T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FRAKTAL GEOMETRİDE BOYUT HESAPLAMA TEKNİKLERİ

Mustafa SAĞDİÇ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Temmuz 2018

Tezin Başlığı : FRAKTAL GEOMETRİDE BOYUT HESAPLAMA TEKNİKLERİ

Tezi Hazırlayan : Mustafa SAĞDİÇ

Sınav Tarihi : 04.07.2018

Yukarıda adı geçen tez jürimizce değerlendirilerek Matematik Ana Bilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Sınav Jüri Üyeleri

Tez Danışmanı: **Prof.Dr. Erol KILIÇ** ______________

İnönü Üniversitesi

Prof.Dr. Cemil YILDIZ ______________

Gazi Üniversitesi

Prof.Dr. Sadık KELEŞ ______________

İnönü Üniversitesi

Prof.Dr. Halil İbrahim ADIGÜZEL

Enstitü Müdürü

ONUR SÖZÜ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum "Fraktal Geometride Boyut Hesaplama Teknikleri" başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlâk ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığını ve yararlandığım bütün kaynakların, hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Mustafa SAĞDİÇ

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

FRAKTAL GEOMETRİDE BOYUT HESAPLAMA TEKNİKLERİ

Mustafa SAĞDİÇ

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Ana Bilim Dalı

75+vi sayfa

2018

Danışman : Prof.Dr. Erol KILIÇ

Yüksek lisans tezi olarak hazırlanan bu çalışma üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, daha sonraki bölümlerin daha iyi anlaşılması için küme, topoloji, metrik ve ölçü konuları ile ilgili temel kavramlara yer verilmektedir.

İkinci bölümde ise boyut kavramı, topolojik boyut ve fraktal boyut olarak iki başlık altında incelenmektedir. Topolojik boyut; küçük tümevarımsal boyut, geniş tümevarımsal boyut ve örtü boyutu olarak, fraktal boyut ise kendine benzerlik boyutu, kutu sayma boyutu ve Hausdorff (ölçü) boyutu olarak tanımlanmakta ve bu tanımlar arasındaki ilişkiler ele alınarak bunlar ile ilgili sonuçlar verilmektedir.

Üçüncü bölümde ise fraktal boyutun doğrudan hesaplanamadığı durumlarda farklı yollardan hesaplamalar yapılarak boyutu bulabileceğimiz yöntemler incelenmektedir.

ANAHTAR KELİMELER: Topolojik Boyut, Küçük Tümevarımsal Boyut, Geniş Tümevarımsal Boyut, Örtü Boyutu, Cantor Kümesi, Koch Eğrisi, Fraktal Boyut, Kendine Benzerlik Boyutu, Kutu Sayma Boyutu, Minkowski Boyutu, Hausdorff Ölçüsü, Hausdorff Boytu

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

TECHNIQUES OF DIMENSION CALCULATION IN FRACTAL GEOMETRY

Mustafa SAĞDİÇ

İnönü University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

75+vi pages

2018

Supervisor : Prof.Dr. Erol KILIÇ

This master thesis consists of three chapters.

In the first chapter, basic concepts related to set, topology, metric and measurement topics are given for better understanding of the following chapters.

In the second chapter, the concept of dimension is examined under two headings as topological dimension and fractal dimension. Topological dimension; the small inductive dimension, the large inductive dimension and the cover dimension, the fractal dimension is defined as the dimension of self-similarity, the box counting dimension and the Hausdorff dimension, and the relations between these definitions are given and the results are given.

In the third chapter, methods that can find the dimension by calculating from different paths are examined in cases where fractal dimension can not be directly calculated.

KEYWORDS: Topology Dimension, Small Inductive Dimension, Large Induction Dimension, Covers Dimension, Cantor Set, Koch Curve, Fractal Dimension, Self-Similarity Dimension, Box-counting Dimension, Minkowski Dimension, Hausdorff measure, Hausdorff dimension

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans çalışmamı yöneten ve tezin hazırlanması sürecinde bana yardımcı olan, her zaman yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen çok kıymetli hocam Sayın Prof. Dr. Erol KILIÇ'a, tez yazımı sırasında karşılaştırdığım her türlü güçlüğün üstesinden gelme konusunda bana yol gösteren, bilgi ve görüşlerinden istifade ettiğim çok değerli hocam Doç. Dr. M. Kemal ÖZDEMİR'e ayrıca yüksek lisans sürecinde üzerimde büyük emekleri olduğunu düşündüğüm bölüm başkanımız Sayın Prof. Dr. Sadık KELEŞ'e ve diğer bölüm hocalarıma ve bilhassa maddi manevi desteklerinden dolayı aileme teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER DİZİNİ

SİMGELER VE KISALTMALAR

Kısaltmalar	Açıklamalar
A_δ	A kümesinin δ - komşuluğu
Cov	Örtü Boyutu
d	Boyut
D_B	Kutu Sayma Boyutu
D_S	Kendine Benzerlik Boyutu
dim_B	Kutu Sayma Boyutu
dim_H	Hausdorff (ölçü) Boyutu
dim_S	Kendine Benzerlik Boyutu
$\mathcal{H}^S$	Hausdorff ölçüsü
Ind	Geniş Tümevarımsal Boyut
ind	Küçük Tümevarımsal Boyut
S	Büzülme Dönüşümü
TFS	Tekrarlayan Fonksiyon Sistemi

1. GİRİŞ

Fraktal; matematikte, çoğunlukla kendine benzeme özelliği gösteren karmaşık geometrik şekillerin ortak adıdır. İlk matematiksel fraktal kavramı 1861 yılında Karl Weierstrass tarafından sürekli fakat hiçbir noktada diferensiyellenebilir olmayan, yani köşe noktalarından oluşan bir eğri üzerindeki değişimleri araştırken bulunmuş ve ortaya konulmuştur. Bundan dolayı, bu geometrik şekillere parçalanmış ya da kırılmış anlamına gelen Latince "fractus" sözcüğünden esinlenerek fraktal denilmiştir. Karl Weierstrass'in bu buluşundan sonra matematik anlamda ilk çalışılan fraktal, Cantor kümesi olmuştur. Daha sonraları Sierpinski, Von Koch ve Peano gibi matematikçiler tarafından fraktallar oluşturulmuştur. Bu oluşturulan fraktallar ilk zamanlarda matematikçilerin dikkatini çekmesede son yıllarda bilgisayar ile görüntülerinin elde edilmesinden sonra dikkatleri daha fazla üzerlerine çekmişlerdir. Özellikle Cantor kümesi tanımlama ve görünüş açısından diğerlerinden daha az gösterişli olmasına ve diğerlerine göre doğal yoruma daha uzak olmasına rağmen oldukça önemlidir. Çünkü, matematiğin pek çok alanında özellikle Kaotik Dinamik Sistemlerde önemli rol oynadığı ve pek çok fraktallar (Julia kümeleri gibi) için de gerekli bir model olduğu görülmektedir.

Fraktalların önemli bir özelliği kendine benzerliktir. Hemen hemen tüm fraktallarda kendine benzerlik özelliği vardır ya da en azından tümüyle kendine benzer olmamakla birlikte, çoğu bu özelliği taşır. Kendine benzer bir cisimde, cismi oluşturan parçalar ya da bileşenler cismin bütününe benzerdir. Bundan dolayı fraktallarda ayrıntılar ya da desenler giderek küçülen ölçeklerde yinelenir ve tümüyle soyut nesnelerde sonsuza değin sürebilir; öyle ki, her parçanın her bir parçası büyütüldüğünde, gene cismin bütününe benzerdir. Bu, fraktalların tanımlanmasında da kullanılan çok önemli bir özelliktir.

Fraktalların bir başka önemli özelliği de, boyut kavramıdır. Çünkü; boyut, fraktallar için bir karakteristik (ayırt edici) özelliktir. Klasik geometride, geometrik şekiller için uzunluk kavramı bir ayırt edici özellik olabilirken fraktallar için olmamaktadır. Bunun sebebi ise; doğru parçalarından oluşmuş bir fraktalın uzunluğunu ölçmek istediğimizde, fraktalın uzunluğu hep sonsuz çıkmasıdır. Bu durum doğru parçalarından oluşmuş her fraktal için aynı olacağından uzunluk kavramı fraktallar için bir ayırt edici özellik olmamaktadır. Fakat fraktal boyut değeri ise, cisim ne kadar büyütülürse büyütülsün hep aynı kalmakta ve her bir fraktal için ayrı değer almaktadır. Fraktal boyutunun bir diğer dikkat çeken özelliği ise topolojik boyutlar gibi tamsayı değerler değil de reel değerler almasıdır. Hatta bir fraktalın fraktal boyutu her zaman topolojik boyutunu aşmaktadır. Böylece; fraktal boyut da fraktalların tanımlanmasında önemli bir özellik olmaktadır.

Yüksek lisans tezi olarak hazırlanan bu çalışmada fraktal geometrinin en önemli ayırt edici özelliklerinden biri olan fraktal boyut ile ilgili iyi bir literatür taraması yapılarak fraktal boyutun anlaşılması ve hesaplanması açık bir şekilde ortaya konmaya çalışılmıştır. Bunun için tezin ikinci bölümünde boyut kavramı hem topolojik olarak hem de fraktal olarak detaylı bir şekilde incelemiştir. Son bölümde ise doğrudan hesaplanmasının zor olduğu durumlarda dolaylı yollardan fraktal boyutun nasıl hesaplanacağı ifade edilmiştir.

2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

Tanım 2.0.1. *$A \subset \mathbb{R}$ olsun. Her $x \epsilon A$ için $x \geq a$ olacak şekilde bir a reel sayısı varsa A kümesine **alttan sınırlıdır**, a sayısına da A nın bir **alt sınırı** denir. Benzer olarak, A nın her x elemanı için $x \leq b$ olacak şekilde bir b reel sayısı varsa A kümesi **üstten sınırlıdır**, b sayısına da A nın bir üst sınırı denir. Alttan ve üstten sınırlı olan kümeye, **sınırlı küme** denir[6].*

Tanım 2.0.2. *Üstten sınırlı bir A kümesinin üst sınırlarının en küçüğüne A nın **en küçük üst sınırı** veya **supremumu** denir, $\sup A$ veya $eküs(A)$ ile gösterilir. Alttan sınırlı bir A kümesinin alt sınırlarının en büyüğüne de A nın **en büyük alt sınırı** veya **infimumu** denir, $\inf A$ veya $ebas(A)$ ile gösterilir[6].*

Tanım 2.0.3. *A ve B iki küme olsun. Eğer A dan B ye birebir örten bir f fonksiyonu varsa A ile B **denktir** denir ve $A \approx B$ ile gösterilir[6].*

Tanım 2.0.4. *Bir A kümesinin eleman sayısına o kümenin **kardinali** denir ve $cardA$ veya $|A|$ ile gösterilir. Ayrıca $|\mathbb{N}| = \aleph_0$ ve $|\mathbb{R}| = c$ ile gösterilir.*

A ile B kümeleri arasındaki denklik kardinalite kavramı ile de ifade edilir. Eğer $A \approx B$ ise A kümesi ile B kümesinin kardinalitesi eşittir denir, $|A| = |B|$ ile gösterilir.

Tanım 2.0.5. *A bir küme olsun. Eğer $A \approx \{1, 2, ..., n\}$ olacak şekilde bir n doğal sayısı varsa A kümesi **sonludur** denir. Sonlu olmayan kümeye **sonsuz küme** adı verilir[6].*

Tanım 2.0.6. *S bir küme olsun. Eğer $f : S \longrightarrow \mathbb{N}$ ye bire-bir dönüşüm var ise S kümesine **sayılabilir** denir. Ayrıca sonlu her küme sayılabilirdir.*

Tanım 2.0.7. *X boştan farklı bir küme ve τ, X in kuvvet kümesi olan $P(X)$ in bir altkümesi olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan τ ailesine X üzerinde bir **topoloji** denir.*

$t_1)$ $\emptyset$, $X \in \tau$,

$t_2)$ *τ ya ait sonlu sayıdaki elemanların arakesiti yine τ ya aittir; yani $A_1, A_2, ..., A_n \in \tau$ için $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \tau$,*

$t_3)$ *τ ya ait keyfi sayıdaki elemanların birleşimi yine τ ya aittir; yani $\forall \{A_i\}_{i\in I} \subset \tau$ için $\bigcup_{i\in I} A_i \in \tau$ dır.*

*τ nun elemanlarına X in **açık alt kümleri**, (X, τ) çiftine **topolojik uzay** denir. X kümesinin elemanlarına da (X, τ) veya kısaca X topolojik uzayının **noktaları** denir[8].*

Tanım 2.0.8. *(X, τ) bir topolojik uzay olsun. X e göre tümleyeni açık olan kümeye, τ topolojisine göre kapalı küme denir, yani*

$$K \subset X \text{ kapalı} \iff K^C = X \setminus K \in \tau \text{ açık}$$

olmasıdır[8].

Tanım 2.0.9. (X, τ) *topolojik uzay ve $\beta \subset \tau$ olsun. τ topolojisinin her elemanı β nın elemanlarının her hangi bir birleşimi olarak yazılabiliyor ise, β ya τ topolojisinin bir **tabanı (bazı)** denir, yani*

* β, τ için bir taban $\iff \forall A \in \tau$ için $\exists \theta \subset \beta$ alt ailesi var $\ni A = \bigcup_{B\in\theta} B$ dir.

veya

* β, τ için bir taban $\iff \forall A \in \tau$ ve $\forall a \in A$ için $\exists B_a \in \beta$ var $\ni A = \bigcup_{a\in A} B_a$ dır[8].

Tanım 2.0.10. *(X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A kümesini kapsayan bir U açık kümesinin her N üst kümesine, A kümesinin **komşuluğu**, x noktasını içeren U açık altkümesine de x in **açık komşuluğu** denir[8].*

Tanım 2.0.11. *(X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A kümesinin bütün açık alt kümelerin birleşimine A kümesinin **içi** denir ve $\overset{o}{A}$ ile gösterilir[8].*

Tanım 2.0.12. *(X,τ) bir topolojik uzay, $A \subset X$ ve κ ise, τ topolojisine göre kapalılar ailesi olsun. A kümesini kapsayan κ ya ait bütün kapalı kümelerin $\kappa_A = \{K \subset X : A \subset K$ ve $K \in \kappa\}$ arakesitine A kümesinin **kapanışı** denir ve $\overline{A}$ ile gösterilir, yani,*

$$\overline{A} = \cap\{K \subset X : A \subset K, \;\; K \in \kappa\} = \bigcap_{K \in \kappa_A}$$

dır[8].

