

ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

GENEL SINIR KOŞULU İLE VERİLEN DİFERENSİYEL
DENKLEMLER SİSTEMİ TARAFINDAN ÜRETİLEN
DİFERENSİYEL OPERATÖRLER

Çağla CAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

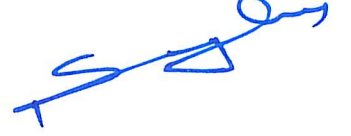
ANKARA
2018

Her hakkı saklıdır

TEZ ONAYI

Çağla CAN tarafından hazırlanan " Genel Sınır Koşulu İle Verilen Diferensiyel Denklemler Sistemi Tarafından Üretilen Diferensiyel Operatörler " adlı tez çalışması 20/07/2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından **oy birliği(veya oy çokluğu)** ile Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Şeyhmus YARDIMCI

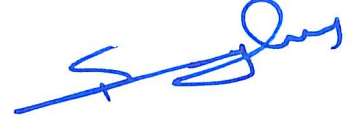


Jüri Üyeleri:

Başkan: Prof. Dr. İshak ALTUN
Kırıkkale Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı



Üye : Prof. Dr. Şeyhmus YARDIMCI
Ankara Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı



Üye : Prof. Dr. Elgiz BAYRAM
Ankara Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı



Üye : Doç. Dr. Esra KIR ARPAT
Gazi Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı



Üye : Doç. Dr. Murat OLGUN
Ankara Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı



Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Atila YETİŞEMİYEN
Enstitü Müdürü

ETİK

Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

20/07/2018



Çağla CAN

ÖZET

Doktora Tezi

GENEL SINIR KOŞULU İLE VERİLEN DİFERENSİYEL DENKLEMLER SİSTEMİ TARAFINDAN ÜRETİLEN DİFERENSİYEL OPERATÖRLER

Çağla CAN

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Şeyhmus YARDIMCI

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde, spektral teoride bilinen bazı temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, tanımlanmış olduğumuz L operatörünün genel sınır koşulunu sağlayan çözümleri incelenmiştir, spektral özellikler elde edilmiştir. Ayrıca operatörün rezolventi hesaplanmış ve sürekli spektrumu elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde, L operatörünün özdeğer ve spektral tekilliklerine karşılık gelen esas fonksiyonlarının $L_2(0, \infty, \mathbb{C}^2)$ ve H uzaylarına ait olduğu ispatlanmıştır. Üçüncü bölümde olduğu gibi bu bölümde de orijinal sonuçlar elde edilmiştir.

Beşinci ve son bölüm ise tartışma ve sonuç için ayrılmıştır.

Temmuz 2018, 44 sayfa

Anahtar Kelimeler: Diferensiyel Operatörler, Spektral Analiz, Özdeğerler, Spektral Tekillikler

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

DIFFERENTIAL OPERATORS GENERATED BY THE SYSTEM OF DIFFERENTIAL
EQUATIONS WITH GENERAL BOUNDARY CONDITIONS

Çağla CAN

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Şeyhmus YARDIMCI

This thesis consist of five chapters.

The first chapter is devoted to the introduction.

In the second chapter, some well known definitions of spectral analysis and some theorems are given.

In the third chapter, we have examined the solutions of the L operator that have defined the general boundary condition, spectral properties are investigated. In addition, the solution of operator calculated and the continuous spectrum is investigated.

In the fourth section, it is proved that the principal functions corresponding to the eigenvalues and spectral singularities of the L operator belong to $L_2(0, \infty, \mathbb{C}^2)$ and H spaces. Similarly the third chapter, original results have found in this section.

The fifth and last chapter is devoted to the discussion and conclusion.

June 2018, 44 pages

Key Words: Differential Operators, Spectral Analysis, Eigenvalues, Spectral Singularities

TEŞEKKÜR

Bu çalışmamın yürütülmesinde anlayışına ve desteğine minnettar olduğum çok değerli danışman hocam sayın Prof. Dr. Şeyhmus Yardımcı'ya (Ankara Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı),

Değerli bilgi ve önerileriyle beni yönlendiren sayın hocam Prof. Dr. Elgiz BAYRAM'a (Ankara Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı),

Ayrıca bilgi ve deneyimleri ile yol gösteren, bana her zaman katkı sunan, desteğini hiç esirgemeyen sayın hocam Doç. Dr. Esra KIR ARPAT'a (Gazi Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı),

Hayatımın her aşamasında yanımda olup, desteklerini hep hissettiren, sevgisini fedakarlığını ve sabrını eksik etmeyen aileme ve İsmail'e en içten teşekkürlerimi sunarım.

Çağla CAN
Ankara, Temmuz 2018

İÇİNDEKİLER

TEZ ONAY SAYFASI	
ETİK	i
ÖZET	ii
ABSTRACT.....	iii
TEŞEKKÜR.....	iv
SİMGELER DİZİNİ	vi
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAM VE TEOREMLER	4
3. BİR BOYUTLU DİRAC OPERATÖRLERİNİN SPEKTRAL ANALİZİ	6
3.1 $l(y) - \lambda y = 0$ Denkleminin Çözümleri	7
3.2 L Operatörünün Rezolventi, Sürekli Spektrumu.....	11
4. L OPERATÖRÜNÜN ÖZDEĞERLERİNE VE SPEKTRAL TEKİL- LİKLERİNE KARŞI GELEN ESAS FONKSİYONLAR	29
4.1 L Operatörünün Özdeğerlerine Karşı Gelen Esas Fonksiyonlar ..	29
4.2 L Operatörünün Spektral Tekilliklerine Karşı Gelen Esas Fonksiyonlar	36
5. TARTIŞMA VE SONUÇ	40
KAYNAKLAR.....	41
ÖZGEÇMİŞ	44

SİMGELER DİZİNİ

\mathbb{R}	Reel sayılar kümesi
\mathbb{C}	Kompleks sayılar kümesi
\mathbb{Z}	Tam sayılar kümesi
H	Hilbert uzayı
$\mathbb{C}^2(0, \infty)$	Kompleks vektör değerli fonksiyonlar uzayı
\mathbb{C}_{\pm}	$\{z \in \mathbb{C} : \pm \text{Im } z > 0\}$
$\overline{\mathbb{C}}_{\pm}$	$\{z \in \mathbb{C} : \pm \text{Im } z \geq 0\}$
\mathbb{C}^m	m -boyutlu kompleks Öklid uzayı
$D(L)$	L operatörünün tanım kümesi
$R(L)$	L operatörünün değer kümesi
$\sigma(L)$	L operatörünün spektrumu
$\sigma_d(L)$	L operatörünün diskre (nokta) spektrumu
$\sigma_c(L)$	L operatörünün sürekli spektrumu
$\sigma_{ss}(L)$	L operatörünün spektral tekilliklerinin kümesi
L^*	L operatörünün adjoint operatörü
$R_{\lambda}(L)$	L operatörünün adjoint resolventi
$\mu(M, s)$	M kümesinin s komşuluğunun Lebesgue ölçüsü
$L_2(0, \infty; \mathbb{C}^2)$	$\left\{ f \mid f = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{bmatrix}, \int_0^{\infty} (f_1(x) ^2 + f_2(x) ^2) dx < \infty \right\}$
$L^2(\mathbb{R}, S)$	$\left\{ f \mid f : \mathbb{R} \rightarrow S, \int_{-\infty}^{\infty} \ f(x)\ _S^2 dx < \infty \right\}$
$o(1)$	Sonsuz küçük değerler
$O(1)$	Sınırlı değerler
$W[y_1, y_2]$	y_1 ve y_2 çözümlerinin Wronskiyeni

1. GİRİŞ

Literatürde ikinci mertebeden diferensiyel denklemler

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad x \in I \subseteq \mathbb{R} \quad (1.1)$$

şeklinde ele alınır. Burada λ bir spektral parametre ve q potansiyel fonksiyonudur.

1960 yılında Naimark (1.1) denklemini $[0, \infty)$ aralığında ele almıştır. Bu incelemesinde q lokal integrallenebilir bir kompleks fonksiyondur. (1.1) denklemini sağlayan y lerin regüler sınırdaki

$$-y'(0) - \Theta y(0) = \lambda y, \quad \Theta \in \mathbb{C} \quad (1.2)$$

koşulunu gerçekleştirmesini istemiştir. Özel olarak (1.1) denklemi ve (1.2) sınır koşulu yardımı ile üretilen operatörün spektral özelliklerini incelerken literatüre pek çok kullanışlı yöntem de sunmuştur. Naimark operatörün spektrumunun özdeğerler, sürekli spektrum ve spektral tekiliklerden oluştuğunu göstermiştir. Spektral tekilikler, özdeğer olmayan sürekli spektrum üzerinde yer alan rezolventin çekirdeğinin kutuplarıdır. $\varepsilon > 0$ olmak üzere

$$\int_0^{\infty} e^{\varepsilon x} |q(x)| dx < \infty$$

koşulu varsa operatörün özdeğerleri ve spektral tekilikleri sonlu sayıdadır. Bunların katları da sonlu sayıdadır.

Ayrıca göstermiştir ki pozitif yarı eksenindeki her nokta (1.1) denklemi ve (1.2) sınır koşulu ile üretilen operatörün spektrumunda bulunmaktadır. Ayrıca $\lambda > 0$ eksenini operatörün sürekli spektrumuna aittir (Naimark 1960).

Naimark'ın bu sonucu Kemp tarafından tüm reel eksen üzerinde tanımlı diferensiyel operatörlere ve Gasymov tarafından ise üç boyutlu Schrödinger operatörlere genişletilmiştir.

1967 yılında Pavlov (1.1) denklemi ve (1.2) sınır koşulu ile üretilen operatörün spektral tekilliklerinin yapısının, potansiyel fonksiyonun sonsuzdaki davranışına bağlı olduğu göstermiş ve operatörün esas fonksiyonlarını kullanarak spektral açılım elde edilmiştir. Pavlov'un çalışması spektral tekilliklerin de dikkate alınarak spektral açılımın verildiği ilk çalışmadır (Pavlov 1967).

1965 yılında Krall, Naimark'ın ele aldığı problemde daha genel bir problem ele almıştır. Bu problemdeki diferensiyel denklem ve sınır koşulu şu şekilde alınmıştır:

$$-y'' + (q(x) - \lambda)y = K(x) \quad (1.3)$$

$$\int_0^{\infty} K(x)y(x)dx + \alpha y'(0) - \beta y(0) = 0 \quad (1.4)$$

Burada q ölçülebilir kompleks bir fonksiyondur ve

$$\int_0^{\infty} |q(x)| dx < \infty \quad (1.5)$$

koşulunu sağlar. Bu problemin adi ve homojen açılımları Krall tarafından elde edilmiştir (Krall 1965b). Krall bir başka çalışmasında ise (1.5) koşulu altında (1.3), (1.4) probleminin

adjoint operatörünü oluşturmuş, spektrumunu belirlemiş ve göstermiştir ki homojen olmayan açılım aslında adjoint operatörün özfonksiyon açılımıdır (Krall 1965a).

p, q kompleks değerli iki fonksiyon ve p fonksiyonu, pozitif reel sayılar kümesi üzerinde sürekli diferensiyellenebilir olmak üzere, $L^2(\mathbb{R}_+)$ uzayında

$$-y'' + [q(x) + 2\lambda p(x) - \lambda^2]y, \quad x \in [0, \infty) \quad (1.6)$$

denklemi ve $\alpha, \beta \in \mathbb{C}, |\alpha| + |\beta| \neq 0, K \in L^2(\mathbb{R}_+)$ için

$$\int_0^{\infty} K(x)y(x)dx + \alpha y'(0) - \beta y(0) = 0 \quad (1.7)$$

sınır koşulu tarafından üretilen Kuadratik Schrödinger operatörler demeti $L(\lambda)$ ile gösterilir. Bairamov çalışmalarında analitik fonksiyonların birebirlik teoemleri ve

toplabilirlik çarpanlarını kullanarak $L(\lambda)$ operatörünün spektral analizini incelemiştir (Bairamov vd 1997).

Literatürde ikinci mertebeden denklemlerin incelenmesine devam edilmiş ve 1999 yılında Bairamov, Çakar ve Krall tarafından Kuadratik Demet (Quadratic Pencil) sınır değer problemi incelenmiştir ve problemin iki katlı spektral açılımı elde edilmiştir (Bairamov vd 1999).

Daha genel problemler yine 1999 yılında Bairamov, Çakar ve Krall tarafından incelenmiş ve gösterilmiştir ki incelenen problem verilen koşul altında sonlu katlı spektral tekilliklere sahiptir. Ayrıca spektral tekilliklere karşılık gelen kök fonksiyonların özellikleri de incelenmiştir (Bairamov vd 1999).

2002 yılında ise Bairamov ve Karaman tarafından Klein-Gordon problemi ele alınmıştır. Problemin özdeğerleri ve spektral tekillikleri incelenmiştir (Bairamov ve Karaman 2002).

Skaler katsayılı ve genel sınır koşulu ile verilen nonselfadjoint Sturm-Liouville, Klein-Gordon, Kuadratik Schrödinger ve fark operatörlerinin spektral analizi literatürde detaylı bir biçimde incelenmesine rağmen genel sınır koşulu ile verilen ve diferensiyel denklemler sistemi tarafından üretilen non-selfadjoint operatörlerin spektral teorisi yeteri kadar incelenmemiştir.

Bu tezde birinci mertebeden diferensiyel denklemler sistemi ve integral sınır koşulu ile üretilen non-selfadjoint operatörünün spektral analizinin öğrenilmesi düşünülmektedir.

2. TEMEL KAVRAM VE TEOREMLER

Bu bölümde kullanılacak olan bazı temel tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.1 $X \neq \{0\}$ kompleks normlu uzay $T : D(T) \subset X \rightarrow X$ lineer bir operatör olsun. $\lambda \in \mathbb{C}$ olmak üzere $R_\lambda(T) = (T - \lambda I)^{-1}$ operatörüne T operatörünün rezolvent operatörü ya da kısaca rezolventi denir (Lusternik 1974).

Tanım 2.2 $R_\lambda(T)$ operatörü mevcut, sınırlı ve tanım cümlesi X uzayında yoğun ise, $\lambda \in \mathbb{C}$ sayısına T operatörünün regüler değeri denir. T operatörünün regüler değerlerinden oluşan cümleye ise T operatörünün rezolvent cümlesi denir (Lusternik 1974).

Tanım R_λ operatörünün sınırsız olması durumunda aşağıdaki biçimdedir.

Tanım 2.3 $R_\lambda(T)$ mevcut, sınırsız ve $R_\lambda(T)$ operatörünün tanım kümesi X uzayında yoğun olacak şekildeki λ kompleks sayılarının oluşturduğu kümeye T operatörünün sürekli spektrumu denir (Lusternik 1974).

