

**T.C.
ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

DOKTORA TEZİ

UZAY FORMLARINDA LİNEER WEINGARTEN YÜZEYLERİ

FERAY BAYAR

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**SAMSUN
2018**

Her hakkı saklıdır.

TEZ ONAYI

Feray Bayar tarafından hazırlanan “*Uzay Formlarında Lineer Weingarten Yüzeyleri*” adlı tez çalışması 08/06/2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda **Doktora Tezi** olarak kabul edilmiştir.

Danışman Prof. Dr. Ayhan SARIOĞLUGİL
Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Matematik Anabilim Dalı

Jüri Üyeleri

Başkan Prof. Dr. Nuri KURUOĞLU
İstanbul Gelişim Üniversitesi
İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı

Üye Prof. Dr. Emin KASAP
Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Matematik Anabilim Dalı

Üye Prof. Dr. Mustafa DÜLDÜL
Yıldız Teknik Üniversitesi
Matematik Anabilim Dalı

Üye Prof. Dr. Ayhan SARIOĞLUGİL
Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Matematik Anabilim Dalı

Üye Dr. Öğr. Üyesi Zuhâl ÜNAN
Ondokuz Mayıs Üniversitesi
İlköğretim Matematik Eğitimi Anabilim Dalı

Yukarıdaki sonucu onaylarım. / /2018

Prof. Dr. Bahtiyar ÖZTÜRK
Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

08/06/2018

Feray BAYAR

ÖZET

Doktora Tezi

UZAY FORMLARINDA LINEER WEINGARTEN YÜZEYLERİ

Feray Bayar

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Ayhan Sarıoğlugil

Öklid uzayında lineer Weingarten kanal yüzeyleri ya bir tubular yüzeydir ya da bir dönel yüzeye paraleldir. Bu çalışmada bu sonuç diğer uzay formlarına genelleştirilerek, lineer Weingarten kanal yüzeylerinin herhangi bir uzay formunda izotermik olduğu ispatlanmaktadır. Buna göre birinci bölümde problemin açık ifadesi ve tezin amacı ayrıntılı olarak belirtilmiş olup literatür özeti verilmiştir. İkinci bölüm, Möbius ve Lie küre geometrinin temel kavramlarına ayrılır iken, üçüncü bölümde problemin çözüm metodunu içeren Öklid uzayında sınıflandırma sonuçlarının nasıl elde edildiği gösterilmiştir. Dördüncü bölüm genel sınıflandırma sonuçlarını içermesinin yanı sıra lineer Weingarten yüzeylerinin özel omega yüzeyleri olarak nasıl ortaya çıktıkları ve izotermik yüzeylerin ayrıntılı incelemesi verilmektedir. Son bölümde ise elde edilen bulgular özetlenerek sonuçların olası uygulama alanları ifade edilmiştir.

Haziran 2018, 74 sayfa

Anahtar Kelimeler: Lineer Weingarten yüzeyleri, Uzay formları, Omega yüzeyleri, İzotermik yüzeyler, Kanal yüzeyleri

ABSTRACT

Doctoral Dissertation

LINEAR WEINGARTEN SURFACES IN SPACE FORMS

Feray Bayar

Ondokuz Mayıs University
Graduate School of Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Ayhan Sariođlugil

In Euclidean space every linear Weingarten channel surface is either tubular or parallel to a surface of revolution. In this thesis, by generalizing this result to other space forms, it's proven that the linear Weingarten channel surfaces are isothermic in any space form. Hereunder, in the first chapter the clear description of the problem and the aim of the thesis is determined and the literature is summarized. While the second chapter is parted into the basic notions of Möbius and Lie sphere geometry, in the third chapter it is pointed how to obtain the classification results, which contain the methods in Euclidean space. The fourth chapter has not only the general classification results but also it gives how the linear Weingarten surfaces appear as special omega surfaces and besides detailed review of the isothermic surfaces. At the last chapter the results which acquired are summarized and possible applications of the results are stated.

June 2018, 74 pages

Key Words: Linear Weingarten surfaces, Space forms, Omega surfaces, Isothermic surfaces, Channel surfaces

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Bu tez çalışması Vienna University of Technology, Differential Geometry and Geometric Structures araştırma grubunda, Tübitak 2214-A Yurtdışı Doktora Sırası Araştırma Burs Programı desteğiyle yürütülen bir araştırmanın ürünüdür. Diferansiyel geometrinin farklı alanlarını bana tanıtan, yoğun iş temposuna rağmen karşılaştığım problemlerde defalarca yol gösteren, 18 ay boyunca çalışma fırsatını yakaladığım araştırma grubunda evimde gibi hissetmemi sağlayan Prof. Dr. Udo Hertrich-Jeromin'e çok teşekkür ederim. Ayrıca doktora eğitimimin Viyana'da geçen süresinin başlamasına önyak olan Prof. Dr. Helmuth Stachel'e minnettarım.

Akademik hayatıma yön veren, fikirleriyle her daim ufkumu açan, lisansüstü eğitimim boyunca bilgisini paylaşmaktan, desteğini göstermekten hiçbir zaman kaçınmayan ve en önemlisi bu tezin oluşmasında benim yol çizgimi belirleyen danışmanım saygıdeğer hocam Prof. Dr. Ayhan Sarıoğugil'e büyük teşekkür borçluyum.

Değerli tez jüri üyeleri hocalarım Prof. Dr. Emin Kasap ve Dr. Öğr. Üyesi Zuhâl Ünan'a tez izleme dönemleri boyunca sağladıkları kolaylıklardan ötürü şükranlarımı sunarım.

Bu çalışma Denis Polly ile hazırlanan ortak bir çalışmanın sonuçlarını içermektedir. Denis Polly'ye, başlangıçta bana çok farklı gelen bir çalışma alanının metodlarını usanmadan anlattığı, tez konuma yabancılaşmaktan kurtardığı, bitmek bilmez enerjisi ve motivasyonunu benimle paylaştığı için çok teşekkür ederim.

Vienna University of Technology, Differential Geometry and Geometric Structures araştırma grubunun değerli üyelerine bölümün imkanlarından faydalanmamı sağladıkları, misafirperverlikleri, yardımseverlikleri ve beni ailenin bir üyesi olarak kabul ettikleri için saygılarımı sunarım. Özel olarak Davide Pellis'e, tezimin şekillerini büyük bir özenle çizdiği, manevi desteği ile her zaman yanımda olduğu ve en umutsuz olduğumu düşündüğüm zamanlarda bile yol gösterdiği için teşekkür ederim.

Akademik duruşuna saygı duyduğum, benim de akademik kimliğimin oluşmasında büyük katkıları olan hocam Doç. Dr. Ayşe Sandıkçı'ya şükranlarımı sunarım.

Bugüne kadar aldığım her kararın arkasında duran, bana güvenen, koşulsuz sevgilerinin benim için hep orada olduğunu bildiğim en kıymetli varlıklarım, sevgili ailem, annem Ayşe Bayar, babam Asım Bayar, abim Gökhan Bayar ve eşi Emine Bayar, yaşam ve neşe kaynağım yeğenim Melike Bayar'a teşekkür ederim.

Samsun'daki ailem, canım Merve Hacısüleymanoğlu'na, cesaretimin kaynağı olduğu, bana koşullar ne olursa olsun daima bir çıkış yolu olduğunu öğrettiği, en önemlisi bana kardeşten öte bir dost olduğu için ve eşi Mithat Hacısüleymanoğlu'na vizyon sahibi fikirlerini benimle paylaşarak hayata bakışımı yönlendirdiği için en derinden teşekkürlerimi sunarım.

Lisansüstü eğitimimin bana kazandırdığı en değerli dostlardan biri olan Sıdika Tul'a, paralel ilerleyen akademik hayatımızda hep yanımda olduğu, problemlerimizin çözümünde mutlaka yapıcı bir çözüm bulduğu, ayrıca uzun çalışma saatleri boyunca motivasyonu için minnettarım.

Dostlarım Çiğdem Süsoy Atalar, Mustafa Kemal Atalar, Nazlı Murzioğlu, Nihan Güngör ve Çağla Kumbasar'a yoğun ve de yorucu olan bu süreçte neredeyse her anımda benimle oldukları, zaman mefhumu gözetmeksizin her türlü yardımı benden esirgemedikleri için en içten sevgilerimi ve teşekkürlerimi sunarım.

Son olarak araştırmam süresince 2214-A Yurtdışı Doktora Sırası Araştırma Burs Programı kapsamında sağladığı maddi destekten ötürü TÜBİTAK'a teşekkür ederim.

Haziran 2018, Samsun

Feray Bayar

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	v
SİMGELER VE KISALTMALAR	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ	viii
1. GİRİŞ	1
2. KURAMSAL TEMELLER VE KAYNAK ÖZETLERİ	5
2.1. Möbius Geometri	5
2.1.1. Light koni modeli	6
2.1.2. Möbius geometrinin temel bileşenleri	8
2.1.3. Uzay formları	11
2.1.4. Möbius dönüşümleri	12
2.2. Lie küre geometrisi	14
2.2.1. Kontakt elemanlar	16
2.2.2. Legendre immersiyonları	18
2.2.3. Lie küre dönüşümleri	19
3. MATERYAL VE YÖNTEM	21
3.1. Cyclic Lineer Weingarten Yüzeyleri	29
3.2. \mathbb{R}^3 de Lineer Weingarten Kanal Yüzeyleri	31
4. BULGULAR VE TARTIŞMA	37
4.1. İzotermik Yüzeyler	37
4.1.1. Laplace invaryantları	37
4.1.2. Konjuge parametreler	38
4.1.3. Konformal parametreler	40
4.1.4. Moutard liftleri	42
4.2. Lineer Weingarten Yüzeyleri	44
4.2.1. Eğrilik küresi kongrüansları	44
4.2.2. Ω -yüzeyleri	47

4.2.3. Lie küre geometride lineer Weingarten yüzeyleri	48
4.3. Kanal Yüzeyleri	51
4.3.1. Vessiot Teoremi	54
4.4. Lineer Weingarten Kanal Yüzeyleri	54
5. SONUÇ VE ÖNERİLER	57
KAYNAKLAR	59
EKLER	63
ÖZGEÇMİŞ	64



SİMGELER

$\mathbb{R}^{4,1}$	Minkowski uzayı
L^4	Light koni
$\mathbb{R}P^4$	Projektif uzay
$S^{3,1}$	Lorentz küresi
\mathcal{L}^4	Lie kuadriği
\mathfrak{T}	Hiperdüzlemlern uzayı
Λ	Legendre dönüşümü
$\Gamma\Lambda$	Legendre dönüşümünün kesitlerinin kümesi
\mathcal{L}	Legendre lifti
\mathcal{L}	Laplace operatörü
m	Moutard lifti
s^\pm	İzotermik küre kongrüansları

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. Stereografik izdüşüm.....	6
Şekil 2.2. Möbius geometride hiperküreler.....	9
Şekil 2.3. Yarıçap ve merkezi ile verilen bir hiperküre.....	10
Şekil 2.4. $\mathbb{R}^{4,1}$ Minkowski uzayında doğrular olarak S^3 de hiperküreler.....	11
Şekil 2.5. Light koni kuadrikleri olarak sabit eğrilikli uzaylar.....	13
Şekil 4.1. Bir küre kongrüansının zarfı.....	51



1. GİRİŞ

Uzay formlarında lineer Weingarten yüzeylerinin oluşturduğu yüzey sınıfları, diferansiyel geometri alanında çalışan araştırmacıların son zamanlarda en cazip çalışma alanlarından biri haline gelmiştir. Bunun sebepleri şu şekilde açıklanabilir: İlk olarak, bu yüzeylere sabit Gauss ve sabit ortalama eğrilikli yüzeylerin alt sınıflarına benzer şekilde, integrallenebilir bir sistemle yaklaşılabilir. İkinci olarak ise Riemann veya Lorentz uzay formlarında bazı lineer Weingarten yüzey tipleri (en çok dikkat çeken hiperbolik uzayda Bryant tipi lineer Weingarten yüzeyleri) Öklid uzayındaki minimal yüzeyler gibi benzer metotlara erişebilmeyi sağlayan Weierstrass tipi gösterimlere sahiptir. Hatta bazı lineer Weingarten yüzeyleri (örneğin; Öklid uzayındaki yarı küresel yüzeyler) kendi özelliklerinin gerekliliği ve doğal bir sonucu olarak singüleriği geliştirmektedir. Dolayısıyla yüzeylerde singüleriği çalışabilmek için bu yüzeyler en ideal sınıf haline gelmektedir.

Öklid uzayında $f : \Sigma^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ yüzeyi verilsin. $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ ve bu yüzeyin Gauss ve ortalama eğrilikleri, sırasıyla, K ile H olmak üzere

$$aK + 2bH + c = 0 \quad (1.1)$$

şeklinde aşık olmaya bir bağıntı sağlanıyorsa, f yüzeyine bir *lineer Weingarten yüzeyi* adı verilir. Açıkça sabit ortalama eğrilikli yüzeyler ($a = 0$) ve sabit Gauss eğrilikli yüzeyler ($b = 0$) birer lineer Weingarten yüzey örnekleridir. Bunlara göre daha az bilinen ise eğrilik yarıçaplarının ortalamaları sabit ($c = 0$) olan yüzeyler, yani minimal yüzeylerin paralel yüzeyleridir.

Lineer Weingarten yüzeyleri için (1.1) denkleminin benzer bir tanım, Lorentz uzay formlarında (spacelike) lineer Weingarten yüzeyler için kullanılır. Gauss eğriliğinin (açık) $K = k_1 k_2$ gösterimi veya (kapalı) indirgenmiş gösteriminin kullanılıp kullanılmaması yapı denkleminin bağımsız iken, kapalı formda Gauss eğriliğini kullanmak daha yaygındır. Bu nedenle (1.1) denkleminin asli eğriliklerin kuadratik bir denkleminin olarak kalır. Bu durumda lineer Weingarten yüzeyi özel olarak *tüp yüzeyi* adını alır. Diğer bir ifadeyle, verilen bir lineer Weingarten yüzeyinin sabit asli eğriliğe sahip olması için gerek ve yeter koşul, (1.1) kuadratik denkleminin $ac - b^2 = 0$ diskriminantına sahip olmasıdır.

Bütün uzay formlarındaki geometriler S^3 Möbius (konformal) geometrinin alt geometrileri olarak ortaya çıkmaktadır. $q \in \mathbb{R}^{4,1}$ olmak üzere

$$\mathfrak{R} := \{x \in L^5 : (x, x) = 0, (x, q) = -1\} \quad (1.2)$$

kuadriği $\kappa := -|q|^2$ sabit eğriliğine sahiptir (Burstall vd, 2012). Lie küre geometrisi ise aynı zamanda Lorentz uzay formlarını içermektedir (Blaschke, 1929). Bu bağlamda tubular yüzey olmayan lineer Weingarten yüzeyleri, özel olarak Ω -yüzeyleri olarak karakterize edilebilir (Burstall, 2006). Ω -yüzeyleri, (Demoulin, 1911a) ve (Eisenhart, 1915b) kaynaklarından da görüleceği üzere genel özelliklere sahip, geniş kapsamlı Lie küre geometrisinin esnek yüzeyleridir veya buna denk bir ifadeyle harmonik olarak eğrilik kürelerini ayıran izotermik küre kongrüanslarının bir çifti tarafından belirlenen Legendre liftleri ile karakterize edilebilir (Blaschke, 1929). Böyle bir Ω yüzeyinin herhangi bir uzay formunda lineer Weingarten olması için gerek ve yeter koşul yüzeyin izotermik küre kongrüansından her birinin bir uzay formu izdüşümünü tanımlayan, sabit bir küre kompleksinde değerler almasıdır (Burstall, 2006).

Lineer Weingarten yüzeylerinin özel Ω -yüzeyleri olarak karakterizasyonu, bu yüzey sınıflarına integrallenebilir sistem yaklaşımı aracılığıyla geometrik bir bakış sağlamaktadır. Böylece izotermik yüzeylerin zengin teorisi ulaşılabilir hale gelmektedir. Özel olarak, izotermik yüzeylerin dönüşümler açısından zengin teorisi ulaşılabilir hale gelmektedir. Klasik çalışmalar için (Christoffel, 1867), (Demoulin, 1911b), (Calapso, 1903), (Calapso, 1915), (Bianchi, 1905), (Bianchi, 1904), (Musso and Nicolodi, 2006) veya (Bobenko, 2008) kaynakları incelenebilir. Bunlardan bağımsız olarak Ω yüzeylerinin dönüşümlerinin klasik değerlendirmesi (Eisenhart, 1915b) ve (Eisenhart, 1915a) kaynaklarında verilmiştir, ayrıca modern yaklaşımlar için (Clarke, 2012) ve (Pember, 2015) incelenebilir.

Lineer Weingarten kanal yüzeyleri yani, 1-parametrel küre ailesinin zarfı olan lineer Weingarten yüzeyleri Öklid uzayında sınıflandırılmıştır (Hertrich-Jeromin vd, 2015), (Tunçer vd, 2011) ve (López, 2008b). Bunlar ya açık bir şekilde parametrik hale getirilebilen tubular yüzeyler ya da dönel yüzeylerdir. Bu yüzeyler birinci olarak Hilbert'in yarı küresel yüzeylerin singülerliğinin varlığı üzerine olan teoreminin genelleştirmesini incelemek (Aledo Sánchez and Espinar,

2007), (López, 2008b), ikinci olarak da Lie geometride iki yönden de esnek yüzeyleri (Musso and Nicolodi, 2006) araştırmak adına önemli örnekler içermektedir.

Bu tez çalışmasında sözü edilen lineer Weingarten kanal yüzeylerinin bir uzay form geometrisinde daha genel oluşumlar için sınıflandırılmasını ispatlamak üzere küre geometri metotlarını uygulamak amaçlanmaktadır. Bu amaç doğrultusunda, daha genel sınıflandırma sonucuna ulaşmak arzu edilmektedir. Daha açık belirtmek gerekirse, bu alternatif yaklaşım Öklidyen durumun yetersiz kaldığı bazı durumlarda geometrik bir kavrama sağlayacaktır. Bu da lineer Weingarten yüzeylerinin Lie geometrik karakterizasyonu kullanılarak yapılacaktır. Diğer taraftan, lineer Weingarten kanal yüzeyleri Lie küre geometrisinde çoklu esnek yüzeyler (multiply non-rigid surfaces) oluşturduğu için, bu yaklaşımın Ω -yüzeyleri sınıfının daha iyi anlaşılmasını kolaylaştırması beklenmektedir (Ferapontov, 2002) ve (Musso and Nicolodi, 2006). Amaç sadece bu değerlendirmeler altında yüzeylerin soyut bir sınıflandırmasını yapmak değil, aynı zamanda yapılanların uygulanabilirliğini elde etmektir. Örneğin Weierstrass gösterimi veya olası dönüşümler kullanımının yanında uygun veri ve eliptik fonksiyonlara göre açık parametrik gösterimlerin bulunması ve deneyler için uygun grafik veya nümerik modeller, daha da ötesi üretilen verilerin analizinin yapılması tez çalışmasının olası sonuçlarıdır. Yani temel amaç, farklı bakış açılarının ilgisini çeken lineer Weingarten yüzeylerinin özel bir sınıfı olan lineer Weingarten kanal yüzeylerinin sınıflandırılması için küre geometrisi metotlarına başvurmadır.

