. Koordinatlarda Preinvex Stokastik Süreçler için

Bu kısımda, koordinatlarda preinveks stokastik süreçler tanımı verilmiş ve bu süreçler için Hermite-Hadamard eşitsizliği elde edilmiştir. Bu kısmın tamamında aksi belirtilmedikçe $\Delta := T \times S$, $T, S \subset \mathbb{R}^n$ boştan farklı kapalı birer küme, $u_1, u_2 \in T$, $v_1, v_2 \in S$, $u_1 < u_2$, $v_1 < v_2$, λ, $\lambda_1, \lambda_2 \in [0,1]$, $\eta_1 : T \times T \to \mathbb{R}^n$, $\eta_2 : S \times S \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonları ve $X: \Delta \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik süreci kuadratik orta anlamda sürekli olarak kabul edilmiştir.

Tanım 4.16. $(u, v) \in T \times S$ olsun. Eğer her $(t, s) \in T \times S$ ve $\lambda_1, \lambda_2 \in [0,1]$ için

$$\left(u + \lambda_1 \eta_1(t, u), v + \lambda_2 \eta_2(s, v)\right) \in T \times S$$

ise, $T \times S$ kümesine (u, v) noktasında η'ya göre inveks bir küme denir. Eğer T kümesi her bir $(u, v) \in T \times S$ noktasında invex ise, $T \times S$ kümesine η_1 ve η_2'ye göre inveks bir küme denir.

Tanım 4.17. Eğer her (t_1, s_1) , $(t_2, s_2) \in \Delta$ için hemen hemen her yerde aşağıdaki eşitsizlik sağlanırsa, $X: \Delta \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik sürecine Δ kümesi üzerinde η_1 ve η_2'ye göre preinvekstir denir:

$$\begin{aligned} &X\left((t_1 + \lambda \eta_1(t_2, t_1), s_1 + \lambda \eta_2(s_2, s_1)),.\right) \\ &\leq (1 - \lambda) X((t_1, s_1),\cdot) + \lambda X((t_2, s_2),\cdot). \end{aligned} \tag{4.21}$$

Yukarıdaki eşitsizlik yön değiştirdiğinde ise X'e Δ kümesi üzerinde η_1 ve η_2'ye göre prekonkavdır denir.

Tanım 4.18. Eğer her $t \in T$, $s \in S$ için hemen hemen her yerde

$$X_s: T \times \Omega \to \mathbb{R},, \ X_s(u,\cdot) := X\big((u,s),\cdot\big), \ X_t: S \times \Omega \to \mathbb{R}\,, \ X_t(v,\cdot) := X((t,v),\cdot)$$

kısmi dönüşümleri sırasıyla η_1, η_2'ye göre preinveks ise $X: \Delta \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik sürecine koordinatlarda η_1 ve η_2'ye göre preinvekstir denir.

Koordinatlarda preinveks stokastik süreç formal olarak aşağıdaki gibi de tanımlanmaktadır:

Tanım 4.19. Eğer her $(t_1, s_1), (t_2, s_2) \in \Delta$ için hemen hemen her yerde

$$\begin{aligned}
&X\Big(\big(t_1 + \lambda_1\eta_1(t_2,t_1), s_1 + \lambda_2\eta_2(s_2,s_1)\big),.\Big) \\
&\leq (1-\lambda_1)(1-\lambda_2)X\big((t_1,s_1),\cdot\big) + (1-\lambda_1)\lambda_2X\big((t_1,s_2),\cdot\big) \\
&\quad +\lambda_1(1-\lambda_2)X\big((t_2,s_1),\cdot\big) + \lambda_1\lambda_2X\big((t_2,s_2),\cdot\big).
\end{aligned}$$

ise $X: \Delta \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik sürecine koordinatlarda η_1 ve η_2'ye göre preinveks stokastik süreç denir.

Lemma 4.6. Δ kümesi üzerinde η_1 ve η_2'ye göre preinveks her $X: \Delta \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik süreci, koordinatlarda η_1 ve η_2'ye göre preinvekstir, fakat tersi genel olarak doğru değildir.

