T.C
DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

NONLİNEER SCHRÖDİNGER DENKLEMİNİN TAM ÇÖZÜMLERİ

Halide GÜMÜŞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DİYARBAKIR
Haziran-2018

T.C

DİCLE UNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ

DİYARBAKIR

Halide GÜMÜŞ tarafından yapılan "Nonlineer Schrödinger Denkleminin Tam Çözümleri" konulu bu çalışma, jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyesinin

	Ünvanı	Adı Soyadı	
Başkan:	Doç. Dr.	Ali AKGÜL	
Üye :	Doç. Dr.	Erhan PİŞKİN	
Üye :	Doç. Dr.	Halis YILMAZ	

Tez Savunma Sınavı Tarihi: 11/06/2018

Yukarıdaki bilgilerin doğruluğunu onaylarım.

.../...../20

Doç.Dr.Sevtap SÜMER EKER

ENSTİTÜ MÜDÜR V.

(MÜHÜR)

TEŞEKKÜR

Akademik bilgisi ve tecrübesiyle bana yeni bir ufuk açan, desteğini ve hoşgörüsünü her daim hissettiren tez çalışmamın her adımında yanımda olan danışmanım Doç.Dr. Halis YILMAZ'a teşekkürlerimi sunuyorum.

Ayrıca oldukça uzayan bu süreçte yaşadığım her olumsuzlukta tekrar başlamam için ısrarcı davranan ve desteğini esirgemeyen aileme ve sabırla yanımda duran yakın dostlarıma teşekkür ediyorum.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

TEŞEKKÜR I

İÇİNDEKİLER II

ÖZET III

ABSTRACT IV

ŞEKİL LİSTESİ V

KISALTMA VE SİMGELER VI

1. GİRİŞ 1

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR 3

2.1. Dalgalar 4

2.2. Solitonların Keşfi 5

2.3. Solitonlar 7

3. MATERYAL VE METOT 11

3.1. Temel Kavramlar, Tanımlar 11

3.2. Fourier Serisi ve Fourier Dönüşümü 14

3.3. İlerleyen Dalga Çözümleri 18

3.4. Hirota D Operatörü, Bilineer Metod , Pertürbasyon Açılımı 26

4. ARAŞTIRMA BULGULARI 35

4.1. Schrödinger Denklemi 35

4.2. Nonlineer Schrödinger Denkleminin İlerleyen Dalga Çözümü 37

4.3. Nonlineer Schrödinger Denkleminin Hirota Metodu İle Çözümü 39

5. TARTIŞMA VE SONUÇ 45

6. KAYNAKLAR 47

ÖZGEÇMİŞ 49

ÖZET

NONLİNEER SCHRÖDİNGER DENKLEMİNİN TAM ÇÖZÜMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Halide GÜMÜŞ

DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

2018

Bu tezin ilk bölümünde nonlineer olguda önemli rol oynayan lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemler ile ilgili kısa bir bilgi verdik. Bu olguyu anlamamız için matematikçiler ve hatta fizikçiler nonlineer denklemlerin daha fazla tam çözümlerini bulmaya çalışmışlar ve büyük emek harcamışlardır. Bu sebeple lineer olmayan denklemlerin çözümlerini bulmak için ters saçılım yöntemi (Zakharov ve Shabat 1972) ve Hirota metodu (Hirota 2004) gibi etkili yöntemler ileri sürmüşlerdir. Bu bölümde ayrıca en önemli lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerden biri olan Nonlineer Schrödinger denklemi (NLS) hakkında bilgiler verilmiştir.

İkinci bölümde NLS denkleminin tarihsel gelişimi verildi. 1834 yılında Russell tarafından gözlenen 'büyük tekil dalga' KdV ve NLS gibi geniş çözülebilir lineer olmayan evolüsyon denklemlerinin matematiksel özelliklerinin gelişimi olarak verilmiştir.

Üçüncü bölümde diferansiyel denklemler ile ilgili temel tanımlar verilmiştir. Ayrıca adi diferansiyel denklemlerin ve özellikle de kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünü bulmada kullanılan en önemli metodlardan biri olan Kompleks Fourier Dönüşümünü verdik. Bu dönüşümle çözülebilen dalga denklemini örnek olarak verdik. Ayrıca bu bölümde Burgers ve KdV gibi lineer olmayan bazı evolüsyon denklemlerinin ilerleyen dalga çözümlerini elde ettik. Bunun dışında KdV ve NLS gibi integrallenebilir lineer olmayan evolüsyon denklemlerinin multi-soliton çözümlerini veren Hirota metodunu ele aldık. Bu metodu KdV denkleminin 1-soliton ve 2-soliton çözümlerini elde ederek detaylandırdık.

Dördüncü bölüm Nonlineer Schrödinger denklemine ayrılmıştır. Öncelikle ilerleyen dalga çözümünü elde ettik ve daha sonra Hirota metodunu kullanarak NLS denkleminin 1-soliton ve 2-soliton çözümünü verdik. Sonuç ve tartışma kısmı da beşinci bölümde verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Dalga, İlerleyen dalga, Korteweg de Vries (KdV) denklemi ,
Nonlineer Schrödinger (NLS) Denklemi, Hirota Metodu.

ABSTRACT

EXACT SOLUTIONS OF NONLINEAR SCRÖDINGER EQUATION

MASTER THESIS

Halide GÜMÜŞ

UNIVERSITY OF DICLE
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

2018

In the first chapter, we present a brief information about nonlinear partial differantial equations (NPDEs) which play an important role in nonlinear phenomena. In order to better understanding these nonlinear phenomena, many mathematicians as well as physicists have been made big efforts to seek more exact solutions to NPDEs. Therefore, several powerful methods have been proposed to obtain exact solutions , such as inverse scattering method (Zakharov and Shabat 1972) and Hirota direct method (Hirota 2004). In this chapter, we also give a brief information about Nonlinear Schrödinger Equation (NLS) which is one of the most important NPDEs.

In the second chapter, historical developments of NLS are given. We also review the history of soliton, since the first recorded observation of the 'great solitary wave' by Russell in 1834, as means of developing the mathematical properties of a large class of solvable nonlinear evolution equations such as the KdV and the NLS.

In the third chapter, the basic definitions about differantial equations are given. In addition, we present the Complex Fourier Transform (CFT) which is one of the most important tool when solving ODEs and in particular PDEs. We solve the wave equation which is an example of using the CFT. In this chapter, we also construct the travelling wave solutions for some nonlinear evolution equations such as the Burgers equation and KdV equation. Furthermore, in this chapter, we present Hirota's direct method of constructing multi-soliton solutions to integrable nonlinear evolution equations such as the KdV and NLS.

Chapter four is devoted to NLS Equation. Firstly, we construct a travelling wave solution for the NLS equation. Furthermore, by using Hirota's direct method we present one-soliton and two soliton solutions for the NLS. Results and discussion are given in chapter five.

Keywords:Wave, Travelling wave, Korteweg de Vries (KdV) Equation, Nonlineer Schrödinger (NLS) Equation, Hirota's Direct Method.

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil No **Sayfa**

Şekil 2.1. Bir Dalga Profili 5

Şekil 3.1. KdV denkleminin $c = 0.9$ ve $k = 0.2$ için çözümünün grafiği 21

Şekil 3.2. mKdV denkleminin $c = 0.4$ ve $k = 0.1$ için çözümünün grafiği 23

Şekil 3.3. Elastik medyum denkleminin $f_0 = 2$, $c = 3$ ve $B = 1$ için grafiği 25

Şekil 3.4. KdV denkleminin $k_1 = 1$, $\alpha_1 = 0.3$ için 1-Soliton çözümünün grafiği 31

Şekil 4.1. NLS denkleminin $a = 0.9$ ve $b = 0.1$ için 1-Soliton çözümünün grafiği 43

KISALTMA VE SİMGELER

CFT : Kompleks Fourier dönüşümü

NLS : Nonlineer Schrödinger Denklemi

KdV : Korteweg de Vries Denklemi

mKdV : Modifiye Korteweg de Vries Denklemi

Ψ : Dalga Fonksiyonu

D : Hirota operatörü

p : Momentum

h : Planck sabiti

$\hbar$: İndirgenmiş Planck sabiti

k : Dalga sayısı

m : Kütle

λ : Dalga boyu

v : Hız

w : Grup fazı

1. GİRİŞ

Matematiksel bir sistemin fiziksel karşılığını sezerek elde etmeye çalışmak oldukça zordur. Bu sebeple lineer olmayan diferansiyel denklemlerin çevremizde gördüğümüz fiziksel olayları açıklama özelliğinden faydalanılmıştır. Böylece bilimle uğraşan insanlar için lineer olmayan denklemlere çözüm üretmek anlam kazanmıştır. Lineer denklemler ile lineer olmayan denklemler arasındaki temel farklar lineer olmayan denklemlerin çözümünü zorlaştırmıştır. Lineer sistemlerde denklemlerin çözümlerinin birleşimi de denklem için tekrar bir çözüm oluştururken lineer olmayan sistemlerde bu geçerli değildir. Benzer şekilde lineer sistemler formülize edilebilirken lineer olmayan sistemler için bu çok da mümkün değildir. Bu sebeple son yıllarda birçok araştırmacı lineer olmayan diferansiyel denklemler üzerine çalışmalar yürütmekte, bu denklemlerin çözüm yöntemlerini incelemekte ve yeni çözüm yöntemleri geliştirmektedirler. Bu bağlamda özellikle kısmi türevli denklemler incelenmiş ve solitonlar ile ilgili çalışmalar yapılmıştır.

20. yüzyılın başlarında deneysel kanıtlar atom moleküllerinin doğada dalga gibi davrandığını öne sürdü. Örneğin elektronlar çift yarıktan geçtiklerinde ışık dalgaları gibi kırılarak yayılıyorlardı. Bu yüzden atom moleküllerinin davranışını bir dalga denkleminin açıklayabileceği fikri mantıklı geldi.

Schrödinger böyle bir denklemi yazan tek kişi oldu. Ondan sonra bu denklemin ne anlama geldiği üzerine çok tartışma yapıldı. Dalga denkleminin öz değerleri kuantum mekanik sisteminin enerji seviyelerine eşit olabileceğini gösterdi.

Başlarda denklemde dalga fonksiyonunun ne olduğu daha açıktı. Tartışmalardan sonra şimdilerde dalga fonksiyonu olasılık dağılımı olarak kabul edildi. Birleşmiş dalga fonksiyonu bir parçacığın herhangi bir konumdaki olasılığını verir. Schrödinger denkleminin bir çözümü , sistemin kuantum beklentilerini tanımlayan bir dalgadır. Oysa denklemi fiziksel olarak yorumlamak kuantum mekaniğinin ana felsefik problemlerinden biridir.

Denklemin çözümü Fourier tarafından tasarlanan özdeğer (eigenvalue) metodu üzerine kurulmuştur. Bu metod herhangi bir matematiksel fonksiyonun diğer periyodik fonksiyonların sonsuz seri toplamı olarak ifade edilmesidir. Buradaki püf nokta doğru çokluğa sahip doğru fonksiyonları bulmaktır. Böylece bulunan fonksiyonlar çakıştırılarak üstüste eklendiğinde istenen çözüm elde edilmiş olur.

Nonlineer Schrödinger denklemi (NLS), Kimyada modern atom kuramlarında ortalama bağ uzaklıkları, dipol ve moment hesaplarında; Fizikte elektrik alan ve transistörlerin mekanizmasında, kuantum mekaniğinde serbest enerji seviyelerini ve parçacıkların herhangi bir andaki konumlarını bulmak için kullanılır. Zamana bağlı versiyonu serbest parçacıkların devinimine uygulanabilen ilerleyen dalgaları tanımlamak için kullanılır. Zamandan bağımsız versiyonu ise durgun dalgaları tanımlamak için kullanılır. Zamandan bağımsız Schrödinger denkleminin bazı basit sistemler için analitik çözümleri vardır.

NLS derin ve detaylı kuantum denklemlerine açıklık getirmeye çalışmıştır ancak hala eksik yanları olması sebebiyle tam çözümleri üzerine çalışmalar yürütülmektedir.

Bu tez çalışmasında nonlineer Schrödinger denkleminin tam çözümleri üzerine yapılan çalışmalar verilecektir.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Klasik Fizikte kullanılan Newton yasaları ışık ve atom davranışlarını açıklamada yetersiz kalmış ve yeni bir Fizik alanı olan kuantum fiziği doğmuştur. Bu alana 1900 yılında kuanta denilen ışık paketlerinin transferi üzerine çalışmalar yürüten Max Planck öncülük etmiştir. 1923 yılında De Broglie madde dalgası kavramını üretmiş ve sadece foton değil maddenin de dalga özelliği gösterdiği varsayımında bulunmuştur. 1926 yılında Erwin Schrödinger dalga denklemini ve dalga mekaniğini açıklamıştır. Aynı yıllarda Heisenberg 'Belirsizlik İlkesi'ni açıkladı (Karaoğlu 2008). Bir taneciğin yerini ve momentumunu aynı anda doğru ölçmenin imkansız olduğunu ve bu ilkesi ile ölçümlerde yapılan hataların bir alt limiti olabileceğini göstermiştir. Bütün bu çalışmalar daha sonraki yıllarda NLS için bulunan çözümlere kaynaklık etmiştir.

1967 yılında Benney ve Neweel NLS denklemini zayıf dalga paketlerinde kullanılan bir yöntem olarak verdiler. 1968 yılında Zakharov, Beney ve Neweel'den bağımsız yürüttüğü bir çalışma ile NLS denklemini tekrar üretti (Dias ve Bridges 2004). Hirota (1971) integrallenebilir nonlineer evolüsyon denklemlerine çoklu soliton çözüm öneren metodunu üretti. Bu metod ile değişkenlere bağlı olarak dönüşüm uygulandığında oluşan yeni değişkenli denklemlerde çoklu soliton çözüm daha rahat görülebiliyordu. Metodun zamanla KdV (Hirota 1972), NLS (Hirota 1973) tarzı denklemlerde çok etkili olduğu ve N-Soliton çözümlerin genelleştirilerek elde edilebildiği görüldü. Zakharov ve Shabat (1972) NLS için 'Ters Saçılım Yöntemi (Inverse Scattering Transform (IST))' ni geliştirdi. IST güçlü ve zorlu bir yöntem olmasına karşın Hirota metodu soliton çözüm bulma konusunda daha kullanışlı olmuştur. Bu metodu kullanışlı kılan diğer bir özelliği de analitik olmasından çok cebirsel olmasıdır. Bu da denklemin çözümünde bireye hız kazandırır.

Ablowitz ve Ladik (1975) NLS için 'Sonlu Fark Yöntemi'ni geliştirdi. Hirota (1980) bilineer forma dönüştürme ile ilgili detaylı çalışmalarda bulunmuştur. 2004 yılında da yayımladığı kitapta Direct metodunun keşif sürecini anlatmış ve soliton teorisinde nasıl kullanılabildiğine açıklık getirmiştir. Herbst ve Weideman (1986) NLS denklemi için parçalara ayırma yönteminin analizini yaptı. Overnman ve arkadaşları da (1986) denklemin spektrumunu hesaplayabilecek bilgisayar kodları ürettiler.
Bu bölümde NLS denkleminin doğmasına kaynaklık eden kavramlar daha detaylı olarak verilecektir.