Tanım 2.4 X bir kompleks vektör uzay ve $T : X \rightarrow X$ lineer bir operatör olsun. λ kompleks sayısı için $Tx = \lambda x$ denkleminin aşık olmaya bir $x \in X$ çözümü varsa λ sayısına T operatörünün özdeğeri denir. Bu x çözümüne ise T operatörünün λ özdeğerine karşılık gelen özvektörü denir (Lusternik 1974).

Tanım 2.5 Bir T operatörünün rezolventinin çekirdeğinin kutup noktası olup, sürekli spektrumda bulunan ve T operatörünün özdeğeri olmayan noktalara T operatörünün spektral tekillikleri denir (Naimark 1960).

Üçüncü bölümde incelenecek olan diferensiyel operatörün özdeğerlerini, spektral tekilliklerini ve özelliklerinin belirlenmesinde aşağıdaki teoremlerden yararlanılacaktır:

Teorem 2.1 Özdeş olarak sıfır olmayan bir analitik fonksiyonun, analitiklik bölgesinin içindeki sıfırları (eğer varsa) ayrıktır (Dolzhenko 1979).

Şimdi de sonsuz katlı sıfırların durumunu içeren teoremi verelim.

Teorem 2.2 Özdeş olarak sıfır olmayan bir analitik fonksiyonun, sonsuz katlı sıfırları (eğer varsa) analitiklik bölgesinin sınırındadır (Dolzhenko 1979).

Teorem 2.3 Özdeş olarak sıfır olmayan bir analitik fonksiyonun, analitiklik bölgesinin içindeki sıfırlarının limit noktaları (eğer varsa) analitiklik bölgesinin sınırındadır (Dolzhenko 1979).

Teorem 2.4 (Privalov Teoremi): Açık üst düzlemde özdeş olarak sıfır olmayan, analitik bir fonksiyonun reel eksenindeki sıfırlarının Lebesgue ölçüsü sıfırdır (Dolzhenko 1979).

Teorem 2.5 (Pavlov Teoremi): f fonksiyonu \mathbb{C}_+ kümesinde analitik, $\overline{\mathbb{C}_+}$ kümesinde sonsuz mertebeden türevlenebilir, $\mu(E = \{x \in \mathbb{R} : f^{(n)}(x) = 0, \forall n \in \mathbb{N}\}) = 0$,

$$|f^{(n)}(z)| \leq A_n, \quad z \in \overline{\mathbb{C}_+} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

ve

$$T(s) = \inf_n \frac{A_n s^n}{n!}$$

olmak üzere, bir $a > 0$ için

$$\int_0^a \ln T(s) d\mu(E, s) = -\infty$$

olsun. Eğer en az bir N pozitif reel sayısı için

$$\int_{-\infty}^N \frac{\ln|f(x)|}{x^2+1} dx < \infty, \quad \int_N^{\infty} \frac{\ln|f(x)|}{x^2+1} dx < \infty$$

ise, f fonksiyonu kapalı üst düzlemde özdeş olarak sıfırdır (Pavlov 1975).

3. BİR BOYUTLU DİRAC OPERATÖRLERİNİN SPEKTRAL ANALİZİ

Bu bölümde tanımlayacağımız diferensiyel denklem sisteminin çözümleri, operatörün rezolventi, sürekli spektrumu, özdeğerleri ve spektral tekillikleri incelenecektir.

Aşağıdaki şekilde bir denklem sistemini tanımlansın.

$$\begin{aligned} i \frac{d}{dx} y_1(x, \lambda) + q_1(x) y_2(x, \lambda) &= \lambda y_1(x, \lambda), \\ -i \frac{d}{dx} y_2(x, \lambda) + q_2(x) y_1(x, \lambda) &= \lambda y_2(x, \lambda), \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\int_0^{\infty} K(x, t) y(t, \lambda) dt + \alpha y_2(0, \lambda) - \beta y_1(0, \lambda) = 0. \quad (3.2)$$

Burada q_i ($i = 1, 2$) kompleks değerli fonksiyonlar, α, β kompleks sayılar, λ ise kompleks parametredir.

(3.1)-(3.2) sınır değer problemi yardımıyla

$$L_2(0, \infty; \mathbb{C}^2) := \left\{ f : f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{bmatrix}, \int_0^{\infty} (|f_1(x)|^2 + |f_2(x)|^2) dx < \infty \right\}$$

uzayında bir L operatörü aşağıdaki şekilde tanımlansın:

Her $y \in L_2(0, \infty; \mathbb{C}^2)$ diferensiyellenebilen $y(x, \lambda)$ fonksiyonu için

$$l(y) := \begin{aligned} &i \frac{d}{dx} y_1(x, \lambda) + q_1(x) y_2(x, \lambda) \\ &i \frac{d}{dx} y_2(x, \lambda) + q_2(x) y_1(x, \lambda) \end{aligned}$$

diferensiyel ifadesi göz önüne alınsın. Burada $q_1(x), q_2(x) \in \mathbb{C}(0, \infty)$

$$|q_i(x)| \leq c e^{-\varepsilon \sqrt{x}}, \quad c > 0, \quad \varepsilon > 0, \quad i = 1, 2 \quad (3.3)$$

eşitsizliği sağlansın. Ayrıca,

$$D(L) := \left\{ \begin{array}{l} 1. y \text{ mutlak sürekli} \\ y : y \in L_2(0, \infty; \mathbb{C}^2) \quad 2. l(y) \in L_2(0, \infty; \mathbb{C}^2) \\ 3. \int_0^{\infty} K(x, t) y(t, \lambda) dt + \alpha y_2(0, \lambda) - \beta y_1(0, \lambda) = 0 \end{array} \right\}$$

olmak üzere her $y \in D(L)$ için $L(y) := l(y)$ şeklinde tanımlansın.

3.1 $l(y) - \lambda y = 0$ Denkleminin Çözümleri

(3.1) sistemini

$$\begin{aligned} \left[J \frac{d}{dx} + Q(x) - \lambda \right] y(x, \lambda) &= 0, \\ Jy' - \lambda y &= -Qy \end{aligned} \quad (3.4)$$

biçiminde yazalım. Burada

$$J = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \quad Q(x) = \begin{bmatrix} 0 & q_1 \\ q_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1(x, \lambda) \\ y_2(x, \lambda) \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

$$Jy' - \lambda y = 0$$

homojen denkleminin iki lineer bağımsız çözümünü vardır. Bunlar

$$\tilde{y} = \begin{bmatrix} e^{-i\lambda x} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{z} = \begin{bmatrix} 0 \\ e^{i\lambda x} \end{bmatrix}$$

dır. y_1 ve y_2 çözümleri için

$$y^{(1)}(x, \lambda) = \begin{bmatrix} y_1^{(1)}(x, \lambda) \\ y_2^{(1)}(x, \lambda) \end{bmatrix} \quad ve \quad y^{(2)}(x, \lambda) = \begin{bmatrix} y_1^{(2)}(x, \lambda) \\ y_2^{(2)}(x, \lambda) \end{bmatrix}$$

ile gösterilen çözümlerin Wronskian'ını

$$W \left[y^{(1)}(x, \lambda), y^{(2)}(x, \lambda) \right] = y_1^{(1)}(x, \lambda)y_2^{(2)}(x, \lambda) - y_2^{(1)}(x, \lambda)y_1^{(2)}(x, \lambda) \quad (3.5)$$

şeklinde tanımlayalım. Açıktır ki $W[\tilde{y}, \tilde{z}]$ sıfırdan farklıdır.

Buradan (3.4) homojen olmayan denklemini göz önüne alırsak parametrelerin değişim yönteminden aşağıdaki çözümü buluruz.

$$\begin{aligned} y(x, \lambda) &= \tilde{c}_1 \tilde{y}(x, \lambda) + \tilde{c}_2 \tilde{z}(x, \lambda) + i \tilde{y}(x, \lambda) \int_{x_1}^x e^{2i\lambda} \tilde{y}^T(t, \lambda) Q(t) y(t, \lambda) dt \\ &\quad - \tilde{z}(x, \lambda) i \int_{x_1}^x e^{-2i\lambda} \tilde{z}^T(t, \lambda) Q(t) y(t, \lambda) dt \end{aligned}$$

Burada, $\tilde{y}^T = \begin{bmatrix} e^{-i\lambda x} & 0 \end{bmatrix}$, $\tilde{z}^T = \begin{bmatrix} 0 & e^{i\lambda x} \end{bmatrix}$ olarak tanımlanmaktadır.

Şimdi $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, x_1$ özel seçimleri ile (3.4) denkleminin farklı çözümlerini bulalım.

Keyfi olarak $\tilde{c}_1 = 0, \tilde{c}_2 = 1, x_1 \rightarrow \infty$ için

$$\begin{aligned} \varphi(x, \lambda) &= \tilde{z}(x, \lambda) + \int_x^\infty [e^{-2i\lambda t} \tilde{z}(x, \lambda) \tilde{z}^T(t, \lambda) - e^{2i\lambda t} \tilde{y}(x, \lambda) \tilde{y}^T(t, \lambda)] Q(t) \varphi(t, \lambda) dt \\ &= \begin{bmatrix} -i \int_x^\infty e^{i\lambda(t-x)} q_1(t) \varphi_2(t) dt \\ e^{i\lambda x} + i \int_x^\infty e^{i\lambda(x-t)} q_2(t) \varphi_1(t) dt \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.6)$$

çözümü bulunur.

Özel seçimle $\tilde{c}_1 = 1, \tilde{c}_2 = 0, x_1 \rightarrow \infty$ ile (3.4) denkleminin diğer çözümü

$$\begin{aligned} \psi(x, \lambda) &= \tilde{y}(x, \lambda) + i \int_x^\infty [e^{-2i\lambda t} \tilde{z}(x, \lambda) \tilde{z}^T(t, \lambda) - e^{2i\lambda t} \tilde{y}(x, \lambda) \tilde{y}^T(t, \lambda)] Q(t) \psi(t, \lambda) dt \\ &= \begin{bmatrix} e^{-i\lambda x} - i \int_x^\infty e^{i\lambda(t-x)} q_1(t) \psi_2(t) dt \\ i \int_x^\infty e^{i\lambda(x-t)} q_2(t) \psi_1(t) dt \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.7)$$

olur.

Şimdi (3.6) ve (3.7) eşitliklerinden $y(x, \lambda)$ çözümü,

$$y(x, \lambda) = f(x, \lambda) + \int_x^\infty K(x, t) y(t, \lambda) dt \quad (3.8)$$

biçiminde yazılabilir. Burada

$$\begin{aligned} f(x, \lambda) &= \begin{bmatrix} Ae^{-i\lambda x} \\ Be^{i\lambda x} \end{bmatrix}, \quad Ax B = \{(0, 1), (1, 0)\} \\ y(x, \lambda) &= \begin{bmatrix} y_1(x, \lambda) \\ y_2(x, \lambda) \end{bmatrix} \quad ve \\ K(x, t) &= \begin{bmatrix} 0 & -iq_1(t)e^{-i\lambda(x-t)} \\ iq_2(t)e^{i\lambda(x-t)} & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

biçimindedir.

$$(I + \mathbb{H})f(x, \lambda) = y(x, \lambda) \quad (3.9)$$

$$\mathbb{H}g(x) = \int_x^{\infty} H(x, t)g(t)dt$$

gibi tanımlanan integral operatör olsun. Burada

$$g(x) = \begin{bmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \end{bmatrix}, \quad H(x, t) = \begin{bmatrix} H_{11}(x, t) & H_{12}(x, t) \\ H_{21}(x, t) & H_{22}(x, t) \end{bmatrix}$$

$$|H_{ij}(x, t)| \leq ce^{-\varepsilon\sqrt{\frac{x+t}{2}}}, \quad c > 0, \quad \varepsilon > 0, \quad i, j = 1, 2 \quad (3.10)$$

biçimindedir ve

$$y(x, \lambda) = f(x, \lambda) + \int_x^{\infty} H(x, t)f(t, \lambda)dt \quad (3.11)$$

gösterimi $y(x, \lambda)$ çözümü için bir integral gösterimidir. (3.11) eşitliğini kullanarak

$$\begin{bmatrix} y_1(x, \lambda) \\ y_2(x, \lambda) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ae^{-i\lambda x} \\ Be^{i\lambda x} \end{bmatrix} + \int_x^{\infty} \begin{bmatrix} H_{11}(x, t) & H_{12}(x, t) \\ H_{21}(x, t) & H_{22}(x, t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Ae^{-i\lambda t} \\ Be^{i\lambda t} \end{bmatrix} dt$$

yazılır. Buradan,

$$y_1(x, \lambda) = Ae^{-i\lambda x} + A \int_x^{\infty} H_{11}(x, t)e^{-i\lambda t} dt + B \int_x^{\infty} H_{12}(x, t)e^{i\lambda t} dt$$

$$y_2(x, \lambda) = Be^{i\lambda x} + A \int_x^{\infty} H_{21}(x, t)e^{-i\lambda t} dt + B \int_x^{\infty} H_{22}(x, t)e^{i\lambda t} dt$$

eşitliği bulunur. $A = 0, B = 1$ olduğunda

$$y_1(x, \lambda) = \phi_1(x, \lambda) = \int_x^{\infty} H_{12}(x, t)e^{i\lambda t} dt$$

$$y_2(x, \lambda) = \phi_2(x, \lambda) = e^{i\lambda x} + \int_x^{\infty} H_{22}(x, t)e^{i\lambda t} dt \quad (3.12)$$

bulunur. $A = 1, B = 0$ olduğunda ise

$$y_1(x, \lambda) = \psi_1(x, \lambda) = e^{-i\lambda x} + \int_x^{\infty} H_{11}(x, t)e^{-i\lambda t} dt$$

$$y_2(x, \lambda) = \psi_2(x, \lambda) = \int_x^{\infty} H_{21}(x, t)e^{-i\lambda t} dt \quad (3.13)$$

bulunur.

(3.12) ve (3.13) da integralde $t - x \rightarrow t$ dönüşümü yapılırsa, (3.4) denkleminin

$$e^{(1)}(x, \lambda) = \begin{bmatrix} e^{-i\lambda x} + e^{-i\lambda x} \int_0^{\infty} H_{11}(x, x+t)e^{-i\lambda t} dt \\ e^{-i\lambda x} \int_0^{\infty} H_{21}(x, x+t)e^{-i\lambda t} dt \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

$$e^{(2)}(x, \lambda) = \begin{bmatrix} e^{i\lambda x} \int_0^{\infty} H_{12}(x, x+t)e^{i\lambda t} dt \\ e^{i\lambda x} + e^{i\lambda x} \int_0^{\infty} H_{22}(x, x+t)e^{i\lambda t} dt \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

vektör çözümleri bulunur.

$$H(x, t) = \begin{bmatrix} H_{11}(x, t) & H_{12}(x, t) \\ H_{21}(x, t) & H_{22}(x, t) \end{bmatrix}$$

operatör dönüşümün çekirdeğidir (Kır 1999).

