T.C.
MANİSA CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI

İKİNCİ MERTEBEDEN LİNEER OLMAYAN DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMLERİ İÇİN LEGENDRE SIRALAMA YÖNTEMİ

Tuğçe ÇINARDALI

Danışman
Doç. Dr. Duygu DÖNMEZ DEMİR

MANİSA-2018

TUĞÇE ÇINARDALI

İKİNCİ MERTEBEDEN LİNEER OLMAYAN DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMLERİ İÇİN LEGENDRE SIRALAMA YÖNTEMİ

2018

TEZ ONAYI

Tuğçe ÇINARDALI tarafından hazırlanan "İkinci mertebeden lineer olmayan diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümleri için Legendre sıralama yöntemi" adlı tez çalışması 16/07/2018 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri önünde Manisa Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak başarı ile savunulmuştur.

Danışman	**Doç. Dr. Duygu DÖNMEZ DEMİR** Manisa Celal Bayar Üniversitesi	....
Jüri Üyesi	**Prof. Dr. Mehmet SEZER** Manisa Celal Bayar Üniversitesi	....
Jüri Üyesi	**Dr. Öğr. Üyesi Refet POLAT** Yaşar Üniversitesi	....

TAAHHÜTNAME

Bu tezin Manisa Celal Bayar Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde, akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek tezde yer aldığını beyan ederim.

Tuğçe ÇINARDALI

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\boldsymbol{P_n(x)}$	Legendre Polinomları
$\boldsymbol{a_n}$	Legendre Polinomlarının Katsayıları
$\boldsymbol{x_i}$	Sıralama Noktaları
$\boldsymbol{Q_{pq}}$	Lineer Olmayan Legendre Polinomlarının Katsayıları
$\mathbf{D}$	Geçiş Matrisi
$\mathbf{N}$	Kesme Sınırı
$[\mathbf{W};\mathbf{V}:\mathbf{G}]$	Lineer Olmayan Diferansiyel Denklem için Arttırılmış Matris
$[\mathbf{U};\mathbf{O}^*:\boldsymbol{\lambda}]$	Lineer Olmayan Diferansiyel Denklemler için Koşul Matrisi
$\boldsymbol{E(x_i)}$	x_i Noktası için Hata

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

TABLO DİZİNİ

TEŞEKKÜR

Çalışmamın her aşamasında bana destek olan, bilgi ve deneyimleri ile yol gösteren danışman hocam Sayın Doç. Dr. Duygu DÖNMEZ DEMİR'e, bilgi ve tecrübesi ile lisansüstü öğrenimim boyunca tecrübeleri ile beni aydınlatan ve desteğini hiç eksik etmeyen sevgili hocam Sayın Prof. Dr. Mehmet SEZER'e, çalışmalarım sırasında manevi desteğini her zaman hissettiğim değerli öğretmen arkadaşım Havva İNCEDOĞAN' a, öğrenim hayatım boyunca beni maddi, manevi destekleyen ve hep yanımda olan aileme teşekkür ederim.

Tuğçe ÇINARDALI
Manisa, 2018

ÖZET

Yüksek Lisans

İkinci Mertebeden Lineer Olmayan Diferansiyel Denklemlerin Yaklaşık Çözümleri İçin Legendre Sıralama Yöntemi

Tuğçe ÇINARDALI

Manisa Celal Bayar Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Duygu DÖNMEZ DEMİR

Bu çalışma dört bölümden meydana gelmektedir. Birinci bölümde birinci ve ikinci tip Legendre polinomları ve özellikleri takdim edilmiştir. İkinci bölümde, temel matris bağıntıları ve ikinci mertebeden lineer olmayan diferansiyel denklemlerin çözümü için Legendre sıralama yöntemine yer verilmiştir. Üçüncü bölümde yöntemin etkinliğini göstermek için bazı uygulamalar göz önüne alınmıştır. Ayrıca elde edilen yaklaşık çözümlerin tam çözümle karşılaştırması tablo ve grafiklerle gösterilmiş, hata analizleri yapılmıştır. Son bölümde ise sonuç ve öneriler yer almaktadır.

Anahtar Kelimeler: Legendre polinomları ve serileri, Lineer olmayan diferansiyel denklemler, Legendre sıralama yöntemi, Rezidüel hata.

2018, 46 sayfa

ABSTRACT

M.Sc.

The Legendre Matrix-Collocation Method for the Approximate Solutions of Second Order Nonlinear Differential Equations

Tuğçe ÇINARDALI

Manisa Celal BayarUniversity
The Institute of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Duygu DÖNMEZ DEMİR

This study consist of four section. In the first chapter, the first and second type Legendre polynomials and their properties are introduced. In the second section, the fundamental matrix relations and the Legendre collocation method for the solution of the second order non-linear differential equations are given. In the third chapter, some applications are considered to show efficiency of the method. Furthermore, the comparison of the approximate solutions with the exact solution is indicated by the tables and graphs and performed their error analysis. In the last section, the conclusion and suggestions are given.

Keywords: Legendre polynomials and series, Nonlinear ordinary differential equations, Legendre collocation method, Residual error.

2018, 46 pages

1. GİRİŞ

Fiziksel problemlerin, matematiksel modelleri adi veya kısmi diferansiyel, integral veya integro-diferansiyel denklem olarak karşımıza çıkmaktadır ve bu tip denklemlerin bazıları analitik olarak çözülebilirken, çoğunun tam(analitik) çözümünün bulunması oldukça zor ya da mümkün değildir. Çözümü zor veya imkansız olan lineer olmayan diferansiyel denklemler kimyasal reaksiyonlar, kütle transfer problemleri ve sinyal yayılımları gibi birçok fiziksel olayın matematiksel modellemesinde ortaya çıkmaktadır [1, 2, 3, 4]. Bu denklemler, lineer olmayan terimlerin varlığı ile karakterize edilmiş olup, mekanik, fizik ve mühendislik uygulamalarında sıkça ortaya çıkmaktadır.

Son yıllarda ekonomi ve ekoloji alanlarında da etkin bir şekilde rol oynamaktadır[5,4,6-8]. Lineer olmayan diferansiyel denklemlerin analitik veya nümerik çözümleri bir çok yazar tarafından çalışılmıştır [10-15]. Ele alınan lineer olmayan problemin çok değişkene bağlı olması, denklemin lineer olmayan bileşenin tipi ve denklemin katsayılarının singülerliği (tekilliği) bu tip denklemlerin çözümlerinin bulunmasını zorlaştırır. Tüm bu zorlukların üstesinden gelebilmek için yaklaşık çözümlerin bulunmasına ihtiyaç duyulmuştur. Birinci ve ikinci mertebeden lineer olmayan diferansiyel denklemler gibi analitik olarak çözmenin mümkün olmadığı durumlarda, genel çözüm için bilinen genel bir yöntem olmayıp, bu tip denklemlerin özel durumlarının yaklaşık ve tam çözümlerinin bulunmasında bir takım yöntemler mevcuttur [9,17].

Bu çalışmada, nümerik tekniklerden biri olan Legendre sıralama yöntemi kullanılarak, yeter derecede doğrulukla yaklaşık çözümler ve varsa polinom şeklinde tam çözümlerinin bulunabildiği gösterilmiştir. Ortogonal polinomlar, yaygın olarak matematik uygulamaları, matematiksel fizik, mühendislik ve bilgisayar biliminde kullanılmaktadır. Bu polinomlardan Legendre polinomları, matematik, istatistik ve diğer bilim dallarında önemli rol oynamaktadır [1,2,18-23]. Geliştirilen Legendre sıralama yöntemi, önce lineer olmayan diferansiyel denklemdeki bilinmeyen fonksiyon ve türevlerinin sonlu Legendre seri açılımları ile bilinen katsayı fonksiyonlarının sıralama noktalarındaki değerlerine bağlı matris formlarının elde edilmesi, ardından bunların yerine koyulup sadeleştirilerek denklemin Legendre katsayılı bir matris denklemine dönüştürülmesinden ibarettir. Böylece, bilinmeyen Legendre katsayılı lineer olmayan cebirsel bir sisteme karşılık gelen sonuç matris denklemi çözülebilir ve katsayılar yaklaşık olarak bulunabilir [24,25].

2. GENEL BİLGİLER

2.1. Legendre Polinomları

Legendre fonksiyonları,

$$\left(1-x^2\right)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+n\ \left(n+1\right)y=0 \tag{2.1}$$

ile tanımlı, Legendre diferansiyel denklemi adı verilen diferansiyel denkleminin çözümlerinden ortaya çıkmaktadır. $n=0,1,2,\ldots$olması durumunda (2.1) genel çözümü ise

$$y=c_1P_n(x)+c_2Q_n(x) \tag{2.2}$$

biçimindedir. (2.2) ifadesinde $P_n(x)$ birinci tip Legendre polinomları, $Q_n(x)$ ikinci tip Legendre polinomları olarak tanımlanmakta olup, $Q_n(x)$, $x=\mp 1$ ilesınırlandırılmıştır$\left[23\right]$. (2.1) denklemindeki n sabiti ile küresel koordinatlardaki kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünde, küresel simetri içeren mekanik, quantum mekaniği, elektromanyetik teori, ısı v.b. problemlerinde karşılaşılmaktadır.