2.1. Dalgalar

Dalga bir boşlukta yayılan veya bir ortamda bir kaynak tarafından oluşturulan , enerjinin taşınmasını sağlayan, titreşimin bir noktadan diğer noktalara iletilmesine verilen isimdir. Her dalga hareketinin kendine özgü bir enerjisi vardır. Güneş ışığından alınan enerji ile oluşan okyanus dalgaları ve depremlerin yıkıcı etkileri buna örnek verilebilir. Dalgalar mekanik ve elektromanyetik dalga olmak üzere ikiye ayrılır:

Mekanik Dalga: Yayılması için maddesel ortamlara yani katı-sıvı-gaz gibi ortamlara ihtiyaç duyan dalgalara mekanik dalga denir. Yay, su, ses ve deprem dalgaları bunlara örnek verilebilir. Mekanik dalgalar ortamın esnekliği sebebiyle denge konumuna varmaya çalışırken salınımlar yapar. Böylece salınım etkisi esneklik kuvvetinden kaynaklı maddenin yerini değiştirmeden hareketin yerini değiştirmiş olur.

Örneğin bir sarmal yay üzerinde dalga oluşturabilmek için yayın herhangi bir noktasına kuvvet uygulamak gerekir. Yaya kuvvet uygulandığında kuvvetin uygulandığı parçacık hareket eder. Yay üzerindeki parçacık uygulanan kuvvet etkisiyle hareket sırasında iş yapmış olur. Dalga yayıldıkça yayın her parçası yanındakine kuvvet uygular ve böylece yayın tamamı iş yapmış ve enerji bir parçacıktan diğer parçacığa hareket enerjisi olarak aktarılmış olur.

Elektromanyetik Dalga: Yayılması için ortamlara gerek duymayan boşlukta da yayılabilen dalgalara elektromanyetik dalga denir. Radyo dalgaları, mikro dalgalar, ışık, X ışınları örnek verilebilir.

Dalgaların Ortak Özellikleri

1. **Dalga Boyu:** Ardışık iki dalga çukuru ya da iki dalga tepesi arasındaki yatay uzaklığa dalga boyu denir. λ ile ifade edilir.

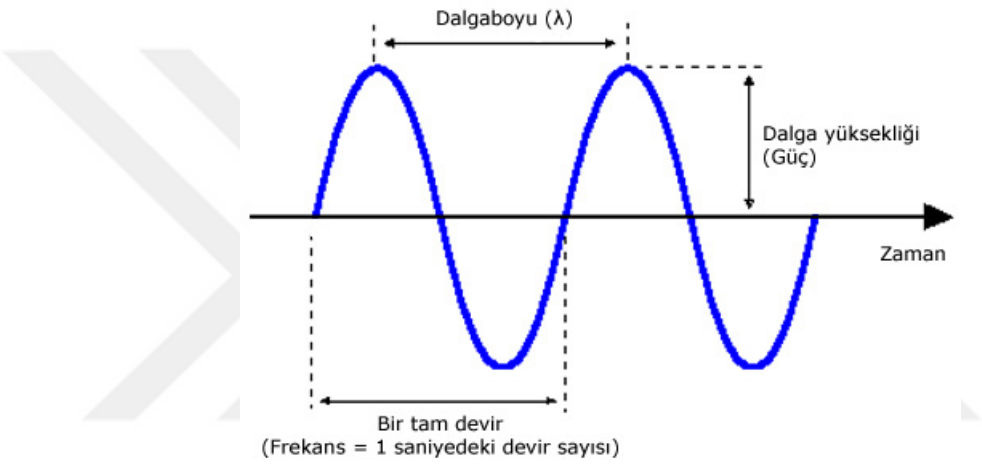
2. **Periyot:** Bir tam dalganın oluşması için geçen süreye veya ardışık iki dalga çukuru ya da iki dalga tepesinin geçmesi için geçen süreye periyot denir. T ile ifade edilir.

3. **Frekans:** Birim zamanda oluşan dalga sayısına frekans denir. Periyot ve frekans dalga kaynağına bağlıdır. Ortamın değişmesi periyot ile frekansı değiştirmez. f ile

gösterilir.

4. **Genlik:** Tam bir dalganın tepesinin ya da çukurunun denge konumuna olan uzaklığına genlik denir. Genlik dalganın taşıdığı enerji ile doğru orantılıdır.

5. **Hız:** Dalganın birim zamandaki yer değiştirmesine hız denir. Ortam aynı olduğu sürece bir periyotluk zaman diliminde her dalga bir periyotluk sürede bir dalga boyu kadar yol alır. Hızın frekansla değişimi dağılma (dispersiyon) olarak adlandırılır.



Şekil 2.1: Bir Dalga Profili

2.2. Solitonların Keşfi

Dağılmayan dalgalar olarak bilinen solitonlar ilk olarak 1834 yılında Edinburgh Kanal'da sığ sularda fark edildi (Russel 1844). İskoç genç mühendis John Scot Russell kanal boyunca atlarla çekilen bir botu izlerken sürekli bir formda ve kanal boyunca uzun mesafeler kat eden dalgaların bozulma ve türbülansa karşı dağılmadan durabilmesini sağlayan en iyi ortamın nasıl olması gerektiğini anlamaya çalışıyordu. Bot durmaya çalıştığında suyun çalkantısı ile şeklini kaybetmeyen sabit bir hızda olduğu fark edilen bir dalga botun ön taraflarında ortaya çıktı. J.S. Russell bugünlerde "S.Russell tekil dalgası" veya "soliton" olarak adlandırılan bu dalgaları "çevrimli dalga" olarak tanımladı. Bu dalgaları at sırtında kanalda gözden kaybolana kadar en fazla 2 mil kadar takip etti ve dalga hızının saatte en fazla 8 mil olduğunu hesapladı. J.S. Russell kendi laboratuarında deneysel

olarak bu tip dalgaları üretmeye çalıştı. Bütün bunlardan sonra bu tür dalgalarla ilgili şu özellikleri tanımladı.

- Dalgalar istikrarlı, değişmez ve uzun mesafeler boyunca ilerleyebilirler. (Normal dalgalar ya düzleşme ya da dikleşme ve bozulma eğilimindedir.)
- Hızı dalganın boyutuna, genişliği de suyun derinliğine bağlıdır.
- Normal dalgalar gibi asla birleşmezler. birleşmek yerine büyük bir dalga küçük bir dalgaya yetişir ve üzerinden geçer.
- Eğer dalga su derinliği için çok büyükse bir küçük bir de büyük iki dalgaya ayrılır.

Keşif sıradışı olmasa da Russell'in gözlemleri tüm bilim tarafından hoş karşılanmadı. Çünkü gözlemleri Newton ve Bernouli'nin geçerli dalga teorilerini kullanarak tekrar üretilemiyordu. 1870 yılında Lord Rayleigh Russell'in gözlemlerini matematik modelleriyle bağdaştırmak için bir yazı yazdı. Korteweg de Vries (1895) dalgaları nonlineer kısmi diferansiyel denklem ile modelleyen KdV diye adlandırdıkları ünlü sonuçlarını yayımladılar.

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

KdV diye adlandırdıkları bu denklem aslında Russell'in kanalda gözlemlediği ve üzerine çalışmalar yaptığı solitonlar gibi sığ sulardaki dalga dinamiğini tanımlamak için yazılmıştı. Buna rağmen 1895'te çalışmalarını yayımladıklarında Russelin gözlem ve çalışmasını kabul etmediler. Oysa KdV belki de soliton ile çözülen en iyi bilinen nonlineer diferansiyel denklemdir. Bu denklemin ilerleyen dalga çözümü daha sonraki bölümlerde verilecektir.

Norman Zabusky ve Martin Kruskal (1965) ilk olarak sonlu fark yöntemi ile KdV denklemindeki soliton davranışları ispat etmişlerdir. Bu ispat Fermi-Pasta-Ulam çalışmalarına da açıklık getirmiştir. Gardner , Greene , Kruskal ve Miura (1967) KdV denkleminin analitik çözümleri sayesinde "Ters Saçılım Yöntemi"ni üretmişlerdir.

1970 lerin başında soliton-anti soliton çiftinden meydana gelen , lineer bir sistem için durgun dalgaya benzeyen sabit solitonlar ile gösterilen dalgaların sınır durumlarını tanımlamada faydalı olan Sine-Gordon denkleminin soliton çözümlerini anlamak için birçok kişinin merakını harekete geçirdi.

$$u_{tt} - u_{xx} + sinu = 0$$

Sine-Gordon denklemi esasında diferansiyel geometri çalışmalarında hiperbolik eğrilerin yüzeylerini modellemede kullanılır.

Matematiksel sistemi fiziksel sisteme bağlayan sezginin eksikliğine bağlı olarak nonlineer denklemlerle kontrol edilebilen olgu ileriki araştırmaların akıllarda hala anlaşılması zor olgular olarak kalmasına neden olmuştur. Solitonlar birçok nonlineer sistemin teorik ve bilimsel araştırmalarda kullanılmasını sağlayan yaygın bir çözüm yeteneğine sahiptir. Solitonların başka bir soliton ile etkileştikten sonra şeklini koruması ve dağılmaması özelliği teorik fizikçilerin parçacıkları soliton gibi modellemesi için ikna edici olmuştur. Özellikle kuantum fiziğinde parçacıkların hareketi tam olarak bu şekilde algılanıyor (Gordon 1992). NLS denklemi kuantum mekaniğinde parçacıkların herhangi bir andaki konumlarını belirleyip modellemede kullanılır. Bu denklem için de soliton çözümler bulunmuştur. Bu çözümlere sonraki bölümlerde yer verilecektir.

2.3. Solitonlar

Yaklaşık 60 yıl önce Los Alamosta kayda değer bir buluş yapıldı. Enrico Fermi, John Pasta ve Stan Ulam lineer olmayan kaynaklara bağlı eşit kütlelere dayanan bir boyutlu kafes içine (lattice consisting) akan enerjiyi hesaplıyorlardı. Bu enerjinin başlangıçta uzun dalga boyları oluşturduğunu ve sonunda da sistemin tüm modları arasında paylaşılan enerjinin sistemi ısıttığını (thermalized) zannediyorlardı. Bu zan sistemdeki nonlineerliğin enerjiyi yüksek harmonik moda transfer edeceği umudu üzerine kurulmuştu. Sürpriz olan şey ise sistem ısınmadı aksine enerji düşük modlar arasında az başlangıç seviyesine yakın tekrarlarda uzun süre paylaşıldığını gösterdi (Lomdahl 1984).

Bu araştırma 1960 ların başlarında Norman Zabusky ve Martin Kruskal'ın sistemi incelemeye başlamasına kadar büyük bir sır olarak sürdü. Gerçek şu ki sadece Fermi-Pasta-Ulam örgüsünün farkı onlara uzun dalga yönteminin aktif olduğu gerçeği nonlineer diferansiyel denkleminde sürekli bir yaklaşıma öncülük etti.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0 \tag{2.3.1}$$

denklemi (KdV denklemi) 1895 yılında Korteweg ve Vries tarafından uzun dalgaların sığ suların yüzeyinde yayılmasını açıklamak için yazıldı. Fakat özellikleri şimdiye kadar çok

iyi anlaşılmadı. Zabusky ve Kruskal dalga gibi durağan titreşimlerin KdV ile tanımlanan bir sistemin içinde bulunduğunu detaylı sayısal verilerden elde ettiler.

Bu tek dalgaların kayda değer bir özelliği çarpışabilmeleri ve çarpıştıktan sonra şekil ve hızlarını korumaya devam etmeleridir. Zabusky ve Kruskal bunu soliton olarak adlandırdılar.

Soliton kavramının ilk başarısı Fermi-Pasta-Ulam sistemindeki tekrarı (başa dönme) açıklıyordu. Zabusky ve Kruskal periyodik sınır şartları ile verilen KdV denkleminin sayısal çözümlerinden (aslında çiftleşmiş dalga halkasını belirtiyor) şu gözlemi yaptılar.

- Solitonlar çarpışabilirler fakat kendine has şekil ve hızlarını korurlar.
- Bazı anlarda bütün solitonlar aynı noktada çarpışabilir ve başlangıç şekillerine yakın tekrarlarda meydana gelebilirler.

Bu başarı heyecan vericiydi, tabiki, fakat soliton görüşü daha büyük etkilerin bile olabileceğini kanıtladı. Gerçekte solitonlar, dalgaların ilerleyişini tanımlayan nonlineer kısmi diferansiyel denklemler için başlangıç-değer problemlerinin analitik işlemlerinde çok önemli ilerlemelere teşvik ettiler. 15 yıl boyunca solitonların tam matematiksel tanımı az çok geliştirilmiştir. Nonlineer dalga olgusu hakkındaki bilgi, matematikçi ve fizikçilerin verimli işbirliği ile bu tanımı kullanması soliton kavramının modern-matematiksel fizikte en önemli gelişmelerden biri olmasını sağladı.

KdV denkleminin basitleştirilmiş versiyonu göz önüne alınırsa her iki olgunun varlığı kavranabilir. KdV denklemindeki nonlineer terim $u\dfrac{\partial u}{\partial x}$ atılırsa denklemin lineer versiyonu

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

$$u_t + u_{xxx} = 0 \tag{2.3.2}$$

elde edilir.

KdV denkleminin soliton çözümlerinde dispersive olmayan yapı ortaya çıkmadı çünkü bu etki sistemdeki nonlineer terim tarafından dengeleniyordu. Bu her iki olgunun varlığı -dispersiyon ve nonlineerlik- KdV denklemi incelenirse daha rahat anlaşılabilir. Bu denklemin ilk dalga çözümü

$$u(x,t) = Ae^{[i(kx+wt)]} \tag{2.3.3}$$

k dalga sayısı ve w açısal frekans ile gösterilen harmonik bir dalgadır. (2.3.3) denklemi için elde edilen

$$u_x = Ae^{[i(kx+wt)]}ki, \quad u_{xx} = Ae^{[i(kx+wt)]}k^2i^2, \quad u_{xxx} = -Ae^{[i(kx+wt)]}k^3i$$

(2.3.2) denkleminde yerine yazılırsa

$$iAe^{[i(kx+wt)]}(w - k^3) = 0$$

$$w = k^3$$

bağıntısı elde edilir. Bu bağıntıda iki önemli özellik bulunmaktadır. Biri faz hızı (phase velocity) $v_p = \dfrac{w}{k}$ ve grup hızı (group velocity) $v_g = \dfrac{\partial w}{\partial k}$ dır. v_p sabit bir bölgedeki bir noktanın hızını ölçerken v_g dalganın enerjisinin hareket hızını ölçüyor.