$e^{(1)}(x, \lambda)$ çözümü $\text{Im } \lambda < 0$ yarı düzleminde λ ya göre analitik ve reel eksene dek sürekli fonksiyon ve $e^{(2)}(x, \lambda)$ çözümü $\text{Im } \lambda > 0$ yarı düzleminde λ parametresine göre analitik ve reel eksene dek sürekli fonksiyondur (Kır 1999).

Ayrıca, (3.4) denkleminin $e^{(1)}(x, \lambda)$ ve $e^{(2)}(x, \lambda)$ çözümleri aşağıdaki asimptotik eşitlikleri sağlar (Kır 1999).

$$e^{(1)}(x, \lambda) = e^{-i\lambda x} \begin{bmatrix} 1 + o(1) \\ o(1) \end{bmatrix}, \quad x \rightarrow \infty, \quad \text{Im } \lambda \leq 0 \quad (3.16)$$

$$e^{(2)}(x, \lambda) = e^{i\lambda x} \begin{bmatrix} o(1) \\ 1 + o(1) \end{bmatrix}, \quad x \rightarrow \infty, \quad \text{Im } \lambda \geq 0 \quad (3.17)$$

$$e^{(1)}(x, \lambda) = e^{-i\lambda x} \begin{bmatrix} 1 + o(1) \\ o(1) \end{bmatrix}, \quad |\lambda| \rightarrow \infty, \quad \text{Im } \lambda \leq 0 \quad (3.18)$$

$$e^{(2)}(x, \lambda) = e^{i\lambda x} \begin{bmatrix} o(1) \\ 1 + o(1) \end{bmatrix}, \quad |\lambda| \rightarrow \infty, \quad \text{Im } \lambda \geq 0 \quad (3.19)$$

Şimdi L operatörünün rezolventini bulabilmemiz için aşağıdaki lemmayı verelim.

Lemma 3.1 (3.4) denkleminin

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\pm i\lambda x} \varphi_1(x, \lambda) = \pm i\lambda, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\pm i\lambda x} \varphi_2(x, \lambda) = \mp i\lambda \quad \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_{\pm} \quad (3.20)$$

koşullarını sağlayan φ çözümdür. Bu çözümler için

$$\begin{aligned} W \left[e^{(1)}(x, \lambda), \varphi(x, \lambda) \right] &= i\lambda, \quad \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_- \\ W \left[e^{(2)}(x, \lambda), \varphi(x, \lambda) \right] &= -i\lambda, \quad \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+ \\ W \left[e^{(1)}(x, \lambda), e^{(2)}(x, \lambda) \right] &= 1 \quad \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

yazılabilir.

3.2 L Operatörünün Rezolventi, Sürekli Spektrumu

Bu bölümde L operatörünün rezolventi bulunacaktır ve sürekli spektrumu incelenecektir.

Teorem 3.1 L operatörünün rezolventi

$$(R_{\lambda}f)_{(x)} = \int_0^{\infty} R(x, t; \lambda) f(t) dt$$

olup integral operatördür. Burada

$$(R_{\lambda}f)_{(x)} = \begin{cases} R_1(x, t; \lambda) & , \lambda \in \mathbb{C}_- \\ R_2(x, t; \lambda) & , \lambda \in \mathbb{C}_+ \end{cases}$$

şeklinde olup $R_1(x, t; \lambda)$ $\text{Im } \lambda \leq 0$ düzleminde,

$$\begin{aligned} \vartheta_1(x, t; \lambda) &= \frac{e^{(1)}(x, \lambda) u^{(1)}(t, \lambda)}{N^{(1)}(\lambda)}, \\ \tilde{\vartheta}_1(x, t; \lambda) &= -\frac{i}{N^{(1)}(\lambda)} \begin{cases} e^{(1)}(x, \lambda) (g^{(1)})^*(t, \lambda) & , 0 \leq t < x \\ g^{(1)}(x, \lambda) (e^{(1)})^*(t, \lambda) & , x \leq t < \infty \end{cases} \end{aligned}$$

olmak üzere

$$R_1(x, t; \lambda) = \vartheta_1(x, t; \lambda) + \tilde{\vartheta}_1(x, t; \lambda)$$

dır. $\text{Im } \lambda \geq 0$ düzleminde ise

$$\begin{aligned} \vartheta_2(x, t; \lambda) &= \frac{e^{(2)}(x, \lambda)u^{(2)}(t, \lambda)}{N^{(2)}(\lambda)}, \\ \tilde{\vartheta}_2(x, t; \lambda) &= -\frac{i}{N^{(2)}(\lambda)} \begin{cases} e^{(2)}(x, \lambda)(g^{(2)})^*(t, \lambda) & , 0 \leq t < x \\ g^{(2)}(x, \lambda)(e^{(2)})^*(t, \lambda) & , x \leq t < \infty \end{cases} \end{aligned}$$

olmak üzere

$$R_2(x, t; \lambda) = \vartheta_2(x, t; \lambda) + \tilde{\vartheta}_2(x, t; \lambda)$$

biçimindedir. Burada

$$\begin{aligned} N^{(1)}(\lambda) &= \int_0^\infty K(x, \lambda)e^{(1)}(x, \lambda)dx + \alpha e_2^{(1)}(0, \lambda) - \beta e_1^{(1)}(0, \lambda) \\ N^{(2)}(\lambda) &= \int_0^\infty K(x, \lambda)e^{(2)}(x, \lambda)dx + \alpha' e_2^{(2)}(0, \lambda) - \beta' e_1^{(2)}(0, \lambda) \\ u^{(1)}(t, \lambda) &= \frac{i}{N^{(1)}(\lambda)} \left\{ \int_t^\infty K(x, \lambda)e^{(1)}(x, \lambda) (g^{(1)})^*(t, \lambda)dx \right. \\ &\quad + \int_0^t K(x, \lambda)g^{(1)}(x, \lambda) (e^{(1)})^*(t, \lambda)dx \\ &\quad \left. + \left(\alpha g_2^{(1)}(0, \lambda) - \beta g_1^{(1)}(0, \lambda) \right) (e^{(1)})^*(t, \lambda) \right\} \\ u^{(2)}(t, \lambda) &= \frac{i}{N^{(2)}(\lambda)} \left\{ \int_t^\infty K(x, \lambda)e^{(2)}(x, \lambda) (g^{(2)})^*(t, \lambda)dx \right. \\ &\quad + \int_0^t K(x, \lambda)g^{(2)}(x, \lambda) (e^{(2)})^*(t, \lambda)dx \\ &\quad \left. + \left(\alpha g_2^{(2)}(0, \lambda) - \beta g_1^{(2)}(0, \lambda) \right) (e^{(2)})^*(t, \lambda) \right\} \\ g^{(1)}(t, \lambda) &= \frac{1}{i\lambda} \left\{ e^{(1)}(t, \lambda) \int_t^\infty K(x, \lambda)\varphi(x, \lambda)dx \right. \\ &\quad \left. + \varphi(t, \lambda) \int_0^t K(x, \lambda)e^{(1)}(x, \lambda)dx + \left(\alpha e_2^{(1)}(0, \lambda) - \beta e_1^{(1)}(0, \lambda) \right) \varphi(t, \lambda) \right\} \end{aligned}$$

$$g^{(2)}(t, \lambda) = -\frac{1}{i\lambda} \left\{ e^{(2)}(t, \lambda) \int_t^\infty K(x, \lambda) \varphi(x, \lambda) dx + \varphi(t, \lambda) \int_0^t K(x, \lambda) e^{(2)}(x, \lambda) dx + \left(\alpha e_2^{(2)}(0, \lambda) - \beta e_1^{(2)}(0, \lambda) \right) \varphi(t, \lambda) \right\}$$

$$(e^{(1)})^*(x, \lambda) : = \begin{bmatrix} e_2^{(1)}(x, \lambda) & e_1^{(1)}(x, \lambda) \end{bmatrix}$$

$$(e^{(2)})^*(x, \lambda) : = \begin{bmatrix} e_2^{(2)}(x, \lambda) & e_1^{(2)}(x, \lambda) \end{bmatrix}$$

$$(g^{(1)})^*(x, \lambda) : = \begin{bmatrix} g_2^{(1)}(x, \lambda) & g_1^{(1)}(x, \lambda) \end{bmatrix}$$

$$(g^{(2)})^*(x, \lambda) : = \begin{bmatrix} g_2^{(2)}(x, \lambda) & g_1^{(2)}(x, \lambda) \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanır.

İspat. Öncelikle şu belirtilmelidir ki açıkça (3.4) denkleminin iki çözümünün Wronskian'ı x değişkeninden bağımsızdır. Ayrıca (3.4) denkleminin iki çözümünün temel çözümler sistemi oluşturması için gerek ve yeter koşul Wronskian'larının sıfırdan farklı olmasıdır. Açıkça *Lemma 3.1* den yararlanarak,

$$W \left[e^{(1)}(x, \lambda), g^{(1)}(x, \lambda) \right] = N^{(1)}(\lambda) \quad \text{ve} \quad W \left[e^{(2)}(x, \lambda), g^{(2)}(x, \lambda) \right] = N^{(2)}(\lambda)$$

dır.

$$Jy' + Qy - \lambda y = 0 \tag{3.21}$$

diferensiyel denklemin bir çözümü

$$\tilde{y} = e^{(2)}(x, \lambda)c_1 + g^{(2)}(x, \lambda)c_2$$

şeklinde ve

$$Jy' + Qy - \lambda y = f(x) \tag{3.22}$$

diferensiyel denklemin bir çözümü $\text{Im } \lambda \geq 0$ düzleminde

$$y = e^{(2)}(x, \lambda)c_1(x) + g^{(2)}(x, \lambda)c_2(x) \tag{3.23}$$

şeklinde olsun. Bu durumda,

$$y'(x, \lambda) = (e^{(2)})'(x, \lambda)c_1(x) + (g^{(2)})'(x, \lambda)c_2(x) + e^{(2)}(x, \lambda)c_1'(x) + g^{(2)}(x, \lambda)c_2'(x) \tag{3.24}$$

elde edilir. (3.22) denkleminde (3.23) ve (3.24) eşitlikleri yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa $\lim_{t \rightarrow \infty} c_1(x) = \alpha_1$ ve $\lim_{t \rightarrow \infty} c_2(x) = \alpha_2$ olmak üzere,

$$c_1(x) = \frac{i}{N^{(2)}(\lambda)} \int_x^{\infty} (g^{(2)})^*(t, \lambda) f(t) dt + \alpha_1$$

bulunur. Benzer şekilde,

$$c_2(x) = -\frac{i}{N^{(2)}(\lambda)} \int_x^{\infty} (e^{(2)})^*(t, \lambda) f(t) dt + \alpha_2$$

bulunur. Bu değerler (3.23) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} y(x, \lambda) &= e^{(2)}(x, \lambda) \alpha_1 + g^{(2)}(x, \lambda) \alpha_2 + \frac{i e^{(2)}(x, \lambda)}{N^{(2)}(\lambda)} \int_x^{\infty} (g^{(2)})^*(t, \lambda) f(t) dt \\ &\quad - \frac{i g^{(2)}(x, \lambda)}{N^{(2)}(\lambda)} \int_x^{\infty} (e^{(2)})^*(t, \lambda) f(t) dt \end{aligned} \quad (3.25)$$

elde edilir. y çözümünün $L_2(0, \infty)$ uzayından olması için $\alpha_2 = 0$ olmalıdır.

(3.2) başlangıç koşulunun sağlanması için,

$$\alpha_1 = -\frac{i}{N^{(2)}(\lambda)} \int_0^{\infty} (g^{(2)})^*(t, \lambda) f(t) dt + \frac{1}{N^{(2)}(\lambda)} \int_0^{\infty} u^{(2)}(t, \lambda) f(t) dt$$

olarak elde edilir. O halde $\text{Im } \lambda \geq 0$ düzleminde

$$\vartheta_2(x, t; \lambda) = \frac{e^{(2)}(x, \lambda) u^{(2)}(t, \lambda)}{N^{(2)}(\lambda)}, \quad (3.26)$$

$$\tilde{\vartheta}_2(x, t; \lambda) = -\frac{i}{N^{(2)}(\lambda)} \begin{cases} e^{(2)}(x, \lambda) (g^{(2)})^*(t, \lambda) & , 0 \leq t \leq x \\ g^{(2)}(x, \lambda) (e^{(2)})^*(t, \lambda) & , x \leq t < \infty \end{cases} \quad (3.27)$$

olmak üzere

$$R_2(x, t; \lambda) = \vartheta_2(x, t; \lambda) + \tilde{\vartheta}_2(x, t; \lambda)$$

olur. Benzer şekilde, $\text{Im } \lambda \leq 0$ düzleminde

$$\vartheta_1(x, t; \lambda) = \frac{e^{(1)}(x, \lambda) u^{(1)}(t, \lambda)}{N^{(1)}(\lambda)}, \quad (3.28)$$

$$\tilde{\vartheta}_1(x, t; \lambda) = -\frac{i}{N^{(1)}(\lambda)} \begin{cases} e^{(1)}(x, \lambda) (g^{(1)})^*(t, \lambda) & , 0 \leq t \leq x \\ g^{(1)}(x, \lambda) (e^{(1)})^*(t, \lambda) & , x \leq t < \infty \end{cases} \quad (3.29)$$

olmak üzere,

$$R_1(x, t; \lambda) = \vartheta_1(x, t; \lambda) + \tilde{\vartheta}_1(x, t; \lambda)$$

bulunur. O halde

$$R(x, t; \lambda) = \begin{cases} R_1(x, t; \lambda) & , \operatorname{Im} \lambda \leq 0 \\ R_2(x, t; \lambda) & , \operatorname{Im} \lambda \geq 0 \end{cases}$$

olur. Bu durumda,

$$(R_\lambda f)_{(x)} = \int_0^\infty R(x, t; \lambda) f(t) dt$$

elde edilir. ■

Rezolvent operatörünün elde edilmesinin ardından aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.2 Her bir λ kompleks sayısı için $\operatorname{Im} \lambda \geq 0$ düzleminde öyle bir $c_\lambda > 0$ sayısı vardır ki

$$\|R_\lambda\| \geq \frac{c_\lambda}{|N^{(2)}(\lambda)| \sqrt{\operatorname{Im} \lambda}} \quad (3.30)$$

ve $\operatorname{Im} \lambda \leq 0$ düzleminde,

$$\|R_\lambda\| \geq \frac{c_\lambda}{|N^{(1)}(\lambda)| \sqrt{\operatorname{Im} \lambda}} \quad (3.31)$$

gerçeklenir.