(2.1) denklemi aşağıdaki şekilde tekrar yazılırsa,

$$y''-\frac{2x}{1-x^2}\ y'+\frac{n(n+1)}{1-x^2}y=0$$

bulunur. Bu denklemdeki $x=\mp 1$ noktaları düzgün tekil noktalar olup,

$s=\dfrac{1}{x}$ dönüşümü altında, (2.1) denklemi

$$\frac{d^2y}{ds^2}+\left[\frac{2}{s}-\frac{2}{s(s^2-1)}\right]\frac{dy}{ds}+\frac{n(n+1)}{s^2(s^2-1)}y=0$$

formunda yazılır. Böylece bu noktalar dışında,

$$P_1(x)=-\frac{2x}{1-x^2}\quad \text{ve}\quad P_2(x)=\frac{n(n+1)}{1-x^2}$$

fonksiyonları analitik fonksiyonlardır. $x=0$ noktası komşuluğunda, $|x|<1$ aralığında (2.1) denkleminin

$$y=\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

şeklinde bir seri çözümü bulunur. Bu ifadenin türevleri alınırsa,

$$y'=\sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1}$$

$$y''=\sum_{k=2}^{\infty} k\left(k-1\right) c_k x^{k-2}$$

elde edilir. y, y' ve y'' değerleri (2.1) denkleminde yerine koyulursa,

$$\left(1-x^2\right)\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2}-2x\sum_{k=1}^{\infty} kc_k x^{k-1}+n(n+1)\sum_{k=1}^{\infty} c_k x^k=0$$

veya

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2}-\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k}-\sum_{k=1}^{\infty} 2kc_k x^k+\sum_{k=0}^{\infty} n(n+1)c_k x^k=0$$

bulunur. İndisler tekrar düzenlendiğinde,

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)c_{k+2}x^k-\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k}-\sum_{k=1}^{\infty} 2kc_k x^k+\sum_{k=0}^{\infty} n(n+1)c_k x^k=0$$

veya

$$\begin{aligned}&2\mathrm{c}_2+n\left(n+1\right)c_0+\left[3.2c_3+\left(n+2\right)\left(n-1\right)c_1\right]x\\&+\sum_{k=2}^{\infty}\left\{(k+2)(k+1)c_{k+2}+\left[n(n+1)-k(k+1)\right]c_k\right\}\, x^k=0\end{aligned}$$

ifadesine ulaşılır. Buradan, rekürans bağıntıları

(i) $2c_2 + n(n+1)c_0 = 0$

(ii) $3.2c_3 + (n+2)(n-1)c_1 = 0$

(iii) $(k+2)(k+1)c_{k+2} + (n+k+1)(n-k)c_k = 0 \quad , \quad k \geq 2$

biçiminde elde edilir. $c_0 \neq 0$ olmak üzere, ilk iki bağıntıdan,

$$c_2 = \frac{-n(n+1)}{2!}c_0 \quad \text{ve} \quad c_3 = \frac{-(n+2)(n-1)}{3!}c_1$$

bulunur. Üçüncü bağıntı ise

$$c_{k+2} = -\frac{(n-k)(n+k+1)}{(k+2)(k+1)}c_k \quad , \quad k \geq 2$$

rekürans formülünü verir. Geri kalan katsayılar rekürans bağıntısı yardımıyla c_0, c_1 keyfi sabitleri cinsinden bulunur. Yani

$$k = 2 \text{ için } c_4 = -\frac{(n-2)(n+3)}{3.4}c_2 = (-1)^2 \frac{\left[(n-2)n\right]\left[(n+1)(n+3)\right]}{1.2.3.4}c_0$$

$$k = 3 \text{ için } c_5 = -\frac{(n-3)(n+4)}{4.5}c_3 = (-1)^2 \frac{\left[(n-3)(n-1)\right]\left[(n+2)(n+4)\right]}{2.3.4.5}c_1$$

$$k = 4 \text{ için } c_6 = -\frac{(n-4)(n+5)}{5.6}c_4 = (-1)^3 \frac{\left[(n-4)(n-2)n\right]\left[(n+1)(n+3)(n+5)\right]}{1.2.3.4.5.6}c_0$$

$$k = 5 \text{ için } c_7 = -\frac{(n-5)(n+6)}{6.7}c_5$$

$$= (-1)^3 \frac{\left[(n-5)(n-3)(n-1)\right]\left[(n+2)(n+4)(n+6)\right]}{2.3.4.5.6.7}c_1$$

$$\vdots$$

olur. Bütün bu katsayılar

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \ldots + c_k x^k + \ldots$$

seri çözümünde yerine koyulursa, $|x|<1$ aralığında Legendre denkleminin genel çözümü

$$y = c_0\left[1-\frac{n(n+1)}{2!}x^2+\frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!}x^4-\frac{(n-4)(n-2)n(n+1)(n+3)(n+5)}{6!}x^6+...\right]$$

$$+c_1\left[x-\frac{(n-1)(n+2)}{3!}x^3+\frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}x^5-...\right] \tag{2.3}$$

bulunur. Böylece lineer bağımsız çözümlerin her biri daha genel olarak ifade edilirse,

$$y_1(x)=1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\left[(n-2k+2)...(n-2)n\right]\left[(n+1)(n+3)...(n+2k-1)\right]}{(2n)!}x^{2k}$$

$$y_2(x)=x+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\left[(n-2k+1)...(n-3)(n-1)\right]\left[(n+2)(n+4)...(n+2k)\right]}{(2n+1)!}x^{2k+1}$$

olmak üzere, Legendre denkleminin genel çözümü

$$y(x)=c_0y_1(x)+c_1\mathrm{y}_2(x)$$

biçiminde elde edilir. $y_1(x)$ ve $y_2(x)$ lineer bağımsız çözümlerinde görülen serilerin her biri $|x|<1$ aralığında yakınsak, $|x|>1$ aralığında ise ıraksaktır. Gauss testinden, $x=\pm1$ noktalarında da bu seriler ıraksaktır. Bu zorluğun üstesinden gelebilmek için, ayrılma sabiti n'i bir tamsayıya eşit olacak şekilde alarak, sonsuz seriler bir polinoma dönüştürülebilir.

2.1.1. Birinci Tip Legendre Polinomları

(2.1) Legendre diferansiyel denkleminin lineer bağımsız çözümlerinden biri olan birinci tip Legendre polinomları

$$P_n(x)=\frac{(2n-1)(2n-3)-1}{n!}\left\{x^n-\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}x^{n-2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4(2n-1)(2n-3)}x^{n-4}-...\right\} \tag{2.4}$$

ile tanımlanır. $\mathrm{P}_n(x)$, n. dereceden bir polinom olup, bazı Legendre polinomları

$$P_0(x)=1$$

$$P_1(x)=x$$

$$P_2(x)=\frac{1}{2}\left(3x^2-1\right)$$

$$P_3(x)=\frac{1}{2}\left(5x^3-3x\right)$$

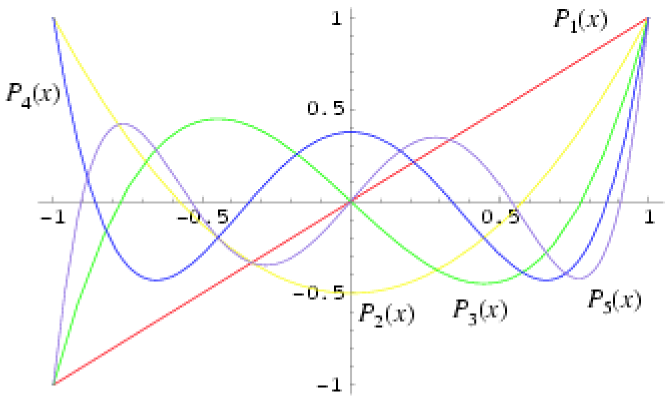
$$P_4(x)=\frac{1}{8}\left(35x^4-30x^2+3\right)$$

$$P_5(x)=\frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x)$$

biçiminde verilir. Ayrıca x ’in kuvvetleri bu polinomlar cinsinden ifade edilirse,

$$x^0=P_0(x)$$
$$x^1=P_1(x)$$
$$x^2=\frac{1}{3}\left[P_0(x)+2P_2(x)\right]$$
$$x^3=\frac{1}{5}\left[3P_1(x)+2P_3(x)\right]$$
$$x^4=\frac{1}{35}\left[7P_0(x)+20P_2(x)+8P_4(x)\right]$$
$$x^5=\frac{1}{63}\left[27P_1(x)+28P_3(x)+8P_5(x)\right]$$

formunda elde edilir.



Şekil 2.1. Birinci tip Legendre polinomlarının grafiği

Her bir durumda $P_n(1)=1$, $P_n(-1)=(-1)^n$'dir. Legendre polinomları için Rodrigues formulü

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

ile ifade edilebilir [8].

2.1.2. Birinci Tip Legendre Polinomları için Üreten Fonksiyon

Legendre polinomlarının özelliklerini elde edebilmek için kullanılan birinci tip Legendre polinomları için üreten fonksiyon

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n$$

ile tanımlanır [5].

2.1.3. Birinci Tip Legendre Polinomlarının Ortogonalliği

Legendre polinomları $-1<x<1$ aralığında,

$$\int_{-1}^{1}P_m(x)P_n(x)dx=0 \qquad m\neq n$$

$$\int_{-1}^{1}[P_n(x)]^2\,dx=\frac{2}{2n+1} \qquad m=n$$

olması durumunda ortogonaldir [32].

2.1.4. Birinci Tip Legendre Polinomlarının Serileri

$f(x)$ ve $f'(x)$ parçalı sürekli ise, $-1 < x < 1$ aralığında $f(x)$'in her süreklilik noktasında

$$A_n(x) = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)dx$$

olmak üzere,

$$f(x) = A_0P_0(x) + A_1P_1(x) + A_2P_2(x) + ... = \sum_{n=0}^{\infty} A_nP_n(x) \qquad (2.5)$$

formuna sahip bir Legendre seri açılımı vardır. (2.5) ifadesi herhangi bir süreksizlik noktasında $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0]$ değerine yakınsar [23].

2.1.5. İkinci Tip Legendre Polinomları

(2.1) Legendre diferansiyel denkleminin lineer bağımsız çözümlerinden biri olan ikinci tip Legendre polinomları $|x|<1$ ise,

n tek iken;

$$Q_n(x) = \frac{(-1)^{n/2}2^n\left[\left(\frac{n}{2}\right)!\right]^2}{n!}\left\{x - \frac{(n-1)(n+2)}{3!}x^3 + \frac{(n-1)(n-3)(n+2)(n+4)}{5!}x^5 - ...\right\}$$

n çift iken;

$$Q_n(x) = \frac{(-1)^{(n+1)/2}2^{n-1}[((n-1)/2)!]^2}{1.3.5...n}\left\{1 - \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-2)(n+1)(n+3)}{4!}x^4 - ....\right\}$$

biçiminde ifade edilir.