Eğer KdV denklemindeki ((2.3.1) denklemindeki) dispersive terim $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3}$ çıkarılırsa elimizde

$$u_t + uu_x = 0 \tag{2.3.4}$$

nonlineer denklemi kalır. (2.3.4) denklemi karakteristik yöntemle çözülürse

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{u} = \frac{du}{0}$$

$$u = c_1 \quad \phi_1 = u$$

bulunur.

$$dx = udt \Rightarrow dx = c_1 dt, \quad x - c_1 t = c_2, \quad \phi_2 = x - ut$$

olur. Buradan

$$F(\phi_1, \phi_2) = 0 \Rightarrow F(u, x - ut) = 0$$

$$u = f(x - ut)$$

elde edilir.

KdV denkleminin kayda değer özelliği dispersiyon etkisi ile nonlineerliğin birbirini dengelemesi ve dalgaların şekillerini değiştirmeden ilerlemesini sağlamasıdır. Dispersiyon ve nonlineerlik arasındaki denge sistemden sisteme farklılık gösterir.

Bütün nonlineer diferansiyel denklemlerin soliton çözümü yoktur. Kruskal ve çalışma arkadaşlarının 1967'de geliştirdiği "Inverse Scattering Transform" diye adlandırdıkları " Ters Saçılım Yöntemi" genel başlangıç değer problemlerini çözmeye yarar. Nonlineer denklemlere Fourier Dönüşümünün genelleştirilmişi olarak görünen bu yöntem ile

lineer hesaplamaların serileri sayesinde genel çözüm üretilebilir. Çözüm sürecinde yeni nonlineer modlar belirebilir, bunlar çözümün soliton bileşenleridir. Ayrıca bu modlar sadece dispersivedir ve bu yüzden radyasyon olarak adlandırılır. Bu yöntemle çözülebilen denklemlere tamamen integrallenebilirdir denir.

Sulu Denizi Solitonları

1980'lerin başında araştırmalar Filipinler ve Borneo arasındaki Sulu Denizi boyunca ilerleyen solitonları gözlemlemek ve modellemek için yapıldı (Liu ve ark. 1985). Bilim adamları KdV denklemini kullanarak solitonların davranışını okyanusun zemin topografisine, tuzluluk oranına ve ışınsal yayılmaya bağlı olarak açıklamayı deniyorlardı. Solitonlar Sulu Denizinin üstünde saatte en fazla 9 km hızla kuzeye ilerliyorlardı ve en fazla 100 km genişliğe ulaşıyorlardı. Bu dalgalar radyal olarak bir adadan yayılıyorlardı. Araştırmalar boyunca 17 soliton üzerinde çalışma yapıldı.

Su yoğunluğundaki şeritlerin KdV ile modellenmesi oldukça zordu. Bunun için en az iki farklı yoğunlukta su katmanı olmalı ve suyun yeterince sığ olması gereklidir. Solitonlar derin okyanus tabanı veya kaya tabakası gibi denizaltı yapıları yakınlarında şekillenmeye eğilimlidir. Solitonların büyük su altı yapıları üzerinden akıp giden akıntıların bozulmasıyla meydana geldiği ve bu dalgaların gelgit akıntısı ile başladığı düşünülüyordu.

Deniz solitonları avı uydu görüntüleri ile başlıyordu. Uydudan gelen görüntüler solitonların özelliklerinin azını sunabiliyor ama üzerinde çalışılacak deniz solitonlarının yeni kaynaklarının aranıp bulunması gerektiğine dair geniş bir görüş sunabiliyordu. Uydular deniz yüzeyindeki yükseklik değişimlerini ölçebiliyordu buna rağmen bir dalga üzerinden geçerkenki hızları çok fazla idi ve uydu yörüngesi ile ideal hızda olmayan soliton yörüngelerini belirlemek için de yeteri sıklıkta oluşmuyordu.

Son zamanlarda Güney Çin Denizi'nde çalışmalar yapılmaktadır. Hainan adasının Luzon Strait çevresinde , Hainan adasından Tayvan'a olan bölgede ve Vietnam'da gözlemlenmiştir. Deniz solitonları en iyi KdV denklemi ile tanımlanmış ve denizbilimciler tarafından incelenmeye devam edecektir.

3. MATERYAL VE METOT

Bu bölümde konumuza kaynaklık eden tanım ve teoremler verilecektir.

3.1. Temel Kavramlar, Tanımlar

Tanım 3.1.1. Bir veya daha fazla bağımsız değişkeni olan bir fonksiyon ile bu fonksiyonun çeşitli türevleri arasındaki ilişkiye diferansiyel denklem denir. Bu ilişki x bağımsız değişken ve y bağımlı değişken olması durumunda

$$F(x, y, y^{'}, y^{''}, \ldots, y^{(n)}) = 0$$

ile gösterilir.

Tanım 3.1.2. Bağımlı değişken bir tek bağımsız değişkenin fonksiyonu olarak yazılan diferansiyel denklemlere adi diferansiyel denklemler denir.

Tanım 3.1.3. u bağımlı değişken x ve y bağımsız değişkenler olmak üzere bir kısmi diferansiyel denklem genel olarak

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, \ldots) = 0$$

şeklindedir. Burada

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, u_y = \frac{\partial u}{\partial y}, u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, u_{yy} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \ldots$$

dir.

Tanım 3.1.4. Bir diferansiyel denklemdeki en yüksek türev mertebesine denklemin mertebesi, mertebenin de kuvvetine denklemin derecesi denir.

Tanım 3.1.5. Bir diferansiyel denklemde katsayılar bağımsız değişkenin fonksiyonu ya da sabit değerlerden oluşabiliyor ve bağımlı değişken kısmi türevlerinin birinci derecesi şeklinde yazılabiliyorsa bu denkleme lineer diferansiyel denklem denir. n. mertebeden en genel lineer adi diferansiyel denklem $a_0(t) \neq 0$ koşulu ile

$$a_0(t)y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(t)y = g(t)$$

şeklindedir. Bu denklemler $x^2, xy^{''}, \sin x, e^{(-\sin^3 x)}, \ln x$ gibi terimler içerebilir.

Tanım 3.1.6.

$$a_0(t)y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(t)y = g(t)$$

formunda olmayan denklemlere lineer olmayan diferansiyel denklem denir. Bu tip denklemlerde fonksiyon ile kendisinin türevlerinin çarpımları ya da türevlerinin kuvvetleri olur. Dolayısıyla içerisinde $y^3, (y'')^2, yy', y'y''', \sin y, e^y$ gibi terimler bulunan denklemler lineer değildir.

Tanım 3.1.7. n tane bilinmeyen fonksiyonu içeren m adet diferansiyel denkleme kısaca diferansiyel denklem sistemi denir. Burada m ile n eşit olmak zorunda değildir.

Tanım 3.1.8. Bir diferansiyel denklemin herhangi bir sabite bağlı çözümü elde ediliyorsa bu çözüme genel çözüm denir.

Tanım 3.1.9. Bir diferansiyel denklemin genel çözümünde keyfi sabitlere değer verilerek elde edilen çözüme özel çözüm denir.

Tanım 3.1.10. Bir f fonksiyonunun $n.$ mertebeden sürekli türevleri varsa ve bu türevler

$$F(x, y, y^{'}, y^{''}, \ldots, y^{(n)}) = 0$$

denkleminde yerine yazıldığında x bağımsız değişkenine göre bir özdeşlik oluşuyorsa elde edilen çözüme denklemin tam çözümü denir.

Teorem 3.1.1. $n.$ mertebeden bir homojen diferansiyel denklemin biribirinden farklı m sayıda çözümü $y_1, y_2, \ldots, y_m$ olsun. Burada $m \leq n$ dir. Bu durumda $c_1, c_2, \ldots, c_m$ katsayıları keyfi sabit sayılar olmak üzere, $y = c_1y_1 + c_2y_2 + \ldots + c_my_m$ fonksiyonu da aynı denklemin bir çözümü olur.

Tanım 3.1.11. $y_1, y_2, \ldots, y_m$ herhangi fonksiyonlar ve $c_1, c_2, \ldots, c_m$ herhangi keyfi sabit sayılar olsunlar. Bu durumda $c_1y_1 + c_2y_2 + \ldots + c_my_m$ ifadesine $y_1, y_2, \ldots, y_m$ fonksiyonlarının lineer kombinasyonu denir.
Yukarıdaki tanım ve teoreme göre homojen diferansiyel denklemin çözümlerinin lineer kombinasyonu da bir çözümdür.

Tanım 3.1.12. Zamana bağlı kısmi türevli diferansiyel denklemlere oluşum denklemleri denir. Dalga denklemleri ve ısı denklemleri oluşum denklemlerine örnek verilebilir. u

bağımlı değişken x ve t bağımsız değişkenler olmak üzere

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$$

şeklinde yazılan denkleme bir boyutlu lineer dalga denklemi denir.

Tanım 3.1.13. u bağımlı değişken x, y ve t bağımsız değişkenler olmak üzere

$$u_{tt} - c^2(u_{xx} + u_{yy}) = 0$$

denklemine iki boyutlu lineer dalga denklemi denir.

Tanım 3.1.14. u bağımlı değişken x, y, z ve t bağımsız değişkenler olmak üzere

$$u_{tt} - c^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = 0$$

denklemine üç boyutlu lineer dalga denklemi denir.

Tanım 3.1.15. u bağımlı değişken x ve t bağımsız değişkenler olmak üzere

$$u_t - k u_{xx} = 0$$

denklemine bir boyutlu lineer ısı denklemi denir.

Tanım 3.1.16. u bağımlı değişken x, y ve t bağımsız değişkenler olmak üzere

$$u_t + c(u) u_{xx} = 0$$

denklemine birinci mertebeden lineer olmayan bir dalga oluşum denklemi denir.

Tanım 3.1.17.

$$u_t + u u_x = u_{xx}$$

$x \to \infty$ iken $u \to 0$ ve $x \to -\infty$ iken $u \to u_0 (> 0)$ koşulları ile verilen denkleme Burgers denklemi denir.

Tanım 3.1.18.

$$u_t - 6 u u_x + u_{xxx} = 0$$

$|x| \to \infty$ iken $u, u_x, u_{xx} \to 0$ koşulları ile verilen denkleme KdV denklemi denir.

Tanım 3.1.19.

$$u_t + 6u^2u_x + u_{xxx} = 0$$

$|x| \to \infty$ iken $u, u_x, u_{xx} \to 0$ koşulları ile verilen denkleme Modifiye KdV denklemi denir.

Tanım 3.1.20.

$$u_{tt} = u_{xx} + u_xu_{xx} + u_{xxxx}$$

$|x| \to \infty$ iken $u_x, u_{xx}, u_{xxx} \to 0$ koşulları ile verilen denkleme Elastik Medyum denklemi denir.

Tanım 3.1.21. f bir fonksiyon olsun. Eğer f fonksiyonunun tanım kümesindeki her x elemanı için $f(x) = f(x + T)$ olacak şekilde bir T pozitif sayısı varsa f fonksiyonuna periyodik fonksiyon denir. T sayısına da periyot denir.

Tanım 3.1.22. $p(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$ polinomuna $\cos x$ fonksiyonunun Maclaurin seri açılımı denir.

Tanım 3.1.23. $p(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x7}{7!} + \cdots$ polinomuna $\sin x$ fonksiyonunun Maclaurin seri açılımı denir.

Tanım 3.1.24. $p(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} \cdots$ polinomuna e^x fonksiyonunun Maclaurin seri açılımı denir.

Tanım 3.1.25. e^x fonksiyonunda x yerine ix yazılır ve düzenlenirse $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ elde edilir. $x = \pi$ için $e^{i\pi} + 1 = 0$ şeklinde yazılan denkleme de Euler denklemi denir.

3.2. Fourier Serisi ve Fourier Dönüşümü

Teorem 3.2.1. $[0, L]$ aralığında L periyodu ile tekrarlanan bir $f(x)$ fonksiyonu

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \frac{2\pi n}{L} x + b_n \sin \frac{2\pi n}{L} x)$$

sonsuz seri toplamı ile ifade edilebilir. Bu seri toplamına Fourier serisi denir.

İSPAT: Farklı frekansları olan fonksiyonları tek bir periyotta birleştirmek mümkün mü sorusu Fourier teoremindeki katsayıları bulmamızı sağlayacaktır. Fazı w ve büyüklüğü A olan bir $f(x)$ fonksiyonu $f(x) = A\sin\left(\frac{2\pi}{L}x + w\right)$ ile yazılabilir. Farklı frekanslardaki bu fonksiyonların toplamı

$$f(x) = \sum_{n=1}^{N} A_n \sin\left(\frac{2\pi n}{L}x + w_n\right)$$

olarak yazılabilir. Sinüs fonksiyonunun toplam formülünden

$$f(x) = \sum_{n=1}^{N} A_n \sin w_n \cos\frac{2\pi n}{L}x + \sum_{n=1}^{N} A_n \cos w_n \sin\frac{2\pi n}{L}x$$

yazılır. Burada $A_n \sin w_n = a_n$ ve $A_n \cos w_n = b_n$ yazılırsa

$$f(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n \cos\frac{2\pi n}{L}x + \sum_{n=1}^{N} b_n \sin\frac{2\pi n}{L}x$$

elde edilir. $N \to \infty$ ve $n = 0$ dan başlatılırsa

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{2\pi n}{L}x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{2\pi n}{L}x$$

elde edilir. Her tarafı $\cos\frac{2\pi m}{L}x$ ile çarpar ve $m = n$ için integralini bulursak

$$\int_0^L f(x)\cos\frac{2\pi m}{L}x dx = a_n\frac{L}{2}$$

olur. Buradan

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{2\pi n}{L}x dx$$

bulunur. $f(x)$ fonksiyonunu $\sin\frac{2\pi m}{L}x$ ile çarpıp benzer işlemleri tekrarlrsak

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{2\pi n}{L}x dx$$

bulunur. $n = 0$ için

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)dx$$

bulunur.

Teorem 3.2.2.

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{2\pi n}{L}x} dx$$

seri toplamı ile ifade edilen fonksiyona Kompleks Fourier Serisi denir.

İSPAT: Euler denklemi yardımıyla elde edilen $\cos\frac{2\pi n}{L}x = \dfrac{e^{i\frac{2\pi n}{L}x} + e^{-i\frac{2\pi n}{L}x}}{2}$ ve $\sin\frac{2\pi n}{L}x = \dfrac{e^{i\frac{2\pi n}{L}x} - e^{-i\frac{2\pi n}{L}x}}{2i}$ ifadeleri

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\frac{2\pi n}{L}x + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin\frac{2\pi n}{L}x$$

fonksiyonunda yerine yazılırsa

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[e^{i\frac{2\pi n}{L}x} \left(\frac{a_n - ib_n}{2} \right) + e^{-i\frac{2\pi n}{L}x} \left(\frac{a_n + ib_n}{2} \right) \right]$$

elde edilir. Burada $\dfrac{a_n - ib_n}{2} = c_n$ yazılırsa $\dfrac{a_n + ib_n}{2} = c_{-n}$ olur. İkinci kısımda n yerine $-n$ yazılır ve sınırlar yeniden düzenlenirse

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{i\frac{2\pi n}{L}x} + \sum_{n=-\infty}^{0} c_n e^{i\frac{2\pi n}{L}x}$$

ve buradan

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{2\pi n}{L}x}$$

elde edilir. Bu fonksiyon bize Kompleks Fourier Serisini verir. Bu serideki katsayıyı bulmak için her tarafı $e^{-i\frac{2\pi m}{L}x}$ ile çarpıp integre edersek $n = m$ için

$$c_n = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) e^{-i\frac{2\pi n}{L}x} dx$$

elde edilir.

