

T.C.
VAN YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

**SİNGÜLER PERTÜRBE ÖZELLİKLİ LİNEER OLMAYAN REAKSİYON-
DİFÜZYON PROBLEMLERİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN: Baransel GÜNEŞ
DANIŞMAN :Doç. Dr. Hakkı DURU

VAN-2018

T.C.
VAN YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

**SİNGÜLER PERTÜRBE ÖZELLİKLİ LİNEER OLMAYAN REAKSİYON-
DİFÜZYON PROBLEMLERİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN: Baransel GÜNEŞ

VAN-2018

KABUL VE ONAY SAYFASI

Matematik Anabilim Dalı'nda Doç. Dr. Hakkı DURU danışmanlığında, Baransel GÜNEŞ tarafından sunulan "SİNGÜLER PERTÜRBE ÖZELLİKLİ LİNEER OLMAYAN REAKSİYON-DİFÜZYON PROBLEMLERİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ" isimli bu çalışma Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği'nin ilgili hükümleri gereğince 22/06/2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile başarılı bulunmuş ve **Yüksek Lisans** tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Doç. Dr. Murat SARI

İmza:



Üye: Prof. Dr. Fevzi ERDOĞAN

İmza:



Üye: Doç. Dr. Hakkı DURU

İmza:



Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 20/07/2018 tarih ve 2018/33-I sayılı kararı ile onaylanmıştır.



İmza
Prof. Dr. Suat ŞENSOY
Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

İmza
Baransel GÜNEŞ

ÖZET

SİNGÜLER PERTÜRBE ÖZELLİKLİ LINEER OLMAYAN REAKSİYON-DİFÜZYON PROBLEMLERİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

GÜNEŞ, Baransel
Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Doç. Dr. Hakkı Duru
Haziran 2018, 53 sayfa

Singüler pertürbe özellikli lineer olmayan reaksiyon-difüzyon problemleri için kalan terimi integral biçiminde olan ve baz fonksiyonu içeren interpolasyon kuadratür kuralları uygulanarak fark şemaları kurulmuştur.

Düzgün şebekede üstel katsayılı, adaptif ve parçalı düzgün şebekede klasik fark şemaları sunulmuştur. Yaklaşık çözümler fark şemalarıyla paralel olarak Newton-Raphson iterasyonu kullanmak suretiyle elde edilmektedir. Nümerik örneklerle teorik sonuçlar test edilmiş ve yazılan bilgisayar kodları ile bilgisayar desteği sağlanmıştır.

Anahtar kelimeler: Bakhvalov şebeke, Düzgün şebeke, Lineer olmayan reaksiyon-difüzyon problem, Shishkin şebeke, Singüler pertürbe özelliği, Sonlu fark şeması, Üstel katsayılı fark şeması.


ABSTRACT

NUMERICAL SOLUTIONS FOR NONLINEAR SINGULARLY PERTURBED REACTION-DIFFUSION PROBLEMS

GÜNEŞ, Baransel
MSc Thesis, Mathematics
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Hakkı Duru
June 2018, 53 pages

The difference schemes have been established for the singularly perturbed nonlinear reaction-diffusion problems by applying the interpolation quadratic rules with the remainder term of integral form and containing the base function.

Exponential fitted schemes are presented in equidistance mesh, classical difference schemes are presented in adaptive and piecewise equidistance mesh. Approximate solutions are obtained by using the Newton-Raphson iteration in parallel with the difference schemes. Theoretical results are tested with numerical examples and computer codes and computer support are provided.



Keywords: Bakhvalov mesh, Uniform mesh, Nonlinear reaction-diffusion problem, Shishkin mesh, Singularly perturbed, Finite difference scheme, Exponential fitted scheme.



ÖN SÖZ

Bu çalışmada singüler pertürbe özellikli lineer olmayan reaksiyon difüzyon problemleri için nümerik çözümler incelenmiştir. Bu problem için düzgün ve düzgün olmayan şebekelerde adaptif fark şemaları kurulmuş ve bunun özellikleri verilmiştir. Yaklaşık çözümün kesin çözüme ε 'a göre düzgün yakınsak olduğu ispatlanmış ve yakınsama hızı belirlenmiştir. Ayrıca alınan teorik sonuçlar somut örnekler üzerinde gösterilmiştir.

Bu çalışmalarım esnasında göstermiş olduğu yakın ilgi ve yardımlarından dolayı danışmanım Doç. Dr. Hakkı DURU, gerekli zamanlarda desteğini esirgemeyen Akbar BARATI CHINAYEH, bana uygun çalışma ortamı sağlayan ve bu çalışmada emeği geçen herkese teşekkür ederim.

2018

Baransel GÜNEŞ



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	iii
ÖN SÖZ.....	v
İÇİNDEKİLER.....	vii
ÇİZELGELER LİSTESİ.....	ix
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	xi
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	xiii
EKLER DİZİNİ LİSTESİ.....	xv
1. GİRİŞ VE LİTERATÜR BİLDİRİŞİ.....	1
2. ÖN BİLGİLER.....	7
2.1. İnterpolasyon Kuadratür Formülleri.....	7
3. ASİMPOTİK DEĞERLENDİRMELER.....	13
4. FARK ŞEMASININ KURULMASI VE HATA DEĞERLENDİRMELERİ.....	17
4.1. Üstel Katsayılı Fark Şemasının Kurulması.....	17
4.1.1. Üstel katsayılı fark şemasında hata değerlendirmeleri.....	20
4.2. Düzgün Olmayan Şebekede Fark Şemaları.....	25
4.3. Bakhvalov Şebekede Fark Şemasının Kurulması.....	25
4.3.1. Bakhvalov şebekede hata değerlendirmeleri.....	28
4.4. Parçalı Düzgün (Shishkin) Şebekede Fark Şemasının Kurulması.....	30
4.4.1. Parçalı düzgün (Shishkin) şebekede hata değerlendirmeleri.....	31

4.5. Nümerik Örnekler.....	31
5. TARTIŞMA VE SONUÇ.....	39
KAYNAKLAR.....	41
EKLER.....	43
ÖZ GEÇMİŞ.....	53



ÇİZELGELER LİSTESİ

Çizelge	Sayfa
Çizelge 4.1. $\varepsilon = 2^{-w}$ ($w = 3,4, \dots, 9$), e^N için düzgün şebeke noktalarında elde edilen değerler.....	33
Çizelge 4.2. $\varepsilon = 2^{-w}$ ($w = 3,4, \dots, 9$), e^N için düzgün şebeke noktalarında elde edilen değerler (Devamı).....	34
Çizelge 4.3. $\varepsilon = 10^{-w}$ ($w = 3,4,6,8,10,12,14$), değeri için Bakhvalov şebeke noktalarında elde edilen yakınsama oranı.....	36
Çizelge 4.4. $\varepsilon = 10^{-w}$ ($w = 3,4,6,8,10,12,14$), değeri için Shishkin şebeke noktalarında elde edilen yakınsama oranı.....	38



ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 4.1. $\varepsilon = 2^{-8}$ ve $N = 128$ için düzgün şebekede çözümün grafiği	35
Şekil 4.2. $\varepsilon = 10^{-3}$ ve $N = 64$ için Bakhvalov şebekede çözümün grafiği	37
Şekil 4.3. $\varepsilon = 10^{-4}$ ve $N = 64$ için Shishkin şebekede çözümün grafiği	37



SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler

Açıklama

C	Şebeke adımı ve ε 'dan bağımsız genel sabit
e_ε^N	Şebekedeki tam hata
e^N	Şebekedeki maksimum hata
ε	Pertürbasyon parametresi
L	Diferansiyel operatörü
ℓ	Sonlu fark operatörü
$O(h^k)$	Yakınsama hızı
h	Düzgün şebekede şebeke adımı
$\tilde{h}_i = (h_i + h_{i+1})/2$	Düzgün olmayan şebekede şebeke adımı
p	Yakınsaklık mertebesi
u	Diferansiyel denklemin kesin çözümü
y	Diferansiyel denklemin yaklaşık çözümü
ω_h	Şebeke
$v_i \equiv v(x_i)$	x_i düğüm noktalarındaki şebeke fonksiyonu
$\ v\ _{C(\omega_h)} = \max_{0 \leq i \leq l} v_i $	Düzgün şebekede maksimum normu

$\|v\|_{C(\bar{\omega}_{h_i})} = \max_{0 \leq i \leq l} |v_i|$ Düzgün olmayan şebekede maksimum normu





EKLER DİZİNİ

Ek

Sayfa

Ek 1. Düzgün Şebekede Üstel Katsayılı Fark Şeması için MATLAB Programı....43

Ek 2. Bakhvalov Şebekede Fark Şeması için MATLAB Programı.....45

Ek 3. Shishkin Şebekede Fark Şeması için MATLAB Programı48





1. GİRİŞ VE LİTERATÜR BİLDİRİŞİ

Bu çalışmada

$$\begin{aligned} -\varepsilon^2 u'' + a(x)u(x) &= f(x, u) \\ u(0) &= A, \quad u(1) = B \end{aligned}$$

lineer olmayan reaksiyon-difüzyon sınır değer problemi incelenmektedir. Bu tür problemler bilimin birçok alanında araştırma konusunun matematiksel modeli olarak karşımıza çıkmaktadır.

Reaksiyon-difüzyon denklemleri, biyoloji, fizik ve kimyada tipik matematiksel modellerdir. Kimyasal reaksiyon modellemeleri, biyolojik sistemler, popülasyon dinamikleri ve nükleer reaktör fiziğinde yaygın olarak kullanılmaktadır. Bu denklemler genellikle sıcaklık, katalizör, difüzyon oranı vb. çeşitli parametrelere bağlıdır. Dahası, normal olarak, farklı maddeler arasında reaksiyon ile birleştirilmiş, doğrusal olmayan bir disipativ sistemi oluştururlar (Mei, 2000).

Bu tür denklemler popülasyon dağılımlarının modellenmesinde de ortaya çıkmaktadır. Bu konuda J.G. Skellam (1991)'a ait "Rastgele teorik popülasyonlarda dağılıma " isimli makale dönüm noktası olmuştur. J.G. Skellam'ın yaptığı bir dizi gözlem, uzay ekolojisi çalışmalarını derinden etkilemiştir. İlk olarak, biyolojik türler arasındaki her bir üye ölçeğinde hareketin bir tanımı olarak 'rastgele yürüyüş' ve türlerin popülasyon yoğunluğu ölçeğinde organizmanın dağılımının bir tanımı olarak difüzyon denklemi arasındaki bağlantıyı kurmuştur. Orta Avrupa'da misk sıçanlarının popülasyonlarındaki artış için alan verilerini kullanarak küçük hayvanlar söz konusu olduğunda bağlantının kabul edilebilir olduğunu göstermiştir. İkincisi, Fisher'in genetiğe katkısına paralel olarak dağılımın yaygın bir tanımını popülasyon dinamikleriyle birleştirerek reaksiyon-difüzyon denklemlerini teorik ekolojiye etkili bir biçimde sunmuştur. Üçüncüsü, Skellam özellikle, lineer (Malthusian) ve lojistik popülasyon büyüme oranı terimlerinin her ikisini, bir ve iki boyutlu yaşam alanı geometrilerini, yaşam alanı ve onu çevreleyen çevre düzenlemeleri arasındaki arayüze ilişkin çeşitli varsayımları kullanarak sınırlı bir yaşam alanındaki bir türün popülasyon dağılımı için reaksiyon-difüzyon modellerini incelemiştir (Cantrell ve ark., 2003).

Gelişim biyolojisinde ve deneysel kimyasal sistemlerde model oluşumunu açıklamak için reaksiyon-difüzyon mekanizmaları kullanılmıştır (Ruuth, 1995).

Kimyasal sistem modellerinde salınımlı çözümler elde etmenin yollarından biri reaksiyon-difüzyon denklemleridir (Auchmutyi ve ark., 1976).

Biyolojik anlamda ise reaksiyona girerek bir doku içerisine difüze olan kimyasal maddeler olarak adlandırılan morfojenler, morfogenezin ana olgusunu oluşturmaktadır. Bu bağlamda Alan Turing tarafından ortaya atılan morfogeneze bağlı olarak ortaya çıkan durumların kararlılık ve istikrarlılığında reaksiyon-difüzyon problemlerinden yararlandığı görülmektedir (Turing, 1952).

Reaksiyon ve difüzyon terimleri dinamik davranışlara bağlı olarak senkronizasyon yöntemlerinde kullanılmaktadır (Wang ve ark., 2007).

Son zamanlarda, reaksiyon difüzyon sistemleri, model oluşumu için bir prototip olarak çok ilgi görmüştür. Bahsedilen modeller (cepheler, spiraller, hedefler, altıgenler, şeritler ve dağılma solitonları) çeşitli reaksiyon-difüzyon sistem türlerinde kullanılmaktadır. Reaksiyon difüzyon süreçlerinin, biyolojide morfogeneze bağlı süreçler için bir temel olduğu (Harrison, 1993) ve hatta hayvan doku katları ve cilt pigmentasyonu ile ilgili olabileceği tartışılmıştır (Meinhardt, 1982) (Murray, 2013). Reaksiyon difüzyon denklemlerinin diğer uygulamaları arasında ekolojik istilalar (Holmes, 1994), salgın yayılımı (Murray, 1986), tümör büyümesi (Chaplain, 1995) (Sherratt ve ark., 1992) (Gatenby ve ark., 1996) ve yara iyileşmesi bulunmaktadır (Sherratt ve ark., 1990). Reaksiyon difüzyon sistemlerine olan ilginin bir diğer nedeni, doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemler olmasına rağmen analitik bir çözüm imkanı olmasıdır (Fife, 1979) (Mikhailov, 1990) (Grindrod, 1991) (Smoller, 1994) (Kerner ve ark., 1994).

Reaksiyon-difüzyon denklemlerinin belirli bir sınıfı düşünüldüğünde; Avrupa'daki kuduz virüsü yayılımı, bir popülasyondaki avantajlı bir genin ilerleme dalgası, Kuzey Amerika'daki ormanlarda bulunan ladin ağaçlarının dağılımı, bifürkasyon teorisi kullanılarak av-avcı sisteminin uygulanması, osilasyon sistemleri için asimptotik modeller, makromoleküler taşıyıcılar, oksijen difüzyonundaki kas içine miyogloblin geçişi ve karbon monoksit zehirlenmesi içeren modeller örnek olarak verilebilir (Britton, 1986).

Bu çalışmayla ilgili daha önce Ainsworth,

$$-\Delta u + \kappa^2 u = f$$

reaksiyon-difüzyon denklemini homojen Dirichlet koşulları ile birlikte ele alarak singüler pertürbe özellikli reaksiyon-difüzyon problemler için kararlılık ve hata değerlendirmesini araştırmıştır (Ainsworth ve ark., 1999).

Bakhvalov,

$$\varepsilon^2 u'' - A(x)u = f(x)$$

problemi için sonlu fark metotlarını kullanarak sınır katları üzerinde çalışma yapmıştır (Bakhvalov, 1969).

Boglaev,

$$\varepsilon^2 y''(t) = f(t, y), \quad t \in (0,1)$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0$$

ve

$$Ly(t) = \varepsilon^2 y''(t) - \beta y(t) = \varphi(t, y), \quad t \in (0,1)$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0$$

sınır değer problemlerini ele alarak Green fonksiyonları yardımıyla fark şeması kurmuş ve fark şemasının yakınsaklığını incelemiştir (Boglaev, 1984).

Boglaev,

$$-\varepsilon^2 (u_{xx} + u_{yy}) + f(x, y, u) = 0, \quad (x, y) \in \omega$$

$$\omega = \omega^x \times \omega^y = \{0 < x < 1\} \times \{0 < y < 1\}$$

problemini ele alarak singüler pertürbe olmuş reaksiyon-difüzyon problemlerin eliptik ve parabolik tipleri için monoton sonlu fark iterasyon algoritmaları üzerinde çalışmıştır (Boglaev ve ark., 2004).

