T.C.
HARRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HİPERBOLİK KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

Peshraw Ahmed HAMADAMIN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ŞANLIURFA
2018

Dr. Öğr. Üyesi Mahmut MODANLI danışmanlığında, Peshraw Ahmed HAMADAMIN'ın hazırladığı **"Hiperbolik Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Nümerik Çözümleri"** konulu bu çalışma 05/06/2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Harran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

İmza

Danışman	: Dr. Öğr. Üyesi Mahmut MODANLI	………..……………..
Üye	: Doç. Dr. Ali AKGÜL	…………………….
Üye	: Doç. Dr. Haydar ALICI	..…………………….

Bu Tezin Matematik Anabilim Dalında Yapıldığını ve Enstitümüz Kurallarına Göre Düzenlendiğini Onaylarım..

Prof. Dr. H. Murat ALĞIN
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

HİPERBOLİK KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

Peshraw Ahmed HAMADAMIN

Harran Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Mahmut MODANLI

Yıl: 2018, Sayfa: 50

Bu çalışmada, kısmi diferansiyel denklemlerin analitik çözümünün bulunmasını sağlayan Laplace, Fourier ve Fourier seri çözüm metotlarıyla ilgili uygulama problemler verildi. Bu kısmi diferansiyel denklemlerin Cauchy problemi için tam çözümü bulundu. Bulunan bu tam çözümün kararlılığı gösterildi. Bu denklemlerin yaklaşık çözümleri için birinci ve ikinci mertebeden fark şemaları kuruldu. Bu fark şemalarının kararlılık kestirimleri matris kararlılık metudu kullanılarak yapıldı. Matlab programı yardımıyla bu kısmi diferansiyel denklemlerin örnek uygulamaları için yaklaşık çözümler elde edildi. Elde edilen bu yaklaşık çözümler ile tam çözüm karşılaştırılarak hata analizi yapıldı. Elde edilen nümerik çözümlerin etkili olduğu ve metodun bu probleme uygun olduğu görüldü.

ANAHTAR KELİMELER: Yaklaşık çözüm, Sonlu fark şeması, Kararlılık, Hata analizi.

ABSTRACT

MSc Thesis

ON THE NUMERICAL SOLUTION OF HYPERBOLİC PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

Peshraw Ahmed HAMADAMIN

Harran University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Mahmut MODANLI
Year: 2018, Page: 50

In this study, the application problems related to the Laplace, Fourier and Fourier series solution methods which satisfy the analytic solution of partial differential equations are given. The exact solutions of these partial differential equations are found for the Cauchy problem. The stability of this exact solution is presented. The first and the second order of accuracy difference schemes for the approximate solution of this problem are constructed. Using the matrix stability method, it is established stability estimates for these difference schemes. Comparing the exact solutions and the numerical solution obtained by Matlab program, the approximation solutions are obtained. It is shown that obtained numerical solution are effective and the method is suitable for this problem.

KEY WORDS: Approximation solution, Stability, Finite difference scheme, Error estimate.

TEŞEKKÜR

Öncelikle, onsuz hiçbir şey mümkün olmayan, Allah'a şükrediyorum. Danışmanım Sayın Dr. Öğr. Üyesi Mahmut MDANLI'ya, Matematik Bölümü Bölüm Başkanı Sayın Doç. Dr. Aydın İZGİ'ye ve hocam Sayın Doç. Dr. Tanfer TANRIVERDİ'ye teşekkür ediyorum. En yakın arkadaşım Bawer M. FARAJ'a teşekkür ediyorum. Ayrıca, anne ve babama ve de bütün aile üyelerime teşekkürler. Son olarak, Harran Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Anabilim Dalı'nın tüm akademik kadrosuna şükranlarımı sunuyorum.

ÇİZELGELER DİZİNİ

Sayfa No

SİMGELER DİZİNİ

F	Fourier dönüşümü
$\mathcal{L}$	Laplace dönüşümü
N	Doğal sayılar
R	Gerçek sayılar
C	Karmaşık sayılar
Ω	Açık küme
$\Omega +$	Pozitif açık küme
L^2	Hilbert uzayı
A	Operatör
J	Operatör
K	Operatör
M	Sabit katsayı
W_2^1, W_2^2	Sobolev uzayları
$L_2(\Omega)$	L_2 uzayı
H	Hilbert uzayı
$\Vert . \Vert_H$	Hilbert uzayında norm
KDD	Kısmi diferansiyel denklemler
ADD	Adi diferansiyel denklemler

1. GİRİŞ

Bu tezin temeli, hiperbolik kısmi diferansiyel denklemler için nümerik yöntemlerdir. Kısmi diferansiyel denklemlerin, özellikle hiperbolik tiplerin, birçok mühendislik ve bilim alanında ortaya çıktığı bilinmektedir. Bu bilim dallarından bazıları akışkanlar dinamiği, dalga yayılımı, elektromanyetik, termodinamik, hidrodinamik, esneklik ve malzeme bilimidir. Kısmi diferansiyel denklemlerin (KDD) sayısal düzenlenmesi, günümüzün aritmetiğinin zengin ve dinamik bir alanıdır. Konunun aralıksız gelişimi, karakteristik bilimler, bina ve finansal yönlerden sürekli olarak genişleyen talepler tarafından, doğru düzenlemeleri aşırı derecede karışmış ve karar vermeyi imkansız kılan tamamlanmamış diferansiyel koşullar (KDD) dahil olmak üzere sayısal modellere kesin ve güvenilir yaklaşımlar verilerek canlandırılmıştır. Ortak diferansiyel koşulların sayısal düzeninin tarihsel zemini, on sekizinci ve on dokuzuncu yüzyıl aritmetiğinde oluşturulmakla birlikte, KDD'lerin sayısal düzeninin bilimsel kuruluşu büyük ölçüde daha sonradır: İlk olarak, Richard Courant, Karl Friedrichs ve Hans Lewy tarafından, 1928'de düzenlenen, Uber bite the dust partiellen Distinction ngleichungen der mathematischen Physic (Bilimsel materyal biliminin yarı yol kontrast koşulları) dönüm noktası bildirisinde ifade edilmiştir. Belirli KDD'ler için geniş bir dizi ayrıntılı sayısal strateji vardır. Örneğin, ön takip ve arayüz sorunları için seviye belirleme ve hızlı yürüyüş stratejileri; KDD'ler için, belki de ilerleyen, manifoldlar üzerinde sayısal teknikler ;batık limit teknikleri;iş-serbest stratejileri; molekül teknikleri; girdap stratejileri;farklı sayısal homojenizasyon stratejileri ve çok boyutlu konular için özel sayısal sistemler;dalgacık tabanlı harç düzenleme stratejileri; yetersiz sonlu fark/ sonlu bileşen teknikleri, yüksek boyutlu KDD'ler için sayısız hesaplamalar ve bordür stratejileri;geometrik olarak karmaşık konular için uzay parçalama teknikleri ve güvenlik açığı belirleme konuları da dahil olmak üzere çeşitli uygulamalarda yer alan stokastik (olasılıksal) katsayıları olan KDD'ler için sayısal stratejiler. Özlü denetimimiz, bu devasa ve hızla ilerleyen konuya eşitlik getiremez. Sonuç olarak, kendimizi KDD'lerin sayısal olarak düzenlenmesi için en standart ve belirlenmiş prosedürlerle sonlu fark stratejilerini sınırlamalıyız. Çalışmamıza başlamadan önce, KDD'lerin hipotezini anahatlarıyla özetlemek uygun olacaktır. Son on yıllarda, bu denklemlere bir çözüm bulmak için daha doğru ve verimli yöntemlerin geliştirilmesine önemli miktarda çaba gösterilmiştir. Dahası, kararlılık problemi çok önemli ve dikkate değerdir. Kararlılığı analiz etmek için makul bir modele benzer olarak, sınırsız bir operatörle, koşulsuz olarak mutlak bir şekilde tutarlı bir kararlılık şeması sağlanmıştır (Olver, 2014). Adi diferansiyel denklemlerin çözümü, bir bağımsız değişkenin bir fonksiyonunu (veya bir fonksiyon kümesini) bulmayı içerir. Öte yandan, KDD'ler iki veya daha fazla değişkenin fonksiyonlarıdır. KDD'leri kullanan fiziksel modellerin örnekleri, bir vücuttaki sıcaklık dağılımının evrimi için ısı denklemi, bir dalga cephesinin hareketi için dalga denklemi, akışkanların akışı için akış denklemi ve bir elektrostatik potansiyel veya elastik gerinim alanı için Laplace denklemidir. Bu gibi durumlarda, sadece başlangıç koşullarına değil, aynı zamanda modelin uygulandığı bölge için de sınır koşullarına sahip olmamız gerekir. Sonuç olarak, sınır değer problemlerini çözmeliyiz.

Bu tezde, bir $H = L_2[0, L]$ Hilbert uzayında

$$\begin{cases} \frac{d^2u(t)}{\partial t^2} + Ru(t) + Mu(t) = f(t), 0 < t < 1, \\ u(0) = \varphi, u'(0) = \psi \end{cases} \quad (1.1)$$

problemi incelenecektir.

1.1. Ön çalışmalar

Bu tezin ileriki bölümlerinin kullanılabilecek bazı temel tanım ve ön hazırlıkları gösterelim.

Tanım 1.1.1. “$f = \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}$ olsun. $\mathcal{F}\{f(t)\}$ ile gösterilen $f \in L^1(R)$ Fourier dönüşümü $t \in \mathcal{R}$ için var olan $\mathcal{F}\{f(t)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\, e^{-its} ds$ integrali tarafından verilir” (Stein ve Shakarchi, 2003).

Tanım 1.1.2. "Karmaşık değerli bir fonksiyon $f(x)$, sonlu $L^2\,norm$: $\|f\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2 dx < \infty$ normuna sahipse, $[\pi, \pi]$ aralığında kare integrallenebilirdir denir. Ve, tüm karmaşık değerli kare integrallenebilir fonksiyonlardan oluşan vektör uzayına $L^2 = L^2[\pi, \pi]$ Hilbert uzayı denir" (Olver, 2014).

Tanım 1.1.3. "Normlu tam iç çarpım uzayına Hilbert uzayı denir. Banach uzayı, norm metriğinde tam olan normlu bir vektör uzayıdır (yani tam bir normlu lineer uzay bir Banach alanıdır)" (Yanovsky, 2005).

Tanım 1.1.4. "Bir problem bir çözüme (varlık) sahip, var olan bu çözüm tek (teklik), ve verilen sınır veya başlangıç koşullarına (kararlılık) bağlı olarak sürekli ise bu probleme iyi tanımlı olarak adlandırılır. Bu kriterleri taşımayan problemlere iyi tanımlı olmayan problem denir. İyi tanımlı bir problemin çözümü için sınır ve başlangıç koşulları genellikle istenir ve iyi tanımlı problemler sayısal olarak çözüm bulma şansına sahiptir" (Sizikov, 2011).

Tanım 1.1.5. "Değişkenlerin ayrılması, her bir değişkeni tek değişkenli fonksiyona ayırarak ve adi diferansiyel denklemi veren temel diferansiyel denklemine koyarak tam bir çözüm sağlayan, KDD'leri çözme yöntemidir. $f(x, y, \ldots)$ ve $x, y, \ldots,$ değişkenlerin değişkenlerin ayrılması, $f(x, y, \ldots) = X(x)Y(y)\ldots$ formunun bir yerleşririlmesi yapılarak uygulanabilir" (Haberman, 1983).

Örneğin, $\frac{\partial u}{\partial xx} - \frac{\partial u}{\partial xt} = 0$ KDD $u(x,t) = X(x)T(t)$ olarak değişkenlere ayrılabilir. $\frac{X''}{X'} = \frac{T'}{T} = k$ olsun, burada k ayırıcı sabittir, bu da adi diferansiyel denklemler formatında olup herhangi bir ODE yöntemi ile çözülebilir.

Tanım 1.1.6. "Sonsuz türevlenebilen gerçel ya da karmaşık olan bir $f(x)$ fonksiyonun Taylor serisi

$$f(x) = f(b) + \frac{f'(b)}{1!}(x-b) + \frac{f''(b)}{2!}(x-b)^2 + \frac{f'''(b)}{3!}(x-b)^3 + \cdots \tag{1.2}$$

kuvvet serisinin açılımı şekindedir. Bu da kısaca

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^n(b)}{n!}(x-b)^n$$

olarak yazılabilir. Burada $n!$, n faktöriyelini gösterir ve $f^n\ (b)$, b noktasındaki f'in n nci türevini gösterir. $b = 0$ olduğu zaman, seri aynı zamanda bir McLauren serisi olarak adlandırılır" (Abramowitz ve Stegun, 1965).