İspat. (3.30) eşitsizliğini ispatlayalım.

$$f_b(x, \lambda) = \begin{cases} \overline{(g^{(2)})^*(x, \lambda)} - \frac{\overline{u^{(2)}(x, \lambda)}}{\int_0^b |u^{(2)}(t, \lambda)|^2 dt} \int_0^b u^{(2)}(t, \lambda) \overline{(g^{(2)})^*(t, \lambda)} dt & , 0 \leq x \leq b \\ 0 & , b < x < \infty \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. İspata başlamadan önce

$$\int_0^b u^{(2)}(t, \lambda) f_b(t, \lambda) dt = 0 \quad (3.32)$$

olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
& \int_0^b u^{(2)}(t, \lambda) f_b(t, \lambda) dt \\
&= \int_0^b u^{(2)}(t, \lambda) \left[\frac{\overline{(g^{(2)})^*(t, \lambda)} dt}{\int_0^b |u^{(2)}(x, \lambda)|^2 dx} - \frac{\overline{(u^{(2)}(t, \lambda))}}{\int_0^b |u^{(2)}(x, \lambda)|^2 dx} \int_0^b u^{(2)}(x, \lambda) \overline{(g^{(2)})^*(x, \lambda)} dx \right] dt \\
&= \int_0^b u^{(2)}(t, \lambda) \overline{(g^{(2)})^*(x, \lambda)} dt - \frac{\int_0^b u^{(2)}(t, \lambda) \overline{(u^{(2)}(t, \lambda))} dt}{\int_0^b |u^{(2)}(t, \lambda)|^2 dt} \int_0^b u^{(2)}(t, \lambda) \overline{(g^{(2)})^*(t, \lambda)} dt \\
&= 0
\end{aligned}$$

olur. Şimdi de (3.32) den yararlanarak

$$\int_0^b |f_b(x, \lambda)|^2 dx = \int_0^b (g^{(2)})^*(x, \lambda) f_b(x, \lambda) dx$$

olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
& \int_0^b |f_b(x, \lambda)|^2 dx \\
&= \int_0^b \overline{f_b(x, \lambda)} f_b(x, \lambda) dx \\
&= \int_0^b \left[(g^{(2)})^*(x, \lambda) - \frac{u^{(2)}(x, \lambda)}{\int_0^b |u^{(2)}(t, \lambda)|^2 dt} \int_0^b \overline{u^{(2)}(t, \lambda)} (g^{(2)})^*(t, \lambda) dt \right] f_b(x, \lambda) dx \\
&= \int_0^b (g^{(2)})^*(x, \lambda) f_b(x, \lambda) dx - \int_0^b \frac{u^{(2)}(x, \lambda) f_b(x, \lambda) dx}{\int_0^b |u^{(2)}(t, \lambda)|^2 dt} \int_0^b \overline{u^{(2)}(t, \lambda)} (g^{(2)})^*(t, \lambda) dt
\end{aligned}$$

$$= \int_0^b (g^{(2)})^*(x, \lambda) f_b(x, \lambda) dx$$

bulunur.

$$\begin{aligned}
(R_\lambda f_b)(t) &= \int_0^\infty R_2(x, t; \lambda) f_b(t, \lambda) dt = \int_0^b R_2(x, t; \lambda) f_b(t, \lambda) dt \\
&= \int_0^b \left[\frac{e^{(2)}(x, \lambda) u^{(2)}(t, \lambda)}{N^{(2)}(\lambda)} - \frac{i}{N^{(2)}(\lambda)} e^{(2)}(x, \lambda) (g^{(2)})^*(t, \lambda) \right] f_b(t, \lambda) dt \\
&= -\frac{i}{N^{(2)}(\lambda)} e^{(2)}(x, \lambda) \int_0^b (g^{(2)})^*(t, \lambda) f_b(t, \lambda) dt \\
&= -\frac{i}{N^{(2)}(\lambda)} e^{(2)}(x, \lambda) \int_0^b |f_b(t, \lambda)|^2 dt \\
&= -\frac{i}{N^{(2)}(\lambda)} e^{(2)}(x, \lambda) \|f_b(t, \lambda)\|^2
\end{aligned} \tag{3.33}$$

olur.

$$e^{(2)}(x, \lambda) = e^{i\lambda x} \begin{bmatrix} o(1) \\ 1 + o(1) \end{bmatrix}, \quad |\lambda| \rightarrow \infty, \quad \text{Im } \lambda \geq 0$$

asimptotik eşitliğinden

$$|e^{(2)}(x, \lambda)| = e^{-\text{Im } \lambda x} \begin{bmatrix} o(1) \\ 1 + o(1) \end{bmatrix}, \quad |\lambda| \rightarrow \infty, \quad \text{Im } \lambda \geq 0$$

elde edilir. Buradan

$$\|e^{(2)}(x, \lambda)\| \geq \frac{1}{2} e^{-\text{Im } \lambda x}$$

bulunur.

$$\int_0^\infty |e^{(2)}(x, \lambda)|^2 dx \geq \frac{1}{4} \int_b^\infty e^{-2\text{Im } \lambda x} dx = \frac{1}{8 \text{Im } \lambda} e^{-2b \text{Im } \lambda}$$

elde edilir. O halde (3.33) eşitliğinden, $c_\lambda = \frac{e^{-2b \text{Im } \lambda}}{8}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\|R_\lambda f_b\|^2 &\geq \frac{1}{|N^{(2)}(\lambda)|^2} \|f_b\|^2 \frac{1}{8 \text{Im } \lambda} e^{-2b \text{Im } \lambda} \\
\|R_\lambda\| &\geq \frac{c_\lambda}{|N^{(2)}(\lambda)| \sqrt{\text{Im } \lambda}}
\end{aligned}$$

bulunur.

Şimdi (3.31) eşitsizliğini ispatlayalım.

$$g_b(x, \lambda) = \begin{cases} \overline{(g^{(1)})^*(x, \lambda)} - \frac{\overline{u^{(1)}(x, \lambda)}}{\int_0^a |u^{(1)}(t, \lambda)|^2 dt} \int_0^a u^{(2)}(t, \lambda) \overline{(g^{(1)})^*(t, \lambda)} dt & , \quad 0 \leq x \leq a \\ 0 & , \quad a < x < \infty \end{cases}$$

alınıp benzer işlemler yapıldığında, $\text{Im } \lambda \leq 0$ düzleminde,

$$\|R_\lambda\| \geq \frac{c_\lambda}{|N^2(\lambda)| \sqrt{\text{Im } \lambda}}$$

bulunur. ■

Teorem 3.3 λ, L operatörünün rezolvent cümlesine ait ve $\lambda \rightarrow \lambda_0 \in (-\infty, \infty)$ ise

$$\|R_\lambda\| \rightarrow \infty$$

olur.

İspat. $\text{Im } \lambda \geq 0$ ve $\text{Im } \lambda \leq 0$ düzlemlerinde (3.30) ve (3.31) eşitsizliklerinde $\text{Im } \lambda \rightarrow 0$ alınırsa $\|R_\lambda\| \rightarrow \infty$ elde edilir. ■

$\lambda \in (-\infty, \infty)$ için $R_\lambda(L)$ operatörünün varlığı ve sınırsızlığı ispatlandı. Şimdi $R_\lambda(L)$ nın tanım cümlesinin L_2 uzayında yoğun olduğunu gösterebiliriz.

Teorem 3.4 L operatörünün sürekli spektrumu tüm reel eksenidir.

İspat. $\overline{D(R_\lambda(L))} = L_2(0, \infty; \mathbb{C}_2)$ olduğunu gösterelim.

$$L_2(0, \infty; \mathbb{C}_2) = \overline{R(L - \lambda I)} \oplus N(L^* - \lambda I)$$

eşitliği vardır. Burada, L^* , L operatörünün adjointidir. $N(L^* - \lambda I)$ cümlesi $L^* - \lambda I$ operatörünün çekirdeğidir.

$$L^* := \begin{cases} Jy' + \overline{Q(x)}y = \lambda y \\ \int_0^\infty \overline{K(x, t)}y(t, \lambda)dt + \alpha y_2(0, \lambda) - \beta y_1(0, \lambda) = 0 \end{cases}$$

ile gösterilen operatörün pozitif özdeğeri olmadığı için ancak $y = 0$ için çözümü vardır. O halde

$$N(L^* - \lambda I) = \{0\}$$

elde edilir. *Teorem 3.2* ve *Teorem 3.3* ten

$$L_2(0, \infty; \mathbb{C}_2) = \overline{R(L - \lambda I)}$$

olur. Buradan

$$\sigma_c = (-\infty, \infty)$$

bulunur. ■

Şimdi L operatörünün özdeğerlerini ve spektral tekilliklerini inceleyelim. (3.16), (3.17), (3.26), (3.27), (3.28), (3.29) eşitliklerinden aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 3.5

$$\sigma_d(L) = \{\lambda : \text{Im } \lambda < 0, N^{(1)}(\lambda) = 0\} \cup \{\lambda : \text{Im } \lambda > 0, N^{(2)}(\lambda) = 0\} \quad (3.34)$$

$$\sigma_{ss}(L) = \{\lambda : \lambda \in \mathbb{R}^*, N^{(1)}(\lambda) = 0\} \cup \{\lambda : \lambda \in \mathbb{R}^*, N^{(2)}(\lambda) = 0\} \quad (3.35)$$

$$\{\lambda : \lambda \in \mathbb{R}^*, N^{(1)}(\lambda) = 0\} \cap \{\lambda : \lambda \in \mathbb{R}^*, N^{(2)}(\lambda) = 0\} = \emptyset$$

dır. Burada $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ dir.

İspat. M_1^- ve M_1^+ ile aşağıdaki cümleleri tanımlayalım.

$$M_1^- = \{\lambda : \text{Im } \lambda < 0, N^{(1)}(\lambda) = 0\}, \quad M_1^+ = \{\lambda : \text{Im } \lambda > 0, N^{(2)}(\lambda) = 0\}$$

$$M = M_1^- \cup M_1^+$$

cümlesini gösterelim.

L operatörünün özdeğerlerinin tanımı kullanılırsa

$$M \subset \sigma_d(L)$$

olduğu görülür. (3.34) eşitliğini ispatlamak için $\sigma_d(L) \subset M$ olduğunu göstermeliyiz.

a) $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, $\text{Im } \lambda_0 > 0$ ve $\lambda_0 \in \sigma_d(L)$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda (3.21) denkleminin $\lambda = \lambda_0$ aşikar olmayan ve (3.2) koşulunu sağlayan denkleminin $\psi^{(2)}(x, \lambda) \in L_2[0, \infty)$ çözümü vardır. Ayrıca

$$W[e^{(2)}(x, \lambda), \varphi(x, \lambda)] = -i\lambda, \quad \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+$$

eşitliğinden

$$W [e^{(2)}(x, \lambda_0), \varphi(x, \lambda_0)] = -i\lambda_0 \neq 0$$

olduğundan $\psi^{(2)}$, $e^{(2)}(x, \lambda_0)$ ve $\varphi(x, \lambda_0)$ in lineer kombinasyonu biçiminde yazılır.

$$\begin{aligned}\tilde{N}^{(2)}(\lambda_0) &= \int_0^{\infty} K(x, \lambda_0) \cdot \varphi(x, \lambda_0) dx + \alpha\varphi_2(0, \lambda_0) - \beta\varphi_1(0, \lambda_0) \\ N^{(2)}(\lambda_0) &= \int_0^{\infty} K(x, \lambda_0) \cdot e^{(2)}(x, \lambda_0) dx + \alpha e_2^{(2)}(0, \lambda_0) - \beta e_1^{(2)}(0, \lambda_0)\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\psi^{(2)}(x, \lambda_0) = \tilde{N}^{(2)}(\lambda_0) \cdot e^{(2)}(x, \lambda_0) - N^{(2)}(\lambda_0) \cdot \varphi(x, \lambda_0), \quad \text{Im } \lambda > 0$$

olur. $\psi^{(2)}(x, \lambda) \in L_2[0, \infty)$ olduğundan

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \psi^{(2)}(x, \lambda_0) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\tilde{N}^{(2)}(\lambda_0) \cdot e^{(2)}(x, \lambda_0) - N^{(2)}(\lambda_0) \cdot \varphi(x, \lambda_0) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \tilde{N}^{(2)}(\lambda_0) \cdot e^{(2)}(x, \lambda_0) - \lim_{x \rightarrow \infty} N^{(2)}(\lambda_0) \cdot \varphi(x, \lambda_0) \\ &= 0\end{aligned}$$

olması için $N^{(2)}(\lambda_0) = 0$ olmalıdır. Buradan $\lambda_0 \in \mathbb{C}, \text{Im } \lambda_0 > 0$ ve $\lambda_0 \in \sigma_d(L)$ için

$$\lambda_0 \in M_1^+ \tag{3.36}$$

olur.

b) $\lambda_0 \in \mathbb{C}, \text{Im } \lambda_0 < 0$ ve $\lambda_0 \in \sigma_d(L)$ kabul edelim. Bu durumda **a)** şıkkına benzer olarak

$$\lambda_0 \in M_1^- \tag{3.37}$$

bulunur.

c) Kabul edelim ki $\lambda_0 \in (-\infty, \infty)$ olsun. $W [e^{(2)}(x, \lambda_0), e^{(1)}(x, \lambda_0)] = -1$ idi. Bu durumda

$$\psi(x, \lambda_0) = N^{(2)}(\lambda_0) \cdot e^{(1)}(x, \lambda_0) - N^{(1)}(\lambda_0) \cdot e^{(2)}(x, \lambda_0)$$

lineer kombinasyonu biçiminde yazılır.

$\psi(x, \lambda_0)$ (3.1) - (3.2) sınır değer probleminin bir çözümüdür. Sınır koşulunu sağlaması için $N^{(1)}(\lambda_0) = 0$ ve $N^{(2)}(\lambda_0) = 0$ olmalıdır. O halde $\psi(x, \lambda_0) \equiv 0$ olduğundan $\psi(x, \lambda_0)$ öz fonksiyon olamaz. λ_0 özdeğer değildir. $\lambda_0 \notin \sigma_d(L)$ dir.

Dolayısıyla

$$\sigma_d(L) \cap (-\infty, \infty) = \emptyset$$

elde ederiz. (3.36) ve (3.37) den

$$\sigma_d(L) \subset M$$

olur. O halde $\sigma_d(L) = M$ bulunur.

(3.26), (3.27), (3.28), (3.29) a göre $N^{(1)}$ ve $N^{(2)}$ fonksiyonlarının reel eksendeki sıfırları rezolventin kutuplarıdır. Diğer taraftan bu sıfırlar L operatörünün sürekli spektrumu üzerindedir. Sürekli spektrumun reel eksen olduğunu bulmuştuk. Fakat özdeğerlerinin cümlesi ile reel eksenin kesişimi boş kümedir. Dolayısıyla bu sıfırlar özdeğer değildir. Spektral tekilliklerin tanımından

$$\sigma_{ss}(L) = \{\lambda : \lambda \in \mathbb{R}^*, N^{(1)}(\lambda) = 0\} \cup \{\lambda : \lambda \in \mathbb{R}^*, N^{(2)}(\lambda) = 0\}$$

bulunur. Bu da ispatı tamamlar. ■

Özdeğerler ve spektral tekilliklerin özelliklerini araştırmak için $N^{(1)}$ ve $N^{(2)}$ nin sıfırlarının yapısını incelemek gerekmektedir.

$$M_1^- = \{\lambda : \lambda \in \mathbb{C}_-, N^{(1)}(\lambda) = 0\},$$

olarak tanımlanmıştır.

$$M_2^- = \{\lambda : \lambda \in \mathbb{R}, N^{(1)}(\lambda) = 0\}$$

tanımlansın. Burada $N^{(1)}$ in sıfırlarını dikkate alacağız. $N^{(2)}$ de benzer şekilde gösterilebilir.