Kellog,

$$Fu = -\varepsilon^2 \Delta u + b(x, u) = 0, \quad x = (x_1, x_2) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$$

$$u(x) = g(x), \quad x \in \partial\Omega$$

yarı lineer reaksiyon-difüzyon problemini Dirichlet koşulları ile birlikte çokgen bir bölgede ele almıştır (Kellog ve ark., 2010).

Kopteva,

$$F_\varepsilon u(x) = -\varepsilon^2 u''(x) + b(x, u) = 0$$

$$u(0) = g_0, \quad u(1) = g_1$$

lineer olmayan reaksiyon-difüzyon problemi için dinamik sistem tekniklerini kullanarak ayrık alt ve üst çözümlerin asimptotik özelliklerini türetmiş, bu özelliklerden

faydalanarak adaptiv ve parçalı düzgün şebekede nümerik çözümleri araştırmıştır (Kopteva ve ark., 2004).

Linß,

$$\begin{aligned} Lu &:= -Eu'' + Au = f \\ u(0) &= \gamma_0, \quad u(1) = \gamma_1 \end{aligned}$$

problemi için Green fonksiyonlarını kullanarak singüler pertürbe özellikli reaksiyon-difüzyon problemlerin kat uyumlu şebekeler üzerinde fark şemalarının pertürbasyon parametresinden bağımsız olduğunu göstermiştir (Linß ve ark., 2009).

Schatz,

$$\begin{aligned} -\varepsilon^2 \Delta u + b(x, u, \varepsilon) &= f(x; \varepsilon), \quad 0 < \varepsilon < 1 \\ u &= u(x) = u(x_1, x_2; \varepsilon) \end{aligned}$$

problemini ele alarak bir ve iki boyutlu singüler pertürbe özellikli reaksiyon-difüzyon problemleri için Galerkin sonlu elemanlar yöntemini araştırmıştır (Schatz ve ark., 1983).

Shishkin,

$$\begin{aligned} Ly = \varepsilon(a(x)y')' - c(x)y &= -\psi(x), \quad x \in d \\ y &= \varphi(x), \quad x \in \gamma \end{aligned}$$

küçük parametrenin yüksek mertebeden olduğu diferansiyel denklemi için düzgün olmayan şebekede fark şeması kurmuştur (Shishkin, 1983).

Verfürth,

$$-\Delta u + \kappa^2 u = f$$

singüler pertürbe özellikli reaksiyon-difüzyon denklemini ele alarak global alt ve üst sınırlar üzerinde bu tipteki denklemler için hata değerlendirmesi üzerinde çalışmıştır (Verfürth, 1998).

Vulcanovic,

$$\begin{aligned} L_\varepsilon u(x) &:= -\varepsilon^2 y''(x) + b^2(x)y(x) = f(x), \quad x \in I = [0,1] \\ u(0) &= u_0, \quad u(1) = u_1 \end{aligned}$$

sınır değer problemi için düzgün olmayan şebekede üstel katsayılı şema kurmuştur (Vulanovic, 1982).

Vulcanovic,

$$\begin{aligned} T_u &:= -\varepsilon^2 u''(x) + b(x, u) = 0, x \in [0,1] \\ B_u &:= (u(0), u(1)) = (u_0, u_1) \end{aligned}$$

şingüler pertürbe özellikli reaksiyon-difüzyon probleminin lineer hali için sonlu fark şeması kurmuş ve bu problemin ε pertürbasyon parametresine göre düzgün yakınsak olduğunu göstermiştir (Vulanovic, 1983).

Vulanovic,

$$-\varepsilon^2 u''(x) + b(x; \varepsilon) = f(x), \quad x \in [0,1]$$

yarı lineer reaksiyon-difüzyon problemini sınır dönüm noktasında ele alarak bu problemin bir tek çözümü olduğunu ve iki sınır katına sahip olduğunu göstermiştir (Vulanovic, 2010).

Vulanovic,

$$\Delta y(x) := -\varepsilon^2 y''(x) + b^2(x)y(x) = f(x), \quad x \in (0,1)$$

$$y(0) = \alpha_0, \quad y(1) = \alpha_1$$

bir boyutlu reaksiyon-difüzyon problemi için modifiye edilmiş Shishkin şebekesi kullanmıştır (Vulanovic ve ark., 2013).

Singüler pertürbe özellikli problemler çözüm fonksiyonunun hızlı değiştii sınır katmanları içermektedir. Sınır katmanı içeren problemlerde türev sınırsız olduğundan klasik fark şemaları kararlı olmamaktadır. Ayrıca bu tür problemlerin kesin çözümü çoğu kez bulunamamaktadır. Bu sebeple sayısal algoritmalara ihtiyaç duyulmaktadır.

Bu çalışmada şingüler pertürbe özellikli lineer olmayan sınır katmanlı reaksiyon difüzyon problemleri için düzgün şebekede üstel katsayılı, adaptif ve parçalı düzgün şebekelerde fark şemaları sunulmaktadır. Bu şemaları kurarken kalan terimi integral şeklinde olan ve baz fonksiyonu içeren interpolasyon kuadratür kuralları uygulanmıştır. Kurulan fark problemlerinin çözümlerinin kesin çözüme yaklaşım oranı üstel katsayılı fark probleminde $O(h^2)$; diğer fark problemlerinde $O(N^{-1})$ olarak tespit edilmiştir.

2. ÖN BİLGİLER

2.1. İnterpolasyon Kuadratür Formülleri

Bu kesimde Peano çekirdeğini kullanarak aşağıdaki interpolasyon kuadratür kurallarını ve ispatlarını verelim. Burada verilen kurallar baz fonksiyonları kullanılarak kalan terimi integral biçiminde olan fark şemalarının kurulmasını kullanılmaktadır. Baz fonksiyonlarının uygun seçimiyle kalan terim sıfırlanabilir.

Önce aşağıdaki hatırlatmayı verelim.

Hatırlatma. $R(f) = \int_a^b f^{(n+1)}(\xi)K(\xi)d\xi$ şeklinde tanımlı integral operatörü üzerine dağılma özelliğine sahip ve $P_n(x)$ Taylor polinomunun sıfırlayıcısı olan lineer fonksiyoneldir.

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \int_a^x f^{(n+1)}(\xi) \frac{(x-\xi)^n}{n!} d\xi$$

açılımına R lineer fonksiyoneli uygulanırsa $R(f) = R\left[\int_a^x f^{(n+1)}(\xi) \frac{(x-\xi)^n}{n!} d\xi\right]$ elde edilir.

Buradan

$$R(f) = R(r_n(x, f))$$

ve

$$R(f) = R\left[\int_a^x f^{(n+1)}(\xi) \frac{(x-\xi)^n}{n!} d\xi\right] = \int_a^b f^{(n+1)}(\xi) R\left[\frac{(x-\xi)^n}{n!}\right] d\xi$$

olur. Böylece

$$R\left[\frac{(x-\xi)^n}{n!}\right] = K_n(x, \xi) = T_n(x-\xi) = \begin{cases} \frac{(x-\xi)^n}{n!}, & x-\xi > 0 \\ 0, & x-\xi \leq 0 \end{cases}$$

yazılır. Bu da R 'nin Peano çekirdeğidir. İki noktalı

$$f(x) - \frac{x-b}{a-b}f(a) - \frac{x-a}{b-a}f(b) = r_n(x, f)$$

Lagrange interpolasyon polinomu hatası için Peano çekirdeğini bulalım.

$$R(f) = R(r_n(x, f)) = R\left(\int_a^b f^{(n+1)}(\xi)T_n(x-\xi)d\xi\right)$$

$$\int_a^b f^{(n+1)}(\xi) [T_n(x - \xi) - (b - a)^{-1}(x - a)T_n(b - \xi)]d\xi = R_n(f)$$

olur (Philips, 2003).

Lemma 2.1. $p(x)$ ağırlık fonksiyonu ve f türevi integrallenebilen fonksiyon olsun.

$$\int_a^b f'(x)p(x)dx = f[a; b] \int_a^b p(x)dx + R_n^*(f)$$

doğrudur. Burada

$$R^*(f) = - \int_a^b dx p'(x) \int_a^b f^{(n+1)}(\xi) K_n(x, \xi) d\xi$$

$$K_n(x, \xi) = T_n(x - \xi) - (b - a)^{-1}(x - a)(b - \xi)^n, n = 0, 1.$$

$$T_n(\lambda) = \begin{cases} \frac{\lambda^n}{n!}, & \lambda \geq 0 \\ 0, & \lambda < 0 \end{cases}$$

olur (Amiraliyev ve Duru, 2002).

İspat. $f(x)$ fonksiyonunun doğrusal Lagrange interpolasyon polinomunu yazalım:

$$f(x) = \frac{x-b}{a-b} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b) + r_n(x, f) \quad (2.1)$$

Her iki tarafın türevini alalım:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{f(a)}{a-b} + \frac{f(b)}{b-a} + \frac{\partial}{\partial x} r_n(x, f) \\ &= \frac{f(b) - f(a)}{b-a} + \frac{\partial}{\partial x} r_n(x, f) \end{aligned}$$

Bu ifadenin her iki tarafını $p(x)$ ağırlık fonksiyonuyla çarpıp a 'dan b 'ye integral alırsak

$$\int_a^b f'(x)p(x)dx = f[a; b] \int_a^b p(x)dx + \int_a^b p(x) \frac{\partial r_n(x, f)}{\partial x} dx$$

formülünü elde ederiz. Son terime kısmi integrasyon formülünü uygularsak

$$\int_a^b f'(x)p(x)dx = f[a; b] \int_a^b p(x)dx - \int_a^b p'(x)r_n(x, f)dx$$

eşitliğini buluruz.

(2.1) Lagrange interpolasyon polinomu için Peano çekirdeği teoremini kullanarak integral biçiminde olan $r_n(x, f)$ kalan terimi aşağıdaki biçimde yazılır:

$$\begin{aligned} r_n(x, f) &= \int_a^b f^{(n+1)}(\xi) T(x - \xi) d\xi - (a - b)^{-1}(x - b) \int_a^b f^{(n+1)}(\xi) T_n(a - \xi) d\xi \\ &\quad - (b - a)^{-1}(x - a) \int_a^b f^{(n+1)}(\xi) T_n(b - \xi) d\xi \end{aligned}$$

Burada $a - \xi \leq 0$ olduğundan $T_n(a - \xi) = 0$ olur. Böylece

$$r_n(x, f) = \int_a^b f^{(n+1)}(\xi) [T_n(x - \xi) - (b - a)^{-1}(x - a)T_n(b - \xi)] d\xi$$

olur. Bu,

$$K_n(x, \xi) = T_n(x - \xi) - (b - a)^{-1}(x - a)T_n(b - \xi)$$

biçiminde yazılır. Bu ifade yukarıda yazılan Lagrange interpolasyon polinomu için Peano çekirdeğidir. Sonuç olarak

$$\int_a^b f'(x)p(x)dx = f[a; b] \int_a^b p(x)dx - \int_a^b dxp'(x) \int_a^b f^{(n+1)}(\xi) K_n(x, \xi) d\xi$$

olur ve lemma ispatlanır.

Lemma 2.2. $p(x)$ ağırlık fonksiyonu olmak üzere

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)p(x)dx &= \{\sigma f(b) + (1 - \sigma)f(a)\} \int_a^b p(x)dx + f[a; b] \int_a^b (x - x^{(\sigma)})p(x)dx \\ &+ \int_a^b dxp(x) \int_a^b f^{(n+1)}(\xi) K_n(x, \xi) d\xi, n = 0, 1. \end{aligned}$$

formülü doğrudur. Burada, $x^{(\sigma)} = \sigma b + (1 - \sigma)a$ ve

$$K_n(x, \xi) = T_n(x - \xi) - (b - a)^{-1}(x - a)T_n(b - \xi)$$

ile gösterilir (Amiraliyev ve Duru, 2002).

İspat. f fonksiyonu için iki noktadaki

$$f(x) = f(a) + (x - a)f[a; b] + r_n(x, f)$$

ve

$$f(x) = f(b) + (x - b)f[a; b] + r_n(x, f)$$

Newton interpolasyon polinomunlarını göz önüne alalım.

1.denklemini $(1 - \sigma)p(x)$, 2.denklemini $\sigma p(x)$ ile çarpıp a 'dan b 'ye integral alarak toplayalım. Bu durumda

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)p(x)dx &= \{\sigma f(b) + (1 - \sigma)f(a)\} \int_a^b p(x)dx + f[a; b] \int_a^b (x - x^{(\sigma)})p(x)dx \\ &+ \int_a^b dxp(x)r_n(x, f) \end{aligned} \quad (2.2)$$

elde edilir. Burada

$(1 - \sigma)(x - a) + \sigma(x - b) = x - a(1 - \sigma) - b\sigma = x - [b\sigma + (1 - \sigma)a] = x - x^{(\sigma)}$ yazılır. İki noktalı Lagrange interpolasyon polinomuyla Newton interpolasyon polinomunun kalan terimi aynı olduğundan

$$r_n(x, f) = f(x) - \frac{x-b}{a-b}f(a) - \frac{x-a}{b-a}f(b)$$

şeklinde yazabiliriz. Lemma 2.1.'dekine benzer işlemler yaparak

$$r_n(x, f) = \int_a^b f^{(n+1)}(\xi) [T_n(x-\xi) - (b-a)^{-1}(x-a)T_n(b-\xi)]d\xi$$

bulunur. Burada

$$K_n(x, \xi) = T_n(x-\xi) - (b-a)^{-1}(x-a)T_n(b-\xi)$$

alır ve (2.2) ifadesinde yerine yazarsak lemmanın ispatı tamamlanır.

Lemma 2.3. $p(x)$ ağırlık fonksiyonu olmak üzere

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)p(x)dx &= f\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_a^b p(x)dx + R_n(f) \\ R_n(f) &= nf[a; b] \int_a^b (x-x^{(\sigma)})p(x)dx \\ &\quad + \int_a^b dxp(x) \int_a^b f^{(n+1)}(\xi) [T_n(x-\xi) - T_n(x^{(\sigma)}-\xi) \\ &\quad - n(b-a)^{-1}(b-\xi)^n(x-x^{(\sigma)})]d\xi, n=0,1. \end{aligned}$$

olduğunu gösterelim (Amiraliyev ve Duru, 2002).

İspat. $f(x)$ 'i $x^{(\sigma)} = \frac{a+b}{2}$ 'de kalan terimi integral biçiminde olan Taylor serisine açalım:

$$f(x) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)(x-x^{(\sigma)}) + r_n(x, f).$$

Bu ifadeyi $p(x)$ ile çarparak a 'dan b 'ye integral alırsak,

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)p(x)dx &= f\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_a^b p(x)dx + nf[a; b] \int_a^b (x-x^{(\sigma)})p(x)dx \\ &\quad + \int_a^b p(x)r_n(x, f)dx \end{aligned} \quad (2.3)$$

elde ederiz. Burada $\frac{1}{n!}f'(\xi) = f[a; b]$ eşitliğinden faydalanarak $f'\left(\frac{a+b}{2}\right) = nf[a; b]$ olur. (2.3) açılımını kullanarak $r_n(x, f)$ 'yi bulalım.

$$\begin{aligned} r_n(x, f) &= \int_a^b f^{(n+1)}(\xi)T(x-\xi)d\xi - \int_a^b f^{(n+1)}(\xi)T(x^{(\sigma)}-\xi)d\xi \\ &\quad + \int_a^b f^{(n+1)}(\xi)(b-a)^{-1}(x-x^{(\sigma)})T_n(b-\xi)d\xi \end{aligned}$$

$$r_n(x, f) = \int_a^b f^{(n+1)}(\xi) [T(x-\xi) - T(x^{(\sigma)}-\xi) + (b-a)^{-1}(x-x^{(\sigma)})T_n(b-\xi)]d\xi$$

elde edilir. (2.3)'de yerine konursa ispat tamamlanmış olur.