Tanım 1.1.7. "H ve H^* iki Hilbert uzayı olsun. $A: H \to H^*$ tanımlanan A operatörü eğer

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay \ \ for\ all\ \ \alpha, \beta\ \in C \text{ ve } x, y \in H$$

şartını sağlarsa bir lineer operatördür. $A'nın$ tanım kümesi $D(A) = \{x \in H, \exists Ax \in H^*\}$ bir vektör uzayı ve $R(A) = \{y = Ax, \forall x \in D(A)\}$ A nın tanım aralığını gösterir. Bir A: $H_1 \to H_2$ lineer operatörü

$$\|Ax\|_X \leq M\|x\|_H, \forall\ x \in H$$

olacak şekilde $M > 0$ gerçel sayısı varsa A operatörüne sınırlı operatör denir. $\|A\|$ ifadesin A operatörünün normu olarak adlandırılır, eğer A lineer operatörü A: $H \to H^*$, M ile sınırlı ise, bu durumda

$$\|A\| = infM$$

dır" (Yanovsky, 2005).

Tanım 1.1.8. "Sonlu fark metotları, sonlu farkların türevlere yaklaştığı fark denklemiyle diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümü için nümerik metotlardır" (Banasiak ve Mika, 1998).

(1.2) denklemindeki u fonksiyonunun $x_0 + h$ notasında Taylor açılımını yapılırsa

$$u(x_0 + h) = \ u(x_0) + \frac{u'(x_0)}{1!}(x_0 + h - x_0) + O(h^2),$$

$$u(x_0 + h) = u(x_0) + hu'(x_0) + O(h^2)$$

olur. Son formül düzenlenirse

$$u'(x_0) = \frac{u(x_0 + h) - u(x_0)}{h} + \frac{O(h^2)}{h},$$

$$u'(x_0) = \frac{u(x_0 + h) - u(x_0)}{h} + O(h^2)$$

olup küçük terimler ihmal edilirse

$$u'(x_0) = \frac{u(x_0 + h) - u(x_0)}{h} \tag{1.3}$$

elde edilir. Bu nedenle, (1.3) denklemine $u_x(x_0)$ denkleminin birinci mertebeden sonlu fark şeması yaklaşımı denir.

$x = k,\ k \mp 1$ için $x_k = x_0 + kh$ yazılırsa, (1.2) denkleminden

$$u_x = \frac{u_{k+1} - u_k}{h}$$

ve

$$u_{xx} = \frac{u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}}{h^2}$$

yazılabilir.

Tanım 1.1.9. "$\|.\|$ X üzerinde bir vektör uzayı ve eğer

- $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0,$
- $\|\alpha x\| = |\alpha|.\|x\|$Tüm skaler α için,
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$."(Hale ve Lvnel, 1993)

şartları sağlanırsa X üzerinde bir normdur denir.

Tanım 1.1.10. "Karmaşık bir H lineer uzayı,

- $\langle x, x\rangle \geq 0\ and\ \langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = \sigma$
- $\langle x, y\rangle = \overline{\langle x, y\rangle}\ \forall x, y \in H$
- $\langle \alpha x, y\rangle = |\alpha|\langle x, y\rangle\ \forall x, y \in H$ ve bütün α skalerleri için $\alpha \in C$
- $\langle x, yz\rangle = \langle x, z\rangle\langle y, z\rangle \forall x, y \in H$ (üçgen eşitsizliği)

özellikleri ile karmaşık değerli bir $\langle .,.\rangle: H \times H \ \rightarrow C$ fonksiyonu varsa bu uzaya bir iç çarpım uzayı denir.

$\langle x, y\rangle$ fonksiyonu, x ve y'nin iç çarpımı olarak adlandırılır. Hilbert uzayı tam bir iç çarpım uzaydır. H üzerindeki, $\|x\| = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}$ ile verilen norm bir iç çarpım tanımlar. "Bu nedenle iç çarpım uzayları normlu uzaylar ve Hilbert uzayları Banach uzaylarıdır" (Yanovsky, 2005).

Tanım 1.1.11. "Laplace dönüşümü, sistemin kararlı veya kararsız olup olmadığına bakılmaksızın sürekli zaman sinyalleri için bir frekans-alan yaklaşımıdır. Tüm gerçel sayılar $t \leq 0$ için tanımlanan $f(t)$fonksiyonunun Laplace dönüşümü,

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}\, dt$$

olarak tanımlanan $F(s)$ fonksiyonudur. $a, ve\ b$ gerçel sayılar olmak üzere, $t = a + ib$ ile aynıdır (Abramowitz ve Stegun, 1965).

Laplace dönüşümü bir lineerlik özelliğine sahiptir. Laplace dönüşümü, Fourier dönüşümüne oldukça benzerdir. Bu çalışmada en çok kullanılan Laplace dönüşümü diferansiyel denklemlerin analitik çözümü için oldukça önemlidir.

$$\mathcal{L}\{f^n(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) \ldots - f^{n-1}(0)$$

formülü Laplace dönüşümünün en önemli formüllerindendir.

Tanım 1.1.12. "Eğer her $\epsilon > 0$ için $\|\hat{y}(t_0 - y(t_0)\| \leq \delta$ olduğunda $\hat{y}(t)$ adi diferansiyel denkleminin bütün $t \geq t_0$ için $\|\hat{y}(t) - y(t)\| \leq \epsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ değeri varsa $y' = f(t, y)$ adi diferansiyel denklemin bir çözümü kararlıdır "(Abramowitz ve Stegun, 1965).

Tanım 1.1.13. "$AX = B$ formunun matris denklemlerini çözmek için Gauss eliminasyonu iyi yapılandırılmış bir yöntemdir. Denklemler sistemi ile başlayan Gauss eleme işleminin gerçekleştirilmesi için, bir matrisin tersini bulmak için kullanılabilen Gauss-Jordan eliminasyonu olarak adlandırılan Gauss-eliminasyonun bir varyantı vardır. Eğer A, bir n karekök matrisiyse, ters matrisini hesaplamak için satır küçültmeyi kullanabilir. İlk olarak, n'nin birim matrisi A'nın sağına, $n\ ile\ 2n$ blok matrisi $[A|I]$ oluşturarak çoğaltılır. Şimdi, temel satır işlemlerinin uygulanmasıyla, bu

$2n$ ile n matrisinin indirgenmiş basamaklı (echelon) formunu buluruz. Matris A, sadece ve sadece sol blok, birim matrisine indirgenebiliyorsa tersine çevrilebilir. Bu durumda, son matrisin sağ bloğu $A-1$'dir. Eğer algoritma sol bloğu I' e indirgeyemiyorsa, o halde A tersinir değildir (tersine çevrilemez)" (Grcar, 2011).

Tanım 1.1.14. "Özeşlenik bir A operatörü, $A \geq 0$ A durumunda pozitiftir, yani bütün $x \in H$ için $(Ax, x) \geq 0$ dır" (Yanovsky, 2005).

Tanım 1.1.15. "Bir Hilbert uzayında sınırlı bir $A: H \to H$ lineer operatörü, bütün $x, y \in H$ için $\langle Ax, y\rangle = \langle\, x, Ay\,\rangle$ olması durumunda A'nın özeşlenik olduğu söylenir" (Yanovsky, 2005).

1.2. Örnekler

Bu bölümde, örnek problemler için tam çözüm gösterilecek ve bu problemler fark şeması metoduyla kullanılan yaklaşık çözümle karşılaştırılacaktır. Bu karşılaştırmanın sonuçları iyi bir doğruluğa sahip olduğu görülecektir.

Örnek 1.2.1.

$$\begin{cases} u_{tt}(t,x) + u(t,x) = u_{xx}(t,x) + u_x(t,x)(3sin2x - cos2x)e^t, \\ 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq t \leq 1, \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0, \\ u(0,x) = sinx\; cosx, u_t(0,x) = sinx\; cosx \end{cases} \tag{1.4}$$

kısmi diferansiyel denkleminin tam çözümünü Laplace dönüşümünü kullanarak elde ediniz.

Çözüm: (1.4) denkleminin tam çözümünü Laplace dönüşümünü kullanarak bulalım. Her iki tarafın Laplace'i alınırsa,

$$\mathcal{L}\big(u_{tt}(t,x) - u_{xx}(t,x) - u_x(t,x) + u(t,x)\big) = (3sin2x - cos2x)\mathcal{L}(e^t)$$

olur. Başlangıç değer koşulları uygulanırsa

$$s^2u(s,x) - su(0,x) - u_t(0,x) - u_{xx}(s,x) - u_x(s,t) + u(s,t)$$

$$= \frac{3sin2x - cos2x}{s-1}$$

olup, buradan da

$$s^2u(s,x) - s.sinx\ cosx\ - sinx\ cosx\ + u(s,x) - u_{xx}(s,x) - u_x(s,x)$$

$$= \frac{6sinx\ cosx + \sin^2 x - \cos^2 x}{s-1}$$

bulunur. Gerekli işlemler yapılırsa

$$(s^2+1)u(s,x) - u_{xx}(s,x) - u_x(s,x)$$

$$= \frac{(s^2+5)sinx\ cosx + \sin^2 x - \cos^2 x}{s-1} \qquad (1.5)$$

elde edilir. (1.5) denklemin homojen ve homojen olmayan kısmının çözümü için $u = u^c + u^p$şeklinde çözümler aransın. (1.5) denkleminin homojen kısmı

$$(s^2+1)u(s,x) - u_{xx}(s,x) - u_x(s,x) = 0$$

olup, bu denklemin karakteristik denklemi

$$-m^2 - m + (s^2+1) = 0$$

ve kökleri

$$m_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5+4s^2}}{2}$$

olarak elde edilir. Böylece homojen kısmının çözümü

$$u^c = e^{-\frac{1}{2}x}\left(c_1 e^{x\left(\frac{\sqrt{4s^2+5}}{2}\right)} + c_2 e^{x\left(\frac{-\sqrt{4s^2+5}}{2}\right)}\right) \qquad (1.6)$$

şimdi, homojen olmayan kısmın çözümü için $u^p = u(s,x) = A(s)sin2x + B(s)cos2x$ alınıp, (1.5) denkleminde yerine yazılırsa,

$$8Asinx\ cosx - 4B\ (\sin^2 x - \cos^2 x) + 2A\ (\sin^2 x - \cos^2 x) + 4Bsinx\ cosx$$

$$+(s^2+1)2A\ sinx\ cosx - B\ (s^2+1)(\sin^2 x - \cos^2 x)$$

$$= \frac{(s^2+5)sinx\ cosx + \sin^2 x - \cos^2 x}{s-1}$$

bulunur. Buradan

$$[8A(s) + 4B(s) + 2A(s)(s^2+1)]sinx\ cosx = \frac{s^2+5}{s-1}sinx\ cosx,$$

$$[-4B(s) + 2A(s) - B(s)(s^2+1)](\sin^2 x - \cos^2 x)$$

$$= \frac{1}{s-1}(\sin^2 x - \cos^2 x) \qquad (1.7)$$

dır. (1.7) denkleminden $B(s) = 0,\ A(s) = \frac{1}{2(s-1)}$ olarak bulunur.

Homojen olmayan kısmın çözümü $u^p = \frac{1}{2(s-1)}2sinx\ cosx$ şeklinde elde edilir. Homojen ve homojen olmayan denklemlerin çözümünden

$$u(s,x) = c_1 e^{x\left(\frac{-1+\sqrt{4s^2+5}}{2}\right)} + c_2 e^{x\left(\frac{-1-\sqrt{4s^2+5}}{2}\right)} + \frac{1}{2(s-1)}2sinx\ cosx$$

olup başlangıç değer koşulları uygulanırsa,

$$u(s,0) = c_1 + c_2 = 0,$$

$$u(s,\pi) = c_1 e^{\frac{-1+\sqrt{4s^2+5}}{2}\pi} + c_2 e^{\frac{-1-\sqrt{4s^2+5}}{2}\pi} = 0$$

denklemlerinden c_1=$c_2 = 0$ bulunur. Bulunan bu değerler yerine yazılırsa

$$u(s,x) = \frac{1}{(s-1)}sinx\ cosx$$

çözümü elde edilir. Son denklemin ters Laplace dönüşümü alınırsa

$$\mathcal{L}^{-1}\big(u(s,x)\big) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-1)}sinx\ cosx\right) = e^t\ sinx\ cosx$$

çözümü elde edilir. Böylece (1.4) denkleminin tam çözümü

$$u(t,x) = e^t\ sinx\ cosx$$

olarak elde edilir.

Örnek 1.2.2.

$$\begin{cases} u_{tt}(t,x) - u_{xx}(t,x) - u_x(t,x) + u(t,x) = (3\sin x - \cos x)e^{-t}, \\ u(0,x) = \sin x, u_t(0,x) = -\sin x, u(t,0) = u(t,\pi) = 0, \\ 0 \le x \le \pi, 0 \le t \le 1 \end{cases} \tag{1.8}$$

kısmi diferansiyel denkleminin tam çözümünü bulunuz.