Tanım 2.0.13. *(X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A kümesinin içine ve dışına ait olmayan noktaların kümesine A nın sınırı denir ve (veya $x \in X$ noktasının istenildiği kadar küçük bir komşuluğu alındığında, bu komşuluk içinde hem A nın içine hem de A nın dışına ait noktalar bulunuyorsa, x noktasına A nın bir sınır noktası denir ve bütün sınır noktalarının kümesi)*

$$\partial A = \left\{ x \in X : \; x \notin \overset{o}{A} \;\; ve \; x \notin \overset{o}{A^c} \right\}$$

ile gösterilir[8].

Tanım 2.0.14. *(X,τ) bir topolojik uzay ve $x \in X$ olsun. x noktasını içermeyen X uzayının kapalı her K kümesi ile x noktasının ayrık komşulukları varsa, yani; $x \in X$ ve $\forall K \subset X$ kapalı, $x \notin K$ için $\exists N \in N(x)$ ve $\exists M \in N(K)$ varsa ve $\ni N \cap M = \emptyset$ ise, X uzayına x **noktasında düzenli(regüler) uzay** denir[8].*

Tanım 2.0.15. *Boş olmayan bir X kümesi ve $X \times X$ den $\mathbb{R}$ nin içine tanımlanan bir d fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa, d ye X üzerinde bir **metrik**, (X,d) ikilisne de **metrik uzay** denir[8].*

$\forall x, y, z \in X$ *için*

$m_1)$ $d(x,y) \geq 0,$

$m_2)$ $d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$,

$m_3)$ $d(x,y) = d(y,x)$,

$m_4)$ $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

Tanım 2.0.16. *X bir metrik uzay, $x \in X$ ve $\delta > 0$ olsun. Buna göre;*

$$B_\delta(x) = \{y \in X : d(x,y) < \delta\}$$

*kümesine x merkezli δ yarıçaplı **açık yuvar***

$$\overline{B}_\delta(x) = \{y \in X : d(x,y) \leq \delta\}$$

*kümesine de x merkezli δ yarıçaplı **kapalı yuvar** denir[1].*

Tanım 2.0.17. *(X,d) bir metrik uzay ve $A \subset X$ olsun. Bazı $\delta > 0$ için $B_\delta(x) \subseteq A$ olacak şekildeki x noktasına A kümesinin bir **iç noktası** denir. Eğer A kümesinin her noktası bir iç nokta ise, A ya bir **açık küme** denir[1].*

Tanım 2.0.18. *(X,τ) bir topolojik uzay olsun. X e göre tümleyeni açık olan kümeye, τ topolojisine göre **kapalı küme** denir, yani*

$$K \subset X \text{ kapalı } \Leftrightarrow K^c = X \backslash K \in \tau \text{ açık}$$

ise τ topolojisne göre X in bütün kapalılar ailesi

$$\kappa = \{K \subset X : K \text{ kapalı} \Leftrightarrow K^c \in \tau\}$$

ile gösterilir[8].

Tanım 2.0.19. *Bir metrik uzayın bir alt kümesi hem açık hem de kapalı ise, bu alt kümeye **kapaçık küme** denir[1].*

Tanım 2.0.20. *(s_n) bir reel sayı dizisi olsun. $\forall\varepsilon > 0$ için (s_n) dizisinin sonlu sayıdaki terimleri hariç diğer bütün terimleri bir s reel sayısının $\varepsilon-$komşuluğunda bulunuyorsa (s_n) dizisinin **limiti** s dir (veye s ye **yakınsaktır**) denir ve*

$$\lim s_n = s \text{ veya } (s_n) \to s$$

şeklinde gösterilir[16].

Tanım 2.0.21. *(X, d) bir metrik uzay olsun. $\forall\varepsilon > 0$ sayısı ve verilen bir (s_n) dizisi için, $m, n > N$ olduğunda,*

$$|s_m - s_n| < \varepsilon$$

*olacak şekilde bir N tamsayısı varsa, (s_n) dizisine **Cauchy dizisi** adı verilir[10].*

Tanım 2.0.22. *Bir metrik uzayda her Cauchy dizisi yakınsak ise bu uzaya **tam uzay** denir[10].*

Tanım 2.0.23. *X metrik uzayı üzerinde tanımlı bir f reel değerli fonksiyon için;*

$$\underline{\lim}_{x \longrightarrow 0} f(x) = \lim_{\delta \longrightarrow 0} (\inf \{f(x) : 0 < x < \delta\})$$

*ye f nin x_0 noktasındaki **alt limit***

$$\overline{\lim}_{x \longrightarrow 0} f(x) = \lim_{\delta \longrightarrow 0} (\sup \{f(x) : 0 < x < \delta\})$$

*ye f nin x_0 noktasındaki **üst limit** olarak tanımlanır[2].*

Tanım 2.0.24. *$I_0 = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ ve $m \geqslant 2$ olsun. I_n, n. adımdaki kapalı aralıklar kümesini göstersin. I_n aralıklarından I_{n+1} aralıkları, her bir adımdaki kapalı aralıklar 2m-1 parçaya bölünüp iç kısımlardaki m-1 parçanın çıkarılıp atılması ile elde edilmek üzere;*

$$C_{2m-1} = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$$

*kümesine C_{2m-1} **kantor kümesi** denir.*

Tanım 2.0.25. *$U \subset \mathbb{R}^n$ de boş olmayan bir küme olsun.*

$$|U| = \sup \{|x - y| : x, y \in U\}$$

*ifadesine U kümesinin **çapı** denir[2].*

Tanım 2.0.26. (X, d) *bir metrik uzay ve* $A \subset X$ *olsun. Buna göre;* $x \in X$*,* $y \in A$ *ve* $\delta > 0$ *için;*

$$A_\delta = \{x : |x - y| \leq \delta \text{ , bazı } y \in A \text{ için}\}$$

ifadesine A ***nın*** $\delta-$***komşuluğu*** *denir[1].*

Tanım 2.0.27. $F \subset \mathbb{R}^n$ *kümesi, boş kümeden farklı bir küme olsun. Herhangi bir* $0 \leq |U_i| \leq \delta$ *olacak şekilde sonlu(veya sayılabilir) bir* $\{U_i\}$ *ailesi için,*

$$F \subset \cup_{i=1}^{\infty} U_i$$

olacak şekilde bir örtü var ise, bu örtüye F ***in*** $\delta-$***örtüsü*** *denir[2].*

Tanım 2.0.28. D, $\mathbb{R}^n$ *nin kapalı bir alt kümesi ve* $0 < c < 1$ *olmak üzere,* $\forall x, y \in D$ *için*

$$|S(x) - S(y)| \leq c. |x - y|$$

şartını sağlayan $S : D \longrightarrow D$ *dönüşümüne* D *kümesi üzerinde bir* ***büzülme (contraction)*** *ve*

$$|S(x) - S(y)| = c. |x - y|$$

olması halinde ise, ***benzerlik büzülmesi*** *denir[2].*

Tanım 2.0.29. (X, d) *metrik uzay,* $A, B \subseteq X$ *olacak şekilde* A *ve* B *iki farklı küme olsun. Buna göre,*

$$d(A, B) = \inf \{\delta : A \subseteq B_\delta \text{ ve } B \subseteq A_\delta\}$$

şeklinde tanımlanan metriğe ***Hausdorff metriği*** *denir[1].*

Tanım 2.0.30. X *bir küme olsun.* X *in bir* $\mathcal{A}$ *sınıfı için*

1. $X \in \mathcal{A}$,

2. *Her* $A \in \mathcal{A}$ *için* $A^c = X \setminus A \in \mathcal{A}$,

3. $k = 1, 2, ..., n$ için $A_k \in \mathcal{A} \Longrightarrow \bigcup_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{A}$,

özellikleri sağlanırsa bu $\mathcal{A}$ sınıfına X üzerinde bir ***cebir****, eğer (3.) yerine*

Her $k \in \mathbb{N}$ için $A_k \in \mathcal{A} \Longrightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$

*şartı sağlanırsa $\mathcal{A}$ cebirine bir $\sigma-$**cebir** denir*[6].

Tanım 2.0.31. *X bir küme ve $\mathcal{A}$ da X üzerinde bir $\sigma-$cebiri olsun. $(X, \mathcal{A})$ ikilisine bir* ***ölçülebilir uzay****, $\mathcal{A}$ daki herbir kümeye de $\mathcal{A}-$***ölçülebilir küme*** *denir[6].*

Tanım 2.0.32. *$(X, \mathcal{A})$ bir ölçülebilir uzay olsun. $\mathcal{A}$ üzerinde tanımlı genişletilmiş reel değerli bir m fonksiyonu*

1. $m(\emptyset) = 0$,

2. Her $A \in \mathcal{A}$ için $m(A) \geqslant 0$,

3. Her ayrık (A_n) dizisi için $m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$,

özelliklerini sağlarsa bu fonksiyona bir ***ölçü fonksiyonu*** *veya kısaca* ***ölçü*** *denir[6].*

Tanım 2.0.33. *Bir X kümesi, X in alt kümelerinin bir $\mathcal{A}$ $\sigma-$cebiri ve $\mathcal{A}$ üzerinde tanımlı bir m ölçüsünden oluşan (X, A, m) üçlüsüne bir* ***ölçü uzayı*** *denir[6].*

Tanım 2.0.34. *X bir küme ve $P(X)$ de X in kuvvet kümesi olsun. $P(X)$ üzerinde tanımlı, genişletilmiş reel değerli bir m^* fonksiyonu*

1. $m^*(\emptyset) = 0$,

2. Her $A \in P(X)$ için $m^*(A) \geq 0$,

3. $A \subset B \subset X$ için $m^*(A) \leq m^*(B)$,

4. Her bir $n \in \mathbb{N}$ için $A_n \in P(X)$ ise, $m^*(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} m^*(A_n)$,

*şartlarını sağlarsa m^* fonksiyonuna X üzerinde bir **dış ölçü** denir*[6].

Yukarıda verilen tanımı, $X = \mathbb{R}$ kısıtlaması için aşağıdaki şekilde de yazabiliriz. Buna göre, bir dış ölçü $\forall k$ için I_k açık aralık ve $\ell(I_k) = |I_k|$ olmak üzere

$$m^*(A) = \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) \;\middle|\; \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \supset A\right\}$$

şeklinde ifade edilebilir[10].

Bu şekilde bir iç ölçü tanımı da yapılabilir. Bir iç ölçü ise, $\forall k$ için I_k açık aralık ve $\ell(I_k) = |I_k|$ olmak üzere

$$m_*(A) = \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) \;\middle|\; \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \subset A\right\}$$

şeklinde ifade edilir[10].

Tanım 2.0.35. *Bir kümenin iç ölçümü ile dış ölçümü eşitse, bu kümeye **Lebesgue anlamında ölçülebilir** yada kısaca **ölçülebilir** denir[10].*

3. BOYUT KAVRAMI

3.1 Topolojik Boyut

Geometrideki basit geometrik yapıların boyutu, çoğunlukla sezgisel fikirler ile "parametrelerin minimal" sayısı olarak ortaya konmuştur. Fakat, 20. yüzyılın başların da uzay dolduran eğriler ile sürekli bir dönüşüm tarafından birim aralıktan birim karenin elde edilmesi, boyut fikrinin parametrelerin minimal sayısı olarak ifade edileme yeceğini ortaya koydu. Çünkü; $\mathbb{R}^n$ ve $\mathbb{R}^m$ uzaylarında $n \neq m$ ise, bu uzaylar arasında homeomorf fonksiyonlar tanımlanamıyordu. Bu da, $\mathbb{R}^n$ ve $\mathbb{R}^m$ uzaylarının, topolojik olarak farklı oldukları anlamına geliyordu. Bu çelişkilerin ortaya çıkmasından dolayı boyut kavramının genel bir tanımı topolojik boyut olarak verilmiştir.

Topolojik boyut kavramı, topolojik uzaylar üzerinde her bir topolojik uzaya; -1 tamsayısı ve -1 sayısından büyük tüm tamsayıları içeren $\{-1, 0, 1, 2, 3, ..., \infty\}$ kümesinin elemanlarından biri karşılık getirilerek tanımlanır. Topolojik boyut; **küçük tümevarımsal boyut** (ind), **geniş tümevarımsal boyut** (Ind) ve **örtü boyutu** (Cov) olarak üç farklı şekilde tanımlanır. Bu tanımlar ayrılabilir metrik uzaylarda eşit olurlar. Yani; X bir ayrılabilir metrik uzay olmak üzere,

$$indX = IndX = CovX$$

olur.

3.1.1 Küçük Tümevarımsal Boyut

Tanım 3.1.1. *Her regüler X topolojik uzayı için küçük tümevarımsal boyut $indX$ ile gösterilip,*

1. $X = \emptyset$ *ise* $indX = -1$,

2. $\forall x \in X$ *için* x *noktasının herbir* $V \subset X$ *komşuluğu için* $x \in U \subset V$ *olacak şekilde bir* $U \subset X$ *açık kümesi var ve* $ind(\partial U) \leq n-1$ *ise* $n = 0, 1, 2, ...$ *için* $indX \leq n$,

3. *Eğer (2.) şart* n *için doğru ve* $n-1$ *için yanlış oluyor ise* $indX = n$,

4. *Her* $n = 0, 1, 2, ...$ *için* $indX > n$ *ise* $indX = \infty$,

şartlar ile *tanımlanır[5].*

Tanım 3.1.2. *Bir topolojik uzay için kapaçık kümeleri ile ifade edilen bir baz varsa, bu topolojik uzaya* ***sıfır-boyutlu*** *denir[1].*

Bu tanımı açıklamak için bir X kümesinin kuvvet kümesi $\mathcal{P}(X)$ olmak üzere, $\tau = \mathcal{P}(X)$ ailesi ile X kümesi üzerinde tanımlanan ayrık (discrete) toplojiyi göz önüne alalım. X kümesinin her bir elemanı $\tau-$topolojisine göre hem açık, hemde kapalı olduğundan X kümesinin her bir elemanı kapaçıktır. A da X in bir kapaçık kümesi ise;

$$\overset{o}{A} = A = \overline{A}$$

olduğundan

$$\partial A = \overline{A} - \overset{o}{A} = \overline{A} - \overline{A} = \emptyset$$

olur. Yani; bir kapaçık kümenin sınırı boş kümedir. $\partial A = \emptyset$ olduğundan $ind(\partial A) = -1$ olup, buradan $indA = 0$ olarak elde edilir[14].