Lemma 2.4. (μ – eşitsizliği)

$$|ab| \leq \mu a^2 + \frac{1}{4\mu} b^2$$

eşitsizliği doğrudur (Amiraliyev ve Duru, 2002).

İspat.

$$0 \leq \left(\sqrt{\mu}a + \frac{1}{2\sqrt{\mu}}b \right)^2 = \mu a^2 + ab + \frac{1}{4\mu} b^2$$

$$-ab \leq \mu a^2 + \frac{1}{4\mu} b^2$$

$$0 \leq \left(\sqrt{\mu}a - \frac{1}{2\sqrt{\mu}}b \right)^2 = \mu a^2 - ab + \frac{1}{4\mu} b^2$$

$$ab \leq \mu a^2 + \frac{1}{4\mu} b^2$$

ifadeleri göz önüne alındığında

$$|ab| \leq \mu a^2 + \frac{1}{4\mu} b^2$$

doğru olduğu görülür.



3. ASİMPTOTİK DEĞERLENDİRMELER

$$-\varepsilon^2 u'' + a(x)u(x) = f(x, u), \quad 0 < x < l \quad (3.1)$$

$$u(0) = A, \quad u(l) = B \quad (3.2)$$

lineer olmayan problemi için Taylor açılımından

$$f(x, u) = f(x, 0) + \frac{\partial f(x, \tilde{u})}{\partial u} u$$

yazalım. Burada $\tilde{u} = \gamma u$, $0 < \gamma < 1$ alınmaktadır. Ayrıca $F(x) = f(x, 0)$ ve $b(x) = \frac{\partial f(x, \tilde{u})}{\partial u}$ diyelim. Bu takdirde

$$-\varepsilon^2 u'' + [a(x) - b(x)]u = F(x)$$

olur.

$$A(x) = a(x) - b(x)$$

dersek

$$-\varepsilon^2 u'' + A(x)u = F(x)$$

yazabiliriz. Burada

$$A(x) = a(x) - \frac{\partial f(x, \tilde{u})}{\partial u} \geq \alpha > 0$$

$$F(x) = f(x, 0) \geq 0$$

şartı sağlansın.

Asimptotik değerlendirmeler için aşağıdaki lemmaları verelim.

Lemma 3.1. Herhangi bir $v(x)$ fonksiyonu

$$Lv = F(x) \geq 0$$

$A \geq 0, B \geq 0$ şartlarını sağlayan fonksiyon olsun. Bu durumda $v(x) \geq 0$ olur

(Amiraliyev ve Duru, 2002).

İspat. Lemmanın ispatı için $v(x_0) = 0, v(x_1) = 0$ ve $x \in (x_0, x_1) \subset (0, l)$ için $v(x_0) \leq 0$ olduğunu kabul edelim. Burada

$$v''(\xi) = \frac{v(x_0) - 2v\left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right) + v(x_1)}{\left(\frac{x_1 - x_0}{2}\right)^2} \geq 0$$

olur. Bu da $x \in (x_0, x_1)$ için $Lv < 0$ ve $v(x) < 0$ olması demektir. Bu da hipotezle çelişir. Öyleyse Lemma doğrudur.

Lemma 3.2. Herhangi $v(x) \in C[0, l] \cap C^2(0, l)$ fonksiyonu için

$$|v(x)| \leq |v(0)| + |v(l)| + \alpha^{-1} \max_{0 \leq s \leq l} |Lv(s)|, \quad 0 \leq x \leq l \quad (3.3)$$

değerlendirmesi doğrudur (Amiraliyev ve Duru, 2002).

İspat. Lemmanın ispatı için

$$\psi(x) = \pm v(x) + |v(0)| + |v(l)| + \alpha^{-1} \max_{0 \leq s \leq l} |Lv(s)|, \quad 0 \leq x \leq l$$

bariyer fonksiyonunu göz önüne alalım. Sınır şartları için

$$\psi(0) = \pm v(0) + |v(0)| + |v(l)| + \alpha^{-1} \max_{0 \leq s \leq l} |Lv(s)|, \quad 0 \leq x \leq l$$

ifadelerinden $\psi(0) \geq 0$ ve

$$\psi(l) = \pm v(l) + |v(0)| + |v(l)| + \alpha^{-1} \max_{0 \leq s \leq l} |Lv(s)|, \quad 0 \leq x \leq l$$

ifadesinden $\psi(l) \geq 0$ olduğu görülür. Böylece $L\psi(x) \geq 0$ olur. Buradan $\psi(x) \geq 0$ olur. (3.1) gereği (3.2)'nin doğruluğu ispatlanmış olur.

Lemma 3.3.

$$\begin{aligned} -\varepsilon^2 u'' + A(x)u(x) &= F(x), \quad 0 < x < l \\ u(0) &= A, \quad u(1) = B \end{aligned}$$

probleminin çözümü için aşağıdaki değerlendirmeler doğrudur:

$$|u(x)| \leq C, \quad 0 < x < l; \quad A(x), F(x) \in C[0, l] \text{ ise}; \quad (3.4)$$

$$|u'(x)| \leq C \left\{ 1 + \frac{1}{\varepsilon} \left(e^{\frac{-\sqrt{a}x}{\varepsilon}} + e^{\frac{-\sqrt{a}(l-x)}{\varepsilon}} \right) \right\}, \quad 0 < x < l, \quad A(x), F(x) \in C[0, l] \quad (3.5)$$

İspat. Önce $|u(x)| \leq C$ olduğunu gösterelim. (3.2)'den

$$|v(x)| \leq |A| + |B| + \alpha^{-1} \max_{0 \leq s \leq l} |F(s)|$$

olur. Böylece $|u(x)| \leq C$ sağlanır. Şimdi (3.5)'in doğruluğunu gösterelim. (3.1)

denkleminde (3.4)'ü dikkate alırsak;

$$|u''(x)| = -\frac{1}{\varepsilon^2} |F(x) - A(x)u(x)| \leq \frac{C}{\varepsilon^2}, \quad 0 < x < l \quad (3.6)$$

yazılabilir. Daha sonra $|u'(0)|$ ve $|u'(l)|$ için değerlendirmeler almamız gerekir. Bunun için aşağıdaki diferansiyelleme formülünden yararlanılır:

$$g'(x) = g(\alpha_0; \alpha_1) - \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} K_0(\xi, x) g''(\xi) d\xi, \quad g \in C^2, \alpha_0 \leq x \leq l.$$

Bu formülde $g(x) = u(x)$, $x = 0$, $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = \varepsilon$ yazarsak

$$u'(x) = u(0; \varepsilon) - \int_0^{\varepsilon} K_0(\xi, x) u''(\xi) d\xi$$

$$u'(x) = \frac{u(\varepsilon) - u(0)}{\varepsilon} - \int_0^x u''(\xi) d\xi$$

$$u'(x) = \frac{u(\varepsilon) - u(0)}{\varepsilon} - u'(x) + u'(0)$$

Buradan

$$u'(0) = \frac{u(\varepsilon) - u(0)}{\varepsilon} - u'(0) + u'(0)$$

$$|u'(0)| = \left| \frac{u(\varepsilon) - u(0)}{\varepsilon} \right| \leq \frac{C}{\varepsilon} \quad (3.7)$$

olur. Aynı biçimde $g(x) = u(x)$, $x = l$, $\alpha_0 = l - \varepsilon$, $\alpha_1 = l$ alırsak;

$$u'(x) = u(l - \varepsilon; \varepsilon) - \int_{l-\varepsilon}^x K_0(\xi, x) u''(\xi) d\xi$$

$$u'(x) = \frac{u(l) - u(l - \varepsilon)}{l - l + \varepsilon} - \int_x^l u''(\xi) d\xi$$

$$u'(x) = \frac{u(\varepsilon) - u(l - \varepsilon)}{\varepsilon} - u'(l) + u'(x)$$

Böylece

$$u'(0) = \frac{B - u(l - \varepsilon)}{\varepsilon} - u'(l) + u'(l)$$

$$|u'(0)| = \left| \frac{B - u(l - \varepsilon)}{\varepsilon} \right| \leq \frac{C}{\varepsilon} \quad (3.8)$$

olur. Daha sonra (3.1) denkleminin türevi alınırsa,

$$-\varepsilon^2 u'' + A(x)u(x) = F(x)$$

$$-\varepsilon^2 u''' + A'(x)u(x) + A(x)u'(x) = F'(x)$$

olur.

$$w(x) = u'(x)$$

ve

$$\varphi(x) = F'(x) - [A'(x)u(x) + A(x)u'(x)]$$

dersek

$$Lw(x) = \Phi(x) \quad (3.9)$$

olur. Ayrıca (3.7) ve (3.8) ifadelerinden

$$w(0) = O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right), w(l) = O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \quad (3.10)$$

olur. (3.9)-(3.10) lineer probleminin çözümü $w(x) = w_0(x) + w_1(x)$ şeklinde arayabiliriz. Burada $w_0(x)$ ve $w_1(x)$ fonksiyonları

$$Lw_0 = \Phi(x), 0 < x < l$$

$$w_0(0) = w_0(l) = 0 \quad (3.11)$$

$$Lw_1 = 0, 0 < x < l$$

$$w_1(0) = O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right), w_1(l) = O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \quad (3.12)$$

problemlerinin çözümüdür. (3.11) probleminin çözümü (3.2)'ye göre

$$|w_0(x)| \leq \alpha^{-1} \max_{0 \leq s \leq l} |\Phi(s)|$$

olur. Dolayısıyla $\Phi(x)$ fonksiyonu ε 'a göre düzgün sınırlı olduğundan

$$|w_0(x)| \leq C, 0 < x < l \quad (3.13)$$

elde edilir. Şimdi ise (3.12) problemine maksimum prensibi uygularsak;

$$|w_0(x)| \leq \Lambda(x) \quad (3.14)$$

alabiliriz. Burada $\Lambda(x)$ fonksiyonu aşağıdaki problemlerin çözümüdür:

$$-\varepsilon^2 \Lambda'' + \alpha \Lambda = F(x), \quad 0 < x < l$$

$$\Lambda(0) = |w_1(0)|, \quad \Lambda(l) = |w_1(l)|. \quad (3.15)$$

Sabit katsayılı (3.15) probleminin çözümü açık olarak

$$\Lambda(x) = \frac{1}{\sinh\left(\frac{\sqrt{\alpha}l}{\varepsilon}\right)} \left\{ |w_1(0)| \sinh\left(\frac{\sqrt{\alpha}(l-x)}{\varepsilon}\right) + |w_1(l)| \sinh\left(\frac{\sqrt{\alpha}x}{\varepsilon}\right) \right\}$$

şeklinde bulunur. Buradan

$$\Lambda(x) \leq \frac{c}{\varepsilon} \left\{ e^{-\frac{\sqrt{\alpha}x}{\varepsilon}} + e^{-\frac{\sqrt{\alpha}(l-x)}{\varepsilon}} \right\} \quad (3.16)$$

olduğu kolayca görülür. Bu da lemmanın doğruluğunun ispatıdır.

4. FARK ŞEMASININ KURULMASI VE HATA DEĞERLENDİRMELERİ

4.1. Üstel Katsayılı Fark Şemasının Kurulması

Bu kesimde düzgün ve düzgün olmayan şebekelerde aşağıdaki lineer olmayan reaksiyon-difüzyon problemi için

$$Lu =: -\varepsilon^2 u'' + a(x)u(x) = f(x, u), \quad x \in (0, l) \quad (4.1)$$

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 0 \quad (4.2)$$

fark şemaları kurulmaktadır. Bunun için aşağıdaki gösterimleri belirtelim.

Burada

$$\omega_h = \{x_i = ih, \quad i = 1, \dots, N-1, \quad h = \frac{1}{N}\}, \quad \bar{\omega}_h = \omega_h \cup \{0, l\}$$

eşit adımlı ayrık noktalar kümesine düzgün şebeke denir. x_i noktalarına şebeke noktaları denir. Bu şebeke üzerinde tanımlı fonksiyonlara da şebeke fonksiyonu denir. $h = x_i - x_{i-1}$ 'e şebeke adımı denir. $u: \omega_h \rightarrow \mathbb{R}$ şebeke fonksiyonu için $u(x_i) = u_i$ olmak üzere

$$u_{x,i} = \frac{u_{i+1} - u_i}{h}$$

$$u_{\bar{x},i} = \frac{u_i - u_{i-1}}{h}$$

$$u_{\bar{x}x,i} = \frac{1}{h} (u_{x,i} - u_{\bar{x},i})$$

gösterimlerine sırayla ileri fark türevi, geri fark türevi ve ikinci mertebe fark türevi denmektedir (Samarskii, 2001).

(4.1) denklemi için ω_h düzgün şebekesi üzerinde fark şeması kuracağız. Bu üstel düzeltme katsayısı içeren fark şemasıdır. Bunun için kalan terimleri integral biçiminde olan ve ağırlık fonksiyonu içeren interpolasyon kuadratür kuralları kullanılarak fark şeması kurulmaktadır. Bunun için (4.1) diferansiyel denkleminin her iki tarafını φ_i baz fonksiyonu ile çarpıp x_{i-1} 'den x_{i+1} 'e integral alalım. Buradan

$$\begin{aligned} \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} Lu \varphi_i dx &= \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (-\varepsilon^2 u'' + a(x)u(x)) \varphi_i dx \\ &= \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x, u) \varphi_i dx \end{aligned}$$

elde ederiz. Burada φ_i baz fonksiyonu ve $\gamma_i = \frac{\sqrt{a_i}}{\varepsilon}$ olmak üzere

$$\varepsilon^2 \varphi_i^{(1)''} - a_i \varphi_i^{(1)} = 0, \quad \varphi_i^{(1)}(x_i) = 1, \varphi_j^{(1)}(x_{i-1}) = 0 \quad (4.3)$$

$$\varepsilon^2 \varphi_i^{(2)''} - a_i \varphi_i^{(2)} = 0, \quad \varphi_i^{(2)}(x_i) = 1, \varphi_j^{(2)}(x_{i+1}) = 0 \quad (4.4)$$

problemlerinin çözümü olan

$$\varphi_i = \begin{cases} \varphi_i^{(1)}(x) = \frac{\sinh \gamma_i (x - x_{i-1})}{\sinh \gamma_i h}, & x \in (x_{i-1}, x_i) \\ \varphi_i^{(2)}(x) = \frac{\sinh \gamma_i (x_{i+1} - x)}{\sinh \gamma_i h}, & x \in (x_i, x_{i+1}) \end{cases}$$

fonksiyonudur ve

$$\chi_i = h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi_i dx = \frac{2 \tanh \frac{\gamma_i h}{2}}{\gamma_i h}$$

biçiminde tanımlanır. $-h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varepsilon^2 u'' \varphi_i dx$ terimi için kısmi integrasyon kuralından

$$\begin{aligned} & \chi_i^{-1} \left(h^{-1} \varepsilon^2 u' \varphi_i \Big|_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} - h^{-1} \varepsilon^2 \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} u' \varphi_i' dx \right) \\ &= \chi_i^{-1} \left(h^{-1} \varepsilon^2 \int_{x_{i-1}}^{x_i} u' \varphi_i^{(1)'} dx + \varepsilon^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} u' \varphi_i^{(2)'} dx \right) \end{aligned}$$

buluruz. Bu ifadeye (2.1) interpolasyon kuadratür formülünü uygularsak

$$\begin{aligned} & \chi_i^{-1} h^{-1} \varepsilon^2 \left\{ u_{\bar{x},i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i^{(1)'} dx + \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx \varphi_i^{(1)''} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2} T_1(x - \xi) d\xi \right. \\ & \quad \left. + u_{x,j} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i^{(2)'} dx + \int_{x_{i+1}}^{x_{i+1}} dx \varphi_i^{(2)''} \int_{x_{i+1}}^{x_{i+1}} \frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2} T_1(x - \xi) d\xi \right\} \\ &= -\chi_i^{-1} h^{-1} \varepsilon^2 (u_{x,i} - u_{\bar{x},i}) + R_{1,i}(f) \end{aligned} \quad (4.5)$$