Çözüm: (1.8) denkleminin çözüme ulaşmak için, her iki tarafın Laplace dönüşümü alınırsa,

$$\mathcal{L}\{u_{tt}(t,x) - u_{xx}(t,x) - u_x(t,x) + u(t,x)\} = \mathcal{L}\,\{3\sin x - \cos x\}e^{-t}$$

olup buradan

$$\mathcal{L}\{u_{tt}(t,x)\} - \mathcal{L}\{u_{xx}(t,x)\} - \mathcal{L}\{u_x(t,x)\} + \mathcal{L}\{u(t,x)\} = (3\sin x - \cos x)\mathcal{L}\{e^{-t}\}$$

yazılabilir. Laplace dönüşümünden

$$s^2u(s,x) - su(0,x) - u'(0,x) - u_{xx}(s,x) - u_x(s,x) + u(s,x) = \frac{3\sin x - \cos x}{s+1}$$

elde edilir. Başlangıç değerleri bu son problemde kullanılırsa,

$$s^2u(s,x) - s.\sin x + \sin x - u_{xx}(s,x) - u_x(s,x) + u(s,x) = \frac{3\sin x - \cos x}{s+1}$$

olur. Gerekli işlemler yapılırsa

$$(s^2+1)u(s,x) - u_{xx}(s,x) - u_x(s,x) = \frac{3\sin x - \cos x}{s+1} + (s-1)\sin x$$

bulunur. Bu da

$$-u_{xx}(s,x) - u_x(s,x) + (s^2+1)u(s,x) = \frac{s^2+2}{s+1}\sin x - \frac{1}{s+1}\cos x \tag{1.9}$$

denklemine eşit olur. (1.9) denklemini çözmek için, $u = u^c + u^p$ olan homojen ve homojen olmayan kısımların çözümlerini ayrı ayrı bulalım. Şimdi, homojen kısmı

$$-u_{xx}(x,s) - u_x(s,x) + (s^2+1)u(s,x) = 0$$

olan denklemin çözümü için $u(s,x) = e^{mx}$ alınırsa, bu son denklemin karakteristik denklemi

$$-m^2 - m + (s^2+1) = 0$$

ve kökleri

$$m_{1,2} = \frac{1 \mp \sqrt{4s^2+5}}{-2}$$

olarak elde edilir. Böylece homojen kısmın çözümü

$$u^c(s,x) = e^{\frac{-1}{2}x}\left[c_1 e^{\left(\frac{\sqrt{4s^2+5}}{2}\right)x} + c_2 e^{-\left(\frac{\sqrt{4s^2+5}}{2}\right)x}\right] \tag{1.10}$$

bulunur. Şimdi, homojen olmayan kısmın çözümü için $u^p = A(s)\sin x + B(s)\cos x$ alınsın. Eğer bu değerler ve türevleri (1.9) denkleminde yazılırsa,

$$-u_{xx}(s,x) - u_x(s,x) + (s^2+1)u(s,x) = \frac{s^2+2}{s+1}\sin x - \frac{1}{s+1}\cos x$$

denklemi bulunur. Ardından,

$$A(s)\, sin\, x + B(s)\, cos\, x - A(s)\, cos\, x + B(s)\, sin\, x$$

$$+(s^2+1)A(s)\sin x + (s^2+1)B(s)\cos x = \frac{s^2+2}{s+1}\sin x - \frac{1}{s+1}\cos x$$

olur. Buradan,

$$[(s^2+1)A(s) + A(s) + B(s)]\sin x$$

$$[(s^2+1)B(s) + B(s) - A(s)]\cos x = \frac{s^2+2}{s+1}\sin x - \frac{1}{s+1}\cos x$$

olur. Buradan,

$$\begin{cases} (s^2+2)A + B = \dfrac{s^2+2}{s+1}, \\[2ex] (s^2+2)B - A = \dfrac{-1}{s+1} \end{cases} \tag{1.11}$$

yazılabilir. Yukarıdaki sistemden, $A(s)=\frac{1}{s+1}$, $B(s)=0$ bulunur. Yani,

$$u^p=\frac{1}{s+1}\sin x$$

homojen olmayan çözümü elde edilir. Homojen ve homojen olmayan denklemlerden

$$u(s,x)=e^{\frac{-1}{2}}\left[c_1e^{\left(\frac{\sqrt{4s^2+5}}{2}\right)x}+c_2e^{\left(\frac{\sqrt{4s^2+5}}{2}\right)x}\right]+\frac{\sin x}{s+1}$$

denklemi bulunur. Başlangıç değer koşulları kullanılırsa,

$$u(s,0)=e^{\frac{-1}{2}}[c_1+c_2]+\frac{0}{s+1}=0$$

$$c_1=-c_2$$

ve

$$u(s,\pi)=e^{\frac{-1}{2}}\left[\frac{\sqrt{4s^2}}{2}c_1e^{\left(\frac{\sqrt{4s^2-3}}{2}\right)\pi}+\frac{\sqrt{4s^2}}{2}c_2e^{\left(\frac{\sqrt{4s^2-3}}{2}\right)\pi}\right]+\frac{0}{s+1}=0$$

denklemlerinden, $c_1=c_2=0$ bulunur. Böylece,

$$u(s,x)=\frac{\sin x}{s+1}$$

çözümü elde edilir. Ters Laplace dönüşümü uygulanırsa,

$$\mathcal{L}^{-1}\{u(s,x)\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\sin x}{s+1}\right\},$$

$$\sin x\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}=e^{-t}\sin x$$

bulunup

$$u(t,x)=e^{-t}\sin x$$

tam çözümü bulunur.

Yeni bir bölüme geçmeden önce, metin boyunca tekrar tekrar burada kullanılan bazı temel tekniklerin kısa bir incelemesine yer verilecektir. Her bölümün, o alandaki bilim dalının mevcut durumu hakkında tanıtımı ve tartışması olacağından, giriş kısmı, ele alınacak konuları basit bir şekilde listeleyerek bitirilecektir. Çeşitli bölümlerin içeriği kısaca tanımlanacaktır.

Birinci bölüm, tezin giriş kısmıdır.

İkinci bölümde, KDD'ler için tam ve yaklaşık çözüm tartışılmakta ve diferansiyel denklemlerin kararlılığı belirlenmektedir.

Üçüncü bölümde Cauchy problemi için fark şeması yöntemi ve ve bu fark şeması yönteminin kararlılığı incelenmektedir. Dört bölümden oluşan bu bölüm, kısaca Cauchy problem için birinci ve ikinci mertebeden fark şemaları gösterilir. Bu fark şemalarında kararlılık kestirimini veren teorem ve lemmalar ispanlanmıştır.

Dördüncü bölümde uygulamalara yer verilmiştir. KDD'ler için birinci ve ikinci mertebeden doğruluk fark şemaları incelenmiştir. Matlab programı yardımıyla bulunan yaklaşık çözümler, ikinci mertebeden doğruluk fark şemasının birinci mertebeden fark şemasından daha doğru olduğu görülmüştür. Tam ve yaklaşık çözümler karşılaştırılarak elde edilen hata analiz tabloları elde edilmiştir.

Beşinci bölümde tezin sonuçlar kısmı verilmiştir.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

2.1. Diferansiyel denklemler için kararlılık

Bu kısımda,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} + Mu(t,x) = \dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + \dfrac{\partial u(t,x)}{\partial x} + f(t,x), \\ 0 < t < 1, 0 < x < L, \\ u(0,x) = \varphi(x), u_t(0,x) = \psi(x), 0 \le x \le L, \\ u(t,0) = u(t,L) = 0, 0 \le t \le 1 \end{cases} \quad (2.1)$$

başlangıç sınır değer problemi incelendi. (Ashyralev ve Modanli, 2015) çalışmasındaki yöntem kullanılarak, (2.1) problemi bir $H = L_2[0,L]$ Hilbert uzayında

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 u(t)}{\partial t^2} + Ru(t) + Mu(t) = f(t), 0 < t < 1, \\ u(0) = \varphi, u'(0) = \psi \end{cases}$$

olarak Cauchy problemi formatında yeniden yazılabilir.

Burada $f(t) = f(t,x)$, [0,1] aralığında $H = L_2[0,L]$ Hilbert uzayındaki değerlerle verilen abstract fonksiyondur. $\varphi = \varphi(x)$ ile $\psi = \psi(x)$ $H = L_2[0,L]$ Hilbert uzayının elemanlarıdır (Bu fonksiyonlar [0,1] aralığındaki x in fonksiyonlarıdır). $u(t) = u(t,x)$, $H = L_2[0,L]$'deki değerlerle [0,1] de tanımlanmış bilinmeyen bir abstract fonksiyondur.

$$R: D(R) \to H$$

diferansiyel operatörü

$$Ru(x) = -u''(x) - u'(x)$$

ile

$$D(R) = \{u: u, u', u'' \in L_2[0,L];\ u(0) = u(L) = 0\}$$

kümesinde tanımlanan operatördür.

$A = R + M$ olarak alınsın. Burada, $\langle Au, v\rangle = \langle u, Av\rangle$ ve $\langle Au, u\rangle \geq \delta\langle u, u\rangle$ olduğundan A operatörü pozitif operatördür ve dolayısıyla $R \geq \delta$ ve $M \geq \delta$ dır.

Teorem 2.1.1. $\varphi'(x)$, $\varphi''(x), f(t,x), f_t(t,x) \in L_2[0,L]$, $[0,L]$ aralığında sürekli olsun. Sonra, (2.1) denkleminin çözümü için aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır:

$$\max_{0<t<1}\left(\int_0^L u^2(t,x)dx\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.2}$$

$$\leq M(\delta)\left[\left(\int_0^L \varphi^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_0^L \psi^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}} + \max_{0<t<1}\left(\int_0^L f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}\right],$$

$$\max_{0<t<1}\left(\int_0^L u_t^2(t,x)dx\right)^{\frac{1}{2}} + \max_{0<t<1}\left(\int_0^L [u^2(t,x)dx + u_x^2(t,x)]dx\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.3}$$

$$\leq M(\delta)\left[\left(\int_0^L \varphi_x^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}} + \max_{0<t<1}\left(\int_0^L \psi^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}} + \max_{0<t<1}\left(\int_0^L f^2(t,x)dx\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$+\max_{0<t<1}\left(\int_0^L [u^2(t,x)dx + u_x^2(t,x)]dx + u_{xx}^2(t,x)dx\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.4}$$

$$\leq M(\delta)\left[\left(\int_0^L \varphi_{xx}^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}} + \max_{0<t<1}\left(\int_0^L \psi_x^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}\right.$$

$$\left.+\max_{0<t<1}\left(\int_0^L f_t^2(t,x)dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_0^L f_t^2(0,x)dx\right)^{\frac{1}{2}}\right].$$

İspat: Bu teoremin ispatı (2.4)'ün simetri özelliklerine ve (2.1) probleminin çözümü için aşağıdaki kestirimlere dayanmaktadır:

$$\max_{0<t<1}\|u(t)\|_H \le M(\delta)\left[\|\varphi\|_H + \|\psi\|_H + \max_{0<t<1}\|f(t)\|_H\right], \tag{2.5}$$

$$\max_{0<t<1}\|u'(t)\|_H \le M(\delta)\left[\left\|A^{\frac{1}{2}}\varphi\right\|_H + \|\psi\|_H + \max_{0<t<1}\|f(t)\|_H\right], \tag{2.6}$$

$$\max_{0<t<1}\|u''(t)\|_H + \max_{0<t<1}\|Au(t)\|_H \tag{2.7}$$

$$\le M(\delta)\left[\|A\varphi\|_H + \left\|A^{\frac{1}{2}}\psi\right\|_H + \|f(0)\|_H + \max_{0<t<1}\|f_t(t)\|_H\right]$$

ve aşağıdaki kestirimler

$$\left(\int_0^L A^{\frac{1}{2}}\varphi_x^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}} \le M\left(\int_0^L (\varphi^2(x) + \psi_x^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{2.8}$$

$$\left(\int_0^L \left(A^{\frac{1}{2}}\psi(x)\right)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \le \left(\int_0^L \left(\psi^2(x) + \psi_x^2(x) + \psi_{xx}^2(x)\right)dx\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{2.9}$$

$$\left(\int_0^L \psi_{xx}^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}} \le \|A\psi\|_H = \left(\int_0^L \psi_{xx}^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Burada

$$[A\psi = -\psi''(x) - \psi'(x) + M\psi(x)] \tag{2.10}$$

dır. (2.5) formülünün ispatı için (2.1) denklemi kullanılırsa,

$$S(t-s)[u''(s) + Au(s)] = S(t-s)f(s) \tag{2.11}$$

formülü elde edilir. Burada,

$$S(t) = \left(2iA^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}\left(e^{itA^{\frac{1}{2}}} - e^{-itA^{\frac{1}{2}}}\right)$$

ve buradan da

$$S'(t) = \frac{e^{itA^{\frac{1}{2}}} - e^{-itA^{\frac{1}{2}}}}{2} = C(t),$$

$$C'(t) = -A.S(t)$$

elde edilebilir. (2.11) denklemi 0 dan *t* ye integre edilirse,

$$\int_0^t S(t-s)u''(s)ds + \int_0^t S(t-s)Au(s)ds$$

$$\int_0^t S(t-s)u''(s)ds = S(t-s)u'(s)\Big|_0^t - \int_0^t \frac{dS(t-s)}{ds}u'(s)ds$$

$$= S(0)u'(t) - S(t)u'(0) + C(t-s)u(s)\Big|_0^t - \int_0^t \frac{dC(t-s)}{ds}u(s)ds$$

$$= -S(t)u'(0) + u(t) - C(t)u(0) - \int_0^t (-A)S(t-s)u(s)ds$$

bulunur. Bu önceki eşitlikte yazılırsa,

$$-S(t)u'(0) + u(t) - C(t)u(0) - \int_0^t (-A)S(t-s)u(s)ds$$

$$+\int_0^t S(t-s)Au(s)ds = \int_0^t S(t-s)f(s)ds$$

$$u(t) = C(t)u(0) + S(t)u'(0) + \int_0^t S(t-s)f(s)ds \tag{2.12}$$

elde edilir.