Sonuç 3.1.1. *Bir küme sonlu sayıda elamana sahip ise, küçük tümevarımsal boyutu sıfırdır.*

Örnek 3.1.1. *Üçlü Cantor kümesinin küçük tümevarımsal boyutu sıfırdır[1].*

I_{kj}; üçlü Cantor kümesinin k. adımda içerdiği 3^{-k} uzunluğunda 2^k tane kapalı aralıklardan her birini göstermek ve

$$C_k = \bigcup_{j=1}^{2^k} I_{kj}$$

olmak üzere, üçlü Cantor kümesi

$$C = \bigcap\nolimits_{k\in\mathbb{N}} C_k$$

şeklinde ifade edilebilir. Buna göre; I_{kj} aralıklarının uzunluğu 3^{-k} olup her bir aralık diğerinden en az 3^{-k} kadar uzakta bulunur. Şimdi Cantor kümesinin boyutunun sıfır olduğunu göstermek için Cantor kümesinin kapaçık kümelerden oluştuğunu gösterelim. I_{kj} aralıkları kapalı aralık olduğundan $I_{kj} = [a, b]$ alabiliriz. Bu durumda $M_{kj} = C \cap [a, b]$ kümesinin de C de kapalı olduğunu görürüz. Aynı şekilde I_{kj} aralıkları $(a - 3^{-k}, b + 3^{-k})$ açık aralıkları ile de örtülebileceğinden $M_{kj} = C \cap (a - 3^{-k}, b + 3^{-k})$ kümesi C de açık küme olarak da ifade edilebilir. Bu da Cantor kümesinin kapaçık kümelerden oluştuğunu gösterir.

Ayrıca, $x \in C$ ve $\delta > 0$ olmak üzere; $3^{-k} < \delta$ olacak şekilde k ve $x \in I_{kj}$ olacak şekilde j seçilebileceğinden $C \cap B_\delta(x) \supseteq M_{kj}$ olur. Bu ise, M_{kj} koleksiyonunun açık kümeler için bir baz olduğunu gösterir. Böylece Cantor kümesi topolojik boyutu sıfır olan bir kümedir.

Teorem 3.1.1. *$\mathbb{R}$ doğrusunun küçük tümevarımsal boyutu 1 dir[1].*

İspat. $\mathbb{R}$ doğrusunun bazı $B_\delta(x) = (x - \delta, x + \delta)$ yuvarlarından oluşur. Bu yuvarları U kümesi ile gösterirsek, böyle yuvarların sınırı $\partial U = \{x - \delta, x + \delta\}$ iki noktadan oluşan küme olup, Sonuç(3.1.1) den $ind(\partial U) = 0$ dır. Buna göre; $ind\mathbb{R} = 1$ olduğu tanım gereği elde edilir. □

3.1.2 Geniş Tümevarımsal Boyut

Geniş tümevarımsal boyut, küçük tümevarımsal boyutdaki sınır kavramının bir ayırıcı olarak ele alınması ile tanımlanır. Çünkü; bir kümeyi ayıran bir ayırıcı varsa ayırıcı yardımı ile iki parçaya ayrılan küme, ayıraçtan daha büyük bir boyuta sahip olmak zorundadır. Böylece bir kümenin boyutunu, ayırma kavramı ve tümevarım yöntemi ile ifade edebiliriz[14].

Tanım 3.1.3. *X bir topolojik uzay, A ve B kümeleri de X uzayının ayrık alt kümeleri olsun. Buna göre;* $A \subset U$, $B \subset V$ *olmak üzere,* $U, V \subset X$ *açık kümeleri*

$$U \cap V = \emptyset \quad ve \quad X \backslash L = U \cup V$$

şartını sağlıyor ise, L kümesi A ve B kümelerini ***ayırır*** *denir[5].*

Verilen iki kümenin ayrık olması ile ayrılması aynı durum değildir. Ayırma, ayrık olmayı da kapsayan daha genel bir durumdur. Yani; verilen iki küme bir küme tarafından ayrılabiliyor ise, aynı zamanda bu iki küme ayrıktır. Fakat verilen iki kümenin ayrık olması her zaman ayrılabileceği anlamına gelmez.

Örnek 3.1.2. $\mathbb{R}$ *de,* $A = (-\infty, 0]$ *ve* $B = (0, \infty)$ *kümeleri ayrıktır, fakat A ve B ayrılmamış kümelerdir. Aynı zamanda,* $A = (-\infty, 0)$ *ve* $B = (0, \infty)$ *kümeleri hem ayrıktır hem de* $L = \{0\}$ *kümesi tarafından ayrılırlar. Bunun yanında,* $A = (-\infty, 0)$ *ve* $B = (1, \infty)$ *kümeleri de hem ayrıktır hem de* $L = [0, 1]$ *kümesi tarafından ayrılır[13].*

Tanım 3.1.4. *Her regüler X topolojik uzayı için geniş tümevarımsal boyut* $IndX$ *ile gösterilip, aşağıdaki şartlar ile*

1. $X = \emptyset$ *ise,* $IndX = -1$,
2. *Her kapalı* $A \subset X$ *kümesini içeren her bir* $V \subset X$ *açık kümesi için* $A \subset U \subset V$ *olacak şekilde bir* $U \subset X$ *açık kümesi var ve* $Ind(\partial U) \leq n - 1$ *ise,* $n = 0, 1, 2, ...$ *için* $IndX \leq n$,
3. *Eğer (2.) şart n için doğru ve* $n - 1$ *için yanlış oluyor ise* $IndX = n$,
4. *Her* $n = 0, 1, 2, ...$ *için* $IndX > n$ *ise,* $IndX = \infty$,

şartları ile tanımlanır[5].

Bir X topolojik uzayında bir kapalı A kümesinin V komşuluğu için $A \subset U \subset V$ olacak şekilde bir U açığı varsa, bu U açığının sınırı olan ∂U kümesi A kümesini X kümesinden ayıran bir ayırıcı olarak görülebilir.

Teorem 3.1.2. *X ayrılabilir metrik uzay ve $indX = 0$ olsun. X metrik uzayının ayrık olan her A, B kapalı kümesi boş küme tarafından ayrılabilir, yani;*

$$A \subset U \quad ve \quad B \subset X \setminus U$$

olacak şekilde bir $U \subset X$ kapaçık kümesi vardır[5].

İspat. X ayrılabilir metrik uzay, A ve B kapalı kümeleri ayrık ve $indX = 0$ olduğundan,

$\forall x \in X$ ve $x \in W_x$ olduğunda

$$A \cap W_x = \emptyset \quad \text{veya} \quad B \cap W_x = \emptyset$$

olacak şekilde bir $W_x \subset X$ kapaçık kümesi vardır. X metrik uzayı $\{W_x\}_{x \in X}$ açık örtüsünün $\{W_{x_i}\}_{i=1}^{\infty}$ şeklinde sayılabilir bir alt örtüsü varolduğundan

$$U_i = W_{x_i} \setminus \bigcup_{j<i} W_{x_j} \subset W_{x_i}$$

şeklinde tanımlanan U_i kapaçık kümeleri ile X metrik uzayının bir örtüsünü oluşturalım. Buna göre,

$$U = \bigcup \{U_i : A \cap U_i \neq \emptyset\} \quad \text{ve} \quad V = \bigcup \{U_i : A \cap U_i = \emptyset\}$$

olacak şekilde U ve V kümeleri tanımlanırsa $A \subset U$ ve $B \subset V$ olarak bulunur. Ayrıca U_i kümeleri kapaçık olup, ayrık kümeler olduğunundan $V = X \setminus U$ olur. Bu da U ve V kümelerinin kapaçık olduklarını gösterir. □

Teorem 3.1.3. *Bir küme sonlu sayıda elamana sahip ise geniş tümevarımsal boyutu sıfırdır.*

İspat. Sonlu sayıda elemana sahip olan X kümesinin kuvvet kümesi $\mathcal{P}(X)$ olmak üzere, $\tau = \mathcal{P}(X)$ ailesi ile X kümesi üzerinde tanımlanan ayrık (discrete) toplojiyi göz önüne alalım. (X, τ) topolojik uzayının her bir elemanı $\tau-$topolojisine göre hem açık, hem de kapalıdır. Aynı zamanda sayılabilir bir kümenin ayrık topolojiye göre küçük tümevarımsal boyutu sıfır olduğundan teorem (3.1.2) gereğince (X, τ) topolojik uzayının her bir elemanı boş küme tarafından ayrılabilir. Buna göre, $\forall U \in (X, \tau)$ için

$$L = \partial U = \emptyset$$

olup,

$$Ind(\partial U) = -1$$

olduğundan,

$$IndX = 0$$

olarak bulunur. □

Örnek 3.1.3. *Üçlü Cantor kümesinin geniş tümevarımsal boyutu sıfırdır.*

Önerme (3.1.1) e göre üçlü Cantor kümesi kapaçık kümeler ile ifade edilebilmektedir. Bir topolojik uzayın elemanları kapaçık kümeler ile ifade edildiğinde boş küme yardımı ile ayrılabildiğinden, üçlü Cantor kümesi $L = \partial U = \emptyset$ olacak şekildeki kapaçık U kümeleri yardımı ile ayrılabilir. Buna göre üçlü Cantor kümesinin geniş tümevarımsal boyutu sıfır olur.

3.1.3 Örtü Boyutu

Tanım 3.1.5. *$\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$ bir X metrik uzayının iki örtüsü olmak üzere, her $B \in \mathcal{B}$ için $B \subseteq A$ olacak şekilde bir $A \in \mathcal{A}$ var ise, $\mathcal{B}$ ye $\mathcal{A}$ nın* ***inceltilmişi(refinement)*** *denir[1].*

Tanım 3.1.6. *Kümelerin bir $\mathcal{A}$ ailesinin basamağı aşağıdaki şartlar ile*

1. *$\mathcal{A}$ ailesi $\{\emptyset\}$ teklisi ise, $\mathcal{A}$ ailesinin basamağı -1,*
2. *Herhangi $n + 2$ kümesinin kesişimi boş ise $\mathcal{A}$ ailesinin basamağı $\leq n$,*
3. *Eğer (2.) şart n için doğru ve $n - 1$ için yanlış ise $\mathcal{A}$ ailesinin basamağı n,*

olarak tanımlanır[1].

Bu tanıma göre, ayrık kümelerde iki kümenin kesişimi boş küme olduğundan, $n = 0$ için $n+2$ tane kümenin kesişimi boş küme olduğundan ayrık bir $\mathcal{A}$ ailesinin basamağı $n = 0$ olarak bulunur.

Basamak kavramı örtü boyutunu tanımlamada önemlidir. Çünkü; örtü boyutuna göre, $\mathbb{R}^2$ basamağı 1 olan bir örtü ile örtülemez. Örneğin; basamağı 1 olan,

$$\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} (n-1, n+1)$$

şeklindeki açık aralıkların bir örtüsü ile örtülemez. Bundan dolayı, bir metrik uzayın örtü boyutunu bulmak için metrik uzayın bir örtüsünün basamak değeri kullanılır.

Tanım 3.1.7. *X bir metrik uzay ve $n \geq -1$ bir tam sayı olsun. X nin her sonlu açık örtüsü, basamağı $\leq n$ olan bir açık arıtılmışa sahip iken $\leq n-1$ için sahip değil ise n sayısına X metrik uzayının* ***örtü boyutu*** *denir ve* **CovX** *ile gösterilir[1].*

Eğer hiçbir n tamsayısı için örtü boyutu $\leq n$ değilse, bu durumda $CovX = \infty$ olarak kabul edilir.

Teorem 3.1.4. *X bir metrik uzay olmak üzere; $IndX = 0$ olması için gerek ve yeter şart $CovX = 0$ olmasıdır[1].*

İspat. $IndX = 0$ olsun. $U_1 \cup U_2 = X$ olacak şekilde U_1 ve U_2 açık kümelerini alalım. Bunların tümleyenleri $F_1 = X \backslash U_1$ ve $F_2 = X \backslash U_2$ kapalı kümeleri $IndX = 0$ olduğundan ayrıktırlar. Bundan dolayı, $F_1 \subseteq V$ ve $F_2 \cap V = \emptyset$ olacak şekilde kapaçık bir V kümesi vardır. Böylece, $B_1 = X \backslash V$ ve $B_2 = V$ kümeleri $B_1 \subseteq U_1$ ve $B_2 \subseteq U_2$ olup, U_1 ve U_2 kümeleri $B_1 \cup B_2 = S$ ve $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ özelliklerini sağladığından Tanım (3.1.6) e göre $CovX \leq 0$ olur. Fakat, $X \neq \emptyset$ olduğundan $CovX = 0$ olarak bulunur.

$CovX = 0$ olsun. F_1 ve F_2 ayrık kapalı kümeler olsun. Bu durumda, tümleyenleri olan $U_1 = X \backslash F_1$ ve $U_2 = X \backslash F_2$ kümeleri X nin bir açık örtüsünü oluşturur. $B_1 \cup B_2 = X$ ve $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ olacak şekilde $B_i \subseteq U_i$ açık kümeleri vardır. Böylece, $V = B_2$ kapaçık olup $V \supseteq F_1$ ve $V \cap F_2 = \emptyset$ dir. Bu ise $IndX = 0$ olduğunu gösterir. □

3.2 Fraktal Boyut

Bir fraktal; yapının oluşumunun her bir aşamasında, başlangıç şeklinin belirli bir oranda küçültülmüş hali eklenerek oluşturulur. Örneğin; bir fraktal eğri oluşturulurken sonsuz kere tekrar eden oluşum aşaması sonucunda sonsuz uzunluğa sahip bir eğri elde ederiz. Bu durum tüm fraktal eğrilerde aynı şekilde olup, hepsinin uzunluğu sonsuz olur. Bu da uzunluk kavramının fraktallar için karakteristik (ayırt edici) bir özellik olmadığını gösterir. Bunun için fraktal boyut kavramına ihtiyaç duyarız. Fraktal boyut kavramı bir fraktalın sonsuza yaklaşma hızının göstergesi olarak görülebilir. Bu değer her fraktal için farklı olduğundan fraktal boyut kavramı, fraktallar için bir karakteristik değerdir. Bundan dolayı boyut kavramı fraktal geometrinin merkezindedir.

3.2.1 Kendine Benzerlik Boyutu

Bir çok fraktallar bütünün benzer parçaları ile inşa edilebilir. Örneğin üçlü Cantor kümesi, birimin iki benzer kopyası yardımı ile inşa edilir. Böylece fraktalların kendi kendine benzerlik özelliği, sadece fraktalların bir özelliği olmayıp aynı zamanda fraktalları tanımlamak için de kullanılabilirler. Ayrıca Tekrarlayan Fonksiyon Sistemleri (TFS) boyutun tanımlanmasında sıklıkla basit bir yol ortaya koyar. Bu kolaylık ise kendi kendine benzer bir küme olan bir F çekiçisinin belirli şartlar altında Hausdroff ve kutu sayma boyutunun eşit olmasıdır.