İspat: $X: \Delta \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik süreci Δ üzerinde η_1 ve η_2'ye göre preinveks olsun. Bu durumda $X_t: S \times \Omega \to \mathbb{R}$, $X_t(v,\cdot) := X((t,v),\cdot)$ kısmi dönüşümü için $\eta(t,t) = 0$ ve $s_1, s_2 \in S$ olmak üzere hemen hemen her yerde aşağıdaki eşitsizlik doğrudur:

$$\begin{aligned}
X_t(s_1 + \lambda_2\eta(s_2,s_1),\cdot) &= X\Big(\big(t, s_1 + \lambda_2\eta(s_2,s_1)\big),\cdot\Big) \\
&= X\Big(\big(t + \lambda_2\eta(t,t), s_1 + \lambda_2\eta(s_2,s_1)\big),\cdot\Big) \\
&\leq (1-\lambda_2)X\big((t,s_1),\cdot\big) + \lambda_2X\big((t,s_2),\cdot\big) \\
&= (1-\lambda_2)X_t(s_1,\cdot) + \lambda_2X_t(s_2,\cdot).
\end{aligned}$$

Yukarıdaki eşitsizliğe göre, X_t, S kümesi üzerinde η_2'ye göre preinvekstir. Benzer şekilde $X_s: T \times \Omega \to \mathbb{R}$, $X_s(u,\cdot) := X\big((u,s),\cdot\big)$ kısmi dönüşümünün de T kümesi üzerinde η_1'ye göre preinveks olduğu gösterilebilir.

Şimdi lemmanın tersinin genel olarak doğru olmadığı gösterilsin:

$X_0: [0,1]^2 \times \Omega \to [0,\infty)$, $X_0((t,s),\cdot) = ts$ ve $\eta: [0,1]^2 \to [0,\infty)$, $\eta(s,t) = s - t$ olsun. Bu durumda X_0, $[0,1]^2$ kümesi üzerinde η'ya göre preinveks değildir. Gerçekten, eğer $(t,0),(0,s) \in [0,1]^2$ ise hemen hemen her yerde aşağıdaki eşitlikler yazılabilir:

$$X_0\Big(\big((t,0) + \lambda\eta((0,s),(t,0))\big),\cdot\Big) = X_0\big(((1-\lambda)t, \lambda s),\cdot\big) = \lambda(1-\lambda)ts;$$

$$\lambda X_0((t,0),\cdot) + (1-\lambda)X_0((0,s),\cdot) = 0.$$

Böylece $t,s \in (0,1)$ için hemen hemen her yerde

$$X_0\Big(\big((t,0) + \lambda\eta((0,s),(t,0))\big),\cdot\Big) > \lambda X_0((t,0),\cdot) + (1-\lambda)X_0((0,s),\cdot)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu durumda X_0, $[0,1]^2$ kümesi üzerinde η'ya göre preinveks değildir.

Teorem 4.6. $\Delta := [u_1, u_1 + \eta_1(u_2,u_1)] \times [v_1, v_1 + \eta_2(v_2,v_1)]$ ve $\Delta \times \Omega$ kümesi üzerinde η_1 ve η_2'ye göre preinveks $X: \Delta \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik süreci kuadratik orta anlamda integrallenebilir olsun ve η_1, η_2 için "C" koşulu sağlansın. Bu taktirde $u_1 < u_1 + \eta_1(u_2,u_1)$ ve $v_1 < v_1 + \eta_2(v_2,v_1)$ için hemen hemen her yerde aşağıdaki Hermite-Hadamard eşitsizliği mevcuttur:

$$X\left(\left(u_1 + \frac{1}{2}\eta_1(u_2,u_1), v_1 + \frac{1}{2}\eta_2(v_2,v_1)\right),\cdot\right)$$

$$\leq \frac{1}{2\eta_1(u_2,u_1)} \int_{u_1}^{u_1+\eta_1(u_2,u_1)} X\left(\left(t, v_1 + \frac{1}{2}\eta_2(v_2,v_1)\right),\cdot\right) dt$$

$$+ \frac{1}{2\eta_2(v_2,v_1)} \int_{v_1}^{v_1+\eta_2(v_2,v_1)} X\left(\left(u_1 + \frac{1}{2}\eta_1(u_2,u_1), s\right),\cdot\right) ds$$