$$C(t) = \frac{e^{itA^{\frac{1}{2}}} + e^{-itA^{\frac{1}{2}}}}{2} \Longrightarrow \|C(t)u\|_H = \frac{1}{2}\left\|\left(e^{itA^{\frac{1}{2}}} + e^{-itA^{\frac{1}{2}}}\right)u\right\|_H$$

$$\leq \sup_{\delta\leq\lambda<\infty}\left|\frac{e^{itA^{\frac{1}{2}}}+e^{-itA^{\frac{1}{2}}}}{2}\right|\|u\|_H \leq \sup_{\delta\leq\lambda<\infty}\left|\cos\lambda^{\frac{1}{2}}\right|\|u\|_H \leq \|u\|_H\,, \tag{2.13}$$

$$S(t)=A^{\frac{1}{2}}\frac{e^{itA^{\frac{1}{2}}}+e^{-itA^{\frac{1}{2}}}}{2i} \Longrightarrow \left\|A^{\frac{1}{2}}S(t)u\right\|_H=\frac{1}{2}\left\|\left(e^{itA^{\frac{1}{2}}}+e^{-itA^{\frac{1}{2}}}\right)u\right\|_H$$

$$\leq \sup_{\delta\leq\lambda<\infty}\left|\frac{e^{it\lambda^{\frac{1}{2}}}+e^{-it\lambda^{\frac{1}{2}}}}{2}\right|\|u\|_H \leq \sup_{\delta\leq\lambda<\infty}\left|\sin\lambda^{\frac{1}{2}}\right|\|u\|_H \leq \|u\|_H \tag{2.14}$$

olduğu görülür. (2.11), (2.13), (2.14) ve üçgen eşitsizliği uygulanarak,

$$\|u(t)\|_H \leq \|C(t)\varphi\|_H + \left\|A^{\frac{1}{2}}\right\|_{H\to H}\left\|A^{\frac{1}{2}}S(t-s)\psi\right\|_H$$

$$+\left\|A^{-\frac{1}{2}}\right\|_{H\to H}\int_0^t\left\|A^{\frac{1}{2}}S(t-s)f(s)\right\|_H ds$$

$$\left\|A^{-\frac{1}{2}}\right\|_{H\to H} \leq \sup_{\delta\leq\lambda<\infty}\left|\lambda^{-\frac{1}{2}}\right| \leq \frac{1}{\delta^{\frac{1}{2}}}\,,$$

$$\|u(t)\|_H \leq \|\varphi\|_H + \frac{1}{\delta^{\frac{1}{2}}}\|\psi\|_H + \frac{1}{\delta^{\frac{1}{2}}}\int_0^t\|f(s)\|_H ds$$

$$\leq \|\varphi\|_H + \frac{1}{\delta^{\frac{1}{2}}}\|\psi\|_H + \frac{1}{\delta^{\frac{1}{2}}}\max_{0\leq s\leq t}\|f(s)\|_H$$

$$\leq M(\delta)\left[\|\varphi\|_H + \|\psi\|_H \max_{0\leq s\leq 1}\|f(t)\|_H\right]$$

yazılır. Herhangi bir $t \in [0,1]$ için $M(\delta)=\max\left\{1,\frac{1}{\delta^{\frac{1}{2}}}\right\}$ olarak seçilirse, (2.5) formülünün ispatı elde edilir.

(2.6) eşitsizliğinin ispatı için: (2.11), (2.13), (2.14) ve üçgen eşitsizliği kullanılırsa

$$\left\|A^{\frac{1}{2}}u(t)\right\|_H \leq \left\|A^{\frac{1}{2}}C(t)\varphi\right\|_H + \left\|A^{\frac{1}{2}}S(t-s)\psi\right\|_H + \int_0^t\left\|A^{\frac{1}{2}}S(t-s)f(s)\right\|_H ds$$

$$\leq \left\|A^{\frac{1}{2}}\varphi\right\|_H + \|\psi\|_H + \int_0^t \|f(s)\|_H \, ds$$

$$\leq \left\|A^{\frac{1}{2}}\varphi\right\|_H + \|\psi\|_H + \max_{0\leq s\leq t}\|f(s)\|_H$$

$$\leq M(\delta)\left[\left\|A^{\frac{1}{2}}\varphi\right\|_H + \|\psi\|_H + \max_{0\leq s\leq 1}\|f(t)\|_H\right], M(\delta) = 1$$

bulunur. Herhangi bir $t \in [0,1]$ için,

$$\max_{0\leq s\leq 1}\left\|A^{\frac{1}{2}}u(t)\right\|_H \leq M(\delta)\left[\left\|A^{\frac{1}{2}}\varphi\right\|_H + \|\psi\|_H + \max_{0\leq s\leq 1}\|f(t)\|_H\right]$$

kestirimi elde edilir. (2.11) formülünün türevi alınırsa,

$$u'(t) = -AS(t)u(0) + C(t)u'(0) + \int_0^t C(t-s)\, f(s)ds \qquad (2.15)$$

yazılabilir. (2.11), (2.13), (2.14) formülleri ve üçgen eşitsizliğinden,

$$\|u'(t)\|_H \leq \left\|A^{\frac{1}{2}}S(t)A^{\frac{1}{2}}\varphi\right\|_H + \|C(t)\psi\|_H + \int_0^t \|C(t-s)f(s)\|_H \, ds$$

$$\leq \left\|A^{\frac{1}{2}}\varphi\right\|_H + \|\psi\|_H + \int_0^t \|f(s)\|_H \, ds$$

$$\leq \left\|A^{\frac{1}{2}}\varphi\right\|_H + \|\psi\|_H + \max_{0\leq s\leq t}\|f(s)\|_H$$

$$\leq M(\delta)\left[\left\|A^{\frac{1}{2}}\varphi\right\|_H + \|\psi\|_H + \max_{0\leq t\leq 1}\|f(t)\|_H\right], M(\delta) = 1$$

bulunur. Herhangi bir $t \in [0,1]$ için,

$$\max_{0\leq t\leq 1}\|u'(t)\|_H \leq M(\delta)\left[\left\|A^{\frac{1}{2}}\varphi\right\|_H + \|\psi\|_H + \max_{0\leq t\leq 1}\|f(t)\|_H\right]$$

sonucuna varılır.

Son iki kestirimden (2.6) formülü elde edilir.

(2.7) eşitsizliğinin ispatı için: (2.15) formülünün tekrar türevi alınırsa,

$$u''(t) = -AC(t)u(0) - AS(t)u'(0) + f(t) - \int_0^t \frac{d}{ds} C(t-s)\, f(s)ds$$

veya

$$u''(t) = -AC(t)\varphi - AS(t)\psi + f(t) - f(t) + \int_0^t C(t-s)\, f(s)ds \qquad (2.16)$$

bulunur. (2.16) formülü ve üçgen eşitsizliğinden,

$$\|u''(t)\|_H \leq \|A\varphi\|_H + \left\|A^{\frac{1}{2}}\psi\right\|_H + \int_0^t \|f(s)\|_H\, ds$$

$$\leq M(\delta)\left[\|A\varphi\|_H + \left\|A^{\frac{1}{2}}\psi\right\|_H + \max_{0\leq t\leq 1}\|f(t)\|_H\right]$$

elde edilir. Herhangi bir $t \in [0,1]$ için,

$$\max_{0\leq t\leq 1}\|u''(t)\|_H \leq M(\delta)\left[\|A\varphi\|_H + \left\|A^{\frac{1}{2}}\psi\right\|_H + \max_{0\leq t\leq 1}\|f(t)\|_H\right], M(\delta) = 1$$

dır. (2.1) formülü, son eşitsizlik ve üçgen eşitsizliği kullanılarak,

$$\max_{0\leq t\leq 1}\|Au(t)\|_H = \max_{0\leq t\leq 1}\|f(t) - u''(t)\|_H$$

$$= \max_{0\leq t\leq 1}\left\|f(0) - \int_0^t f'(s)\, ds - u''(t)\right\|_H$$

$$\leq \max_{0\leq t\leq 1}\|u'(t)\|_H + \|f(0)\|_H + \max_{0\leq t\leq 1}\int_0^t \|f'(s)\|_H\, ds$$

$$\leq M(\delta)\left[\|f(0)\|_H + \|A\varphi\|_H + \left\|A^{\frac{1}{2}}\psi\right\|_H + \max_{0\leq t\leq 1}\|f(t)\|_H\right]$$

sonucu elde edilir. Son iki kestirimden, (2.7) formülünün ispatı çıkarılabilir.

(2.10) formülünü ispatlamak için: $[A\psi = -\psi''(x) - \psi'(x) + M\psi(x)]$ formülünden $\|A\psi\|_H = \|\psi''(x) + \psi'(x) + M\psi(x)\|_H$ yazılabilir. Bu da,

$$\left(\int_0^L (\psi_{xx}(x) + \psi_x(x) + M\psi(x))^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} = \|A\psi\|_H$$

ile aynı anlama gelmektedir. Böylece, (2.9) formülünün ispatı tamamlanır.

Son olarak (2.8) formülünün ispatını verelim. (2.8) formülünü ispatlamak için,

$$\langle A^{\frac{1}{2}}\varphi(x), A^{\frac{1}{2}}\varphi(x)\rangle = \langle A\varphi(x), \varphi(x)\rangle = \int_0^L \varphi'(x)\varphi'(x)dx = \int_0^L \left(\varphi'(x)\right)^2 dx,$$

$$\int_0^L \left(A^{\frac{1}{2}}\varphi(x)\right)^2 dx = \int_0^L \varphi_x^2(x)dx$$

formülleri kullanılırsa,

$$\left(\int_0^L \left(A^{\frac{1}{2}}\varphi(x)\right)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^L \varphi_x^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}} \le \left(\int_0^L \left(\varphi^2(x) + \psi_x^2(x)\right)dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

ispatı elde edilir. Bu da, (2.8) formülünün ispatı anlamına gelir. Dolayısıyla, teoremin ispatı tamamlanış olur.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu bölümde, Cauchy problemi için fark şemaları ve bu fark şemalarının kararlılığı gösterilecektir. Birinci mertebeden ve ikinci mertebeden tipindeki doğruluk fark şeması için, kararlılık kestirimi gösterilmektedir.

3.1. Birinci mertebe fark şeması

$$\begin{cases} u_{tt}(t) + Ru(t) + Mu(t) = f(t), \\ u(0) = \varphi, u' = \psi \end{cases} \tag{3.1}$$

Cauchy problemi için fark şemalarını bulalım. Bunun için, Taylor açılımı kullanılırsa,

$$u(t_{k+1}) = u(t_k) + \tau u_t(t_k) + \frac{\tau^2}{2} u_{tt}(t_k) + O(\tau^2),$$

$$u(t_{k-1}) = u(t_k) - \tau u_t(t_k) + \frac{\tau^2}{2} u_{tt}(t_k) + O(\tau^2)$$

yazılır. Son formüldeki küçük terimler ihmal edilirse,

$$u_{tt}(t_k) = \frac{u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}}{\tau^2}$$

elde edilir. Bu değerler (3.1) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\begin{cases} \dfrac{u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}}{\tau^2} + (R + M)u_{k+1} = f_{k+1}, \\ u_0 = \varphi, \dfrac{u_1 - u_0}{\tau} + (R + MI)\tau u_1 = \psi \end{cases} \tag{3.2}$$

(3.1) problemine karşılık gelen birinci mertebeden fark şeması elde edilir.