Tekrarlayan fonksiyon sistemlerinin temel özelliği ise, genellikle bir fraktal olan tek bir çekici ile belirlenmesidir.

Tanım 3.2.1. *$N \in \mathbb{Z}^+$ ve $c > 0$ olsun. Bir F fraktalı oluşturulurken c ölçütü N defa kullanılmak üzere;*

$$D = \lim_{c \longrightarrow 0} \frac{\log N}{\log(\frac{1}{c})}$$

ifadesine F fraktalının ***kendine benzerlik boyutu*** *denir ve D_S ile gösterilir[7].*

Yukarıda tanımlanan benzerlik boyutu, tüm parçaları aynı oranda küçültülerek elde edilen fraktallara uygulanabilir. Eğer fraktal birden fazla küçültme oranına sahipse bu formülün genelleştirilmesi gerekir. Bunun için;

$$d = \frac{\log(N)}{\log(1/c)}$$

ifadesi

$$d \log(1/c) = \log(N)$$

biçiminde yazılabilir. Bu ifadenin üslü alınarak

$$(1/c)^d = N$$

elde edilir. Bu da

$$1 = N.c^d$$

olup, $N.c^d$ ifadesi N tane c^d teriminin toplamı olarak düşünülebilir. Buna göre,

$$1 = c_1^d + c_2^d + ... + c_N^d$$
$$1 = \sum_{i=1}^{N} c_i^d$$

denklemi elde edilir ve $\forall c_i$ için $0 < c_i < 1$ olmak üzere bu denklemin çözümü tektir ve bu çözüm $D_S = d$ değerine eşittir[7].

Tanım 3.2.2. *$\forall c_i$ için $0 < c_i < 1$ olmak üzere;*

$$\sum_{i=1}^{N} c_i^d = 1$$

şeklinde ifade edilen denkleme, ***Moran Denklemi*** *denir.*

Tanım 3.2.3. *D, $\mathbb{R}^n$ nin kapalı bir alt kümesi ve $m \geq 2$ olsun. D kümesi üzerinde tanımlı S_i büzülme dönüşümlerinin bir sonlu ailesi olan $\{S_1, S_2, ..., S_m\}$ kümesine* ***Tekrarlayan Fonksiyon Sistemi*** *denir ve kısaca* ***TFS*** *olarak gösterilir[2].*

Tanım 3.2.4. *$D \subset \mathbb{R}^n$ olsun. D kümesinin boş olmayan kompakt bir alt kümesi F için;*

$$F = \bigcup_{i=1}^{m} S_i(F) \tag{3.2.1}$$

eşitliği var ise, F kümesine bir ***çekici (attractor)*** *denir[2].*

Yukarıdaki Tanım (3.2.4) bir fraktalın TFS ile tanımlanması olup, (3.2.1) ifadesindeki F kümesi bir fraktal belirtmektedir. Bir fraktalın TFS ile Tanım (3.2.4) den farklı olarak tanımlanması mümkündür. Bu tanımlama için boş olmayan kompakt kümelerin bir ailesi $\mathcal{A}$ ve $A \in \mathcal{A}$ olmak üzere;

$$S(A) = \bigcup_{i=1}^{m} S_i(A)$$

olacak şekilde bir $S : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ dönüşümünü,

$$S^0(A) = A$$

ve

$$S^k(A) = S(S^{k-1}(A))$$

şeklinde tanımlayalım. Buna göre, bir F fraktalı,

$$F = \bigcap_{k=1}^{\infty} S^k(A)$$

olarak tanımlanabilir. Bu tanım kullanarak üçlü Cantor fraktalının tanımı,

$$S_1(x) = \frac{x}{3}$$

ile

$$S_2(x) = \frac{x}{3} + \frac{2}{3}$$

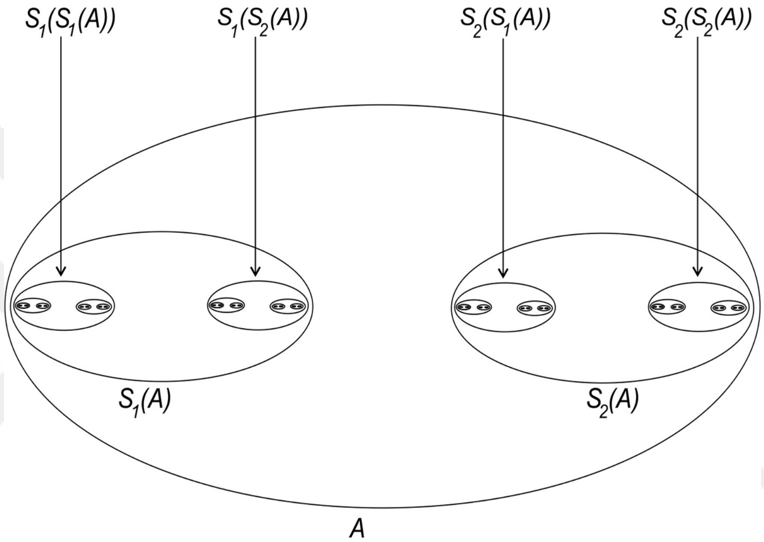
büzülme fonksiyonları olmak üzere $\{S_1, S_2\}$ kümesinden oluşan TFS sistemi ve $A = [0,1]$ olmak üzere,

$$S(A) = \bigcup_{i=1}^{2} S_i(A)$$

olup,

$$F = \bigcap_{k=1}^{\infty} S^k(A)$$

olarak tanımlayabiliriz.



Şekil 3.1. *Tekrarlayan Fonksiyon Sistemi ile Cantor kümesinin inşası[2]*

Teorem 3.2.1. $D \subset \mathbb{R}^n$ *olsun.* $\forall x, y \in D$ *ve her* i *için* $0 < c_i < 1$ *olmak üzere;*

$$|S_i(x) - S_i(y)| \leq c_i\, |x - y| \tag{3.2.2}$$

şeklindeki $\{S_1, S_2, S_3, ..., S_m\}$ *büzülme dönüşümleri ile* D *kümesi üzerinde tanımlanan TFS için,*

$$F = \bigcup_{i=1}^{m} S_i(F)$$

olacak şekilde boş olmayan bir tek kompakt F *kümesi (veya çekicisi) vardır[2].*

İspat. Boş olmayan kompakt kümelerin bir ailesi $\mathcal{A}$ ve $A \in \mathcal{A}$ olmak üzere;

$$S(A) = \bigcup_{i=1}^{m} S_i(A)$$

olacak şekilde bir $S : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ dönüşümünü;

$$S^0(A) = A$$

ve

$$S^k(A) = S(S^{k-1}(A))$$

olarak tanımlayalım. $A, B \in \mathcal{A}$ ve d bir Hausdorff metriği olmak üzere; $\forall i$ için,

$$S_i(B) \subseteq (S_i(A))_\delta \Rightarrow \cup_{i=1}^{m} S_i(B) \subseteq (\cup_{i=1}^{m} S_i(A))_\delta$$

ve

$$S_i(A) \subseteq (S_i(B))_\delta \Rightarrow \cup_{i=1}^{m} S_i(A) \subseteq (\cup_{i=1}^{m} S_i(B))_\delta$$

olacağından,

$$d(S(A), S(B)) = d(\cup_{i=1}^{m} S_i(A), \cup_{i=1}^{m} S_i(B)) \leq \max_{1 \leq i \leq m} d(S_i(A), S_i(B))$$

eşitsizliği yazılabilir. Buna göre, (3.2.2) ifadesinden,

$$d(S(A), S(B)) \leq (\max_{1 \leq i \leq m} c_i) d(A, B)$$

ifadesi elde edilir. d metriği $\mathcal{A}$ ailesi üzereinde tam metrik olduğundan, $\mathcal{A}$ ailesinde bulunan kümelerin her bir Cauchy dizisi $\mathcal{A}$ ailesinde bir kümeye yakınsar. S dönüşümü $(\mathcal{A}, d)$ metrik uzayı üzerinde, $0 < \max_{1 \leq i \leq m} c_i < 1$ olduğundan dolayı bir büzülme dönüşümü olur. Ayrıca, tam bir metrik uzay üzerinde bir büzülme dönüşümü tek bir sabit noktaya sahip olduğundan

$$F = \bigcup_{i=1}^{m} S_i(F)$$

olacak şekilde bir tek F kümesi vardır. $\square$

Teorem 3.2.2. *$\mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlı S_i benzerlik dönüşümleri için $0 < c_i < 1$ ve $1 \leq i \leq m$ olsun. $\{S_1, S_2, S_3, ..., S_m\}$ dönüşümleri tarafından verilen TFS sistemi için;*

$$F = \bigcup_{i=1}^{m} S_i(F),$$

olacak şekildeki bir F çekicisi için;

$$\sum_{i=1}^{m} c_i^s = 1$$

eşitliğini sağlayan tek bir negatif olmayan s değeri vardır[1].

İspat.

$$\phi(s) = \sum_{i=1}^{m} c_i^s$$

ile tanımlanan $\phi : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ fonksiyonunu göz önüne alalım. ϕ sürekli bir fonksiyondur. $\phi(0) = n \geq 1$ ve $\lim_{s \longrightarrow \infty} \phi(s) = 0 < 1$ olduğundan ortalama değer teoreminden $\phi(s) = 1$ olacak şekilde en az bir s değeri vardır. ϕ fonksiyonunun türevi

$$\phi'(s) = \sum_{i=1}^{m} c_i^s \log c_i$$

olup, $\phi'(s) < 0$ olduğundan ϕ kesinlikle azalan bir fonksiyondur. O halde $\phi(s) = 1$ denkleminin tek bir s çözümü vardır. □

Tanım 3.2.5. *$D \subset \mathbb{R}^n$ olsun. $\forall x, y \in D$ ve her i için $0 < c_i < 1$ olmak üzere;*

$$|S_i(x) - S_i(y)| \leq c_i |x - y|$$

D kümesi üzerinde tanımlanan $\{S_1, S_2, S_3, ..., S_m\}$ büzülme dönüşümleri tarafından verilen TFS için,

$$F = \bigcup_{i=1}^{m} S_i(F)$$

olacak şekildeki bir F çekicisi (fraktalı) için;

$$\sum_{i=1}^{m} c_i^s = 1$$

*eşitliğini sağlayan tek bir negatif olmayan s değerine F fraktalının **kendine benzerlik boyutu** denir ve D_S ile gösterilir[1].*

Örnek 3.2.1. *$D = [0,1] \subset \mathbb{R}$ olsun. $S_1, S_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere;*

$$S_1(x) = \frac{1}{3}x$$
$$S_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$$

olacak şekilde S_1 ve S_2 büzülme dönüşümleri verilsin. D kümesi üzerinde tanımlanan $\{S_{1,}S_2\}$ büzülme dönüşümleri tarafından verilen TFS için,

$$F = \bigcup_{i=1}^{2} S_i(F)$$

olan F çekicisi üçlü Cantor fraktalı olup, bu fraktalın kendine benzerlik boyutu,

$$\sum_{i=1}^{2} c_i^s = 1$$
$$c_1^s + c_2^s = 1$$
$$\left(\frac{1}{3}\right)^s + \left(\frac{1}{3}\right)^s = 1$$
$$2\left(\frac{1}{3}\right)^s = 1$$

en son eşitliğin logaritması alınırsa,

$$\log\left(2\left(\frac{1}{3}\right)^s\right) = \log 1$$
$$\log 2 + \log 3^{-s} = 0$$
$$\log 2 - s\log 3 = 0$$
$$s = \frac{\log 2}{\log 3}$$
$$s \approx 0.6309$$

olarak bulunur.

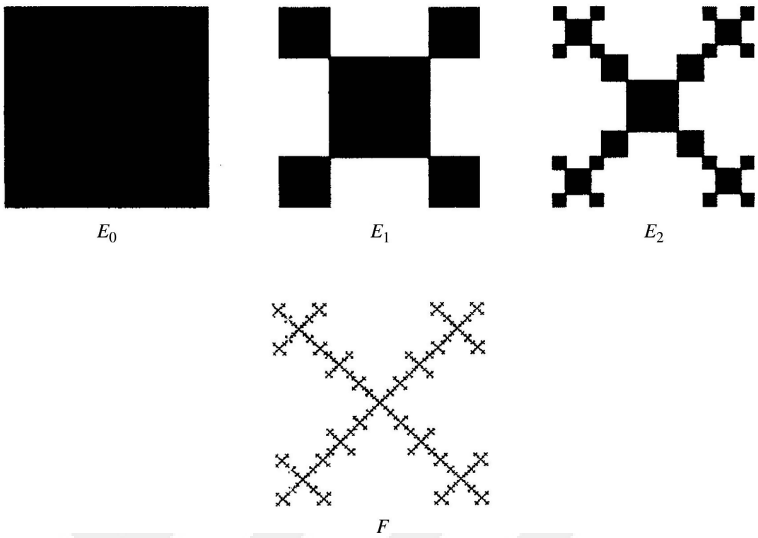
Örnek 3.2.2. *$E = [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$ olsun. $S_i : E \longrightarrow E$ olmak üzere;*

$$S_1(x,y) = \left(\tfrac{x}{4}, \tfrac{y}{4}\right),$$
$$S_2(x,y) = \left(\tfrac{x}{4}, \tfrac{y}{4} + \tfrac{3}{4}\right),$$
$$S_3(x,y) = \left(\tfrac{x}{4} + \tfrac{3}{4}, \tfrac{y}{4}\right),$$

$S_4(x,y) = \left(\frac{x}{4} + \frac{3}{4}, \frac{y}{4} + \frac{3}{4}\right),$

$S_5(x,y) = \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4}, \frac{y}{2} + \frac{1}{4}\right),$

olacak şekilde S_1, S_2, S_3, S_4 ve S_5 büzülme dönüşümleri verilsin.



Şekil 3.2. İki farklı benzerlik oranına sahip fraktalın inşası[2]

E kümesi üzerinde $\{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5\}$ büzülme dönüşümleri tarafından tanımlanan TFS için;

$$F = \bigcup_{i=1}^{5} S_i(F)$$

olan F çekicisinin (fraktalının) kendine benzerlik boyutunu bulalım[2].