2. KURAMSAL TEMELLER VE KAYNAK ÖZETLERİ

2.1. Möbius Geometri

Projektif geometrinin bir alt geometrisi olan Möbius geometride herhangi bir açıyı ölçmek mümkün iken, Öklid geometrisinin aksine uzaklık ölçülemez. Bu nedenle yüzeylerin Möbius geometrisi, metriklerin konformal bir çeşidiyle donatılmış ancak bilinen bir metrik taşımayan herhangi bir ambient uzaydaki yüzeylerin geometrisi olarak ele alınabilir. F. Klein'a göre yüzeylerin Möbius geometrisi ise Möbius dönüşümleri altında korunan konformal S^3 küresi içindeki yüzeylerin özelliklerini inceler. (Burada Möbius dönüşümü ile S^3 de hiperküreleri koruyan bir dönüşüm, hiperküre ile de \mathbb{R}^4 Öklid uzayındaki bir afin hiperdüzlemi ve $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ küresinin enine kesişimi belirtilmektedir). $S^3 \cong \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ küresinin Möbius dönüşümlerinin grubu inversiyonlar, yani S^3 deki hiperkürelerin yansımaları tarafından üretilmektedir.

Möbius diferansiyel geometride uzaklığın ölçülememesi ilginç sonuçlar oluşturur. Örneğin; Möbius geometriye göre düzlemler (∞ noktasını içeren küreler olarak) ve \mathbb{R}^3 deki küreler birbirine denktir. Buradan Klein'ın bakış açısına¹ dayanarak Möbius geometrinin Öklid geometrinin bir alt geometrisi olduğu sonucuna ulaşılabilir.

Bunun dışında, yüzeylerin klasik diferansiyel geometrik invariantları da anlamını yitirir. Örneğin; bir yüzey üzerindeki indirgenmiş metrik kavramının yanı sıra eğrilik kavramı da \mathbb{R}^3 uzayındaki küre ve düzlem örneklerinden dolayı manasızlaşır. Bunun sebebi, bu kavramların ambient uzayın metrikleri kullanılarak tanımlanmalarından kaynaklanmaktadır.

Möbius geometri klasik olarak projektif geometrinin bağlamında yer almaktadır. \mathbb{R}^3 Öklid uzayı konformal olarak S^3 birim küresine stereografik izdüşüm dönüşümü ile denk olduğundan, Möbius uzayında çalışabilmek için temel uzay olarak \mathbb{R}^3 yerine S^3 alınabilir. Bu özellik, ∞ noktasını dikkate almak için hiperküre ve hiperdüzlemleri ayırt etmeye gerek kalmayacağından işleri daha da kolaylaştırmaktadır.

¹Klein'ın bakış açısı: Möbius dönüşümlerinin grubu inversiyonlar tarafından üretilir. Yani düzlemlerdeki (özel küreler olarak) yansımalara kısıtlayarak Öklid uzayında izometrilerin grubu elde edilir.

2.1.1. Light koni modeli

Bu bölüm boyunca (Cecil, 1992) kaynağından yararlanılacaktır.

$x, y \in \mathbb{R}^4$ için $x.y$ çarpımı, x ve y vektörlerinin iç çarpımı olmak üzere, S^3 birim küresi, $\forall x \in \mathbb{R}^4$ için $x.x = 1$ koşulunu sağlayan noktaların kümesidir. \mathbb{R}^3 Öklid uzayı, \mathbb{R}^4 de $x_1 = 0$ denklemi ile verilen hiperdüzlem ile tanımlanırsa

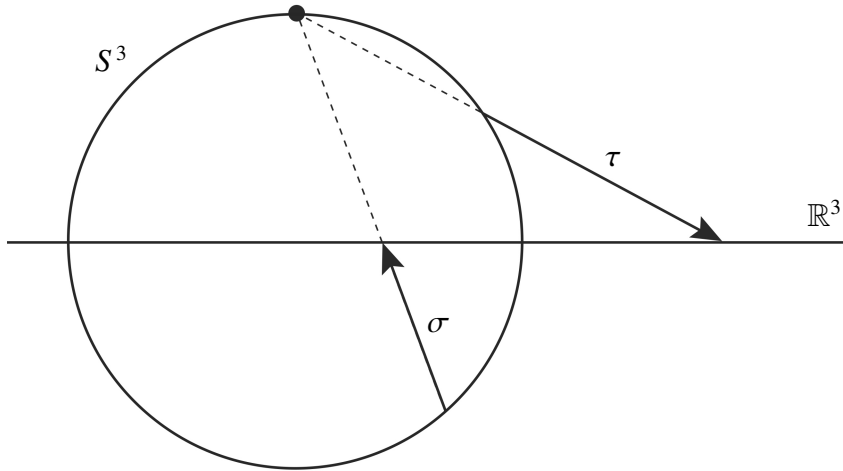
$$(0, x_2, x_3, x_4) \sim \mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^4 \quad (2.1)$$

yazılabilir.

Tanım 2.1. S^3 birim küresinin güney kutup noktası $P = (-1, 0, 0, 0)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \tau : S^3 - \{P\} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x_1, x_2, x_3, x_4) &\rightarrow \tau(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(0, \frac{x_2}{x_1 + 1}, \frac{x_3}{x_1 + 1}, \frac{x_4}{x_1 + 1}\right) \end{aligned} \quad (2.2)$$

dönüşümüne *stereografik izdüşüm dönüşümü* adı verilir.



Şekil 2.1: Stereografik izdüşüm

Tanım 2.2. $u = (u_2, u_3, u_4) \in \mathbb{R}^3$ noktası için

$$\begin{aligned} \sigma : \mathbb{R}^3 &\rightarrow S^3 - \{P\} \\ \sigma(u) &= \left(\frac{1 - u.u}{1 + u.u}, \frac{2u}{1 + u.u}\right) \end{aligned} \quad (2.3)$$

dönüşümü de *ters stereografik izdüşüm dönüşümü* olarak tanımlıdır.

Bu bölümde amaç S^3 de yönlendirilemeyen hiperkürelerin uzayını oluşturmaktır. Bu nedenle, 5- boyutlu $\mathbb{R}^{4,1}$ Minkowski uzayında bazı temel bilgilerin bilinmesi gerekmektedir.

Tanım 2.3. $x, y \in \mathbb{R}^{4,1}$ için

$$(x, y) = -x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4 + x_5y_5 \quad (2.4)$$

bilneer formuna *Lorentz skalar çarpımı* denir. Ayrıca herhangi bir $x \in \mathbb{R}^{4,1}$ vektörü sırasıyla, $(x, x) > 0$ ise *spacelike*, $(x, x) < 0$ ise *timelike* ve $(x, x) = 0$ ise *lightlike* olarak adlandırılır.

Tanım 2.4. $\mathbb{R}^{4,1}$ Minkowski uzayında bütün lightlike vektörlerin kümesi

$$L^4 = \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^{4,1} : |x|^2 = 0\} \quad (2.5)$$

şeklinde bir dönel koni meydana getirmektedir. Bu koniye *light koni* denir. Timelike vektörler light koni içinde, spacelike vektörler dışında ve lightlike vektörler koni üzerindedir.

Möbius geometrinin klasik light koni modelinin temeli \mathbb{R}^4 Öklid uzayının $\mathbb{R}P^4$ projektif uzayının bir alt afin uzayı olacak şekilde gömülmesiyle oluşturulur. Yani temel fikir $S^3 \cong \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ konformal 3- küresini bir kuadrik olarak $\mathbb{R}^{4,1}$ Minkowski uzayının projektif light konisi olacak şekilde $\mathbb{R}P^4$ projektif uzayına gömmektir. Kısaca $S^3 \cong PL^4$ ile gösterilebilir.

Tanım 2.5. $\mathbb{R}P^4$ projektif uzayının bir afin hiperdüzlemi \mathbb{R}^4 olmak üzere

$$\begin{aligned} \psi : S^3 \subset \mathbb{R}^4 &\rightarrow \mathbb{R}P^4 \\ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) &\rightarrow [(1, x_2, x_3, x_4, x_5)] \end{aligned} \quad (2.6)$$

dönüşümüne bir *embedding (gömme)* denir.

Burada her bir $[(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)]$, $x_0 \neq 0$ noktalarının $y \in \mathbb{R}^4$ ve $1 \leq i \leq 4, y_i = \frac{x_i}{x_0}$ için $[(1, y_1, y_2, y_3, y_4)] = [(1, y)]$ şeklinde tek bir gösterimi vardır.

S^3 birim küresinin $y \in S^3$ için $[1, y]$ noktaları ile meydana gelen ψ gömmesi altındaki görüntüsü Σ olmak üzere, $[(1, y)]$ noktası için $((1, y)(1, y)) = -1.1 + y.y = 0$

bulunur. Tersine $(1, y)$ vektörünün kendisi ile iç çarpımı 0 ise $y \in S^3$ elde edilir. Bu nedenle, $\Sigma = \psi(S^3)$ kümesi $\mathbb{R}^{4,1}$ içindeki lightlike vektörlerin projektif sınıflarından meydana gelmektedir.

Şimdi, \mathbb{R}^3 Öklid uzayını $x_2 = 0$ denklemi ile \mathbb{R}^4 uzayının bir alt uzayı olarak tanımlayarak, (2.3) ve (2.6) denklemlerinin bileşkesi

$$\psi\sigma : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}P^4$$

$$u \rightarrow (\psi\sigma)(u) = \left[\left(1, \frac{1-u.u}{1+u.u}, \frac{2u}{1+u.u} \right) \right] = \left[\left(\frac{1+u.u}{2}, \frac{1-u.u}{2}, u \right) \right] \quad (2.7)$$

şeklinde yazılır. $\mathbb{R}P^4$ projektif uzayında $z = (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5)$ homojen koordinatları ile bir z noktası verilsin. $(\psi\sigma)(\mathbb{R}^3)$ kümesi, $[+1, -1, 0, 0, 0]^2$ aykırı noktası dışındaki $(z, z) = 0$ denklemi ile verilen Σ kümesinde yatan noktaların kümesidir.

Tanım 2.6. $[+1, -1, 0, 0, 0]$ aykırı noktası dışındaki noktalar *düzgün noktalar* ve Σ küresi de *Möbius küresi* veya *Möbius uzayı* olarak adlandırılır.

2.1.2. Möbius geometrinin temel bileşenleri

Möbius geometrinin temel elemanları S^3 küresindeki hiperkürelerdir. Bu bölümden itibaren S^3 küresindeki hiperküreler s ile gösterilecektir. Ayrıca bu bölüm boyunca (Hertrich-Jeromin, 2003) faydanılacaktır.

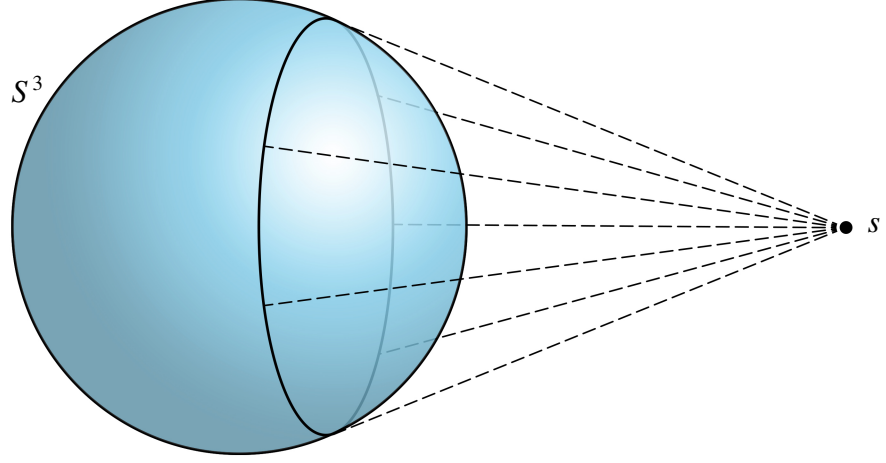
\mathbb{R}^4 Öklid uzayında 3- boyutlu hiperdüzlem E^3 olmak üzere $s \subset S^3$ hiperküresi için $s = E^3 \cap S^3$ olsun. s hiperküresi boyunca S^3 küresine değen bir $c \subset \mathbb{R}^4$ konisi için

1. s bir büyük küre değil ise, c konisinin tepe noktası ile tanımlanabilir. Diğer bir ifadeyle, \mathbb{R}^4 deki kürenin dışındaki her nokta s hiperküresine karşılık gelir.
2. s bir büyük küre ise, c konisinin (aslında silindir haline gelir) tepe noktası (2.6) gömmesi ile sonsuzdaki hiperdüzlemde yatar. Yani S^3 küresindeki her bir hiperküre $\mathbb{R}P^4$ projektif uzayındaki bir noktaya karşılık gelir.

Bu nedenle $s \subset S^3$ hiperküresi ile buna karşılık gelen $S^3 \subset \mathbb{R}P^4$ dış uzayındaki herhangi bir nokta birbirine denktir.

² $[+1, -1, 0, 0, 0]$ noktası $P \in S^3$ güney kutup noktasının ψ dönüşümü altındaki görüntüsüdür.

³Burada $p \simeq [(1, p)] \simeq (1, p)$ şeklinde tanımlandığından, notasyon olarak $s \subset S^3, s \in \mathbb{R}^4$ ve $P \in \mathbb{R}P^4$ veya $P \in \mathbb{R}^5$ yazılabilir.



Şekil 2.2: Möbius geometride hiperküreler

Tanım 2.7. Herhangi bir s küresinin homojen koordinatlardaki seçimine *lift* adı verilir.

Bundan sonraki gösterimlerde noktaların ya da kürelerin liftleri kalın harflerle gösterilecektir. Örneğin; s küresinin lifti için \mathfrak{s} kullanılacaktır.

Möbius geometrinin bazı önemli bileşenleri şu şekilde açıklanabilir.

- **Noktalar:** Herhangi bir $y \in S^3 \subset \mathbb{R}P^4$ noktası için $y \in \mathbb{R}^{4,1}$ ve $(y, y) = 0$ olduğundan y bir lightlike vektördür.
- **Hiperküreler:** $m \in \mathbb{R}^4$ merkezli⁴ ve $\rho, 0 < \rho < \pi$ yarıçapı ile verilen bir $s \subset S^3$ hiperküresi, $y \in S^3$ için

$$m \cdot y = \cos \rho, \quad 0 < \rho < \pi \quad (2.8)$$

denklemleri ile verilir. s hiperküresi \mathbb{R}^4 Öklid uzayı ile S^3 küresinin kesişimidir. Afin uzaydaki $[(1, y)]$ noktası için (2.8) denklemi

$$((1, y), (\cos \rho, m)) = 0$$

şeklinde yazılabilir. Bu sebeple, $y \in S^3$ noktasının (2.8) denklemi ile verilen hiperdüzlemde olması için gerek ve yeter koşul $[(1, y)]$ noktasının $[\xi] = [(\cos \rho, m)]$ noktasının polar hiperdüzleminde yatmasıdır.

⁴ m ve $-m$ noktalarının, sırasıyla, ρ ve $\pi - \rho$ yarıçaplı aynı kürenin merkezleri olduğuna dikkat ediniz.

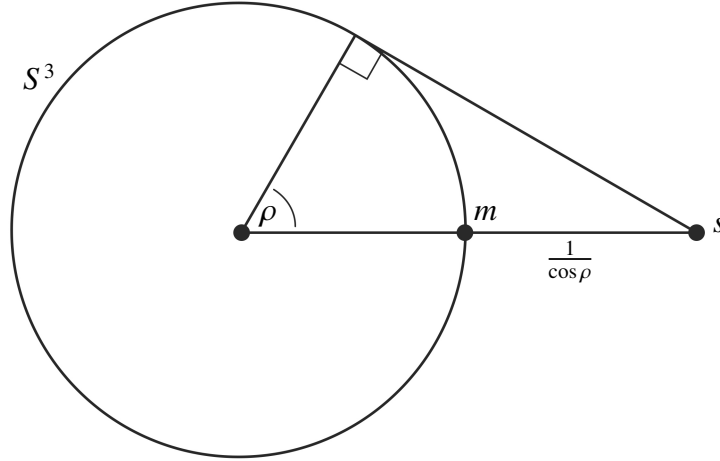
$0 < \rho < \pi$ için

$$(\xi, \xi) = -\cos^2 \rho + m.m = 1 - \cos^2 \rho = \sin^2 \rho > 0, \quad (2.9)$$

yazılabilir. Buradan ξ vektörü $\mathbb{R}^{4,1}$ de bir spacelike vektördür. Bu nedenle (2.8) ile verilen hiperküre, $\mathbb{R}P^4$ projektif uzayında $[\xi]$ spacelike vektörü ile tanımlanabilir. Dolayısıyla, S^3 deki hiperkürelerin uzayının

$$\mathbb{R}P_d^4 = \{[\xi] | (\xi, \xi) > 0\} \quad (2.10)$$

ifadesiyle verilen projektif uzayın dış uzayına diffeomorfik olduğu sonucu çıkarılabilir.



Şekil 2.3: Yarıçap ve merkezi ile verilen bir hiperküre

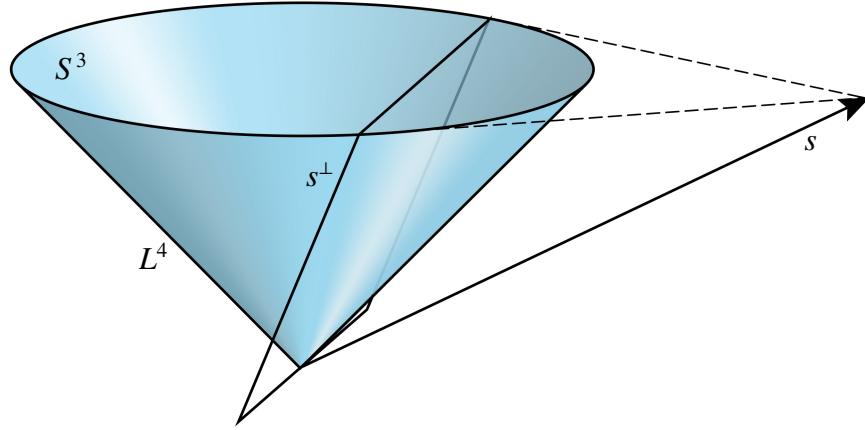
Tanım 2.8. Herhangi bir $\zeta \in \mathbb{R}^{4,1}$ noktası için

$$S^{3,1} = \{\zeta \in \mathbb{R}^{4,1} | (\zeta, \zeta) = 1\} \quad (2.11)$$

kümesine $\mathbb{R}P_d^4$ dış uzayının *Lorentz küresi* denir.

Burada, $\zeta = \xi / \pm \sin \rho$ and $(\zeta, \zeta) = 1$ olmak üzere $[\xi] = [\zeta]$ yazılabilir.

Ayrıca s küresinin iki olası yönlendirmesi, yarıçap ρ nun pozitif veya negatif olmasına bağlı olarak ayırt edilebilir. Bu ise yönlendirilebilen kürelerin Lie geometrisinin inceleneceği bir sonraki bölümde görülecektir.