elde edilir. Burada $R_{1,i}(f)$

$$\begin{aligned} R(f) &= \chi_i^{-1} \left\{ -\varepsilon^2 \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx \varphi_i^{(1)''} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2} T_1(x - \xi) d\xi \right. \\ & \quad \left. - \varepsilon^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} dx \varphi_i^{(2)''} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2} T_1(x - \xi) d\xi \right\} \end{aligned}$$

olur. $\chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} a(x) u(x) \varphi_i dx$ terimi için,

$$\begin{aligned} \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} a(x) u(x) \varphi_i dx &= \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [a(x) - a(x_i) + a(x_i)] u \varphi_i dx \\ &= \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} a_i u \varphi_i dx + R_{a,i}^* \end{aligned}$$

yazabiliriz. Burada

$$R^*_{a,i} = \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [a(x) - a(x_i)] u \varphi_i dx$$

olur. Elde edilen bu sonuca $[x_{i-1}, x_i]$ aralığında $\sigma = 1$ ve $p(x) = \varphi_i^{(1)}$; $[x_i, x_{i+1}]$ aralığında $\sigma = 0$ ve $p(x) = \varphi_i^{(2)}$ olarak (2.2) interpolasyon kuadratur formülünü uygularsak

$$\begin{aligned} & \chi_i^{-1} h^{-1} [a_i u_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i^{(1)} dx + u_x \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_i) \varphi_i^{(2)} dx \\ & + \int_{x_i}^{x_{i+1}} dx \varphi_i^{(2)} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2} T_1(x - \xi) d\xi + \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx \varphi_i^{(1)} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2} T_1(x - \xi) d\xi \\ & + u_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i^{(2)} dx] + R^*_{a,i} \\ & = -\chi_i^{-1} h^{-1} \{a_i u_i \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi_i dx + a_i u_x \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_i) \varphi_i^{(1)} dx \\ & + a_i u_x \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_i) \varphi_i^{(2)} dx + a_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx \varphi_i^{(1)} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2} T_1(x - \xi) d\xi \\ & + a_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} dx \varphi_i^{(2)} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2} T_1(x - \xi) d\xi\} + R^*_{a,i} \end{aligned} \quad (4.6)$$

buluruz. (4.5) ve (4.6) ifadelerini birleştirebilirsek ve (4.3) ve (4.4) ifadelerini göz önüne alırsak

$$-\varepsilon^2 \theta_i u_{\bar{x}x} + a_i u_i + R^*_{a,i} = \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x, u) \varphi_i dx \quad (4.7)$$

sonucunu buluruz. Burada

$$\theta_i = \chi_i^{-1} \left(1 + \varepsilon^{-2} a_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_i) \varphi_i^{(1)} dx \right) = \frac{(\gamma_i h)^2}{\left(\sinh \frac{\gamma_i h}{2} \right)^2}$$

olur. $\chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x, u) \varphi_i dx$ terimi için,

$$\begin{aligned} & \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x, u) \varphi_i dx = \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \{ [f(x, u) - f(x_i, u)] \varphi_i dx \\ & + \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [f(x_i, u) - f(x_i, u_i)] \varphi_i dx + f(x_i, u_i) \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi_i dx \} \\ & = f(x_i, u_i) + R_{f,i} \end{aligned} \quad (4.8)$$

buluruz. Burada

$$R_{f,i} = \chi_i^{-1} h^{-1} \left\{ \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [f(x, u) - f(x_i, u)] \varphi_i dx + \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [f(x_i, u) - f(x_i, u_i)] \varphi_i dx \right\}$$

şeklindedir. Yukarıda elde edilen (4.7) ve (4.8) sonuçlarını birleştirirsek

$$-\varepsilon^2 \theta_i u_{\bar{x}x,i} + a_i u_i = f(x_i, u_i) + R_i, \quad i = 1, \dots, N-1$$

$$u_0 = u_N = 0 \quad (4.9)$$

fark problemini elde ederiz. Burada $R_i = R_{a,i} + R_{f,i}$ şeklindedir.

Buradan y yaklaşık çözümü için

$$-\varepsilon^2 \theta_i u_{\bar{x}x,i} + a_i u_i = f(x_i, u_i), \quad i = 1, \dots, N-1$$

$$y_0 = y_N = 0$$

(4.10)

fark problemini yazabiliriz.

4.1.1. Üstel katsayılı fark şemasında hata değerlendirmeleri

$z = y - u$ olarak aşağıdaki problemi elde ederiz:

$$-\varepsilon^2 \theta_i z_{\bar{x}x,i} + A_i z_i = R_i, \quad i = 1, \dots, N-1$$

$$z_0 = z_N = 0.$$

Burada ortalama değer teoreminden

$$f(x_i, y_i) - f(x_i, u_i) = \frac{\partial f(x_i, \bar{u}_i)}{\partial u} (y_i - u_i) \quad (4.11)$$

yazar ve

$$A_i = a_i - \frac{\partial f(x_i, \bar{u}_i)}{\partial u} \quad (4.12)$$

alırız. $z = y - u$ dersek, (4.9) ve (4.10)'a göre hata aşağıdaki sınır-değer problemini sağlar.

$$lz_i = R_i, i = 1, N-1, z_0 = z_N = 0 \quad (4.13)$$

burada R_i yaklaşım hatası $R_i = R_{a,i} + R_{f,i}$ şeklinde belirtilmiştir.

Teorem 4.1. $A(x) \in C^1[0, l]$ şartı altında (4.10) fark probleminin çözümü, ω_h 'da (4.1)-(4.2) probleminin çözümüne ε 'a göre düzgün yakınsaktır. Hata için,

$$\|y - u\|_{C(\omega_h)} \leq Ch$$

değerlendirmesi doğrudur (Amiraliyev ve Duru, 2002).

İspat. ε keyfi ve h adım aralığı olmak üzere, lv_i fark operatörü için ayrıık maksimum prensibinden $lv_i \geq 0$, ($i = 1, 2, \dots, N - 1$), $v_0 \geq 0$, $v_N \geq 0$ ise $v_i \geq 0$, $i = 0, 1, \dots, N$ doğruluğu kolayca gösterilebilir. Lemma 3.2'yi (4.13) problemine uygularsak

$$\|z\|_{C(\omega_h)} \leq \alpha^{-1} \|R\|_{C(\omega_h)} \quad (4.14)$$

eşitsizliği bulunur. Ayrıca R_i için $R_{a,i}$ ve $R_{f,i}$ ifadelerinden $A(x) \in C^1[0, l]$ şartından

$$|R_i| \leq Ch, \quad i = 1, 2, \dots, N - 1 \quad (4.15)$$

olduğu açıktır. (4.14) ve (4.15)'den teoremin ispatı tamamlanır.

Not. (4.10) fark problemi tek çözüme sahiptir. Gerçekten maksimum prensibine uygun, homojen

$$lv_i = 0, \quad i = 1, N - 1, \quad y_0 = y_N = 0$$

sisteminin sadece sıfır çözümü olur. Bilindiği gibi bu da lineer denklemler sistemi için bir tek çözümün varlığının gerekli ve yeter şartıdır (Amiraliyev ve Duru, 2002).

Şimdi yakınsama oranını $O(h^2)$ yapmak için gerekli şartları araştıralım. Bunu da bir teoremlle ifade edelim.

Teorem 4.2. $a(x) \in C^2[0, l]$, $f(x, u) \in C^2(D)$ ve

$$a'(0) = a'(l) = 0 \quad (4.16)$$

ise bu durumda (4.10) fark şemasının yakınsama hızı $O(h^2)$ biçimindedir:

$$\|y - u\|_{C(\omega_h)} \leq Ch^2 \quad (4.17)$$

(Amiraliyev ve Duru, 2002).

İspat. Teoremin ispatı için $R_i = R_{a,i} + R_{f,i}$ hata terimini ele alalım. Burada

$$R_{a,i} = -\chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [a(x) - a(x_i)] u(x) \varphi_i(x) dx$$

$$R_{f,i} = \chi_i^{-1} h^{-1} \left\{ \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [f(x, u) - f(x_i, u)] \varphi_i dx + \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [f(x_i, u) - f(x_i, u_i)] \varphi_i dx \right\}$$

daha önce belirlenmişti. Önce

$$|R_{a,i}| = O(h^2), \quad i = \overline{1, N - 1} \quad (4.18)$$

olduğunu ispatlayalım.

$$a(x) - a(x_i) = (x - x_i) a'(x_i) + \frac{(x - x_i)^2}{2} a''(\xi_i), \quad \xi_i \in (x_i, x)$$

ve

$$u(x) = u(x_i) + (x - x_i) u'(\xi_i), \quad \xi_i \in (x_i, x)$$

bağıntıları $R_{a,i}$ ifadesinde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
R_{a,i} &= -\chi_i^{-1}h^{-1} \left\{ a'(x_i) \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (x-x_i)u(x)\varphi_i dx \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (x-x_i)^2 a''(\xi_i(x))u(x)\varphi_i(x) dx \right\} \\
&= -\chi_i^{-1}h^{-1} \left\{ a'(x_i)u(x_i) \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (x-x_i)\varphi_i dx \right. \\
&\quad + a'(x_i) \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} u'(\xi_i(x))(x-x_i)^2 \varphi_i(x) dx \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (x-x_i)^2 a''(\xi_i(x))u(x)\varphi_i(x) dx \right\} \\
&= \chi_i^{-1}h^{-1}a'(x_i) \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (x-x_i)^2 u'(\xi_i(x))\varphi_i(x) dx \\
&\quad + \frac{1}{2}\chi_i^{-1}h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (x-x_i)^2 a''(\xi_i(x))u(x)\varphi_i(x) dx \tag{4.19}
\end{aligned}$$

olur. $\|a''(x)\|_{C[0,l]} \leq C$, $\|u\|_{C[0,l]} \leq C$ ve söz konusu aralıkta $|x-x_i|^2 \leq h^2$ olduğundan (4.19)'un sağ tarafındaki ikinci terim,

$$\left| \frac{1}{2}\chi_i^{-1}h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (x-x_i)^2 a''(\xi_i(x))u(x)\varphi_i(x) dx \right| \leq Ch^2, i = 1, 2, \dots, N-1 \tag{4.20}$$

eşitsizliğini sağlar. Birinci terimi değerlendirmek için (3.3)'den

$$\begin{aligned}
|u'(\xi_i)| &\leq C \left\{ 1 + \frac{1}{\varepsilon} e^{\frac{-\sqrt{\alpha}\xi_i}{\varepsilon}} + \frac{1}{\varepsilon} e^{\frac{-\sqrt{\alpha}(l-\xi_i)}{\varepsilon}} \right\} \\
&\leq C \left\{ 1 + \frac{1}{\varepsilon} e^{\frac{-\sqrt{\alpha}x_{i-1}}{\varepsilon}} + \frac{1}{\varepsilon} e^{\frac{-\sqrt{\alpha}(l-x_{i+1})}{\varepsilon}} \right\}, 1 < i < N-1
\end{aligned}$$

eşitsizliğini (4.19)'un birinci teriminde yerine yazarsak,

$$\begin{aligned}
&\left| \chi_i^{-1}h^{-1}a'(x_i) \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (x-x_i)^2 u'(\xi_i(x))\varphi_i(x) dx \right| \\
&\leq C\chi_i^{-1}h^{-1}|a'(x_i)| \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (x-x_i)^2 \varphi_i(x) dx \\
&\quad + \frac{1}{\varepsilon}C\chi_i^{-1}h^{-1}|a'(x_i)| \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (x-x_i)^2 \varphi_i(x) e^{\frac{-\sqrt{\alpha}x_{i-1}}{\varepsilon}} dx \\
&\quad + \frac{1}{\varepsilon}C\chi_i^{-1}h^{-1}|a'(x_i)| \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (x-x_i)^2 \varphi_i(x) e^{\frac{-\sqrt{\alpha}(l-x_{i+1})}{\varepsilon}} dx \tag{4.21}
\end{aligned}$$

elde edilir. (4.21)'in sağ tarafındaki birinci terimin $O(h^2)$ olduğu kolayca görülebilir. İkinci terimin ise $a'(0) = 0$ şartından ve $xe^{-x} < e^{-\frac{x}{2}}$, ($x \geq 0$) eşitsizliğinden yararlanırsak,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{\varepsilon} C \chi_i^{-1} h^{-1} |a'(x_i)| \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (x - x_i)^2 \varphi_i(x) e^{-\frac{\sqrt{\alpha} x_{i-1}}{\varepsilon}} dx \right| \\ & \leq \frac{1}{\varepsilon} C \chi_i^{-1} h^{-1} |a''(\xi_i)| x_i e^{-\frac{\sqrt{\alpha} x_{i-1}}{\varepsilon}} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (x - x_i)^2 \varphi_i(x) dx \\ & \leq C_0 h^2 \frac{x_i}{\varepsilon} e^{-\frac{\sqrt{\alpha} x_{i-1}}{\varepsilon}} \leq C_0 h^2 \frac{x_i}{x_{i-1} \sqrt{\alpha}} \frac{\sqrt{\alpha} x_{i-1}}{\varepsilon} e^{-\frac{\sqrt{\alpha} x_{i-1}}{\varepsilon}} \\ & \leq C_1 h^2 \frac{i}{i-1} e^{-\frac{\sqrt{\alpha} x_{i-1}}{2\varepsilon}} \leq Ch^2, \quad i > 1 \end{aligned}$$

olduğu görülür. (4.21)'in sağındaki üçüncü terim için $a'(l) = 0$ şartından yararlanarak şartından yararlanarak benzer yolla $O(h^2)$ olduğunu görebiliriz ($i < N - 1$ için). Böylece (4.20) eşitliği $i = 2, 3, \dots, N - 2$ için ispatlanmış olur. $i = 1$ için ise ($i = N - 1$ durumu da benzer yolla ispatlanır).

$$\begin{aligned} a(x) - a(x_1) &= (x - x_1)a'(x_1) + \frac{(x - x_1)^2}{2} a''(\xi_1), \quad \xi_1 \in (x_1, x) \\ u(x) &= u(x_0) + \int_{x_0}^x u'(\xi) d\xi \end{aligned}$$

bağıntılarından yararlanırsak,

$$\begin{aligned} R_{a,1} &= -\chi_1^{-1} h^{-1} \left\{ a'(x_1) \int_{x_0}^{x_2} (x - x_1) \left[\int_{x_0}^x u'(\xi) d\xi \right] \varphi_1 dx \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2} \chi_1^{-1} h^{-1} \int_{x_0}^{x_2} (x - x_1)^2 a''(\xi_1(x)) u(x) \varphi_1(x) dx \right\} \end{aligned} \quad (4.22)$$

olur. (4.22)'nin sağındaki ikinci terimin $O(h^2)$ olduğu (4.1.20)'den görülür. Birinci terimi ise $a'(0) = 0$ şartından ve Lemma 3.3'den yararlanarak şöyle değerlendirebiliriz:

$$\begin{aligned} & \left| \chi_1^{-1} h^{-1} a'(x_1) \int_{x_0}^{x_2} (x - x_1) \left[\int_{x_0}^x u'(\xi) d\xi \right] \varphi_1 dx \right| \\ & \leq |a'(x_1)| h \int_{x_0}^{x_2} |u'(x)| dx \\ & \leq C x_1 h |a''(\xi_1)| \int_{x_0}^{x_2} \left\{ 1 + \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{\sqrt{\alpha} x_{i-1}}{\varepsilon}} + \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{\sqrt{\alpha}(l-x_{i+1})}{\varepsilon}} \right\} dx \\ & \leq C_1 h^2 \left\{ h + \frac{1}{\varepsilon} \int_{x_0}^{x_2} e^{-\frac{\sqrt{\alpha} x}{\varepsilon}} dx \right\} \end{aligned}$$

$$\leq C_1 h^2 \left\{ h + (\alpha)^{-1} \left(1 - e^{-\frac{2\sqrt{\alpha}h}{\varepsilon}} \right) \right\} = O(h^2)$$

olur ve böylece $|R^{(1)}_{a,i}| = O(h^2)$, $|R^{(N-1)}_{a,i}| = O(h^2)$ olduğu da ispatlanmış olur. Yani (4.22) sağlanır. Şimdi $R_{f,i}$ terimini ele alalım.