2.1.6. Eşlenik LegendrePolinomları

Eşlenik Legendre diferansiyel denklemi

$$(1-x^2)y''-2xy'+\left[n(n+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]y=0 \qquad (1.6)$$

biçiminde tanımlanır. $m=0$ olması durumunda, bu denklem (2.1) Legendre diferansiyel denklemine indirgenir. (2.6) denkleminin çözümleri eşlenik Legendre polinomları olarak adlandırılır. m ve n negatif olmayan tamsayılar ise bu durumda (2.6) denkleminin genel çözümü; birinci ve ikinci tip Legendre polinomları,

$$P_n^m(x)=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m}{dx^m}P_n(x)$$

$$Q_n^m(x)=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m}{dx^m}Q_n(x)$$

ile tanımlı olmak üzere,

$$y=c_1P_n^m(x)+c_2Q_n^m(x)$$

biçiminde verilir.

2.1.7. Eşlenik Legendre Polinomlarının Ortogonalliği

Birinci tip eşlenik Legendre polinomları $-1<x<1$ aralığında,

$$\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_n^m(x)\mathrm{P}_k^m(x)dx=0 \qquad , \quad n\neq k$$

$$\int_{-1}^{1}\left[\mathrm{P}_n^m(x)\right]^2dx=\frac{2}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}, \quad n=k$$

olması durumunda ortogonaldir. Bu özellik kullanılarak, $f(x)$ fonksiyonu

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}A_kP_k^m(x) \quad f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}A_kP_k^m(x)$$

formunda seriye açılabilir$[23]$.

2.1.8. Legendre Polinomlarının Özellikleri

$P_n(x)$ Legendre polinomları ikinci mertebeden, lineer,

$$(1-x^2)y''(x)-2xy'(x)+n\ (n+1)\ y(x)=0$$

homojen diferansiyel denklemini sağlamaktadır. Diğer taraftan $P_n(x)$ Legendre polinomları $-1<x<1$ ve $n\geq 0$ için aşağıdaki özelliklere sahiptir.

i) $P_n(x)=\dfrac{1}{2^n(n!)}\dfrac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n\ ,\ n=0,1,2,...$

ii) $P_n(x)=\dfrac{1}{2^n}\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\begin{pmatrix}n\\k\end{pmatrix}^2(1-x)^k(1+x)^{n-k}\ ,\ n=0,1,2,...$

iii) $P_n(x)=\dfrac{1}{2^n}\sum\limits_{k=0}^{n}\begin{pmatrix}n\\k\end{pmatrix}^2(x+1)^k(x-1)^{n-k}\ ,\ n=0,1,2,...$

iv) $P_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}2^{-k}\begin{pmatrix}n\\k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-n-1\\k\end{pmatrix}(1-x)^k\ ,\ n=0,1,2,...$

v) $P_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^k\begin{pmatrix}n\\k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n+k\\n\end{pmatrix}(1-x)^k\ ,\ n=0,1,2,...$

vi) $P_n(x)=\dfrac{1}{2^n}\sum\limits_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^k\begin{pmatrix}n\\k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2n-2k\\n\end{pmatrix}x^{n-2k}\ ,\ n=0,1,2,....$

$$\left[\frac{n}{2}\right]=\begin{cases}\dfrac{n}{2} & ,\ n\ çift\\[2mm] \dfrac{n-1}{2} & ,\ n\ tek\end{cases} \tag{2.7}$$

n tek ise $P_n(x)$ tek fonksiyon, n çift ise $P_n(x)$ çift fonksiyondur. Legendre polinomuna ait diğer özellikler ise aşağıdaki gibidir:

$\bullet P_n(1)=1, \quad n=0,1,2,\ldots$

$\bullet P_n(-x)=(-1)^n P_n(x), \quad n=1,2,3,\ldots$

$\bullet (1-2xt+t^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n, \quad |t|\le 1$

$$\bullet \int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\,dx = \begin{cases} 0 &, \quad m\ne n \\ \dfrac{2}{2n+1} &, \quad m=n \end{cases}$$

$$\bullet \frac{d^n}{dx^n} P_n(x) = \frac{(2n)!}{2^n(n!)}, \qquad n=0,1,2,\ldots$$

$$\bullet \int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)\,dx = \frac{1}{2^n(n!)}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\left[\frac{d^n}{dx^n} f(x)\right] dx$$

$$\bullet P_n(0) = \begin{cases} 0 &, \quad n \text{ tek} \\ \dfrac{(-1)^{\frac{n}{2}}\dbinom{n}{\frac{n}{2}}}{2^n}, & \quad n \text{ çift} \end{cases}$$

$$\bullet \int_{-1}^{1} \frac{P_n(x)}{\sqrt{1-x}}\,dx = \frac{2\sqrt{2}}{2n+1}, \quad n=0,1,2,\ldots$$

$$\bullet \int_{-1}^{1} \frac{P_n(x)}{\sqrt{1+x}}\,dx = (-1)^n\frac{2\sqrt{2}}{2n+1}, \qquad n=0,1,2,\ldots$$

$$\bullet \int_{-1}^{1} \frac{x\,P_n(x)}{\sqrt{1-x}^{\,2}}\,dx = 2\int_{0}^{1} \frac{x\,P_n(x)}{\sqrt{1-x}^{\,2}}\,dx$$

$$\bullet \int_{-1}^{1} (x+a)^m P_n(x)\,dx = \begin{cases} 0 &, \quad m=0,1,2,\ldots,n-1 \\ \dfrac{2^{n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}, & \quad m=n \end{cases}$$

(a herhangi bir reel sayı)

$$\bullet\int_0^1 P_n(x)dx = \begin{cases} \left(-\dfrac{1}{4}\right)^{\frac{n-1}{2}} \dfrac{\dbinom{n-1}{n-1/2}}{n+1} & , \; n = 1,3,5... \\ 0 & , \; n = 2,4,6,... \end{cases}$$

2.1.9.Rekürans (Tekrarlama) Bağıntıları

Üreten fonksiyon Legendre polinomlarının rekürans bağıntılarını elde etmede oldukça faydalıdır. Bu bağıntılar, x cinsinden özdeşlikler olup, trigonometrik özdeşlikler gibi ispatlarda ve türevlerde işimizi kolaylaştırması amacı ile kullanılır. Bazı Legendre polinomlarına ilişkin rekürans bağıntıları ise,

$$\bullet nP_n(x) = (2n-1)xP_{n-1}(x) - (n-1)P_{n-2}(x)$$

$$\bullet xP_n'(x) - P_{n-1}'(x) = nP_n(x)$$

$$\bullet P_n'(x) - xP_{n-1}'(x) = nP_{n-1}(x)$$

$$\bullet (1-x^2)P_n'(x) = nP_{n-1}(x) - nxP_n(x)$$

$$\bullet (2n+1)P_n(x) = P_{n+1}'(x) - P_{n-1}'(x) \tag{1.8}$$

$$\bullet P_{n+1}'(x) = (n+1)P_n(x) + xP_n'(x)$$

$$\bullet (1-x^2)P_n'(x) = (n+1)xP_n(x) - (n+1)P_{n+1}(x)$$

$$\bullet P_n'(x) - 2xP_{n-1}'(x) + P_{n-2}'(x) = P_{n-1}$$

$$\bullet P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1}xP_n(x) - \frac{n}{n+1}P_{n-1}(x)$$

biçiminde verilir.

3. MATERYAL VE YÖNTEMLER

İKİNCİ MERTEBEDEN LİNEER OLMAYAN DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ İÇİN LEGENDRE SIRALAMA YÖNTEMİ

Bu çalışmada, sıralama noktalarına dayalı matris metodu yardımıyla elde edilen Legendre polinomları ve türevlerinin matris bağıntılarına dayalı nümerik teknik uygulanmıştır [14-16,19-21,24].

3.1. Problemin Tanıtılması

İkinci mertebeden lineer olmayan diferansiyel denklem

$$\sum_{k=0}^{m} F_k(x) y^{(k)}(x) + \sum_{p=0}^{2}\sum_{q=0}^{p} Q_{pq}(x) y^{(p)}(x) y^{(q)}(x) = g(x) \tag{3.1}$$

ve karışık koşulları

$$\sum_{k=0}^{m-1}\left[a_{kj} y^{(k)}(-1) + b_{kj} y^{(k)}(0) + c_{kj} y^{(k)}(1)\right] = \lambda j \quad , \quad j = 0,1,\ldots,m-1 \tag{3.2}$$

olarak göz önüne alalım. Buna göre, yaklaşık çözüm Legendre polinomları cinsinden kesilmiş bir Legendre serisi formunda

$$y(x) \cong y_N(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n P_n(x) \quad , \quad -1 \le x \le 1 \tag{3.3}$$

biçiminde bulunacaktır. Bu çalışmada (2.1) denkleminin $n = 2$ için

$$F_0(x)y(x) + F_1(x)y'(x) + F_2(x)y''(x) + Q_{00}(x)y^2(x) + Q_{10}y'(x)y(x) + Q_{11}(x)\left[\left(y'(x)\right)\right]^2$$
$$+Q_{20}(x)y''(x)y(x) + Q_{21}(x)y''(x)y'(x) + Q_{22}(x)\left[\left(y''(x)\right)\right]^2 = g(x) \tag{3.4}$$

formundaki ikinci mertebeden denklemi çözeceğiz. Burada belirlenmesi gereken Legendre katsayıları ve $P_n(x)$ $(n=0,1,2,\ldots,N)$ Legendre polinomları