3.2. İkinci derece fark şeması

(3.1) problemi için, yine benzer şekilde Taylor açılımı kullanılırsa,

$$u(t_{k+1}) = u(t_k) + \tau u_t(t_k) + \frac{\tau^2}{2} u_{tt}(t_k) + O(\tau^2),$$

$$u(t_{k-1}) = u(t_k) - \tau u_t(t_k) + \frac{\tau^2}{2} u_{tt}(t_k) + O(\tau^2)$$

formülleri bulunur. Küçük terimler ihmal edilirse,

$$u_{tt}(t_k) = \frac{u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}}{\tau^2}$$

$$u(t_k) = \frac{u_{k+1} + u_{k-1}}{2}$$

olarak yazılır. Bu son formüller (3.3) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\begin{cases} \dfrac{u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}}{\tau^2} + R\dfrac{u_{k+1} + u_{k-1}}{2} + M\dfrac{u_{k+1} + u_{k-1}}{2} = f_k, \\ u_0 = \varphi, u' = \dfrac{u_\tau - u_0}{\tau} + \dfrac{1}{4}(\tau + I)Au_1 + \tau u_1 = \left(\psi + \dfrac{\tau}{2} f_0\right) \end{cases} \quad (3.4)$$

(3.1) Cauchy problemi için ikinci mertebeden fark şeması elde edilir.

3.3. Birinci mertebe fark şeması için matris kararlılığı

(3.2) formülü

$$\left(\frac{1}{\tau^2} + R + M\right) u_{k+1} - \left(\frac{2}{\tau^2}\right) u_k + \left(\frac{1}{\tau^2}\right) u_{k-1} = f_{k+1}, \quad (3.5)$$

$$Eu_{k+1} - Fu_k - Gu_{k-1} = f_{k+1},$$

$$Eu_{k+1} = Fu_k + Gu_{k-1} + f_{k+1}$$

olarak yazılabilir. $a = \frac{1}{\tau^2} + R + M,$ $b = \frac{2}{\tau^2}$ ve $c = -\frac{1}{\tau^2}$ olmak üzere; E, F ve G matrisleri

$$E = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a \end{bmatrix},$$

$$F = \begin{bmatrix} b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b \end{bmatrix},$$

$$G = \begin{bmatrix} c & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

olarak yazılabilir.

$E = \left|a_{jm}\right|_{(M-1)(M-1)}$ olduğu durumda;

$$\|E\| = \|E\|_\infty = \max_{1\le j\le M-1}\left\{\sum_{m=1}^{M-1}|a_{jm}|\right\}$$

olarak tanımlansın.

Lemma 3.3.1. Eğer $\frac{2}{\tau^2} > 0$ ise, o zaman $\|E^{-1}F\| \le M(\delta)$ dır.

İspat: Elimizde $\frac{2}{\tau^2} > 0$ var olduğundan,

$$\|E^{-1}F\| \le \|E^{-1}\|\|F\| \le \frac{1}{\max\limits_{1\le j\le M-1}\left\{|a_{jj}| - \sum_{m\ne j,m=1}^{M-1}|a_{jm}|\right\}}\|F\|,$$

$$\frac{\left|\frac{2}{\tau^2}\right|}{\left|\frac{1}{\tau^2}+R+M\right|} \le M(\delta) = 1$$

bulunabilir.

Lemma 3.3.2. Eğer $\frac{2}{\tau^2} > 0$ ise, o zaman $\|E^{-1}F\| + \|E^{-1}G\| \le M(\delta)$ dır.

İspat: $\frac{2}{\tau^2} > 0$ olduğu bilindiğinden,

$$\|E^{-1}F\| + \|E^{-1}G\| \le \frac{\left|\frac{2}{\tau^2}\right|}{\left|\frac{1}{\tau^2}+R+M\right|} + \frac{\left|\frac{-1}{\tau^2}\right|}{\left|\frac{1}{\tau^2}+R+M\right|}$$

$$\frac{\left|\frac{3}{\tau^2}\right|}{\left|\frac{1}{\tau^2}+R+M\right|} \le \left|\frac{3}{1+R\tau^2+M\tau^2}\right| \le M(\delta) = 1$$

bulunur.

Teorem 3.3.1. (3.5) fark şeması kararlıdır.

İspat: (3.5) fark şemasının koşullu kararlılığını ispat etmek için, U_j^k ve V_j^k sırasıyla U_j^0 ve V_j^0 başlangıç değerleriyle beraber (3.5) denkleminin tam ve yaklaşık çözümleri olsun. $0 \le j \le M, 0 \le k \le N$ olduğu durumda, ilgili hatayı $\varepsilon_j^k = U_j^k - V_j^k$ ve $\varepsilon_j^k = \left[\varepsilon_j^k, \varepsilon_j^k, \dots, \varepsilon_{M-1}^k\right]^t$ ile gösterilsin. Daha sonra, eğer $k = 0$ ise ε_j^k

$$E\varepsilon^1 = F\varepsilon^0$$

sağlanır. Eğer $k > 0$ ise,

$$E\varepsilon^{k+1} = F\varepsilon^k + F\varepsilon^{k-1},$$

$$E\varepsilon^1 = F\varepsilon^0 \Rightarrow \varepsilon^{-1} = E^{-1}F\varepsilon^0$$

dır. Şimdi $\|\varepsilon^1\| \leq \|\varepsilon^0\|$, $k = 1,2,3,$ ...için tümevarım ile ispat edelim. Aslında, $k = 0$,

$$\varepsilon^1 = E^{-1}\varepsilon^0$$

olup buradan da

$$\|\varepsilon^1\| = \|E^{-1}F\varepsilon^0\| \leq \|E^{-1}F\|\|\varepsilon^0\|$$

elde edilir. Lemma 3.3.1'den $\|E^{-1}F\| \leq 1$ olduğu için, $\|\varepsilon^1\| \leq \|\varepsilon^0\|$ olup $k = 1$ olur. Daha sonra,

$$\varepsilon^2 = E^{-1}F\varepsilon^1 + E^{-1}G\varepsilon^0$$

olup bu son denklemden

$$\begin{aligned}
\varepsilon^2 &= \|E^{-1}F\varepsilon^1 + E^{-1}G\varepsilon^0\| \\
&\leq \|E^{-1}F\varepsilon^1\| + \|E^{-1}G\varepsilon^0\| \\
&= \|E^{-1}F\|\|\varepsilon^1\| + \|E^{-1}G\|\|\varepsilon^0\| \\
&\leq \|E^{-1}F\|\|\varepsilon^0\| + \|E^{-1}G\|\|\varepsilon^0\| \\
&\leq \{\|E^{-1}F\| + \|E^{-1}G\|\}\|\varepsilon^0\|
\end{aligned}$$

sonucuna varılr. Yukarıdaki denklemden, $\|\varepsilon^2\| \leq \|\varepsilon^0\|$ olduğu görülür. Şimdi, tüm $s < k$ için $\|\varepsilon^2\| \leq \|\varepsilon^0\|$ olduğunu varsayalım. Bunun $s = k + 1$ için de geçerli olduğunu ispatlayacağız:

$$\|\varepsilon^{k+1}\| = \|E^{-1}(F\varepsilon^k + G\varepsilon^{k-1})\|$$

$$\begin{aligned}
\|\varepsilon^{k+1}\| &\leq \|E^{-1}F\varepsilon^k\| + \|E^{-1}G\varepsilon^{k-1}\| \\
&\leq \|E^{-1}F\|\|\varepsilon^k\| + \|E^{-1}G\|\|\varepsilon^{k-1}\| \\
&\leq \|E^{-1}F\|\|\varepsilon^0\| + \|E^{-1}G\|\|\varepsilon^0\|
\end{aligned}$$

$$\leq \{\|E^{-1}F\| + \|E^{-1}G\|\}\|\varepsilon^0\|$$

$$\leq \varepsilon^0$$

olduğundan, $\frac{2}{\tau^2} > 0$ olmak koşuluyla, (3.5) denkleminin kararlılık kestirimi elde edilir.

3.4. İkinci mertebe fark şeması için kararlılık

(3.4) formülü

$$\left(\frac{1}{\tau^2} + \frac{R+M}{2}\right)u_{k+1} + \left(\frac{-2}{\tau^2}\right)u_k + \left(\frac{R+M}{2} + \frac{1}{\tau^2}\right)u_{k-1} = f_k$$

olarak yeniden yazılabilir. Bu da

$$au_{k+1} + bu_k + cu_{k-1} = f_{k+1}$$

dır. $a = \frac{1}{\tau^2} + \frac{R+M}{2}$, $b = \frac{-2}{\tau^2}$ ve $c = \frac{R+M}{2} + \frac{1}{\tau^2}$ olmak üzere;

$$E = \begin{bmatrix} b & a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c & b & a & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & b & a & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & b & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & c & b & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & c & b & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & c & b \end{bmatrix}_{(N-1)\times(N-1)}$$

$$\times \begin{pmatrix} u_1 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ f_{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ d \end{pmatrix}$$

yazılabilir. Bu da

$$L_h U^h = f^h$$

formundan gelir.

Tanım 3.4.1. h sıfıra yaklaştıkça kesme hatası sıfıra yaklaşırsa, başka bir deyişle, aynı normda $L_h u - f \to 0$ olursa, fark şemasının tutarlı olduğu söylenebilir.

Tanım 3.4.2. Eğer bütün $h > 0$ için,

$$\|U_h\| \le C\|L_h U^h\| \le C\|F^h\|$$

L_h'nin kararlı olduğu söylenebilir. Burada U^h, $L_h U^h = F^h$ fark şeması denkleminin çözümüdür. Ayrıca, L_h sadece L_h^{-1} sınırlı olduğunda kararlıdır.

Tanım 3.4.3. Eğer $h \to 0$ iken

$$\|U^h - u\| \to 0$$

oluyorsa, sonlu bir fark şemasının yakınsadığı söylenir. $\|U^h - u\|$ ifadesi ayrıştırma hatası olarak adlandırılır.

Teorem 3.4.1. Tutarlı bir şema göz önüne alındığında**,** kararlılık yakınsamaya eşdeğerdir.

İspat: $L_h u - f = \tau^h, L_h U^h - F^h = 0$ terimlerinin kararlı olduğu varsayılsın. O zaman
$L_h(u - U^h) = \tau^h$ elde edilir. Bu nedenle,

$$\|U^h - u\| \le C\|L_h(u - U^h)\| = C\|\tau^h\| \to 0$$

dolayısıyla aynen yakınsar. Açıkçası, bir yakınsama şeması kararlı olmalıdır.

Şimdi (2.1) Teorem'in uygulamalarını verelim. İlk olarak, (3.1) sınır değer problemini göz önüne alalım.
(3.1) probleminin ayrıştırılması iki aşamada yapılır. Birinci adımda,

$$[0,l]_h = \{x = x_n : x_n = nh, 0 \le n \le M, Mh = l\}$$

grid (ızgara) uzayını inceleyelim.

$$\|\varphi^h\|_{L_{2h}} = \left(\sum_{x \in [0,l]_h} |\varphi(x)|^2 h \right)^{\frac{1}{2}}$$

norm ile verilen $L_{2h} = L_2[0,l]_h$ Hilbert uzayında $[0,l]_h$ $üzerinde$ tanımlanan $\varphi^h(x) = \{\varphi_n\}_0^M$ grid (ızgara) fonksiyonları tanımlansın.

(3.5) formulü tarafından tanımlanan A^x diferansiyel operatörü,

$$A_h^x \varphi^h(x) = \left\{-(a(x)\varphi_{\bar{x}})_{x,n} + \delta\varphi_n\right\}_1^{M-1} \tag{3.6}$$

olarak atansın.

$\varphi_0 = \varphi_M$, $\varphi_1 - \varphi_0 = \varphi_M - \varphi_{M-1}$ koşulunu sağlayan $\varphi^h(x) = \{\varphi_n\}_0^M$ grid fonksiyonlarının uzayında hareket etsin. A_h^x, L_{2h} Hilbert uzayında özeşlenik pozitif bir operatör olduğu bilinmektedir. A_h^x diferansiyel operatörüyle,

$$\begin{cases} u_{tt}^h(t,x) + A_h^x u^h(t,x) + \delta u(t,x) = f(t,x), \\ 0 < t < T, x \in [0,l]_h, \\ u^h(0,x) = \varphi^h(x),\ u_t^h(0,x) = \psi^h(x), x \in [0,l] \end{cases} \tag{3.7}$$

başlangıç-sınır değer problemini tanımlayalım.
İkinci adımda, (3.7) formülünü, (3.2) fark şemasıyla

$$\begin{cases} \dfrac{u_{k+1}^h(x) - 2u_k^h(x) + u_{k-1}^h(x)}{\tau^2} + A_h^x u_{k+1}^h(x) + \delta u_{k+1}^h(x) = f_k^h(x), \\ f_k^h(x) = f^h(t_{k+1}, x), t_k = k\tau, 1 \leq k \leq N-1, x \in [0, l]_h, N\tau = T \\ u_0^h(x) = \varphi^h(x), \\ 1 + (A_h^x + \delta)\tau u_1^h(x) = \psi^h(x), x \in [0, l]_h \end{cases} \tag{3.8}$$

olarak değiştirebiliriz.