$$u_m = \min_{[0,l]} |u(x)|, \quad u_M = \max_{[0,l]} |u(x)|, \quad (x, u) \in D = [0, l] \times [u_m, u_M] \quad \text{için}$$

$f(x, u) \in C^2(D)$ olmak üzere

$$R_{f,i} = \chi_i^{-1} h^{-1} \left\{ \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [f(x, u(x)) - f(x_i, u(x))] \varphi_i(x) dx \right. \\ \left. + \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [f(x_i, u(x)) - f(x_i, u(x_i))] \varphi_i(x) dx \right\}$$

ifadesi için kapalı türev formülü ve Taylor açılımını kullanarak açık biçimde

$$f(x, u(x)) - f(x_i, u(x)) = (x - x_i) \left[\frac{\partial f(x_i, u_i)}{\partial x} + \frac{\partial f(x_i, u_i)}{\partial u} \frac{\partial u(x_i)}{\partial x} \right] \\ + \frac{(x - x_i)^2}{2!} \left[\frac{\partial^2 f(\xi_i, u(\xi_i))}{\partial x^2} \right. \\ + 2 \frac{\partial^2 f(\xi_i, u(\xi_i))}{\partial x \partial u} \frac{du(\xi_i)}{dx} \\ + \frac{\partial^2 f(\xi_i, u(\xi_i))}{\partial u^2} \left(\frac{du(\xi_i)}{dx} \right)^2 \\ \left. + \frac{\partial f(\xi_i, u(\xi_i))}{\partial u^2} \frac{d^2 u(\xi_i)}{dx^2} \right]$$

yazabiliriz. Buradan

$$R_{f,i} = \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (x - x_i) \left[\frac{\partial f(x_i, u_i)}{\partial x} + \frac{\partial f(x_i, u_i)}{\partial u} \frac{\partial u(x_i)}{\partial x} \right] \varphi_i(x) dx \\ + \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \frac{(x - x_i)^2}{2!} \left\{ \frac{\partial^2 f(\xi_i, u(\xi_i))}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 f(\xi_i, u(\xi_i))}{\partial x \partial u} \frac{du(\xi_i)}{dx} \right. \\ \left. + \frac{\partial^2 f(\xi_i, u(\xi_i))}{\partial u^2} \left(\frac{du(\xi_i)}{dx} \right)^2 + \frac{\partial f(\xi_i, u(\xi_i))}{\partial u^2} \frac{d^2 u(\xi_i)}{dx^2} \right\} \varphi_i(x) dx$$

olur. u fonksiyonunun Lemma 3.3, birinci ve ikinci türev değerlendirmelerinden

$$|R_{f,i}| = O(h^2) \tag{4.23}$$

olduğu açıktır.

Son olarak

$$R_i = R_{a,i} + R_{f,i}$$

eşitliğinde (4.18) ve (4.23) ifadelerinden

$$\|R_i\|_{C(\omega_h)} \leq Ch^2$$

olduğu görülür. Bundan ve (4.14) ifadelerinden teorem ispatlanmış olur.

4.2. Düzgün Olmayan Şebekede Fark Şemaları

Burada

$$\varpi_N = \{0 = x_1 < x_2 < \dots < x_{N-1} < x_N = l\}$$

ayrık noktalar kümesine düzgün olmayan şebeke, x_i noktalarına düğüm noktaları denir.

$h_i = x_i - x_{i-1}$ şebeke adımındır. u fonksiyonu bu şebekede tanımlı şebeke fonksiyonu olmak üzere

$$u_{x,i} = \frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1}}$$

$$u_{\hat{x},i} = \frac{u_i - u_{i-1}}{h_i}$$

ifadelerine sırayla ileri fark türevi ve geri fark türevi denir. $\hat{h}_i = \frac{1}{2}(h_i + h_{i+1})$ olmak üzere

$$u_{\bar{x},i} = \frac{1}{\hat{h}_i}(u_{x,i} - u_{\hat{x},i})$$

ifadesine ikinci mertebe fark türevi denir (Samarskii, 2001).

4.3. Bakhvalov Şebekede Fark Şemasının Kurulması

$\varpi_N = \{0 = x_1 < x_2 < \dots < x_{N-1} < x_N = l\}$ şebekesinin noktalarını adaptif Bakhvalov şebeke olarak belirleyelim. Bunun için geçiş noktasını

$$\sigma_1 = \min_i \left\{ \frac{l}{4}, \alpha^{-1} \varepsilon \ln \varepsilon \right\}$$

ile belirleyelim. $[0, l]$ aralığını $[0, \sigma_1] \cup [\sigma_1, \sigma_2] \cup [\sigma_2, l]$ olarak parçalayalım. Burada $\sigma_2 = l - \sigma_1$ olur. x_i düğümleri

$$x_i = \begin{cases} -\alpha^{-1}\varepsilon \ln\left(1 - (1 - \varepsilon)\frac{4i}{N}\right), & i = 0, 1, \dots, \frac{N}{4}, \quad x_i \in [0, \sigma_1], \quad \sigma_1 < \frac{l}{4} \text{ ise;} \\ -\alpha^{-1}\varepsilon \ln\left(1 - \left(1 - e^{-\frac{\alpha l}{4\varepsilon}}\right)\frac{4i}{N}\right), & i = 0, 1, \dots, \frac{N}{4}, \quad x_i \in [0, \sigma_1], \quad \sigma_1 = \frac{l}{4} \text{ ise;} \\ \sigma_1 + \left(i - \frac{N}{4}\right)h^{(1)}, & i = \frac{N}{4} + 1, \dots, \frac{3N}{4}, \quad x_i \in [\sigma_1, \sigma_2], \quad h^{(1)} = \frac{2(\sigma_2 - \sigma_1)}{N} \text{ ise;} \\ \sigma_2 - \alpha^{-1}\varepsilon \ln\left(1 - (1 - \varepsilon)\frac{4\left(i - \frac{3N}{4}\right)}{N}\right), & i = \frac{3N}{4} + 1, \dots, N, \quad x_i \in [\sigma_2, l] \text{ ise;} \\ \sigma_2 - \alpha^{-1}\varepsilon \ln\left(1 - \left(1 - e^{-\frac{\alpha l}{4\varepsilon}}\right)\frac{4\left(i - \frac{3N}{4}\right)}{N}\right), & i = \frac{3N}{4} + 1, \dots, N, \quad x_i \in [\sigma_2, l], \sigma_2 = \frac{3l}{4}, \end{cases}$$

şeklinde belirlenir (Boglaev, 1984).

(4.1)-(4.2) lineer problemi için ϖ_N şebekesi üzerinde fark şeması kuralım. Bunun için bu diferansiyel denklemin her iki tarafını φ_i baz fonksiyonu ile çarpıp x_{i-1} 'den x_{i+1} 'e integral alalım. Buradan

$$\hbar_j^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} Lu\varphi_i dx = \hbar_j^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (-\varepsilon^2 u'' + a(x)u(x))\varphi_i dx = \hbar_j^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x, u)\varphi_i dx$$

elde ederiz. Burada φ_i baz fonksiyonu

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \varphi_i^{(1)''} &= 0, \quad \varphi_i^{(1)}(x_i) = 1, \varphi_j^{(1)}(x_{i-1}) = 0 \\ \varepsilon^2 \varphi_i^{(2)''} &= 0, \quad \varphi_i^{(2)}(x_i) = 1, \varphi_j^{(2)}(x_{i+1}) = 0 \end{aligned}$$

problemlerinin çözümü olan

$$\varphi_i = \begin{cases} \varphi_i^{(1)} = \frac{(x - x_{i-1})}{h_i}, & x \in (x_{i-1}, x_i) \\ \varphi_i^{(2)} = \frac{(x_{i+1} - x)}{h_{i+1}}, & x \in (x_i, x_{i+1}) \end{cases}$$

fonksiyonudur. Ayrıca

$$\hbar_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi_i dx = \hbar_i^{-1} \left(\frac{h_i}{2} + \frac{h_{i+1}}{2} \right) = 1$$

geçerlidir. $-\hbar_j^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varepsilon^2 u'' dx$ terimi için kısmi integrasyon kuralını ve (2.1)

interpolasyon kuadratur formülünü uygulayarak

$$\begin{aligned} -\left(\hbar_i^{-1} \varepsilon^2 u' \varphi_i \Big|_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} - \hbar_i^{-1} \varepsilon^2 \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} u' \varphi_i' dx \right) &= \hbar_i^{-1} \varepsilon^2 \int_{x_{i-1}}^{x_i} u' \varphi_i^{(1)'} dx \\ &+ \hbar_i^{-1} \varepsilon^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} u' \varphi_i^{(2)'} dx \end{aligned}$$

buluruz. Buradan ve baz fonksiyonlarının tanımından

$$\begin{aligned}
& -\hbar_i^{-1}\varepsilon^2 u_{\bar{x}} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i^{(1)'} dx - \hbar_i^{-1}\varepsilon^2 u_x \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i^{(2)'} dx = -\hbar_i^{-1}\varepsilon^2 (u_x - u_{\bar{x}}) \\
& = -\varepsilon^2 u_{\hat{x}x,i}
\end{aligned} \tag{4.24}$$

elde edilir. $\hbar_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} a(x)u(x)\varphi_i dx$ terimi için,

$$\begin{aligned}
\hbar_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} a(x)u(x)\varphi_i dx &= \hbar_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [a(x) - a(x_i) + a(x_i)]u(x)\varphi_i dx \\
&= -\hbar_i^{-1} a_i \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} u(x)\varphi_i dx + R_{a,i} \\
&= -a_i \hbar_i^{-1} u_i \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi_i dx + R_i^{(1)} + R_{a,i} \\
&= -a_i u_i + R_i^{(1)} + R_{a,i}
\end{aligned} \tag{4.25}$$

yazabiliriz. Burada

$$R_{a,i} = -\hbar_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [a(x) - a(x_i)]u(x)\varphi_i dx$$

ve

$$R_i^{(1)} = \hbar_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} dx \varphi_i \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2} T_0(x - \xi) d\xi$$

olur. $\hbar_i^{-1} \int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} f(x, u)\varphi_i dx$ terimi için uygun düzenlemelerle

$$\begin{aligned}
\hbar_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x, u)\varphi_i dx &= \hbar_i^{-1} \left\{ \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [f(x, u) - f(x_i, u)]\varphi_i dx \right. \\
&\quad \left. + \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [f(x_i, u) - f(x_i, u_i)]\varphi_i dx \right\} \\
&\quad + f(x_i, u_i) \hbar_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi_i dx = f(x_i, u_i) + R_{f,i}
\end{aligned}$$

buluruz. Burada

$$R_{f,i} = \hbar_i^{-1} \left\{ \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [f(x, u) - f(x_i, u)]\varphi_i dx + \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [f(x_i, u) - f(x_i, u_i)]\varphi_i dx \right\}$$

şeklindedir. O halde (4.24) ve (4.25) sonuçlarını birleştirir ve $R_i^{(2)} = R_{a,i} + R_{f,i}$ olmak üzere

$$R_i = R_i^{(1)} + R_i^{(2)} \tag{4.26}$$

dersek,

$$-\varepsilon^2 u_{\hat{x}x,i} + a_i u_i = f(x_i, u_i) + R_i, i = 1, \dots, N - 1 \tag{4.27}$$

$$u_0 = u_N = 0$$

$$(4.28)$$

fark problemini elde ederiz. Buradan y yaklaşık çözümü için

$$-\varepsilon^2 y_{\hat{x}x,i} + a_i y_i = f(x_i, y_i), i = 1, \dots, N - 1 \quad (4.29)$$

$$y_0 = y_N = 0 \quad (4.30)$$

fark problemini yazabiliriz.

4.3.1. Bakhvalov şebekede hata değerlendirmeleri

Bu metodun düzgün yakınsaklığını araştırmak için y_i, u_i sırasıyla (4.27)-(4.28) ve (4.29)-(4.30) problemlerinin çözümleri olmak üzere $z_i = y_i - u_i, x_i \in \omega_h$ hata fonksiyonu

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 z_{\hat{x}x,i} - a_i z_i &= f(x_i, y_i) - f(x_i, u_i), \quad i = 1, \dots, N - 1 \\ z_0 &= z_N = 0 \end{aligned}$$

ayrık probleminin çözümü olsun. Sağ taraftaki $f(x_i, y_i) - f(x_i, u_i)$ ifadesini daha önce yaptığımız gibi düzenlersek

$$lz_i = -\varepsilon^2 z_{\hat{x}x,i} + A_i z_i = R_i, \quad i = 1, N - 1, z_0 = z_N = 0 \quad (4.31)$$

şeklinde yazabiliriz. Burada A_i , (4.11)-(4.12) ifadelerindeki gibidir ve R_i de (4.26)'da belirtilmiştir.

Bakhvalov şebekede yaklaşık çözümün yakınsaması için aşağıdaki lemma ve teoremi ispatıyla verelim.

Teorem 4.3. $A(x) \in C^1[0, l]$ şartı altında (4.29)-(4.30) fark probleminin çözümü, $\bar{\omega}_h$ 'da (4.1)-(4.2) probleminin çözümüne göre ε 'a göre düzgün yakınsaktır. Hata için

$$\|y - u\|_{C(\bar{\omega}_h)} \leq Ch_i$$

değerlendirmesi doğrudur (Amiraliyev ve Duru,2002).

İspat. ε keyfi ve $h_i = x_i - x_{i-1}$ adım aralığı olmak üzere, lv_i fark operatörü için ayrık maksimum prensibinden, $lv_i \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, N - 1$), $v_0 \geq 0, v_N \geq 0$ ise $v_i \geq 0, i = 0, 1, \dots, N$ doğruluğu kolayca gösterilebilir. Lemma 3.2'yi (4.3.8) problemine uygularsak,

$$\|z\|_{C(\bar{\omega}_h)} \leq \alpha^{-1} \|R\|_{C(\bar{\omega}_h)} \quad (4.32)$$

eşitsizliği elde edilir. Ayrıca R_i için $R_i^{(1)}$ ve $R_i^{(2)}$ ifadelerinden ve $A(x) \in C^1[0, l]$ şartından

$$|R_i| \leq Ch_i, \quad i = 1, 2, \dots, N - 1 \quad (4.33)$$

olduğu açıktır. Burada $|R_i|$

$$\begin{aligned}
|R_i| &\leq |R_i^{(1)}| + |R_i^{(2)}| \\
&\leq a_i \hbar_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} dx \varphi_i \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \left| \frac{du(\xi)}{dx} \right| T_0(x - \xi) d\xi \\
&\quad + \hbar_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} |a(x) - a(x_i)| \cdot |u(x)| \varphi_i dx \\
&\quad + \hbar_i^{-1} \left\{ \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} |f(x, u) - f(x_i, u)| \varphi_i dx + \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} |f(x_i, u) - f(x_i, u(x_i))| \varphi_i dx \right\}
\end{aligned}$$

olduğunu hatırlayalım. (4.33) olduğunu göstermek için

$$\hbar_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} |f(x_i, u) - f(x_i, u(x_i))| \varphi_i dx$$

ifadesinin $O(h_i)$ olduğunu göstermek yeterlidir. Ortalama değer teoremi, $\left| \frac{\partial f(x_i, \tilde{u})}{\partial u} \right| \leq C$

ve

$$|u'(x)| \leq C \left\{ 1 + \frac{1}{\varepsilon} \left(e^{\frac{-\sqrt{\alpha}x}{\varepsilon}} + e^{\frac{-\sqrt{\alpha}(l-x)}{\varepsilon}} \right) \right\}$$