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^k \binom{n}{k}\binom{2n-2k}{n} x^{n-2k} \quad ; \quad \left[\frac{n}{2}\right] = \begin{cases} \dfrac{n}{2} \; , & n \text{ çift} \\ \dfrac{n-1}{2} \; , & n \text{ tek} \end{cases} \tag{3.5}$$

ile tanımlanır

3.2. Temel Matris Bağıntıları

Bu kesimde, lineer olmayan (3.1) diferansiyel denkleminin her teriminin matris formu elde edilecektir. Bunun için ilk olarak (3.3) ile verilen Legendre polinom yaklaşımı matris formunda yazılırsa,

$$y(x)=\mathbf{P}(x)\,\mathbf{A} \tag{3.6}$$

$$\mathbf{P}(x)=\left[P_0(x)\ P_1(x)\ \ldots\ P_N(x)\right]$$

$$\mathbf{A}=\left[\ a_0\ a_1\ \ldots\ a_N\ \right]^{\mathbf{T}}$$

bulunur. Böylece, (2.8) deki tekrarlama formülleri kullanılarak $n=0,1,2,\ldots,N$ için $\mathbf{P}(x)$ ve $\mathbf{P}^{(k)}(x)$ matrisleri arasındaki bağıntı

$$\mathbf{P}^{(k)}(x)=\mathbf{P}(x)\boldsymbol{\Pi}^{k}\ \ ,\ k=0,1,\ldots,m \tag{3.7}$$

formunda elde edilir. Buradaki $\boldsymbol{\Pi}$ ifadesi,

n çift iken,

$$\boldsymbol{\Pi}^{\mathbf{T}}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 3 & 0 & 7 & \cdots & 2N-3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 0 & \cdots & 0 & 2N-1 & 0 \end{bmatrix}_{(N+1)\times(N+1)}$$

n tek iken,

$$\boldsymbol{\Pi}^{\mathbf{T}}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 5 & 0 & \cdots & 2N-3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 7 & \cdots & 0 & 2N-1 & 0 \end{bmatrix}_{(N+1)\times(N+1)}$$

şeklindetanımlanır. (3.6) ve (3.7) ifadeleri kullanılarak,

$$y^{(k)}\left(x\right)\cong y_N^{(k)}(x)=\mathbf{P}^{(k)}(x)\mathbf{A}=\mathbf{P}(x)\boldsymbol{\Pi}^{k}\,\mathbf{A};\ k=0,1,\ldots,m \tag{3.8}$$

matris ilişkisi bulunur. Diğer yandan, (2.5) deki Legendre polinomları,

$$\mathbf{P}(x) = \left[\mathbf{P}_0(x) \quad \mathbf{P}_1(x) \quad \ldots \quad \mathbf{P}_N(x)\right]$$
$$\mathbf{X}(x) = \left[1 \quad x \quad \ldots \quad x^N\right]$$

olmaküzere,

$$\mathbf{P}(x) = \mathbf{X}(x)\mathbf{D} \tag{3.9}$$

matris formunda yazılabilir[19,21]. Burada matrisler, $\mathbf{D}$ geçiş matrisi olmak üzere,

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{(-1)^0}{2^0}\binom{0}{0}\binom{0}{0} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{(-1)^0}{2^1}\binom{1}{0}\binom{2}{1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{(-1)^{\frac{N-1}{2}}}{2^{N-1}}\binom{N-1}{\frac{N-1}{2}} & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \frac{(-1)^{\frac{N-1}{2}}}{2^N}\binom{N}{\frac{N-1}{2}}\binom{N+1}{N} & \cdots & \frac{(-1)^0}{2^N}\binom{N}{0}\binom{2N}{N} \end{bmatrix}$$

ile tanımlanır. Diğer yandan, (3.6)-(3.8) işlemine benzer hesaplamalar yapılarak, (3.1) deki lineer olmayan ifadenin matris formları aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\left(y^{(0)}(x)\right)^2 = \mathbf{P}(x)\bar{\mathbf{P}}(x)\bar{\mathbf{A}} \tag{3.10}$$

$$y^{(1)}(x)y^{(0)}(x) = \mathbf{P}(x)\mathbf{\Pi}\bar{\mathbf{P}}(x)\bar{\mathbf{A}} \tag{3.11}$$

$$\left(y^{(1)}(x)\right)^2 = \mathbf{P}(x)\mathbf{\Pi}\bar{\mathbf{P}}(x)\bar{\mathbf{\Pi}}\,\bar{\mathbf{A}} \tag{3.12}$$

$$y^{(2)}(x)y^{(1)}(x) = \mathbf{P}(x)\mathbf{\Pi}^2\bar{\mathbf{P}}(x)\bar{\mathbf{\Pi}}\,\bar{\mathbf{A}} \tag{3.13}$$

$$y^{(2)}(x)y^{(0)}(x) = \mathbf{P}(x)\mathbf{\Pi}^2\bar{\mathbf{P}}(x)\bar{\mathbf{A}} \tag{3.14}$$

$$\left(y^{(2)}(x)\right)^2 = \mathbf{P}(x)\mathbf{\Pi}^2\bar{\mathbf{P}}(x)\bar{\mathbf{\Pi}}^2\,\bar{\mathbf{A}} \tag{3.15}$$

Burada,

$$y^{(0)}(x) = y(x),\ \ y^{(1)} = y'(x),\ \ y^{(2)}(x) = y''(x)$$

ifadeleri, matris formda

$$\bar{\mathbf{P}}(x)=diag\left[\mathbf{P}(x)\quad \mathbf{P}(x)\quad ...\quad \mathbf{P}(x)\right]_{(N+1)^2 x(N+1)^2}$$

$$\bar{\mathbf{\Pi}}^2=diag\left[\mathbf{\Pi}^2\quad \mathbf{\Pi}^2\quad ...\quad \mathbf{\Pi}^2\right]_{(N+1)x(N+1)^2}$$

$$\mathbf{A}=\left[a_0\quad a_1\quad ...\quad a_N\right]^T$$

$$\bar{\mathbf{A}}=\left[a_0\mathbf{A}\quad a_1\mathbf{A}\quad ...\quad a_N\mathbf{A}\right]$$

biçimindedir. Buna göre, $[-1,1]$ aralığı için sıralama noktaları,

$$x_i=-1+\frac{2}{N}i\,;\;\; i=0,1,...,N \tag{3.16}$$

ile verilir. (3.16) sıralama noktaları, (3.1) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\sum_{k=0}^{2}F_k(x_i)y^{(k)}(x_i)+\sum_{p=o}^{2}\sum_{q=0}^{p}Q_{pq}(x_i)y^{(p)}(x_i)y^{(q)}(x_i)=g(x_i)$$

veya

$$\mathbf{F}^k=diag\left[\mathbf{F}^k(x_0)\quad \mathbf{F}^k(x_1)\quad ...\quad \mathbf{F}^k(x_N)\right]$$

$$\mathbf{Y}^{(k)}=\begin{bmatrix} y^{(k)}(x_0)\\ y^{(k)}(x_1)\\ \vdots\\ y^{(k)}(x_N)\end{bmatrix},\quad \mathbf{Y}^{(p,q)}=\begin{bmatrix} y^{(p)}(x_0)y^{(q)}(x_0)\\ y^{(p)}(x_1)y^{(q)}(x_1)\\ \vdots\\ y^{(p)}(x_N)y^{(q)}(x_N)\end{bmatrix},\quad \mathbf{G}=\begin{bmatrix} g(x_0)\\ g(x_1)\\ \vdots\\ g(x_N)\end{bmatrix}$$

olmak üzere,

$$\sum_{k=0}^{2}F_kY^{(k)}+\sum_{p=o}^{2}\sum_{q=o}^{p}Q_{pq}Y^{(p,q)}=\mathbf{G} \tag{3.17}$$

matris denklemine ulaşılır. (3.16) sıralama noktaları, $n=0,1,...,N$ için (3.8) denkleminde yerine yazılırsa,

$$y^{(k)}(x_i)\cong y_N{}^{(k)}(x_i)=\mathbf{P}(x_i)\mathbf{\Pi}^k\mathbf{A}$$

sistemi ya da

$$\mathbf{Y}^{(k)}=\mathbf{P}\,\mathbf{\Pi}^k\mathbf{A} \tag{3.18}$$

matris bağıntısı elde edilir. Burada $\mathbf{P}$ matrisi

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}\mathbf{P}(x_0)\\ \mathbf{P}(x_1)\\ \vdots\\ \mathbf{P}(x_N)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{P}_0(x_0) & \mathbf{P}_1(x_0) & \dots & \mathbf{P}_N(x_0)\\ \mathbf{P}_0(x_1) & \mathbf{P}_1(x_1) & \dots & \mathbf{P}_N(x_1)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \mathbf{P}_0(x_N) & \mathbf{P}_1(x_N) & \dots & \mathbf{P}_N(x_N)\end{bmatrix},$$