Teorem 3.4.2. (3.8) probleminin $\left\{u_k^h(x)\right\}_0^N$ çözümü için,

$$\max_{1\leq k\leq N} \left\|u_k^h\right\|_{L_{2h}} \leq M_1(\delta)\left\{\max_{1\leq k\leq N} \left\|f_k^h\right\|_{L_{2h}} + \|\psi^h\|_{L_{2h}} + \|\varphi^h\|_{L_{2h}}\right\}$$

$$\max_{1\leq k\leq N} \left\|u_k^h\right\|_{W_{2h}^1} \leq M_1(\delta)\left\{\max_{1\leq k\leq N-1} \left\|f_k^h\right\|_{L_{2h}} + \|\psi^h\|_{L_{2h}} + \|\varphi^h\|_{W_{2h}^1}\right\},$$

$$\max_{1\leq k\leq N} \left\|u_k^h\right\|_{W_{2h}^2} \leq M_2(\delta)\left\{\max_{2\leq k\leq N} \left\|\frac{1}{\tau} f_k^h - f_{k-1}^h\right\|_{L_{2h}}\right.$$

$$\left. + \left\|f_1^h\right\|_{L_{2h}} + \|\psi^h\|_{W_{2h}^1} + \|\varphi^h\|_{W_{2h}^2}\right\}$$

kararlılık kestirimleri sağlanır. Burada, $1 \leq k \leq N-1$ için $M_1(\delta)$ ve $M_2(\delta)$, $\varphi^h(x)$, $\psi^h(x)$ ve $f_k^h(x)$'e bağlı değildir.

İspat: $A_h = A_h^x$ bilinen özeşlenik operatörüyle L_{2h} Hilbert uzayında tanımlana (3.5) fark şeması abstract formda

$$\begin{cases} \dfrac{u_{k+1}^h - 2u_k^h + u_{k-1}^h}{\tau^2} + A_h u_{k+1}^h + \delta u_{k+1}^h = f_k^h, \\ 1 < k < N-1, N\tau = T, \\ u_0^h = \varphi^h, 1 + (A_h^x + \delta)\tau u_1^h(x) = \psi^h \end{cases} \tag{3.9}$$

olarak yazılabilir.

Burada, bilinen ve bilinmeyen abstract aralık fonksiyonları, $H = L_{2h}$ değerleriyle $[0, l]_h$ üzerinde tanımlanmış $f_k^h = f_k^h(x)$ and $u_k^h = u_k^h(x)$'tir. Böylece, teorem 3.4.2 kanıtlanmıştır.

İkinci olarak, (3.1) başlangıç-sınır değer problemini ele alınsın. (3.1) probleminin ayrıştırılması iki aşamada gerçekleştirilir. Birinci adımda,

$$\overline{\Omega}_h = \{x = x_r = (h_1 j_1, \dots, h_n j_n), j = (j_1, \dots, j_n), 0 \leq j_r \leq N_r,$$

$$\mathrm{N_r} h_r = 1, r = 1, \dots, n\}, \Omega_h = \overline{\Omega}_h \cap \Omega, S_h = \overline{\Omega}_h \cap \mathrm{S}$$

grid (ızgara) uzayı tanımlanır.

$$\|\varphi^h\|_{L_{2h}} = \left(\sum_{x \in \Omega_h} |\varphi^h(x)|^2 \, h_1 \dots h_n \right)^{\frac{1}{2}}$$

norm ile donatılan, $\overline{\Omega}_h$ üzerinde tanımlanan, $\varphi^h(x) = \{\varphi(h_1 j_1, \cdots, h_n j_n)\}$ grid fonksiyonlarının $L_{2h} = L_2(\Omega h)$ Hilbert uzayı tanımlanır.

(3.7) formülü tarafından tanımlanan A^xdiferansiyel operatörü,

$$A_h^x u^h = -\sum_{r=1}^{n} \left(\alpha_r(x) u_{x_r}^h\right)_{x_r, j_r} \tag{3.10}$$

olarak tanımlansın. Burada, A_h^x bir bilinmiyen özeşlenik pozitif operatörü, L_{2h} Hilbert uzayında $u^h(x)$ grid fonksiyonunun uzayında hareket eden bütün $x \in S_h$ için $u^h(x) = 0$ şartını sağlayan bir operatördür.

A_h^x fark operatörünün yardımıyla,

$$\begin{cases} u_{tt}^h(t, x) + A_h^x u^h(t, x) = f^h(t, x), \\ 0 < t < T, x \in \Omega_h, \\ u^h(0, x) = \varphi^h(x), u_t^h(0, x) = \psi^h(x), x \in \Omega_h \end{cases} \tag{3.11}$$

başlangıç-sınır değer problemi ele alınsın.

İkinci adımda, (3.11) denklemi (3.5) fark şeması ile değiştirlirse, sonsuz diferansiyel denklem sistemleri için

$$\begin{cases} \dfrac{u_{k+1}^h(x) - 2u_k^h(x) + u_{k-1}^h(x)}{\tau^2} + A_h^x u_{k+1}^h(x) = f_k^h(x), \\ f_k^h(x) = f^h(t_{k+1}, x), t_k = k\tau, 1 \leq k \leq N-1, x \in \Omega_h, N\tau = T, \\ u_0^h(x) = \varphi^h(x), 1 + (A_h^x)\tau u_1^h(x) \\ = \psi^h(x), x \in \Omega_h \end{cases} \tag{3.12}$$

denklemi elde edilir.

Teorem 3.4.3. (Hale ve Lvnel, 1993) (3.7) probleminin $\{u_k^h(x)\}_0^N$ çözümü için

$$\max_{1\leq k\leq N} \|u_k^h\|_{L_{2h}} \leq M_1(\beta,\delta)\left\{\max_{1\leq k\leq N-1} \|f_k^h\|_{L_{2h}} + \|\psi^h\|_{L_{2h}} + \|\varphi^h\|_{L_{2h}}\right\},$$

$$\max_{1\leq k\leq N} \|u_k^h\|_{W_{2h}^1} \leq M_1(\beta,\delta)\left\{\max_{1\leq k\leq N-1} \|f_k^h\|_{L_{2h}} + \|\psi^h\|_{L_{2h}} + \|\varphi^h\|_{W_{2h}^1}\right\},$$

$$\max_{1\leq k\leq N} \|u_k^h\|_{W_{2h}^2} \leq M_2(\beta,\delta)\left\{\max_{2\leq k\leq N-1} \left\|\frac{1}{\tau}\left(f_k^h - f_{k-1}^h\right)\right\|_{L_{2h}}\right.$$

kararlılık kestirimleri sağlanır. $1 \leq k \leq N-1$ için, $M_1(\delta)$ ve $M_2(\delta)$, $\varphi^h(x)$, $\psi^h(x)$ ve $f_k^h(x)'$e bağlı değildir.

Bu teoremin ispatı (3.4.3) teoreminin ispatına benzer olarak yapılabilir.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

4.1. Nümerik sonuçlar

Bu bölümde hiperbolik tipte kısmi diferansiyel denklemler için fark şeması metodu uygulanmaktadır. Bu tipteki denklemlerin genel formu

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} + u(t,x) = \dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + \dfrac{\partial u(t,x)}{\partial x} + f(t,x), 0 < t < 1, 0 < x < L, \\ u(0,x) = \varphi(x), u_t(0,x) = \psi(x), 0 \leq x \leq L, \\ u(t,0) = u(t,L) = 0, 0 \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (4.1)$$

şeklindedir. (4.1) hiperbolik kısmi diferansiyel denklemin başlangıç sınır değer probleminin yaklaşık çözümü için, h ve τ küçük parametrelerine bağlı olan bir grid noktalar kümesini $W_{\tau,h} = [0,T]_\tau \times [0,\ell]_h$ olarak alalım. (4.1) denkleminin fark şemasını bulmak için (x_{n-1}, x_n, x_{n+1}) ve (t_{k-1}, t_k, t_{k+1}) noktalarının Taylor açılımı yapmak yeterli olacaktır. Burada, nümerik çözüm için birinci mertebeden grid uzayı

$$[0,T]_\tau = \{t_k;\ t_k = k\tau, 0 \leq k \leq N, N = T\},$$

$$[0,\ell]_\tau = \{x_n;\ x_n = nh, 0 \leq n \leq m-1, mh = \ell\},$$

$$w_\tau, h = [0,T]_\tau \times [0,\ell]_h$$

olarak alınsın. $u(0,x) = 0$ başlangıç koşulunun yaklaşımı, $x = x_n$ve $u(t,0) = 0$, $u(t,L) = 0$ sınır değer koşulunun yaklaşımı, $t = t_k$ alarak elde edilir. Buradan,

$u_0^k = 0,\ u_M^k = 0$, ve $u_n^0 = \varphi_n, \frac{u_n^1 - u_n^0}{\tau} = \psi_n$

dır. Şimdi, (4.1) denklemin yaklaşım değerini elde edelim. $t = t_k,\ t_{k\mp1};\ x = x_n$, $x_{n\mp1}$ koyarak,

$$u_{tt}(t_{k+1}, x_n) + u(t_{k+1}, x_n) = u_{xx}(t_{k+1}, x_n) + u_x(t_{k+1}, x_n) + f(t_{k+1}, x_n) \quad (4.2)$$

denklemi elde edilir. Taylor açılımından,

$$u_{tt}(t_{k+1}\,, x_n) = \frac{u(t_{k+1}, x_n) - 2u(t_k, x_n) + u(t_{k-1}, x_n)}{\tau^2} + O(\tau^2),$$

$$u_x(t_k, x_n) = \frac{u(t_{k+1}, x_{n+1}) - u(t_{k+1}, x_n)}{h} + O(h),$$

$$u_{xx}(t_{k+1}, x_n) = \frac{u(t_{k+1}, x_{n+1}) - 2u(t_{k+1}, x_n) + u(t_{k+1}, x_{n-1})}{h^2} + O(h^2)$$

fark denklemleri yazılabilir. Küçük terimler ihmal edilip, bu son değerler (4.2) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\frac{u(t_{k+1}, x_n) - 2u(t_k, x_n) + u(t_{k-1}, x_n)}{\tau^2} + u(t_{k+1}, x_n)$$
$$- \frac{u(t_{k+1}, x_{n+1}) - 2u(t_{k+1}, x_n) + u(t_{k+1}, x_{n-1})}{h^2}$$
$$- \frac{u(t_{k+1}, x_{n+1}) - u(t_{k+1}, x_n)}{h} = f(t_{k+1}, x_n)$$

elde edilir. Buradan da,

$$\frac{u_n^{k+1} - 2u_n^k + u_n^{k-1}}{\tau^2} + u_n^{k+1} - \frac{u_{n+1}^{k+1} - 2u_n^{k+1} + u_{n-1}^{k+1}}{h^2}$$
$$- \frac{u_{n+1}^{k+1} - u_n^{k+1}}{h} = f_n^{k+1} \tag{4.3}$$

olur. (4.1) denklemi için birinci mertebeden fark şeması

$$\begin{cases} \dfrac{u_n^{k+1} - 2u_n^k + u_n^{k-1}}{\tau^2} + u_n^{k+1} - \dfrac{u_{n+1}^{k+1} - 2u_n^{k+1} + u_{n-1}^{k+1}}{h^2} \\ - \dfrac{u_{n+1}^{k+1} - u_n^{k+1}}{h} = f_n^{k+1}, 1 \le k \le N, 1 \le n \le M, \\ u_n^0 = \varphi_n, \dfrac{u_n^1 - u_n^0}{\tau} = \psi_n, \\ u_0^k = u_\pi^k = 0, 1 < k < N, 1 < n < M \end{cases} \tag{4.4}$$

olarak bulunur. Bu son fark şemasını

$$\left(\frac{-1}{h^2}-\frac{1}{h}\right)u_{n+1}^{k+1}+\left(\frac{1}{\tau^2}+1+\frac{2}{h^2}+\frac{1}{h}\right)u_n^{k+1}+\left(\frac{-2}{\tau^2}\right)u_n^k$$

$$+\left(\frac{1}{\tau^2}\right)u_n^{k-1}+\left(\frac{-1}{h^2}\right)u_{n-1}^{k+1}=f_n^{k+1}$$

olarak yeniden yazılabilir. Buradan

$$au_{n+1}^{k+1}+bu_n^{k-1}+cu_n^k+du_n^{k+1}+eu_{n-1}^{k+1}=f_n^{k+1}$$

olup, burada

$$a=\frac{-1}{h^2}-\frac{1}{h},b=\frac{1}{\tau^2},c=\frac{-2}{\tau^2},d=\frac{1}{\tau^2}+1+\frac{2}{h^2}+\frac{1}{h},e=\frac{-1}{h^2}$$