şartından

$$\begin{aligned}
\hbar_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} |f(x_i, u) - f(x_i, u(x_i))| \varphi_i dx &= \hbar_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \left| \frac{\partial f(x_i, \tilde{u})}{\partial u} \right| |u(x) - u(x_i)| \varphi_i dx \\
&\leq C \hbar_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} dx \varphi_i \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \left| \frac{du(\xi)}{dx} \right| d\xi \\
&\leq C \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left\{ 1 + \frac{1}{\varepsilon} \left(e^{\frac{-\sqrt{\alpha}\xi}{\varepsilon}} + e^{\frac{-\sqrt{\alpha}(l-\xi)}{\varepsilon}} \right) \right\} d\xi \\
&\leq C \left\{ \hbar_i + (\sqrt{\alpha})^{-1} \left[e^{\frac{-\sqrt{\alpha}x_{i-1}}{\varepsilon}} - e^{\frac{-\sqrt{\alpha}x_i}{\varepsilon}} - e^{\frac{-\sqrt{\alpha}(l-x_i)}{\varepsilon}} + e^{\frac{-\sqrt{\alpha}(l-x_{i-1})}{\varepsilon}} \right] \right\}
\end{aligned}$$

yazabiliriz. $[0, \sigma_1] \cup [\sigma_1, \sigma_2] \cup [\sigma_2, l]$ aralıklarındaki h_i değerleri için ayrı ayrı

değerlendirme alalım. Önce $[0, \sigma_1]$ aralığında değerlendirme alalım. $\sigma_1 < \frac{1}{4}$ için

$$\begin{aligned}
h_i = x_i - x_{i-1} &= \alpha^{-1} \varepsilon \left[-\ln \left(1 - \left(1 - e^{-\frac{\alpha l}{4\varepsilon}} \right) \frac{4i}{N} \right) + \ln \left(1 - \left(1 - e^{-\frac{\alpha l}{4\varepsilon}} \right) \frac{4(i-1)}{N} \right) \right] \\
&\leq 4\alpha^{-1} (1 - \varepsilon) N^{-1}
\end{aligned}$$

olur. $e^{\frac{-\sqrt{\alpha}x_{i-1}}{\varepsilon}} - e^{\frac{-\sqrt{\alpha}x_i}{\varepsilon}} \leq 4\alpha^{-1} (1 - \varepsilon) N^{-1}$ bulunur. Benzer biçimde

$$e^{\frac{-\sqrt{\alpha}(l-x_{i-1})}{\varepsilon}} - e^{\frac{-\sqrt{\alpha}(l-x_i)}{\varepsilon}} \leq 4\alpha^{-1} (1 - \varepsilon) N^{-1}$$

olur. $\sigma_1 = \frac{1}{4}$ olursa

$$h_i = x_i - x_{i-1} = \alpha^{-1} \varepsilon \left[-\ln \left(1 - \left(1 - e^{-\frac{\alpha l}{4\varepsilon}} \right) \frac{4i}{N} \right) + \ln \left(1 - \left(1 - e^{-\frac{\alpha l}{4\varepsilon}} \right) \frac{4(i-1)}{N} \right) \right]$$

$$\leq \alpha^{-1} \left(1 - e^{-\frac{\alpha l}{4\varepsilon}} \right) N^{-1} \leq \alpha^{-1} \varepsilon \frac{\alpha l}{4\varepsilon} 4N^{-1} = lN^{-1}$$

bulunur. $[0, \sigma_1]$ aralığında $|R_i| \leq CN^{-1}$ olduğu ispatlanmış olur. $[\sigma_1, \sigma_2]$ aralığı için

$$h_i = x_i - x_{i-1} = \frac{2(\sigma_2 - \sigma_1)}{N} = \frac{2(l - 2\sigma_1)}{N} = 2((l - 2\sigma_1)N^{-1}) \quad \text{yazılır. } \sigma_1 < \frac{1}{4} \quad \text{için } h_i \leq$$

lN^{-1} olur. $\sigma_1 = \frac{1}{4}$ için ise $h_i = lN^{-1}$ bulunur. Böylece bu aralıkta $|R_i| \leq CN^{-1}$ olduğu ispatlanır. $[\sigma_2, l]$ aralıklarındaki benzer işlemler yapılırsa $|R_i| \leq CN^{-1}$ olur. Bundan teorem ispatlanmış olur.

Not. (4.10) fark problemi tek çözüme sahiptir. Gerçekten maksimum prensibine uygun, homojen

$$lv_i = 0, \quad i = 1, N-1, \quad y_0 = y_N = 0$$

sisteminin sadece sıfır çözümü olur. Bilindiği gibi bu da lineer denklemler sistemi için bir tek çözümün varlığının gerekli ve yeter şartıdır (Amiraliyev ve Duru, 2002).

Şimdi yakınsama oranını $O(h^2)$ yapmak için gerekli şartları araştıralım. Bunu da bir teoremle ifade edelim.

Teorem 4.4. $a(x) \in C^2[0, l]$, $f(x, u) \in C^2(D)$ ve

$$a'(0) = a'(l) = 0$$

ise bu durumda (4.29)-(4.30) fark şemasının yakınsama hızı $O(h^2)$ biçimindedir:

$$\|y - u\|_{C(\omega_h)} \leq Ch^2$$

(Amiraliyev ve Duru, 2002).

4.4. Parçalı Düzgün (Shishkin) Şebekede Fark Şemasının Kurulması

$\omega_N = \{0 = x_1 < x_2 < \dots < x_{N-1} < x_N = l\}$ şebekesinin noktalarını parçalı düzgün şebeke olarak belirleyelim. Bunun için geçiş noktasını

$$\sigma_1 = \min_i \left(\frac{l}{4}, \alpha^{-1} \varepsilon \ln \varepsilon \right), \quad \sigma_2 = l - \sigma_1$$

ile belirleyelim. $[0, l]$ aralığını $[0, \sigma_1] \cup [\sigma_1, \sigma_2] \cup [\sigma_2, l]$ olarak parçalayalım. Burada $\sigma_2 = l - \sigma_1$ olur. x_i düğümleri

$$x_i = \begin{cases} x_0 + (i-1) \frac{4\sigma_1}{N}, & i = 0, 1, \dots, \frac{N}{4}, \quad x_i \in [0, \sigma_1], \quad \sigma_1 < \frac{1}{4}, \\ \sigma_1 + \left(i-1 - \frac{N}{4}\right) \frac{2(\sigma_2 - \sigma_1)}{N}, & i = \frac{N}{4} + 1, \dots, \frac{3N}{4}, \quad x_i \in [\sigma_1, \sigma_2], \\ \sigma_2 - \left(i-1 - \frac{3N}{4}\right) \frac{4\sigma_1}{N}, & i = \frac{3N}{4} + 1, \dots, N, \quad x_i \in [\sigma_2, l]. \end{cases}$$

şeklinde belirlenir (Boglaev, 1984).

4.4.1. Shishkin şebekede hata değerlendirmeleri

Bu metodun düzgün yakınsaklığını araştırmak için $z = y - u$, $(x, t) \in D$ hata fonksiyonu aşağıdaki

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 z_{\hat{x}x,i} - a_i z_i &= R_i, & i = 1, \dots, N-1 \\ z_0 &= z_N = 0 \end{aligned}$$

ayrık probleminin çözümü olsun. Burada R_i , (4.26)'da ifade edildiği gibidir. Parçalı düzgün şebekede hata değerlendirmesi için aşağıdaki teorem verilmektedir.

Teorem 4.5. y_i , u_i sırasıyla (4.27)-(4.28) ve (4.29)-(4.30) problemlerinin çözümleri olsun. Shishkin şebekede hata değerlendirmesi

$$|y_i - u_i| \leq CN^{-1}$$

biçimindedir.

İspat. Bunun ispatı için Teorem 4.3.'deki işlemlerin benzeri bu şebeke noktaları için alınır. $|y_i - u_i| \leq CN^{-1}$ olduğu ispatlanmış olur. $[0, \sigma_1]$, $[\sigma_1, \sigma_2]$ ve $[\sigma_2, l]$ aralıklarındaki h_i değerleri için ayrı ayrı değerlendirme alalım. Önce $[0, \sigma_1]$ aralığında değerlendirme alalım. $\sigma_1 < \frac{1}{4}$ için $h_i = \frac{4\sigma_1}{N} \leq lN^{-1}$ olur. $\sigma_1 = \frac{1}{4}$ için $h_i = \frac{4l/4}{N} = lN^{-1}$ elde edilir. $[\sigma_1, \sigma_2]$ aralığı için $\sigma_1 < \frac{1}{4}$ olursa $h_i = \frac{2(l-2\sigma_1)}{N} \leq lN^{-1}$ olacaktır. Ayrıca $\sigma_1 = \frac{1}{4}$ için $h_i = \frac{2(l-2\sigma_1)}{N} = lN^{-1}$ bulunur. $[\sigma_2, l]$ aralığı için de $[0, \sigma_1]$ aralığındaki benzer işlemler yapılırsa $|y_i - u_i| \leq CN^{-1}$ olduğu görülür. Böylece teorem ispatlanmış olur.

4.5. Nümerik Sonuçlar

Bu kesimde fark şemaları aşağıdaki lineer olmayan problem üzerinde test edilecektir:

Düzgün şebekede üstel katsayılı fark şemasını aşağıdaki lineer olmayan problem üzerinde test edeceğiz:

$$\begin{aligned} -\varepsilon^2 u''(t) + x(1-x)u(t) &= u + u^2, \quad x \in (0,1) \\ u(0) = u(1) &= 0 \end{aligned} \quad (4.34)$$

Önce üstel katsayılı (4.9) ve (4.10) fark şeması için bu problemi açık biçimde

$$\begin{aligned} -\varepsilon^2 h^{-2} \theta_i (y_{i+1}^{(n)} - 2y_i^{(n)} + y_{i-1}^{(n)}) + a_i y_i^{(n)} - y_i^{(n)} \frac{\partial f(x_i, y_i^{(n-1)})}{\partial u} \\ = f(x_i, y_i^{(n-1)}) - y_i^{(n-1)} \frac{\partial f(x_i, y_i^{(n-1)})}{\partial u}. \end{aligned}$$

Bu ifadeyi

$$\begin{aligned} A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} &= -F_i, \quad i = 1, \dots, N-1 \\ y_0 = y_N &= 0 \end{aligned}$$

biçiminde düzenleyelim. Burada başlangıç iterasyonu için $y_i^{(0)} = -2, i = 1, \dots, N-1$ alınmıştır. Ayrıca

$$\begin{aligned} A_i = B_i &= \varepsilon^2 h^{-2} \theta_i, \\ C_i &= 2\varepsilon^2 \theta_i \theta_i + a_i - \frac{\partial f(x_i, y_i^{(n-1)})}{\partial u} \\ F_i &= f(x_i, y_i^{(n-1)}) - y_i^{(n-1)} \frac{\partial f(x_i, y_i^{(n-1)})}{\partial u} \end{aligned}$$

alınır. Örnek için kovma yöntemi ve iterasyon birlikte uygulanmalıdır. Kovma algoritması, $C_i - \alpha_i A_i \neq 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \alpha_{i+1} &= \frac{B_i}{C_i - \alpha_i A_i}, \quad \alpha_1 = 0, \quad i = 1, \dots, N-1 \\ \beta_{i+1} &= \frac{F_i + A_i \beta_i}{C_i - \alpha_i A_i}, \quad \beta_1 = 0, \quad i = 1, \dots, N-1 \end{aligned}$$

ve

$$y_i = y_{i+1} \alpha_{i+1} + \beta_{i+1}, \quad i = N-1, \dots, 0$$

bağıntılarıyla tamamlanır (Samarskii, 2001).

Ele alınan test problemin analitik çözümü bilinmediğinden mutlak hatalar

$$r_1 = \max_{0 < i < N} |y_{i,h}^i - y_{i,h}^i|, \quad r_2 = \max_{0 < i < N} |y_{i,h}^i - y_{i,h}^i|$$

şeklinde belirlenir. Düzgün yakınsama oranı aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$p = \frac{\ln \frac{r_1}{r_2}}{\ln 2}$$

(Kopteva, 2004). Buna göre elde edilen sonuçlar tablolarda sunulmaktadır.

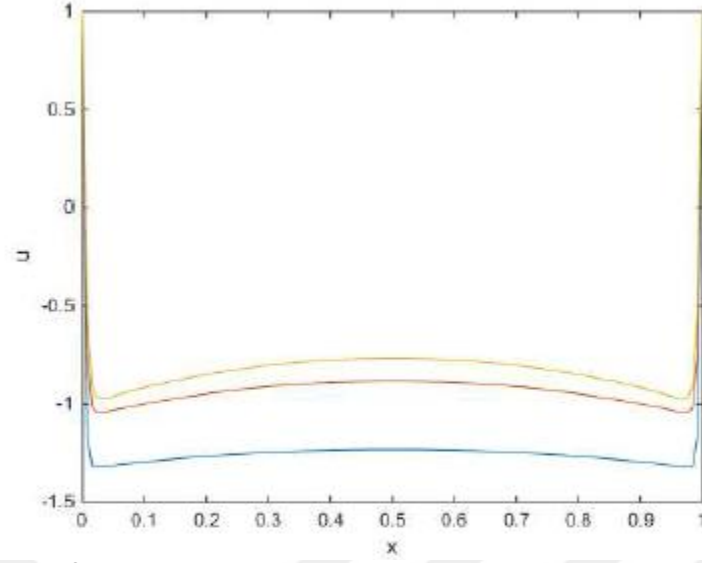
(4.34) test probleminin çözümünde elde edilen sonuçlar düzgün şebeke üzerinde hesaplanmış, hatalar ve p yakınsaklık oranları Çizelge 4.1. ve 4.2.'de verilmiştir.

Çizelge 4.1. $\varepsilon = 2^{-w}$ ($w = 3, 4, \dots, 9$) değeri için düzgün şebeke noktalarında elde edilen yakınsama oranı

ε	N=8	N=16	N=32	N=64
2^{-3}	r0=0.311360	r0=0.046374	r0=0.009127	r0=0.002110
	r1=0.042791	r1=0.009127	r1=0.002110	r1=0.002110
	p=2.863215	p=2.345066	p=2.112825	p= 2.030424
2^{-4}	r0=0.228723	r0=0.302153	r0=0.045168	r0=0.009008
	r1= 0.181690	r1=0.042560	r1=0.009008	r1=0.002093
	p=0.332122	p= 2.827703	p=2.326072	p=2.105377
2^{-5}	r0=0.029511	r0=0.213193	r0=0.293582	r0=0.044029
	r1=0.021707	r1=0.173294	r1=0.042189	r1=0.008846
	p=0.443117	p=0.298938	p=2.798826	p=2.315451
2^{-6}	r0=0.013264	r0=0.034541	r0=0.202879	r0=0.287519
	r1=0.003572	r1=0.019164	r1=0.167515	r1=0.041926
	p=1.892868	p=0.849931	p=0.276334	p=2.777732
2^{-7}	r0=0.001015	r0=0.017297	r0=0.037469	r0=0.197143
	r1=0.000229	r1=0.003867	r1=0.017750	r1=0.164258
	p=2.145248	p=2.161150	p=1.077877	p=0.263277
2^{-8}	r0=0.000009	r0=0.002291	r0=0.020158	r0=0.039032
	r1=0.000015	r1=0.000280	r1=0.004050	r1=0.017014
	p=-0.780445	p=3.032668	p=2.315307	p=1.197961
2^{-9}	r0=0.000000	r0=0.000048	r0=0.003855	r0=0.021867
	r1=0.000001	r1=0.000008	r1=0.000335	r1=0.004149
	p=-5.619925	p=2.529604	p=3.526566	p=2.397955

Çizelge 4.2. $\varepsilon = 2^{-w}$ ($w = 3, 4, \dots, 9$) değeri için düzgün şebeke noktalarında elde edilen yakınsama oranı

ε	N=128	N=256	N=512	N=1024
2^{-3}	r0=0.000518	r0=0.000129	r0=0.000032	r0=0.000008
	r1=0.000129	r1=0.000032	r1=0.000008	r1=0.000002
	p=2.008042	p=2.002020	p=2.000501	p=2.000123
2^{-4}	r0=0.002103	r0=0.000516	r0=0.000128	r0=0.000032
	r1=0.000515	r1=0.000128	r1=0.000032	r1=0.000008
	p=2.030544	p=2.007474	p=2.001877	p=2.105377
2^{-5}	r0=0.008854	r0=0.002081	r0=0.000510	r0=0.00012
	r1=0.002061	r1=0.000510	r1=0.000127	r1=0.000032
	p=2.102758	p=2.029223	p=2.007438	p=2.001832
2^{-6}	r0=0.043257	r0=0.008806	r0=0.002068	r0=0.000507
	r1=0.008739	r1=0.002041	r1=0.000507	r1=0.000126
	p=2.307372	p=2.109253	p=2.0282252	p=2.007188
2^{-7}	r0=0.284069	r0=0.042822	r0=0.008779	r0=0.002060
	r1=0.041776	r1=0.008680	r1=0.002030	r1=0.000505
	p=2.76549	p=2.302650	p=2.112542	p=2.027695
2^{-8}	r0=0.194140	r0=0.282245	r0=0.042593	r0=0.008765
	r1=0.162543	r1=0.041696	r1=0.008648	r1=0.002028
	p=0.256272	p=2.758954	p=2.300122	p=2.111332
2^{-9}	r0=0.039837	r0=0.192606	r0=0.281309	r0=0.42476
	r1=0.016639	r1=0.161665	r1=0.041655	r1=0.008632
	p=1.259558	p=0.252646	p=2.755580	p=2.298817



Şekil 4.1. $\varepsilon = 2^{-8}$ ve $N = 128$ için düzgün şebekede çözümün grafiği.