Şekil 2.4: $\mathbb{R}^{4,1}$ Minkowski uzayında doğrular olarak S^3 de hiperküreler

2.1.3. Uzay formları

Bu kısımda 3–boyutlu \mathbb{R}^3, S^3, H^3 uzay formları (Hertrich-Jeromin, 2003) doğrultusunda açıklanmaktadır.

Lemma 2.9. $q \in \mathbb{R}^{4,1} \setminus 0$ olmak üzere $\kappa := -|q|^2$ olsun. Bu takdirde,

$$Q_\kappa := \{y \in L^4 | (q, y) = -1\} \quad (2.12)$$

şeklinde $(,)$ indirgenmiş metriği ile verilen 3– boyutlu afin kuadriği sabit κ eğriliğine sahiptir.

Kanıt. $\kappa \neq 0$ ve $\kappa = 0$ durumları ayrı ayrı değerlendirilecektir.

1. $\kappa \neq 0$ olsun. Bu takdirde

$$E_q^4 := \{x \in \mathbb{R}^{4,1} | (y, q) = -1\} \quad (2.13)$$

afin hiperdüzlemi için:

- $\kappa > 0$ ise, $(x^\perp, q) = 0$ olacak şekilde bir $x \in E_q^4$ için $\frac{1}{\kappa}q$ orijin seçilerek $x = \frac{1}{\kappa}q + x^\perp$ yazılabilir. Bu durumda $(x, x) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $(x^\perp, x^\perp) = \frac{1}{\kappa}$ olduğundan E_q^4 hiperdüzlemi 4–boyutlu Öklid uzayı halini alır. Böylece $Q_\kappa = L^4 \cap E_q$ kuadriği $\frac{1}{\kappa}$ yarıçaplı ve κ sabit eğriliğine sahip bir Öklid küresi olur.

- $\kappa < 0$ ise, E_q^4 hiperdüzlemi 4–boyutlu Minkowski uzayıdır. Dolayısıyla, Q_κ kuadriği $\frac{1}{\sqrt{|\kappa|}}$ yarıçaplı standart 2– kanatlı hiperboloid olur.

2. $\kappa = 0$ olsun ve $o \in Q_\kappa$ noktasını seçelim. Bu takdirde,

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^3 &\rightarrow Q_\kappa \subset \mathbb{R}^3 \oplus \langle o, q \rangle \cong \mathbb{R}^{4,1} \\ x &\rightarrow o + x + \frac{|x|^2}{2}q \end{aligned} \quad (2.14)$$

dönüşümü Q_κ kuadriğini parametrik olarak ifade eden bir izometridir.

Şekil 2.5 sabit eğrilikli uzayları light koni kuadrikleri olarak göstermektedir. \square

Tanım 2.10. $-|q|^2 \in \{-1, 0, 1\}$ şeklinde verilen her bir q vektörü için Möbius geometrinin alt geometrilerinden biri elde edilir. Bu durumlar için q vektörü *uzay form vektörü* olarak adlandırılır.

Tanım 2.11. $P \in \mathbb{R}P^4$ için

$$\{s \subset S^3 \mid (s, P) = 0\} \quad (2.15)$$

şeklinde verilen hiperkürelerin kümesine *lineer küre kompleksi* denir.

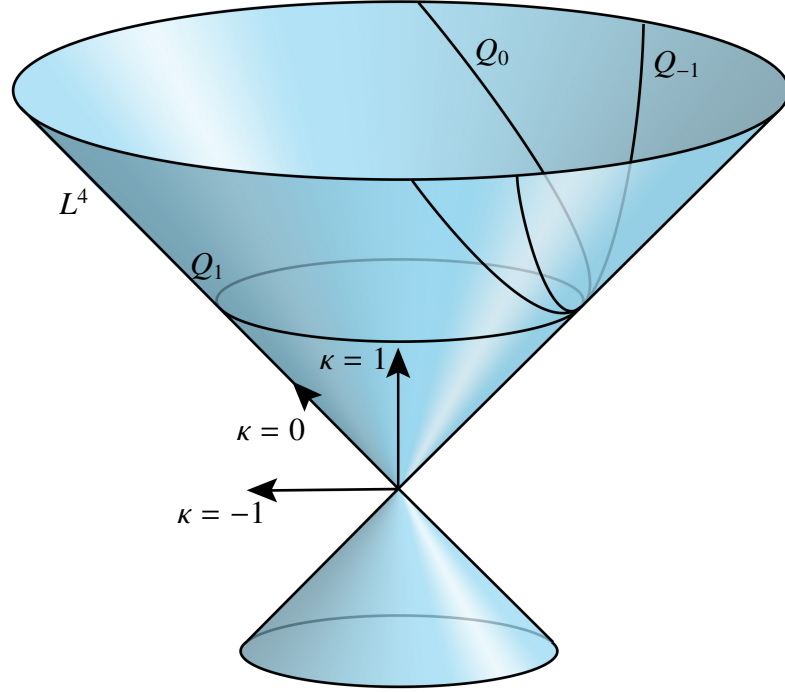
2.1.4. Möbius dönüşümleri

Bu bölüm boyunca (Cecil, 1992) kaynağı kullanılacaktır.

Tanım 2.12. Hiperküreleri hiperkürelere resmeden $\eta : S^3 \rightarrow S^3$ diffeomorfizmine bir Möbius dönüşümü adı verilir.

Buradan herhangi bir Möbius dönüşümü $\mathbb{R}P^4$ kürelerin uzayından kendisi üzerine bir dönüşüm indirger. Böylece bu dönüşümün $\mathbb{R}P^4$ üzerinde tek bir projektif dönüşüme genişleyeceği gösterilebilir.

Daha önce de belirtildiği üzere, Möbius geometride açılar ölçülebilir iken uzaklık ölçümü mümkün değildir. Bu nedenle uzay formlarının konformal dönüşümlerinin grubu altında korunan geometrik nicelikler incelenebilir. Herhangi bir ambient uzayın Möbius dönüşümü uzayın konformal yapısını korur, dolayısıyla uzayın içindeki herhangi bir yüzeyin konformal yapısı da korunacaktır. Dahası, yüzeye



Şekil 2.5: Light koni kuadrikleri olarak sabit eğrilikli uzaylar

teğet kürelerin kontaktlık mertebeleri de korunacağından asli eğrilik küreleri de korunacaktır.

Herhangi bir A Lorentz dönüşümü

$$A \in O(4, 1) = \{A \in Gl(5) | (AX, AY) = (X, Y)\} \quad (2.16)$$

absolut kuadrik olan $S^3 \subset \mathbb{R}P^4$ küresini koruyan $\mathbb{R}P^4$ projektif uzayının bir projektif dönüşümüne indirgenir. Dolayısıyla aynı anda S^3 deki hem nokta hem de kürelere etki eder. Bu yolla herhangi bir Lorentz dönüşümü tek bir $\eta : S^3 \rightarrow S^3$ Möbius dönüşümü yani S^3 uzayının global bir konformal dönüşümünü tanımlar. Tersine, A Lorentz dönüşümü işaretine göre tek olmak üzere, S^3 uzayının herhangi bir Möbius dönüşümü $\mathbb{R}^{4,1}$ uzayının bir A Lorentz dönüşümünden gelmektedir.

2.2. Lie küre geometrisi

Lie geometrisinde ana kavram yönlendirilmiş kontakt kavramıdır. Yönlendirilmiş hiperküreler $\mathbb{R}^{4,2}$ Minkowski uzayının projektif light konisi içindeki noktalar tarafından temsil edilir. İki yönlendirilmiş küre arasındaki yönlendirilmiş kontaktlık ise projektif light konide yer alan bir doğrunun üzerinde yer alan temsili iki nokta ile birebir karşılık gelmektedir.

Bu kısımda projektif light konide yer alan noktaların kümesi ile \mathbb{R}^3 de yer alan bütün yönlendirilmiş hiperkürelerin, yönlendirilmiş hiperdüzlemlerin ve nokta kürelerin kümesine, diğer bir ifadeyle S^3 deki bütün yönlendirilmiş hiperküreler ve nokta küreler ile birebir karşılık geldikleri görülecektir. Bunun için temel olarak (Cecil, 1992) kaynağından faydalanılacaktır.

(2.9) den, her bir yönlendirilemeyen s hiperküresi veya \mathbb{R}^3 deki bir hiperdüzlemin $\mathbb{R}P^4$ projektif uzayında bir ξ spacelike noktasına karşılık geldiği bilinmektedir. İki $\pm \frac{\xi}{\sqrt{\langle \xi, \xi \rangle}}$ noktası, $[\xi]$ spacelike noktasına karşılık gelen bir hiperküreye veya bir hiperdüzlemin yönlendirmeleriyle aşağıda gösterildiği şekilde ilişkilendirilebilir, bkz (2.8).

1. Öncelikle $\mathbb{R}^{4,1}$ Minkowski uzayı, $\mathbb{R}P^5$ projektif uzayına (2.6) gömmesi ile bir afin uzayı olarak gömülür. Yani, $y \mapsto [(y, 1)]$ olacak şekilde \mathbb{R}^6 Öklid uzayını elde edebilmek amacıyla x_6 koordinatı eklenir.
2. \mathbb{R}^6 Öklid uzayında orijinden geçen doğruların uzayı $\mathbb{R}P^5$ olsun. $\zeta \in S^{3,1}$ ise, ξ vektörü $\mathbb{R}^{4,1}$ uzayında bir birim spacelike vektördür. Bu durumda

$$-\zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \zeta_3^2 + \zeta_4^2 + \zeta_5^2 = 1,$$

olacağından $\mathbb{R}P^5$ projektif uzayındaki \mathcal{Q}^4 kuadriğinde bulunan $[(\zeta, 1)]$ noktası homojen koordinatlarda

$$\langle x, x \rangle = -x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 - x_6^2 = 0,$$

şeklinde yazılabilir. Burada \langle, \rangle çarpımı \mathbb{R}^6 uzayı üzerinde (4, 2) işaretli bir (indefinite) iç çarpım tanımlar. \mathbb{R}^6 uzayı (4, 2) işaretine sahip olduğundan $\mathbb{R}^{4,2}$ notasyonu ile gösterilecektir.

Tanım 2.13. Yukarıda verilen \langle, \rangle iç çarpımına *Lie iç çarpımı* ve

$$\mathcal{Q}^4 = \mathcal{PL}^5 = \{\langle x \rangle : x \in \mathbb{R}^{4,2}, (x, x) = 0\} \quad (2.17)$$

şeklinde tanımlı projektif light koniye de *Lie quadriği* adı verilir.

Şimdi \mathbb{R}^4 uzayında S^3 birim küresinde yönlendirilmiş hiperküreler ve nokta küreler yukarıda verilen açıklamalar doğrultusunda göz önüne alınacaktır.

Möbius geometride S^3 de verilen $\rho, 0 < \rho < \pi$ küresel yarıçaplı ve $p \in S^3$ merkezli bir yönlendirilemeyen s hiperküresi \mathbb{RP}^4 projektif uzayındaki $[\xi] = [\cos \rho, p]$ noktasına karşılık gelir, bkz (2.9). Bu kürenin iki yönlendirmesinin \mathcal{Q}^4 üzerindeki noktalara birebir karşılık getirmek için öncelikle

$$(\xi, \xi) = -\cos^2 \rho + 1 = \sin^2 \rho \quad (2.18)$$

olduğuna dikkat edilmelidir. $\sin \rho > 0$ için $0 < \rho < \pi$ olduğundan $(\xi, \xi) = 1$ koşulunu sağlayan $\zeta = \pm \xi / \sin \rho$ vektörleri göz önüne alınarak ξ vektörü $\sin \rho$ ile bölünür. Daha sonra

$$[(\xi, 1)] = [(\xi, \pm \sin \rho)] = [(\cos \rho, m, \pm \sin \rho)] \quad (2.19)$$

noktalarını elde etmek için \mathcal{Q}^4 Lie quadriğine bu iki nokta resmedilir. Son koordinatın işaretini yarıçapa dahil ederek, $-\pi < \rho < \pi$ olmak üzere $\rho \neq 0$ işaretli yarıçapı ile verilen s yönlendirilmiş küresi düzenlenir. Dolayısıyla s hiperküresi \mathcal{Q}^4 quadriğinde

$$s = [(\cos \rho, m, \sin \rho)] \quad (2.20)$$

noktası ile temsil edilir. Yarıçapın $\rho = 0$ olması durumunda $[(1, m, 0)]$ nokta küre oluşacağından formül yine geçerlidir.

Lie küre geometrisinde bir s küresinin lifti söz konusu olduğunda bir önceki bölümde olduğu gibi s notasyonu kullanılacaktır.

2.2.1. Kontakt elemanlar

Möbius geometride, iki küre arasındaki açı Möbius dönüşümler tarafından korunan temel niceliktir. Yönlendirilmiş kürelerin Lie geometisinde karşılık gelen temel kavram ise kürelerin *yönlendirilmiş kontakt* kavramıdır.

Klasik olarak, \mathbb{R}^3 Öklid uzayında verilen s_1 ve s_2 küreleri birbirine teğet ve aynı yönlendirmeye sahip iseler yönlendirilmiş kontakt yapıya sahiplerdir.

Tanım 2.14. s_1 ve s_2 liftleri ile verilen iki küre, sırasıyla, s_1 ve s_2 olmak üzere

$$(s_1, s_2) = 0 \quad (2.21)$$

ifadesi sağlanıyorsa küreler yönlü kontakttır. Burada $\langle s_1, s_2 \rangle \subset \mathcal{Q}^4$ projektif doğrusuna bir *kontakt eleman* adı verilir.

Ayrıca $\langle s_1, s_2 \rangle$ doğrusu \mathcal{Q}^4 kuadriğinde yatıyorsa, $\langle s_1, s_2 \rangle$ doğrusu üzerindeki \mathbb{R}^3 uzayındaki kürelerin kümesine karşılık gelen noktalar tam olarak s_1 ve s_2 kürelerinin her ikisi ile yönlendirilmiş kontakta olan tüm kürelerin kümesidir. Böyle bir 1-parametrel küre ailesine $\mathbb{R}^3 \cup \infty$ uzayında bir *parabolik pencil* denir.

Kontakt elemanların uzayı veya diğer bir ifadeyle L^5 konisindeki 2-boyutlu null-düzlemlerin uzayı ya da \mathcal{Q}^4 Lie kuadriğindeki projektif doğruların uzayı \mathcal{Q} ile gösterilecektir.

Tanım 2.15. $p \in \mathbb{R}^{4,2}$ vektörü için Tanım 2.11 ile benzer olarak verilen

$$\{s \in \mathcal{Q}^4 : (s, p) = 0\}$$

kümesine *lineer küre kompleksi* denir.

Möbius geometri $|p|^2 = -1$ olacak şekilde verilen bir $p \in \mathbb{R}^{4,2}$ *nokta küre kompleksi* ile Lie küre geometrisinin bir alt geometrisidir. Çünkü p^\perp üzerine olan izdüşüm dönüşümü p nokta küre kompleksinin kürelerini, \mathcal{Q}^4 kuadriğindeki noktalara dönüştürür.

Bir $p \in \mathbb{R}^{4,2}$, $|p|^2 = -1$ nokta küre kompleksi ve $q \in p^\perp$, $|q|^2 = -\kappa \in \{-1, 0, 1\}$ uzay form vektörü seçilerek

$$\mathfrak{R} := \{x \in L^5 : (x, p) = 0, (x, q) = -1\} \quad (2.22)$$

şeklindeki yazılan kuadrik p vektörünün Möbius geometrisi içindeki noktalardan oluşur ve Q_k uzayına karşılık gelir.

Bundan sonrası için uzay formları L^5 light konideki kopyaları yardımıyla belirlenecektir. Ayrıca herhangi bir uzay formundaki noktalar ile Lie geometrideki temsilcileri olan uzay form lifleri ayırt edilmeyecektir.

Tanım 2.16. Bir p nokta küre kompleksi ve q uzay form vektörü verilsin. s ile $(s, p) \neq 0$ olacak şekilde bir $s \in \mathcal{Q}^4$ küresinin uzay form lifi gösterilsin. Bu takdirde s nin (p, q) ifadesine göre eğriliği

$$\kappa = \frac{(s, q)}{(s, p)}$$

şeklinde tanımlanır.

(Cecil, 1992) kaynağından da ayrıntılı bir şekilde görüleceği gibi, bir önceki tanımda verilen eğrilik tanımı her bir uzay formu için elde edilebilir. Yani, \mathbb{R}^3 uzayında $\rho \neq 0$ yarıçaplı, m merkezli bir kürenin, L^5 light konideki karşılığı olan s verildiğinde eğrilik şu şekilde hesaplanır.

$\mathbb{R}^{4,2}$ Minkowski uzayı, $\mathbb{R}^3 \oplus \langle o, p, q \rangle$ uzayı içinde bileşenlerine ayrılabilir. s küresi nokta küre kompleksinde yatmadığından p -koordinatı 1 olacak şekilde düzenlenebilir. Bu işlem sonundaki yeni temsilci \tilde{s}

$$\tilde{s} = \frac{1}{\rho} \left(o + m + \frac{1}{2} (|m|^2 - \rho^2) q \right) + p \quad (2.23)$$

şeklinde olur. Bu nedenle kürenin eğriliği $\kappa = \frac{(s, q)}{(s, p)}$ olarak tanımlıdır.

Tanım 2.17. Bir p nokta küre kompleksi ve q uzay form vektörü için

$$\mathfrak{T} := \{x \in L^5 : (x, p) = -1, (x, q) = 0\} \quad (2.24)$$

kümesi (hiper)düzlemlerin uzayı olarak adlandırılır.

\mathfrak{R} kümesinin, \mathfrak{R} içindeki sıfır eğrilikli hiperkürelerden oluştuğuna dikkat ediniz. Buna paralel olarak, \mathbb{R}^3 Öklid uzayında bir örnek verilebilir.

Örnek 2.18. $f : \Sigma^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ yüzeyi için $p \in \mathbb{R}^{4,2}$, $|p|^2 = -1$ nokta küre kompleksi ve $q \perp p$, $|q|^2 = 0$ uzay form vektörü olsun. $|o|^2 = 0$ ve $(o, q) = -1$ olacak şekilde $o \in p^\perp$ noktasını seçelim. f yüzeyi homojen koordinatlarda

$$\tilde{f} : \Sigma^2 \rightarrow \mathfrak{R}, \tilde{f} = o + f + \frac{|f|^2}{2}q \quad (2.25)$$

şeklinde ve n yüzeyin Gauss dönüşümü olmak üzere, f yüzeyinin tanjant düzlem kongrüansı,

$$n : \Sigma^2 \rightarrow \mathfrak{R}, n = n + (f, n)q + p, \quad (2.26)$$

olarak yazılır. Ayrıca

$$(n, \tilde{f}) = 0 \quad (2.27)$$

$$(d\tilde{f}, n) = 0 \quad (2.28)$$

olduğu kolayca görülebilir.

2.2.2. Legendre immersiyonları

Bu kısımda, Legendre dönüşümleri ve Legendre immersiyonlarının hem Möbius hem de Lie geometrik yaklaşımları (Hertrich-Jeromin, 2003) ve (Cecil, 1992) doğrultusunda göz önüne alınacaktır.