dır. Bu da

$$AU_{n+1}+BU_n+CU_{n-1}=f_n$$

matris formatında yazılır. Burada,

$$A=\begin{bmatrix}0&0&0&0&\dots&0&0&0&0\\0&0&a&0&\dots&0&0&0&0\\0&0&0&a&\dots&0&0&0&0\\0&0&0&0&\dots&0&0&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&0&\dots&0&a&0&0\\0&0&0&0&\dots&0&0&a&0\\0&0&0&0&\dots&0&0&0&a\\0&0&0&0&\dots&0&0&0&0\end{bmatrix}_{(N+1)\times(N+1)},$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & c & d & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & c & d & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & c & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b & c & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b & c & d \\ \frac{-1}{\tau} & \frac{1}{\tau} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(N+1)\times(N+1)},$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(N+1)\times(N+1)}$$

dır. Ve ikinci mertebeden fark şeması

$$u_{tt} = \frac{u_n^{k+1} - 2u_n^k + u_n^{k-1}}{\tau^2},$$

$$u_{xx} = \frac{u_{n+1}^k - 2u_n^k + u_{n-1}^k}{h^2} = \frac{1}{2}\frac{u_{n+1}^{k+1} - 2u_n^{k+1} + u_{n-1}^{k+1}}{h^2} + \frac{1}{2}\frac{u_{n+1}^{k-1} - 2u_n^{k-1} + u_{n-1}^{k-1}}{h^2},$$

$$u_x = \frac{u_{n+1}^k - u_{n-1}^k}{2h} = \frac{1}{4}\frac{u_{n+1}^{k+1} - u_{n-1}^{k+1}}{h} + \frac{1}{4}\frac{u_{n+1}^{k-1} - u_{n-1}^{k-1}}{h},$$

$$u_n^k = \frac{1}{2}u_n^{k+1} + \frac{1}{2}u_n^{k-1}$$

yazılıp, bu değerleri (4.1) denkleminde yazılırsa, ikinci mertebeden fark şeması denklemi

$$\begin{cases} \dfrac{u_n^{k+1} - 2u_n^k + u_n^{k-1}}{\tau^2} - \dfrac{1}{2}\dfrac{u_{n+1}^{k+1} - 2u_n^{k+1} + u_{n-1}^{k+1}}{h^2} - \dfrac{1}{2}\dfrac{u_{n+1}^{k-1} - 2u_n^{k-1} + u_{n-1}^{k-1}}{h^2} \\ -\dfrac{1}{4}\dfrac{u_{n+1}^{k+1} - u_{n-1}^{k+1}}{h} - \dfrac{1}{4}\dfrac{u_{n+1}^{k-1} - u_{n-1}^{k-1}}{h} + \dfrac{1}{2}u_n^{k+1} + \dfrac{1}{2}u_n^{k-1} = f_n^k \\ 1 \le \mathrm{k} \le \mathrm{N}, 1 \le \mathrm{n} \le \mathrm{M} \\ u_n^0 = \varphi_n, \dfrac{u_n^1 - u_n^0}{\tau} = \psi_n + \dfrac{\tau}{2}\dfrac{u_n^2 - 2u_n^1 + u_n^0}{\tau^2}, \\ u_0^k = u_M^k = 0, 1 < k < N, 1 < n < M \end{cases} \tag{4.5}$$

dır. (4.5) fark şeması denklemi

$$\left(\frac{-1}{2h^2} - \frac{1}{4h}\right)u_{n+1}^{k+1} + \left(\frac{-1}{2h^2} - \frac{1}{4h}\right)u_{n+1}^{k-1} + \left(\frac{1}{\tau^2} + \frac{1}{h^2} + \frac{1}{2}\right)u_n^{k+1} + \left(\frac{-2}{\tau^2}\right)u_n^k$$

$$+\left(\frac{1}{\tau^2} + \frac{1}{h^2} + \frac{1}{2}\right)u_n^{k-1} + \left(\frac{-1}{2h^2} + \frac{1}{4h}\right)u_{n-1}^{k+1} + \left(\frac{-1}{2h^2} + \frac{1}{4h}\right)u_{n-1}^{k-1} = f_n^k$$

olarak yeniden yazılabilir. Buradan,

$$au_{n+1}^{k+1} + au_{n+1}^{k-1} + bu_n^{k+1} + cu_n^k + bu_n^{k-1} + du_{n-1}^{k+1} + du_{n-1}^{k-1} = f_k$$

denklemi elde edilebilir. Burada,

$$a = \frac{-1}{2h^2} - \frac{1}{4h}, b = \frac{1}{\tau^2} + \frac{1}{h^2} + \frac{1}{2}, c = \frac{-2}{\tau^2}, d = \frac{-1}{2h^2} + \frac{1}{4h}$$

dır. Bu da

$$AU_{n+1} + BU_n + CU_{n-1} = f_n$$

matrisi formatında yazılabilir. Burada,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & a & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & a & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(N+1)\times(N+1)},$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & c & b & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & c & b & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & c & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & c & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b & c & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b & c & b \\ \frac{-1}{\tau} & \frac{1}{\tau} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(N+1)\times(N+1)},$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d & 0 & e & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & e & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & d & 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & d & 0 & e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(N+1)\times(N+1)}$$

dır. Bu formüller,

$$\begin{cases} u_{tt}(t,x) - u_{xx}(t,x) - u_x(t,x) + u(t,x) = (3\sin x - \cos x)e^{-t} \\ 0 \le x \le \pi, 0 \le t \le 1, \\ u(0,x) = sinx, u_t(0,x) = -sinx, \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0 \end{cases} \tag{4.6}$$

örneğine uygulanırsa, birinci mertebeden fark şeması

$$\begin{cases} \dfrac{u_n^{k+1} - 2u_n^k + u_n^{k-1}}{\tau^2} + u_n^{k+1} - \dfrac{u_{n+1}^{k+1} - 2u_n^{k+1} + u_{n-1}^{k+1}}{h^2} \\ -\dfrac{u_{n+1}^{k+1} - u_n^{k+1}}{h} = (3\sin(x_n) - \cos(x_n))e^{-t_{k+1}}, \\ u_0^k = u_\pi^k = 0, u_n^0 = \sin(x), \dfrac{u_n^1 - u_n^0}{\tau} = -\sin(x) \end{cases} \tag{4.7}$$

ve ikinci mertebeden fark şeması

$$\begin{cases} \dfrac{u_n^{k+1}-2u_n^k+u_n^{k-1}}{\tau^2}-\dfrac{1}{2}\dfrac{u_{n+1}^{k+1}-2u_n^{k+1}+u_{n-1}^{k+1}}{h^2} \\ -\dfrac{1}{2}\dfrac{u_{n+1}^{k-1}-2u_n^{k-1}+u_{n-1}^{k-1}}{h^2}-\dfrac{1}{4}\dfrac{u_{n+1}^{k+1}-u_{n-1}^{k+1}}{h} \\ -\dfrac{1}{4}\dfrac{u_{n+1}^{k-1}-u_{n-1}^{k-1}}{h}+\dfrac{1}{2}u_n^{k+1}+\dfrac{1}{2}u_n^{k-1}=(3\sin(x_n)-\cos(x_n))e^{-t_k}, \\ u_n^0=\sin(x),\dfrac{u_n^1-u_n^0}{\tau}=-\sin(x_n)+\dfrac{\tau}{2}\dfrac{u_n^2-2u_n^1+u_n^0}{\tau^2},u_0^k=u_M^k=0 \end{cases} \tag{4.8}$$

şeklinde olur. Ve ikinci örnek için

$$\begin{cases} u_{tt}(t,x)-\ u_{xx}(t,x)-\ u_x(t,x)+u(t,x) \\ =(6sinx\ cosx+\sin^2 x-\cos^2 x)e^t, \\ 0\le x\le\pi\,,0\le t\le 1, \\ u(0,x)=sinx\ cosx,u_t(0,x)=sinx\ cosx, \\ u(t,0)=u(t,\pi)=0 \end{cases} \tag{4.9}$$

birinci mertebe fark şeması

$$\begin{cases} \dfrac{u_n^{k+1}-2u_n^k+u_n^{k-1}}{\tau^2}+u_n^{k+1}-\dfrac{u_{n+1}^{k+1}-2u_n^{k+1}+u_{n-1}^{k+1}}{h^2}-\dfrac{u_{n+1}^{k+1}-u_n^{k+1}}{h} \\ =(6\sin(x_n)\cos(x_n)+\sin^2(x_n)-\cos^2(x_n))e^{t_{k+1}}, \\ u_0^k=u_\pi^k=0,u_n^0=\sin(x_n)\cos(x_n)\,,\dfrac{u_n^1-u_n^0}{\tau}=\sin(x_n)\cos(x_n) \end{cases} \tag{4.10}$$

ve ikinci metebe fark şeması

$$\begin{cases} \dfrac{u_n^{k+1}-2u_n^k+u_n^{k-1}}{\tau^2} - \dfrac{1}{2}\dfrac{u_{n+1}^{k+1}-2u_n^{k+1}+u_{n-1}^{k+1}}{h^2} - \dfrac{1}{2}\dfrac{u_{n+1}^{k-1}-2u_n^{k-1}+u_{n-1}^{k-1}}{h^2} \\ -\dfrac{1}{4}\dfrac{u_{n+1}^{k+1}-u_{n-1}^{k+1}}{h} - \dfrac{1}{4}\dfrac{u_{n+1}^{k-1}-u_{n-1}^{k-1}}{h} + u_n^{k+1} + u_n^{k-1} \\ = (6\sin(x_n)\cos(x_n) + \sin^2(x_n) - \cos^2(x_n))e^{t_k}, \\ \dfrac{u_n^1-u_n^0}{\tau} = \sin(x_n)\cos(x_n) + \dfrac{\tau}{2}\dfrac{u_n^2-2u_n^1+u_n^0}{\tau^2}, \\ u_n^0 = \sin(x_n)\cos(x_n), u_0^k = u_M^k = 0 \end{cases} \tag{4.11}$$

olarak yazılır. Bu fark denklemlerini çözmek için Modifiye Gauss eliminasyon yöntemi uygulanmıştır. Şimdi, matris denkleminin bir çözümü

$$u_j = \alpha_{j+1}u_{j+1} + \beta_{j+1}, u_M = 0, j = M-1, \dots, 2, 1$$

olarak verilebilir. Burada $\alpha_j (j = 1,2,\dots,M)$ ve $(N+1)\times(N+1)$ bir kare matris, ve β_j $(j = 1,2,\dots,M)$ ve $(N+1)\times 1$ olarak tanımlanan sütun matrislerdir. Yani,

$$\alpha_{j+1} = -\left(B + C\alpha_j\right)^{-1}A,$$

$$\beta_{j+1} = \left(B + C\alpha_j\right)^{-1}\left(D + C\alpha_j\right), j = 1,2,\dots,M-1$$

dır. $j = 1,2,\dots,M-1$, α_1'in, $(N+1)\times(N+1)$ sıfır matris olduğu, ve β_1'in $(N+1)\times 1$ sıfır matris olduğu görülür. Matlab programı yardımıyla bulanan nümerik sonuçlar, ikinci mertebeden doğruluk fark şemalarının, birinci mertebeden doğruluk fark şemalarından daha doğru olduğunu kanıtlamıştır. Hata analizi

$$E_M^N = \max_{\substack{1\le k\le N \\ 1\le n\le M-1}} \left|u(t_k, x_n) - u_n^k\right|$$

formülüyle yapılmıştır. Burada, $u(t_k, x_n)$ tam çözüm ve u_n^k, (t_k, x_n) noktasındaki nümerik çözümlerdir. Çizelge 4.1. ve çizelge 4.2. deki hata analizleri, $N = M = 20, 40, 60, 80$ ve 100 için yapılmıştır.