Teorem 3.2.3. $f : [-L, L] \to \mathbf{C}$ fonksiyonu için yazılan

$$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx$$

ifadesine $f(x)$ fonksiyonunun Fourier Dönüşümü denir.

İSPAT: Kompleks Fourier Serisinde alınan periyodik fonksiyonlar için elde ettiğimiz $f(x)$ ve c_n ifadeleri $2L$ periyot için tekrar düzenlenirse

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{\pi n}{L}x} dx \tag{3.2.1}$$

ve

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-i\frac{\pi n}{L}x} dx \tag{3.2.2}$$

yazılır. $f(x)$ periyodik olmasa bile $L \to \infty$ alındığında periyot da sonsuzmuş gibi düşünülebilir ve böylece Fourier seri açılımı benzer yöntemle yapılabilir. $k_n = \dfrac{n\pi}{L}$ alınırsa $\triangle\ k = k_{n+1} - k_n = \dfrac{\pi}{L}$ ve buradan $\dfrac{1}{L} = \dfrac{\triangle\ k}{\pi}$ olur. x değişkeni yerine de x' kullanılırsa (3.2.2) eşitliği

$$c_n = \frac{\triangle\ k}{\pi}\int_{-L}^{L} f(x')e^{-ik_n x'} dx'$$

eşitliğine dönüşür. Bu eşitlik (3.2.1) fonksiyonunda yerine yazılırsa

$$f(x) = \frac{1}{2\Pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \triangle\ k e^{ik_n x}\left\{\int_{-L}^{L} f(x')e^{-ik_n x'} dx'\right\}$$

elde edilir. $L \to \infty$ için $\triangle\ k$ çok küçülecektir böylece k_n sürekli bir fonksiyona dönüşecek ve integral alınabilecektir. $\int_{-L}^{L} f(x')e^{-ik_n x'} dx'$ integrali de k ya bağlı bir fonksiyon olacaktır. Böylece

$$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx} dx$$

yazılabilir ki buna Fourier dönüşümü denir. Ayrıca

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(k)e^{ikx} dk$$

elde edilir ki buna da Ters Fourier Dönüşümü denir.

$u(x,t)$ fonksiyonunu Fourier dönüşümü

$$\hat{u}(k,t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)e^{-ikx} dx$$

şeklindedir.

ÖRNEK:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

dalga denklemini $|x| \to \infty$ iken $u, u_x, u_{xx} \to 0$ koşulları ile birlikte Fourier Dönüşümü yardımı ile çözelim.

Öncelikle u_{xx} ve u_{tt} kısmi türevlerini dönüşüm yardımıyla yazalım. Kısmi integrasyon yardımı ile

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} u_{xx}e^{-ikx}dx = ik\int_{-\infty}^{\infty} u_x e^{-ikx}dx &= (ik)^2\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)e^{-ikx}dx \\ &= -k^2\hat{u}(k,t)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} u_{tt}e^{-ikx}dx = \frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{\infty} u_t e^{-ikx}dx &= \frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_{-\infty}^{\infty} ue^{-ikx}dx \\ &= \frac{\partial^2}{\partial t^2}\hat{u}(k,t)\end{aligned}$$

yazılır. Bulunan ifadeler dalga denkleminde yerine yazılırsa $\hat{u}(k,t) = e^{rt}$ dönüşümünün çözüm oluşturacağını görebiliriz. Buradan $r = \pm ick$ ve $\hat{u} = Ae^{ickt} + Be^{-ickt}$ bulunur. Şimdi de ters dönüşüm uygulayıp çözümü elde edebiliriz.

$$\begin{aligned}u(x,t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[Ae^{ickt} + Be^{-ickt}\right]e^{ikx}dk \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} Ae^{ickt}e^{ikx}dk + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} Be^{-ickt}e^{ikx}dk \\ &= F(x+ct) + G(x-ct)\end{aligned}$$

elde edilir.

3.3. İlerleyen Dalga Çözümleri

Bu başlık altında bazı nonlineer denklemlerin ilerleyen dalga çözümleri verilecek ve grafikleri çizilerek bu denklemler görselleştirilecektir.

1. **Burgers Denklemi**

$$u_t + uu_x = u_{xx},$$

$x \to \infty$ iken $u \to 0$ ve $x \to -\infty$ iken $u \to u_0(>0)$ koşulları ile verilen Burgers denkleminin çözümü aşağıdaki gibidir.

Çözüm

$$u(x,t) = f(x-ct)$$

$$u = f(\xi), \quad \xi = x - ct$$

olsun. Bu durumda

$$u_t = f_\xi \xi_t = -cf^{'}, \quad u_x = f_\xi \xi_x = f^{'}, \quad u_{xx} = f^{''}$$

olur. Böylece

$$u_t + uu_x = u_{xx}$$

denkleminde yerine yazılırsa

$$-cf^{'} + ff^{'} = f^{''} \Rightarrow -cf + \frac{1}{2}f^2 + c_1 = f^{'}$$

$x \to \infty$ iken $u \to 0$ olduğundan $f \to 0$ ve $c_1 \to 0$ olur. Böylece

$$f^{'} = \frac{1}{2}f^2 - cf$$

olur. $x \to -\infty$ iken $u \to u_0$ olduğundan

$$0 = \frac{1}{2}{u_0}^2 - cu_0 \Rightarrow u_0(c - \frac{1}{2}u_0) = 0$$

$u_0 \neq 0$ olduğundan $c = \frac{1}{2}u_0$ olur. c denklemde yerine yazılırsa

$$f^{'} = \frac{1}{2}f^2 - \frac{1}{2}u_0 f \Rightarrow \frac{df}{d\xi} = \frac{1}{2}f(f - u_0)$$

olur. Buradan

$$\frac{df}{f(f-u_0)} = \frac{d\xi}{2}$$

denklemi integre edilirse

$$f = u_0 \frac{1}{1 + e^{\alpha}}, \quad (\alpha = \frac{1}{2}u_0\xi + c_1)$$

elde edilir. Hiperbolik tanjant fonksiyonu dönüşümünden yararlanarak

$$f = \frac{1}{2}u_0(1 - \tanh\frac{\alpha}{2})$$

ve buradan

$$f = \frac{1}{2}u_0(1 - \tanh(\frac{1}{4}u_0\xi + c_1))$$

çözümü elde edilir.

2. **KdV Denklemi**

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0,$$

$|x| \to \infty$ iken $u, u_x, u_{xx} \to 0$ koşulları ile verilen KdV denkleminin çözümü aşağıdaki gibidir.

Çözüm

$$u(x,t) = f(x - ct)$$

$$u = f(\xi), \quad \xi = x - ct$$

olsun. Bu durumda

$$u_t = f_\xi \xi_t = -cf', \quad u_x = f_\xi \xi_x = f', \quad u_{xxx} = f'''$$

olur. Böylece

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

denkleminde yerine yazılırsa

$$-cf' - 6ff' + f''' = 0 \Rightarrow f'' = cf + 3f^2 + A$$

olur.

$|x| \to \infty$ iken $u, u_x, u_{xx} \to 0$ olduğundan $f, f'' \to 0$ olur. Böylece $A = 0$ bulunur. Buradan

$$f'' = cf + 3f^2$$

ifadesini f' ile çarparsak;

$$f'f'' = cff' + 3f^2 f' \Rightarrow \frac{1}{2}(f')^2 = \frac{c}{2}f^2 + f^3 + B$$

olur. Benzer yolla $B = 0$ olur. Buradan

$$f' = \pm f\sqrt{2f + c}$$

elde edilir. Reel çözümü sadece $2f + c \geq 0$ durumunda bulunur.

$$\frac{df}{d\xi} = \pm f\sqrt{2f + c} \Rightarrow \frac{df}{f\sqrt{2f + c}} = \pm d\xi$$

olur. $f = -\frac{1}{2}c\,\mathrm{sech}^2\,\theta$ alınırsa;

$$\sqrt{2f + c} = \sqrt{c}\tanh\theta$$

ve

$$df = c\,\mathrm{sech}^2\,\theta\tanh\theta d\theta$$

olacağından

$$\int \frac{c\,\mathrm{sech}^2\,\theta\tanh\theta d\theta}{\frac{-1}{2}c\,\mathrm{sech}^2\,\theta\tanh\theta\sqrt{c}} = \pm\xi + K \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{c}}\theta = \pm\xi + K$$

olur. Buradan

$$\theta = \frac{\sqrt{c}}{2}(\pm\xi + K) \Rightarrow \theta = \frac{\sqrt{c}}{2}(\pm(x - ct) + K)$$

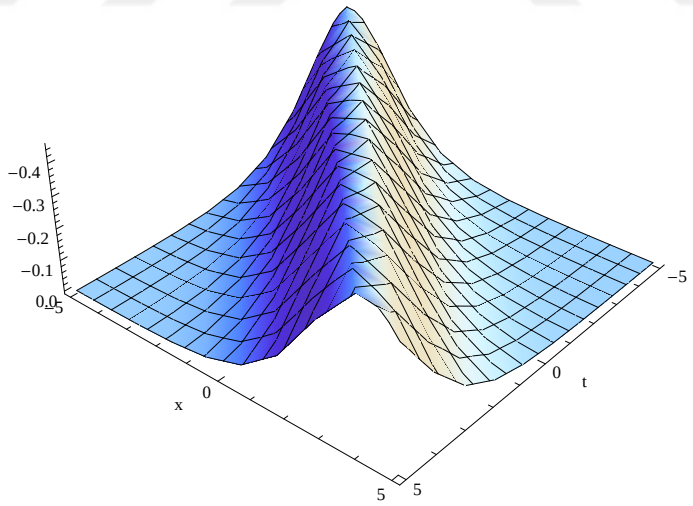
olur. Yerine yazılırsa

$$f = -\frac{1}{2}c\,\mathrm{sech}^2\left[\pm\frac{\sqrt{c}}{2}(x - ct) + K\right]$$

ve buradan

$$f(x - ct) = -\frac{c}{2}\,\mathrm{sech}^2\left[\frac{\sqrt{c}}{2}(x - ct) + K\right]$$

çözümü elde edilir.



Şekil 3.1: KdV denkleminin $c = 0.9$ ve $k = 0.2$ için çözümünün grafiği

3. **Modifiye KdV Denklemi (mKdV)**

$$u_t + 6u^2u_x + u_{xxx} = 0,$$

$|x| \to \infty$ iken $u, u_x, u_{xx} \to 0$ koşulları ile verilen Modifiye KdV denkleminin çözümü aşağıdaki gibidir.

Çözüm

$$u(x,t) = f(x - ct)$$

$$u = f(\xi), \xi = x - ct$$

olsun. Bu durumda

$$u_t = f_\xi \xi_t = -cf^{'}, \quad u_x = f_\xi \xi_x = f^{'}, \quad u_{xxx} = f^{'''}$$

olur. Böylece

$$u_t + 6u^2u_x + u_{xxx} = 0$$

denkleminde yerine yazılırsa

$$-cf^{'} + 6f^2f^{'} + f^{'''} = 0$$

elde edilir. Bu denklem integre edilirse;

$$f^{''} = cf - 2f^3 + A$$

olur.

$|x| \to \infty$ iken $u, u_x, u_{xx} \to 0$ olduğundan $f, f^{''} \to 0$ olur. Böylece $A = 0$ bulunur.

$$f^{''} = cf - 2f^3$$

ifadesini $f^{'}$ ile çarparsak;

$$f^{'}f^{''} = cff^{'} - 2f^3f^{'}$$

elde edilir. Bu denklem integre edilirse ;

$$\frac{1}{2}(f^{'})^2 = \frac{c}{2}f^2 - \frac{1}{2}f^4 + B$$

olur. Benzer yolla $B = 0$ bulunur. Buradan

$$f^{'} = \pm f\sqrt{c - f^2}$$

olur. Reel çözümü sadece $(c - f^2) \geq 0$ durumunda bulunur.

$$\frac{df}{d\xi} = \pm f\sqrt{c - f^2} \Rightarrow \frac{df}{f\sqrt{c - f^2}} = \pm d\xi$$

olur. $f = \sqrt{c}\,\mathrm{sech}\,\theta$ alınırsa;

$$\sqrt{c - f^2} = \sqrt{c}\tanh\theta$$

ve

$$df = \sqrt{c}\,\mathrm{sech}\,\theta\tanh\theta d\theta$$

olacağından

$$\int \frac{\sqrt{c}\,\mathrm{sech}\,\theta\tanh\theta d\theta}{\sqrt{c}\,\mathrm{sech}\,\theta\sqrt{c}\tanh\theta} = \pm\xi + K \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{c}}\theta = \pm\xi + K$$

olur. Buradan

$$\theta = \sqrt{c}(\pm\xi + K) \Rightarrow \theta = \sqrt{c}(\pm(x - ct) + K)$$

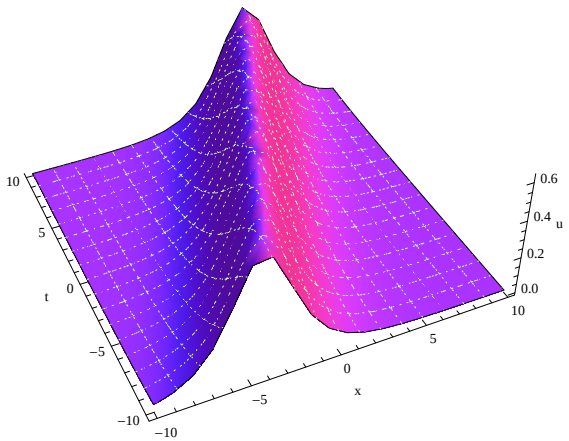
olur. Yerine yazılırsa

$$f = \sqrt{c}\,\mathrm{sech}(\sqrt{c}(\xi + K))$$

ve buradan

$$f(x - ct) = \sqrt{c}\,\mathrm{sech}(\sqrt{c}((x - ct) + K))$$

çözümü elde edilir.



Şekil 3.2: mKdV denkleminin $c = 0.4$ ve $k = 0.1$ için çözümünün grafiği

4. **Elastik- Medyum Denklemi**

$$u_{tt} = u_{xx} + u_x u_{xx} + u_{xxxx},$$

$|x| \to \infty$ iken $u_x, u_{xx}, u_{xxx} \to 0$ koşulları ile verilen Elastik Medyum denkleminin çözümü aşağıdaki gibidir.