F fraktalı iki farklı benzerlik oranına sahip olduğu için Moran denklemi yardımı ile boyutu bulunabilir. Buna göre,

$$\sum_{i=1}^{5} c_i^s = 1$$

$$c_1^s + c_2^s + c_3^s + c_4^s + c_5^s = 1$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^s + \left(\frac{1}{4}\right)^s + \left(\frac{1}{2}\right)^s + \left(\frac{1}{4}\right)^s + \left(\frac{1}{4}\right)^s = 1$$

$$4.\left(\frac{1}{4}\right)^s + \left(\frac{1}{2}\right)^s = 1$$

denkleminin çözümü olan $s \approx 1,35$ değeri fraktalın kendine benzerlik boyutudur.

Bu örnekte görüldüğü gibi TFS ile verilen kendine benzerlik boyutu, farklı benzerlik oranlarına sahip fraktallarında boyutlarını bulmamızı sağlamaktadır.

Cantor kümesi gibi kendi kendine benzerlik özelliği açıkça belirli olan fraktallara kendine benzerlik boyutu tanımını uygulayabiliriz. Ama bir kompleks düzlemde elde edilmiş Mandelbrot ve Julia kümeleri gibi düzlemin heryerine dağılmış ve kendine benzerlik özelliği açıkça belirli olmayan fraktallara uygulayamayız. Bundan dolayı, düzleme yayılan fraktalların da boyutunu hesaplamak için yeni bir boyut hesaplama tanımı verilecektir.

3.2.2 Kutu Sayma Boyutu

Kendi kendine benzerlik özelliği açıkça bellirli olmayan kümelerin boyutu, kutu sayma boyutu ile bulunmaktadır. Bu boyut tanımına göre; verilen bir kümenin boyutu, kümenin aynı yarıçapa sahip yuvarların örtüsü yardımı ile hesaplanmaktadır. Bu tanıma göre; sonlu bir F kümesi eğer $|U_i| = \delta$ olacak şekilde bir $\mathcal{U} = \{U_i\}$ ailesi yardımı ile örtülüyor ise,

$$\begin{aligned} m(F) &= \inf_{\{U_i\}} \sum_i |U_i|^s \\ &= \inf_{\{U_i\}} \delta^s . N(\mathcal{U}) \\ &= \delta^s . \inf_{\{U_i\}} N(\mathcal{U}) \end{aligned}$$

olup, $N(\mathcal{U})$ burada F kümesini örtmekte kullanılan U_i kümelerinin sayısıdır. Buna göre,

$$N_\delta(F) = \inf_{\{U_i\}} N(\mathcal{U})$$

olarak alınırsa,

$$m(F) = \delta^s . N_\delta(F) \tag{3.2.3}$$

olarak bulunur. F kümesi sınırlı olup ölçümünün sonucu sabit bir sayı olacağından, (3.2.3) eşitliğinin her iki tarafının logaritması alındığında,

$$\begin{aligned} \log m(F) &= \log \delta^s + \log N_\delta(F) \\ 0 &= s.\log\delta + \log N_\delta(F) \\ -s.\log\delta &= \log N_\delta(F) \\ s &= \frac{\log N_\delta(F)}{-\log\delta} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} s &= \frac{\log N_\delta(F)}{\log \delta^{-1}} \\ s &= \frac{\log N_\delta(F)}{\log(\frac{1}{\delta})} \end{aligned}$$

olarak kutu sayma boyutu bulunur. Bu elde edilenlere göre kutu sayma boyutu aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 3.2.6. *F kümesi, $\mathbb{R}^n$de boş olmayan sınırlı bir altküme olsun. $N_\delta(F)$, F kümesini örtmek için gerekli en çok $\delta-$çapına sahip açıkların sayısının en küçüğü olmak üzere;*

F kümesinin kutu sayma boyutunun alt limiti

$$\underline{\dim}_B F = \underline{\lim}_{\delta\longrightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log\delta}$$

ve üst limiti

$$\overline{\dim}_B F = \overline{\lim}_{\delta\longrightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log\delta}$$

eşit olduğunda, F kümesinin ***kutu sayma boyutu***

$$\dim_B F = \lim_{\delta\longrightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log\delta}$$

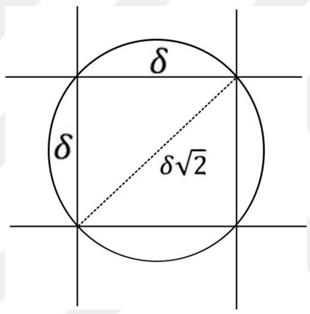
olarak tanımlanır[2].

Kutu sayma boyutunun farklı tanımları, yukarıda verilen tanıma denk olacak şekilde yapılabilir. Bu yapılan tanımlar, tanımlanma biçimleri dolayısıyla boyut hesaplama uygulamalarında daha kullanışlı olabilmektedirler. Bu tanımlamalardan biri aşağıdaki gibi yapılabilir[2].

$\mathbb{R}^n$ de $\delta-$büyüklüğüne sahip bir kutuyu, $m_1, m_2, ..., m_n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere;

$$[m_1\delta, (m_1+1)\delta] \times [m_2\delta, (m_2+1)\delta] \times ... \times [m_n\delta, (m_n+1)\delta]$$

olarak tanımlayalım (Bu tanıma göre; bir kutu, $\mathbb{R}$ de bir aralık, $\mathbb{R}^2$ de bir kare ve $\mathbb{R}^3$ de bir küptür). $F \subset \mathbb{R}^n$ olmak üzere, F kümesinin örtülmesi için gerekli $\delta-$büyüklüğüne sahip kutuların sayısı $N'_\delta(F)$ ile gösterelim.



Şekil 3.3: $n = 2$ *için* $\delta-$*büyüklüğüne sahip bir kutunun (karenin)* $\delta\sqrt{2}$ *çapındaki açıklar ile örtülmesi*

Buna göre, $\delta-$büyüklüğüne sahip bir kutuyu örtmek için $\delta\sqrt{n}$ çapında açıklar gerekli olduğundan, F kümesinin için,

$$N_{\delta\sqrt{n}}(F) \leq N'_\delta(F)$$

yazılabilir. Bu eşitsizliğin $\delta\sqrt{n} < 1$ için logaritması alınıp, her iki tarafı $-\log(\delta\sqrt{n})$ bölünürse;

$$\frac{\log N_{\delta\sqrt{n}}(F)}{-\log(\delta\sqrt{n})} \leq \frac{\log N'_\delta(F)}{-\log\sqrt{n} - \log\delta}$$

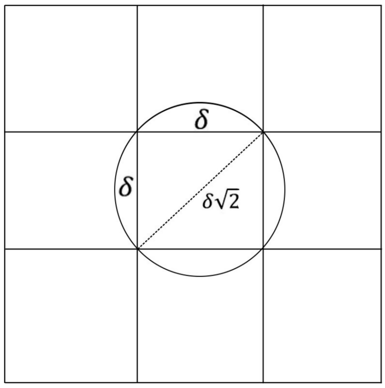
olup, $\delta \longrightarrow 0$ için limit alınırsa;

$$\underline{\dim}_B F \leq \lim_{\delta \longrightarrow 0} \frac{\log N'_\delta(F)}{-\log\delta}$$

ve

$$\overline{\dim}_B F \leq \overline{\lim_{\delta \longrightarrow 0}} \frac{\log N'_\delta(F)}{-\log \delta}$$

eşitsizlikleri elde edilir.



Şekil 3.4: *$n = 2$ için $\delta\sqrt{2}$ çapındaki açıkların $\delta-$büyüklüğüne sahip 3^2 tane kutu(kare) ile örtülmesi*

Diğer taraftan $\delta\sqrt{n}-$çapına sahip bir küme 3^n tane $\delta-$büyüklüğünde kutulu ile örtülebileceğinden,

$$N'_\delta(F) \leq 3^n N_{\delta\sqrt{n}}(F)$$

ifadesi yazılabilir. Bu eşitsizliğin de $\delta < 1$ için logaritması alınıp, her iki tarafı $-\log \delta$ bölünürse;

$$\frac{\log N'_\delta(F)}{-\log \delta} \leq \frac{\log(3^n N_{\delta\sqrt{n}}(F))}{-\log \delta}$$

$$\frac{\log N'_\delta(F)}{-\log \delta} \leq \frac{n \log 3}{-\log \delta} + \frac{\log N_{\delta\sqrt{n}}(F)}{-\log \delta}$$

olup, $\delta \longrightarrow 0$ için limit alınırsa; $n \log 3/-\log \delta \longrightarrow 0$ olacağından

$$\frac{\log N'_\delta(F)}{-\log \delta} \leq \frac{\log N_{\delta\sqrt{n}}(F)}{-\log \delta}$$

olup, $-\log \delta\sqrt{n} \leq -\log \delta$ olacağından

$$\frac{\log N'_\delta(F)}{-\log \delta} \leq \frac{\log N_{\delta\sqrt{n}}(F)}{-\log \delta\sqrt{n}}$$

ifadesi yazılabilir. Buradan da

$$\underline{\lim}_{\delta \longrightarrow 0} \frac{\log N'_\delta(F)}{-\log \delta} \leq \underline{\dim}_B F$$

ve

$$\overline{\lim}_{\delta \longrightarrow 0} \frac{\log N'_\delta(F)}{-\log \delta} \leq \overline{\dim}_B F$$

eşitsizlikleri elde edilir. Buna göre,

$$\underline{\dim}_B F = \underline{\lim}_{\delta \longrightarrow 0} \frac{\log N'_\delta(F)}{-\log \delta}$$

ve

$$\overline{\dim}_B F = \overline{\lim}_{\delta \longrightarrow 0} \frac{\log N'_\delta(F)}{-\log \delta}$$

olup,

$$\dim_B F = \lim_{\delta \longrightarrow 0} \frac{\log N'_\delta(F)}{-\log \delta}$$

yazılabilir. Bu son ifadeye göre kutu sayma boyutunu bulurken; $N_\delta F$ ($\delta-$çapına sahip açıkların sayısı) yerine, $N'_\delta F$ ($\delta-$büyüklüğündeki kutuların sayısı) alınabilir. Bu da bize farklı kutu sayma boyutu tanımları yapılabileceğini söyler.

Tanım 3.2.7. *F kümesi, $\mathbb{R}^n$ de boş olmayan sınırlı bir altkümesi olmak üzere;*

$$\underline{\dim}_B F = \underline{\lim}_{\delta \longrightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}$$

alt limit ve,

$$\overline{\dim}_B F = \overline{\lim}_{\delta \longrightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}$$

üst limit var ve eşit ise, F kümesinin ***kutu sayma boyutu****,*

$$\dim_B F = \lim_{\delta \longrightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}$$

olarak tanımlanır. Burada $N_\delta(F)$ yerine aşağıdaki ifadelerden biri kullanılabilir[2].

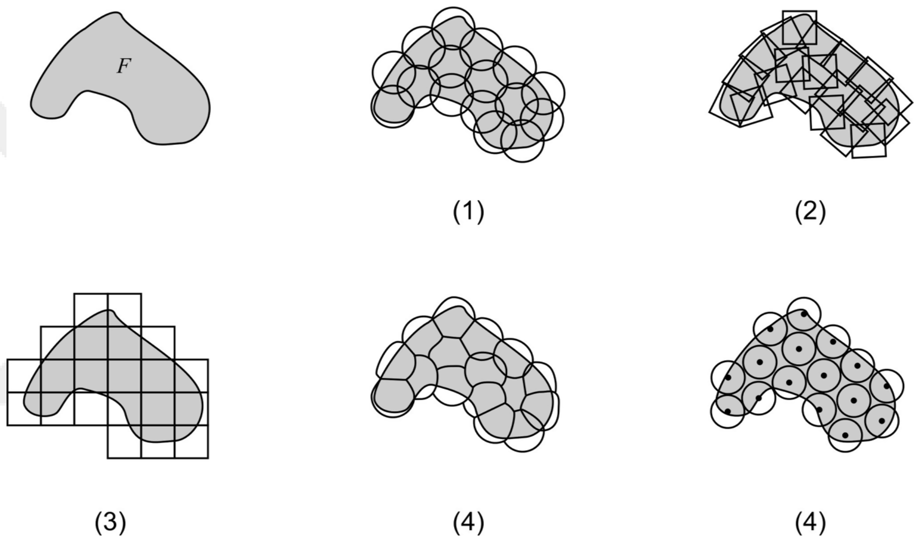
1. F kümesini örtmek için gerekli $\delta-$yarıçapına sahip kapalı yuvarların sayısının en küçüğü

2. F kümesini örtmek için gerekli $\delta-$büyüklüğündeki kutuların sayısının en küçüğü

3. F kümesini örtmek için gerekli $\delta-$büyüklüğündeki kutu gözlerinin sayısının en küçüğü

4. F kümesini örtmek için gerekli $\delta-$çapına sahip kümelerin sayısının en küçüğü

5. F kümesini örtmek için gerekli $\delta-$yarıçapına sahip ayrık yuvarların sayısının en küçüğü



Şekil 3.5: *F kümesinin boyutunun, farklı kutu sayma boyutu tanımları yardımı ile hesaplanması[2]*

Kutu sayma boyutunun boyut hesaplama uygulamalarında tercih edilmesi nedeni, yukarıdaki gibi uygulamada kolaylık sağlayacak şekilde farklı tanımlamalarının yapılmasının yanında boyutun belirli bir k indeksine (fraktalı oluşturmadaki adım sayısı) bağlı olarak bulunabilmesindendir. Bu hesaplama aşağıdaki gibi açıklanabilir.