Benzer biçimde düzgün olmayan şebekede (4.29)-(4.30) fark şemasını düzenlersek $y_i^{(0)} = -2$, $i = 1, 2, \dots, N - 1$ başlangıç iterasyonu olmak üzere test problemi

$$A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} = -F_i, i = 1, \dots, N - 1$$

$$y_0 = y_N = 0$$

biçiminde düzenlenir.

$$A_i = B_i = \varepsilon^2 h^{-2} \theta_i,$$

$$C_i = 2\varepsilon^2 \theta_i \theta_i + a_i - \frac{\partial f(x_i, y_i^{(n-1)})}{\partial u}$$

$$F_i = f(x_i, y_i^{(n-1)}) - y_i^{(n-1)} \frac{\partial f(x_i, y_i^{(n-1)})}{\partial u}$$

biçiminde yazılır. Yine kovma algoritması ve iterasyon birlikte uygulanmaktadır. Bu katsayılar için de kovma algoritması $C_i - \alpha_i A_i \neq 0$ olmak üzere

$$\alpha_{i+1} = \frac{B_i}{C_i - \alpha_i A_i}, \alpha_1 = 0, i = 1, \dots, N - 1$$

$$\beta_{i+1} = \frac{F_i + A_i \beta_i}{C_i - \alpha_i A_i}, \beta_1 = 0, i = 1, \dots, N - 1$$

ve

$$y_i = y_{i+1} \alpha_{i+1} + \beta_{i+1}, i = N - 1, \dots, 0$$

bağıntılarıyla belirlenir (Samarskii, 2001).

Ele alınan test problemin analitik çözümü bilinmediğinden mutlak hatalar

$$r_1 = \max_{0 < i < N} \left| y_h^i - y_{\frac{h}{2}}^i \right|, r_2 = \max_{0 < i < N} \left| y_{\frac{h}{2}}^i - y_{\frac{h}{4}}^i \right|$$

şeklinde belirlenir. Düzgün yakınsama oranı aşağıdaki gibi hesaplanır:

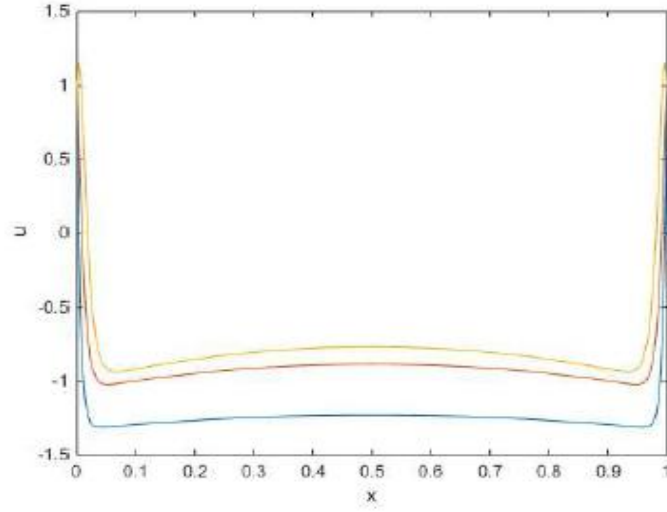
$$p = \frac{\ln \frac{r_1}{r_2}}{\ln 2}$$

(Kopteva, 2004). Buna göre elde edilen sonuçlar tablolarda sunulmaktadır.

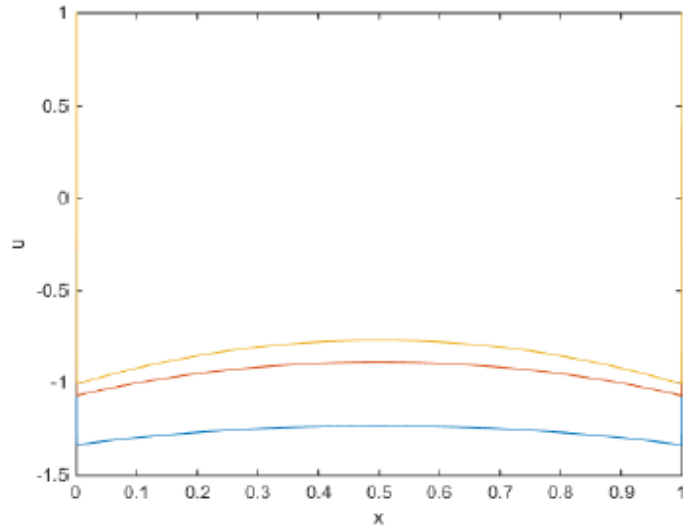
(4.34) test probleminin çözümünden elde edilen sonuçlar Bakhvalov şebeke üzerinde hesaplanmış, hatalar ve p yakınsaklık oranları Çizelge 4.3.'de verilmiştir.

Çizelge 4.3. $\varepsilon = 10^{-w}$ ($w = 3,4,6,8,10,12,14$) değeri için Bakhvalov şebeke noktalarında elde edilen yakınsama oranı

ε	N=16	N=32	N=64
10^{-3}	r0= 0.4608460780	r0= 0.0827088576	r0= 0.0151326039
	r1= 0.0827088576	r1= 0.0151326039	r1= 0.0034731980
	p= 2.4781712264	p= 2.4503815822	p= 2.1233236785
10^{-4}	r0= 0.4600185073	r0= 0.0828541680	r0= 0.0151693456
	r1= 0.0828541680	r1= 0.0151693456	r1= 0.0034754966
	p= 2.4730457247	p= 2.4494154204	p= 2.1258677953
10^{-6}	r0= 0.4599425154	r0= 0.0828700910	r0= 0.0151733752
	r1= 0.0828700910	r1= 0.0151733752	r1= 0.0034757450
	p= 2.4725301498	p= 2.4493094646	p= 2.1261479129
10^{-8}	r0= 0.4599502486	r0= 0.0828702699	r0= 0.0151734155
	r1= 0.0828702699	r1= 0.0151734155	r1= 0.0034757474
	p= 2.4725512921	p= 2.4493087470	p= 2.1261507161
10^{-10}	r0= 0.4599553522	r0= 0.0828706110	r0= 0.0151735008
	r1= 0.0828706110	r1= 0.0151735008	r1= 0.0034757482
	p= 2.4725613614	p= 2.4493065794	p= 2.1261585107
10^{-12}	r0= 0.4599641741	r0= 0.0828702899	r0= 0.0151734160
	r1= 0.0828702899	r1= 0.0151734160	r1= 0.0034765455
	p= 2.4725946218	p= 2.4493090554	p= 2.1258195359
10^{-14}	r0= 0.4612312273	r0= 0.0828702951	r0= 0.0151734160
	r1= 0.0828702951	r1= 0.0151734160	r1= 0.0034757475
	p= 2.4765632273	p= 2.4493091457	p= 2.1261507465



Şekil 4.2. $\varepsilon = 10^{-3}$ ve $N = 64$ için Bakhvalov şebekede çözümün grafiği.



Şekil 4.3. $\varepsilon = 10^{-4}$ ve $N = 64$ için Shishkin şebekede çözümün grafiği.

(4.34) test probleminin çözümünde elde edilen sonuçlar Shishkin şebeke üzerinde hesaplanmış, hatalar ve p yakınsaklık oranları Çizelge 4.4.'de verilmiştir.

Çizelge 4.4. $\varepsilon = 10^{-w}$ ($w = 3,4,6,8,10,12,14$) değeri için Shishkin şebeke

noktalarında elde edilen yakınsama oranı

ε	N=16	N=32	N=64
10^{-3}	r0= 0.0216037514	r0= 0.0422691789	r0= 0.1475952452
	r1= 0.0035870910	r1= 0.0076255811	r1=0.1591666848
	p= 2.5903955986	p= 2.4706869058	p=-0.1088921507
10^{-4}	r0= 0.0132464055	r0= 0.0368300697	r0= 0.0091170701
	r1= 0.0014274923	r1= 0.0065623973	r1=0.0986958956
	p= 3.2140460390	p= 2.4885892759	p=-3.4363479116
10^{-6}	r0= 0.0062771390	r0= 0.0214728273	r0= 0.0421738984
	r1= 0.0003200986	r1= 0.0035596226	r1= 0.0075570504
	p= 4.2935190702	p= 2.5927159691	p= 2.4804552353
10^{-8}	r0= 0.0036119976	r0= 0.0132352785	r0= 0.0368162077
	r1= 0.0001046047	r1= 0.0014259097	r1= 0.0065602069
	p= 5.1097772213	p= 3.2144340138	p= 2.4885278066
10^{-10}	r0= 0.0023361333	r0= 0.0088347786	r0= 0.0281637192
	r1= 0.0000433557	r1= 0.0006377722	r1= 0.0055225521
	p= 5.7517575416	p= 3.7920808392	p= 2.3504308308
10^{-12}	r0= 0.0016316189	r0= 0.0062770583	r0= 0.0214726953
	r1= 0.0000210224	r1= 0.0003200930	r1= 0.0035595949
	p= 6.2782358095	p= 4.2935255964	p= 2.5927183080
10^{-14}	r0= 0.0012030695	r0= 0.0046758817	r0= 0.0166790231
	r1= 0.0000113872	r1= 0.0001763746	r1= 0.0022349591
	p= 6.7231683005	p= 4.7285238550	p= 2.8997144443

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada fen bilimlerinde ve mühendislikte geçen bazı süreçler için singüler pertürbe özellikli lineer olmayan reaksiyon-difüzyon probleminin nümerik çözümleri incelendi. Bu problemler için belirli kesinliğe sahip fark şemalarının kurulması, bu fark şemalarının kararlılığının incelenmesi, hatalarının değerlendirilip ε 'a göre düzgün yakınsaklığı ile yakınsaklık oranının belirlenmesi amaçlandı.

Singüler pertürbe özellikli lineer olmayan reaksiyon-difüzyon problemleri, en yüksek mertebeden türevli terimde küçük parametrenin bulunduğu problemler olarak bilinir. Bu nedenle bu tür problemlerin çözümü tanım bölgesinde farklı davranışlar gösterir. Yani ince geçiş katmanlarında çözüm hızlı ve diğer yerlerde düzenli ve yavaş değişir. Böylece singüler pertürbe özellikli problemlerin çözümünde ciddi zorluklar ortaya çıkmaktadır. Bu özellikler nümerik çözümde de kendisini göstermektedir. Dolayısıyla klasik nümerik yöntemlerle kurulan algoritmalar sınır tabakalarında çözümün türevleri sınırsız olduğundan kararsız olmaktadır. Bu nedenle ε 'a göre düzgün yakınsak nümerik metotların kurulması büyük önem arz etmektedir.

Maksimum prensibi ve karşılaştırma teoremleri kullanılarak

$$-\varepsilon^2 u'' + a(t)u(t) = f(t, u)$$

$$u(0) = A, u(l) = B$$

lineer olmayan reaksiyon-difüzyon problemi için belli asimptotik değerlendirmeler alınmıştır. Bu değerlendirmelerden çözümün başlangıç verilerine bağlı olduğu gösterilmiştir.

Singüler pertürbe özellikli lineer olmayan reaksiyon-difüzyon problemleri için kalan terimi integral biçiminde olan ve baz fonksiyonu içeren interpolasyon kuadratur kuralları uygulanarak fark şemaları kurulmuştur.

Düzgün şebekede üstel katsayılı fark şeması, adaptif ve parçalı düzgün şebekede ise klasik fark şemaları ile elde edilen fark problemlerinin hata değerlendirilmeleri yapılmıştır. Nümerik algorithmada lineer olmayan terimden dolayı Newton-Raphson metodundan yararlanılmıştır. Şekil 4.1., Şekil 4.2. ve Şekil 4.3. göz önüne alındığında uygulanan iterasyon metodunun kesin çözüme ε 'a göre düzgün yakınsak olduğu görülmüştür.

Sonuç olarak yaklaşık çözümün, kesin çözüme ayırık maksimum normda ε 'a göre düzgün yakınsak olduğu ispatlanmış ve yaklaşık çözümün yakınsama oranı belirlenmiştir.

Ele alınan problemin nümerik çözümlerine ait alınan teorik sonuçlar, örnek üzerinde test edilmiştir. Elde edilen nümerik sonuçların teorik sonuçları desteklediği çizelgelerden görülmektedir. Bu nümerik sonuçlar, kurulan fark şemaları için MATLAB kodlarıyla elde edilmiştir.

Bu çalışmada sunulan nümerik algoritmaların, incelenen problemle ilgili daha ileri çalışmalara ilham kaynağı olacağı ümit edilmektedir.



KAYNAKLAR

- Ainsworth, M., Babuska, I., 1999. Reliable and robust a posteriori error estimation for singularly perturbed reaction-diffusion problems. *SIAM Journal Numerical Analysis*, **36**(2): 331-353.
- Amiraliyev, G., Duru H., 2002. *Nümerik Analiz*, Pegem Yayıncılık.
- Auchmuty, J.F.G., Nicolis, G., 1976. *Bulletin of Mathematical Biology*. Bifurcation analysis of reaction-diffusion equations, **8**:325-350.
- Bakhvalov, A.S., 1969. On the optimization of the methods for solving boundary value problems in the presence of a boundary layer, *Zh. Vychisl. Mat. Fiz.*, **9**(4):841-859.
- Boglaev, I.P., 1984. Approximate solution of a nonlinear boundary value problem with a small parameter for the highest-order differential. *U.S.S.R. Comput. Maths. Math. Phys.*, **24**(6):30-35.
- Boglaev, I., Hardy, M., 2004. *Monotone Finite Difference Domain Decomposition Algorithms and Applications to Nonlinear Singularly Perturbed Reaction-Diffusion Problems*. Institute of Fundamental Sciences, Massey University.
- Britton, N.F., 1986. *Reaction-Diffusion Equations and Their Applications to Biology*, School of Mathematics, Bath University, Academic Press, London..
- Cantrell, R.S., Cosner, C., 2003. *Spatial Ecology via Reaction-Diffusion Equations*, Department of Mathematics, University of Miami, U.S.A.
- Chaplain, M.A.J., 1995. Reaction-diffusion prepatterning and its potential role in tumour invasion. *Journal of Biological Systems*, **3**(4):929-936.
- Fife, P.C., 1979. *Mathematical Aspects of Reacting and Diffusing Systems*, Springer.
- Gatenby, R.A., Gawlinski E.T., 1996. *A Reaction-Diffusion Model Cancer Research*, **56**: 5745-5753.
- Grindrod, P., 1991. *Patterns and Waves: The Theory And Applications of Reaction-Diffusion Equations*, Clarendon Press.
- Harrison, L.G., 1993. *Kinetic Theory of Living Pattern*, Cambridge University Press.
- Holmes, E.E. et al, 1994. Partial Differential Equations in Ecology: *Spatial Interactions and Population Dynamics*. *Ecology* **75**(1):17-29.
- Kellog, R.B., Kopteva, N., 2010. A singularly perturbed semilinear reaction-diffusion problem in a polygonal domain. *Journal Differential Equations*, **248**: 184- 208.
- Kerner, B.S., Osipov, V.V., 1994. *Autosolitons: A New Approach to Problems of Self-Organization and Turbulence*, Kluwer Academic Publishers.
- Kopteva, N., Stynes, M., 2004. Numerical analysis of a singularly perturbed nonlinear reaction-diffusion problem with multiple solutions. *Applied Numerical Mathematics* **51**: 273-288.
- Linß, T., Madden, N., 2009. Layer adapted meshes for a linear system of coupled singularly perturbed reaction-diffusion problems. *IMA Journal of Numerical Analysis* **29**: 109-125.
- Mei, Z., 2000. *Numerical Bifurcation Analysis for Reaction-Diffusion Equations*, Springer, Berlin.