Çözüm

$$u(x,t) = f(x - ct)$$

$$u = f(\xi), \quad \xi = x - ct$$

olsun. Bu durumda

$$u_t = f_\xi \xi_t = -cf', \quad u_{tt} = c^2 f'', \quad u_x = f_\xi \xi_x = f', \quad u_{xx} = f'', \quad u_{xxxx} = f''''$$

olur. Böylece

$$u_{tt} = u_{xx} + u_x u_{xx} + u_{xxxx}$$

denkleminde yerine yazılırsa

$$c^2 f'' = f'' + f' f'' + f''''$$

$$c^2 f' = f' + \frac{1}{2}(f')^2 + f''' + A \tag{3.3.1}$$

$|x| \to \infty$ iken $u_x, u_{xx}, u_{xxx} \to 0$ olduğundan $f', f'', f''' \to 0$ olur. Böylece $A = 0$ bulunur. $f' = \phi$ olsun. (3.3.1) denkleminde yerine yazılır ve denklemin her iki tarafı ϕ' ile çarpılırsa

$$\frac{\phi'^2}{2} + \frac{\phi^3}{6} + (1 - c^2)\frac{\phi^2}{2} = 0 \Rightarrow \phi' = \frac{1}{\sqrt{3}}\phi\sqrt{3(c^2-1) - \phi}$$

$$\frac{d\phi}{\phi\sqrt{3(c^2-1) - \phi}} = \frac{d\xi}{\sqrt{3}} \tag{3.3.2}$$

elde edilir. $\mu = 3(c^2 - 1)$ ve $\phi = \mu \operatorname{sech}^2 \alpha$ alınır ve (3.3.2) denkleminde yerine yazılırsa

$$-\frac{2}{\sqrt{\mu}} \int d\alpha = \frac{\xi}{\sqrt{3}} + B$$

elde edilir. Bu denklemden $\alpha = -\dfrac{\sqrt{\mu}}{2\sqrt{3}}\xi - B$ ve $\phi = \mu \operatorname{sech}^2\left(\dfrac{\sqrt{\mu}}{2\sqrt{3}}\xi + B\right)$ bulunur. Bu durumda

$$f = \mu \int \operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{\mu}}{2\sqrt{3}}\xi + B\right) d\xi + C \tag{3.3.3}$$

olur. Bu denklemde $y = \frac{\sqrt{\mu}}{2\sqrt{3}}\xi + B$ alınırsa $dy = \frac{\sqrt{\mu}}{2\sqrt{3}}\xi$ ve $d\xi = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{\mu}}dy$ olur. Böylece

$$\begin{aligned} f &= \frac{\mu 2\sqrt{3}}{\sqrt{\mu}} \int \operatorname{sech}^2 y dy \\ &= \frac{\mu 2\sqrt{3}}{\sqrt{\mu}} \tanh y \end{aligned}$$

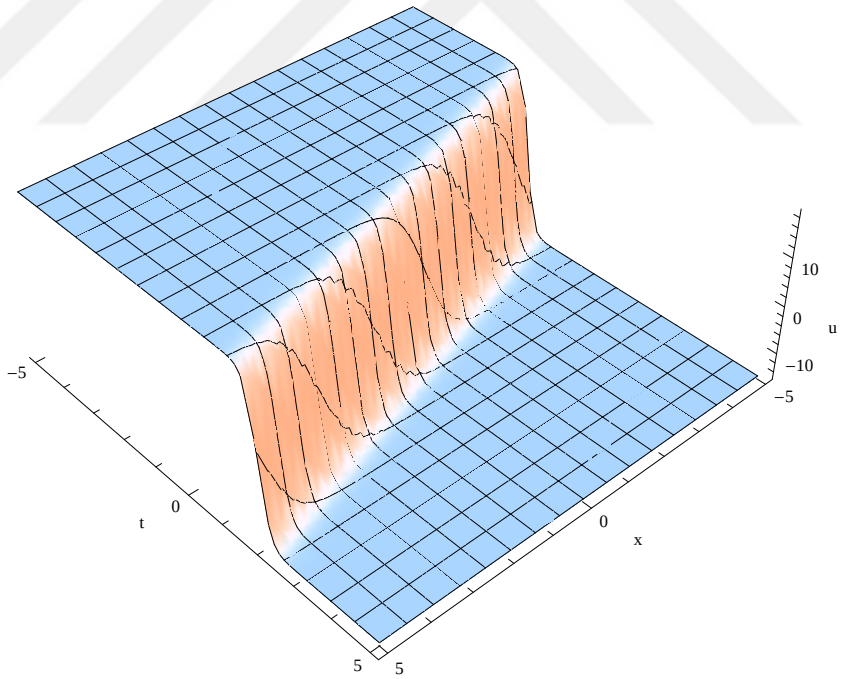
elde edilir. Bu çözümde μ yerine yazılırsa

$$f = 6\sqrt{c^2-1}\tanh\left(\frac{\sqrt{c^2-1}}{2}\xi + B\right) + C$$

bulunur. C keyfi sabit olduğundan $C = f_0$ alınabilir. Bu durumda

$$f(\xi) = f_0 + 6\sqrt{c^2-1}\tanh\left(\frac{\sqrt{c^2-1}}{2}\xi + B\right)$$

bulunur. Burada $\xi = x - ct$ dir.



Şekil 3.3: Elastik medyum denkleminin $f_0 = 2$, $c = 3$ ve $B = 1$ için grafiği

3.4. Hirota D Operatörü, Bilineer Metod , Pertürbasyon Açılımı

Tanım 3.4.1. m ve n pozitif tamsayı, x ve t bağımsız değişkenler olmak üzere

$$D_x^m D_t^n(f.g) = \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'}\right)^m \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t'}\right)^n f(x,t)g(x',t') \mid_{x'=x,t'=t}$$

şeklinde tanımlanan forma Hirota D Operatörü denir. Hirota D Operatörü yardımıyla tanımladığı metodunu integrallenebilir lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemleri bilineer (karesel form) forma dönüştürerek çözüm elde etmeye çalışmıştır. Bu metod özellikle bu tip denklemlerin N-soliton analitik çözümünü verir. Birçok nonlineer denklemin analitik çözümü için kullanışlı bir metod olduğu için birçok kişi tarafından araştırmaya değer görülmüştür. Pekcan (2005) ve Karataş (2013) bu konuda detaylı çalışmalarda bulunmuşlardır. D operatörü beraberinde aşağıda tanımladığımız bazı sonuçları da getirmiştir.

1. $m = 0$ ve $n = 1$ için

$$\begin{aligned} D_t(f.g) &= \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t'}\right) f(x,t)g(x',t') \mid_{x'=x,t'=t} \\ &= f_t g - f g_t \end{aligned} \tag{3.4.1}$$

2. $m = 1$ ve $n = 1$ için

$$\begin{aligned} D_x D_t(f.g) &= \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t'}\right) f(x,t)g(x',t') \mid_{x'=x,t'=t} \\ &= f_{xt} g - f_x g_t - f_t g_x + f g_{xt} \end{aligned} \tag{3.4.2}$$

NOT:

$$D_x D_t(f.g) = D_t D_x(f.g)$$

dir. Hatta daha genel olarak

$$D_x^m D_t^n(f.g) = D_t^n D_x^m(f.g)$$

yazılabilir.

3. $m = 1$ ve $n = 0$ için

$$\begin{aligned} D_x(f.g) &= \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'}\right) f(x,t)g(x',t') \mid_{x'=x,t'=t} \\ &= f_x g - f g_x \end{aligned} \tag{3.4.3}$$

4. $m = 2$ ve $n = 0$ için

$$\begin{aligned} D_x^2(f.g) &= \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'}\right)^2 f(x,t)g(x',t') \mid_{x'=x,t'=t} \\ &= f_{xx}g - 2f_x g_x + f g_{xx} \end{aligned} \tag{3.4.4}$$

5. $m = 3$ ve $n = 0$ için

$$\begin{aligned} D_x^3(f.g) &= \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'}\right)^3 f(x,t)g(x',t') \mid_{x'=x,t'=t} \\ &= f_{xxx}g - 3f_{xx}g_x + 3f_x g_{xx} - f g_{xxx} \end{aligned} \tag{3.4.5}$$

6. $m = 4$ ve $n = 0$ için

$$\begin{aligned} D_x^4(f.g) &= \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'}\right)^4 f(x,t)g(x',t') \mid_{x'=x,t'=t} \\ &= f_{xxxx}g - 4f_{xxx}g_x + 6f_{xx}g_{xx} - 4f_x g_{xxx} + f g_{xxxx} \end{aligned} \tag{3.4.6}$$

Teorem 3.4.1. $D_x^m(f.g) = (-1)^m D_x^m(g.f)$ dir.

Teorem 3.4.2. $D_x^m D_t^n(f.g) = (-1)^{m+n} D_x^m D_t^n(g.f)$ dir.

Teorem 3.4.3.

$$D_x^m(f.1) = \partial_x^m f$$

dir. Böylece $D_x(f.1) = f_x$, $D_x^2(f.1) = f_{xx}$, $D_x^3(f.1) = f_{xxx}$, $D_x D_t(f.1) = f_{xt}$ elde edilir.

Teorem 3.4.4.

$$D_x^m(1.g) = (-1)^m \partial_x^m g$$

dir. Böylece $D_x(1.g) = -g_x$, $D_x^2(1.g) = g_{xx}$, $D_x^3(g.1) = -g_{xxx}$, $D_x D_t(1.g) = g_{xt}$ elde edilir.

7. $g = f$ ve $m = 1, 2, 3, 4$ alınırsa

$$\begin{aligned} D_x(f.f) &= f_x f - f f_x = 0 \\ D_x^2(f.f) &= f_{xx}f - 2f_x f_x + f f_{xx} = 2(f_{xx}f - f_x^2) \\ D_x^3(f.f) &= f_{xxx}f - 3f_{xx}f_x + 3f_x f_{xx} - f f_{xxx} = 0 \\ D_x^4(f.f) &= f_{xxxx}f - 4f_{xxx}f_x + 6f_{xx}f_{xx} - 4f_x f_{xxx} + f f_{xxxx} \\ &= 2(f_{xxxx}f - 4f_{xxx}f_x + 3f_{xx}^2) \\ D_x D_t(f.f) &= 2(f_{xt}f - f_x f_t) \end{aligned} \tag{3.4.7}$$

elde edilir.

Teorem 3.4.5. m tek bir doğal sayı ise $D_x^m(f.f) = 0$ olur.

Teorem 3.4.6. $m + n$ tek bir doğal sayı ise $D_x^m D_t^n(f.f) = 0$ olur.

Teorem 3.4.7. $\phi_i = k_i x + w_i t + \alpha_i$, α_i sabit ($i = 1, 2$) ve e^{ϕ_1} , e^{ϕ_2} üstel fonksiyonlar olsunlar. Bu durumda

$$\begin{aligned} D_x D_t(e^{\phi_1}.e^{\phi_2}) &= (k_1 - k_2)(w_1 - w_2)e^{\phi_1+\phi_2} \\ D_x^m(e^{\phi_1}.e^{\phi_2}) &= (k_1 - k_2)^m e^{\phi_1+\phi_2} \end{aligned} \tag{3.4.8}$$

dir.

İSPAT: (3.4.2) sonucundan

$$\begin{aligned} D_x D_t(e^{\phi_1}.e^{\phi_2}) &= (k_1 w_1 - k_1 w_2 - k_2 w_1 + k_2 w_2)e^{\phi_1+\phi_2} \\ &= (k_1 - k_2)(w_1 - w_2)e^{\phi_1+\phi_2} \end{aligned}$$

kolayca elde edilir.
(3.4.3), (3.4.4), (3.4.5) sonuçlarından

$$\begin{aligned} D_x(e^{\phi_1}.e^{\phi_2}) &= (k_1 - k_2)e^{\phi_1+\phi_2} \\ D_x^2(e^{\phi_1}.e^{\phi_2}) &= (k_1^2 - 2k_1k_2 + k_2^2)e^{\phi_1+\phi_2} = (k_1 - k_2)^2 e^{\phi_1+\phi_2} \\ D_x^3(e^{\phi_1}.e^{\phi_2}) &= (k_1^3 - 3k_1^2k_2 + 3k_1k_2^2 - k_2^3)e^{\phi_1+\phi_2} = (k_1 - k_2)^3 e^{\phi_1+\phi_2} \end{aligned}$$

adımları devam ettirilirse $D_x^m(e^{\phi_1}.e^{\phi_2}) = (k_1 - k_2)^m e^{\phi_1+\phi_2}$ elde edilir. Aynı sonuçlar kullanıldığında

8. $D_x D_t(e^{\phi_1}.e^{\phi_1}) = 0$ olur.

9. $D_x^m(e^{\phi_1}.e^{\phi_1}) = 0$ olur.

Tanım 3.4.2. Nonlineer bir kısmi diferansiyel denklem $F(u, u_t, u_x, u_{xx}, \ldots) = 0$ ile gösterilmiş olsun. Bağımlı değişken $u = u(f)$ dönüşümü kullanılarak bu denklemin Hirota bilineer formu $B(f.f) = 0$ ile ifade edilmiş olsun. Çözümü elde etmek için pertürbasyon açılımı

$$f = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon^i f_i \tag{3.4.9}$$

şeklinde alalım. Burada $f = f(x,t)$ ve ϵ keyfi küçük bir parametredir. Açıkça görülüyor ki bu açılım yaklaşık bir çözüm elde etmemizi sağlar ancak bilineer eşitlik $B(f.f) = 0$ göz önünde bulundurulursa uygun bir f_1 seçimi ile sonsuza giden açılım sonlu terimleri olan bir fonksiyon ile sonlandırılmış olur. Böylece bu çözüm bizi tam çözüme götürür. Bu açılımda $f_0 = 1$ alınır ve $f.f$ çarpımı yazılırsa

$$\begin{aligned} f.f &= (1+\epsilon f_1+\epsilon^2 f_2+\epsilon^3 f_3+\ldots)(1+\epsilon f_1+\epsilon^2 f_2+\epsilon^3 f_3+\ldots) \\ &= 1.1+(f_1.1+1.f_1)\epsilon+(f_2.1+f_1.f_1+1.f_2)\epsilon^2 \\ &+ (f_3.1+f_1.f_2+f_2.f_1+1.f_3)\epsilon^3+\ldots \end{aligned}$$

bulunur. Bu ifadeyi $B(f.f) = 0$ denklemninde yerine yazalım ve ϵ nun kuvvetlerine göre bir araya getirelim. Bu durumda

$$\begin{aligned} \epsilon^0 &: B(1.1) = 0 \\ \epsilon^1 &: B(f_1.1+1.f_1) = 0 \\ \epsilon^2 &: B(f_2.1+f_1.f_1+1.f_2) \\ \epsilon^3 &: B(f_3.1+f_2.f_1+f_1.f_2+1.f_3) = 0 \\ &\vdots \\ \epsilon^m &: B\left(\sum_{j=0}^{m} f_{m-j}.f_j\right) = 0 \end{aligned}$$

yazılır. ϵ^1 kullanılarak 1-soliton çözüm , ϵ^2 kullanılarak 2-soliton çözüm , ..., ϵ^n kullanılarak N-soliton çözüm elde edilir.

Hirota bilineer metodunda denklem üç farklı şekilde ele alınarak çözüm üretilir.