$0 < c < 1$ olmak üzere $\delta \longrightarrow 0$ için δ_k dizisi, $\delta_{k+1} \geq c\delta_k$ şartını sağlayacak şekilde k indeksine bağlı bir azalan dizi olsun. Buna göre, bir F kümesinin k. adımdaki kutu sayma boyutunun üst limitini bulmak için $\delta_{k+1} \leq \delta < \delta_k$ aralığı alınmak üzere

$$\frac{\log N_\delta(F)}{-\log\delta} \le \frac{\log N_{\delta_{k+1}}(F)}{-\log\delta_k} = \frac{\log N_{\delta_{k+1}}(F)}{-\log\delta_{k+1} + \log\left(\frac{\delta_{k+1}}{\delta_k}\right)} \le \frac{\log N_{\delta_{k+1}}(F)}{-\log\delta_{k+1} + \log c}$$

ifadesi δ_k dizisi azalan bir dizi olup, $\frac{\delta_{k+1}}{\delta_k} \ge c$ olduğundan yazılabilir. Buradan da

$$\overline{\lim_{\delta\to 0}}\frac{\log N_\delta(F)}{-\log\delta} \le \overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{\log N_{\delta_k}(F)}{-\log\delta_k}$$

$$\overline{\dim}_B F \le \overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{\log N_{\delta_k}(F)}{-\log\delta_k}$$

elde edilir. Aynı şekilde, F kümesinin k. adımdaki kutu sayma boyutunun alt limitini bulmak için $\delta_k < \delta \le \delta_{k-1}$ aralığı alınmak üzere

$$\frac{\log N_\delta(F)}{-\log\delta} \ge \frac{\log N_{\delta_{k-1}}(F)}{-\log\delta_k} = \frac{\log N_{\delta_{k-1}}(F)}{-\log\delta_{k-1} + \log\left(\frac{\delta_{k-1}}{\delta_k}\right)} \ge \frac{\log N_{\delta_k}(F)}{-\log\delta_k - \log c}$$

ifadesi de δ_k dizisi azalan bir dizi olup, $\frac{\delta_{k-1}}{\delta_k} \le c^{-1}$ olduğundan yazılabilir. Buradan da

$$\underline{\lim_{\delta\to 0}}\frac{\log N_\delta(F)}{-\log\delta} \ge \underline{\lim_{k\to\infty}}\frac{\log N_{\delta_k}(F)}{-\log\delta_k}$$

$$\underline{\dim}_B F \ge \underline{\lim_{k\to\infty}}\frac{\log N_{\delta_k}(F)}{-\log\delta_k}$$

elde edilir. Bu limitlerin eşit olması durumunda ise boyut

$$\dim_B F = \lim_{k\to\infty}\frac{\log N_{\delta_k}(F)}{-\log\delta_k}$$

ifadesi tarafından verilip, bu ifade de kutu sayma boyutunun fraktalın k. adımında k terimine bağlı olarak bulunabileceğini gösterir. Böylece, $k \longrightarrow \infty$ durumuna bakılarak fraktalın boyutu bulunabilir.

Yukarıda yapılan tanımlamalar dışında komşuluk kavramı yardımı ile de bir kümenin boyutu hesaplanabilir. Bu tanımlama için ise, $\mathbb{R}^n$ kümesinin bir F alt kümesinin $\delta-$komşuluğu

$$F_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n : |x-y| \le \delta,\ bazı\ y \in F\ için\}$$

şeklinde tanımlanır. Buradaki komşuluk tanımına göre;

* F kümesi bir nokta olduğunda, F_δ kümesi nokta etrafında $vol(F_\delta) = \frac{4}{3}\pi\delta^3$ hacminde bir küre,

* F kümesi l uzunluğunda bir doğru olduğunda, F_δ kümesi l uzunluğuna sahip silindir ile iki yarım yuvarın silindirin taban ve tavanından birleşmesiyle oluşan ve $vol(F_\delta) \sim \pi l \delta^2$ olan şekil,

* F kümesi a alanına sahip düz bir yüzey olduğunda, F_δ kümesi F kümesinin yaklaşık olarak δ büyüklüğünde kalınlaştırılması olup $vol(F_\delta) \sim 2a\delta$ olan şekil,

olarak bulunur.

Buradan da $vol(F_\delta) \sim c.\delta^{3-s}$ olduğu görülebilir. Bundan dolayı $n-$boyutta,

$$vol(F_\delta) \sim c.\delta^{n-s}$$

olup, bu ifadenin her iki tarafının logarıtması aılınırsa,

$$\begin{aligned}
\log\left[vol(F_\delta)\right] &\sim \log\left(c.\delta^{n-s}\right) \\
\log\left[vol(F_\delta)\right] &\sim \log c + (n-s)\log(\delta) \\
\log\left[vol(F_\delta)\right] &\sim \log c + n.\log(\delta) - s.\log(\delta) \\
s.\log(\delta) &\sim \log c + n.\log(\delta) - \log\left[vol(F_\delta)\right]
\end{aligned}$$

son eşitlikte c sabit bir sayı olduğundan $\log c = 0$ olduğu göz önünde bulundurularak her iki taraf $\log(\delta)$ ifadesine bölünürse,

$$\frac{s.\log(\delta)}{\log(\delta)} \sim \frac{n.\log(\delta)}{\log(\delta)} - \frac{\log\left[vol(F_\delta)\right]}{\log(\delta)}$$

$$s \sim n - \frac{\log\left[vol(F_\delta)\right]}{\log\delta}$$

ifadesi elde edilir[2].

Tanım 3.2.8. $F \subset \mathbb{R}^n$ *ve* F_δ *kümesi*

$$F_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - y| \leq \delta,\ bazı\ y \in F\ için\}$$

olmak üzere,

$$\underline{\dim}_B F = n - \limsup_{\delta \longrightarrow 0} \frac{\log \mathcal{L}^n(F_\delta)}{\log \delta}$$

ve

$$\overline{\dim}_B F = n - \liminf_{\delta \longrightarrow 0} \frac{\log \mathcal{L}^n(F_\delta)}{\log \delta}$$

olup, bu değerler eşit ise,

$$\dim_B F = n - \lim_{\delta \longrightarrow 0} \frac{\log \mathcal{L}^n(F_\delta)}{\log \delta}$$

şeklinde tanımlanan kutu sayma boyutuna ***Minkowski boyutu*** *denir[3].*

Örnek 3.2.3. *F kümesi üçlü Cantor kümesi olmak üzere,*

$$\underline{\dim}_B F = \overline{\dim}_B F = \log 2 / \log 3$$

olduğunu gösterelim[2].

F kümesinin k.adımda 3^{-k} *uzunluğa sahip,* 2^k *tane aralık içerdiği açıktır. Bu durumda k.adımıki* $\delta-$*büyüklüğündeki kutular ile kaplamanın üst limitini bulmak için* $3^{-k} < \delta \leq 3^{-k+1}$ *olacak şekilde seçilirse* $N_\delta F \leq 2^k$ *olur. Buna göre;*

$$\overline{\dim}_B F = \overline{\lim_{\delta \longrightarrow 0}} \frac{\log N_\delta F}{-\log \delta} \leq \overline{\lim_{k \longrightarrow \infty}} \frac{\log 2^k}{\log 3^{k-1}} = \frac{\log 2}{\log 3}$$

olarak bulunur. Diğer taraftan k.adımdaki alt limiti bulmak için $\delta-$*büyüklüğünü* $3^{-k-1} \leq \delta < 3^{-k}$ *olacak şekilde seçilirse* $N_\delta F \geq 2^k$ *olup alt limit;*

$$\underline{\dim}_B F = \underline{\lim_{\delta \longrightarrow 0}} \frac{\log N_\delta F}{-\log \delta} \geq \underline{\lim_{k \longrightarrow \infty}} \frac{\log 2^k}{\log 3^{k+1}} = \frac{\log 2}{\log 3}$$

olarak elde edilir. Buna göre; $\underline{\dim}_B F = \overline{\dim}_B F = \log 2 / \log 3$ *yazılabilir.*

Kutu sayma boyutu, farklı tanımları ile pratikte çok kullanışlı olmasına rağmen her zaman boyutu hesaplamada doğru cevap veren bir tanım değildir. Bu durumu aşağıdaki örnekte görebiliriz.

Örnek 3.2.4. *$F = \left\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...\right\}$ sayılabilir kümesinin kutu sayma boyutu $D_B F = \frac{1}{2}$ dir[2].*

$k \in \mathbb{Z}^+$ ve $\delta > 0$ olsun. F kümesinin alt ve üst kutu sayma boyutlarını hesaplamak için;

$$\frac{1}{(k+1)\,k} \leq \delta < \frac{1}{(k-1)\,k}$$

olacak şekilde seçelim. Buna göre; $\delta < 1/\,(k-1)\,k$ olduğundan F kümesinin ilk k terimini örtmek için $\delta-$çapına sahip en az k tane küme gerektiğinden $N_\delta\,(F) \geq k$ olup,

$$\frac{\log N_\delta\,(F)}{-\log\delta} \geq \frac{\log k}{\log\left((k+1)\,k\right)}$$

yazılabilir.Bunun yanında $\delta \to 0$ için $k \to \infty$ olacağından

$$\lim_{\delta\longrightarrow 0}\frac{\log N_\delta\,(F)}{-\log\delta} \geq \lim_{k\longrightarrow\infty}\frac{\log k}{\log\left((k+1)\,k\right)}$$
$$\underline{\dim}_B F \geq \frac{1}{2}$$

olarak bulunur.

Diğer taraftan F kümesinin ilk $(k-1)$ terimini $\delta-$çapına sahip kümeler ile örtmek için $(k-1)$ tane küme gereklidir. F kümesinin geri kalan terimleri $[0, \frac{1}{k}]$ aralığında bulunduğundan, bu kalan terimleri $\delta-$çapına sahip kümeler ile örtmek için;

$$\frac{\frac{1}{k}}{\frac{1}{(k+1)k}} = \frac{1}{k}(k+1)k$$
$$= k+1$$

tane küme gereklidir. Bundan dolayı,

$$\begin{aligned} N_\delta F &\leq (k-1)+(k+1) \\ &\leq 2k \end{aligned}$$

olup,

$$\frac{\log N_\delta (F)}{-\log \delta} \leq \frac{\log 2k}{\log((k-1)k)}$$

yazılabilir. $\delta \longrightarrow 0$ *için* $k \longrightarrow \infty$ *olacağından,*

$$\lim_{\delta \longrightarrow 0} \frac{\log N_\delta (F)}{-\log \delta} \leq \lim_{k \longrightarrow \infty} \frac{\log 2k}{\log((k-1)k)}$$

$$\overline{\dim}_B F \leq \frac{1}{2}$$

olarak bulunur. Kutu sayma boyutunun alt ve üst limitleri eşit olduğundan, F kümesi nin kutu sayma boyutu $\dim_B F = 1/2$ *olarak bulunur.*

Aslında, sayılabilir bir kümenin topolojik boyutu sıfıra eşittir. Bu da bize kutu sayma boyutunun sayılabilir kümeler üzerinde yetersiz kaldığını göstermektedir. Bu durumun nedeni; kutu sayma boyutunun tanımlanırken $|U_i| = \delta$ olacak şekilde aynı büyüklükteki yuvarların kullanılmasıdır. Bu yüzden, kutu sayma boyutu sonlu kümeler için alt toplamsallık özelliğini sağlarken, sayılabilir sonsuz kümeler için alt toplamsallık özelliğini sağlamaz. Bu eksikliği gidermek için boyut tanımlanırken kullanılan $|U_i| = \delta$ büyüklüğündeki kümeler yerine $|U_i| \leq \delta$ büyüklüğündeki kümeler kullanılır. Bundan dolayı, sayılabilir sonsuz kümeler içinde alt toplamsallık özelliğinin geçerli olmasını sağlayan boyut hesaplamanın daha genel bir tanımı aşağıdaki gibi verilmektedir.

3.2.3 Hausdorff Boyutu

Tanım 3.2.9. $F \subset \mathbb{R}^n$ *ve* $s \geqslant 0$ *olsun.* $\delta > 0$ *için* $0 \leq |U_i| \leq \delta$ *olacak şekilde* $\{U_i\}$ *ailesi F nin* $\delta-$*örtüsü(cover) olmak üzere;*

$$\mathcal{H}^s_\delta(F) = \inf_{\{U_i\}} \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s \right\}$$

olup

$$\mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta \longrightarrow 0} H^s_\delta(F)$$

*ifadesine F kümesinin s−**boyuttan Hausdorff ölçüsü** denir[2].*

Bu tanıma göre, bir kümenin $s-$boyutlu hausdorff ölçüsü kümeyi örtmek için gerekli en az sayıdaki kümelerin çaplarının s. kuvvetlerinin alınıp toplanmasıyla bulunur.

Bu tanımın altında yatan fikri anlamak için bu tanımı bir doğru veya düzlem gibi geometrik şekillerden ziyade bir fraktala uygulamak gerekir. Bunun için Koch eğrisini göz önüne alalım.

$D = [0,1] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere,

$S_1(x) = \left(\frac{x}{3}, 0\right)$
$S_2(x) = \left(\frac{x}{6} + \frac{1}{3}, \frac{\sqrt{3}x}{6}\right)$
$S_3(x) = \left(\frac{x}{6} + \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}(1-x)}{6}\right)$
$S_4(x) = \left(\frac{x}{3} + \frac{2}{3}, 0\right)$

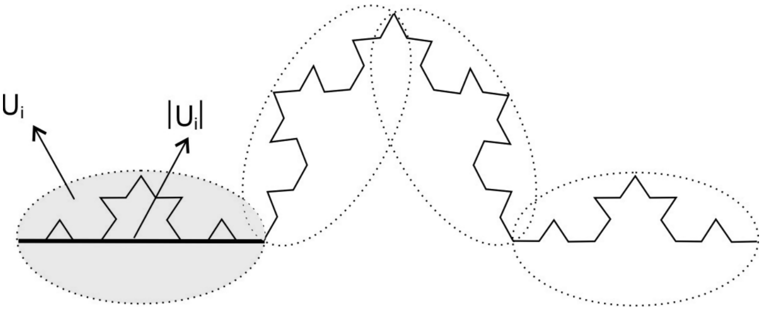
olacak şekilde $\{S_1, S_2, S_3, S_4\}$ büzülme dönüşümleri verilsin. Buna göre, D kümesi üzerinde Koch eğrisi

$$F = \bigcup_{i=1}^{4} S_i(F)$$

olarak tanımlanır.

Koch eğrisinin $\delta = \frac{1}{3}$ için $1-$boyutlu hausdorff ölçüsü

$$\mathcal{H}^1_\delta(F) = \inf_{\{U_i\}} \left\{ \sum_{i=1}^{4} |U_i| \right\}$$

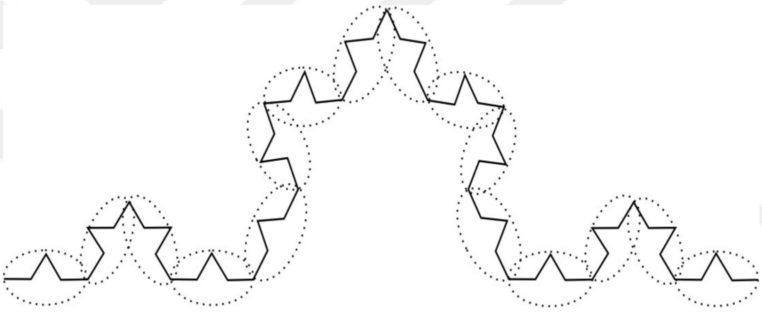


Şekil 3.6. *Koch eğrisnin $\delta = \frac{1}{3}$ için 1−boyutlu hausdorff ölçüsü*

olup,

$$\mathcal{H}^1_\delta(F) = 4.\frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

olarak bulunur.