$$\leq \frac{1}{\eta_1(u_2,u_1)\,\eta_2(v_2,v_1)} \int_{u_1}^{u_1+\eta_1(u_2,u_1)} \int_{v_1}^{v_1+\eta_2(v_2,v_1)} X((t,s),\cdot)\, ds\, dt$$

$$\leq \frac{1}{4\eta_1(u_2,u_1)} \int_{u_1}^{u_1+\eta_1(u_2,u_1)} \big(X((t,v_1),\cdot) + X((t,v_2),\cdot)\big) dt$$

$$+ \frac{1}{4\eta_2(v_2,v_1)} \int_{v_1}^{v_1+\eta_2(v_2,v_1)} \big(X((u_1,s),\cdot) + X((u_2,s),\cdot)\big) ds$$

$$\leq \frac{X\big((u_1,v_1),\cdot\big)+X\big((u_1,v_2),\cdot\big)+X\big((u_2,v_1),\cdot\big)+X\big((u_2,v_2),\cdot\big)}{4}. \qquad (4.22)$$

İspat: $X:\Delta\times\Omega\to\mathbb{R}$ stokastik süreci Δ kümesi üzerinde konveks olduğundan $X_t:[v_1,v_1+\eta_2(v_2,v_1)]\times\Omega\to\mathbb{R}$, $X_t(v,.):=X\big((t,v),.\big)$ dönüşümü her $t\in[u_1,u_1+\eta_1(u_2,u_1)]$ için $[v_1,v_1+\eta_2(v_2,v_1)]$ kümesi üzerinde konvekstir. Bu durumda (3.6) eşitsizliği sağlanır ve her t $\in[v_1,v_1+\eta_2(v_2,v_1)]$ için hemen hemen her yerde aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir:

$$X_t\left(v_1+\frac{1}{2}\eta_2(v_2,v_1),\cdot\right)\leq\frac{1}{\eta_2(v_2,v_1)}\int_{v_1}^{v_1+\eta_2(v_2,v_1)}X_t(s,\cdot)ds\leq\frac{X_t(v_1,\cdot)+X_t(v_2,\cdot)}{2}.$$

Yani her $t\in[u_1,u_1+\eta_1(u_2,u_1)]$ için hemen hemen her yerde aşağıdaki eşitsizlik doğrudur:

$$X\left(\left(t,v_1+\frac{1}{2}\eta_2(v_2,v_1),\cdot\right)\right)\leq\frac{1}{\eta_2(v_2,v_1)}\int_{v_1}^{v_1+\eta_2(v_2,v_1)}X\big((t,s),\cdot\big)ds$$

$$\leq\frac{X\big((t,v_1),\cdot\big)+X\big((t,v_2),\cdot\big)}{2}.$$

Yukarıdaki eşitsizliğin $[u_1,u_1+\eta_1(u_2,u_1)]$ üzerinde t parametresine göre integrali alınıp eşitsizliğin her tarafı $\frac{1}{\eta_1(u_2,u_1)}$ ile çarpılırsa hemen hemen her yerde aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\frac{1}{\eta_1(u_2,u_1)}\int_{u_1}^{u_1+\eta_1(u_2,u_1)}X\left(\left(t,v_1+\frac{1}{2}\eta_2(v_2,v_1)\right),\cdot\right)dt$$

$$\leq\frac{1}{\eta_1(u_2,u_1)\,\eta_2(v_2,v_1)}\int_{u_1}^{u_1+\eta_1(u_2,u_1)}\int_{v_1}^{v_1+\eta_2(v_2,v_1)}X\big((t,s),\cdot\big)\,dsdt$$

$$\leq\frac{1}{2\,\eta_1(u_2,u_1)}\int_{u_1}^{u_1+\eta_1(u_2,u_1)}\Big(X\big((t,v_1),\cdot\big)+X\big((t,v_2),\cdot\big)\Big)dt. \qquad (4.23)$$