şeklinde olup, (3.17) ifadesindeki lineer olmayan kısım

$$\sum_{p=0}^{2}\sum_{q=0}^{p}Q_{pq}Y^{(p,q)}=Q_{00}Y^{(0,0)}+Q_{10}Y^{(1,0)}+Q_{11}Y^{(1,1)}+Q_{20}Y^{(2,0)}+Q_{21}Y^{(2,1)}+Q_{22}Y^{(2,2)}$$

biçiminde yazılabilir. (3.16) daki sıralama noktaları (3.10) daki matris bağıntısında yerine yazılırsa,

$$\mathbf{Y}^{(0,0)}=\mathbf{P}^{*}{}_{0,0}\bar{\mathbf{A}}\ \ \mathbf{Y}^{(1,0)}=\mathbf{P}^{*}{}_{1,0}\bar{\mathbf{A}}\ \ \mathbf{Y}^{(1,1)}=\mathbf{P}^{*}{}_{1,1}\bar{\mathbf{A}}$$

$$\mathbf{Y}^{(2,0)}=\mathbf{P}^{*}{}_{2,0}\bar{\mathbf{A}}\ \ \mathbf{Y}^{(2,1)}=\mathbf{P}^{*}{}_{2,1}\bar{\mathbf{A}}\ \ \mathbf{Y}^{(2,2)}=P^{*}{}_{2,2}\bar{\mathbf{A}}$$

matrisleri bulunur. Burada ilgili matrisler

$$\mathbf{P}^{*}{}_{0,0}=\begin{bmatrix}\mathbf{P}(x_0)\bar{\mathbf{P}}(x_0)\\ \mathbf{P}(x_1)\bar{\mathbf{P}}(x_1)\\ \vdots\\ \mathbf{P}(x_N)\bar{\mathbf{P}}(x_N)\end{bmatrix},\ \mathbf{P}^{*}{}_{1,0}=\begin{bmatrix}\mathbf{P}(x_0)\mathbf{\Pi}\bar{\mathbf{P}}(x_0)\\ \mathbf{P}(x_1)\mathbf{\Pi}\bar{\mathbf{P}}(x_1)\\ \vdots\\ \mathbf{P}(x_N)\mathbf{\Pi}\bar{\mathbf{P}}(x_N)\end{bmatrix},\ \mathbf{P}^{*}{}_{1,1}=\begin{bmatrix}\mathbf{P}(x_0)\mathbf{\Pi}\bar{\mathbf{P}}(x_0)\bar{\mathbf{\Pi}}\\ \mathbf{P}(x_1)\mathbf{\Pi}\bar{\mathbf{P}}(x_1)\bar{\mathbf{\Pi}}\\ \vdots\\ \mathbf{P}(x_N)\mathbf{\Pi}\bar{\mathbf{P}}(x_N)\bar{\mathbf{\Pi}}\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P}^{*}{}_{2,0}=\begin{bmatrix}\mathbf{P}(x_0)\mathbf{\Pi}^2\bar{\mathbf{P}}(x_0)\\ \mathbf{P}(x_1)\mathbf{\Pi}^2\bar{\mathbf{P}}(x_1)\\ \vdots\\ \mathbf{P}(x_N)\mathbf{\Pi}^2\bar{\mathbf{P}}(x_N)\end{bmatrix},\ \mathbf{P}^{*}{}_{2,1}=\begin{bmatrix}\mathbf{P}(x_0)\mathbf{\Pi}^2\bar{\mathbf{P}}(x_0)\bar{\mathbf{\Pi}}\\ \mathbf{P}(x_1)\mathbf{\Pi}^2\bar{\mathbf{P}}(x_1)\bar{\mathbf{\Pi}}\\ \vdots\\ \mathbf{P}(x_N)\mathbf{\Pi}^2\bar{\mathbf{P}}(x_N)\bar{\mathbf{\Pi}}\end{bmatrix},\ \mathbf{P}^{*}{}_{2,2}=\begin{bmatrix}\mathbf{P}(x_0)\mathbf{\Pi}^2\bar{\mathbf{P}}(x_0)\bar{\mathbf{\Pi}}^2\\ \mathbf{P}(x_1)\mathbf{\Pi}^2\bar{\mathbf{P}}(x_1)\bar{\mathbf{\Pi}}^2\\ \vdots\\ \mathbf{P}(x_N)\mathbf{\Pi}^2\bar{\mathbf{P}}(x_N)\bar{\mathbf{\Pi}}^2\end{bmatrix}.$$

formundadır. (3.19)

3.3. Sıralama Noktalarına Dayalı Matris Bağıntıları

(3.18) ve (3.19) daki matris bağıntıları (3.17) denkleminde yerine koyulursa,

$$\sum_{k=0}^{m}\mathbf{F}_k\mathbf{P}\mathbf{\Pi}^k\mathbf{A}+\sum_{p=o}^{2}\sum_{q=o}^{p}\mathbf{Q}_{pq}\mathbf{P}^{*}_{p,q}\bar{\mathbf{A}}=\mathbf{G}$$

temel matris denklemi ya da

$$\mathbf{W}=\left[w_{ij}\right]=\sum_{k=0}^{m}\mathbf{F}_k\mathbf{P}\mathbf{\Pi}^k\ \ ;\ i,j=0,1,\dots,N$$

$$\mathbf{V}=\left[v_{mn}\right]=\sum_{p=0}^{2}\sum_{q=0}^{p}\mathbf{Q}_{pq}\mathbf{P}^{*}{}_{p,q}\ \ ;\ \ \begin{matrix}m=0,1,\dots,N\\ n=0,1,\dots,\left(N+1\right)^2\end{matrix}$$

olmak üzere,

$$\mathbf{WA}+\mathbf{V}\bar{\mathbf{A}}=\mathbf{G} \tag{3.20}$$

kompakt formunu elde edilirken, (3.20) deki matris denkleminin arttırılmış formu,

$$\left[\mathbf{W};\mathbf{V}:\mathbf{G}\right] \tag{3.21}$$

olup, daha açık bir şekilde

$$\left[\mathbf{W};\mathbf{V}:\mathbf{G}\right]=\begin{bmatrix} w_{00} & w_{01} & \ldots & w_{0N} & ; & v_{00} & v_{01} & \ldots & v_{0(N+1)^2} & : & g(x_0) \\ w_{10} & w_{11} & \ldots & w_{1N} & ; & v_{10} & v_{11} & \ldots & v_{1N+1)^2} & : & g(x_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & ; & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & : & \ldots \\ w_{N0} & w_{N1} & \ldots & w_{NN} & ; & v_{N0} & v_{N1} & \ldots & v_{NN+1)^2} & : & g(x_N) \end{bmatrix}$$

formıunda yazılabilir. Ayrıca (3.8) temel matris bağıntısı kullanılarak, (3.2) karışık koşullarına karşılık gelen temel matris denklemi

$$\sum_{k=0}^{m-1}\left(a_{kj}\mathbf{P}(-1)+b_{kj}\mathbf{P}(0)+c_{kj}\mathbf{P}(1)\right)\mathbf{\Pi}^k\,\mathbf{A}=\boldsymbol{\lambda}_j \quad ; \quad j=0,1,\ldots,N$$

veya

$$\mathbf{UA}+\mathbf{O}^*\bar{\mathbf{A}}=\boldsymbol{\lambda}=\left[\mathbf{U};\mathbf{O}^*:\boldsymbol{\lambda}\right] \tag{3.22}$$

olacak şekilde,

$$\left[\mathbf{U};\mathbf{O}^*:\boldsymbol{\lambda}\right]=\begin{bmatrix} u_{00} & u_{01} & \ldots & u_{0N} & ; & 0 & 0 & \ldots & 0 & : & \lambda_0 \\ u_{10} & u_{11} & \ldots & u_{1N} & ; & 0 & 0 & \ldots & 0 & : & \lambda \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & ; & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & : & \ldots \\ u_{N0} & u_{N1} & \ldots & u_{NN} & ; & 0 & 0 & \ldots & 0 & : & \lambda_{m-1} \end{bmatrix}$$

biçiminde elde edilir. Böylece,

$$\mathbf{U}=\begin{bmatrix} u_{j0} & u_{j1} & \ldots & u_{jN} \end{bmatrix}; \; j=0,1,\ldots,m-1$$

$$=\left[\sum_{k=0}^{m-1}\left(a_{kj}\mathbf{P}(-1)+b_{kj}\mathbf{P}(0)+c_{kj}\mathbf{P}(1)\right)\mathbf{\Pi}^k\right]$$

$$\boldsymbol{\lambda}=\left[\lambda_0 \quad \lambda_1 \quad \ldots \quad \lambda_{m-1}\right]^T$$

$$\mathbf{0}^* = [0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0] \quad \text{(0 sıfır matrisi)}$$

olmak üzere, 2. mertebeden denklemler kullanılacağı için yukarıdaki koşullarda $n=2$ alınmalıdır.

Çözümü Legendre polinomu cinsinden (3.3) koşullarına göre elde etmek için, (3.21) arttırılmış matrisin son satırları silinerek ve yerine koşulla ilgili (3.22) satır matrisinin konulmasıyla elde edilen yeni arttırılmış matris

$$\left[\tilde{\mathbf{W}};\tilde{\mathbf{V}}:\tilde{\mathbf{G}}\right] = \left[\begin{array}{cccc;{2pt/2pt}cccc|c} w_{00} & w_{01} & \ldots & w_{0N} & v_{00} & v_{01} & \ldots & v_{0(N+1)^2} & g(x_0) \\ w_{10} & w_{11} & \ldots & w_{1N} & v_{10} & v_{11} & \ldots & v_{1(N+1)^2} & g(x_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ w_{N-m,0} & w_{N-m,1} & \ldots & w_{N-m,N} & v_{N-m,0} & v_{N-m,1} & \ldots & v_{N-m,(N+1)^2} & g(x_{N-m}) \\ u_{00} & u_{01} & \ldots & u_{0N} & 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_0 \\ u_{10} & u_{11} & \ldots & u_{1N} & 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{m-1,0} & u_{m-1,1} & \ldots & u_{m-1,N} & 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_{m-1} \end{array}\right] \tag{3.23}$$

olup, buna karşılık gelen matris denklemi

$$\tilde{\mathbf{W}}\mathbf{A}^* + \tilde{\mathbf{V}}\overline{\mathbf{A}}^* = \tilde{\mathbf{G}}$$

formundadır. (3.23) matris denklemine karşılık gelen lineer olmayan cebirsel denklem sisteminden, bilinmeyen $\{a_0, a_1, \ldots, a_N\}$ Legendre katsayıları belirlenir. Böylece (3.23) Legendre kesilmiş seri formu

$$y_N(x) = \mathbf{P}(x)\mathbf{A}$$

ya da (3.9) dan

$$y_N(x) = \mathbf{X}(x)\mathbf{D}\mathbf{A}\,.$$

olarak bulunur.