Lemma 3.2 $K \in L_1(\mathbb{R}_+) \cap L_2(\mathbb{R}_+)$, $i = 1, 2$, $\beta \neq 0$

(i) M_1^- cümlesi sınırlıdır, en çok sayılabilir sayıdadır ve limit noktaları reel eksenin sınırlı bir aralığındadır.

(ii) M_2^- cümlesi kompakttır.

İspat. (3.14) den $N^{(1)}(\lambda) \mathbb{C}_-$ de analitik ve süreklidir.

$$\begin{aligned} f^{(1)}(x, \lambda) &= K_1(x, \lambda) + \int_0^\infty K(x, \lambda) \begin{pmatrix} H_{11}(x, x+t) \\ H_{21}(x, x+t) \end{pmatrix} dt \\ &\quad + \alpha H_{21}(0, x) - \beta H_{11}(0, x), \end{aligned} \tag{3.38}$$

$$f^{(1)} \in L_1(\mathbb{R}_+)$$

olmak üzere

$$N^{(1)}(\lambda) = -\beta + \int_0^{\infty} f^{(1)}(x, \lambda) e^{-i\lambda x} dx \quad (3.39)$$

formuna sahiptir. (3.39) dan

$$N^{(1)}(\lambda) = -\beta + o(1), \quad \lambda \in \overline{\mathbb{C}}, \quad |\lambda| \rightarrow \infty \quad (3.40)$$

sağlanır. Ve benzer şekilde

$$N^{(2)}(\lambda) = \alpha + o(1), \quad \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+, \quad |\lambda| \rightarrow \infty \quad (\alpha \neq 0)$$

sağlanır.

Diğer taraftan $N^{(1)}(\lambda)$ fonksiyonu $\text{Im } \lambda < 0$ yarı düzleminde analitik $\text{Im } \lambda \leq 0$ yarı düzleminde ise süreklidir. Bu durumda (3.40) den $N^{(1)}(\lambda)$ fonksiyonu yeteri kadar büyük λ lar ve $\text{Im } \lambda \leq 0$ için sıfırdan farklıdır. Dolayısıyla $N^{(1)}(\lambda)$ fonksiyonunun $\text{Im } \lambda \leq 0$ yarı düzleminde sıfırları (yani M_1^- ve M_2^- cümleleri) sınırlı bir bölgededir. $N^{(1)}(\lambda)$ fonksiyonu $\text{Im } \lambda < 0$ yarı düzleminde analitik olduğundan onun analitik bölgesinin içindeki sıfırları (yani M_1^- cümlesi) en çok sayılabilir sayıdadır. Analitik fonksiyonun analitik bölgesinin içindeki sıfırlarının limit noktaları analitik bölgesinin sınırında olduğundan M_1^- cümlesinin limit noktaları yine M_1^- ya ait olduğundan M_1^- kompakttır. ■

Teorem 3.6

$$|q_i(x)| \leq ce^{-\varepsilon\sqrt{x}}, \quad c > 0, \quad \varepsilon > 0, \quad i = 1, 2$$

koşulu sağlandığında $N^{(1)}(\lambda)$ vektör fonksiyonu $\text{Im } \lambda < 0$ yarı düzleminde analitik ve reel ekseninde sonsuz basamaktan diferensiyellenebilen fonksiyondur. Ayrıca A_r , $r = 0, 1, \dots$ sabitleri vardır ki

$$\left| \frac{d^r}{d\lambda^r} N^{(1)}(\lambda) \right| \leq A_r, \quad r = 0, 1, 2, \dots \quad \text{Im } \lambda \leq 0$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat.

$$\sup_{x \in \mathbb{R}_+} \{e^{\varepsilon\sqrt{x}} |q_i(x)|\} < \infty, \quad i = 1, 2 \quad \varepsilon > 0 \quad (3.41)$$

koşulunu verelim.

(3.14) ile verilen $e^{(1)}(x, \lambda)$ vektör fonksiyonunu gözönüne alalım.

$$e^{(1)}(0, \lambda) = \begin{pmatrix} e_1^{(1)}(0, \lambda) \\ e_2^{(1)}(0, \lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + e^{-i\lambda x} \int_0^\infty H_{11}(0, t) e^{-i\lambda t} dt \\ \int_0^\infty H_{21}(0, t) e^{-i\lambda t} dt \end{pmatrix}$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{d^r}{d\lambda^r} e_1^{(1)}(0, \lambda) = \int_0^\infty (-it)^r H_{11}(0, t) e^{-i\lambda t} dt \quad (3.42)$$

$$\frac{d^r}{d\lambda^r} e_2^{(1)}(0, \lambda) = \int_0^\infty (-it)^r H_{21}(0, t) e^{-i\lambda t} dt \quad (3.43)$$

olur. (3.42) ve (3.43) den

$$\begin{aligned} \frac{d^r}{d\lambda^r} N^{(1)}(\lambda) &= \frac{d^r}{d\lambda^r} \int_0^\infty K(t, \lambda) e^{(1)}(t, \lambda) dt \\ &+ \alpha \int_0^\infty (-it)^r H_{21}(0, t) e^{-i\lambda t} dt - \beta \int_0^\infty (-it)^r H_{11}(0, t) e^{-i\lambda t} dt \\ &= \int_0^\infty (-it)^r e^{-i\lambda t} [\alpha H_{21}(0, t) - \beta H_{11}(0, t)] dt \end{aligned} \quad (3.44)$$

elde edilir. (3.14), (3.16), (3.41) den $N^{(1)}(\lambda)$ fonksiyonunun $\text{Im } \lambda < 0$ yarı düzleminde analitik olduğunu gösterir ve türevleri $\overline{\mathbb{C}}_-$ da süreklidir. Dolayısıyla

$$|N^{(1)}(\lambda)| < \infty, \quad \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_- \quad (3.45)$$

Ayrıca $\text{Im } \lambda = 0$ için (3.10) eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} \left| \frac{d^r}{d\lambda^r} N^{(1)}(\lambda) \right| &\leq \left| \frac{d^r}{d\lambda^r} \int_0^\infty K(t, \lambda) e^{(1)}(t, \lambda) dt \right| + c_1 \int_0^\infty t^r e^{-\varepsilon \sqrt{\frac{t}{2}}} dt \\ &\leq c_1 \int_0^\infty t^r e^{-\varepsilon \sqrt{\frac{t}{2}}} dt \end{aligned} \quad (3.46)$$

olur. (3.46) dan $N^{(1)}(\lambda)$ fonksiyonunun $\text{Im } \lambda = 0$ için sonsuz diferensiyellenebilen bir fonksiyon olduğu elde edilir. $\frac{t}{2} = u$ dönüşümü yapılırsa (3.46) dan

$$A_r = c2^r \int_0^{\infty} u^r e^{-\varepsilon\sqrt{u}} du, r = 1, 2, \dots (c > 0)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \left| \frac{d^r}{d\lambda^r} N^{(1)}(\lambda) \right| &\leq c_1 \int_0^{\infty} 2^{r+1} u^r e^{-\varepsilon\sqrt{u}} du \\ &= A_r, \quad r = 1, 2, \dots, \quad (c > 0) \end{aligned} \quad (3.47)$$

elde edilir. ■

$M_1^{(1)}$ ve $M_2^{(1)}$ cümlelerinin limit noktaları cümlelerini $M_3^{(1)}$ ve $M_4^{(1)}$ ile ve $N^{(1)}(\lambda)$ fonksiyonunun $\text{Im } \lambda \leq 0$ yarı düzlemindeki sonsuz katlı sıfırlarının cümlesini ise $M_5^{(1)}$ ile gösterelim.

Teorem 3.7 *i)* $M_3^{(1)} \subset M_2^{(1)}$, $M_4^{(1)} \subset M_2^{(1)}$, $M_5^{(1)} \subset M_2^{(1)}$ sağlanır.

ii) $N^{(1)}$ nin tüm türevleri reel ekseninde sürekli olmak üzere,

$$M_3^{(1)} \subset M_5^{(1)}, M_4^{(1)} \subset M_5^{(1)} \quad (3.48)$$

sağlanır.

İspat. *i)* Özdeş olarak sıfırdan farklı analitik fonksiyonun analitik bölgesinin içindeki sıfırlarının limit noktaları analitik bölgesinin sınırındadır. Bu nedenle açık alt düzlemde analitik olan $N^{(1)}(\lambda)$ fonksiyonunun $\text{Im } \lambda < 0$ bölgesindeki sıfırlarının limit noktaları olan $M_3^{(1)}$ cümlesi reel ekseninde olmalıdır. Buradan ve $N^{(1)}(\lambda)$ fonksiyonunun sürekliliğinden

$$M_3^{(1)} \subset M_2^{(1)}$$

olur. Benzer olarak reel ekseninde analitik olan $N^{(1)}(\lambda)$ fonksiyonunun reel eksenindeki limit noktaları $M_4^{(1)}$ cümlesi reel ekseninde olmalıdır.

$$M_4^{(1)} \subset M_2^{(1)}$$

yazılır. Aynı zamanda özdeş olarak sıfır olmayan analitik fonksiyonun sonsuz katlı sıfırları analitik bölgesinin sınırında olduğundan

$$M_5^{(1)} \subset M_2^{(1)}$$

elde edilir.

ii) Kabul edelim ki $M_3^{(1)}$ cümlesi $M_5^{(1)}$ cümlesinin alt kümesi olmasın. Yani $\exists (\lambda_n) \in M_3^{(1)}$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \lambda_0$ var öyle ki $\lambda_0 \notin M_5^{(1)}$ dır. $N^{(1)}(\lambda)$ reel eksene dek sürekli olduğundan $\lambda_0 \in M_1^{(1)}$ olur ve öyle n_0 sonlu pozitif tam sayısı vardır ki

$$N^{(1)}(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^{n_0} a(\lambda); a(\lambda_0) \neq 0 \quad (3.49)$$

olur. $a(\lambda)$ fonksiyonun sürekli olduğu açıktır. $N^{(1)}(\lambda) = 0$ ve $\lambda_n \neq \lambda_0$ olduğundan

$$0 = \frac{N^{(1)}(\lambda_n)}{(\lambda_n - \lambda_0)^{n_0}} = a(\lambda)$$

olur. $a(\lambda)$ fonksiyonunun sürekliliğinden verilen eşitlik

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} a(\lambda_n) = a(\lambda_0)$$

elde edilir ve dolayısıyla $a(\lambda_0) \neq 0$ olması ile çelişir. O halde, $\lambda_0, N^{(1)}(\lambda)$ fonksiyonunun sonlu katlı sıfırı olamaz yani $\lambda_0 \in M_5^{(1)}$ olmalıdır.

Benzer şekilde $M_4^{(1)} \subset M_5^{(1)}$ ispatlanır. ■

Teorem 3.8 $A_r = c2^r \int_0^\infty u^r e^{-\varepsilon\sqrt{u}} du, r = 1, 2, \dots (c > 0)$ ile tanımlanan A_r sabitleri aşağıdaki eşitsizliği sağlar.

$$A_r \leq Bb^r r^r r! \quad (3.50)$$

Burada B ve b sabitleri c ye ve ε a bağlı pozitif sabitlerdir.

İspat. $A_r = c2^r \int_0^\infty u^r e^{-\varepsilon\sqrt{u}} du$ eşitliğini göz önüne alalım. İntegralde $\varepsilon\sqrt{u} = t$ dönüşümü yapılırsa

$$A_r = \frac{4c2^r}{\varepsilon^{2r}} \int_0^\infty t^{2r+1} e^{-t} dt$$

elde edilir. Sonuncu integralde $2r$ kez kısmi integrasyon uygularsak

$$\begin{aligned}
A_r &= 4c \cdot 2^r \cdot (2r+1) \cdot 2r \cdot (2r-1) \dots 3 \cdot 2 \int_0^\infty t e^{-\varepsilon t} dt \\
&\leq 4c \cdot 2^r \cdot (2r+1) \cdot (2r+1) \dots (2r+1) \cdot (2r+1) \cdot \int_0^\infty t e^{-\varepsilon t} dt \\
&\leq B \cdot 2^r (2r+1)^{2r}
\end{aligned} \tag{3.51}$$

olur. Burada

$$B = 4c \int_0^\infty t e^{-\varepsilon t} dt < \infty$$

(3.50) eşitsizliğinden

$$A_r \leq B 2^r 4^r r^{2r} \left(1 + \frac{1}{2r}\right)^{2r} \tag{3.52}$$

elde edilir.

$$\left(1 + \frac{1}{2r}\right)^{2r} < e, r^r < e^r \cdot r!$$

eşitsizliklerini kullanırsak (3.49) e göre

$$A_r \leq B b^r r^r r!$$

olur. Burada $b = 8\varepsilon$ dur. ■

Lemma 3.3 $N^{(1)}(\lambda)$ fonksiyonunun $\text{Im } \lambda \leq 0$ yarı düzlemindeki sonsuz katlı sıfırlarının cümlesi boştur. Yani $M_5^{(1)} = \emptyset$ dur.

İspat. Teoremi analitik fonksiyonların birebirlik teoremi olan Pavlov Teoremi ile ispatlayacağız.

Pavlov teoremine göre $M_5^{(1)}$ kümesi sınırlıdır ve $M_5^{(1)} \subset (-\infty, \infty)$ dur. Dolayısıyla $\exists T > 0$ sabiti vardır.

$$\left| \frac{d^r}{d\lambda^r} N^{(1)}(\lambda) \right| \leq A_r, \quad r = 0, 1, \dots, \quad \text{Im } \lambda \leq 0, \quad |\lambda| < 2T$$

olur. Ayrıca

$$\left| \int_{-\infty}^{-T} \frac{\ln |N^{(1)}(\lambda)|}{1+\lambda^2} d\lambda \right| < \infty, \quad \left| \int_T^\infty \frac{\ln |N^{(1)}(\lambda)|}{1+\lambda^2} d\lambda \right| < \infty$$

sağlanır.

$$\left| \frac{d^r}{d\lambda^r} N^{(1)}(\lambda) \right| \leq 2^{r+1} \cdot c \int_0^\infty t^r \cdot e^{-\varepsilon\sqrt{t}} dt$$

$$\left| \frac{d^r}{d\lambda^r} N^{(1)}(\lambda) \right| \leq A_r \leq B b^r r^r r!$$

çıkar. Eğer $\int_0^h \ln E(s) d\mu(\mu_{5,s}^{(1)}) = -\infty$ olsaydı *Pavlov Teoremi* ne göre $N^{(1)}(\lambda) \equiv 0$ olmalıydı.