(a) Logaritmik Dönüşüm Yardımıyla

(b) Rasyonel Dönüşüm Yardımıyla

(c) Arctanjant Dönüşümü Yardımıyla

Bu dönüşümler yardımıyla çözüm bulmak her zaman mümkün olmayabilir ama bilineer formların toplamı olarak ifade edilebilir. KdV tarzı denklemler için genellikle logaritmik dönüşüm kullanılır.

ÖRNEK: $u = u(x,t)$ ve $|x| \to \infty$ iken $u \to 0$ koşulları ve

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \tag{3.4.10}$$

formu ile verilen KdV denklemini Hirota bilineer metod (Hirota 1971) yardımıyla çözelim.

ÇÖZÜM: Bu denklemin $|x| \to \infty$ iken $f_x, f_{xx}, f_t, \ldots \to 0$ için $u = 2(\ln f)_{xx}$ logaritmik dönüşüm yardımıyla tam çözümü elde edilebilir. $u = \phi_x$ olsun. Buradan (3.4.10) denklemi

$$\phi_{xt} + 6\phi_x\phi_{xx} + \phi_{xxxx} = 0$$

denklemine dönüşür. Bu denklem integre edilirse

$$\phi_t + 3\phi_x^2 + \phi_{xxx} = c(t) \tag{3.4.11}$$

elde edilir . Burada $c(t)$, t'ye bağlı keyfi bir fonksiyondur. $|x| \to \infty$ iken
$\phi, \phi_x, \phi_t, \phi_{xx}, \phi_{xxx} \to 0$ olacağından $c(t) = 0$ olur. $u = \phi_x = 2(\ln f)_{xx} \Rightarrow \phi = 2\dfrac{f_x}{f}$ için

$$\begin{aligned}
\phi_t &= \frac{2}{f^2}(f_{xt}f - f_x f_t) \\
\phi_x &= \frac{2}{f^2}(f_{xx}f - f_x^2) \\
\phi_{xx} &= 2\left(\frac{f_{xxx}}{f} - 3\frac{f_x f_{xx}}{f^2} + 2\frac{f_x^3}{f^3}\right) \\
\phi_{xxx} &= 2\left(\frac{f_{xxxx}}{f} - 4\frac{f_x f_{xxx}}{f^2} + 12\frac{f_x^2 f_{xx}}{f^3} - 3\frac{f_{xx}^2}{f^2} - 6\frac{f_x^4}{f^4}\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifadeler (3.4.11) denkleminde yerine yazılırsa

$$f_{xt}f - f_x f_t + f f_{xxxx} - 4f_x f_{xxx} + 3f^2 xx = 0 \tag{3.4.12}$$

elde edilir. (3.4.7) de bulunan sonuçlara göre (3.4.11) denklemi

$$(D_x D_t + D_x^4)(f.f) = 0 \tag{3.4.13}$$

denklemine dönüşür. Elde edilen bu sonuca KdV denkleminin Hirota bilineer formu denir. $B = D_x D_t + D_x^4$ alalım ve pertürbasyon açılımına göre ϵ^1 i bulup 1-soliton çözümünü elde edelim.

1-Soliton Çözüm

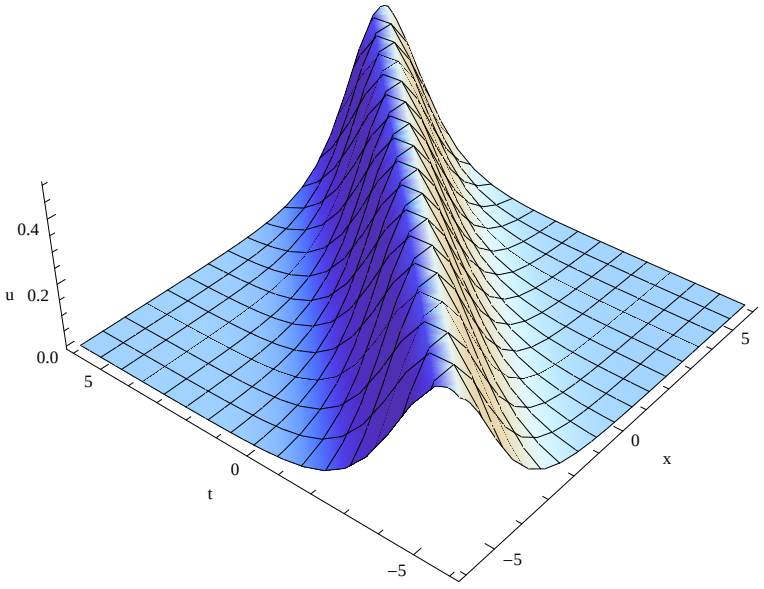
$B = D_x D_t + D_x^4$ için KdV denkleminin bilineer formu $B(f, f) = 0$ denklemini ele alalım. (3.4.13) denklemine (3.4.9) formunda bir çözüm elde etmeye çalışacağız.

$$\epsilon^1 : B(f_1.1 + 1.f_1) = 0 \Rightarrow \epsilon^1 : f_{1,xt} + f_{1,xxxx} = 0 \tag{3.4.14}$$

olur. Burada $f_1 = e^{\theta_1}, \theta_1 = k_1 x + w_1 t + \alpha_1$ alınır ve (3.4.14) denkleminde yazılırsa $w_1 = -k_1^3$, $(k_1 \neq 0)$ elde edilir. Bu durumda $f_1 = e^{\theta_1}, \theta_1 = k_1 x - k_1^3 t + \alpha_1$ yazılır. Pertürbasyon açılımında ϵ^2 açılırsa $f_2 = 0$ seçilebilir ve benzer şekilde $i \geq 2$ için $f_i = 0$ yazılabilir. Genel bir kayıp oluşmayacak şekilde $\epsilon = 1$ alınabilir. Bu durumda $f = 1 + e^{\theta_1}$ olur. f fonksiyonu bulunduğundan denklemin çözümü olan u fonksiyonu da $u(x, t) = 2(\ln f)_{xx}$ den elde edilir.

$$\begin{aligned} u(x,t) = 2(\ln f)_{xx} \Rightarrow u &= 2[\ln(1 + e^{\theta_1})]_{xx} \\ &= 2k_1^2 \frac{e^{\theta_1}}{(1 + e^{\theta_1})^2} \\ &= \frac{1}{2} k_1^2 \operatorname{sech}^2 \frac{\theta_1}{2} \end{aligned}$$

elde edilir ki bu çözüme KdV denkleminin 1- Soliton çözümü denir.



Şekil 3.4: KdV denkleminin $k_1 = 1$, $\alpha_1 = 0.3$ için 1-Soliton çözümünün grafiği

Şimdi de 2-Soliton çözümü elde edelim.

2-Soliton Çözüm

$\theta_1 = k_1x + w_1t + \alpha_1$, $\theta_2 = k_2x + w_2t + \alpha_2$ için $f_1 = \sum_{i=1}^{2} e^{\theta_i} \Rightarrow f_1 = e^{\theta_1} + e^{\theta_2}$ olur.

$$\epsilon^1 : f_{1,xt} + f_{1,xxxx} = 0 \Rightarrow k_1(w_1 + k_1^3)e^{\theta_1} + k_2(w_2 + k_2^3)e^{\theta_2} = 0 \tag{3.4.15}$$

olur. $w_1 = -k_1^3$ ve $w_2 = -k_2^3$ yazılır. Burada $k_1 \neq 0$ ve $k_2 \neq 0$ dır.

$$\epsilon^2 : f_{2,xt} + f_{2,xxxx} = -\frac{1}{2}B(f_1.f_1) \tag{3.4.16}$$

olur.

$$B(f_1.f_1) = B(e^{\theta_1}.e^{\theta_2}) + B(e^{\theta_1}.e^{\theta_2}) = 2B(e^{\theta_1}.e^{\theta_2})$$

elde edilir. (3.4.8) deki eşitlikler kullanıldığında

$$B(e^{\theta_1}.e^{\theta_2}) = -3k_1k_2(k_1 - k_2)^2e^{\theta_1+\theta_2}$$

elde edilir. Bulunan sonuç (3.4.16) de yerine yazılırsa $\theta_i = k_ix - k_i^3t + \alpha_i$ ($i = 1, 2, 3 \ldots$) için

$$f_{2,xt} + f_{2,xxxx} = 3k_1k_2(k_1 - k_2)^2e^{\theta_1+\theta_2} \tag{3.4.17}$$

olur. $\beta = \theta_1 + \theta_2 = (k_1 + k_2)x - (k_1^3 + k_2^3)t + \alpha_1 + \alpha_2$ ve A_{12} bir sabit olmak üzere $f_2 = e^{\theta_1+\theta_2+A_{12}} = e^{\beta+A_{12}}$ olsun. Bunlar (3.4.17) denkleminde yerine yazılırsa

$$e^{A_{12}} = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right)^2$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\epsilon^3 : f_{3,xt} + f_{3,xxxx} = -B(f_1.f_2) \tag{3.4.18}$$

ve

$$B(f_1.f_2) = e^{A_{12}}\left[B(e^{\theta_1}.e^{\theta_1+e^{\theta_2}}) + B(e^{\theta_2}.e^{\theta_1+e^{\theta_2}})\right] \tag{3.4.19}$$

olur. $\beta = \theta_1 + \theta_2 = \beta_1x + \beta_2t + \beta_3$ için ($\beta_1 = k_1 + k_2$, $\beta_2 = -(k_1^3 + k_2^3)$, $\beta_3 = \alpha_1 + \alpha_2$)

$$\begin{aligned} D_xD_t(e^{\theta_i}.e^{\beta}) &= (k_i - k_1 - k_2)(-k_i^3 + k_1^3 + k_2^3)e^{\theta_i+\beta} \\ D_x^4(e^{\theta_i}.e^{\beta}) &= (k_i - k_1 - k_2)^4e^{\theta_i+\beta} \end{aligned} \tag{3.4.20}$$

olduğundan

$$B(e^{\theta_i}.e^{\beta}) = (k_i - k_1 - k_2)\left[k_1^3 + k_2^3 - k_i^3 + (k_i - k_1 - k_2)^3\right] e^{\theta_i+\beta}$$

olur. Böylece

$$B(e^{\theta_1}.e^{\theta_1+e^{\theta_2}}) = 0, B(e^{\theta_2}.e^{\theta_1+e^{\theta_2}}) = 0, B(f_1.f_2) = 0$$

olur. O halde (3.4.18) denklemi için $f_3 = 0$ seçebiliriz. Sonraki adımlardaki işlemler devam ettirilirse benzer şekilde $i \geq 3$ için $f_i = 0$ yazılabilir. Genel bir kayıp oluşmayacak şekilde $\epsilon = 1$ alınabilir. Bu durumda $f = 1 + e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + e^{\theta_1+\theta_2+A_{12}}$ olur. f fonksiyonu bulunduğundan KdV denklemin 2- soliton çözümü olan u fonksiyonu da $u(x,t) = 2(\ln f)_{xx}$ den elde edilir.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde tez konumuz olan Schrödinger denklemi tanıtılacak bazı gösterimleri verilecek ve farklı yöntemlerle elde edilen çözümler verilecektir.

4.1. Schrödinger Denklemi

Klasik Fizikte sistemler konum ve momentum üzerine kurulu ve sistemle ilgili diğer değişkenler de (örneğin; hız, açısal hız, enerji...) bu ikilinin ilişkisinden doğar. Ancak kuantum mekaniğinde sabit bir konumdan bahsetmek çok da mümkün değildir. Böylece bu verileri kullanarak doğru sonuçlara ulaşmak zorlaşır. Kuantum mekaniği bir parçacığın belirli bir konumdaki olasılığını veya belirli bir momentuma sahip olma olasılığını hesaplar. Bu olasılığı bir dalga fonksiyonu yardımıyla gerçekleştirir. Bu fonksiyonun amacı konumu bulmak değil konumun olasılığını hesaplamaktır. Kimyada elektronların bulunma olasılığını anlatan orbitaller buna örnektir. Atomun içinde hareket halinde bulunan elektronların konumlarını tam olarak ifade etmek mümkün değildi ancak elektronların bulunma ihtimalinin en fazla olduğu yerler bulunabilir. Schrödinger denklemi bu şekilde oluşturulan denklemlerden biridir.

Schrödinger denklemi ilk olarak Avusturyalı Fizikçi Erwin Schrödinger tarafından bulunan bir dalga fonksiyonudur. Bu yüzden bu denklem Scrödinger denklemi olarak bilinir. Uzay ve zamana bağlı yazılan bu fonksiyon kuantum sistemi hakkında çözümlemeler yapabilmeye yarayan, sonuçlar üretmemize ve enerjinin korunumu ile hesaplanmasına aracılık eden bir fonksiyondur.
Bu fonksiyonun enerji korumalı çözümünün kapalı formu aşağıdaki gibi yazılabilir.

$\psi(x,t)$ uzay ve zamana bağlı dalga fonksiyonu, p momentum, m kütle , λ dalga boyu , h Planck sabiti, $\hbar$ indirgenmiş Planck sabitini , v hız, k dalga sayısı , w grup fazı ve f frekansı göstermek üzere toplam enerji (E) kinetik enerji(KE) ile potansiyel enerjinin (PE) toplamından oluşur. Yani ;

$$\mathrm{E} = \frac{1}{2}mv^2 + V \tag{4.1.1}$$

dir. $p = mv \Rightarrow v = \dfrac{p}{m}$ enerji denkleminde yerine yazılırsa

$$\mathrm{E} = \frac{p^2}{2m} + V \tag{4.1.2}$$

bulunur. $\psi = \cos(kx - wt) + i\sin(kx - wt)$ formundadır. $\theta = kx - wt$ için $\psi = e^{i\theta}$ yazılabilir. Dalga fonksiyonundan

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = ike^{\theta} \quad \text{ve} \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = (ik)^2 e^{\theta} = -k^2\psi \tag{4.1.3}$$

elde edilir. $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$, De Broglie dalga boyu da $\lambda = \dfrac{h}{p}$, $\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$ eşitliklerinden elde edilen $k = \dfrac{p}{\hbar}$ yerine yazılırsa

$$-\hbar^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = p^2\psi \tag{4.1.4}$$

elde edilir. (4.1.2) enerji denklemi ψ ile çarpılırsa

$$\mathrm{E}\psi = \left(\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V\right)\psi \tag{4.1.5}$$

elde edilir. Bu denkleme Schrödinger denkleminin zamandan bağımsız enerji korumalı denklemi denir.

Şimdi de zamana bağlı denklemi yazmak için foton enerjisi $E = hf$ denkleminden faydalanalım. w açısal frekansı göstermek üzere ve $w = 2\pi f$ enerji denkleminden elde edilirse bu denklemi aynı zamanda $E = \hbar w$ olarak da yazabiliriz. Burada

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = -iw\psi \tag{4.1.6}$$

dir. Bu eşitliğin her tarafı $i\hbar$ ile çarpılırsa

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \mathrm{E}\psi \tag{4.1.7}$$

elde edilir. (4.1.5) ve (4.1.7) denklemlerinden Schrödinger denkleminin zamana bağlı kapalı formu elde edilmiş olur.

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left(\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V\right)\psi \tag{4.1.8}$$

NLS denkleminin farklı gösterimleri vardır.