3.4. Çözümün Doğruluğu ve Rezidüel Hata Hesaplaması

Elde edilen çözümün doğruluğunu kontrol etmek için Rezidüel hata tahmini dikkate alınır. (3.1) kesilmiş Legendre serisi (3.2) denkleminin yaklaşık çözümü olduğundan türevleri (3.2)'de yerine konulduğunda denklem yaklaşık olarak sağlanmalıdır. Yani

$$x_l \in [a,b] \; (l = 0,1,2,\ldots) \text{ için}$$

$$R_N(x_l) = \sum_{k=0}^{m} F_k(x_l) y^{(k)}(x_l) + \sum_{p=0}^{2} \sum_{q=0}^{p} Q_{pq}(x_l) y^{(p)}(x_l) y^{(q)}(x_l) - g(x_l) \cong 0$$

$$R_N(x_l) \leq 10^{-k_l} (\, k \text{ herhangi bir pozitif tam sayı})$$

Eğer $\max\left(10^{-k_l}\right) = 10^{-k}$ $(k \in \mathbf{Z}^+)$ belirlenmiş ise, N kesme sınırı $R_N(x_l)$ farklı her bir noktada belirlenen 10^{-k} değerinden küçük kalıncaya kadar arttırılır. Böylece, N yeteri kadar büyük olduğunda, $R_N(x_l) \to 0$ ise hata azalmaktadır [2,20]. Bu takdirde çözümün doğruluğu kontrol edilebilir ve $R_N(x)$ rezidüel fonksiyonu yardımıyla ve [a,b] aralığındaki $\left|R_N(x)\right|$ fonksiyonunun ortalama değeri ile hata hesaplanabilirdir [17,32,33]. Böylece

$$\left| \int_a^b R_N(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |R_N(x)|\, dx$$

eşitsizliği kullanılarak ortalama değer teoreminden, ortalama hatanın üst sınırı $\bar{R}_n$

$$|R_N(c)| \leq \frac{\int_a^b |R_N(x)|\, dx}{b-a} = \bar{R}_n$$

biçiminde elde edilir.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA

LİNEER OLMAYAN DİFERANSİYEL DENKLEMLER İLE İLGİLİ NÜMERİK UYGULAMALAR

Bu bölümde, Legendre sıralama yönteminin uygulanabilirliğini göstermek için ikinci mertebeden sabit ve değişken katsayılı lineer olmayan diferansiyel denklemler ile ilgili bazı örnekler sunulmuştur. Ayrıca, verilen aralıklarda elde edilen yaklaşık çözümlerin doğruluğu tablo ve grafiklerle gösterilmiştir.

Örnek 4.1. İkinci mertebeden lineer olmayan değişken katsayılı

$$(x-1)y''y-xy'y-2xy=-2x^4+2 \tag{4.1}$$

$$y(0)=-1\ ,\ y'(0)=0\ ,\ -1\le x\le 1 \tag{4.2}$$

diferansiyel denklemini göz önüne alalım. Bu denklemin $y(x)$ çözümüne N = 2 için

$$y_2(x)=\sum_{\mathrm{n}=0}^{2} a_n P_n(x)\quad ,\quad -1\le x\le 1$$

sonlu Legendre serisiyle yaklaşalım. Buna göre, N = 2 için

$$\sum_{k=0}^{2} F_k(x)y^{(k)}(x)+\sum_{p=o}^{2}\sum_{q=0}^{p} Q_{pq}(x)y^{(p)}(x)y^{(q)}(x)=g(x)$$

$$F_0(x)y^{(0)}(x)+Q_{10}(x)y^{(1)}(x)y^{(0)}(x)+Q_{20}(x)y^{(2)}(x)y^{(0)}(x)=g(x)$$

elde edilir. Böylece verilen denklem için matris denklemi,

$$\mathbf{F}_0\mathbf{P\Pi}^0\mathbf{A}+(\mathbf{Q}_{10}\mathbf{P}^*_{1,0}+\mathbf{Q}_{20}\mathbf{P}^*_{2,0})\dot{\bar{\mathbf{A}}}=\mathbf{G} \tag{4.3}$$

biçimindedir. Legendre polinomları,

$$\mathbf{P}_0(x)=1,\ \mathbf{P}_1(x)=x,\ \ \mathbf{P}_2(x)=\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}$$

olmak üzere, (4.3) denklemindeki terimler aşağıdaki gibidir:

$$\mathbf{F}_0=\begin{bmatrix}\mathbf{F}_0(x_0) & 0 & 0\\ 0 & \mathbf{F}_0(x_1) & 0\\ 0 & 0 & \mathbf{F}_0(x_2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}\mathbf{P}_0(x_0) & \mathbf{P}_1(x_0) & \mathbf{P}_2(x_0)\\ \mathbf{P}_0(x_1) & \mathbf{P}_1(x_1) & \mathbf{P}_2(x_1)\\ \mathbf{P}_0(x_2) & \mathbf{P}_1(x_2) & \mathbf{P}_2(x_2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & \frac{-1}{2}\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix} \tag{4.4}$$

$$\mathbf{\Pi}^0=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\quad \mathbf{Q}_{10}=\begin{bmatrix}\mathbf{Q}_{10}(x_0) & 0 & 0\\ 0 & \mathbf{Q}_{10}(x_1) & 0\\ 0 & 0 & \mathbf{Q}_{10}(x_2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_{20}=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_{1,0}^{*}=\begin{bmatrix}\mathbf{P}(-1)\mathbf{\Pi}\overline{\mathbf{P}}(-1)\\ \mathbf{P}(0)\mathbf{\Pi}\overline{\mathbf{P}}(0)\\ \mathbf{P}(1)\mathbf{\Pi}\overline{\mathbf{P}}(1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -3 & 3 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{2} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 3\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_{2,0}^{*}=\begin{bmatrix}\mathbf{P}(-1)\mathbf{\Pi}^2\overline{\mathbf{P}}(-1)\\ \mathbf{P}(0)\mathbf{\Pi}^2\overline{\mathbf{P}}(0)\\ \mathbf{P}(1)\mathbf{\Pi}^2\overline{\mathbf{P}}(1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -3 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & \frac{-3}{2}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_{10}\mathbf{P}_{1,0}^{*}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -3 & 3 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -3 & -3 & -3\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_{20}\mathbf{P}_{2,0}^{*}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 6 & -6\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & \frac{3}{2}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}_0\mathbf{P}\mathbf{\Pi}^0\mathbf{A}+(\mathbf{Q}_{10}\mathbf{P}_{1,0}^{*}+\mathbf{Q}_{20}\mathbf{P}_{2,0}^{*})\bar{\dot{\mathbf{A}}}=\mathbf{G} \tag{4.5}$$

$$\mathbf{F}_0\mathbf{P}\mathbf{\Pi}^0=\begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_{10}\mathbf{P}^*_{1,0}+\mathbf{Q}_{20}\mathbf{P}^*_{2,0}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -9 & 9 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -3 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}=\begin{bmatrix} g(-1) \\ g(0) \\ g(1) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.6}$$

Bu takdirde temel matris denklemi,

$$\left[\mathbf{W};\mathbf{V}:\mathbf{G}\right]=\begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 & ; & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -9 & 9 & -9 & : & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ; & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & \frac{3}{2} & : & 2 \\ -2 & -2 & -2 & ; & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -3 & -3 & -3 & : & 0 \end{bmatrix} \tag{4.7}$$

bulunur.

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix},\ \bar{\mathbf{A}}=\begin{bmatrix} a_0\mathbf{A} \\ a_1\mathbf{A} \\ a_2\mathbf{A} \end{bmatrix}$$

olacak şekilde, başlangıç koşulları

$$y(0)=-1$$
$$y'(0)=0$$

olmak üzere, başlangıç koşulları matris formda

$$y(x)=\mathbf{P}(x)\mathbf{A}$$
$$y(0)=\mathbf{P}(0)\mathbf{A}=-1$$

biçiminde yazılır. Karışık koşullara denk gelen temel matris denklemi,

$$[\mathbf{U}_1;0]=\left[\begin{array}{cccccccccccccc} 1 & 0 & \frac{-1}{2} & ; & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & : & -1 \end{array}\right]$$

$$y'(x)=\mathbf{P}(x)\mathbf{\Pi A}$$
$$y(0)=\mathbf{P}(0)\mathbf{\Pi A}=0$$

$$[\mathbf{U}_2;0]=[\begin{array}{ccccccccccccccc} 0 & 1 & 0 & ; & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{array}].$$

bulunur. Böylece başlangıç koşulları altındaki arttırılmış temel matris denklemi,

$$\left[\tilde{\mathbf{W}};\tilde{\mathbf{V}}:\tilde{\mathbf{G}}\right]=\left[\begin{array}{ccccccccccccccc} 2 & -2 & 2 & ; & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -9 & 9 & -9 & : & 0 \\ 1 & 0 & \frac{-1}{2} & ; & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & : & -1 \\ 0 & 1 & 0 & ; & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{array}\right] \quad (4.8)$$

olup, elde edilen sistemdeki katsayılar

$$a_0=\frac{-2}{3}$$
$$a_1=0$$
$$a_2=\frac{2}{3} \quad (4.9)$$

biçiminde hesaplanarak,

$$y(x)=x^2-1 \quad (4.10)$$

formundaki tam çözüme ulaşılır.