Bu nedenle $E(s) = \inf_r \frac{A_r S^r}{r!}$ ve $\mu(\mu_{5,s}^{(1)})$ ise $M_5^{(1)}$ cümlesinin s-komşuluğunun lineer Lebesgue ölçüsüdür.

Fakat bilindiğine göre $N^{(1)}(\lambda) \neq 0$ dir. Bu nedenle de

$$\int_0^h \ln E(s) d\mu(M_{5,s}) > -\infty$$

olur. $E(s)$ aşağıdaki gibi değerlendirilir.

$$\begin{aligned} E(s) &= \inf_r \frac{A_r S^r}{r!} \leq B \inf_r \left\{ \frac{b^r r^r r! s^r}{r!} \right\} \\ &= B \inf_r \{b^r r^r s^r\} \\ &\leq \min_{x \in [0, \infty)} \{b^x x^x s^x\} \end{aligned}$$

olur.

Aşağıdaki fonksiyonu gözönüne alalım.

$$f(x) = b^x s^x x^x = (bsx)^x$$

$E(s)$ ile ilgili olarak bir değerlendirme elde etmek için $f(x)$ fonksiyonunun minimumu bulunmalıdır.

$$\begin{aligned} \ln f(x) &= x \ln (bsx) \\ \frac{f'(x)}{f(x)} &= \ln (bsx) + 1 \end{aligned}$$

ise

$$f'(x) = (bsx)^x [\ln (bsx) + 1]$$

olduğundan

$$f'(x) = 0$$

denkleminin kökü

$$x = \frac{1}{bse}$$

olur. Dolayısıyla

$$E(s) \leq \min f(x) \leq \exp\left\{-\frac{1}{bse}\right\}$$

elde edilir.

$$\ln E(s) \leq -\frac{1}{bse}$$

olduğundan (3.50) ya göre

$$\int_0^h \frac{1}{s} d\mu\left(M_{5,s}^{(1)}\right) < \infty \quad (3.53)$$

olur.(3.53) her bir s için $\mu\left(M_{5,s}^{(1)}\right) = 0$ ya da $M_5^{(1)} = \emptyset$ olması halinde sağlanır. ■

Teorem 3.9 (3.41) koşulu altında L operatörünün sonlu sayıda ve sonlu katlı özdeğerleri ve spektral tekillikleri vardır.

İspat. Teoremi ispatlayabilmek için $\overline{\mathbb{C}}_-$ ve $\overline{\mathbb{C}}_+$ uzaylarında $N^{(1)}$ ve $N^{(2)}$ nin sonlu çoklukta sıfırının olduğunu göstermeliyiz.

$N^{(1)}$ nin için ispat vereceğiz $N^{(2)}$ için benzer şekilde gösterilebilir. *Lemma 3.2* ve (3.48) den $M_3^{(1)} = M_4^{(1)} = \emptyset$ bulunur.

Buradan $M_1^{(1)}$ ve $M_2^{(1)}$ sınırlı kümelerin limit noktası yoktur (*Lemma (3.1)*). Yani $N^{(1)}$ $\overline{\mathbb{C}}_-$ de sınırlı sayıda sıfırı vardır. $M_5^{(1)} = \emptyset$ bulgusundan bu sıfırlar sonlu çoklukta. ■

4. L OPERATÖRÜNÜN ÖZDEĞERLERİNE VE SPEKTRAL TEKİLLİKLERİNE KARŞI GELEN ESAS FONKSİYONLAR

Bu bölümde 3. bölümde bulunan L operatörünün özdeğerlerine ve spektral tekilliklerine karşı gelen esas fonksiyonlar bulunmuştur.

4.1 L Operatörünün Özdeğerlerine Karşı Gelen Esas Fonksiyonlar

$\mathbb{R}^* = \mathbb{R}/\{0\}$, $\mathbb{C}_+ = \{\lambda : \lambda \in \mathbb{C}, \text{Im } \lambda > 0\}$, $\mathbb{C}_- = \{\lambda : \lambda \in \mathbb{C}, \text{Im } \lambda < 0\}$ olmak üzere \mathbb{C}_+ da $N^{(2)}$ nin sıfırlarını $\lambda_1^+, \lambda_2^+, \dots, \lambda_j^+$ ile \mathbb{C}_- de $N^{(1)}$ in sıfırlarını $\mu_1^-, \mu_2^-, \dots, \mu_l^-$ ile gösterelim. Bunların katı da sırasıyla $m_1^+, m_2^+, \dots, m_j^+$ ve $m_1^-, m_2^-, \dots, m_j^-$ olsun. Benzer şekilde \mathbb{R}^* da $N^{(2)}$ nin sıfırlarını $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\alpha$ ve $N^{(1)}$ in sıfırlarını $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_u$ ile gösterelim. Bunların katı da sırasıyla $m_1, m_2, \dots, m_\alpha$ ve n_1, n_2, \dots, n_ν olsun.

$$\begin{aligned} W \left[e^{(2)}, \varphi \right] &= \mp i\lambda \quad , \quad \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_{\pm} \\ W \left[e^{(2)}, e^{(1)} \right] &= -1 \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty) \end{aligned}$$

eşitliklerinden

$$\psi^{(1)}(x, \lambda) = \tilde{N}^{(1)}(\lambda)e^{(1)}(x, \lambda) - N^{(1)}(\lambda)\varphi(x, \lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}_- \quad (4.1)$$

$$\psi^{(2)}(x, \lambda) = \tilde{N}^{(2)}(\lambda)e^{(2)}(x, \lambda) - N^{(2)}(\lambda)\varphi(x, \lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}_{+-} \quad (4.2)$$

ve

$$\psi(x, \lambda) = N^{(2)}(\lambda)e^{(1)}(x, \lambda) - N^{(1)}(\lambda)e^{(2)}(x, \lambda), \quad x \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R}/\{0\} \quad (4.3)$$

eşitlikleri yazılabilir.

O halde (4.1) den $\text{Im } \lambda < 0$ için

$$\psi^{(1)}(x, \lambda) = \tilde{N}^{(1)}(\lambda)e^{(1)}(x, \lambda) - N^{(1)}(\lambda)\varphi^{(1)}(x, \lambda)$$

ve \mathbb{C}^- da $N^{(1)}$ in sıfırları $\mu_1^-, \mu_2^-, \dots, \mu_l^-$ olduğundan $i = 1, 2, \dots, l$ için $N^{(1)}(\mu_i^-) = 0$ olur. Bu durumda $i = 1, 2, \dots, l$ için

$$\psi^{(1)}(x, \lambda_k^+) = \tilde{N}^{(1)}(\mu_i^-)e^{(1)}(x, \mu_i^-) \quad (4.4)$$

elde edilir.

Benzer şekilde (4.2) den $\text{Im } \lambda > 0$ için

$$\psi^{(2)}(x, \lambda) = \tilde{N}^{(2)}(\lambda)e^{(2)}(x, \lambda) - N^{(2)}(\lambda)\varphi^{(2)}(x, \lambda)$$

ve \mathbb{C}^+ da $N^{(2)}$ nin sıfırları $\lambda_1^+, \lambda_2^+, \dots, \lambda_j^+$ olduğundan $k = 1, 2, \dots, j$ için $N^{(2)}(\lambda_k^+) = 0$ olur. Bu durumda $k = 1, 2, \dots, j$ için

$$\psi^{(2)}(x, \lambda_k^+) = \tilde{N}^{(2)}(\lambda_k^+)e^{(2)}(x, \lambda_k^+) \quad (4.5)$$

yazılır.

Teorem 4.1 $n = 0, 1, 2, \dots, m_k^+ - 1$, $k = 1, 2, \dots, j$ için

$$\left\{ \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} \psi^{(2)}(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_k^+} = \sum_{j=0}^n A_j(\lambda_k^+) \left\{ \frac{\partial^j}{\partial \lambda^j} e^{(2)}(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_k^+} \quad (4.6)$$

burada

$$A_j(\lambda_k^+) = \binom{n}{j} \left\{ \frac{\partial^{n-j}}{\partial \lambda^{n-j}} \tilde{N}^{(2)}(\lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_k^+}$$

ile verilir. Ayrıca $p = 0, 1, \dots, m_i - 1$, $i = 1, 2, \dots, l$ için

$$\left\{ \frac{\partial^p}{\partial \lambda^p} \psi^{(1)}(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\mu_i^-} = \sum_{j=0}^p B_j(\mu_i^-) \left\{ \frac{\partial^j}{\partial \lambda^j} e^{(1)}(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\mu_i^-} \quad (4.7)$$

burada,

$$B_j(\mu_i^-) = \binom{p}{j} \left\{ \frac{\partial^{p-j}}{\partial \lambda^{p-j}} \tilde{N}^{(1)}(\lambda) \right\}_{\lambda=\mu_i^-}$$

dır.

İspat. (4.6) eşitliğinin ispatı ile başlansın. İspatta tümevarım metodu uygulansın.

$n = 0$ için (4.5) eşliğinden (4.6) eşitliği elde edilir.

$n = 1$ için ispatlansın.

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} \psi^{(2)}(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_k^+} &= \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[\tilde{N}^{(2)}(\lambda)e^{(2)}(x, \lambda) - N^{(2)}(\lambda)\varphi^{(2)}(x, \lambda) \right] \right\}_{\lambda=\lambda_k^+} \\ &= \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} \tilde{N}^{(2)}(\lambda)e^{(2)}(x, \lambda) + \tilde{N}^{(2)}(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} e^{(2)}(x, \lambda) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial}{\partial \lambda} N^{(2)}(\lambda)\varphi^{(2)}(x, \lambda) - N^{(2)}(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} \varphi^{(2)}(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_k^+} \\ &= \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} \tilde{N}^{(2)}(\lambda)e^{(2)}(x, \lambda) + \tilde{N}^{(2)}(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} e^{(2)}(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_k^+} \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial \lambda} N^{(2)}(\lambda_k^+)\varphi^{(2)}(x, \lambda_k^+) - N^{(2)}(\lambda_k^+) \frac{\partial}{\partial \lambda} \varphi^{(2)}(x, \lambda_k^+) \end{aligned}$$

bulunur.

$k = 1, 2, \dots, j$ için $N^{(2)}(\lambda_k^+) = 0$ olduğundan

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} \psi^{(2)}(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_k^+} = \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} \tilde{N}^{(2)}(\lambda) e^{(2)}(x, \lambda) + \tilde{N}^{(2)}(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} e^{(2)}(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_k^+} - \frac{\partial}{\partial \lambda} N^{(2)}(\lambda_k^+) \varphi^{(2)}(x, \lambda_k^+) \quad (4.8)$$

elde edilir. Ayrıca, $N^{(2)}(\lambda)$ fonksiyonu $\text{Im } \lambda \geq 0$ düzleminde sonlu sayıda, sonlu katlı sıfıra sahip olduğu için $n = 1, 2, \dots, m_{k-1}^+$, $k = 1, 2, \dots, j$ için

$$N^{(2)}(\lambda) = (\lambda - \lambda_k^+)^n a(\lambda), \quad a(\lambda_k^+) \neq 0 \quad (4.9)$$

biçiminde tanımlanabilir. Buradan,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \lambda} N^{(2)}(\lambda_k^+) &= n(\lambda - \lambda_k^+)^{n-1} a(\lambda) + (\lambda - \lambda_k^+)^n \frac{\partial}{\partial \lambda} a(\lambda) \\ &= \sum_{j=0}^1 \binom{1}{j} \frac{\partial^{1-j}}{\partial \lambda^{1-j}} (\lambda - \lambda_k^+)^n \frac{\partial^j}{\partial \lambda^j} a(\lambda) \\ \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} N^{(2)}(\lambda_k^+) &= n(n-1)(\lambda - \lambda_k^+)^{n-2} a(\lambda) + 2n(\lambda - \lambda_k^+)^{n-1} \frac{\partial}{\partial \lambda} a(\lambda) + (\lambda - \lambda_k^+)^n \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} a(\lambda) \\ &= \sum_{j=0}^2 \binom{2}{j} \left\{ \frac{\partial^{2-j}}{\partial \lambda^{2-j}} (\lambda - \lambda_k^+)^n \right\} \left\{ \frac{\partial^j}{\partial \lambda^j} a(\lambda) \right\} \\ &\quad \dots \\ \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} N^{(2)}(\lambda) &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \left\{ \frac{\partial^{n-j}}{\partial \lambda^{n-j}} (\lambda - \lambda_k^+)^n \right\} \left\{ \frac{\partial^j}{\partial \lambda^j} a(\lambda) \right\} \end{aligned}$$

O halde $n = 1, 2, \dots, m_k^+ - 1$, $k = 1, 2, \dots, j$ için

$$\left\{ \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} N^{(2)}(\lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_k^+} \equiv 0 \quad (4.10)$$

bulunur. (4.8) ve (4.10) eşitliklerinden $n = 1$ için (4.6) eşitliği elde edilir.