Non-rölativistik kuantum mekaniğinde

$$i\partial t\psi = \frac{1}{2}\partial x\psi + K|\psi^2|\psi$$

şeklinde gösterilir.

4.2. Nonlineer Schrödinger Denkleminin İlerleyen Dalga Çözümü

r, θ reel fonksiyonlar ve c, n reel sabitler olmak üzere $r(x-ct), \theta(x-ct)$ ve $u = re^{i(\theta+nt)}$ dönüşümü yardımıyla

$$iu_t + u_{xx} + u|u|^2 = 0$$

denkleminin çözümünü elde edelim (Drazin ve Johnson 1989).

Çözüm

$u = re^{i\alpha}, \quad \alpha = \theta(\xi) + nt, \quad r = r(\xi), \quad \xi = x - ct$ olsun. Bu durumda

$$u_t = (r_t + ir\alpha_t)e^{i\alpha}, \quad u_x = (r_x + ir\alpha_x)e^{i\alpha}, \quad u_{xx} = [r_{xx} - r\alpha^2{}_x + i(r\alpha_{xx} + 2r_x\alpha_x)]e^{i\alpha}$$

ve

$$r_t = -cr^{'}, \quad r_x = r^{'}, \quad r_{xx} = r^{''}$$

ve

$$\alpha_t = -c\theta^{'} + n, \quad \alpha_x = \theta^{'}, \quad \alpha_{xx} = \theta^{''}$$

olur. Böylece

$$iu_t + u_{xx} + u|u|^2 = 0$$

denkleminde yerine yazılırsa

$$(ir_t - r\alpha_t)e^{i\alpha} + [r_{xx} - r\alpha^2{}_x + i(r\alpha_{xx} + 2r_x\alpha_x)]e^{i\alpha} + re^{i\alpha}re^{i\alpha}re^{-i\alpha} = 0$$

olur. Buradan

$$-r\alpha_t + r_{xx} - r\alpha^2{}_x + r^3 + i(r_t + r\alpha_{xx} + 2r_x\alpha_x) = 0$$

olur. Burada

$$-r\alpha_t + r_{xx} - r\alpha^2 x + r^3 = 0$$

ve

$$r_t + r\alpha_{xx} + 2r_x\alpha_x = 0$$

yazılır. Bulunan kısmi türevler yerine yazılırsa

$$-cr' + 2r'\theta' + r\theta'' = 0 \tag{4.2.1}$$

ve

$$r^3 + r(c\theta' - n) + r'' - r\theta'^2 = 0 \tag{4.2.2}$$

elde edilir. (4.2.1) denklemi çözülürse

$$r^2\theta'' + 2rr'\theta' - crr' = 0 \Rightarrow (r^2\theta')' - c\left(\frac{r^2}{2}\right)' = 0$$

olur. Bu denklem integre edilirse

$$r^2\left(\theta' - \frac{c}{2}\right) = \frac{A}{2}$$

elde edilir. Buradan

$$\theta' = \frac{1}{2}\left(c + \frac{A}{r^2}\right)$$

olur. Bu değer (4.2.2) denkleminde yerine yazılırsa

$$r^3 + r\left(\frac{c^2}{4} - n\right) + r'' - \frac{1}{4}\frac{A^2}{r^3} = 0 \tag{4.2.3}$$

denklemi elde edilir. Bu denklem r' ile çarpılır ve integre edilirse

$$\frac{r'^2}{2} + \frac{r^4}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{c^2}{4} - n\right)r^2 + \frac{A^2}{8}\frac{1}{r^2} = -\frac{B}{4}$$

elde edilir. Bu ifadeyi r^2 ile çarpar ve düzenlersek

$$2r^6 + 4\left(\frac{c^2}{4} - n\right)r^4 + 2Br^2 + A^2 + 4r^2r'^2 = 0$$

elde edilir. Bu denklem r^2 ye bağlı bir denkleme dönüştürülür ve $r^2 = S$ alınırsa $2rr' = S'$ olur. Buradan

$$2(r^2)^3 - 4\left(n - \frac{c^2}{4}\right)(r^2)^2 + 2Br^2 + A^2 + (2rr')^2 = 0$$

olur. Böylece

$$2S^3 - 4\left(n - \frac{c^2}{4}\right)S^2 + 2BS + A^2 + S'^2 = 0$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} S'^2 &= -2\left[S^3 - 2\left(n - \frac{c^2}{4}\right)S^2 + BS + \frac{A^2}{2}\right] \\ &= -2F(S) \end{aligned}$$

ve

$$F(S) = S^3 - 2\left(n - \frac{c^2}{4}\right)S^2 + BS + \frac{A^2}{2}$$

olur.

4.3. Nonlineer Schrödinger Denkleminin Hirota Metodu İle Çözümü

Bu bölümde $\varepsilon = \pm 1$ ve

$$iu_t + u_{xx} + \varepsilon u|u|^2 = 0 \tag{4.3.1}$$

ile verilen Nonlineer Schrödinger denklemini ele alacağız. $\varepsilon = 1$ için focusing NLS (NLS+) ve $\varepsilon = -1$ için defocusing NLS (NLS-) olarak adlandırılır. NLS tamamen integrallenebilir bir denklemdir. Soliton çözümünü Hirota ile elde etmek için focusing NLS denklemini alacağız (Hirota 1973).

Çözüm g kompleks , f reel değerli bir fonksiyon olmak üzere $u = \dfrac{g}{f}$ rasyonel dönüşüm yardımıyla

$$\begin{aligned} u_t &= \frac{g_t f - g f_t}{f^2} \\ u_{xx} &= \frac{g_{xx} f - 2 f_x g_x - g f_{xx}}{f^2} + 2\frac{f_x^2 g}{f^3} \end{aligned}$$

elde edilir. Bunlar (4.3.1) denkleminde yerine yazılırsa

$$i\frac{g_t f - g f_t}{f^2} + \frac{g_{xx} f - 2 f_x g_x - g f_{xx}}{f^2} + 2\frac{f_x^2 g}{f^3} + 2\frac{|g|^2 g}{f^3} = 0 \tag{4.3.2}$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılır ve (3.4.7) deki sonuçlar kullanılırsa

$$(iD_t + D_x^2)(g.f) = 0 \tag{4.3.3}$$

ve

$$D_x^2(f.f) = |g|^2 \tag{4.3.4}$$

bilineer form elde edilmiş olur. Şimdi $f = 1 + \epsilon f_1 + \epsilon^2 f_2 + \epsilon^3 f_3 + \ldots$ ve $g = \epsilon g_1 + \epsilon^2 g_2 + \epsilon^3 g_3 + \ldots$ olarak alalım.

$$\begin{aligned} g.f &= (\epsilon g_1 + \epsilon^2 g_2 + \epsilon^3 g_3 + \ldots)(1 + \epsilon f_1 + \epsilon^2 f_2 + \epsilon^3 f_3 + \ldots) \\ &= (g_1.1)\epsilon + (g_1.f_1 + g_2.1)\epsilon^2 + (g_1.f_2 + g_2.f_1 + g_3.1)\epsilon^3 + \ldots \end{aligned}$$

bulunur. $B = iD_t + D_x^2$ alalım ve $B(g.f) = 0$ denklemninde yerine yazarak ϵ nun kuvvetlerine göre bir araya getirelim. Bu durumda

$$\begin{aligned} \epsilon^1 &: B(g_1.1) = 0 \\ \epsilon^2 &: B(g_1.f_1 + g_2.1) = 0 \\ \epsilon^3 &: B(g_1.f_2 + g_2.f_1 + g_3.1) = 0 \\ &\vdots \end{aligned} \tag{4.3.5}$$

elde edilir. $(iD_t + D_x^2)(g_1.1) = ig_{1,t} + g_{1,xx}$ ve benzer şekilde diğerleri (4.3.5) sonuçlarında yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} ig_{1,t} + g_{1,xx} &= 0 \\ ig_{2,t} + g_{2,xx} &= -(iD_t + D_x^2)(g_1.f_1) \\ ig_{3,t} + g_{3,xx} &= -(iD_t + D_x^2)(g_1.f_2 + g_2.f_1) \\ &\vdots \\ ig_{n,t} + g_{n,xx} &= -(iD_t + D_x^2)(\sum_{k=1}^{n-1} g_k.f_{n-k}) \end{aligned} \tag{4.3.6}$$

olur. Şimdi de $D_x^2(f.f) = |g|^2$ denklemine bakalım. g kompleks değerli bir fonksiyon olduğundan g^* , g fonksiyonunun eşleniğini göstermek üzere $|g|^2 = g.g^*$ dir. Burada

$$\begin{aligned} f.f &= (1 + \epsilon f_1 + \epsilon^2 f_2 + \epsilon^3 f_3 + \ldots)(1 + \epsilon f_1 + \epsilon^2 f_2 + \epsilon^3 f_3 + \ldots) \\ &= 1.1 + (f_1.1 + 1.f_1)\epsilon + (f_2.1 + f_1.f_1 + 1.f_2)\epsilon^2 \\ &+ (f_3.1 + f_1.f_2 + f_2.f_1 + 1.f_3)\epsilon^3 + \ldots \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} |g|^2 = g.g^* &= \epsilon^2(g_1.g_1^* + \epsilon g_1.g_2^* + \epsilon g_2.g_1^* + \epsilon^2 g_2.g_2^* + \epsilon^2 g_3.g_1^* \ldots) \\ &= \epsilon^2|g_1|^2 + \epsilon^3(g_1.g_2^* + \epsilon g_2.g_1^*) + \epsilon^4(|g_2|^2 + g_3.g_1^*) + \ldots \end{aligned}$$

olacağından

$$\begin{aligned} D_x^2(f.f) = |g|^2 \;\Rightarrow\; & D_x^2(1.1) + D_x^2(f_1.1 + 1.f_1)\epsilon + D_x^2(f_2.1 + f_1.f_1 + 1.f_2)\epsilon^2 \\ &+ D_x^2(f_3.1 + f_1.f_2 + f_2.f_1 + 1.f_3)\epsilon^3 + \ldots \\ &= \epsilon^2|g_1|^2 + \epsilon^3(g_1.g_2^* + \epsilon g_2.g_1^*) + \epsilon^4(|g_2|^2 + g_3.g_1^*)\ldots \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}
\epsilon^0 &: D_x^2(1.1) = 0 \\
\epsilon^1 &: D_x^2(f_1.1 + 1.f_1) = 0 \\
\epsilon^2 &: D_x^2(f_2.1 + f_1.f_1 + 1.f_2) - |g_1|^2 = 0 \\
\epsilon^3 &: D_x^2(f_3.1 + f_1.f_2 + f_2.f_1 + 1.f_3) - (g_1.g_2^* + g_2.g_1^*) = 0 \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{4.3.7}$$

yazılır. Böylece

$$\begin{aligned}
f_{1,xx} &= 0 \\
f_{2,xx} &= \frac{1}{2}\left[|g_1|^2 - D_x^2(f_1.f_1)\right] \\
f_{3,xx} &= \frac{1}{2}(g_1.g_2^* + g_2.g_1^*) - D_x^2(f_1.f_2) \\
&\vdots \\
f_{n,xx} &= \frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{n-1} g_k.g_{n-k}^* - D_x^2(\sum_{k=1}^{n-1} f_k.f_{n-k})\right]
\end{aligned} \tag{4.3.8}$$

elde edilir. $\theta_i = k_i x + w_i t + \alpha_i$ için

$$g_1 = \sum_{i=1}^{N} e^{\theta_i}$$

NLS denkleminin N -soliton çözümünü verir. $N = 1$ için 1-Soliton çözümünü inceleyelim.

1-Soliton Çözüm

$g_1 = e^{\theta_1}$ ve $\theta_1 = k_1 x + w_1 t + \alpha_1$ için (4.3.6) denkleminden elde ettiklerimize göre $ig_{1,t} + g_{1,xx} = 0 \Rightarrow w_1 = ik_1^2$ bulunur. Aynı şekilde (4.3.8) deki denklemden de $f_1 = 0$ dır. Bu yüzden (4.3.6) dan $ig_{2,t} + g_{2,xx} = 0$ olur. O halde $g_2 = 0$ seçilebilir. $f_1 = 0$ olduğundan (4.3.8) deki denklemden $f_{2,xx} = \frac{1}{2}g_1.g_1^* = \frac{1}{2}e^{\theta_1}.e^{\theta_1^*}$ olur. f_2 reel bir fonksiyon olduğundan $f_2 = e^{\theta_1+\theta_1^*+A_{11}} = e^{\beta}$ seçilebilir. Burada $\beta = (k_1 + k_1^*)x + (w_1 + w_1^*)t + \alpha_1 + \alpha_1^* + A_{11}$ dir. Yerine yazılırsa $e^{A_{11}} = \frac{1}{2(k_1+k_1^*)^2}$ bulunur. Burdan görülüyor ki f_2 beklediğimiz gibi reel bir fonksiyondur. İşlemler benzer şekilde devam ettirilirse f_3 ve sonraki f fonksiyonlarının 0 çıkacağı açıktır. Şimdi de (4.3.6) dan

$$ig_{3,t} + g_{3,xx} = -(iD_t + D_x^2)(g_1.f_2 + g_2.f_1)$$

denklemine bakalım. $f_1 = 0$ ve $g_2 = 0$ olduğundan

$$ig_{3,t} + g_{3,xx} = -(iD_t + D_x^2)(g_1.f_2)$$

denklemine bakacağız. g_1 ve f_2 fonksiyonları yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} ig_{3,t} + g_{3,xx} &= -(iD_t + D_x^2)(e^{\theta_1}.e^{\beta}) \\ &= -e^{\theta_1}.e^{\beta}\left[i(ik_1^2 - (ik_1^2 - ik_1^{*2})) + k_1^2 - 2k_1(k_1 + k_1^*) + (k_1 + k_1^*)^2\right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. İşlemler devam ettirilirse g_3 ve sonraki g fonksiyonlarının 0 çıkacağı açıktır. O halde $i \geq 3$ için $f_i = 0$ ve $g_i = 0$ yazılabilir. Bu durumda $g = \epsilon g_1$ ve $f = 1 + \epsilon^2 f_2$ olur. $\epsilon = 1$ alınırsa $g_1 = e^{\theta_1}$ ve $f_2 = e^{\theta_1 + \theta_1^* + A_{11}}$ için NLS denkleminin çözümü $u = \dfrac{g}{f}$ den

$$u = \frac{e^{\theta_1}}{1 + e^{\theta_1 + \theta_1^* + A_{11}}} \tag{4.3.9}$$

bulunur. Bu da NLS denkleminin 1-Soliton çözümüdür. Elde ettiğimiz bu çözüm $\varepsilon = 1$ için elde edilen çözümdür. $a, b \in \mathrm{R}$ ve $k_1 = a + ib$ alınır ve (4.3.9) denklemi düzenlenirse

$$u(x,t) = \sqrt{2}a\frac{e^{i[bx + (a^2 - b^2)t]}}{\cosh[a(x - 2bt)]}$$

denklemine dönüşür. $\varepsilon = -1$ alınırsa

$$u(x,t) = -\sqrt{2}a\frac{e^{i[bx + (a^2 - b^2)t]}}{\sinh[a(x - 2bt)]}$$

1-soliton çözümü elde edilmiş olur. NLS denkleminin 1-Soliton çözümünün grafiği (4.1) deki şekilde verilmiştir.