Şekil 3.7. *Koch eğrisnin $\delta = \frac{1}{9}$ için 1−boyutlu hausdorff ölçüsü*

$\delta = \frac{1}{9}$ için ise,

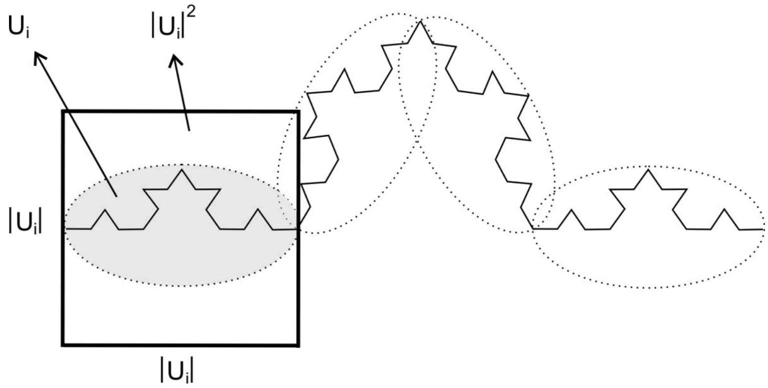
$$\mathcal{H}^1_\delta(F) = \inf_{\{U_i\}} \left\{ \sum_{i=1}^{16} |U_i| \right\} = 16.\frac{1}{9} = \frac{16}{9}$$

olup, $i \longrightarrow \infty$ için $\delta \longrightarrow 0$ olacağından Koch eğrisinin hausdorff ölçüsü

$$\mathcal{H}^1(F) = \lim_{i \longrightarrow \infty} \left(\frac{4}{3}\right)^i = \infty$$

olarak bulunur. Bu sonuç, Koch eğrisinin boyutunun 1 den büyük olduğunu gösterir.

Koch eğrisnin aynı zamanda 2−boyutlu hausdorff ölçüsü de bulunabilir.



Şekil 3.8. *Koch eğrisnin $\delta = \frac{1}{3}$ için 2−boyutlu hausdorff ölçüsü*

Buna göre, $\delta = \frac{1}{3}$ için

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^2_\delta(F) &= \inf_{\{U_i\}} \left\{ \sum_{i=1}^{4} |U_i|^2 \right\} \\ &= 4. \left(\frac{1}{3}\right)^2 \\ &= \frac{4}{9}\end{aligned}$$

olup, $\delta = \frac{1}{9}$ için ise

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^2_\delta(F) &= \inf_{\{U_i\}} \left\{ \sum_{i=1}^{16} |U_i|^2 \right\} \\ &= 16. \left(\frac{1}{9}\right)^2 \\ &= \frac{16}{81}\end{aligned}$$

olarak bulunur. Buradan, $i \longrightarrow \infty$ için $\delta \longrightarrow 0$ olacağından

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^2(F) &= \lim_{i \longrightarrow \infty} \left(\frac{4}{9}\right)^i \\ &= 0\end{aligned}$$

olur. Bu da Koch eğrisinin boyutunun 2 den küçük olduğu anlamına gelir. Bundan dolayı Koch eğrisinin boyutu 1 ile 2 arasında tam sayı olmayan bir değerdir. Hatta irrasyonel bir sayıdır. Aslında bir kümenin boyutundan daha fazla bir boyuta sahip örtü ile örterek ölçüsü bulunduğunda sonuç hep sıfır çıkacaktır. Bunun sebebi bir kümenin ölçümü, $\delta \longrightarrow 0$ durumda elde edilmesindendir. Bu durumu açıklamak için $s > t$ olmak üzere bir F kümesinin iki farklı Hausdorff ölçüsünü göz önüne alalım. Buna göre;

$$\mathcal{H}^s(F) \leq \delta^{s-t}\mathcal{H}^t(F)$$

olup, $i \longrightarrow \infty$ için $\delta \longrightarrow 0$ olacağından $\mathcal{H}^t(F)$ ifadesi sonlu bir değer olduğunda

$$\mathcal{H}^s(F) \leq 0^{s-t}\mathcal{H}^t(F)$$
$$\mathcal{H}^s(F) \leq 0$$

olarak bulunur. Hausdorff ölçüsü bir ölçüm olduğundan, ölçümün tanımından dolayı $\mathcal{H}^s(F) = 0$ olarak elde edilir. Burada sonucun sıfır çıkması $\delta \longrightarrow 0$ ifadesindendir. Bu bize bir doğrunun düzlem ile ölçülemeyeceğini söyler. Aynı zamanda bir düzlem de bir doğru ile ölçülemez. Ölçümün doğru bir şekilde yapılması için ölçmede kullanılacağımız boyut, ölçmek istediğimiz kümenin boyutuna eşit olmalıdır.

Bu örnekte görüldüğü gibi bir kümenin Hausdorff ölçüsünü bulmak aslında kümeyi ölçmede kullanabileceğimiz uygun boyutta bir örtü bulmaktır.

Teorem 3.2.3. *Hausdorff ölçüsü bir dış ölçüdür[11].*

İspat. Teoremi isbatlamak için dış ölçümün gerektirdiği üç özelliği sağladığını göstermek yeterlidir.

i)

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^s(\emptyset) &= \lim_{\delta\longrightarrow 0} \mathcal{H}^s_\delta(\emptyset) \\ &= \inf_{\delta\longrightarrow 0} \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s \right\}, \quad |U_i| \leq \delta \\ &= |\emptyset|^s \\ &= 0^s \\ &= 0 \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

ii) $A \subset B$ olsun. Buna göre;

$$\mathcal{H}^s(A) = \lim_{\delta\longrightarrow 0} \mathcal{H}^s_\delta(A) \leq \lim_{\delta\longrightarrow 0} \mathcal{H}^s_\delta(B) = \mathcal{H}^s(B)$$

olup $\mathcal{H}^s(A) \leq \mathcal{H}^s(B)$ olarak elde edilir.

iii) $\{U_i\} \subset F$ sayılabilir olsun.

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^s(\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i) &= \lim_{\delta\longrightarrow 0} \mathcal{H}^s_\delta(\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i) \\ &\leq \lim_{\delta\longrightarrow 0} \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^s_\delta(U_i) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \lim_{\delta\longrightarrow 0} \mathcal{H}^s_\delta(U_i) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(U_i) \end{aligned}$$

olarak bulunur.

$\square$

Uzunluk, alan hacimin birim özelliği olduğu gibi fraktallar da bu özelliğe sahiptir. Bu özellik aşağıdaki önerme ile verilmektedir.

Önerme 3.2.1. *$F \subseteq \mathbb{R}^n$ ve S dönüşümü $\lambda > 0$ birimine sahip bir benzerlik dönüşümü olsun. Buna göre, $s-$boyutlu Hausdorff ölçüsünün birimi λ^s olur.*

Bundan dolayı, $S(F)$ döşümü, F dönüşümünün birimlendirilmiş hali olmak üzere

$$\mathcal{H}^s(S(F)) = \lambda^s \mathcal{H}^s(F)$$

eşitliği vardır[15].

İspat. $\{U_i\}$ ailesi, F kümesinin bir $\delta-$ örtüsü olsun. Buna göre, $S(F)$ kümesi, F kümesinin λ katı kadar küçültülmesi ile elde edildiğinde $\{V_i\}$ ailesi de $S(F)$ kümesinin bir $\delta\lambda-$örtüsü olur. Bundan dolayı,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty} |V_i|^s &= \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^s |U_i|^s \\ &= \lambda^s \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s\end{aligned}$$

olup, F kümesinin bir $\lambda-$örtüsü aynı zamanda $S(F)$ kümesinin de örtüsüdür. Fakat aynı şey $S(F)$ kümesinin bir örtüsünün, F kümesinin bir örtüsü olması için geçerli değildir. Bu yüzden,

$$\mathcal{H}^s_{\delta\lambda}(S(F)) \leq \lambda^s \mathcal{H}^s_{\delta}(F)$$

eşitsizliği göz önüne alınıp, $\delta \longrightarrow 0$ için

$$\mathcal{H}^s(S(F)) \leq \lambda^s \mathcal{H}^s(F)$$

eşitsizliği elde edilir.

Karşı eşitsizliği elde etmek için ise, $\frac{1}{\lambda}$ oranına sahip S^{-1} ters fonksiyonunu göz önüne alalım. Dikkat edilirse $S^{-1}(S(F))$ kümesi, $S(F)$ kümesinin $\frac{1}{\lambda}$ kadar büyütülmüş halidir. Bundan dolayı, eğer $\{V_i\}$ ailesi, $S(F)$ kümesinin bir $\delta-$ örtüsü ise, $S^{-1}(S(F)) = F$ kümesinin de bir $\frac{\delta}{\lambda}-$örtsü olan bir $\{U_i\}$ ailesi vardır. Buradan,

$$\mathcal{H}^s_{\frac{\delta}{\lambda}}(S^{-1}(S(F))) \leq \left(\frac{1}{\lambda}\right)^s \mathcal{H}^s_{\delta}(S(F))$$

eşitsizliği yazılabilir. Böylece, $\delta \longrightarrow 0$ için

$$\mathcal{H}^s(F) \leq \left(\frac{1}{\lambda}\right)^s \mathcal{H}^s(S(F))$$

$$\lambda^s \mathcal{H}^s(F) \leq \mathcal{H}^s(S(F))$$

eşitsizliği elde edilir. $\square$

Bir kümenin Hausdorff ölçüsünü hesaplamanın bir diğer yolu da kümenin ölçüm değerinin sabit bir sayı ile çarpılmasıyla elde edilir. $\mathcal{L}^n(F)$, F kümesinin $n-$boyutlu Lebesgue ölçümü olmak üzere;

$$\mathcal{H}^n(F) = c_n^{-1}\mathcal{L}^n(F) \tag{3.2.4}$$

ifadesi yardımı ile Hausdorff ölçüsü hesaplanabilir. Buradaki c_n ifadesi, birim çapa sahip $n-$boyutlu yuvarlar olup, n çift olduğunda

$$c_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{2^n\left(\frac{n}{2}\right)!}$$

ve n tek olduğunda

$$c_n = \frac{\pi^{\frac{(n-1)}{2}}\left(\frac{(n-1)}{2}\right)!}{n!}$$

ifadeleri ile hesaplanır[2].

1. Sıfır boyutlu Hausdorff ölçüsü bir kümenin eleman sayısını verir[2].

   Örnek 3.2.5. *$F = \{1, 2, ..., m\}$ kümesinin $0-$boyutlu Hausdorff ölçüsünü bulalım.*

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^0_\delta(F) &= \inf_{\{U_i\}}\left\{\sum_{i=1}^{m}|U_i|^0; \qquad |U_i| \le \delta, \quad \delta > 0\right\}\\
&= \delta^0 + \delta^0 + ... + \delta^0\\
&= 1 + 1 + ... + 1\\
&= m
\end{aligned}$$

   olup, ölçüm değeri kümenin eleman sayısına eşit olmaktadır.

2. Bir boyutlu Hausdorff ölçüsü bir kümenin uzunluğunu verir[2].

Örnek 3.2.6. *(3.2.4) ifadesindeki c_n katsayısını $n = 1$ için hesaplayalım.*

$n = 1$ *için,*

$$
\begin{aligned}
c_1 &= \frac{\pi^{\frac{1-1}{2}}\left(\frac{1-1}{2}\right)!}{1!} \\
&= \frac{\pi^0\,(0)!}{1!} \\
&= \frac{1.1}{1} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

olup,

$$\mathcal{H}^1(F) = \mathcal{L}^1(F)$$

olur. Bu da bir boyutlu Hausdorff ölçüsünün bir boyutlu Lebesgue ölçümüne eşit olduğunu anlamına gelir.

3. $n = 2$ için c_n katsayısı $\frac{\pi}{4}$ olarak elde edildiğinden, bir F kümesinin $2-$boyutlu Hausdorff ölçüsü F kümesinin alanının $\frac{4}{\pi}$ katına eşittir[2].

$$\mathcal{H}^2(F) = \left(\frac{4}{\pi}\right)\mathcal{L}^2(F)$$

4. $n = 3$ için c_n katsayısı $\frac{\pi}{6}$ olarak elde edildiğinden, bir F kümesinin $3-$boyutlu Hausdorff ölçüsü F kümesinin hacminin $\frac{6}{\pi}$ katına eşittir[2].

$$\mathcal{H}^3(F) = \left(\frac{6}{\pi}\right)\mathcal{L}^3(F)$$

Örnek 3.2.7. *Yarıçap uzunluğu 2 br olan kürenin Hausdorff ölçüsünü bulalım.*

F, yarıçapı 2 br olan küre olmak üzere, bu kürenin hacmi

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^3(F) &= \frac{4}{3}\pi r^3 \\
&= \frac{4}{3}\pi 2^3 \\
&= \frac{32}{3}\pi
\end{aligned}
$$

olduğundan, Hausdorff ölçüsü

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^3(F) &= \left(\frac{6}{\pi}\right)\mathcal{L}^3(F)\\ &= \left(\frac{6}{\pi}\right).\frac{32}{3}\pi\\ &= 64\end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu da, yarıçapı 2 *br olan kürenin hacminin çapı* 1 *br olan kürenin hacminin* 64 *katı olduğu anlamına gelir.*

Örnek (3.2.7) den de anşaılacağı üzere Hausdorff ölçüsü, birim çapa sahip $n-$boyutlu yuvarların yardımı ile verilen kümenin ölçülmesidir.

Önerme 3.2.2. *$F \subset \mathbb{R}^n$ ve c>0 ve $\alpha > 0$ sabitleri için f:$F \longrightarrow \mathbb{R}^m$ fonksiyonu*

$$|f(x) - f(y)| \leq c.\,|x-y|^{\alpha}$$

verilsin. Buna göre, her s için,

$$\mathcal{H}^{s/\alpha}(f(F)) \leq c^{s/\alpha}\mathcal{H}^s(F) \tag{3.2.5}$$

yazılabilir[2].