Benzer şekilde $X_s:[u_1,u_1+\eta_1(u_2,u_1)]\times\Omega\to\mathbb{R}$. $X_s(u,\cdot):=X\big((u,s),\cdot\big)$ dönüşümü yardımıyla hemen hemen her yerde aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\frac{1}{\eta_2(v_2,v_1)}\int_{v_1}^{v_1+\eta_2(v_2,v_1)} X\left(\left(u_1+\frac{1}{2}\eta_1(u_2,u_1),s\right),\cdot\right)ds$$

$$\leq \frac{1}{\eta_1(u_2,u_1)\,\eta_2(v_2,v_1)}\int_{u_1}^{u_1+\eta_1(u_2,u_1)}\int_{v_1}^{v_1+\eta_2(v_2,v_1)} X((t,s),\cdot)\,dsdt$$

$$\leq \frac{1}{2\,\eta_2(v_2,v_1)}\int_{v_1}^{v_1+\eta_2(v_2,v_1)} \left(X((u_1,s),\cdot)+X((u_2,s),\cdot)\right)ds. \qquad (4.24)$$

(4.23) ve (4.24) eşitsizlikleri taraf tarafa toplanılırsa, (4.22) eşitsizliğindeki ikinci ve üçüncü eşitsizlikler elde edilir. Benzer şekilde (3.6) eşitsizliği sağlandığından hemen hemen her yerde aşağıdaki eşitsizlikler mevcuttur:

$$X\left(\left(u_1+\frac{1}{2}\eta_1(u_2,u_1),v_1+\frac{1}{2}\eta_2(v_2,v_1)\right),\cdot\right)$$

$$\leq \frac{1}{\eta_1(u_2,u_1)}\int_{u_1}^{u_1+\eta_1(u_2,u_1)} X\left(\left(t,v_1+\frac{1}{2}\eta_2(v_2,v_1)\right),\cdot\right)dt;$$

$$X\left(\left(u_1+\frac{1}{2}\eta_1(u_2,u_1),v_1+\frac{1}{2}\eta_2(v_2,v_1)\right),\cdot\right)$$

$$\leq \frac{1}{\eta_2(v_2,v_1)}\int_{v_1}^{v_1+\eta_2(v_2,v_1)} X\left(\left(u_1+\frac{1}{2}\eta_1(u_2,u_1),s\right),\cdot\right)ds.$$

Yukarıdaki eşitsizlikler taraf tarafa toplanır ve gerekli işlemler yapılırsa (4.22) eşitsizliğindeki birinci eşitsizlik elde edilir. Ayrıca (3.6) eşitsizliği sağlandığından hemen hemen her yerde aşağıdaki eşitsizlikler elde edilir:

$$\frac{1}{\eta_1(u_2,u_1)}\int_{u_1}^{u_1+\eta_1(u_2,u_1)} X((t,v_1),\cdot)dt \leq \frac{X((u_1,v_1),\cdot)+X((u_2,v_1),\cdot)}{2};$$

$$\frac{1}{\eta_1(u_2,u_1)}\int_{u_1}^{u_1+\eta_1(u_2,u_1)} X((t,v_2),\cdot)dt \leq \frac{X((u_1,v_2),\cdot)+X((u_2,v_2),\cdot)}{2};$$

$$\frac{1}{\eta_2(v_2,v_1)}\int_{v_1}^{v_1+\eta_2(v_2,v_1)} X((u_1,s),\cdot)ds \leq \frac{X((u_1,v_1),\cdot)+X((u_1,v_2),\cdot)}{2};$$

$$\frac{1}{\eta_2(v_2,v_1)} \int_{v}^{v_1+\eta_2(v_2,v_1)} X\left((u_2,s),\cdot\right)ds \leq \frac{X\left((u_2,v_1),\cdot\right)+X\left((u_2,v_2),\cdot\right)}{2}.$$

Son olarak yukarıdaki eşitsizlikler taraf tarafa toplanır ve gerekli işlemler yapılırsa, (4.22) eşitsizliğindeki son eşitsizlik elde edilir.

BÖLÜM 5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tezin giriş kısmında ilk olarak bu konuda literatürde yer alan araştırmalardan kısaca bahsedilmiştir. Kaynak araştırması kısmında, stokastik süreçler ile ilgili gerekli temel kavramlar verilmiştir. Materyal ve yöntem kısmında ise, reel sayılar üzerinde tanımlı bazı konveks stokastik süreçler hakkında bazı bilgiler sunulmuştur. Son olarak, tezin araştırma bulguları kısmında söz konusu bu süreçler koordinatlarda tanımlanmıştır. Ayrıca bu süreçler için Hermite-Hadamard eşitsizliği elde edilmiştir.