Tanım 2.19. $s : \Sigma^m \rightarrow \mathbb{R}P^4$ kürelerinin diferansiyellenebilir bir m -parametrelili ailesine bir *küre kongrüansı* denir.

Tanım 2.20. $s_1, s_2 : \Sigma^2 \rightarrow \mathbb{Q}^4$ küre kongrüansları verilsin. s_1, s_2 kürelerinin liftleri sırasıyla, s_1, s_2 olmak üzere

$$(s_1, s_2) = 0 \quad (2.29)$$

$$(ds_1, ds_2) = 0 \quad (2.30)$$

ifadeleri sağlanıyor ise, $\Lambda : \Sigma^2 \rightarrow \mathbb{Q}$ dönüşümüne bir *Legendre dönüşümü* adı verilir.

Tanımdan kolayca görüleceği üzere, küre kongrüanslarının Λ Legendre dönüşümünü gerdiği açıktır.

Möbius geometride, yüzey ve küre kongrüanslarının her ikisi de 2-parametrelili vektör ailesinin zarflarıdır. Aralarındaki tek fark, yüzeyler \mathcal{Q}^3 kuadriğinde iken küre kongrüanslarının $S^{3,1}$ Lorentz küresinde yatmasıdır. Buna rağmen, Lie geometride Legendre dönüşümleri ve küre kongrüansları farklı kavramların zarfıdır. Küre kongrüanslarından her biri aslında Legendre dönüşümlerinin tek bir *kesiti*dir.

Şimdi *kesit* kavramı tanımlanacaktır.

Tanım 2.21. Bir $s : \Sigma^2 \rightarrow \mathcal{Q}^4$ dönüşümü her $(u, v) \in \Sigma^2$ için $s(u, v) \subset \Lambda(u, v)$ koşulunu sağlıyor ise, Λ Legendre dönüşümünün *kesiti* olarak tanımlanır.

Λ Legendre dönüşümünün kesitlerinin kümesi $\Gamma\Lambda$ ile gösterilir.

Tanım 2.22. Herhangi bir $(u, v) \in \Sigma^2$ ve keyfi $w \in T_{(u,v)}\Sigma^2$ için

$$\forall s \in \Gamma\Lambda : ds(v) \in \Lambda \Rightarrow w = 0 \quad (2.31)$$

ifadesiyle verilen immersiyon şartı sağlanıyor ise Λ Legendre dönüşümüne bir *Legendre immersiyonu* adı verilir.

Şimdi herhangi bir uzay formunda verilen bir $f : \Sigma \rightarrow \mathfrak{R}$ yüzeyinin Legendre lifti tanımlanacaktır.

Tanım 2.23. $f : \Sigma \rightarrow \mathfrak{R}$ yüzeyi verilsin. $\pi : \Sigma^2 \rightarrow \mathfrak{T}$ yüzeyin tanjant düzlem kongrüansı olmak üzere

$$\mathfrak{L} = \langle f, \pi \rangle \quad (2.32)$$

ifadesine f yüzeyinin *Legendre lifti* denir.

2.2.3. Lie küre dönüşümleri

Bu kısımda (Cecil, 1992) kaynağına göre Lie dönüşümleri kısa ve açık olarak tanıtılacaktır.

Tanım 2.24. \mathcal{Q}^4 Lie kuadriğini kendisine resmeden, $\mathbb{R}P^5$ projektif uzayının projektif dönüşümüne bir *Lie küre dönüşümü* denir.

Lie küre dönüşümü bir projektif dönüşüm olduğundan, \mathcal{Q}^4 Lie kuadriğindeki doğruları yine \mathcal{Q}^4 üzerindeki doğrulara resmeder. Bu nedenle, \mathbb{R}^3 veya S^3 uzaylarındaki kürelerin yönlendirilmiş kontaktlığını korur.

Tersine, \mathcal{Q}^4 kuadriğinde diffeomorfizmi koruyan herhangi bir doğrunun, bir projektif dönüşümün \mathcal{Q}^4 kuadriğine kısıtlaması olduğunu, yani yönlü kontaktlığı koruyan yönlendirilmiş kürelerin uzayının bir dönüşümü ifade eden *Lie küre geometrisinin temel teoremi* kullanılarak bir Lie küre dönüşümüdür.

Möbius dönüşümler için verilen aynı tip nedenlerden ötürü, Lie küre dönüşümlerinin grubunun, $O(4,2)$ ile $\mathbb{R}^{4,2}$ uzayının ortogonal dönüşümlerinin grubu verilmek üzere, $O(4,2)/\pm I$ grubuna izomorf olduğu gösterilebilir. Yönlendirilemeyen kürelerin uzayı üzerinde tanımlı her bir Möbius dönüşümü yönlendirilmiş kürelerin \mathcal{Q}^4 uzayı üzerinde iki Lie küre dönüşümü indirger.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölüm, tez çalışmasının sonuçlarını elde etmekte kullanılan yöntemi içermektedir. Ayrıca aksi belirtilmediği sürece (Hertrich-Jeromin, 2014) kaynağından yararlanılacaktır.

Tanım 3.1. $\gamma \rightarrow \gamma(t)$ parametrik bir eğri olsun. γ eğrisi boyunca bir birim vektör alanı $t \rightarrow N(t)$ olmak üzere, $\forall t \in I$ için $N(t) \perp \gamma'(t)$ koşulu sağlanıyor ise N vektör alanına γ boyunca bir *birim normal vektör alanı*, (γ, N) çiftine de bir *şerit* adı verilir.

Tanım 3.2. Bir $\gamma \rightarrow \gamma(t)$ parametrik eğrisi verilsin. Buna göre,

$$F(t)e_1 = T(t) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}$$

şartı sağlanıyorsa $t \rightarrow F(t) \in SO(3)$ dönüşümüne bir *çatı* adı verilir. Buna ek olarak

$$F(t)e_2 = N(t)$$

ise, F dönüşümüne (γ, N) *şeritinin çatısı* denir.

γ eğrisi boyunca ikinci bir birim normal vektör alanı

$$B := T \times N = Fe_3$$

olacağından $F = (T, N, B)$ yazılabilir. Bu durumda herhangi λ ve μ fonksiyonları için γ eğrisi boyunca herhangi bir \hat{N} normal vektör alanı

$$\hat{N} = \lambda N + \mu B$$

şeklindedir. Burada F ve \hat{F} herhangi iki (adapted) çatı olmak üzere

$$\hat{F} = F \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}$$

şeklinde bir normal dönme ile ilişkilendirilir.

Lemma 3.3. (γ, N) şeridinin bir $F = (T, N, B)$ çatısı verilsin. Bu durumda

$$F' = F\phi, \quad \phi = |\gamma'| \begin{bmatrix} 0 & -\kappa_n & \kappa_g \\ \kappa_n & 0 & -\tau \\ -\kappa_g & \tau & 0 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

olacak şekilde κ_n, κ_g ve τ fonksiyonları tek olarak belirlidir.

Tanım 3.4. (3.1) ifadesine (γ, N) şeridinin yapı denklemleri adı verilir. Burada κ_n normal eğrilik, κ_g jeodezik eğrilik ve τ ise burulma (torsiyon) olarak adlandırılır. γ eğrisi yay uzunluğu parametresi ile verilmiş ise, yapı denklemleri

$$F' = F\phi \iff \begin{cases} T' = \kappa_n N - \kappa_g B \\ N' = -\kappa_n T + \tau B \\ B' = \kappa_g T - \tau N \end{cases} \quad (3.2)$$

şeklindedir.

Teorem 3.5. $s \rightarrow \kappa_n(s), \kappa_g(s), \tau(s)$ fonksiyonları sabitlendiğinde κ_n, κ_g ve τ , sırasıyla, normal eğrilik, geodezik eğrilik ve burulma olacak şekilde yay uzunluğu parametrelili bir γ eğrisi ve γ boyunca bir birim normal vektör alanı vardır. Ayrıca bu şerit Öklid hareketine bağlı olarak tektir. Bu teorem şeritler için temel teorem olarak adlandırılır.

Tanım 3.6. $U \ni (u, v) \rightarrow \sigma(u, v) \in \mathbb{R}^3$ parametrik olarak verilen bir yüzey olmak üzere $(u, v) \in U$ için $I := d\sigma \cdot d\sigma$ şeklinde pozitif tanımlı, simetrik, bilineer forma σ yüzeyinin 1. temel formu denir ve

$$I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

veya

$$I = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılır. Burada $E := |\sigma_u|^2, F := \sigma_u \cdot \sigma_v, G := |\sigma_v|^2$ biçiminde tanımlıdır.

Tanım 3.7. $(u, v) \rightarrow \sigma(u, v)$ yüzeyi verilsin. Buna göre

$$n := \frac{\sigma_u \times \sigma_v}{|\sigma_u \times \sigma_v|} = \frac{\sigma_u \times \sigma_v}{\sqrt{EG - F^2}}$$

birim normal vektör alanına σ yüzeyinin *Gauss dönüşümü* adı verilir.

Tanım 3.8. Bir σ yüzeyinin Gauss dönüşümü n olsun. $II := -dn \cdot d\sigma$ şeklinde tanımlanan dönüşüme σ yüzeyinin *2. temel formu* denir ve

$$II = edu^2 + 2fdv \cdot du + gdv^2$$

veya

$$II = \begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix}$$

biçiminde yazılır. Burada $e := -n_u \cdot \sigma_u$, $f := -n_u \cdot \sigma_v = -n_v \cdot \sigma_u$, $g := -n_v \cdot \sigma_v$ ile tanımlıdır.

Tanım 3.9. Bir σ yüzeyinin Gauss, ortalama ve asli eğrilikleri, sırasıyla, K, H, k_1, k_2 olarak verilsin. σ yüzeyinin herhangi bir (u, v) noktası için

$$k_1(u, v) = k_2(u, v)$$

veya

$$(H^2 - K)(u, v) = 0$$

ise bu noktaya bir *umbilik nokta* denir. Yüzeyin her noktası bir umbilik nokta ise σ yüzeyi bir *umbilik yüzey* adını alır.

Teorem 3.10. γ eğrisi, σ_1 ve σ_2 gibi herhangi iki yüzeyin arakesiti ve σ yüzeyinin bir eğrilik çizgisi olsun. Bu eğrinin σ_2 yüzeyinin bir eğrilik çizgisi olması için gerek ve yeter koşul σ_1 ve σ_2 yüzeylerinin sabit bir açı altında kesişmeleridir. Bu teorem *Joachimstal Teoremi* olarak adlandırılır (Abbena vd, 2017).

Teorem 3.11. $t \rightarrow \sigma(t) = \sigma(u(t), v(t))$ eğrisi verilsin. γ eğrisinin bir eğrilik çizgisi olması için gerek ve yeter koşul σ yüzeyinin herhangi bir $(u, v) = (u(t), v(t))$ noktasındaki bir asli eğriliği k ve Gauss dönüşümü n olmak üzere

$$(dn + kd\sigma) \begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = 0$$

olmasıdır.

Tanım 3.12. Bir σ yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri, sırasıyla, K ve H olmak üzere,

$$aK + 2bH + c = 0 \quad (3.3)$$

eşitliği sağlanıyorsa σ yüzeyine bir *linear Weingarten yüzeyi* adı verilir. Burada $a \neq 0$ ve k_1, k_2 yüzeyin asli eğrilikleri olmak üzere, (3.3) denklemi

$$(ak_1 + b)(ak_2 + b) + \Delta = 0 \quad (3.4)$$

şeklinde de ifade edilebilir.

Örnek 3.13. Linear Weingarten yüzeyleri çok sayıda ilginç yüzey alt sınıflarını içermektedir. Buna göre

- $(a, b, c) = (1, 0, 0)$ için açılabilir (flat) yüzeyler
- $(a, b, c) = (0, 1, 0)$ ise minimal yüzeyler,
- $(a, b, c) = (0, 1, c)$ ise sabit ortalama eğrilikli yüzeyler
- $(a, b, c) = (1, 0, c)$ ise sabit Gauss eğrilikli yüzeyler
- $\Delta := ac - b^2$ ise tubular yüzeyler

elde edilir.

Lemma 3.14. Bir σ yüzeyinin $\sigma^t := \sigma + tn$ paralel yüzeyi verilsin. I, II, III , sırasıyla, σ yüzeyinin temel formları olmak üzere

$$I^t = I - 2tII + t^2III, \quad II^t = II - tIII, \quad III^t = III$$

eşitlikleri sağlanır.

Teorem 3.15. σ bir lineer Weingarten yüzeyi olsun. Bu takdirde σ^t paralel yüzeyi de bir lineer Weingarten yüzeyidir ve

$$a^t = a + 2tb + t^2c, \quad b^t = b + tc, \quad c^t = c$$

şeklindedir. Ayrıca, herhangi bir t değeri için $\Delta^t = \Delta$ olur.

Örnek 3.16. Lineer Weingarten yüzeylerinin paralel aileleri, aile içinde özel gösterimlerle karakterize edilirler. σ bir lineer Weingarten yüzeyi olsun. Buna göre

- σ bir tubular yüzey ise, $\forall t \in \mathbb{R}$ için $\Delta^t = 0$ olacağından tüm paralel lineer Weingarten yüzeyleri aynı zamanda tubular yüzeydir.
- $\Delta \neq 0$, $c = 0$ ise $b \neq 0$ olur ve paralel yüzeyler

$$(a + 2tb)K^t + 2bH^t = 0$$

koşulunu sağlar.

Tanım 3.17. \mathbb{R}^3 Öklid uzayında $t \rightarrow S^2(t)$ kürelerinin 1-parametrelili ailesinin zarfına kanal yüzeyi adı verilir. $t \rightarrow S^2(t)$ kürelerinin merkezleri tarafından oluşturulan eğriye kanal yüzeyinin merkez eğrisi ve kürelerin yarıçap fonksiyonu r olmak üzere kanal yüzeyinin yarıçapı $r(t)$ olarak tanımlanır (Abbena vd, 2017).

Teorem 3.18. $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi eğriliği sıfırdan farklı, birim hızlı ve bir σ kanal yüzeyinin merkez eğrisi olarak verilsin. γ eğrisinin teğet, asli normal ve binormal vektörleri, sırasıyla, T, N, B olmak üzere, σ kanal yüzeyi

$$\sigma(t, \theta) = \gamma(t) + r(t)[-Tr'(t) + \sqrt{1 - r'(t)^2} - (-N \cos \theta + B \sin \theta)] \quad (3.5)$$

şeklinde parametrik olarak yazılır (Abbena vd, 2017).

Tanım 3.19. $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi eğriliği sıfırdan farklı, regüler bir eğri olsun. $\theta \rightarrow -\cos \theta N(t) + \sin \theta B(t)$ çemberi γ eğrisi boyunca hareket ettiğinde γ eğrisi civarında çizdiği yüzeye bir *tubular yüzey* denir (Abbena vd, 2017).

Teorem 3.20. σ bir kanal yüzeyi olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler birbirine denktir (Abbena vd, 2017).

- σ yüzeyi (3.5) denklemiyle verilen bir tubular yüzeydir.
- σ kanal yüzeyinin yarıçapı sabittir.
- σ kanal yüzeyini oluşturan ailedeki her bir kürenin yarıçap vektörü merkez eğrisiyle dik kesişir.

Tanım 3.21. Öklid uzayında bir $\sigma : t \rightarrow (x(t), y(t))$ eğrisi verilsin. γ eğrisinin meridyen eğrisinin \mathbb{R}^3 de z -ekseni etrafında döndürülmesi ile elde edilen yüzeye *rotasyon yüzeyi* denir (Abbena vd, 2017).

Tanım 3.22. Öklid uzayında 1-parametrelili düzgün çember parçalarının ailesi ile tanımlanan yani, çember parçalarının foliasyonu ile elde edilen yüzeye *cyclic yüzey* adı verilir (Kühnel, 2015).

σ bir parametrelili çemberlerden oluşan bir cyclic yüzey, Γ ise bu çemberlere dik, yay uzunluğu parametresi ile verilen bir eğri olsun. Γ eğrisinin bir çatısı (T, N, B) , çember merkezlerinin oluşturduğu eğri (c) ve yarıçap fonksiyonu r olarak verilsin. Buna göre cyclic yüzeyinin parametrik gösterimi

$$\sigma(u, v) = c(u, v) + r(u)v(u, v), \quad v(u, v) = \cos vN(u) + \sin vB(u)$$

şeklindedir. (c) eğrisi boyunca u parametresi ve çemberlerin foliasyonu için v parametresi ile hareket edilecektir.

Lemma 3.23. $F : (u, v) \rightarrow SO(3)$ şeklinde tanımlı $F = (T, v, v_v)$ çatısı Γ eğrisinin bir ortonormal çatısıdır.

Kanıt. $v(u, v) = \cos vN(u) + \sin vB(u)$ şeklinde tanımlı olduğundan $\|v\| = 1$ olduğu açıktır. Ayrıca,

$$v_v = -\sin vN(u) + \cos vB(u), \quad \|v_v\| = 1$$

$$T.v = \cos v(T.N) + \sin v(T.B) = 0$$

$$T.v_v = -\sin v(T.N) + \cos v(T.B) = 0$$

$$v.v_v = (\cos vN + \sin vB)(-\sin vN + \cos vB) = 0$$

olarak hesaplanır. Bunun yanında

$$T \times \nu = T \times (\cos \nu N + \sin \nu B) = \nu_\nu$$

$$\nu \times \nu_\nu = (\cos \nu N + \sin \nu B) \times (-\sin \nu N + \cos \nu B) = T$$

$$\nu_\nu \times T = (-\sin \nu N + \cos \nu B) \times T = \nu$$

olduğundan $F : (u, \nu) \rightarrow SO(3)$ olup F çatısı ortonormal bir çatıdır. \square

Lemma 3.24. Γ eğrisinin (T, N, B) çatısına göre normal ve geodezik eğrilikleri sırasıyla, κ_n, κ_g olmak üzere

$$K(u, \nu) := (T' \cdot \nu)(u, \nu) = \kappa_n(u) \cos \nu - \kappa_g(u) \sin \nu$$

şeklinde tanımlansın. Bu takdirde, $F = (T, \nu, \nu_\nu)$ çatısının yapı denklemleri

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0 & -K & -K_\nu \\ K & 0 & -\tau \\ K_\nu & \tau & 0 \end{bmatrix} \quad \nu e \quad \Psi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

olmak üzere,

$$F_u = F\Phi, \quad F_\nu = F\Psi$$

ile verilir.

Kanıt. $K(u, \nu) := (T' \cdot \nu)(u, \nu) = \kappa_n(u) \cos \nu - \kappa_g(u) \sin \nu$ şeklinde tanımlı olduğundan,

$$K_\nu = -\kappa_n \sin \nu - \kappa_g \cos \nu$$

bulunur. Ayrıca,

$$\nu_\nu = -\sin \nu N + \cos \nu B$$

$$\nu_{\nu\nu} = -\cos \nu N - \sin \nu B = -\nu$$

$$T_u = \kappa_n N - \kappa_g B = K\nu K_\nu \nu_\nu$$

olarak hesaplanır. Burada

$$v_u = \cos v N' + \sin v B'(u)$$

biçiminde olup, 3.1 denklemleri ile verilen türev formüllerinden faydalanılarak,

$$v_u = \cos v N(-\kappa_n N + \tau B) + \sin v (\kappa_g T - \tau N) = -KT + \tau v_v$$

bulunur. Benzer şekilde,

$$v_u = \cos v N(-\kappa_n N + \tau B) + \sin v (\kappa_g T - \tau N) = -KT + \tau v_v$$

$$T_v = 0$$

elde edilir. □

Lemma 3.25. α ve γ uygun fonksiyonlar olmak üzere (c) merkez eğrisinin u parametresine göre türevi

$$c'(u) = \alpha T - \gamma_v v + \gamma v_v$$

şeklindedir.