Örnek4.2 İkinci mertebeden lineer olmayan

$$y''-2y'+y+y^2-y''y'=2+4e^x \quad (4.11)$$

$$y(0)=3,\ \ y'(0)=2 \quad (4.12)$$

denklemini göz önüne alalım. Bu denklemin $y(x)$ çözümüne N = 2 için

$$Y_2(x)=\sum_{n=0}^{2}a_nP_n(x)\quad , \quad -1\le x\le 1 \quad (4.13)$$

sonlu Legendre serisiyle yaklaşılırsa, N = 2 için verilen denklemin matris denklemi,

$$\left(\mathbf{F}_0\mathbf{P\Pi}^0+\mathbf{F}_1\mathbf{P\Pi}+\mathbf{F}_2\mathbf{P\Pi}^2\right)\mathbf{A}+(\mathbf{Q}_{00}\mathbf{P}^*_{0,0}+\mathbf{Q}_{21}\mathbf{P}^*_{2,1})\bar{\mathbf{A}}=\mathbf{G} \quad (3.14)$$

biçimindedir. Buna göre, Legendre polinomları

$$P_0(x)=1,\ P_1(x)=x,\ \ P_2(x)=\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}$$

olmak üzere, (4.14) denklemindeki terimler

$$\mathbf{F}_0\mathbf{P\Pi}^0=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & \frac{-1}{2}\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\quad \mathbf{F}_1\mathbf{P\Pi}=\begin{bmatrix}0 & -2 & 6\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & -2 & -6\end{bmatrix},\ \mathbf{F}_2\mathbf{P\Pi}^2=\begin{bmatrix}0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_{00}\mathbf{P}^*_{0,0}+\mathbf{Q}_{21}\mathbf{P}^*_{2,1}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -2 & 2 & -2\\ 1 & 0 & \frac{-1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -3 & \frac{1}{4}\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -2 & -8\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{G}=\begin{bmatrix}g(-1)\\ g(0)\\ g(1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2+4e^{-1}\\ 6\\ 2+4e\end{bmatrix}$$

formundadır. Böylece, başlangıç koşulları altındaki arttırılmış temel matris denklemi,

$$\left[\mathbf{W};\tilde{\mathbf{V}}:\tilde{\mathbf{G}}\right]=\begin{bmatrix}1 & -3 & 10 & ; & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -2 & 2 & -2 & : & 2+4e^{-1}\\ 1 & 0 & \frac{-1}{2} & ; & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & : & 3\\ 0 & 1 & 0 & ; & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & : & 2\end{bmatrix} \quad (4.15)$$

olup, elde edilen sistemden

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{7}{3}\\ a_1 &= 2\\ a_2 &= \frac{2}{3}\end{aligned} \quad (4.16)$$

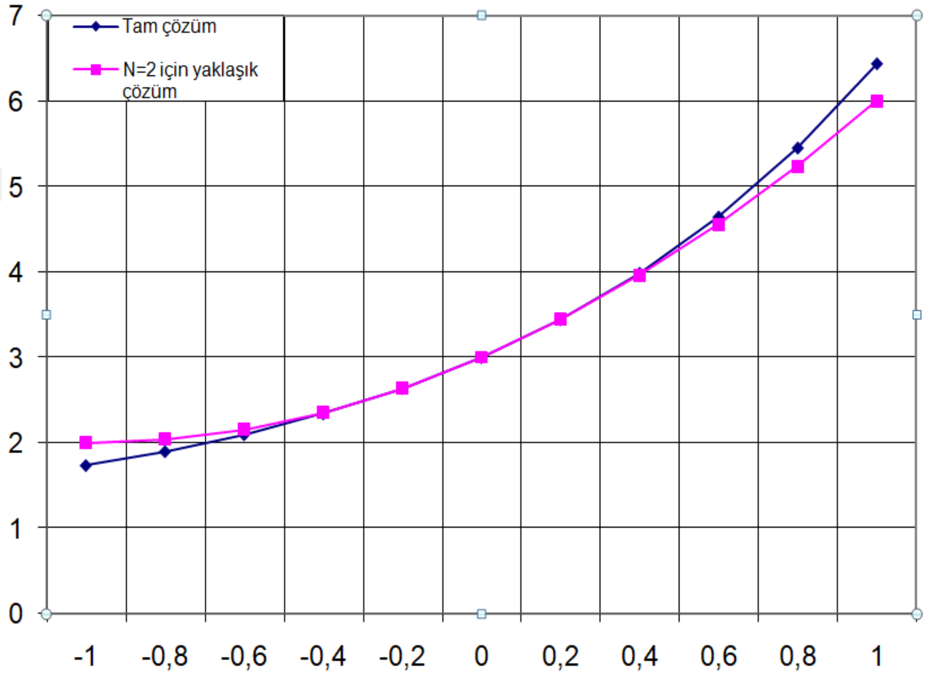
katsayıları bulunur. Elde edilen katsayılar denklemde yerine yazılırsa,

$$y=1+2e^x \quad (4.17)$$

formundaki yaklaşık çözüme ulaşılır.

Tablo 4.1. Örnek 4.2 için hata analizi

x_i	Tam Çözüm	$N=2\ y(x)$	Mutlak Hatalar
-1	1. 73575888	1. 99999999	0. 26424100
-0.8	1. 89865830	2. 04000000	0. 14134170
-0.6	2. 09762375	2. 15999975	0. 06237600
-0.4	2. 34064071	2. 35999999	0. 01935920
-0.2	2. 63746250	2. 63999999	0. 00253740
0	3. 0	3. 0	0
0.2	3. 44280550	3. 44561100	0. 00280550
0.4	3. 98364900	4. 22014290	0. 23649390
0.6	4. 64423760	5.48661360	0. 84237600
0.8	5. 45108185	5. 66216370	0. 21108185
1	6. 43656363	6. 87312728	0. 43656365



Şekil 4.1. $N=2$ için Örnek 4.2'nin tam ve yaklaşık çözümünün karşılaştırılması

Örnek 4.3 İkinci mertebeden lineer olmayan değişken katsayılı

$$xyy' - 2xy' + y = x^2 \tag{4.18}$$

diferansiyel denklemini ele alalım.

$$y(0)=0,\; y'(0)=0 \tag{4.19}$$

koşulları altında, bu denklemin $y(x)$ çözümüne N = 2 için

$$y_2(x)=\sum_{n=0}^{2} a_n P_n(x) \quad , \quad -1\le x\le 1 \tag{4.20}$$

sonlu Legendre serisiyle yaklaşalım. Buna göre, N = 2 için verilen denklemin matris denklemi,

$$\left(\mathbf{F}_0\mathbf{P\Pi}^0+\mathbf{F}_1\mathbf{P\Pi}\right)\mathbf{A}+(\mathbf{Q}_{21}\mathbf{P}^*_{2,1})\bar{\mathbf{A}}=\mathbf{G} \tag{4.21}$$

ileverilir. Legendre polinomları

$$\mathbf{P}_0(x)=1,\;\mathbf{P}_1(x)=x,\;\mathbf{P}_2(x)=\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}$$

olmak üzere, (4.21) denklemindeki terimler,

$$\mathbf{F}_0\mathbf{P\Pi}^0=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & \frac{-1}{2}\\ -1 & 1 & 1\end{bmatrix},\quad \mathbf{F}_1\mathbf{P\Pi}=\begin{bmatrix}0 & 2 & -6\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & -2 & -6\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_{21}\mathbf{P}^*_{2,1}=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0&-3&3&-3\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&3&9\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{G}=\begin{bmatrix}g(-1)\\ g(0)\\ g(1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$$

şeklindeolup,başlangıç koşulları altındaki arttırılmış temel matris denklemi,

$$\left[\mathbf{W};\tilde{\mathbf{V}}:\tilde{\mathbf{G}}\right]=\begin{bmatrix}1&1&-5&;&0&0&0&0&0&0&-3&3&-3&:&1\\1&0&\frac{-1}{2}&;&0&0&0&0&0&0&0&0&0&:&0\\-1&-1&-5&;&0&0&0&0&0&0&0&3&9&:&1\end{bmatrix} \tag{4.22}$$

olacak şekilde, elde edilen sistemden

$$a_0 = 0$$
$$a_1 = \frac{1}{3}$$
$$a_2 = \frac{2}{3} \tag{4.23}$$

katsayıları bulunur. Bulunan katsayılar denklemde yerine yazılırsa,

$$y = x^2 \tag{4.24}$$

formundaki çözüme ulaşılır.

Örnek 4.4. Literatürde geniş uygulamaya sahip Bratu tipindeki,

$$y''(x) - 2e^{y(x)} = 0,\ 0 < x < 1 \tag{4.25}$$

problemini ele alalım.

$$y(0) = 0 \text{ ve } y'(0) = 0 \tag{4.26}$$

koşulları altında, bu denklemin tam çözümü,

$$y(x) = -2\ln(\cos(x)) \tag{4.27}$$

formundadır. $e^{y(x)}$ ile genişleterek bu denklemi,

$$y''(x) - 2y(x) - y^2(x) - 2 = 0 \tag{4.28}$$

biçiminde yazabiliriz. Bu problem Legendre matris sıralama methodu yardımıyla $N = 4,5$ alınarak çözülürse,

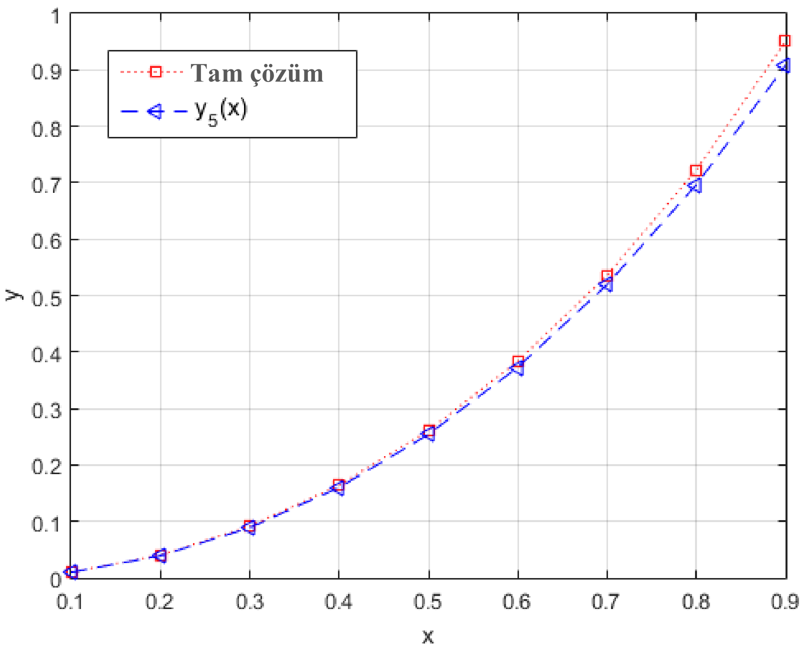
$$y_4(x) = -1.04\times10^{-17} + 0.965317x^2 - 0.0160093x^3 + 0.196559x^4,$$

$$y_5(x) = 2.08\times10^{-17} + 0.971444x^2 + 0.00924656x^3 + 0.146425x^4 + 0.0314368x^5.$$

yaklaşık çözümleri elde edilir. (4.29)