Bu çalışmada bulunun sonuçlar, düzgün dağılıma sahip çeşitli konveks stokastik süreçlerin beklenen değeri ile maksimum ve minimum değerlerinin karşılaştırılmasında gereklidir. Yani bu tezde ele alınan çeşitli konveks stokastik süreçler için elde edilen Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikleri, olasılıksal olarak genel durumda kısaca aşağıdaki gibi yorumlamak mümkündür:

$$X(E\Delta,\cdot) \leq_{st} EX(\Delta,\cdot) \leq_{st} EX(\Delta^*,\cdot)$$

Burada E, beklenen değer; X, $\Delta = [a,b] \times [c,d]$ kümesi üzerinde düzgün dağılım sahip belli bir konveks stokastik süreç ve $\leq_{st}$ ise rastgele değişkenlerin konveks sıralaması olarak tanımlanır. Bu tezde ise aşağıdaki gibidir:

1. X, konveks iken $X(A.O(\Delta),\cdot) \leq_{st} EX(\Delta,\cdot) \leq_{st} A.O(X(\Delta,\cdot))$;
2. X, log-konveks iken $X(A.O(\Delta),\cdot) \leq_{st} EX(\Delta,\cdot) \leq_{st} L.O(X(\Delta,\cdot))$;
3. X, φ -konveks iken $X\big(A.O(\varphi(\Delta)),\cdot\big) \leq_{st} EX(\Delta,\cdot) \leq_{st} A.O(X(\varphi(\Delta),\cdot))$;
4. X, h -konveks iken $\frac{1}{2h\left(\frac{1}{2}\right)}X(A.O(\Delta),\cdot) \leq_{st} EX(\Delta,\cdot) \leq_{st} 2A.O(X(\Delta,\cdot)) \int_0^1 h(\lambda)\,d\lambda$;
5. X, harmonik-konveks iken $X(H.O(\Delta),\cdot) \leq_{st} EX(\Delta,\cdot) \leq_{st} A.O(X(\Delta,\cdot))$;
6. X, preinveks iken $X(A.O(\Delta),\cdot) \leq_{st} EX(\Delta,\cdot) \leq_{st} A.O(X(\Delta,\cdot))$,

Burada A.O. aritmetik, H.O, harmonik ve L.O, logaritmik ortalamayı göstermektedir.

Bu konuda, bazı konveks stokastik süreçlerin n-boyutlu uzayda incelenmesi veya bu süreçler için Hermite-Hadamard eşitsizliğinin genelleştirilmesi yapılabilecek çalışmalardandır.

KAYNAKLAR

[1] Aliyev, R., Stokastik Süreçler Teorisi, KTÜ Matbaası,Trabzon, 2010.

[2] Kotrys, D., Hermite–Hadamard inequality for convex stochastic processes, Aequationes Mathematicae, 83, 143-151, 2012.

[3] Tomar, M., Set, E., & Maden, S., Hermite-Hadamard-Type Inequalities for Log- Convex Stochastic Processes, The Journal of New Theory, 2, pp. 23-32, 2015.

[4] Bodur, B., "Stokastik Süreçlerde Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler Ve φ-Konveks Fonksiyonlar", Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı, Afyon Kocatepe Üniversitesi, 2016.

[5] Barraez, D., Gonzalez, L., Merentes, N., Moros, A. M., On h-convex stochastic process, Mathematica Aeterna, 5(4), 571-581, 2015.

[6] Okur, N., İşcan, İ., & Yüksek Dizdar, E., Hermite-Hadamard inequalities for harmonically convex stochastic processes, International Journal of Economic and Administrative Studies, 11 (18. EYI Special Issue), 281-292, 2018.

[7] Akdemir G.H., Okur Bekar, N., & İşcan, İ., On Preinvexity for Stochastic Processes, Statistics, Journal of the Turkish Statistical Association, 7(1), 15-22, 2014.