Kanıt. $F = (T, v, v_v) \in SO(3)$ olduğundan uygun α, β, γ fonksiyonları ile

$$c'(u) = \alpha(u, v)T(u, v) + \beta(u, v)v(u, v) + \gamma(u, v)v_v(u, v)$$

şeklinde yazılabilir. c' sadece u parametresine bağlı olduğundan $c'_v = 0$ olur. Buna göre,

$$c'_v = 0 = T(u, v) + v(\beta_v - \gamma) + v_v(\beta + \gamma_v)$$

bulunur. Buradan,

$$\alpha_v = 0, \quad \beta_v = \gamma, \quad \beta = -\gamma_v$$

elde edilir. Ayrıca $\beta_v = -\gamma_{vv} = \gamma$ olduğu da görülebilir. □

Burada Γ' ve c' arasındaki açı

$$\frac{\Gamma' \cdot c'}{\|\Gamma'\| \cdot \|c'\|} = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \gamma_v^2 + \gamma}}$$

biçimindedir. γ eğrisi (c) merkez eğrisinin çember düzlemleri ile yaptığı açıyı kodlar. Dolayısıyla, (c) eğrisinin çember düzlemlerine dik bir yörünge eğrisi olması için gerek ve yeter koşul $\gamma = 0$ olmasıdır. Bu durumda Γ' ve c' birbirine paraleldir, yani ötelemeye bağlı olarak eğriler aynıdır.

3.1. Cyclic Linear Weingarten Yüzeyleri

Bu kısımda (López, 2008a) çalışmasında verilen cyclic linear Weingarten yüzeylerinin sınıflandırılması bulgularının doğrulanması amaçlanmaktadır. Söz konusu makalede 1-parametrelî düzlem ailesinde yatan çemberlerle oluşturulan bir linear Weingarten yüzeyi s olmak üzere s yüzeyinin ya tamamen umbilik ya da çemberlerin birbirine paralel olduğu gösterilmiştir. Ancak tubular yüzeyler açıkça bu sonucu doğrulamaz. Bu kısımda, bu iddianın doğrulandığı gösterilecektir. σ cyclic yüzeyi

$$\sigma(u, v) = c(u) + r(u)v(u, v)$$

parametrik gösterimi ile verilsin. Buna göre σ yüzeyinin u ve v parametrelerine göre türevleri

$$\sigma_u = T(\alpha - rK) + v(-\gamma_v + r') + v_v(\gamma + r\tau)$$

ve

$$\sigma_v = rv_v$$

şeklindedir. Buradan σ yüzeyinin Gauss dönüşümü bulunarak, I. ve II. temel form katsayıları elde edilecek ve linear Weingarten olma şartına geçilecektir. Buna göre,

I. temel form katsayıları

$$E = \sigma_u \cdot \sigma_u = (\alpha - rK)^2 + (r' - \gamma_v)^2 + (\gamma + r\tau)^2$$

$$F = \sigma_u \cdot \sigma_v = r(\gamma + r\tau)$$

$$G = \sigma_v \cdot \sigma_v = r^2$$

olarak elde edilir. Ayrıca $W = \sqrt{EG - F^2} = r\sqrt{(r' - \gamma_v)^2 + (\alpha - rK)^2}$ olmak üzere,

$$n = \frac{\sigma_u \times \sigma_v}{\|\sigma_u \times \sigma_v\|} = \frac{r}{W}[(r' - \gamma_v)T - (\alpha - rK)v]$$

ifadesi σ yüzeyinin Gauss dönüşümüdür. II. temel form katsayılarını bulabilmek için σ_u ve σ_v ifadelerinin türevleri alınır,

$$\sigma_{uu} = T[(\alpha - rK)_u - K(r' - \gamma_v) - K_v(\gamma + r\tau)]$$

$$+ v[K(\alpha - rK) + (r' - \gamma_v)_u - \tau(\gamma + r\tau)]$$

$$+ v_v[K_v(\alpha - rK) + \tau(r' - \gamma_v)_u - (\gamma + r\tau)_u]$$

$$\sigma_{vv} = -rv$$

$$\sigma_{vu} = T(-rK_v) + v(-\tau r) + v_v r'$$

bulunur. Dolayısıyla II. temel form katsayıları

$$D = \begin{bmatrix} (\alpha - rK) & (\alpha - rK)_u \\ (r' - \gamma_v) & (r' - \gamma_v)_u \end{bmatrix}$$

olmak üzere,

$$e = \sigma_{uu} \cdot n = -\frac{rD}{W} - \frac{(\gamma + r\tau)r}{W}[K_v(r' - \gamma_v) - \tau(\alpha - rK)] - \frac{KW}{r}$$

$$f = \sigma_{vu} \cdot n = -\frac{r^2}{W}[K_v(r' - \gamma_v) - \tau(\alpha - rK)]$$

$$g = \sigma_{vv} \cdot n = \frac{r^2}{W}(\alpha - rK)$$

şeklinde basitleştirilir.

Örnek 3.26. σ yüzeyi

$$\sigma(u, v) = c(u) + r(u)v(u, v)$$

parametrik gösterimi ile verilen bir tüp yüzeyi olsun. Bu durumda $c = \Gamma$ olup $\gamma = 0$, $\alpha = 1$ ve $r = sbt$ yazılır. Genelliği bozmadan $\tau = 0$ kabul edilirse,

$$E = (1 - rK)^2, \quad F = 0, \quad G = r^2$$

$$e = -(1 - rK)K, \quad f = 0, \quad g = r$$

σ tubular yüzeyinin 1. ve 2. temel form katsayılarıdır. k_1 ve k_2 yüzeyin asli eğrilikleri ve K Gauss eğriliği olmak üzere,

$$k_1 = -\frac{K}{1 - rK} \quad \text{ve} \quad k_2 = \frac{1}{r}$$

olarak hesaplanır. Buradan

$$(k_1 - \frac{1}{r})(k_2 - \frac{1}{r}) = K - \frac{2}{r}H + \frac{1}{r^2} = 0$$

olduğundan σ tüp yüzeyi çembersel eğrilik çizgileri ile foliasyon edilen bir lineer Weingarten yüzeyidir. Ancak bu yüzey R. Lopez'in çalışmasında belirtildiği üzere ne tamamen umbiliktir ne de çember düzlemleri birbirine paraleldir.

3.2. \mathbb{R}^3 de Lineer Weingarten Kanal Yüzeyleri

Bu kısımda σ cyclic yüzeyi kanal yüzeyi olarak alınacak ve lineer Weingarten kanal yüzeyi \mathbb{R}^3 Öklid uzayında sınıflandırılacaktır.

σ bir kanal yüzeyi olmak üzere, bu yüzeyin çembersel eğrilik çizgisinde yatan düzlemler Joachimsthal teoreminden sabit açı altında kesişirler. Dolayısıyla, bu açı T ile n vektörleri arasındaki açığa bağlı değildir. n vektörü, T ile ν düzleminde yattığından n ve $-\nu$ arasındaki açı için aşağıdakiler yazılabilir. Buna göre,

$$n \cdot \nu = \cos \mu \quad \text{ve} \quad n = \frac{r}{W}[(r' - \gamma_\nu)T - (\alpha - rK)\nu]$$

olduğundan

$$\cos \mu = \frac{r}{W}(\alpha - rK)$$

yazılabilir. Diğer taraftan,

$$n.T = \|n\|.\|T\| \cos\left(\frac{\pi}{2} - \mu\right) = \sin \mu \quad \text{ve} \quad n = \frac{r}{W}[(r' - \gamma_v)T - (\alpha - rK)v] \quad (3.6)$$

kullanılarak

$$\sin \mu = \frac{r}{W}(r' - \gamma_v) \quad (3.7)$$

elde edilir. (3.6) ve (3.7) denklemlerinin v parametresine göre türevleri alınırsa

$W_v \sin \mu = -r\gamma_{vv}$ ve $\gamma_{vv} = -\gamma$ olduğundan

$$\gamma = \frac{1}{r} W_v \sin \mu$$

elde edilir. Diğer taraftan, $W_v \cos \mu = -r^2 K_v$ olup bu ifadenin v parametresine göre tekrar türevi alınırsa, $W_{vv} \cos \mu = -r^2 K$ olup,

$$K = \frac{1}{r^2} W_{vv} \cos \mu \quad (3.8)$$

bulunur. $\gamma_{vv} + \gamma = K_{vv} + K = 0$ olacağından

$$(W + W_{vv})_v \sin \mu = (W + W_{vv})_{vv} \cos \mu = 0 \quad (3.9)$$

yazılabilir. (3.8) ifadesi ile çarpılır ve (3.9) ifadeleri (3.8) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \gamma \cdot \frac{1}{r} \cos \mu &= \frac{1}{r^2} W_v \sin \mu \cos \mu \\ K \cdot \frac{1}{r} \cos \mu &= \frac{1}{r^2} W_{vv} \sin \mu \cos \mu \end{aligned}$$

olur. Buradan gerekli işlemler yapıp ifadeler düzenlenirse,

$$\gamma \cos \mu = K_v \cos \mu = \frac{1}{r} \sin \mu \cos \mu (W_v + W_{vv}) = 0$$

elde edilir. 2.11. Teoreminde verilen Rodrigues denkleminde göre $\zeta(t) = \sigma(., t)$ bir eğrilik çizgisi olduğundan $n_v + K(rv_v) = 0$ ve buradan $n_v \parallel \sigma_v \parallel v_v$ bulunur. Öte yandan, $n = \frac{r}{W}[(r' - \gamma_v)T - (\alpha - rK)v]$ ifadesinde v parametresine göre türev alınır ve $n_v \parallel v_v$ kullanılırsa

$$n_v = -\frac{r}{W}(\alpha - rK)v_v$$

olduğu görülür. Cyclic yüzeyler için daha önce bulunan σ_u ve σ_v türevleri (3.6) ve (3.7) denklemleriyle beraber düşünüldüğünde,

$$\sigma_u = \left(\frac{W}{r} \cos \mu\right)T + \left(\frac{W}{r} \sin \mu\right)v + (\gamma + r\tau)v_v \quad \text{ve} \quad \sigma_v = rv_v$$

halini alır. Ayrıca n Gauss dönüşümü (3.6) ve (3.7) ifadelerine göre tekrar düzenlenirse,

$$n = \frac{r}{W} \left[\left(\frac{W}{r} \cos \mu\right)T - \left(\frac{W}{r} \sin \mu\right)v \right]$$

olarak yazılır. Bu ifadede Gauss dönüşümünün u ve v parametrelerine göre türevleri yeniden düzenlenirse,

$$n_u = [(\mu' + K) \cos \mu]T + [(\mu' + K) \sin \mu]v + (K_v \sin \mu + \tau \cos \mu)v_v$$

$$n_v = (-\cos \mu)v_v$$

elde edilir. Bu durumda temel form katsayıları da

$$E = \sigma_u \cdot \sigma_u = \left(\frac{W}{r}\right)^2 + (\gamma + r\tau)^2$$

$$F = \sigma_u \cdot \sigma_v = (\gamma r + r^2 \tau)$$

$$G = \sigma_v \cdot \sigma_v = r^2$$

$$e = -n_u \cdot \sigma_u = \left(-\frac{W}{r}\right)[(\mu' + K) - (\gamma + r\tau)(K_v \sin \mu + \tau \cos \mu)]$$

$$f = -n_u \cdot \sigma_v = -\cos \mu (\gamma + r\tau)$$

$$g = n_v \cdot \sigma_v = r \cos \mu$$

şeklinde hesaplanır. $\gamma \cos \mu + rK_v \sin \mu = 0$ denklemi kullanılır ve genelliği bozmadan

$\tau = 0$ alınırsa,

$$E = \left(\frac{W}{r}\right)^2 + \gamma^2, \quad F = \gamma r, \quad G = r^2$$

$$e = \frac{-W(\mu' + K) + \gamma^2 \cos \mu}{r}, \quad f = \gamma \cos \mu, \quad g = r \cos \mu$$

olarak basitleştirilir. Son olarak parametre eğrilerinin eğrilik çizgisi olma özelliği kullanılırsa yani, $\gamma = 0$ alınırsa

$$E = \left(\frac{W}{r}\right)^2, \quad F = 0, \quad G = r^2, \quad e = -\frac{W}{r}(\mu' + K), \quad f = 0, \quad g = r^2 \quad (3.10)$$

bulunur. Bu katsayıları kullanarak lineer Weingarten olma şartını sağlatalım. Buna göre, yüzeyin ortalama ve Gauss eğrilikleri, sırasıyla,

$$H = \frac{Eg - 2Ff + Ge}{2(EG - F^2)} \quad \text{ve} \quad K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$

biçiminde tanımlı olduğundan

$$a\left(\frac{eg - f^2}{EG - F^2}\right) + 2b\left(\frac{Eg - 2Ff + Ge}{2(EG - F^2)}\right) + c = 0$$

$$a(eg - f^2) + b(Eg - 2Ff + Ge) + c(EG - F^2) = 0$$

bulunur. Son ifadede (3.10) denklemi ile verilen temel form katsayıları yerlerine

yazılırsa,

$$W\left[\left(\frac{b \cos \mu + cr}{r}\right)W - (a \cos \mu + br)(\mu' + K)\right] = 0$$

bulunur. Burada parametresine göre iki defa türev alınır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$(a \cos^2 \mu + 2br \cos \mu + cr^2)W_{vv} = 0 \quad (3.11)$$

elde edilir.

Teorem 3.27. σ bir lineer Weingarten kanal yüzeyi olsun. Bu takdirde σ yüzeyi bir kürenin parçası, bir tüp yüzeyi ya da bir dönele yüzeydir.

Kanıt. $(a \cos^2 \mu + 2br \cos \mu + cr^2) \neq 0$, $W_{vv} = 0$ olsun.

Buna göre (3.8) denklemini kullanılırsa $K = 0$ bulunur. Bu durumda Γ eğrisi foliasyon düzlemlerine dik olup, bir doğru parçası ve bu düzlemler birbirine paraleldir. Ayrıca,

$$\gamma \cos \mu + rK_v \sin \mu = 0 \Rightarrow \gamma \cos \mu = 0$$

ve buradan da

$$\cos \mu = -n.v = \frac{r}{W}(\alpha - rK)$$

olacağından,

$$\cos \mu = 0 \Rightarrow \frac{r}{W}\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \vee \frac{r}{W} = 0$$

yazılır. $\alpha = 0$ olması halinde $c' = \alpha T - \gamma_v v + \gamma v_v$ olup

$$\gamma = 0 \Rightarrow \gamma_v = 0 \wedge \alpha = 0 \Rightarrow c' = 0$$

olduğu görülür. Bu ifade ise, (c) nin bir eğri olması ile çelişmektedir. Bu nedenle $\gamma = 0$ ve $c' = 0$ olmalıdır. O halde $K = 0$ olduğundan $T = sbt$ ve c' bir doğru

parçasıdır. Buna göre lineer Weingarten kanal yüzeyleri aynı zamanda rotasyon yüzeyleri sonucu çıkarılabilir.

$(a \cos^2 \mu + 2br \cos \mu + cr^2) = 0$, $W_{vv} \neq 0$ olsun. Bu takdirde,

$$a = 0 \Rightarrow \cos \mu = -\frac{c}{2b}r$$

$$a \neq 0 \Rightarrow \cos \mu_{1,2} = \left(\frac{-b \pm \sqrt{-\Delta}}{a} \right)r$$

olur. Her iki durumda da $\cos \mu$ değeri r yarıçapının bir katı, $c \neq 0$ ise sıfırdan farklıdır. $c = 0$ ise $\cos \mu = 0 \vee \cos \mu_{1,2} = -\frac{2b}{a}r$ çözümlerdir. $\cos \mu = 0$ çözümü $W_{vv} = 0$ olması durumunda sağlanmadığından ikinci çözüm yine yarıçapının bir katıdır. Buna göre $\cos \mu = dr, d \neq 0, d = sbt.$ koşulunu sağlayan yüzeyler araştırılabilir. Rodrigues denkleminde

$$n_v + k_2 \sigma_v = (-\cos \mu + k_2 r) v_v$$

yazılabilir. Bu nedenle $k_2 = \frac{\cos \mu}{r} = d$ şeklinde olup $\cos \mu = rk_2$ bulunur. Bu değer $w \neq 0$ olmak üzere (3.11) denklemini ile verilen lineer Weingarten olma şartında yerine yazılırsa,

$$ak_2^2 + 2bk_2 + c = 0 \quad (3.12)$$

ve (3.3) ifadesi ile verilen lineer Weingarten olma koşulundan

$$ak_1 k_2 + b(k_1 + k_2) + c = 0 \quad (3.13)$$

elde edilir. (3.12) denkleminde (3.13) ifadesi çıkarılırsa

$$(ak_2 + b)(k_2 - k_1) = 0$$

denklemini bulunur. Bu denklem ya $k_2 = -\frac{b}{a} = d$ ya da $k_1 = k_2 = d$ olması durumunda sağlanır. Dolayısıyla,

- $k_2 = -\frac{b}{a} = d \Rightarrow r = \frac{1}{d}$ yarıçaplı tubular yüzeyler,
- $k_1 = k_2 = d \Rightarrow r = \frac{1}{d}$ yarıçaplı küre

elde edilir. □

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

4.1. İzotermik Yüzeyler

Klasik olarak \mathbb{R}^3 Öklid uzayında verilen bir yüzey, umbilik noktalar dışında konformal eğrilik çizgisi koordinatlarına sahip ise bir izotermik yüzey olarak tanımlanır. Diğer bir ifadeyle, konformal koordinatlar yüzeyin ikinci temel formunu köşegenleştiriyorsa yüzeye izotermik yüzey denir. Dönel yüzeyler, kuadrikler, minimal yüzeyler ve daha genel olarak sabit ortalama eğrilikli yüzeyler bazı izotermik yüzey örnekleridir (Cayley, 1871).

Bu bölümde herhangi bir projektif kuadrikte verilen bir yüzeyin izotermik olması için gerekli koşullar gösterilecektir. 4.2.3 bölümünde görüleceği gibi lineer Weingarten yüzeylerinin Lie küre geometrisinde önemli bir yer tutan Ω -yüzeylerini tanımlamak için gerekli *izotermik küre kongrüansı* kavramının temelleri bu bölümde atılacaktır.

4.1.1. Laplace invaryantları

Tanım 4.1. a, b, c her mertebeden türevleri olan iki değişkenli fonksiyonlar olmak üzere $\mathcal{L} = \partial_u \partial_v + a \partial_u + b \partial_v + c$ diferansiyel operatörü verilsin.

$$\mathcal{L}f = 0 \quad (4.1)$$

şeklinde ikinci mertebeden kısmi diferansiyel denkleme *Laplace-tipi denklem* denir.