(4.6) eşitliği $2 \leq n_0 \leq m_k^+ - 2$ için var olsun.

$$\left\{ \frac{\partial^{n_0}}{\partial \lambda^{n_0}} \psi^{(2)}(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_k^+} = \sum_{j=0}^{n_0} \binom{n_0}{j} \left\{ \frac{\partial^{n_0-j}}{\partial \lambda^{n_0-j}} \tilde{N}^{(2)}(\lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_k^+} \left\{ \frac{\partial^j}{\partial \lambda^j} e^{(2)}(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_k^+} \quad (4.11)$$

Şimdi (4.6) eşitliği $n + 1$ için ispatlansın:

$$\begin{aligned}
\left\{ \frac{\partial^{n_0+1}}{\partial \lambda^{n_0+1}} \psi^{(2)}(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_k^+} &= \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} \left\{ \frac{\partial^{n_0}}{\partial \lambda^{n_0}} \psi^{(2)}(x, \lambda) \right\} \right\}_{\lambda=\lambda_k^+} \\
&= \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[\binom{n_0}{0} \left\{ \frac{\partial^{n_0}}{\partial \lambda^{n_0}} \tilde{N}^{(2)}(\lambda) \right\} \{e^{(2)}(x, \lambda)\} \right. \right. \\
&\quad + \binom{n_0}{1} \left\{ \frac{\partial^{n_0-1}}{\partial \lambda^{n_0-1}} \tilde{N}^{(2)}(\lambda) \right\} \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} e^{(2)}(x, \lambda) \right\} \\
&\quad + \binom{n_0}{2} \left\{ \frac{\partial^{n_0-2}}{\partial \lambda^{n_0-2}} \tilde{N}^{(2)}(\lambda) \right\} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} e^{(2)}(x, \lambda) \right\} \\
&\quad + \dots + \\
&\quad \left. + \binom{n_0}{n_0-1} \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} \tilde{N}^{(2)}(\lambda) \right\} \left\{ \frac{\partial^{n_0-1}}{\partial \lambda^{n_0-1}} e^{(2)}(x, \lambda) \right\} \right. \\
&\quad \left. + \binom{n_0}{n_0} \left\{ \tilde{N}^{(2)}(\lambda) \right\} \left\{ \frac{\partial^{n_0}}{\partial \lambda^{n_0}} e^{(2)}(x, \lambda) \right\} \right\}_{\lambda=\lambda_k^+} \\
&= \left\{ \binom{n_0}{0} \left\{ \frac{\partial^{n_0-1}}{\partial \lambda^{n_0-1}} \tilde{N}^{(2)}(\lambda) \right\} \{e^{(2)}(x, \lambda)\} \right. \\
&\quad + \binom{n_0}{0} \left\{ \frac{\partial^{n_0}}{\partial \lambda^{n_0}} \tilde{N}^{(2)}(\lambda) \right\} \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} e^{(2)}(x, \lambda) \right\} \\
&\quad + \binom{n_0}{1} \left\{ \frac{\partial^{n_0}}{\partial \lambda^{n_0}} \tilde{N}^{(2)}(\lambda) \right\} \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} e^{(2)}(x, \lambda) \right\} \\
&\quad + \binom{n_0}{1} \left\{ \frac{\partial^{n_0-1}}{\partial \lambda^{n_0-1}} \tilde{N}^{(2)}(\lambda) \right\} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} e^{(2)}(x, \lambda) \right\} \\
&\quad + \binom{n_0}{2} \left\{ \frac{\partial^{n_0-1}}{\partial \lambda^{n_0-1}} \tilde{N}^{(2)}(\lambda) \right\} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} e^{(2)}(x, \lambda) \right\} \\
&\quad + \binom{n_0}{2} \left\{ \frac{\partial^{n_0-2}}{\partial \lambda^{n_0-2}} \tilde{N}^{(2)}(\lambda) \right\} \left\{ \frac{\partial^3}{\partial \lambda^3} e^{(2)}(x, \lambda) \right\} \\
&\quad + \dots + \\
&\quad + \binom{n_0}{n_0-1} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \tilde{N}^{(2)}(\lambda) \right\} \left\{ \frac{\partial^{n_0-1}}{\partial \lambda^{n_0-1}} e^{(2)}(x, \lambda) \right\} \\
&\quad + \binom{n_0}{n_0-1} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \tilde{N}^{(2)}(\lambda) \right\} \left\{ \frac{\partial^{n_0-1}}{\partial \lambda^{n_0-1}} e^{(2)}(x, \lambda) \right\} \\
&\quad + \binom{n_0}{n_0} \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} \tilde{N}^{(2)}(\lambda) \right\} \left\{ \frac{\partial^{n_0}}{\partial \lambda^{n_0}} e^{(2)}(x, \lambda) \right\} \\
&\quad \left. + \binom{n_0}{n_0} \left\{ \tilde{N}^{(2)}(\lambda) \right\} \left\{ \frac{\partial^{n_0+1}}{\partial \lambda^{n_0+1}} e^{(2)}(x, \lambda) \right\} \right\}_{\lambda=\lambda_k^+} \quad (4.12)
\end{aligned}$$

Kombinasyonunun sonuçlarından biri olan $(\lambda \geq r)$ olmak üzere,

$$\binom{n}{r} + \binom{n}{r-1} = \binom{n+1}{r}$$

eşitliği kullanılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa (4.12) ifadesi

$$\begin{aligned}
\left\{ \frac{\partial^{n_0+1}}{\partial \lambda^{n_0+1}} \psi^{(2)}(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_k^+} &= \left\{ \binom{n_0+1}{0} \left\{ \frac{\partial^{n_0+1}}{\partial \lambda^{n_0+1}} \tilde{N}^{(2)}(\lambda) \right\} \left\{ e^{(2)}(x, \lambda) \right\} \right. \\
&+ \binom{n_0+1}{1} \left\{ \frac{\partial^{n_0}}{\partial \lambda^{n_0}} \tilde{N}^{(2)}(\lambda) \right\} \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} e^{(2)}(x, \lambda) \right\} \\
&+ \binom{n_0+1}{2} \left\{ \frac{\partial^{n_0-1}}{\partial \lambda^{n_0-1}} \tilde{N}^{(2)}(\lambda) \right\} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} e^{(2)}(x, \lambda) \right\} \\
&+ \dots + \\
&+ \binom{n_0+1}{n_0} \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} \tilde{N}^{(2)}(\lambda) \right\} \left\{ \frac{\partial^{n_0}}{\partial \lambda^{n_0}} e^{(2)}(x, \lambda) \right\} \\
&+ \binom{n_0+1}{n_0+1} \left\{ \tilde{N}^{(2)}(\lambda) \right\} \left\{ \frac{\partial^{n_0+1}}{\partial \lambda^{n_0+1}} e^{(2)}(x, \lambda) \right\} \left. \right\} \\
&= \sum_{j=0}^{n_0+1} \binom{n_0+1}{j} \left\{ \frac{\partial^{n_0+1-j}}{\partial \lambda^{n_0+1-j}} \tilde{N}^{(2)}(\lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_k^+} \left\{ \frac{\partial^j}{\partial \lambda^j} e^{(2)}(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_k^+}
\end{aligned}$$

olur. O halde (4.6) eşitliği $n_0 + 1$ için gerçekleşir. (4.6) eşitliği tümevarım ile ispanlanmış olur.

Benzer şekilde (4.7) eşitliği de ispatlanabilir ■

Teorem 4.2 Özdeğerlere karşılık gelen öz fonksiyonlar $L_2[0, \infty; \mathbb{C})$ uzayının elemanıdır. Yani,

$n = 0, 1, \dots, m_k^+ - 1, k = 1, 2, \dots, j$ olmak üzere,

$$\left\{ \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} \psi^{(2)}(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_k^+} \in L_2[0, \infty; \mathbb{C}) \quad (4.13)$$

ve $p = 0, 1, \dots, m_i^- - 1, i = 1, 2, \dots, l$ olmak üzere

$$\left\{ \frac{\partial^p}{\partial \lambda^p} \psi^{(1)}(x, \lambda) \right\}_{\mu=\mu_i^-} \in L_2[0, \infty; \mathbb{C}), \quad (4.14)$$

sağlanır.

İspat.

$$\begin{aligned}
& \left\{ \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} e^{(2)}(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_k^+} \\
&= \left[\begin{array}{c} \left\{ \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} e_1^{(2)}(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_k^+} \\ \left\{ \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} e_2^{(2)}(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_k^+} \end{array} \right] \\
&= \left[\begin{array}{c} \int_0^\infty [i(x+t)]^n H_{12}(x, x+t) e^{i\lambda_k^+(x+t)} dt \\ (ix)^n e^{i\lambda_k^+ x} + \int_0^\infty [i(x+t)]^n H_{22}(x, x+t) e^{i\lambda_k^+(x+t)} dt \end{array} \right] \quad (4.15)
\end{aligned}$$

$n = 0, 1, \dots, m_k^+ - 1$, $k = 1, 2, \dots, j$ elde edilir.

$|H_{ij}(x, t)| \leq ce^{-\varepsilon\sqrt{\frac{x+t}{2}}}$, $c > 0$, $\varepsilon > 0$, $i, j = 1, 2$ ve (4.15) kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\left| \left\{ \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} e_1^{(2)}(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_k^+} \right| &= \left| \int_0^\infty [i(x+t)]^n H_{12}(x, x+t) e^{i\lambda_k^+(x+t)} dt \right| \\
&\leq \int_0^\infty (x+t)^n |H_{12}(x, x+t)| e^{-(x+t)\text{Im}\lambda_k^+} dt \\
&\leq c \int_0^\infty (x+t)^n e^{-(x+t)\text{Im}\lambda_k^+} e^{-\varepsilon\sqrt{\frac{2x+t}{2}}} dt \\
&\leq ce^{-\varepsilon\sqrt{x}} \int_0^\infty (x+t)^n e^{-(x+t)\text{Im}\lambda_k^+} dt \quad (4.16)
\end{aligned}$$

bulunur. $\text{Im}\lambda_k^+ > 0$ olduğundan

$$\int_0^\infty t^n e^{-t\text{Im}\lambda_k^+} dt < \infty \quad (4.17)$$

olur. (4.5) ve (4.6) dan $n = 0, 1, \dots, m_k^+ - 1$, $k = 1, 2, \dots, j$, $c_1 > 0$ sabit olmak üzere,

$$\left\{ \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} e_1^{(2)}(x, \lambda) \right\} \leq c_1 e^{-\varepsilon\sqrt{x}} \quad (4.18)$$

elde edilir. $n = 0, 1, \dots, m_k^+ - 1$, $k = 1, 2, \dots, j$, $c_2 > 0$ sabit olmak üzere,

$$\left\{ \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} e_2^{(2)}(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_k^+} \leq x^n e^{-x\text{Im}\lambda_k^+} + c_2 e^{-\varepsilon\sqrt{x}} \quad (4.19)$$

sağlanır. (4.15), (4.18) ve (4.19) dan

$$\left\| \left\{ \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} e^{(2)}(\cdot, \lambda) \right\} \right\|_{L_2(0, \infty; \mathbb{C}_2)}^2 = \int_0^\infty \left| \left\{ \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} e^{(2)}(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_k^+} \right|^2 dx < \infty$$

elde edilir. O halde $n = 0, 1, \dots, m_k^+ - 1$, $k = 1, 2, \dots, j$ için

$$\left\{ \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} e^{(2)}(\cdot, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_k^+} \in L_2(0, \infty; \mathbb{C}_2) \quad (4.20)$$

olur. (4.6), (4.20) den ve $\tilde{N}^{(2)}$ fonksiyonunun sonluluğundan $n = 0, 1, \dots, m_k^+ - 1$, $k = 1, 2, \dots, j$ için

$$\left\{ \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} \psi^{(2)}(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_k^+} \in L_2(0, \infty; \mathbb{C}_2)$$

elde edilir.

(4.14) de (4.13) e benzer şekilde ispatlanabilir. ■

Teorem 4.3

$$\psi^{(2)}(x, \lambda_k^+), \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} \psi^{(2)}(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_k^+}, \dots, \left\{ \frac{\partial^{m_k^+-1}}{\partial \lambda^{m_k^+-1}} \psi^{(2)}(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_k^+}$$

ve

$$\psi^{(1)}(x, \mu_i^-), \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} \psi^{(1)}(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\mu_i^-}, \dots, \left\{ \frac{\partial^{m_i^- - 1}}{\partial \lambda^{m_i^- - 1}} \psi^{(1)}(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\mu_i^-}$$

fonksiyonlarına L operatörünün $\lambda = \lambda_k^+$, $k = 1, 2, \dots, j$ ve $\lambda = \mu_i^-$, $i = 1, 2, \dots, l$

özdeğerlerine bağlı öz fonksiyonları denir. $\psi^{(2)}(x, \lambda_k^+)$ ve $\psi^{(1)}(x, \mu_i^-)$ baş fonksiyonlardır.

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} \psi^{(2)}(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_k^+}, \dots, \left\{ \frac{\partial^{m_k^+-1}}{\partial \lambda^{m_k^+-1}} \psi^{(2)}(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_k^+}$$

fonksiyonları $\psi^{(2)}(x, \lambda_k^+)$ nin eş fonksiyonlarıdır.

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} \psi^{(1)}(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\mu_i^-}, \dots, \left\{ \frac{\partial^{m_i^- - 1}}{\partial \lambda^{m_i^- - 1}} \psi^{(1)}(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\mu_i^-}$$

fonksiyonları ise $\psi^{(1)}(x, \mu_i^-)$ nin eş fonksiyonu olarak adlandırılır.

4.2 L Operatörünün Spektral Tekilliklerine Karşı Gelen Esas Fonksiyonlar

$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ da $N^{(2)}$ nin sıfırları $\lambda_1, \dots, \lambda_\alpha$ ve $N^{(1)}$ in sıfırları μ_1, \dots, μ_ν ile gösterilmiştir. (4.3) eşitliğinden

$$k = 1, 2, \dots, \alpha \text{ için } \psi^{(1)}(x, \lambda_k) = -N^{(1)}(\lambda_k)e^{(2)}(x, \lambda_k) \quad (4.21)$$

ve

$$i = 1, 2, \dots, \nu \text{ için } \psi^{(2)}(x, \mu_i) = -N^{(2)}(\mu_i)e^{(1)}(x, \mu_i) \quad (4.22)$$

yazılır.

Sonuç 4.1 $n = 0, 1, \dots, m_k^+ - 1, k = 1, 2, \dots, \alpha$ için

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} \psi(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_k} &= \sum_{j=0}^n C_j(\lambda_k) \left\{ \frac{\partial^j}{\partial \lambda^j} e^{(2)}(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_k} \\ C_j(\lambda_k) &= -\binom{n}{j} \left\{ \frac{\partial^{n-j}}{\partial \lambda^{n-j}} N^{(1)}(\lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_k} \end{aligned} \quad (4.23)$$

ve $p = 0, 1, \dots, n_i - 1, i = 1, 2, \dots, \nu$ için

$$\left\{ \frac{\partial^p}{\partial \lambda^p} \psi(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\mu_i} = \sum_{j=0}^p D_j(\mu_i) \left\{ \frac{\partial^j}{\partial \lambda^j} e^{(1)}(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\mu_i} \quad (4.24)$$

burada

$$D_j(\mu_i) = \binom{p}{j} \left\{ \frac{\partial^{p-j}}{\partial \lambda^{p-j}} N^{(2)}(\lambda) \right\}_{\lambda=\mu_i}$$

eşitlikleri vardır.

Teorem 4.1 e benzer şekilde gösterilebilir.

Lemma 4.1 Spektral tekilliklere karşılık gelen esas fonksiyonlar $L_2[0, \infty; \mathbb{C})$ elemanı değildir.

$$\left\{ \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} \psi(\cdot, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_k} \notin L_2[0, \infty; \mathbb{C}), n = 0, 1, \dots, m_k - 1, k = 1, 2, \dots, \alpha \quad (4.25)$$

$$\left\{ \frac{\partial^p}{\partial \lambda^p} \psi(\cdot, \lambda) \right\}_{\lambda=\mu_i} \notin L_2[0, \infty; \mathbb{C}), p = 0, 1, \dots, n_i - 1, i = 1, 2, \dots, \nu \quad (4.26)$$

dır.