[8] Set, E., Sarıkaya, &M.Z., Tomar, M., Hermite-Hadamard inequalities for co-ordinates convex stochastic processes, Math. Aeterna, 5 (2), 363-382, 2015.

[9] Okur B., N., Hermite-Hadamard-Type Inequalities for co-ordinated Log-convex Stochastic Processes, ICAA- 2016, Ahi Evran University, July 12-15, Kırşehir-Turkey, 2016.

[10] Okur, N., Işcan, I., & Usta, Y., Some Integral Inequalities for Harmonically Convex Stochastic Processes on the co-ordinates, Advanced Math. Models & Applications, 3(1), 63-75, 2018.

[11] Nikodem, K., On convex stochastic processes, Aequat. Math. 20, 184-197, 1980.

[12] Skowronski, A., On some properties of J-convex stochastic processes, *Aequat. Math.*, 44, 249-258, 1992.

[13] Josip E., Pecaric J.E, Proschan, F. & Thong, Y.L., Convex Functions, Parital Orderings, and Statistical Applications Mathematics in Science and Engineering Series, Academic Press, 1992.

[14] İşcan, İ., Hermite-Hadamard type Inequalities For Harmonically Convex Functions, Hacettepe Journal of Mathematics and statistics, 43 (6), 935-942, 2014.

[15] Antczak T., A new method of solving nonlinear mathematical programming problems involving r-invex functions, J. Math. Anal. Appl. 311(1), 313–323, 2005.

[16] Noor, M. A., Noor K. I. & Awan, M. U., Integral inequalities for coordinated harmonically convex functions. Comp. Vari. Ellip. Equat., 60(6) 776-786, 2015.

[17] Youness E. A., E-Convex Sets, E-Convex Functions and E-Convex Programming, Journal of Optimization Theory and Applications, 102(2), 439-450, 23,1999.

[18] Dragomir, S.S., On the Hadamard's inequlality for convex functions on the co-ordinates in a rectangle from the plane, Taiwanese Journal of Mathematics, 5(4), 775-788, 2001.

[19] Varošanec, S., On *h*-convexity, J. Math. Anal. Appl., 326, 303–311, 2007.

[20] Sarıkaya Z., Kiris M.E. & Celik N. Hermite-Hadamard type inequality for φh-convex stochastic processes, AIP Conference Proceedings: doi: http://dx.doi.org/10.1063/1.4945902, 2016.

[21] Libo Li, Zhiwei Hao, On Hermite–Hadamard inequality for h-convex stochastic processes, Aequationes mathematicae, 91(5), 909–920, 2017.

[22] Mohan, S. R. & Neogy, S. K., On invex sets and preinvex functions, J. Math. Anal. Appl. 189, 901-908, 1995.

ÖZGEÇMİŞ

1993 yılında Bursa'da doğdu. İlköğretim ve lise öğrenimini Bursa ilinde tamamlayarak, 2012 yılında Giresun Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi İstatistik bölümünü kazandı. 2013-2015 yılları arasında Giresun Üniversitesi İstatistik ve Kariyer Topluluğu Denetleme ve Düzenleme Kuruluğu Başkanlığı akabinde 2015-2016 yılları arasında Yönetim Kurulu üyeliği yaptı. Ayrıca 2014 yılında T.C Ziraat Bankası'nda yaz stajı ve 2015 yılında Uludağ Üniversitesi Biyoİstatistik Anabilim Dalında staj yaptı. 2016 yılında Giresun Üniversitesi İstatistik Bölümü'nden mezun oldu. Aynı yıl içerisinde Giresun Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitü Yüksek-Lisans programına kaydoldu.

Uluslararası diğer hakemli dergilerde yayınlanan makaleler

Okur N., Iscan I., & Usta Y., Some integral inequalities for Harmonically convex Stochactic Processes on the co-ordinates, Advanced Math. Models & Appicaitons Vol. 3, No.1, pp. 63-75, 2018

Uluslararası bilmsel toplantılarda sunulan ve bildiri kitabında (Proceedings) basılan bildiriler

Okur N,. Usta Y,. & Iscan I., A Generalization of the Hermite-Hadamard's inequality for convex Stochactic Processes on the co-ordinates, ICMM-2018: International