- Meinhardt, H., 1982. *Models of Biological Pattern Formation*, Academic Press, London.
- Mikhailov, A.S., 1990. *Foundations of Synergetics I, Distributed Active Systems*, Springer.
- Murray, J.D., 1986. On the spatial spread of rabies among foxes. *Proc. R. Soc. Lond. B*, **229**(1225): 111-150.
- Murray, J.D., 2013. Mathematical Biology, *Springer Science&Business Media*, **17**: 436-450.
- Philips, G.M., 2003. *Interpolation and Approximation by Polynomials*. Mathematical Institute University of St. Andrews, Scotland.
- Schatz, A.H., Wahlbin, L.B., 1983. On the finite element method for singularly perturbed reaction-diffusion problems in two and one dimensions. *Mathematics of Computation*, **40**(161): 47-89.
- Samarskii, A.A., 2001. *The Theory of Difference Schemes*. Moscow M.V. Lomonosov State University, Russia.
- Sherratt, J.A., Murray, J.D., 1990. Models of epidermal wound healing. *Proc. R. Soc. Lond. B*, **241**:29-36.
- Sherratt, J.A., Nowak, M.A., 1992. Oncogenes, anti-oncogenes and the Immune response to cancer: A mathematical model. *Proc. R. Soc. Lond. B*, **248**(1323): 261-271.
- Shishkin, G.I., 1983. A difference scheme on a non-uniform mesh fro a differential equation with a small parametere in the highest derivative, *Z. vycsil. mat. i mat. fiz.*, **23**(3): 609-619.
- Skellam, J.G., 1991. Random Dispersal in Theoretical Populations. *Bulletin of Mathematical Biology*, **53**($\frac{1}{2}$): 135-165.
- Smoller, J., 1994. *Shock Waves and Reaction Diffusion Equations*, Springer.
- Turing, A.M., 1952. The chemical basis of morphogenesis, University of Manchester, Biological Sciences, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series B*, **237**(641): 37-72.
- Verfürth, R., 1998. Robust a posteriori error estimators for a singularly perturbed reaction-diffusion equation. *Numer. Math.* **78**: 479-493.
- Vulanovic, R., 1982. An exponentially fitted scheme on a non-uniform mesh, *zb. rad. Prir.-mat. Fak. Univ.u Novom Sadu, Ser. Mat.*, **12**: 205-215.
- Vulanovic, R., 1983. On a numerical solution of a type singularly perturbed boundary value problem by using a special discretization mesh, *zb. rad. Prir.-mat. Fak. u Novom Sadu, Ser. Mat.*
- Vulanovic, R., Teofanov L., 2010. A uniform method for semilinear reaction-diffusion problems with a boundary turning point. *Numer. Algor.*, **54**: 431-444.
- Vulanovic, R., Teofanov L., 2013. A modification of the Shishkin discretization mesh for one-dimensional reaction-diffusion problems. *Applied Mathematics and Computation* **220**: 104-116.
- Wang, Y., Cao, J., 2007. Synchronization of a class of delayed neural networks with reaction-diffusion terms. *Physics Letters A* **369**: 201-211.

EKLER

Ek-1: Düzgün Şebekede Üstel Katsayılı Fark Şeması için MATLAB Programı

```
clc, clear all
```

```
x0=input('x0= ');
```

```
xN=input('xN= ');
```

```
eps=input('epsilon= ');
```

```
y0=input('y0= ');
```

```
yN=input('yN= ');
```

```
N=input('Adim sayisi = ');
```

```
M=input('Iterasyon sayisi = ');
```

```
a=@(x) (1-x).*x;
```

```
f=@(x,u) u+u^2;
```

```
ft=@(x,u) 2*u+1+x-x;
```

```
l=1;
```

```
while l<=3
```

```
h=(xN-x0)/N;
```

```
ro=h/(eps);
```

```
teta=@(x) (a(x).*ro^2.*exp(ro.*sqrt(a(x)))./...
```

```
(1-exp(ro.*sqrt(a(x))))).^2);
```

```
xx=x0:h:xN;
```

```
w(1)=y0;
```

```
w(N+1)=yN;
```

```
v(1)=w(1);
```

```
v(N+1)=w(N+1);
```

```
for k=2:N
```

```
w(k)=-2;
```

```
end
```

```

for j=2:M+1
    alfa(2)=0;beta(2)=y0;
    for k=2:N
        A(k)=-eps^2./h^2.*teta(xx(k));
        B(k)=A(k);
        C(k)=-2*eps^2./h^2.*teta(xx(k))-feval(a,xx(k))+feval(ft,xx(k),w(k));
        E(k)=-feval(f,xx(k),w(k))+w(k).*feval(ft,xx(k),w(k));
        alfa(k+1)=B(k)./(C(k)-alfa(k).*A(k));
        beta(k+1)=(E(k)+beta(k).*A(k))./(C(k)-alfa(k).*A(k));
    end

for k=N:-1:2
    v(k)=v(k+1).*alfa(k+1)+beta(k+1);
end
w=v;
if l==1
    plot(xx,w)
    hold on
    end
end
switch l
    case 1
        y1=w;
    case 2
        y2=w;
    case 3
        y3=w;
end
N=2*N;
l=l+1;
end
N=N/8;

```

```

r0=abs(y1(1)-y2(1));
for i=2:N+1
    r0=max(r0,abs(y1(i)-y2(2*i-1)));
end
r1=abs(y2(1)-y3(1));
for i=3:2:2*N+1
    r1=max(r1,abs(y2(i)-y3(2*i-1)));
end
p=reallog(r0/r1)/reallog(2);
fprintf('N = %4.0f eps=%4.4f r0=%13.6f r1=%13.6f p=%13.6f\n',N,eps,r0,r1,p);
hold on
xlabel('x')
ylabel('u')

```

Ek-2: Bakhvalov Şebekede Fark Şeması için MATLAB Programı

```

clc, clear all
x0=input('x0= ');
xN=input('xN= ');
eps=input('epsilon= ');
y0=input('y0= ');
yN=input('yN= ');
N=input('Adim sayisi = ');
M=input('Iterasyon sayisi = ');
a=@(x) x.*(1-x);
f=@(x,u) u+u^2;
ft=@(x,u) 2*u+1+x-x;
alpha=0.2032;

l=1;
while l<=3
    sigma1=min((xN-x0)/4,abs((eps*reallog(eps))/alpha));
    sigma2=xN-sigma1;

```

```

h1=(sigma2-sigma1)/(N/2);
xx(1)=x0;
xx(N+1)=xN;
for i=2:N+1
    if ((i<=N/4+1)&&(sigma1<(xN-x0)/4))
        xx(i)=-eps*reallog(1-(1-eps)*4*(i-1)/N)/alpha;
    end
if (i<=N/4+1)&&(sigma1==(xN-x0)/4);
    xx(i)=-eps*reallog(1-(1-exp(-alpha*xN/(2*eps))))*4*(i-1)/N)/alpha;
end
if ((i>N/4+1)&&(i<=3*N/4+1))
    xx(i)=sigma1+h1*(i-1-N/4);
end
if ((i>3*N/4+1)&&(i<=N))
    xx(i)=xN-xx(N+2-i);
end
end
end
for i=2:N+1
    h(i)=xx(i)-xx(i-1);
end
for i=2:N
    h2(i)=(h(i+1)+h(i))/2;
end
w(1)=y0;
v(1)=w(1);
w(N+1)=yN;
v(N+1)=w(N+1);
for k=2:N
    w(k)=-2;
end
for j=2:M+1

```

```

alfa(2)=0; beta(2)=y0;
for k=2:N
    A(k)=-eps^2./(h(k).*h2(k));
    B(k)=-eps^2./(h(k+1).*h2(k));
    C(k)=-eps^2.*((1./h(k+1)+1./h(k))./h2(k))-feval(a,xx(k))...
    +feval(ft,xx(k),w(k));
    E(k)=-feval(f,xx(k),w(k))+w(k).*feval(ft,xx(k),w(k));
    alfa(k+1)=B(k)./(C(k)-alfa(k).*A(k));
    beta(k+1)=(E(k)+beta(k).*A(k))./(C(k)-alfa(k).*A(k));
end
for k=N:-1:2
    v(k)=v(k+1).*alfa(k+1)+beta(k+1);
end
w=v;
if l==1
    plot(xx,w)
    hold on
end
end
switch l
case 1
    y1=w;
case 2
    y2=w;
case 3
    y3=w;
end
N=2*N;
l=l+1;
end
N=N/8;
r0=abs(y1(1)-y2(1));

```

```

for i=2:N+1
    r0=max(r0,abs(y1(i)-y2(2*i-1)));
end
r1=abs(y2(1)-y3(1));
for i=3:2:2*N+1
    r1=max(r1,abs(y2(i)-y3(2*i-1)));
end
p=reallog(r0/r1)/reallog(2);
xlabel('x')
ylabel('u')

```

Ek-3: Shishkin Şebekede Fark Şeması için MATLAB Programı

```

clc, clear all
x0=input('x0= ');
xN=input('xN= ');
eps=input('epsilon= ');
y0=input('y0= ');
yN=input('yN= ');
N=input('Adim sayisi = ');
M=input('Iterasyon sayisi = ');
% x0=0;
% xN=1;
% eps=0.0001;
% y0=1;
% yN=1;
% M=3;
% N=64;
a=@(x) x.*(1-x);
f=@(x,u) u+u^2;
ft=@(x,u) 2*u+1+x-x;
alpha=0.202;
l=1;

```

```

while l<=3
    sigma1=min((xN-x0)/4,abs((eps*reallog(eps))/alpha));
    sigma2=xN-sigma1;
    h11=(sigma1-x0)/(N/4);
    h21=(sigma2-sigma1)/(N/2);
    xx(1)=x0;
    xx(N+1)=xN;
    for i=2:N
        if (i<=N/4+1)
            xx(i)=x0+(i-1)*h11;
        end
        if ((i>N/4+1)&&(i<3*N/4+1))
            xx(i)=sigma1+(i-1-(N/4))*h21;
        end
        if ((i>=3*N/4+1)&&(sigma2>3*(xN-x0)/4))
            xx(i)=sigma2+(i-1-(3*N/4))*h11;
        end
    end

    for i=2:N+1
        h(i)=xx(i)-xx(i-1);
    end
    for i=2:N
        h2(i)=(h(i+1)+h(i))/2;
    end

    w(1)=y0;
    w(N+1)=yN;
    v(1)=w(1);
    v(N+1)=w(N+1);
    for k=2:N
        w(k)=y0+(yN-y0)/(xN-x0)*h(k);
    end

```

```

w(k)=-2;
end
for j=2:M+1
    alfa(2)=0; beta(2)=y0;
for k=2:N
    A(k)=-eps^2./(h(k).*h2(k));
    B(k)=-eps^2./(h(k+1).*h2(k));
    C(k)=-eps^2.*((1./h(k+1)+1./h(k))./h2(k))-feval(a,xx(k))...
    +feval(ft,xx(k),w(k));
    E(k)=-feval(f,xx(k),w(k))+w(k).*feval(ft,xx(k),w(k));
    alfa(k+1)=B(k)./(C(k)-alfa(k).*A(k));
    beta(k+1)=(E(k)+beta(k).*A(k))./(C(k)-alfa(k).*A(k));
end
alfa'
for k=N:-1:2
    v(k)=v(k+1).*alfa(k+1)+beta(k+1);
end
w=v;
if l==1
    plot(xx,w)
    hold on
end
end
switch l
    case 1
        y1=w;
    case 2
        y2=w;
    case 3
        y3=w;
end
N=2*N;

```

```
l=l+1;
end
N=N/8;

r0=abs(y1(1)-y2(1));
for i=2:N+1
    r0=max(r0,abs(y1(i)-y2(2*i-1)));
end
r1=abs(y2(1)-y3(1));
for i=3:2:2*N+1
    r1=max(r1,abs(y2(i)-y3(2*i-1)));
end
p=reallog(r0/r1)/reallog(2);

fprintf('r0=% 13.10f r1=% 13.10f p=% 13.10f\n',r0,r1,p);
xlabel('x')
ylabel('u')
```



ÖZ GEÇMİŞ

1991 yılında İstanbul'un Fatih ilçesinde doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini İstanbul'da tamamladı. Yüksek öğrenimine 2009 yılında Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik Öğretmenliği Bölümü'nde başladı ve 2014 yılında bölüm ikincisi olarak mezun oldu. Aynı yıl Milli Eğitim Bakanlığı'na bağlı Erciş-Selvihan Kız Anadolu İmam Hatip Lisesi'ne Matematik Öğretmeni olarak atandı. 2015 yılında Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans öğrenimine başladı.

T.C
VAN YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
LİSANSÜSTÜ TEZ ORJİNALLİK RAPORU

Tarih: 25/07/2018

Tez Başlığı / Konusu: **Singüler Pertürbe Özellikli Lineer Olmayan Reaksiyon-Difüzyon Problemlerin**

Nümerik Çözümleri

Yukarıda başlığı/konusu belirlenen tez çalışmamın Kapak sayfası, Giriş, Ana bölümler ve Sonuç bölümlerinden oluşan toplam 53 sayfalık kısmına ilişkin, 25/07/2018 tarihinde şahsım/tez danışmanım tarafından TURNITIN intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtreleme uygulanarak alınmış olan orijinallik raporuna göre, tezimin benzerlik oranı % 7 (yedi) dir.

Uygulanan filtreler aşağıda verilmiştir:

- Kabul ve onay sayfası hariç,
- Teşekkür hariç,
- İçindekiler hariç,
- Simge ve kısaltmalar hariç,
- Gereç ve yöntemler hariç,
- Kaynakça hariç,
- Alıntılar hariç,
- Tezden çıkan yayınlar hariç,
- 7 kelimededen daha az örtüşme içeren metin kısımları hariç (Limit inatch size to 7 words)

Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Lisansüstü Tez Orijinallik Raporu Alınması ve Kullanılmasına İlişkin Yönergeyi inceledim ve bu yönergede belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edileceği muhtemel durumda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve yukarıda vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini bilgilerinize arz ederim.


25.07.2018
Tarih ve İmza

Adı Soyadı: Baransel GÜNEŞ

Öğrenci No: 159102019

Anabilim Dalı: Matematik

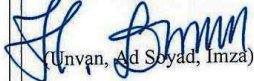
Programı: Matematik

Statüsü: Y. Lisans

Doktora

DANIŞMAN ONAYI
UYGUNDUR

Doç. Dr. Hakkı DURU


(Unvan, Ad Soyad, İmza)

ENSTİTÜ ONAYI
UYGUNDUR

(Unvan, Ad Soyad, İmza)