Tablo4.2. Farklı N değerleri için Örnek 4.4'ün mutlak hatalarının karşılaştırılması

x_i	$\lvert e_4(x_i)\rvert$	$\lvert e_5(x_i)\rvert$
0.1	$3.60e-04$	$2.78e-04$
0.2	$1.47e-03$	$1.09e-03$
0.3	$3.34e-03$	$2.44e-03$
0.4	$6.00e-03$	$4.36e-03$
0.5	$9.56e-03$	$7.02e-03$
0.6	$1.44e-02$	$1.08e-02$
0.7	$2.15e-02$	$1.66e-02$
0.8	$3.27e-02$	$2.60e-02$
0.9	$5.17e-02$	$4.26e-02$



Şekil 4.2. $N=5$ için $y_5(x)$ yaklaşık çözümü ile tam çözümün karşılaştırılması

Şekil 4.2. ve Tablo 4.2.'de görüldüğü gibi $y_4(x)$ ve $y_5(x)$ Legendre polinom çözümleri tam çözüm ile uyumludur. Aynı zamanda N arttıkça mutlak hatanın azaldığı görülmektedir. Diğer taraftan, ortalama hatanın üst sınırı $\overline{R}_4$ ve $\overline{R}_5$ sırasıyla 2.07e-01 ve 1.82e-01 olarak elde edilmektedir. Ortalama hataların tablo ve şekillerdeki sonuçlarla tutarlı olduğu açık bir şekilde görülmektedir.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, ikinci mertebeden lineer olmayan diferansiyel denklemler için bir Legendre sıralama (collocation) yöntemi geliştirilmiştir. Önerilen yöntem lineer olmayan denklemler için yeni bir yaklaşımdır.

Geliştirilen Legendre sıralama yöntemi ile önce lineer olmayan diferansiyel denklemdeki bilinmeyen fonksiyon ve türevlerinin sonlu Legendre seri açılımları ve bilinen katsayı fonksiyonlarının sıralama (collocation) noktalarındaki değerlerine bağlı matris formları elde edilip,ardından bu ifadeler yerine koyulup sadeleştirilerek denklem Legendre katsayılı bir matris denklemine dönüştürülür. Böylece bilinmeyen Legendre katsayılı lineer olmayan bir cebirsel sisteme karşılık gelen sonuç matris denklemi çözülebilir ve katsayılar yaklaşık olarak bulunabilir. Bu yöntem sayesinde elde edilen yaklaşık çözümler, tam çözümler ile karşılaştırılmış, bu çözümlerin N kesme sınırı yeterince artırıldığında tam çözüme daha da yaklaştığı görülmüştür. Ayrıca rezidüel hata ile hata için üst sınır belirlenmiştir. Bu yöntemin en önemli avantajı ise çözümdeki Legendre katsayılarının bilgisayar programları kullanılarak kolaylıkla bulunabilmesidir.

Ayrıca geliştirilen Legendre yöntemi daha yüksek mertebeden lineer olmayan diferansiyel denklemlere ve lineer olmayan diferansiyel denklem sistemlerine uygulanabilirdir. Yöntem tam çözüme oldukça yaklaşık sonuçlar vermesi ve pratik olması sebebiyle mekanik ve fizikte ortaya çıkan bu tip problemlerin çözümünde büyük fayda sağlayacaktır.

KAYNAKLAR

[1] Kreyszig E. Introduction Functional Analysis with Applications. John-Wiley and Sons, New York, 2013.

[2] Everitt W. N., Littlejohn L. L., Wellman R. Legendre polynomials, Legendre-stirling numbers and the left-definite spectral analysis of the Legendre differential expressions. J. Comput. Appl. Math., 2002, 148.

[3] Spiegel M. R. Theory and Problems of Fourier Analysis. Schaum's Outline Series. McGraw-hill Inc., New York, 1994

[4] Yüksel G., Gülsu M., Sezer M. Chebyshev polynomial solutions of a class of second-order nonlinear ordinary differential equations. Journal of Advanced Research in Scientific Computing, 2011, 3(4), 11-24.

[5] Fried I. Numerical Solution of Differential Equations. Academic Press, New York, 1979.

[6] Dehghan M., Shakeri F. Approximate solution of differential equation arising in astrophysics using the variational iteration method. New Astronomy, 2008, 13, 53-59.

[7] Yousefi S., Razzaghi M. Legendre wavelets method for the nonlinear Volterra-Fredholm integral equations. Math. Comput. Simul., 2005, 70, 1-8.

[8] Kells L. M. Elemetary Differential Equations. Mc Graw-Hill Book Company, New York, 1965.

[9] Tatari M., Dehghan M. On the convergence of he's variational iteration method. J. Comput. Appl. Math., 2007, 207, 121-128.

[10] Abbasbandy S. A new application of he's variational iteration method for quadratic Riccati differential equation by using Adomian's polynomials. J. Comput. Appl. Math., 2007, 207, 59.

[11] Abbasbandy S. Homopoty perturbation method for quadratic Riccati differential equation and comparison with Adomian decomposition method. Appl. Math. Comput., 2006, 172, 485.

[12] Bulut H., Evens D. J. On the solution of Riccati equation by the decomposition method. Int. j. Comput. Math., 2002, 79(1), 03-109.

[13] Wazwaz A. M. The numerical solution of fifth-order boundary-value problems by Adomian decomposition. J. Comput. Appl. Math., 2001, 136, 259-270.

[14] Kürkçü Ö. K., Aslan E., Sezer E. A numerical method for solving some model problems arising in science and convergence analysis based on residual function. Appl. Num. Math., 2017, 121, 134-148.

[15] Gürbüz B., Sezer M. Laguerre polynomial solutions of a class of initial and boundary value problems arising in science and engineering fields. Acta. Physica Polonica A., 2016, 130(1), 194-197.

[16] Bülbül B., Sezer M. A numerical approach for solving generalized Abel-type nonlinear differential equations. Appl. Math. Comput., 2015, 262, 169-177.

[17] Balcı M. A., Sezer M. Hybrid Euler-Taylor matrix method for solving of generalized linear Fredholm integro-differential difference equations. Appl. Math. Comput., 2016, 273, 33-41.

[18] El-Mikkawy M. E. A., Cheon G. S. Combinatorial and hypergeometric identities via the Legendre polynomials-a computational approach. Appl. Math. Comput., 2005, 166.

[19] Sezer M., Gülsu M. Solving high-order linear differantial equations by a Legendre matrix method based on hybrid Legendre and Taylor polynomials. Number Methods Partial Differential Eq., 2010, 647-661.

[20] Yalçınbaş S., Sezer M., Sorkun H. H. Legendre polynomial solutions of high-order linear Fredholm integro-differential equations. Appl. Math. Model., 2009, 210, 334-339.

[21] Gülsu M., Sezer M., Tanay B. A matrix method for solving high-order linear difference equations with mixed argument using hybrid Legendre and Taylor polynomials. Journal of the Franklin Institute, 2009, 343, 647-659.

[22] Maleknejad K., Kajani M. T. Solving second kind integral equation by Galerkin methods with hybrid Legendre and block-pulse functions. Appl. Math. Comput., 2003, 145, 623-629.

[23] Marzban H. R., Razzaghi M. Optimal control of linear delay system via hybrid of block-pulse and Legendre polynomials. J. Franklin Ins., 2004, 341, 279-293, 203.

[24] Gülsu M., Sezer M. On the solution of the Riccati equation by the Taylor matrix method. Appl. Math. Comput., 2006, 176, 414-421.

[25] Markakis M. P. Closed form solutions of certain Abel equations of the first kind. Appl. Math. Letter, 2009, 22, 1401-1405.

[26] Akyüz Daşcıoğlu A., Çerdik Yaslan H. The solution of high-order nonlinear ordinary differential equations by Chebyshev series. Appl. Math. and Comput., 2011, 217, 5658-5666.

[27] Dehghan M., Taleci A. A compact split-step finite difference method for solving the nonlinear Schrödinger equations with constant and variable coefficients. Comput. Phys. Commun., 2010, 181, 43-51.

[28] El-Tawil M. A., Bhnasawi A. A., Naby A. A. Solving Riccati differential equation using Adomian decomposition method. Appl. Math. Comput., 2004, 157, 503-514.

[29] Akyüz Daşçıoğlu A., Çerdik Yaslan H. An approximate method for the solution of nonlinear integral equations. Appl. Math. Comput., 2006, 174, 619-629.

[30] Yüzbaşı Ş., Şahin N. On the solution of a class of nonlinear ordinary differential equations by the Bessel polynomials. J. Numer. Math., 2012, 20(1), 55-79.

[31] Oğuz C., Sezer M. Chelyshkov collocation method for a class of mixed functional integro-differential equations. Appl. Math. Comput., 2015, 259, 943-954.

[32] Kürkçü Ö. K., Aslan E., Sezer M. A numerical approach with error estimation to solve general integro-differential difference equations using Dickson polynomials. Appl. Math. Comput., 2016, 276, 324–339.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Tuğçe ÇINARDALI

Doğum Yeri ve Yılı : Nazilli, 1990

Medeni Hali : Evli

Yabancı Dili : İngilizce

E-posta : tugce.ulu@itk.k12.tr

Eğitim Durumu

Lise : Nazilli Anadolu Lisesi, 2008

Lisans : Celal Bayar Üniversitesi, Matematik Bölümü, 2012

Mesleki Deneyim

YDS Academy Matematik Öğretmeni 2012-2014

İzmir Özel Türk Koleji Matematik Öğretmeni 2014-(halen)

Yayınları

Yalçınbaş S., Ulu T. Legendre collocation method for solving a class of the second order nonlinear differential equations with the mixed nonlinear condition. New Trends in Mathematical Sciences, 2016, 4(2), 257-265.

Demir Dönmez D., Çınardalı T., Sezer M. The Legendre matrix-collocation approach for some nonlinear differential equations arising in Physics and Mechanics. 4th International Conference on Computation and Experimental Science and Engineering Abstract Book, 2017, 174.