Çizelge 4. 1: (4.6) Problemi için hata analizi

$\boldsymbol{\tau = \frac{1}{N}, h = \frac{\pi}{M}}$	**(4.7)'deki Fark Şeması**	**(4.8)'deki Fark Şeması**
N=20,M=20	1.6189×10^{-2}	1.1281×10^{-3}
N=40,M=40	8.6535×10^{-3}	2.8580×10^{-4}
N=60,M=60	5.8980×10^{-3}	1.2776×10^{-4}
N=80,M=80	4.4724×10^{-3}	7.1949×10^{-5}
N=100,M=100	3.6016×10^{-3}	4.6085×10^{-5}

Çizelge 4. 2: (4.9) Problemi için hata analizi

$\boldsymbol{\tau = \frac{1}{N}, h = \frac{\pi}{M}}$	**(4.10)'daki Fark Şeması**	**(4.11)'deki Fark Şeması**
N=20,M=20	1.4780×10^{-2}	4.4473×10^{-3}
N=40,M=40	7.9014×10^{-3}	1.1134×10^{-3}
N=60,M=60	5.4111×10^{-3}	4.9494×10^{-4}
N=80,M=80	4.1153×10^{-3}	2.7851×10^{-4}
N=100,M=100	3.3235×10^{-3}	1.7833×10^{-4}

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, kısmi diferansiyel denklemlerin (KDD) nümerik çözümlerini bulmak için kullanılan fark şeması yöntemi tartışılmıştır. İlk olarak, bu tür KDD'lerin doğruluğunu kabul etmek için temel tanımlar, örnekler ve teoremler verilmiştir. Daha sonra KDD, adi diferansiyel denklemine indirgenmiştir. İndirgeme yöntemi tartışılmış ve bununla ilgili teoremler kanıtlanmıştır. Adi diferansiyel denklemler (ADD'ler) için indirgenme, bir operatör yöntemi ile yapılmıştır. ADD tipinin tam çözümü bulunup bu tam çözüm için kararlılık kestirimleri elde edilmiştir. Cauchy probleminin yaklaşık çözümü için birinci ve ikinci mertebeden doğruluk farkı şemaları uygulanmıştır. Cauchy probleminin yaklaşık çözümünde fark şemalarının çözümü için kararlılık kestirimleri üzerine abstract teoremi kanıtlanmıştır. Bu fark şemalarının çözümüne yönelik kararlılık kestirimleri elde edilmiştir. Fark şemalarının çözümü için teorik açıklamalar, sayısal deneylerin sonuçlarıyla desteklenmiştir. KDD durumunda, fark şemasının birinci ve ikinci mertebesi elde edildi. Nümerik çözüm için Matlab programı kullanılmış ve tam çözüm ile karşılaştırılmıştır. Sonuçlar örneklerle desteklenmiştir ve nümerik sonuçlar tam çözümlerle iyi bir uyum içerisinde olduğu görülmüştür.

KAYNAKLAR

ABRAMOWITZ, M. ve STEGUN, I., 1965. Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical table. Dover publications, New York, 172s.

ASHYRALYEV, A. ve MODANLI, M., 2014. A numerical solution for a telegraph equation. AIP Conference Proceedings, 1611(1): 300-304.

ASHYRALYEV, A., ve MODANLI, M., 2015.An operator method for telegraph partial differential and difference equations. Boundary Value Problems, 1: 41-58.

ASHYRALYEV, A. ve SOBOLEVSKII, P., 2004. New difference schemes for partial differential equations. Birkhäuser, Basel, 446s.

ASHYRALYEV, A. ve SOBOLEVSKII, P., 2005. Two new approaches for construction of the high order of accuracy difference schemes for hyperbolic differential equations. Discrete Dynamics in Nature and Society, 2: 183-213.

ASHYRALYEV, A. ve YILDIRIM, O., 2013. On the numerical solution of hyperbolic IBVP with high-order stable finite difference schemes. Boundary Value Problems, 1:29-63.

ASHYRALYEV, A., KOKSAL, M. ve AGARWAL, R., 2010. A difference scheme for Cauchy problem for the hyperbolic equation with self-adjoint operator. Mathematical and Computer Modelling, 52(1-2): 409-424.

BANASIAK, J. ve MIKA, J., 1998. Singularly perturbed telegraph equations with applications in the random walk theory. International Journal of Stochastic Analysis, 11(1): 9-28.

DEHGHAN, M. ve LAKESTANI, M., 2009. The use of Chebyshev cardinal functions for solution of the second order one dimensional telegraph equation. Numerical Methods for Partial Differential Equations, 25(4): 931-938.

ERIKSSON, K., ESTEP, D., HANSBO, P. ve JOHNSON, C., 1996. Computational Differential Equations. Cambridge university press, United Kingdom, 499s.

FARAJ, B. ve MODANLI, M., 2017. Using difference scheme method for the numerical solution of telegraph partial differential equation. Journal of Garmian University, 3: 157-163.

GAO, F. ve CHI, C., 2007. Unconditionally stable difference schemes for a one-space dimensional linear hyperbolic equation. Applied Mathematics and Computation, 187(2): 1272-1276.

GRCAR, J., 2011. Mathematicians of Gaussian elimination. Notices of the AMS, 58: 782-792. Prentice-Hall International, New Jersey, 1738s.

HABERMAN, R., 1983. Elementary applied partial differential equations with Fourier series and boundary value problems. Englewood Cliffs Prentice Hall, New Jersey, 519s.

HALE, J. ve LVNEL, S., 1993. Introduction to functional differential equation. Springer-verlag, New York, 447s.

JIWARI, R., PANDIT, S. ve MITTAL, R., 2012. A differential quadrature algorithm for the numerical solution of the second-order one dimensional hyperbolic telegraph equation. Int. Journal of Nonlinear Science, 13(3): 259-266.

JORDAN, P. ve PURI, A., 1999. Digital signal propagation in dispersive media. Journal of Applied Physics, 85(3): 1273-1282.
KEW, L. ve ALI, N., 2015. New explicit group iterative methods in the solution of three dimensional hyperbolic telegraph equations. Journal of Computational Physics, 294: 382-404.
KOKSAL, M., 2011. An operator-difference method for telegraph equations arising in transmission lines. Discrete Dynamics in Nature and Society, 2011: 1-17.
LOCK, C., GREEFF, J. ve JOUBERT, S., 2007. Modelling of telegraph equations in transmission lines.University of Johannesburg, South Africa, 138-148.
METAXAS, A. ve MEREDITH, R., 1983. Industrial microwave heating. Peter Peregrinus London, 357s.
OLVER, P., 2014. Introduction to partial differential equations. Springer International Publishing, Switzerland, 636s.
SAMARSKII, A., 2001. The theory of difference schemes. Marcel Dekker, New York, 759s.
SAMARSKII, A. ve VABISHCHEVICH, P., 2007. Numerical methods for solving inverse problems of mathematical physics. Walter de Gruyter, Berlin, 433p.
SARI, M., GUNAY, A. ve GURARSLAN, G., 2014. A solution to the telegraph equation by using DGJ method. International Journal of Nonlinear Science, 17(1): 57-66.
SHOKRI, A. ve DEHGHAN, M., 2008. A numerical method for solving the hyperbolic telegraph equation. Numerical Methods for Partial Differential Equations, 24(4): 1080-1093.
SIZIKOV, V., 2011. Well-posed, ill-posed, and intermediate problems with applications. Walter de Gruyter, USA, 320s.
STEIN, E. ve SHAKARCHI, R., 2003. Fourier analysis: an introduction. Princeton University Press, United Kingdom, 320s.
WESTON, V. ve HE, S., 1993. Wave splitting of the telegraph equation in R3 and its application to inverse scattering. Inverse Problems, 9(6): 789-812.
YANOVSKY, I., 2005. Partial differential equations: Graduate level problems and solutions. UCLA, California, 396s.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

İsim ve Soyisim	:	Peshraw Ahmed HAMADAMIN
Uyruğu	:	IRAQ
Doğum Yeri ve Tarihi	:	5.10.1991 / Sulaimaniyah/ Ranya
Telefon	:	009647501098342
E-mail	:	Peshraw.math0@gmail.com

EĞİTİM

Derece		**Adı, İlçe, İl**	**Bitirme Yılı**
Lise	:	Hajiawa, Ranya, Irak	2009
Üniversite	:	Raparin Üniversitesi, Irak	2014
Yüksek Lisans	:	Harran Üniversitesi, Şanlıurfa, Türkiye	2018

UZMANLIK ALANI

Sayısal Analiz, Diferansiyel Denklemler, Matlab Programı.

YABANCI DİLLER

İngilizce, Türkçe, Arapça.

EKLER

Önceki bölümlerde verilen test örnekleri için birinci ve ikinci mertebe doğruluk farkı şemaları için Matlab algoritması verilmiştir. Sayısal sonuçlar tam çözüm ile karşılaştırılmaktadır.

‘Birinci Mertebe Fark Şeması’

```
clc
clear all
format short e
N=input('N=');
M=N;
Disp('First order difference scheme EX1')
h=pi/M; tau=1/N;
a=(-1/(h^2)-(1/h));
e=(-1/(h^2)); d=(1/(tau^2));
c=(-2/(tau^2)); b=(1/(tau^2)+(2/(h^2))+(1/h)+1);
for i=2:N; A(i,i+1)=a; end;
A(N+1,N+1)=0;A;
for i=2:N;B(i,i-1)=d;B(i,i)=c;B(i,i+1)=b;end
B(1,1)=1;B(N+1,1)=-1/tau;B(N+1,2)=1/tau;B(N+1,N+1)=0;B;
for i=2:N;C(i,i+1)=e;end;
C(N+1,N+1)=0;C;
for i=1:N+1;D(i,i)=1;end;D;
for j=1:M+1;
x=((j)*h);
fii(1,j:j)=sin(x);
fii(N+1,j:j)=-sin(x);
for k=2:N;
fii(k,j:j)=(3*sin(x)-cos(x))*exp(-tau*(k-1));
end;
end;
```

```
alpha(N+1,N+1,1:1)=0;
betha(N+1,1:1)=0;
for j=1:M-1;
alpha(:,:,j+1:j+1)=inv(B+C*alpha(:,:,j:j))*(-A);
betha(:,j+1:j+1)=inv(B+C*alpha(:,:,j:j))*(D*fii(:,j:j)-C*betha(:,j:j));
end;
U(N+1,1,M:M)=0;
for z=M-1:-1:1;
U(:,:,z:z)=alpha(:,:,z+1:z+1)*U(:,:,z+1:z+1)+betha(:,z+1:z+1);
end;
for z=1:M
approx(:,z+1:z+1)=U(:,:,z:z);
end;
'Exact result';
for j=1:M+1;
for k=1:N+1;
x=((j-1)*h);
t=(tau*(k-1));
exact(k,j:j)=sin(x)*exp(-tau*(k-1));
end;
end;
exact;
%'Errors';
Mexact=max(max(es));
Mapprox=max(max(p));
disp('max error')
ME=max(max(abs(Mexact-Mapprox)))
RE=max(max(abs(Mexact-Mapprox)))/max(max(abs(approx)));
disp('Answer=[maxes,maxapp,maxerror,relativeerror]')
Result=[Mexact,Mapprox,ME,RE]
```

‘İkinci Mertebe Fark Şeması’

```
clc
clear all
N=input('N=');
M=N;
format short e
disp('Second order difference scheme EX1')
tau=1/N;h=pi/M;
a=(-1/(2*(h^2)))-(1/(4*h));
d=(-1/(2*(h^2)))+(1/(4*h));
c=(-2/(tau^2));
b=(1/(tau^2))+(1/(h^2)+1/2);
for i=2:N; A(i,i-1)=a; A(i,i+1)=a; end;
A(N+1,N+1)=0;A;
for i=2:N; C(i,i-1)=d; C(i,i+1)=d; end;
C(N+1,N+1)=0;C;
for i=2:N; B(i,i-1)=b;B(i,i)=c; B(i,i+1)=b;end
B(1,1)=1;B(N+1,1)=-3/(2*tau);B(N+1,2)=2/tau;B(N+1,3)=-
1/(2*tau);B(N+1,N+1)=0;B;
for i=1:N+1;D(i,i)=1;end;D;
'fii(j) finding';
for j=1:M+1;
x=((j)*h);
fii(1,j:j)=sin(x);
fii(N+1,j:j)=-sin(x);
for k=2:N;
t=tau*(k-1);
fii(k,j:j)=(3*sin(x)-cos(x))*exp(-t);
end;
end;
alpha(N+1,N+1,1:1)=0;
betha(N+1,1:1)=0;
for j=1:M-1;
```

```
alpha(:,:,j+1:j+1)=inv(B+C*alpha(:,:,j:j))*(-A);
betha(:,j+1:j+1)=inv(B+C*alpha(:,:,j:j))*(D*fii(:,j:j)-C*betha(:,j:j));
end;
U(N+1,1,M:M)=0;
for z=M-1:-1:1;
U(:,:,z:z)=alpha(:,:,z+1:z+1)*U(:,:,z+1:z+1)+betha(:,z+1:z+1);
end;
for z=1:M;
approx(:,z+1:z+1)=U(:,:,z:z);
end;
'Exact result';
for j=1:M+1;
for k=1:N+1;
x=((j-1)*h);
exact(k,j:j)=sin(x)*exp(-tau*(k-1));
end;
end;
exact;
%'Errors';
Mexact=max(max(es));
Mapprox=max(max(p));
disp('max error’)
ME=max(max(abs(Mexact-Mapprox)))
RE=max(max(abs(Mexact-Mapprox)))/max(max(abs(approx)));
disp('Answer=[maxes,maxapp,maxerror,relativeerror]')
Result=[Mexact,Mapprox,ME,RE]
```