Tanım 4.2. Bir \mathcal{L} diferansiyel operatörü için

$$h = a_u + ab - c \quad \text{ve} \quad k = b_v + ab - c \quad (4.2)$$

olarak tanımlı h, k fonksiyonlarına \mathcal{L} operatörünün *Laplace invaryantları* adı verilir.

Tanım 4.3. Herhangi bir ϕ fonksiyonu verilsin. \mathcal{L} operatörünün

$$\tilde{\mathcal{L}}f := e^{-\phi} \mathcal{L}(e^{\phi} f) \quad (4.3)$$

şeklinde tanımlı $\tilde{\mathcal{L}}$ dönüşümüne *gauge dönüşümü* denir.

Lemma 4.4. Laplace invariantları gauge dönüşümleri altında korunur.

Kanıt. Herhangi bir f fonksiyonu (4.1) ile verilen Laplace tipi denkleminin bir çözümü olsun. $\tilde{\mathcal{L}}$ gauge dönüşümü olmak üzere

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{L}}f &= e^{-\phi} \mathcal{L}(e^{\phi} f) \\ &= e^{-\phi} [(e^{\phi} f)_{uv} + a(e^{\phi} f)_u + b(e^{\phi} f)_v + c] \\ &= f_{uv} + (a + \phi_v)f_u + (b + \phi_u)f_v + (\phi_{uv} + \phi_u\phi_v + a\phi_u + b\phi_v + c)\end{aligned}$$

olduğundan

$$\tilde{a} = a + \phi_v, \quad \tilde{b} = b + \phi_u, \quad \tilde{c} = c + \phi_u\phi_v + \phi_{uv} + a\phi_u + b\phi_v \quad (4.4)$$

şeklinde $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}$ katsayıları yazılır. Buradan $\tilde{\mathcal{L}}$ gauge dönüşümü altında Laplace invariantları \tilde{h}, \tilde{k} olmak üzere (4.4) denklemleri kullanılarak

$$\begin{aligned}\tilde{h} &= \tilde{a}_u + \tilde{a}\tilde{b} - \tilde{c} = a_u + ab - c = h \\ \tilde{k} &= \tilde{b}_v + \tilde{a}\tilde{b} - \tilde{c} = b_v + ab - c = k\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla bir f çözümü ile verilen (4.1) Laplace tipi denklemi,

$$\tilde{f} = e^{\phi} f$$

biçiminde \tilde{f} çözümü olan diğer bir Laplace tipi denklemi ile aynı Laplace invariantlarına sahiptir. \square

Projektif geometride h ve k Laplace invariantları konjuge netlerin invariantları olarak değerlendirilebilir (Bobenko, 2008). Aşağıda parametrik ifadesi bir Laplace-tipi denklemi sağlayan bir f yüzeyinin konjuge parametreleri tanımlanacaktır.

4.1.2. Konjuge parametreler

Klasik olarak \mathbb{R}^3 Öklid uzayında konjuge parametreler şu şekilde tanımlanmaktadır (Bobenko, 2008).

Tanım 4.5. Bir $f: \Sigma^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ yüzeyi için

$$f_{uv} \in \langle f_u, f_v \rangle \quad (4.5)$$

koşulu sağlanıyor ise (u, v) parametrelerine f yüzeyinin *konjuge parametreleri* denir.

Burada (u, v) konjuge parametreleri ile verilen bir f yüzeyinin 4.1 Laplace-tipi denklemini sağladığı açıktır. Herhangi bir parametre değişimi Laplace invaryantlarını koruduğundan konjuge parametrelerin aynı zamanda projektif bir kavram olarak da iyi tanımlı olduğu gösterilebilir. Bir sonraki lemma bunu ispatlamaktadır.

Lemma 4.6. Bir $f: \Sigma^2 \rightarrow \mathbb{R}P^4$ yüzeyi verilsin. f yüzeyinin herhangi bir \tilde{f} lifti için

$$\tilde{f}_{uv} \in \langle \tilde{f}_u, \tilde{f}_v, \tilde{f} \rangle \quad (4.6)$$

koşulu sağlanıyor ise f yüzeyi (u, v) konjuge parametrelerine sahiptir.

Kanıt. Bir f yüzeyi $\tilde{f}_{uv} \in \langle \tilde{f}_u, \tilde{f}_v, \tilde{f} \rangle$ olacak şekilde bir \tilde{f} liftine sahip olsun. Buna göre

$$\tilde{f}_{uv} + a\tilde{f}_u + b\tilde{f}_v + c\tilde{f} = 0. \quad (4.7)$$

yazılabilir. 4.4 lemmasına göre keyfi bir ϕ fonksiyonu için $e^\phi \tilde{f}$ lifti

$$(\tilde{f}_{uv} + (a + \phi_v)\tilde{f}_u + (b + \phi_u)\tilde{f}_v + (c + \phi_u\phi_v + \phi_{uv} + a\phi_u + b\phi_v)\tilde{f}) = 0,$$

ifadesini sağlar. Bu ise konjuge parametreler ile verilen bir yüzeyin bütün liftlerinin

$$(e^\phi \tilde{f})_{uv} \in \langle (e^\phi \tilde{f})_u, (e^\phi \tilde{f})_v, (e^\phi \tilde{f}) \rangle \quad (4.8)$$

denklemini sağladığını gösterir. Yani f yüzeyi $\mathbb{R}P^4$ projektif uzayında (u, v) konjuge parametrelerine sahiptir. \square

4.1.3. Konformal parametreler

Benzer şekilde, \mathbb{R}^3 uzayında bir f yüzeyinin ortogonal ve konformal parametreleri aşağıdaki şekilde tanımlıdır (Bobenko, 2008).

Tanım 4.7. Bir $f: \Sigma^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ yüzeyi $f_u \perp f_v$ koşulunu sağlıyor ise (u, v) parametrelerine *ortogonal parametreler* denir. Buna ek olarak,

$$|f_u|^2 = |f_v|^2 \quad (4.9)$$

ifadesi de sağlanıyorsa (u, v) parametreleri *konformal parametreler* olarak adlandırılır.

Bir yüzeyin konjuge ve ortogonal parametreleri yüzeyi eğrilik çizgileri boyunca parametrize ederler yani, yüzeyin birinci ve ikinci temel formları diagonaldir. (Bobenko, 2008).

Aşağıda izotermik yüzeylerin \mathbb{R}^3 Öklid uzayında klasik tanımından farklı olarak alternatif bir tanımı verilmektedir.

Tanım 4.8. Bir $f: \Sigma^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ yüzeyi konjuge ve konformal (u, v) parametrelerine sahip ise bir *izotermik yüzey* olarak adlandırılır.

Projektif uzayda parametrelerin ortogonalliği iyi tanımlı olmadığından izotermik yüzeyleri tanımlamak zordur. Bu problem ortadan kaldırabilmek için projektif kuadrik kavramı kullanılacaktır.

Tanım 4.9. $q: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ dejenere olmayan kuadratik form ve $\alpha(x, x) = q(x)$ polar form olmak üzere bir Θ projektif kuadriği

$$\Theta := \{\langle x \rangle \in \mathbb{R}P^4 | q(x) = 0\} \quad (4.10)$$

şeklinde tanımlanır (Havlicek, 2006). Burada ortogonallik α polar formuna göre tanımlıdır.

Tanım 4.10. Bir $f: \Sigma^2 \rightarrow \Theta$ yüzeyinin bir \tilde{f} lifti verilsin. Bu takdirde

$$(\tilde{f}_u, \tilde{f}_v) = 0$$

koşulu sağlanıyor ise (u, v) parametrelerine *ortogonal parametreler*, buna ek olarak

$$|\tilde{f}_u|^2 = |\tilde{f}_v|^2$$

koşulu da sağlanıyor ise (u, v) parametrelerine *konformal parametreler* denir.

Lemma 4.11. Bir $f: \Sigma^2 \rightarrow \Theta$ yüzeyi ortogonal ve konformal (u, v) parametrelerine sahip olsun. Bu takdirde yüzeyin herhangi bir lifti de ortogonal ve konformal parametrelere sahiptir.

Kanıt. f yüzeyinin bir \tilde{f} lifti light konide değer aldığından

$$(\tilde{f}, \tilde{f}_u) = (\tilde{f}, \tilde{f}_v) = 0$$

yazılabilir. f yüzeyi ortogonal parametrelere sahip olduğundan herhangi bir $e^{\phi}\tilde{f}$ lifti

$$\left((e^{\phi}\tilde{f})_u, (e^{\phi}\tilde{f})_v \right) = e^{2\phi}(\phi_u\tilde{f} + \tilde{f}_u, \phi_v\tilde{f} + \tilde{f}_v) = 0$$

ifadesini sağlar. Dolayısıyla f yüzeyinin herhangi bir lifti ortogonal parametrelere sahiptir.

Benzer şekilde f yüzeyi konformal parametrelere sahip ise $e^{\phi}\tilde{f}$ lifti için

$$|(e^{\phi}\tilde{f})_u|^2 = e^{2\phi}|\phi_u\tilde{f} + \tilde{f}_u|^2 = e^{2\phi}|\tilde{f}_u|^2$$

elde edilir. Bu ise herhangi bir $e^{\phi}\tilde{f}$ lifti için f yüzeyinin konformal parametrelere sahip olduğunu göstermektedir. \square

Lemma 4.12. Bir $f: \Sigma^2 \rightarrow \Theta$ yüzeyinin parametreleri konjuge ise bu parametreler aynı zamanda ortogonaldır.

Kanıt. f yüzeyinin herhangi bir \tilde{f} lifti için $(\tilde{f}, \tilde{f}) = 0$ şeklindedir. Burada sırasıyla u ve v parametrelerine göre türev alınarak

$$(\tilde{f}_{uv}, \tilde{f}) + (\tilde{f}_u, \tilde{f}_v) = 0$$

yazılabilir. 4.6 lemmasına göre $\tilde{f}_{uv} \in \langle \tilde{f}, \tilde{f}_u, \tilde{f}_v \rangle$ olup $(\tilde{f}_{uv}, \tilde{f}) = 0$ bulunur ve sonuç olarak $(\tilde{f}_u, \tilde{f}_v) = 0$ elde edilir. Dolayısıyla (u, v) parametreleri ortogonaldır. \square

Tanım 4.13. α_1 ve α_2 fonksiyonları, sırasıyla, u ve v parametrelerine bağlı olmak üzere bir $f = \langle \tilde{f} \rangle$ yüzeyi

$$|\tilde{f}_u|^2 = \alpha_1 E, \quad |\tilde{f}_v|^2 = \alpha_2 E, \quad (\tilde{f}_u, \tilde{f}_v) = 0 \quad (4.11)$$

ifadelerini sağlıyor ise u ve v parametreleri konformal olacak şekilde değiştirilebilir. Bu nedenle (4.11) denklemlerini sağlayan parametreler *konformal parametreler* olarak adlandırılır.

Artık projektif uzayda projektif kuadrik kavramı kullanılarak ortogonalite anlamlı hale geldiğinden izotermik yüzeyler 4.8 tanımına benzer şekilde ifade edilebilir.

Tanım 4.14. Bir $f: \Sigma^2 \rightarrow \Theta$ yüzeyi konjuge ve konformal (u, v) parametrelerine sahip ise f yüzeyine bir *izotermik yüzey* denir.

4.1.4. Moutard liftleri

Bu bölümde sabit bir projektif kuadrikte değer alan herhangi bir yüzeyin izotermik olması için gerekli durumlar araştırılmaktadır. Bunun için de yüzeyin Moutard liftlerinden faydalanacaktır.

Tanım 4.15. Bir $f: \Sigma^2 \rightarrow \Theta$ yüzeyinin herhangi bir m lifti verilsin. $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$m_{uv} = \lambda m \quad (4.12)$$

ise m liftine bir *Moutard lifti*, (4.12) denkleminde *Moutard denklemi* denir.

Yukarıdaki tanımdan Moutard denkleminin (4.1) Laplace tipi denklemini sağladığı aşikardır.

Teorem 4.16. Bir $f: \Sigma^2 \rightarrow \Theta$ yüzeyi için aşağıdakiler denktir.

- (i) f bir izotermik yüzeydir.
- (ii) f yüzeyinin Laplace invaryantları birbirine eşittir.
- (iii) f yüzeyinin bir m Moutard lifti vardır.

Kanıt. (i) \Rightarrow (ii): f bir izotermik yüzey olsun. Bu takdirde konjuge ve konformal (u, v) parametreleri vardır. Yüzeyin herhangi bir lifti \tilde{f} olmak üzere (4.7) Laplace denklemi \tilde{f}_u ile çarpılırsa

$$(\tilde{f}_{uv}, \tilde{f}_u) + a \cdot E + (\tilde{f}_u, \tilde{f}) = 0 \quad (4.13)$$

elde edilir. Öte yandan $(\tilde{f}_u, \tilde{f}) = 0$ olup bu ifadenin v parametresine göre türevi alınarak

$$(\tilde{f}_{uv}, \tilde{f}_u) = \frac{1}{2}(|\tilde{f}_u|^2)_v$$

bulunur ve (4.13) deklemini

$$E\left(\frac{1}{2}E_v + aE\right) = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}(\ln(E))_v$$

halini alır.

Benzer şekilde,

$$b = -\frac{1}{2}(\ln(E))_u$$

elde edilir. Bu ise $a_u = b_v$ demektir ve dolayısıyla $h = k$ olup f yüzeyinin Laplace invaryantları birbirine eşittir.

(ii) \Rightarrow (iii): f yüzeyinin bir lifti \tilde{f} olarak verilsin. Bir $\phi := \int a dv$ fonksiyonunu için $\phi_v = a$ ve $\phi_u = \int a_u dv = \int b_v dv = b$ olduğundan $a_u = b_v \Rightarrow h = k$ şeklinde yazılabilir. Yani f eşit Laplace invaryantlarına sahiptir. Buradan (4.4) ifadesine göre $\tilde{f} = e^\phi \tilde{f}$ lifti

$$\tilde{a} = a - \phi_v = 0, \quad \tilde{b} = b - \phi_u = 0$$

katsayıları ile bir Laplace tipi denklemi sağlamaktadır. Moutard denklemi Laplace tipi denklemin özel bir hali olduğundan \tilde{f} bir Moutard liftidir.

(iii) \Rightarrow (i): f yüzeyinin bir m Moutard lifti verilsin. m lifti konide değer aldığı için konjuge ve ortogonal parametrelere sahiptir. (4.12) Moutard denklemini m_u ile çarparak

$$(m_{uv}, m_u) + \lambda \underbrace{(m, m_u)}_{=0} = \frac{1}{2}(|m_u|^2)_v = 0$$

elde edilir. Bu nedenle, $|m_u|^2$ ifadesi v -parametresine bağlı değildir.

Benzer şekilde $|m_v|^2$ ifadesinin de u -parametresine bağlı olmadığı görülebilir. m lifti

bu parametreler ile (4.11) denklemini sağladığından $f = \langle m \rangle$ bir izotermik yüzeydir. □

4.2. Linear Weingarten Yüzeyleri

Bu bölümde linear Weingarten yüzeylerinin özel Ω -yüzeyleri olarak nasıl ortaya çıktıkları gösterilecektir. Bu bağlamda (Burstall et al., 2012) çalışmasındaki sonuçlar bu çalışma çerçevesine göre tekrar türetilenektir. Ayrıca asli eğrilik ve asli eğrilik doğrultularının Lie küre geometride neden korunduğu incelenecek ve Legendre immersiyonları için *asli eğrilik kongrüansı* kavramı tanımlanacaktır.

4.2.1. Eğrilik küresi kongrüansları

Lie küre geometride eğrilik küresi kavramını tanımlamadan önce herhangi bir uzay formunda verilen $f : \Sigma^2 \rightarrow Q$ yüzeyinin eğrilik küresinin klasik tanımı verilecektir.

Tanım 4.17. Bir $f : \Sigma^2 \rightarrow Q$ yüzeyi ve $c \in \Sigma^2$ verilsin. W_c Weingarten dönüşümü olmak üzere W_c dönüşümünün öz değerlerine *asli eğrilikler* ve bu öz değerlere karşılık gelen öz vektörlere de *asli doğrultular* denir (Bär, 2010).

Tanım 4.18. Herhangi bir s küresi verilsin. Bir $c \in \Sigma^2$ noktasında f , s küresinin bir zarfı ve s küresinin eğriliği asli eğriliklerden birine eşit ise s *eğrilik küresi* olarak adlandırılır (Bär, 2010).

f yüzeyi $s_1, s_2 : \Sigma^2 \rightarrow \mathcal{Q}^4$ şeklinde iki eğrilik küresi kongrüansına sahiptir. Bu andan itibaren $s_1 = s_2$ durumu hariç tutulacağından aşağıdaki tanım verilecektir.

Tanım 4.19. Herhangi bir uzay formunda $f : \Sigma^2 \rightarrow Q$ yüzeyi verilsin. f yüzeyinin $f(c), c \in \Sigma^2$ noktasındaki asli eğrilikleri birbirine eşit ise $f(p)$ noktasına bir *umbilik nokta* denir (Bär, 2010).

Tanım 4.20. f yüzeyinin umbilik olmayan her $f(p)$ noktasındaki asli doğrultuları V_1, V_2 olsun. Bu takdirde

$$\frac{d}{du}|_p = V_1 \quad \text{ve} \quad \frac{d}{dv}|_p = V_2$$

olacak şekilde (u, v) lokal koordinatları vardır. Bu koordinatlar $u = sbt$ ve $v = sbt$ eğrilik çizgilerini tanımlar ve bu nedenle *eğrilik çizgisi parametreleri* olarak adlandırılır.

Bir önceki bölümden açıkça görülebileceği gibi eğrilik çizgisi parametreleri konjuge ve ortogondur.

Eğrilik küresi kavramı herhangi bir uzay formunda aldıkları değerler ile verilen parametrik yüzeyler için tanımlanmıştır. Şimdi de light koni modeline göre f yüzeyinin özel liftler aracılığıyla eğrilik küresi kavramı verilecektir. Burada amaç, bir uzay formunda verilen f yüzeyinin eğrilik kürelerinin, yüzeyin \mathbb{R}^4 Legendre liftinin eğrilik kürelerine karşılık gelecek şekilde Legendre immersiyonları için eğrilik küresini tanımlamaktır.

Bir uzay formundaki $f : \Sigma^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ yüzeyi $p \in \mathbb{R}^{4,2}$ nokta küre kompleksi ve $q \in \mathbb{R}^{4,2}$ uzay form vektörü ile verilsin. n tanjant düzlem kongrüansı olmak üzere yüzeyin Legendre lifti **(2.18)** örneğinden de görülebileceği gibi $\mathbb{L} := \langle f, n \rangle$ ile gösterilmektedir. Aşağıda eğrilik küresi kongrüanslarının f yüzeyinin \mathbb{L} Legendre lifti yardımıyla özel liftler olarak nasıl temsil edildikleri görülecektir.