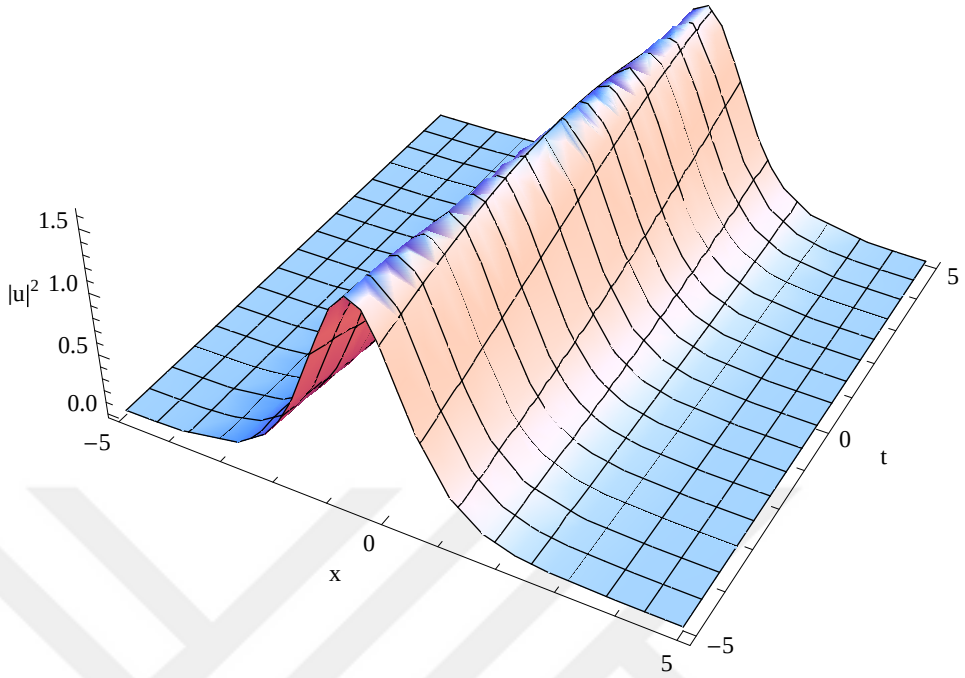
Şimdi de 2-Soliton çözümü elde edelim.

2-Soliton Çözüm

$$g_1 = \sum_{i=1}^{N} e^{\theta_i}$$

için $N = 2$ alındığında 2-Soliton çözümü elde etmiş oluruz. $\theta_1 = k_1 x + w_1 t + \alpha_1$, $\theta_2 = k_2 x + w_2 t + \alpha_2$ için $g_1 = \sum_{i=1}^{2} e^{\theta_i} \Rightarrow g_1 = e^{\theta_1} + e^{\theta_2}$ olur.

$$ig_{1,t} + g_{1,xx} = 0 \Rightarrow i(w_1 e^{\theta_1} + w_2 e^{\theta_2}) + (k_1^2 e^{\theta_1} + k_2^2 e^{\theta_2}) = 0$$



Şekil 4.1: NLS denkleminin $a = 0.9$ ve $b = 0.1$ için 1-Soliton çözümünün grafiği

olur. Buradan $w_1 = ik_1^2$ ve $w_2 = ik_2^2$ yazılır. Burada $k_1 \neq 0$ ve $k_2 \neq 0$ dır. Aynı şekilde (4.3.8) deki denklemden de $f_1 = 0$ dır. Bu yüzden (4.3.6) dan $ig_{2,t} + g_{2,xx} = 0$ olur. O halde $g_2 = 0$ seçilebilir. $f_1 = 0$ olduğundan (4.3.8) deki denklemden

$$\begin{aligned} f_{2,xx} &= \frac{1}{2} g_1 . g_1^* = \frac{1}{2}(e^{\theta_1} + e^{\theta_2})(e^{\theta_1^*} + e^{\theta_2^*}) \\ &= \frac{1}{2}(e^{\theta_1+\theta_1^*} + e^{\theta_1+\theta_2^*} + e^{\theta_2+\theta_1^*} + e^{\theta_2+\theta_2^*}) \end{aligned}$$

olur. Buradan $f_2 = e^{\theta_1+\theta_1^*+A_{11}} + e^{\theta_1+\theta_2^*+A_{12}} + e^{\theta_2+\theta_1^*+A_{21}} + e^{\theta_2+\theta_2^*+A_{22}}$ seçilebilir. Şimdi de (4.3.6) dan

$$ig_{3,t} + g_{3,xx} = -(iD_t + D_x^2)(g_1 . f_2 + g_2 . f_1)$$

denklemine bakalım. $f_1 = 0$ ve $g_2 = 0$ olduğundan

$$ig_{3,t} + g_{3,xx} = -(iD_t + D_x^2)(g_1 . f_2)$$

denklemine bakacağız. g_1 ve f_2 fonksiyonları yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} ig_{3,t} + g_{3,xx} &= -(iD_t + D_x^2)(e^{\theta_1} + e^{\theta_2})(e^{\theta_1+\theta_1^*+A_{11}} + e^{\theta_1+\theta_2^*+A_{12}} + e^{\theta_2+\theta_1^*+A_{21}} \\ &+ e^{\theta_2+\theta_2^*+A_{22}}) \\ &= e^{\theta_1+\theta_1^*+\theta_2}(e^{A_{11}} + e^{A_{21}}) + e^{\theta_2+\theta_1+\theta_2^*}(e^{A_{22}} + e^{A_{12}}) \\ &= e^{\theta_1+\theta_1^*+\theta_2+B_{12}} + e^{\theta_2+\theta_1+\theta_2^*+B_{12}} \end{aligned}$$

bulunur. Buradan $g_3 = e^{\theta_1+\theta_1^*+\theta_2+B_{121}} + e^{\theta_2+\theta_1+\theta_2^*+B_{122}}$ seçilebilir. Benzer şekilde işlemler devam ettirilirse $f_3 = 0$ ve $g_4 = 0$ elde edilecektir. Şimdi de (4.3.8) den f_4 ü bulalım. $f_1 = 0$ ve $g_2 = 0$ olduğundan

$$f_{4,xx} = \frac{1}{2}(g_1.g_3^* + g_2.g_2^* + g_3.g_1^*)$$

denkleminden $f_4 = e^{\theta_1+\theta_2+\theta_1^*+\theta_2^*+C_{121}}$ bulunur. İşlemler devam ettirilirse $i \geq 5$ için $f_i = 0$ ve $g_i = 0$ yazılabilir. Bu durumda $g = \epsilon g_1 + \epsilon^3 g_3$ ve $f = 1 + \epsilon^2 f_2 + \epsilon^4 f_4$ olur. $\epsilon = 1$ alınırsa $g = e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + e^{\theta_1+\theta_1^*+\theta_2+B_{121}} + e^{\theta_2+\theta_1+\theta_2^*+B_{122}}$ ve $f = 1 + e^{\theta_1+\theta_1^*+A_{11}} + e^{\theta_1+\theta_2^*+A_{12}} + e^{\theta_2+\theta_1^*+A_{21}} + e^{\theta_2+\theta_2^*+A_{22}} + e^{\theta_1+\theta_2+\theta_1^*+\theta_2^*+C_{121}}$ için denklemin çözümü $u = \frac{g}{f}$ den

$$u = \frac{e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + e^{\theta_1+\theta_1^*+\theta_2+B_{121}} + e^{\theta_2+\theta_1+\theta_2^*+B_{122}}}{1 + e^{\theta_1+\theta_1^*+A_{11}} + e^{\theta_1+\theta_2^*+A_{12}} + e^{\theta_2+\theta_1^*+A_{21}} + e^{\theta_2+\theta_2^*+A_{22}} + e^{\theta_1+\theta_2+\theta_1^*+\theta_2^*+C_{121}}}$$

bulunur ki bu da NLS denkleminin 2-Soliton çözümüdür.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasında fiziksel uygulamada kullanım alanı yaygın olan Nonlineer Schrödinger denkleminin farklı yöntemlerle çözümlerinin elde edilebileceği üzerinde durduk. Ayrıca Hirota metodu ile N-soliton çözümlerini nasıl elde edebileceğimiz üzerine bir çalışma yaptık. 1-Soliton ve 2-Soliton çözümlerini elde ettik. Aynı zamanda N-Soliton çözümün de benzer şekide genelleştirilebileceği sonucuna vardık. Hirota metodu diğer evolüsyon denklemlere de uygulanabilir.

6. KAYNAKLAR

Ablowitz, M. J., Ladik, J. F. 1975. Nonlinear differential-difference equations. ***Journal of Mathematical Physics***, 16, 598-603.

Dias, F., Bridges, T. Weakly nonlinear wave packets and the nonlinear Scrödinger equation. Summer School Graduate Course. Nonlineer waves in fluids. Recent Advancess and Modern Applications, International Centre for Mechanical Sciences. Udine, Italy.

Drazin, P. G. , Johnson, R. S. 1989. Solitons: An Introduction. Cambridge University Press. Cambridge.

Gardner, C. S. , Greene, J. M. , Kruskal, M. D. , Miura, R. M. 1967.***Phys. Rev. Lett.***, 19, 1095.

Gordon, J.P. 1992. Dispersive perturbations of solitons of the nonlinear Schrödinger equation . ***Journal of the Optical Society of America B***, 91-97.

Hirota, R. 1971. Exact Solution of the Korteweg-de Vries Equation for Multiple Collisions of Solitons. ***Phys. Rev. Lett***, 27, 1192.

Hirota, R. 1972. Exact Solution of the Modified Korteweg-de Vries Equation for Multiple Collisions of Solitons. ***Journal of the Physical Society of Japan***, 33(5):1456-1458.

Hirota, R. 1973. Exact Envelope-Soliton Solutions of a Nonlinear Wave Equation. ***Journal of Mathematical Physics***, 14(7):805-809.

Hirota , R. 1980. Direct methods in soliton thoery. Solitons. Topics in Current Physics, vol. 17. Berlin: Springer-Verlag.

Hirota, R. 2004. The Direct Method in Soliton Theory. New York: Cambridge University Press, 12-58

Karaoğlu, B. 2012. Fizik ve Mühendislikte Matematik Yöntemler. Seçkin Yayıncılık. Ankara.

Karaoğlu, B. 2008. Kuantum mekaniğine Giriş. Seçkin Yayıncılık. Ankara.

Karataş, E. 2013. Bazı Lineer Olmayan Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Çoklu Soliton Çözümleri İçin Hirota Metodu. Yükseklisans Tezi, Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Elazığ.

Korteweg, D. J. de Vries, G. 1895. On the Change of Form of Long Waves Advancing in a Rectangular Canal, and on a New Type of Long Stationary Waves. ***Philosophical Magazine***

Lomdahl, Peter. S. 1984. Solitons in Biology. ***Los Alamos Scince Spring*** , 27-31.

Liu, A. K. , Holbrook, T. R ., Apel, J. R. 1985. Nonlinear internal wave evolution in the Sulu Sea. ***J. Phys, Oceanogr***,15,1613-1624.

Overman, E. A. McLaughlin, D. W. Bishop, A. R. 1986. Coherence and chaos in the driven damped Sine-Gordon equation: Measurement of the soliton spectrum. Physica D., 19, 1-41.

Pekcan, A. 2005. The Hirota Direct Method. Yükseklisans Tezi, Bilkent Üniversitesi Fen ve Mühendislik Enstitüsü, Ankara.

Ross, S. 1989. Introduction to ordinary differential equations. John Wiley and Sons Inc. 4th edition

Russell, J. S. 1844. Report on Waves. Report of the fourteenth meeting of the British Association for the Advancement of Science, York, September 1844 (London 1845), pp 311-390

Weideman, J. A. C. , Herbst, B. M. 1986. Split-step methods for the solution of the nonlinear Schrödinger equation. ***SIAM Journal of Numerical Analysis***, 23:485–507.

Zabusky, N. J., Kruskal, M. D. 1965. Interaction of Solitons in a Collisionless Plasma and the Recurrence of Initial States, ***Phys. Rev. Lett***, 15: 240–243.

Zakharov, V. E. Shabat, A. B. 1972. Exact Theory of Two-dimensional Self-focusing and One-dimensional Self-modulation of Wave in Nonlinear Media. ***Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics***,34,62-69.

ÖZGEÇMİŞ

1985 yılında Mardin ilinin merkez Artuklu ilçesinde doğdum. İlkokul, ortaokul ve liseyi Mardin'de okudum. 2005 yılında Dicle Üniversitesi Ziya Gökalp Eğitim Fakültesi Ortaöğretim Fen ve Matematik Bölümü Matematik Öğretmenliği bölümünü kazandım ve 2010 yılında bu bölümden mezun oldum. 2010 yılı Aralık ayında Milli Eğitim Bakanlığı bünyesinde bir liseye Matematik öğretmeni olarak atandım. Halen Mardin merkezde bir lisede çalışmaktayım.

T.C.
DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS TEZ ÇALIŞMASI İNTİHAL RAPORU FORMU

ÖĞRENCİ BİLGİLERİ	
ADI VE SOYADI	Halide GÜMÜŞ
ÖĞRENCİ NO	11804004
EĞİTİM – ÖĞRETİM YILI	2017-2018
YARIYIL	☐ Güz ☒ Bahar
ANABİLİM DALI	Matematik
PROGRAM	Yüksek Lisans
TEZ KONUSU	Nonlineer Schrödinger Denkleminin Tam Çözümleri
İNTİHAL RAPORU BİLGİLERİ	
RAPOR TÜRÜ	Tez Savunma Sınavı Sonrası
SAYFA SAYISI	56
BENZERLİK ORANI	% 9
RAPORLAMA TARİHİ	22/06/2018

Yukarıda başlığı/konusu gösterilen tez çalışmamın kapak sayfası, giriş, ana bölümler, sonuç ve tartışma kısımlarından oluşan toplam 56 sayfalık kısmına ilişkin, 22/06/2018 tarihinde şahsım/tez danışmanım tarafından *turnitin* adlı intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtrelemeler uygulanarak alınmış olan intihal raporuna göre, tezimin benzerlik oranı % 9'dur.

Uygulanan filtrelemeler:

- ☒ Kabul/Onay sayfaları hariç,
- ☒ Kaynakça hariç
- ☒ Alıntılar ~~hariç~~/dâhil
- ☐ Diğer

Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Programlarda Tez Çalışması İntihal Raporu Uygulama Esasları'nı inceledim ve bu Uygulama Esasları'nda belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edilmesi durumunda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini saygılarımla arz ederim.

Halide GÜMÜŞ

H. Yılmaz
22/06/2018

Doç. Dr. Halis YILMAZ
Tez Danışmanı

25/06/2018

Prof. Dr. H. Özlem GÜNEY
Anabilim Dalı Başkanı

Scanned by CamScanner