İspat. Bu lemmanın ispatı için

$$\left\{ \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} e^{(2)}(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_k} = \left[\begin{array}{c} \int_x^\infty (it)^n H_{12}(x, t) e^{i\lambda_k t} dt \\ (ix)^n e^{i\lambda_k x} + \int_x^\infty (it)^n H_{22}(x, t) e^{i\lambda_k t} dt \end{array} \right] \quad (4.27)$$

$$\left\{ \frac{\partial^p}{\partial \lambda^p} e^{(1)}(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\mu_i} = \left[\begin{array}{c} (-ix)^p e^{-i\mu_i x} + \int_x^\infty (-it)^p H_{11}(x, t) e^{-i\mu_i t} dt \\ \int_x^\infty (-it)^p H_{21}(x, t) e^{-i\mu_i t} dt \end{array} \right] \quad (4.28)$$

eşitliklerini kullanalım. (4.27) eşitliğinden

$$\begin{aligned} \left| \left\{ \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} e_1^{(2)}(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_k} \right| &= \left| \int_x^\infty (it)^n H_{12}(x, t) e^{i\lambda_k t} dt \right| \\ &\leq \int_x^\infty t^n |H_{12}(x, t)| dt \end{aligned} \quad (4.29)$$

bulunur.

$$\begin{aligned} \left| \left\{ \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} e_2^{(2)}(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_k} \right| &= \left| (ix)^n e^{i\lambda_k x} + \int_x^\infty (it)^n H_{22}(x, t) e^{i\lambda_k t} dt \right| \\ &\leq x^n + \int_x^\infty t^n |H_{22}(x, t)| dt \end{aligned} \quad (4.30)$$

bulunur. (4.29) ve (4.30) dan

$$\left| \left\{ \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} e^{(2)}(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_k} \right| \notin L_2[0, \infty; \mathbb{C}], \quad n = 0, 1, \dots, m_k - 1, \quad k = 1, 2, \dots, \alpha$$

buradan ve (4.23) den (4.25) elde edilir.

Benzer şekilde (4.28) ve (4.24) den (4.26) elde edilir. ■

Şimdi aşağıdaki Hilbert Uzayını tanımlayalım:

$$H(0, \infty; \mathbb{C}_2, m) := \left\{ f : f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \int_0^\infty (1+x)^{2m} [|f_1(x)|^2 + |f_2(x)|^2] dx < \infty \right\}$$

kümesi üzerindeki norm

$$\|f\|_{H(0,\infty;\mathbb{C},m)}^2 = \int_0^\infty (1+x)^{2m} \{|f_1(x)|^2 + |f_2(x)|^2\} dx$$

ve

$$H(0,\infty;\mathbb{C}_2,-m) := \left\{ g : g = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}, \int_0^\infty (1+x)^{-2m} \{|g_1(x)|^2 + |g_2(x)|^2\} dx < \infty \right\}$$

kümesi ve üzerindeki norm

$$\|g\|_{H(0,\infty;\mathbb{C}_2,-m)}^2 = \int_0^\infty (1+x)^{-2m} \{|g_1(x)|^2 + |g_2(x)|^2\} dx$$

olsun (Kır 1999).

$H(0,\infty;\mathbb{C}_2,0) = L_2(0,\infty;\mathbb{C}_2)$ ve

$H(0,\infty;\mathbb{C}_2,m) \subset L_2(0,\infty;\mathbb{C}_2) \subset H(0,\infty;\mathbb{C}_2,-m)$, $m = 1, 2, \dots$ bulunur.

Teorem 4.4 Spektral tekilliklere karşılık gelen esas fonksiyonlar Hilbert Uzayı'ndadır.

Yani $n = 0, 1, \dots, m_k - 1$, $k = 1, 2, \dots, \alpha$ olmak üzere,

$$\left\{ \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} \psi(\cdot, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_k} \in H(0,\infty;\mathbb{C},-(n+1)), \quad (4.31)$$

$p = 0, 1, \dots, n_i - 1$, $i = 1, 2, \dots, \nu$ olmak üzere

$$\left\{ \frac{\partial^p}{\partial \lambda^p} \psi(\cdot, \lambda) \right\}_{\lambda=\mu_i} \in H(0,\infty;\mathbb{C},-(p+1)), \quad (4.32)$$

İspat. $n = 0, 1, \dots, m_k - 1$, $k = 1, \dots, \alpha$ için (4.29), (4.30) ve $H(0,\infty;\mathbb{C}_2, -(n+1))$ uzayının tanımından (4.31) hesaplanır. Benzer şekilde (4.32) hesaplanabilir. ■

Tanım 4.1

$$\psi(x, \lambda_k), \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} \psi(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_k}, \dots, \left\{ \frac{\partial^{m_k-1}}{\partial \lambda^{m_k-1}} \psi(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_k}$$

ve

$$\psi(x, \mu_i^-), \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} \psi(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\mu_i^-}, \dots, \left\{ \frac{\partial^{n_i^- - 1}}{\partial \lambda^{n_i^- - 1}} \psi(x, \lambda) \right\}_{\lambda=\mu_i^-}$$

fonksiyonlarına sırasıyla L operatörünün $\lambda = \lambda_k, k = 1, 2, \dots, \alpha$ ve $\lambda = \mu_i^-, i = 1, 2, \dots, \nu$ spektral tekilliklerine bağlı esas fonksiyonları denir. $n_0 = maks \{m_1, \dots, m_\alpha, n_1, \dots, n_\nu\}$ olmak üzere

$$H_{n_0} = H(0, \infty; \mathbb{C}, n_0 + 1), \quad H_{-n_0} = H(0, \infty; \mathbb{C}, -(n_0 + 1))$$

almırsa

$$H_{n_0} \subset L_2(0, \infty; \mathbb{C}) \subset H_{-n_0}$$

olur.

Sonuç 4.2 Spektral tekilliklere karşı gelen esas fonksiyonlar H_{-n_0} uzayına aittir.

Yani,

$$\left\{ \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} \psi(\cdot, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_k} \in H_{-n_0}; \quad n = 0, 1, \dots, m_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, \alpha$$

$$\left\{ \frac{\partial^p}{\partial \lambda^p} \psi(\cdot, \lambda) \right\}_{\lambda=\mu_i} \in H_{-n_0}; \quad p = 0, 1, \dots, n_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, \nu$$

dır.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Fonksiyonel analiz, uygulamalı matematik ve kuantum mekaniğinin birçok probleminin modellenip çözülmesinde en çok kullanılan denklemler diferensiyel denklemlerdir

Skaler katsayılı ve genel sınır koşulu ile verilen nonselfadjoint operatörlerin spektral analizi literatürde detaylı bir biçimde incelenmesine rağmen genel sınır koşulu ile verilen ve diferensiyel denklemler sistemi tarafından üretilen non-selfadjoint operatörlerin spektral teorisi yeteri kadar incelenmemiştir.

Tezin ilk bölümünde,

$\int_0^{\infty} K(t, \lambda)y(t, \lambda)dt + \alpha y_2(0, \lambda) - \beta y_1(0, \lambda) = 0$ koşulunu gerçekleyen

$$\left[J \frac{d}{dx} + Q(x) - \lambda \right] y(x, \lambda) = 0,$$

sistemi yardımıyla tanımlanan non-selfadjoint L operatörünün çözümleri incelenmiştir. Ayrıca rezolventi hesaplanmış ve sürekli spektrumu elde edilmiştir.

Tezin ikinci bölümünde ise, L operatörünün özdeğer ve spektral tekilliklerine karşılık gelen esas fonksiyonların özellikleri araştırılmış, özdeğer ve spektral tekilliklere karşılık gelen L_2 ve H uzaylarına ait olduğu gösterilmiştir.

Bu tezdeki amaç genel sınır koşulu ile verilen diferensiyel denklemler sistemi tarafından üretilen operatörün spektral analizi incelenerek literatürdeki bir boşluk giderilmesidir.

Tezdeki bu çalışmaların devamı olarak L operatörünün esas fonksiyonlarına göre spektral açılım formülü hesaplanıp ve açılımın yakınlığı incelenebilir.

Bu tez çalışmasının konusunu oluşturan operatörlerin spektral teorisi üzerine yapılan çalışmalar da zaman skalasında modellenerek, hem skaler hem de matris durumunun detaylı bir şekilde incelenmesi mümkündür.

KAYNAKLAR

- Adivar, M. and Bairamov, E. 2001. Spectral properties of non-selfadjoint difference operators. *J. Math. Anal. Appl.*, 261, 461-478.
- Adivar, M. and Bairamov, E. 2003. Difference equations of second order with spectral singularities. *J. Math. Anal. Appl.*, 277, 714-721.
- Akin, Ö. and Bairamov, E. 1995. On the structure of discrete spectrum of the non-selfadjoint system of differential equations in the first order. *J. Korean Math. Soc* 32(3), 401–413.
- Aygar, Y. and Bairamov, E. 2012. Jost solution and the spectral properties of the matrix-valued difference operators. *Appl. Math. Comput.*, 218(19), 9676–9681.
- Agranovich, Z. S. and Marchenko, V. A. 1965. The inverse problem of scattering theory, Gordon and Breach.
- Atkinson, F. V. 1964. *Discrete and Continuous Boundary Problems*. New York, Academic Press.
- Bairamov, E., Çakar Ö. and Çelebi A. O. 1997. Quadratic pencil of Schrödinger operators with spectral singularities: Discrete spectrum and principal functions. *Jour. Math. Anal. Appl.*, 216, 303-320.
- Bairamov, E., Çakar Ö. and Krall, A. M. 1999. Spectrum and spectral singularities of a quadratic pencil of a Schrödinger operator with a general boundary condition. *J. Diff. Equation*, 151, 252-267.
- Bairamov, E., Krall, A. M., Çakar, O. 1999. An eigenfunction expansion for a quadratic pencil of a Schrödinger operator with spectral singularities. *J. Diff. Equat.* 151; 268-289.
- Bairamov, E. and Çelebi, A. O. 1999. Spectrum and spectral expansion for the non-selfadjoint discrete Dirac operators. *Quart. J. Math. Oxford Ser.*, (2)50, 371-384.
- Bairamov, E., Çakar Ö. and Krall, A. M. 2001. Non-selfadjoint difference operators and Jacobi matrices with spectral singularities. *Math. Nacr.*, 229, 5-14.
- Bairamov, E. and Coskun, C. 2004. Jost solutions and the spectrum of the system of difference equations. *Appl. Math. Lett.*, 17, 1039-1045.
- Bairamov, E. and Coskun, C. 2005. The structure of the spectrum of a system of difference equations. *Appl. Math. Lett.*, 18, 387-394.
- Bairamov, E. and Karaman, O. 2002. Spectral singularities of Klein-Gordon s-wave equations with an integral boundary condition. *Acta Math. Hungar*, 97, 121-131.

- Clark, S., Gesztesy, F. and Renger, W. 2002. Weyl-Titchmarsh M-function asymptotics local uniqueness results, trace formulas and Borg-type theorems for Dirac operators. *Trans. Am. Math. Soc.*, 354, 3475-3534.
- Coskun, C. and Olgun, M. 2011. Principal functions of non-selfadjoint matrix Sturm–Liouville equations. *J. Comput. Appl. Math.*, 235(16), 4834-4838.
- Dolzhenko, E. P. 1979. Boundary value uniqueness theorems for analytic functions. *Math. Notes*, 26, 437-442.
- Glazman, I. M. 1965. Direct methods of qualitative spectral analysis of singular differential operators. Jerusalem.
- Gohberg, I. C. and Krein, M. G. 1969. Introduction to the theory of linear non-selfadjoint operators. American Math. Society.
- Kelly, W. G. and Peterson, A. C. 2001. *Difference Equations. An introduction with applications.* Harcourt Academic Press.
- Kemp, R. R. D. 1958. A singular boundary value problem for a non-selfadjoint differential operator. *Canad. J. Math.*, 10, 447-462.
- Kır, E. 1999. Bir diferensiyel denklem sistemin ürettiği non-selfadjoint singüler diferensiyel operatörün spektral analizi. Gazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.
- Kır, E. 2005. Spectrum and principal functions of the non-selfadjoint Sturm-Liouville operators with a singular potential. *Appl. Math. Lett.*, 18, 1247-1255.
- Krall, A. M. 1965a. The adjoint of differential operators with integral boundary conditions. *Proc. AMS*, 16, 738-742.
- Krall, A. M. 1965b. A nonhomogenous eigenfunction expansion. *Trans AMS*, 117, 352-361.
- Krall, A. M. 1965c. Second order ordinary differential operators with general boundary conditions. *Duke. Jour. Math.*, 32, 617-625.
- Krall, A.M. 1965d. On non-selfadjoint ordinary differential operators of second order. *Sov. Math. Dokl.* 165, 1235-1237.
- Krall, A. M., Bairamov, E. and Çakar Ö. 1999. An eigenfunction expansion for a quadratic pencil of a Schrödinger operator with spectral singularities. *J. Diff. Equation*, 151, 268-289.
- Kreyszig , E. 1978. *Introductory Functional Analysis with Applications.* New York: Wiley&Sons. Inc.
- Levitan, B. M. and Sargsjan, I. S. 1975. Introduction to spectral theory, *Translations of Mathematical Monographs*, 39.
- Levitan, B. M. 1987. *Inverse Sturm-Liouville Problems.* VSP, Zeist.

- Lusternik, L. A. and Sobolev, V. J. 1974. Elements of functional analysis. Halsted Press, New York.
- Lyance, V. E. 1967. A differential operator with spectral singularities. I, II, AMS Translations, 2(60), 185-225, 227-283.
- Naimark, M. A. 1960. Investigation of the spectrum and the expansion in eigenfunctions of a non-selfadjoint operator of second order on a semi-axis. AMS Translations, 2(16), 103-193.
- Olgun, M. and Coskun, C. 2010. Non-selfadjoint matrix Sturm-Liouville operators with spectral singularities. Appl. Math. Comp., 216, 2271-2275.
- Pavlov, B. S. 1967. The non-selfadjoint Schrödinger operator. Topics in Mathematics and Physics, 1, 87-114.
- Pavlov, B. S. 1965. On separation condition for spectral components of a dissipative operator. Math. USSR Izvestiya, 9, 113-137.
- Titchmarsh, E. C. 1962. Eigenfunction Expansions Associated with Second Order Differential Equations. Oxford University Press, London.
- Tunca, G. B. and Bairamov, E. 1999. Discrete spectrum and principal functions of non-selfadjoint differential operator. Czechoslovak Math. J., 49(124), no. 4, 689-700.
- Yardımcı, S. 2010. A note on the spectral singularities of non-selfadjoint matrix-valued difference operators. Journ. of Comput. and Appl. Math., 234(10), 3039-3042.
- Zhang, W. Simos, T.E. 2016. A high-order two-step phase-fitted method for the numerical solution of the Schrödinger equation. Mediterr. J. Math 13(6), 5177-5194.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Çağla CAN

Doğum Yeri : Mersin

Doğum Tarihi : 12/01/1987

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl):

Lise : Abdülkerim Bengi Anadolu Lisesi, 2004.

Lisans : Ankara Üniversitesi, Matematik Bölümü, 2009.

Yüksek Lisans : Ankara Üniversitesi, 2012.

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl: Sebit Eğitim ve Bilgi Teknolojileri, 2017
(devam ediyor).

Aynur Teziş Temel Lisesi, 2016-2017.

Özel Final Okulları, 2015-2016.

Ankara Üniversitesi Elmadağ Meslek Yüksek Okulu, 2011-2015.

Yayımları: Yardımcı, S. Arpat, E. K. **Can, Ç.** 2017. On the structure of discrete spectrum of a on-selfadjoint system of differential equations with integral boundary condition Math Chem 55:1202–1212 DOI 10.1007/s10910-017-0737-9