Lemma 4.21. Bir $f : \Sigma^2 \rightarrow Q$ yüzeyi $\mathbb{L} : \Sigma^2 \rightarrow \mathcal{L}$ Legendre lifti ve κ_1, κ_2 asli eğrilikleri ile verilsin. Bu takdirde f yüzeyinin eğrilik küre kongrüansları

$$s_1 = \langle n + \kappa_1 f \rangle = \langle s_1 \rangle$$

$$s_2 = \langle n + \kappa_2 f \rangle = \langle s_2 \rangle$$

şeklinde dir. Dolayısıyla eğrilik küre kongrüansları umbilik noktalar dışındaki noktalarda $\mathbb{L} = \langle s_1, s_2 \rangle$ Legendre liftini gerer.

Kanıt. **(2.21)** tanımından görülebileceği üzere $s_1, s_2 \in \Gamma \mathbb{L}$ olduğundan s_1 ve s_2 eğrilik küreleri için f bir zarftır ve **(2.16)** tanımına göre κ_1 ve κ_2 eğriliklerine sahiptirler. Böylece f yüzeyinin eğrilik küre kongrüanslarıdır.

Ayrıca umbilik noktalar dışındaki noktalarda $\kappa_1 \neq \kappa_2$ olduğundan s_1 ve s_2 lineer bağımsızdır, bu nedenle \mathbb{L} Legendre liftini gererler. \square

Lemma 4.22. f yüzeyinin eğrilik çizgisi koordinatları (u, v) ve asli eğrilikleri κ_1, κ_2 olmak üzere umbilik noktalar dışında

$$0 = n_u + \kappa_1 f_u = n_v + \kappa_2 f_v \tag{4.14}$$

şekildeki Rodrigues denklemleri sağlanır.

Lemma 4.23. Bir \mathbb{f} yüzeyinin eğrilik küreleri s_i olmak üzere herhangi bir $s_i, i \in \{1, 2\}$ lifti için

$$(s_1)_u, (s_2)_v \in \langle s_1, s_2 \rangle \quad (4.15)$$

ifadesi sağlanır.

Kanıt. s_1 eğrilik küresinin u parametresine göre türevi alındığında

$$(s_1)_u = \eta_u + \kappa_1 \mathbb{f}_u + \kappa_{1u} \mathbb{f}$$

olduğundan (4.14) denkleminde

$$(s_1)_u = (\kappa_1)_u \mathbb{f} \in \langle \mathbb{f}, \eta \rangle = \langle s_1, s_2 \rangle \quad (4.16)$$

elde edilir. Benzer şekilde $(s_2)_v \in \langle s_1, s_2 \rangle$ olduğu da gösterilebilir. \square

Şimdi de bir Legendre immersiyonu için eğrilik küresi kongrüansları tanımlanacaktır.

Tanım 4.24. $\Lambda: \Sigma^2 \rightarrow \mathcal{Q}$ bir Legendre immersiyon olsun. Eğer $ds(w) \in \Lambda$ olacak şekilde

$$w \in \Gamma(T\Sigma^2)$$

var ise $s \in \Gamma\Lambda$ kesitine bir *eğrilik küresi kongrüansı* denir.

Bir \mathbb{f} yüzeyinin eğrilik küre kongrüanslarına $u = \frac{\partial}{\partial u}$ veya $v = \frac{\partial}{\partial v}$ Legendre lifleri aracılığıyla yükseltilebileceğine dikkat ediniz. Şimdi de 4.21 lemmasına benzer şekilde Legendre immersiyonları için eğrilik küresi kongrüansları tanıtılacaktır.

Tanım 4.25. $\Lambda: \Sigma^2 \rightarrow \mathcal{Q}$ Legendre immersiyonu için \mathbb{f} küresel izdüşümü ve η büyük küre kongrüansı olmak üzere $\Lambda = \langle \mathbb{f}, \eta \rangle$ olsun. Bu takdirde eğrilik küre kongrüansları

$$s_i = \langle \eta + \kappa_i \mathbb{f} \rangle \quad (4.17)$$

olur. Burada \mathbb{f} yüzeyinin asli eğrilikleri κ_i ile gösterilmiştir.

4.2.2. Ω -yüzeyleri

Ω - yüzeyleri izotermik yüzeylerin doğal bir genellemesidir. Öncelikle bu yüzeylerin klasik tanımını verilecektir.

Tanım 4.26. (u, v) eğrilik çizgisi koordinatlarına göre verilen bir $\tilde{f} : \Sigma^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ yüzeyi, U ve V sırasıyla, u ve v parametrelerinin fonksiyonları olmak üzere

$$\left(\frac{V}{U} \frac{\sqrt{E}}{\sqrt{G}} \frac{\kappa_{1,u}}{\kappa_1 - \kappa_2} \right)_v \pm \epsilon^2 \left(\frac{U}{V} \frac{\sqrt{G}}{\sqrt{E}} \frac{\kappa_{2,v}}{\kappa_1 - \kappa_2} \right)_u = 0, \quad \epsilon \in \{1, i\} \quad (4.18)$$

koşulunu sağlıyor ise Ω -yüzeyi olarak adlandırılır. Burada $E = (\tilde{f}_u, \tilde{f}_u)$ ve $G = (\tilde{f}_v, \tilde{f}_v)$ olup (4.18) denkleminde *Demoulin denklemi* denir (Demoulin, 1911b).

Legendre immersiyonları için Ω -yüzeylerini tanımlamadan önce harmonik bölünme kavramı göz önüne alınacaktır.

Tanım 4.27. w_1, w_2, w_3 ve w_4 vektörleri verilsin. Bu vektörlerin çifte oranı (çapraz oranı)

$$\text{cr}(w_1, w_2, w_3, w_4) = -1. \quad (4.19)$$

şeklinde ise w_1, w_2, w_3 ve w_4 vektörleri harmonik olarak bölünmektedir denir (Rossman, 2014).

Tanım 4.28. Bir $\Lambda : \Sigma^2 \rightarrow \mathcal{Q}$ Legendre immersiyonu eğrilik küre kongrüanslarını her noktada harmonik olarak bölen bir enveloped izotermik küre kongrüans çiftine sahip ise bir Ω -yüzeyi adını alır.

Lemma 4.29. (u, v) eğrilik çizgisi koordinatları ile verilen bir Λ Legendre immersiyonu verilsin. Bir ϕ fonksiyonu için $\epsilon \in \{1, i\}$ olmak üzere

$$(\tilde{s}_1)_u = \phi_u \tilde{s}_2 \quad (4.20)$$

$$(\tilde{s}_2)_v = \epsilon^2 \phi_v \tilde{s}_1 \quad (4.21)$$

olacak şekilde s_1, s_2 eğrilik küre kongrüanslarının s_1, s_2 liftleri var ise, Λ Legendre immersiyonuna bir Ω -yüzeyi denir.

Kanıt. (4.39) denklemini sağlayan bir ϕ fonksiyonu ve s_1, s_2 liftleri var olsun. s^\pm küre kongrüansları

$$s^\pm := s_1 \pm \epsilon s_2 \quad (4.22)$$

olacak şekilde s^\pm liftleri ile tanımlansın. Bu takdirde, (4.39) denklemi kullanılarak uv -türevleri

$$(s^\pm)_{uv} = (s_1)_{uv} \pm \epsilon (s_2)_{vu} = \epsilon^2 (\phi_{uv} s_2 + \phi_u \phi_v s_1) \pm \epsilon (\phi_{uv} s_1 + \phi_u \phi_v s_2) \quad (4.23)$$

$$= (s_1 \pm \epsilon s_2) (\phi_u \phi_v \pm \epsilon \phi_{uv}) \quad (4.24)$$

olarak elde edilir. Ayrıca

$$s^\pm := s_1 \pm \epsilon s_2$$

olduğundan s^\pm liftlerinin aslında s^\pm küre kongrüanslarının Moutard liftleri olduğu görülür. Dolayısıyla, 4.16 teoremi yardımıyla s^\pm Moutard liftlerinin s_1 ve s_2 eğrilik küresi kongrüansları harmonik olarak bölen bir izotermik küre kongrüansı çiftidir. Yani, Λ Legendre immersiyonu bir Ω -yüzevidir. \square

4.2.3. Lie küre geometride lineer Weingarten yüzeyleri

Bu kısımda (Burstall et al., 2012) çalışmasında verilen bazı önemli bölümler verilen şartlar altında tekrar türetilerek, uzay formlarında alınan lineer Weingarten yüzeylerinin Lie küre geometrisinde özel Ω -yüzeyleri olarak ortaya çıktıkları gösterilmektedir.

Tanım 4.30. Bir $f : \Sigma^2 \rightarrow \mathfrak{R}$ yüzeyi için $H = (\kappa_1 + \kappa_2)/2$, $K = \kappa_1 \kappa_2$, sırasıyla, ortalama ve Gauss eğrilikleri olmak üzere

$$0 = aK + 2bH + c,$$

şeklinde trivial olmayan (reel) bir lineer bağıntı sağlanıyorsa yüzeye bir *lineer Weingarten yüzeyi* denir.

Burada

- $a \neq 0$ ise, lineer Weingarten koşulu

$$(a\kappa_1 + b)(a\kappa_2 + b) + (ac - b^2) = 0$$

olarak düzenlenebilir.

- $ac - b^2 \neq 0$ ise, diskriminantın işaretine bağlı olarak

$$(a\kappa_1 + b) = \sqrt{b^2 - ac} \tanh \phi \quad (4.25)$$

$$(a\kappa_2 + b) = \sqrt{b^2 - ac} \coth \phi. \quad (4.26)$$

olacak şekilde reel bir ϕ fonksiyonu vardır.

$\kappa_i = \frac{(s_i, q)}{(s_i, p)}$ asli eğrilikleri, eğrilik küresi liftleri cinsinden ifade edilirse lineer Weingarten koşulu

$$W = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$0 = k_1 W k_2^t \text{ with } k_i = ((s_i, q), (s_i, p))$$

haline dönüşür. $\langle q, p \rangle$ düzleminin bazının $\langle q_1, q_2 \rangle$ düzleminin herhangi bir bazı olarak değiştirilmesi lineer Weingarten koşulunun yapısını değiştirmemektedir.

Yani, s_1, s_2

$$(s_1, q_1) = \epsilon^2 (s_2, q_2) = \frac{1}{\epsilon} \sinh(\epsilon\phi), \quad (s_1, q_2) = (s_2, q_1) = \cosh(\epsilon\phi). \quad (4.27)$$

olacak şekilde düzenlenebilir. Dolayısıyla lineer Weingarten koşulu

$$0 = (s_1, q_1)(s_2, q_1) - \epsilon^2 (s_1, q_2)(s_2, q_2) \quad (4.28)$$

haline dönüşür.

Teorem 4.31. Uzay formlarında $ac - b^2 \neq 0$ olacak şekilde verilen lineer Weingarten yüzeyleri her biri sabit lineer küre kompleksi q^\pm içinde değer alan

$\mathbb{F} = \langle s^+, s^- \rangle$ şeklindeki izotermik küre kongrüanslarının zarfı olacak şekilde Ω yüzeyleridir. Burada q^+, q^- tarafından gerilen düzlem nokta küre kompleksi ve uzay form vektörü tarafından gerilen düzlem ile kesişmektedir.

Kanıt. \mathbb{F} bir lineer Weingarten yüzeyi olsun. Yukarıda bahsedildiği üzere $\langle q, p \rangle$ ve $\langle q_1, q_2 \rangle$ düzlemleri arasındaki baz değişiminden q_1 and q_2 vektörleri için

$$(s_1, q_1) = \epsilon^2 (s_2, q_2) = \frac{1}{\epsilon} \sinh(\epsilon\phi) \quad (4.29)$$

$$(s_1, q_2) = (s_2, q_1) = \cosh(\epsilon\phi) \quad (4.30)$$

yazılabilir. Ayrıca s_1, s_2 liftleri

$$(s_1)_u = \phi_u s_2$$

$$(s_2)_v = \epsilon^2 \phi_v s_1$$

olacak şekilde s^\pm eğrilik küresi kongrüanslarının liftleri olarak elde edilir. Buradan (4.29) önermesinden \mathbb{F} yüzeyinin Legendre lifti bir Ω -yüzeyidir.

Diğer taraftan, $\mathbb{F} = \langle s^+, s^- \rangle$ yüzeyi, her biri sabit bir q^\pm lineer küre kompleksinde değerler alan s^\pm izotermik küre kongrüansı (yani Moutard liftleri) tarafından gerilen bir Ω -yüzeyi ise, eğrilik kürelerinin uygun liftleri için, eğrilik kongrüansları

$$s^\pm := s_1 \pm \epsilon s_2 \quad (4.31)$$

olarak tanımlanabilir. s^\pm izotermik küre kongrüansları sabit bir q^\pm lineer küre kompleksinde değerler aldığından $(s^\pm, q^\pm) = 0$ yazılabilir. Bu durumda

$$0 = (s_1, q^+)(s_2, q^-) + (s_1, q^-)(s_2, q^+) \quad (4.32)$$

elde edilir. Bu nedenle \mathbb{F} yüzeyi $\langle q^+, q^- \rangle$ düzlemine bir lineer Weingarten yüzeyi izdüşürür.

□

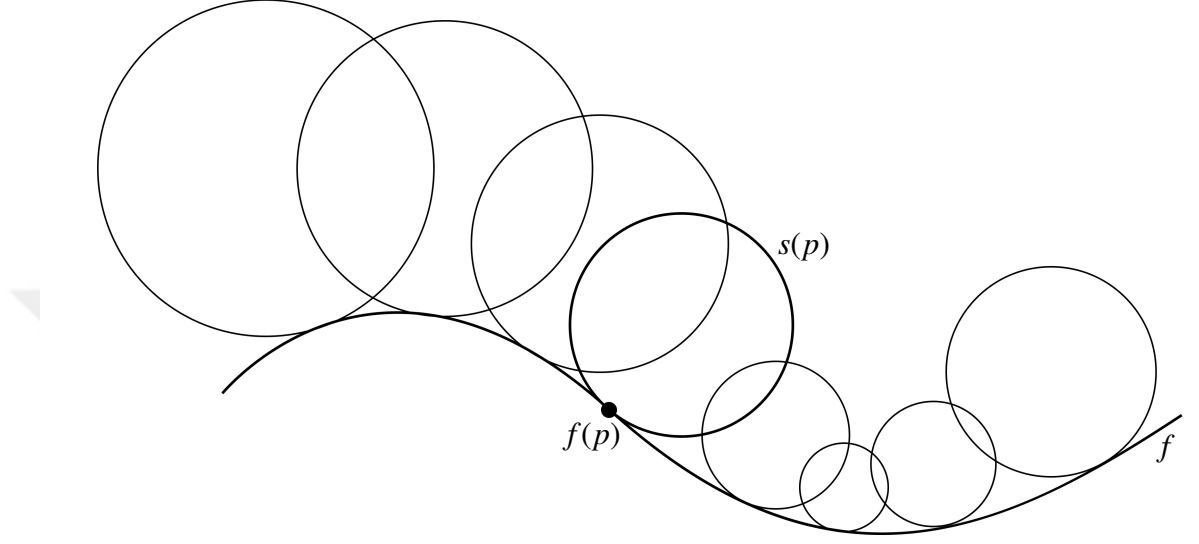
4.3. Kanal Yüzeyleri

Bu bölümde kanal yüzeylerinin (Hertrich-Jeromin, 2003) kaynağı doğrultusunda esas olarak Möbius geometrik yaklaşımı verilecektir.

Tanım 4.32. Bir diferansiyellenebilir $f : \Sigma^m \rightarrow S^3$ dönüşümü her $p \in \Sigma$ için

$$f(p) \in s(p) \quad \text{and} \quad T_{f(p)}f(\Sigma) \subset T_{f(p)}s(p). \quad (4.33)$$

şartını sağlıyor ise, bir s küre kongrüansının zarfı adını alır.



Şekil 4.1: Bir küre kongrüansının zarfı

Bir $y \in S^3$ noktası için $(y, y) = 1$ olduğundan $\eta := [1, y]$ vektörünün lightlike olduğu bilinmektedir. Bundan ötürü $\eta \neq 0$ vektörü için

$$\mathcal{Q}^3 = \{\langle \eta \rangle \mid (\eta, \eta) = 0\} \quad (4.34)$$

konisi S^3 uzayına karşılık gelmektedir. Buradan \mathcal{Q}^3 konisinin, PL^4 nin projektif light konisi olduğu söylenebilir. Dolayısıyla bir s küre kongrüansının zarfı aynı zamanda $f : \Sigma^m \rightarrow \mathcal{Q}^3$ olarak da değerlendirilebilir. Burada $f(p)$ noktasındaki $T_{f(p)}f(\Sigma)$ ve $T_{f(p)}s(p)$ tanjant uzayları, $\mathbb{R}P^4$ projektif uzayında yer alan düzlemlerdir.

Lemma 4.33. Diferansiyellenebilir bir $f : \Sigma^m \rightarrow \mathcal{Q}^3$ dönüşümünün bir $s : \Sigma^m \rightarrow \mathbb{R}P^4$ küre kongrüansının zarfı olması için gerekli ve yeterli koşul \tilde{f} ve ς , sırasıyla, f ve s nin liftleri olmak üzere,

$$(\tilde{f}, \varsigma) = 0 \quad (d\tilde{f}, \varsigma) \equiv 0 \quad (4.35)$$

olmasıdır.

(4.35) denkleminde verilen koşulların projektif koşullar olduğu dikkate alındığında, \tilde{f} ve s liftlerinin seçiminin keyfi olmadığı çıkarımı yapılabilir. Dolayısıyla $(f, s) = 0$ and $(df, s) \equiv 0$ yazılabilir. Bunun yanında, f ve s regüler ise (4.35) denkleminin $\mathbb{R}^{4,1}$ uzayında iki şekilde değerlendirilebilirler:

- Ya s, f yüzeyinin bir normal spacelike alanı
- Ya da f, s nin bir izotropik normal alanıdır.

Öte yandan, kürelerin $\mathbb{R}P^4$ projektif uzayı, $S^{3,1}$ Lorentz küresinin bir metriği ile donatılabileceğinden lokal olarak $|s| \equiv 1$ olacak şekilde bir $s : \Sigma^2 \rightarrow S^{3,1}$ lifti seçilebilir. Bunun yanı sıra, $(\tilde{f}, s) = 0$ ifadesi $(d\tilde{f}, s) \equiv 0$ demek olduğundan $(\tilde{f}, ds) \equiv 0$ yazılır.

Tanım 4.34. $s : I \rightarrow S^{3,1}$ hiperyüzeylerinin bir parametrelili bir ailesinin $f : I \times \Sigma^1 \rightarrow \mathcal{Q}^3$ şeklindeki zarfına *kanal yüzeyi* denir.

Hiperyüzeylerin her bir parametrelili ailesi zarfa sahip değildir. $s(t)$ kürelerinin bir parametrelili ailesinin zarfının olması için gerekli bir koşul, $\langle s(t), s'(t) \rangle$ nin her $t \in I$ noktasında bir Minkowski düzlemine dik olmasıdır. Tersine, her normalleştirilmiş, spacelike küre eğrisi bir zarfa sahiptir.

Bu bölümde temel amaç herhangi düzlemsel, spacelike küre eğrisinin bir silindir, bir koni ve bir dönel yüzey olacak şekilde \mathbb{R}^3 Öklid uzayına izdüşürülebileceğini göstermektir. Bunu yapabilmek için sıradaki örnek verilecektir. Ayrıntılar için (Hertrich-Jeromin, 2003) referansında verilen 1.8.5. örnek incelenebilir.

Örnek 4.35. $s : I \rightarrow S^{3,1}$ bir spacelike düzlemsel küre eğrisi olsun. Bu takdirde herhangi bir $f : I \times \Sigma \rightarrow \mathcal{Q}^3$ zarfı bir silindir, bir koni ya da bir dönel yüzey olacak şekilde \mathbb{R}^3 Öklid uzayına izdüşürülebilir. Bu üç durum, sabit $\mathfrak{F} := \langle s, s', s'' \rangle$ 3-düzlemin işaretine bağlı olarak değerlendirilecektir.

1. \mathfrak{F} düzlemi S^3 küresini enine olacak şekilde kesişiyorsa, arakesitleri dik kesişen iki sabit $s_1, s_2 \in S^{3,1}$ küresi tarafından tanımlanabilen bir sabit çemberdir. $t \in I$ için bütün $s(t)$ küreleri s_1 ve s_2 küreleri ile dolayısıyla da çemberle kesişir. Bu çember bir $q \in s_1 \cap s_2$ noktası boyunca düz bir doğruya izdüşürülürse f zarfı dönme eksenini bu çember olan bir dönel yüzey olarak ortaya çıkar.

2. \mathfrak{F} düzlemi S^3 küresine bir q noktasında değiyorsa, bütün $s(t)$ küreleri q noktasını içerir. \mathfrak{F}^\perp de anı zamanda q noktasını içerdiğinden ve \mathfrak{F}^\perp içindeki herhangi bir diğere küreyle ortak hiçbir noktası olmadığından \mathfrak{F}^\perp deki her küre bir düzlemdir. Bu nedenle s içindeli sarmayalan (enveloping) düzlemler bir paralel düzlem ailesine diktir. Yani f zarfı bir silindir olur.
3. \mathfrak{F} düzlemi S^3 küresi ile kesişmiyorsa, bu durumda \mathfrak{F}^\perp dik düzlemi q, q_0 noktalarında S^3 küresini keser. q noktasından $S^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ stereografik izdüşümü yardımıyla küreler q_0 noktasının görüntüsü q yu içeren bir düzlem ailesi haline gelir. Bu nedenle f zarfı q_0 tepe noktası ile olmak üzere bir konidir.

Lie küre geometri yaklaşımına göre kanal yüzeyleri $s_v = 0$ olacak şekilde $s : \Sigma^2 \rightarrow \mathfrak{Q}^4$, $(u, v) \in \Sigma^2$ kürelerinin 1-parametreli aileleri olarak düşünülebilir. Koşulu projektif bir kavram olduğundan s liftlerinin seçiminden bağımsız olacaktır. Şimdi $\mathbb{R}^{4,2}$ uzayında (4.35) örneğine benzer bir sınıflandırma elde edilmek istenmektedir.

Lemma 4.36. Bir kanal yüzeyi s kürelerinin bir parametrelili ailesi ile verilsin. s küresi için $p \in \mathbb{R}^{4,1}$, $|p|^2 = -1$ bir timelike vektör olmak üzere $\langle s, s', s'', p \rangle$ sabit bir 4-düzlem olacak şekilde bir s lifti varsa, \mathfrak{R} üzerindeki kanal yüzeyinin izdüşümü bir silindir, bir koni veya bir dönel yüzey (bir parçası) olacak şekilde p^\perp uzayında bir lightlike vektör vardır.

Kanıt. Kabulden dolayı nokta küre kompleksi p timelike vektörü için $p \in \mathbb{R}^{4,1}$, $|p|^2 = -1$ yazılabilir. p^\perp üzerine yapılan izdüşüm π_p olsun. s nin bir s lifti p vektörüne dik olmaması durumunda $(p, s) = -1$ olacak şekilde sabitlendiğinde $\pi_p(s) = s - p$ yazılabilir. İzdüşüm sonrasında ortaya çıkan eğrinin s' ve s'' türevleri π_p ve $|\pi_p(s)| = 1$ altında sabit olduğundan dolayı spacelike düzlemsel bir eğri olduğu görülmektedir. Bu ise p nokta küre kompleksinin Möbius geometrisinde (4.35) ile verilen şartların sağlandığını göstermektedir. s küresinin zarfı f olmak üzere (4.35) örneğine göre, $(\mathfrak{f}, q) = -1$ denklemini sağlayan f zarfının bir \mathfrak{f} lifti bir koni, bir silindir veya bir dönel yüzeyin (bir parçası)na izometrik olacak şekilde bir $q \in p^\perp \cap L^5$ vektörü vardır. Ayrıca \mathfrak{f} lifti \mathfrak{R} kuadriğinde yatar.

□

4.3.1. Vessiot teoremi

Bu kısımda ise, Vessiot teoremi ispatsız bir şekilde verilecektir. Detaylar için (Hertrich-Jeromin, 2003) referansında verilen 3.7. kısım incelenebilir. Bir sonraki bölümde lineer Weingarten kanal yüzeyleri incelenecektir. Vessiot teoremi bu yüzeylerin sınıflandırılmasını genelleştirmek üzere kullanılmaktadır.

Teorem 4.37. Bir izotermik kanal yüzeyi, umbilik noktalar dışında, S^3 kresinin uygun seçilen bir Öklid uzayında bir silindir, bir koni veya bir dönel yüzeydir (ya da bir parçasıdır).

4.4. Lineer Weingarten Kanal Yüzeyleri

Herhangi bir kanal yüzeyi 1-parametrelili küre ailesi tarafından veya konformal geometride dairesel eğrilik çizgileri ile verilen bir yüzey olarak karakterize edilebilir. (Hertrich-Jeromin et al., 2015) referansından da görüleceği üzere 3-boyutlu Öklid uzayında dairesel eğrilik çizgilerinin bir ailesi ile verilen lineer Weingarten yüzeyleri, yani lineer Weingarten kanal yüzeyleri, ya tubular ya da bir dönel yüzeydir. Bu kısımda, (Burstall et al., 2012) kaynağına benzer şekilde Lie küre geometrisinde lineer Weingarten kanal yüzeylerinin sınıflandırılması amaçlanmaktadır. Bu yüzeylerin Lie küre geometrisinde izotermik yüzey olarak ortaya çıktıkları gösterilecektir.

Tanım 4.38. $\Lambda : \Sigma^2 \rightarrow \mathcal{Q}$ yüzeyi bir uzay formunda sırasıyla, sabit q^\pm lineer küre komplekslerinde değer alan enveloped izotermik s^\pm küre kongrüansları ile verilen bir lineer Weingarten yüzeyi olsun. Eğrilik küre kongrüanslarından biri tek bir parametreye bağlı ise Λ yüzeyine bir *lineer Weingarten kanal yüzeyi* denir.

Eğrilik küre kongrüansları, izotermik küre kongrüanslarını her noktada harmonik olarak böldüğünden dolayı s_1, s_2 liftleri, $\varepsilon \in \{1, i\}$ olmak üzere

$$s^\pm = s_1 \pm \varepsilon s_2,$$

olacak şekilde seçilebilir, bkz (4.31) ve (4.29) önermesinden

$$s_{uv}^\pm = \varepsilon^2 (\phi_u \phi_v \pm \varepsilon \phi_{uv}) s^\pm, \quad (4.36)$$

olduğu görülür. Λ lineer Weingarten yüzeyi aynı zamanda bir kanal yüzeyi olsun. Bu durumda, erilik küre kongrüanslarından biri sadece tek bir parametreye bağlıdır. $(s_2)_v = 0$ olsun.

Lemma 4.39. Λ yüzeyi bir lineer Weingarten kanal yüzeyi olsun. Bu takdirde, u ve v , sırasıyla, s_1 ve s_2 eğrilik küre kongrüanslarının eğrilik çizgisi parametreleri olmak üzere

$$(s_2)_u = 0 \quad (4.37)$$

$$(s_1)_{uv} = 0 \quad (4.38)$$

koşulunu sağlayan s_1, s_2 eğrilik küresi kongrüanslarının, sırasıyla, s_1 and s_2 liftleri vardır.

Kanıt. (4.29) önermesine göre ϕ fonksiyonu ve $\epsilon \in \{1, i\}$ için

$$(s_1)_u = \phi_u s_2$$

$$(s_2)_v = \epsilon^2 \phi_v s_1$$

ifadesi salanacak şekilde eğrilik küre kongrüanslarının liftleri vardır. $(s_2)_v = 0$ olduğundan $\phi_v = 0$ yazılabilir. türevi alınarak ayrıca $(s_1)_{uv} = 0$ olduğu görülür. \square

Lemma 4.40. $W := \langle s_{1v}, s_{1vv} \rangle$ uzayı $V := \langle s_2, s_{2u}, s_{2uu}, p \rangle$ uzayına dik ,sabit bir projektif doğrudur.

Kanıt. $(s_1, s_2) = 0$ kontaktlık şartı ve s_2 yalnızca u parametresine bağlı iken W nin v parametresine bağlı olmasından dolayı $W \perp \langle s_2, s_{2u}, s_{2uu} \rangle$ yazılabilir. Herhangi bir $\tilde{p} \in \langle q^+, q^- \rangle$ vektörü W ye dik olsun. $s^\pm = s_1 \pm \epsilon s_2$ olduğu bilindiğinden q^\pm sabit lineer küre kompleksleri için

$$(s_1, q^+) = -\epsilon(s_2, q^+) \quad (4.39)$$

$$(s_1, q^-) = \epsilon(s_2, q^-),$$

elde edilir. Burada ifadenin sağ tarafı yalnızca u parametresine bağlıdır. Bu sebeple ifadenin v türevi alınarak kabul gerçekleşir ve $p \in \langle q^+, q^- \rangle$ önermeyi ispatlar. \square

Teorem 4.41. Herhangi bir uzay formunda eğrik küresi kongrüansları ile verilen her $\hat{f} : \Sigma^2 \rightarrow \mathfrak{R}$ lineer Weingarten kanal yüzeyi izotermiktir.

Kanıt.

$$\hat{f} := s_1 - \frac{(s_1, p)}{(s_2, p)} s_2 \quad (4.40)$$

lifti tarafından \mathcal{E} içinde bir küre kongrüansı tanımlayalım. Her nokta küre kompleksi için Legendre dönüşümü içinde yalnız tek bir nokta küre kongrüansı vardır, bu nedenle $(\hat{f}, p) = 0$ ifadesi \hat{f} nin f yüzeyinin bir lifti olduğunu ispatlar. Diğer taraftan

$$\hat{f}_{uv} = 0, \quad s_{1uv} = 0 \quad (4.41)$$

yazılabilir. s_2 bu özelliğe sahip olduğundan ve $s_{1v} \in W \perp p$ olup (4.40) ifadesinde çıkarılan terim yalnızca u -parametresine bağlıdır. Bu nedenle \hat{f} lifti f yüzeyinin bir Moutard liftidir. Dolayısıyla izotermik küre kongrüansı olur ve her uzay form izdüşümü de izotermiktir. \square

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada lineer Weingarten kanal yüzeylerinin bir (ambient) uzay form geometrisinde daha genel oluşumlar için sınıflandırılmasını ispatlamak üzere küre geometri metotları uygulanmıştır. Bu doğrultuda sadece daha genel sınıflandırma sonucuna ulaşmakla kalmayıp aynı zamanda uzayın Öklid uzayı olması durumundaki hali incelenmiştir. Aynı zamanda Öklidyen durumun yetersiz kaldığı bazı durumlarda geometrik bir kavrayış kazanılmıştır. Bu da lineer Weingarten yüzeylerinin Lie geometrik karakterizasyonu kullanılarak yapılmıştır.

Bu tez çalışması hazırlığı süresince yazar alanında uzman olan uluslararası araştırmacılar ile işbirliği yapma ve etkileşim halinde bulunma fırsatı yakalamıştır. Ayrıca elde edilen bulgular diferansiyel geometri alanında farklı yönlere genişletilebileceğinden önemli bir kaynak olarak düşünülebilir.

Bu araştırma sonuçlarına göre potansiyel bir genişleme planı (Burstall vd, 2017) ve (Müller and Wallner, 2013) de bahsi geçen diskret ve yarı-diskret lineer Weingarten yüzeylerinin incelenmesidir.



KAYNAKLAR

- Abbena, E., Salamon, S., and Gray, A. 2017. *Modern differential geometry of curves and surfaces with Mathematica*. Chapman and Hall/CRC.
- Aledo Sánchez, J. A. and Espinar, J. M. 2007. Hyperbolic linear Weingarten surfaces in \mathbb{R}^3 . *Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.)*, 38(2):291–300.
- Bär, C. 2010. *Elementary differential geometry*. Cambridge University Press.
- Bianchi, L. 1904. Ricerche sulle superficie isoterme e sulla deformazione delle quadriche. *Annali di Mat. (3)*, 11:93–157.
- Bianchi, L. 1905. Complementi alle ricerche sulle superficie isoterme. *Annali di Mat. (3)*, 12:19–54.
- Blaschke, W. 1929. *Vorlesungen über Differentialgeometrie und geometrische Grundlagen von Einsteins Relativitätstheorie. III: Differentialgeometrie der Kreise und Kugeln*. Bearbeitet von G. Thomsen.
- Bobenko, A. 2008. *Discrete differential geometry*. Springer.
- Burstall, F. 2006. Isothermic surfaces: conformal geometry, Clifford algebras and integrable systems. In *Integrable systems, geometry, and topology*, pages 1–82. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS). Somerville, MA: International Press.
- Burstall, F., Hertrich-Jeromin, U., and Rossman, W. 2017. Discrete linear weingarten surfaces. *Nagoya Mathematical Journal*, pages 1–34.
- Burstall, F. E., Hertrich-Jeromin, U., and Rossman, W. 2012. Lie geometry of linear Weingarten surfaces. *C. R., Math., Acad. Sci. Paris*, 350(7-8):413–416.
- Calapso, P. 1903. Sulle superficie a linee di curvatura isoterme. *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 17:275–286.
- Calapso, P. 1915. Sulle trasformazioni delle superficie isoterme. *Annali di Mat. (3)*, 24:11–48.

- Cayley, A. 1871. On the surfaces divisible into squares by their curves of curvature. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 1(1):120–121.
- Cecil, T. E. 1992. *Lie sphere geometry. With applications to submanifolds*. New York etc.: Springer-Verlag.
- Christoffel, E. B. 1867. Ueber einige allgemeine Eigenschaften der Minimumsflächen. *J. Reine Angew. Math.*, 67:218–228.
- Clarke, D. J. 2012. Möbius-flat hypersurfaces in projective space. *arXiv preprint arXiv:1203.2318*.
- Demoulin, A. 1911a. Sur les surfaces R et sur les surfaces Ω . *C. R. Acad. Sci., Paris*, 153:705–707.
- Demoulin, A. 1911b. Sur les surfaces Ω . *C. R. Acad. Sci., Paris*, 153:927–929.
- Eisenhart, L. P. 1915a. Surfaces Ω and their transformations. *Trans. Am. Math. Soc.*, 16:275–310.
- Eisenhart, L. P. 1915b. Transformation of surfaces Ω .
- Ferapontov, E. 2002. Analog of wilczynski's projective frame in lie sphere geometry: Lie-applicable surfaces and commuting schrödinger operators with magnetic fields. *International Journal of Mathematics*, 13(09):959–985.
- Havlicek, H. 2006. *Lineare Algebra für Technische Mathematiker*. Heldermann.
- Hertrich-Jeromin, U. 2003. *Introduction to Möbius differential geometry*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Hertrich-Jeromin, U. 2014. Differential geometry: A concise introduction. Lecture Notes.
- Hertrich-Jeromin, U., Mundilova, K., and Tjaden, E.-H. 2015. Channel linear Weingarten surfaces. *Journal of Geometry and Symmetry in Physics*, 40:25–33.
- Kühnel, W. 2015. *Differential geometry*, volume 77. American Mathematical Soc.
- López, R. 2008a. Linear Weingarten surfaces in Euclidean and hyperbolic space. *Mat. Contemp.*, 35:95–113.

- López, R. 2008b. Rotational linear Weingarten surfaces of hyperbolic type. *Isr. J. Math.*, 167:283–301.
- Müller, C. and Wallner, J. 2013. Semi-discrete isothermic surfaces. *Results in Mathematics*, 63(3-4):1395–1407.
- Musso, E. and Nicolodi, L. 2006. Deformation and applicability of surfaces in Lie sphere geometry. *Tohoku Math. J. (2)*, 58(2):161–187.
- Pember, M. J. W. 2015. *Special surface classes*. PhD thesis, The University of Bath, University of Bath Department of Mathematical Sciences.
- Rossmann, W. 2014. Isothermic surfaces in mobius and lie sphere geometries. Lecture Notes.
- Tunçer, Y., Yoon, D. W., and Karacan, M. K. 2011. Weingarten and linear Weingarten type tubular surfaces in \mathbb{E}^3 . *Math. Probl. Eng.*, 2011:11.



EK 1

Metrik Uzay $S^3 \subset \mathbb{R}^4$	Projektif Uzay $S^3 \subset \mathbb{R}P^4$	Minkowski Uzayı $L^3 \subset \mathbb{R}^{4,1}$
nokta: $x \in S^3$	nokta: $x \in S^3 \subset \mathbb{R}P^4$	lightlike vektör: $x \in \mathbb{R}^{4,1}, \langle x, x \rangle = 0$
küre: $s \subset S^3$	"dış uzay"da nokta: $s \in \mathbb{R}P^4_0$	spacelike vektör: $s \in \mathbb{R}^{4,1}, \langle s, s \rangle > 0$
incidence (etki): $x \in S$	polarite: $s \in x^\perp \cong T_x S^3$	orthogonallik: $\langle x, s \rangle = 0$
orthogonal arakesit: $s_1 \cap_\perp s_2$	polarity: $s_i \in s_j^\perp$	orthogonallik: $\langle s_1, s_2 \rangle = 0$



ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı : Feray BAYAR
Doğum Yeri : Bartın
Doğum Tarihi : 30/11/1985
Yabancı Dili : İngilizce, Almanca

Eğitim Durumu

Lise : Bartın Davut Fıncıoğlu Anadolu Lisesi (2003)
Lisans : Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü (2008)
Tezsiz Yüksek Lisans : Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü (2009)
Tezli Yüksek Lisans : Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı (Eylül 2009-Ocak 2012)

Çalıştığı Kurumlar ve Yıl

Araştırma Görevlisi, Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı (2014-2015)
Araştırma Görevlisi, Technische Universität Wien, Institute of Discrete Mathematics and Geometry (2015-2017)
Araştırma Görevlisi, Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı (2017-2018)

Yayınlar

F. Bayar, "Isothermic surfaces and linear Weingarten surfaces in Lie sphere geometry", Technische Universität Wien, Geometry Seminars of the Institute of Discrete Mathematics and Geometry, 2016.
F. Bayar, "Channel linear Weingarten surfaces in Lie sphere geometry", Technische Universität Wien, Geometry Seminars of the Institute of Discrete Mathematics and Geometry, 2017.