İspat. $\{U_i\}$ kümeler ailesi, F kümesinin bir $\delta-$örtüsü olsun.

$$|f\,(F \cap U_i)| \leq c\,|F \cap U_i|^{\alpha} \leq c\,|U_i|^{\alpha}$$

olduğundan $\varepsilon = c.\delta^{\alpha}$ olmak üzere, $\{f\,(F \cap U_i)\}$ kümeleri ise, $f(F)$ kümesinin bir $\varepsilon-$örtüsü olur. Buna göre;

$$\sum_{i=1}^{\infty} |f\,(F \cap U_i)|^{s/\alpha} \leq c^{s/\alpha}\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^{s}$$

olup

$$\mathcal{H}_{\varepsilon}^{s/\alpha}(f(F)) \leq c^{s/\alpha}\mathcal{H}_{\delta}^s(F) \tag{3.2.6}$$

elde edilir.Yuakarıdaki (3.2.6) ifadesinde $\delta \longrightarrow 0$ için, $\varepsilon \longrightarrow 0$ olup (3.2.5) ifadesi elde edilir. $\square$

Önerme 3.2.3. *$F \subset \mathbb{R}^n$ olmak üzere,*

i) *$s \geq 0$ için $\mathcal{H}^s(F) < \infty$ oluyorsa, her $t > s$ için de $\mathcal{H}^t(F) = 0$,*

ii) *$s \geq 0$ için $\mathcal{H}^s(F) > 0$ oluyorsa, her $t < s$ için de $\mathcal{H}^t(F) = \infty$,*

olarak bulunur[4].

İspat. Hausdorff ölçüsünün tanımına göre,

i)

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^t_\delta(F) &= \inf_{\delta \longrightarrow 0} \sum_i |U_i|^t \\
&= \inf_{\delta \longrightarrow 0} \sum_i |U_i|^{t-s} |U_i|^s \\
&\leq \inf_{\delta \longrightarrow 0} \sum_i \delta^{t-s} |U_i|^s \\
&= \delta^{t-s} \inf_{\delta \longrightarrow 0} \sum_i |U_i|^s \\
&= \delta^{t-s} \mathcal{H}^s_\delta(F)
\end{aligned}$$

olup, $t - s > 0$ olduğundan $\delta^{t-s} \longrightarrow 0$ olur. Aynı zamanda $\mathcal{H}^s(F) < \infty$ olduğundan $\mathcal{H}^t(F) = 0$ olarak bulunur.

ii)

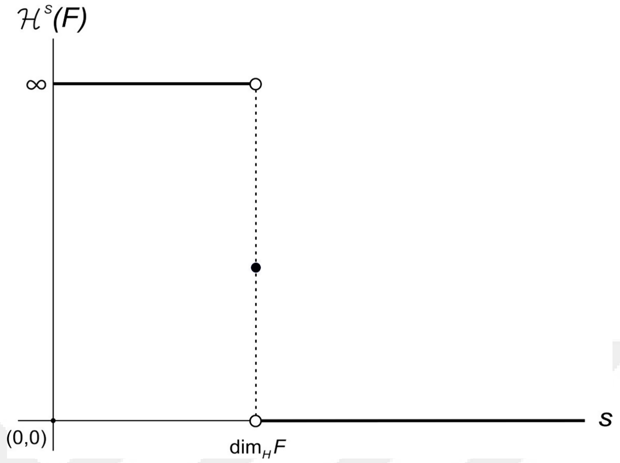
$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^t_\delta(F) &= \inf_{\delta \longrightarrow 0} \sum_i |U_i|^t \\
&= \inf_{\delta \longrightarrow 0} \sum_i |U_i|^{t-s} |U_i|^s \\
&\leq \inf_{\delta \longrightarrow 0} \sum_i \delta^{t-s} |U_i|^s \\
&= \delta^{t-s} \inf_{\delta \longrightarrow 0} \sum_i |U_i|^s \\
&= \delta^{t-s} \mathcal{H}^s_\delta(F)
\end{aligned}$$

olup, $t - s < 0$ olduğundan $\delta^{t-s} \longrightarrow \infty$ olur. Aynı zamanda $\mathcal{H}^s(F) > 0$ olduğundan $\mathcal{H}^t(F) = \infty$ olarak bulunur. □

Tanım 3.2.10. *$F \subset \mathbb{R}^n$ olmak üzere F kümesinin* ***Hausdorff boyutu***

$$\dim_H F = \inf\{s \geqslant 0 : \mathcal{H}^s(F) = 0\} = \sup\{s \geqslant 0 : \mathcal{H}^s(F) = \infty\}$$

olarak tanımlanır[2].



Şekil 3.9. *Bir kümenin s değişkenine göre Hausdorff ölçüsünün grafiği[2]*

Bu tanıma göre, bir F kümesinin Hausdroff ölçüsü,

$$\mathcal{H}^s(F) = \begin{cases} \infty & 0 \leq s < \dim_H F \\ 0 & \quad s > \dim_H F \end{cases}$$

olup, s değişkenin bir fonksiyonudur. Bu fonksiyonun, ∞ değerinden 0 değerine sıçradığı $s = \dim_H F$ değerine F kümesinin Hausdorff boyutu denir.

Önerme (3.2.2) ile kümeler üzerinde tanımlanan genel dönüşümlerin Hausdorff ölçüsüne etkisi verildiği gibi Hausdorff boyutuna etkisi de aşağıdaki önerme ile verilir.

Önerme 3.2.4. *$F \subset \mathbb{R}^n$ olsun. $\forall x, y \in F$ için*

$$|f(x) - f(y)| \leq c\,|x - y|^{\alpha}$$

şartını sağlayan $f : F \longrightarrow \mathbb{R}^m$ dönüşümü verilsin. Buna göre,

$$\dim_H f(F) \leq \frac{1}{\alpha}\dim_H F$$

eşitsizliği yazılabilir[2].

İspat. $\dim_H F \leq s$ olarak alalım. O halde, önerme (3.2.2) den dolayı

$$\mathcal{H}^{s/\alpha}(f(F)) \leq c^{s/\alpha}\mathcal{H}^s(F)$$

eşitsizliği yazılabilir. $\dim_H F \leq s$ olması $\mathcal{H}^s(F) = 0$ olmasını gerektirdiğinden,

$$\mathcal{H}^{s/\alpha}(f(F)) \leq 0$$

olarak bulunur. Bu da,

$$\dim_H f(F) \leq \frac{s}{\alpha}$$

olduğunu gösterir. Buradan, $f(F)$ kümesinin Hausdorff boyutunu, F kümesinin Hausdorff boyutunun $1/\alpha$ katına eşit olduğu anlaşılır. □

Sonuç 3.2.1. *$F \subset \mathbb{R}^n$ olsun. $\forall x, y \in F$ için*

$$|f(x) - f(y)| \leq c\,|x - y|^\alpha$$

şartını sağlayan $f : F \longrightarrow \mathbb{R}^m$ dönüşümü verilsin. Buna göre,

1. $\alpha = 1$ için $\dim_H f(F) \leq \dim_H F$,

2. $\alpha = 1$ ve $0 < c_1 \leq c_2 < \infty$ için

$$c_1\,|x - y| \leq |f(x) - f(y)| \leq c_2\,|x - y| \qquad (3.2.7)$$

   şartını sağlıyor ise, $\dim_H f(F) = \dim_H F$

   olarak bulunur[2].

Yukarıdaki sonuca göre, (3.2.7) eşitsizliği altında Hausdorff boyutu invaryanttır. Bundan dolayı iki kümenin boyutunun eşit olup olmadığını anlamak için (3.2.7) eşitsizliğini sağlayıp sağlamadığına bakılır.

Örnek 3.2.8. *$F \subset \mathbb{R}$ olsun. $F = [0, 1]$ kümesinin Hausdorff boyutunu hesaplayalım.*

F kümesinin bir $\delta = \frac{1}{n}$ *örtüsünü göz önüne alalım.* $0 \leq |U_i| \leq \delta$ *olmak üzere,* $\{U_i\}$ *ailesi F kümesinin* $\delta-$ *örtüsü olsun. Buna göre, F kümesinin Hausdorff ölçüsü*

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^s_{\delta \longrightarrow 0}(F) &= \inf_{\{U_i\}} \left\{ \lim_{n \longrightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n} |U_i|^s \right\} \\
&= \inf_{\{U_i\}} \left\{ \lim_{n \longrightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{1}{n} \right|^s \right\} \\
&= \lim_{n \longrightarrow \infty} n. \left(\frac{1}{n} \right)^s \\
&= \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{n}{n^s}
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu ifadeyi s parametresinin bir fonksiyonu olarak ele alırsak;

$$\mathcal{H}^s(F) = \begin{cases} \infty, & 0 \leq s < 1 \\ 1, & s = 1 \\ 0, & s > 1 \end{cases}$$

ifadesinden $\dim_H F = 1$ *olarak bulunur.*

Örnek 3.2.9. *F, üçlü Cantor kümesi olmak üzere; F kümesinin Hausdorff (ölçü) boyutunu hesaplayalım.*

F kümesi k. adımda 3^{-k} *uzunluğuna sahip* 2^k *tane aralık içerdiğinden, F kümesini k. adımda* 3^{-k} *uzunluğa sahip* 2^k *tane parça ile örtebiliriz. Buna göre F kümesinin Hausdorff ölçüsü;*

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^s_{\delta \longrightarrow 0}(F) &= \inf_{\{U_i\}} \left\{ \lim_{k \to \infty} \sum_{i=1}^{2^k} |U_i|^s \right\} \\
&= \inf_{\{U_i\}} \left\{ \lim_{k \to \infty} \sum_{i=1}^{2^k} \left|3^{-k}\right|^s \right\} \\
&= \lim_{k \to \infty} \left(2^k\right) \left(3^{-ks}\right) \\
&= \lim_{k \to \infty} \left(\frac{2}{3^s} \right)^k
\end{aligned}$$

olarak bulunur. F kümesinin Hausdorff boyutunu bulmak için son ifadenin değeri 0 ile ∞ arasında bir sayı olmalıdır. Bundan dolayı;

$$\frac{2}{3^s} = 1$$

olması gerekip,

$$2 = 3^s$$

$$\log 2 = \log 3^s$$

$$\log 2 = s. \log 3$$

$$s = \frac{\log 2}{\log 3}$$

olarak bulunur.

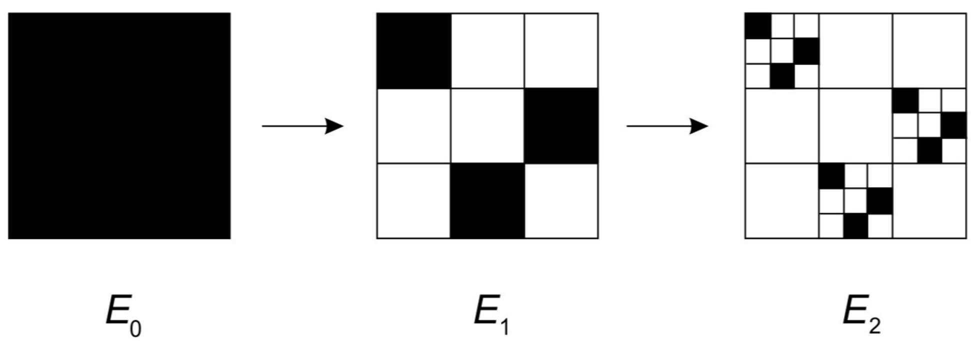
Örnek 3.2.10. *$E = [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$ olsun. $S_i : E \longrightarrow E$ olmak üzere,*

$S_1(x,y) = \left(\frac{x}{3}, \frac{y}{3} + \frac{2}{3}\right)$

$S_2(x,y) = \left(\frac{x}{3} + \frac{1}{3}, \frac{y}{3}\right)$

$S_3(x,y) = \left(\frac{x}{3} + \frac{2}{3}, \frac{y}{3} + \frac{1}{3}\right)$

olacak şekilde S_1, S_2 ve S_3 büzülme dönüşümleri verilsin.



Şekil 3.10. Boyutu tamsayı olan fraktalın inşası[12]

E kümesi üzerinde $\{S_1, S_2, S_3\}$ büzülme dönüşümleri tarafından tanımlanan TFS için,

$$F = \bigcup_{i=1}^{3} S_i(F)$$

olan F fraktalının Hausdorff boyutunu hesaplayalım[12].

F kümesinin Hausdorff boyutu, Hausdorff ölçüsü yardımı ile hesaplandığından $s \geq 0$ ve $\delta > 0$ için $\{U_i\}$ ailesi F kümesinin $\delta-$örtüsü olmak üzere;

$$\mathcal{H}_\delta^s(F) = \inf_{\{U_i\}} \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s \right\}$$

olup, eğer $|U_i| \leq \delta$ yerine $|U_i| = \delta$ alınırsa

$$\mathcal{H}_\delta^s(F) \leq \inf_{\{U_i\}} \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s \right\}$$

olarak bulunur. F fraktalı k. adımda 3^k tane $\sqrt{2}.3^{-k}$ çapında yuvar ile örtüleceğinden

$$\mathcal{H}_\delta^s(F) \leq \lim_{k \longrightarrow \infty} 3^k. \left(\sqrt{2}.3^{-k}\right)^s$$

olup, bu ifade $s = 1$ için $\mathcal{H}^1_{\delta \longrightarrow 0}(F) \leq \sqrt{2}$ olarak bulunduğundan $\dim_H F \leq 1$ olur.

Ayrıca, F kümesinin $x-$eksenine ortogonal projeksiyonu $proj(F) = [0,1]$ olduğundan

$$1 = \mathcal{L}^1 [0,1] = \mathcal{H}^1([0,1]) = \mathcal{H}^1(projF) \leq \mathcal{H}^1(F)$$

olarak bulunduğundan $\dim_H F \geq 1$ olur.

Sonuç olarak, $\dim_H F \leq 1$ ve $\dim_H F \geq 1$ olduğundan $\dim_H F = 1$ olarak bulunur.

Örnek 3.2.11. *F kümesi üçlü Cantor kümesi olmak üzere, F kümesinin Hausdorff (ölçü) boyutunu önerme (3.2.1) yardımı ile hesaplayalım[2].*

Üçlü Cantor kümesinin Hausdorff boyutunu önerme (3.2.1) yardımı ile daha kolay bir şekilde hesaplayabiliriz. Bunun için, F kümesini $F_L = F \cap \left[0, \frac{1}{3}\right]$ ve $F_R = F \cap \left[\frac{2}{3}, 1\right]$ olacak şekilde $\frac{1}{3}$ oranında küçültülmüş iki ayrık parçaya ayıralım. Böylece, $F = F_L \cap F_R$ olarak ifade edilebilir. Bundan *dolayı, önerme (3.2.1) ile,*

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^s(F) &= \mathcal{H}^s(F_L) + \mathcal{H}^s(F_R) \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^s \mathcal{H}^s(F) + \left(\frac{1}{3}\right)^s \mathcal{H}^s(F) \\ &= 2\left(\frac{1}{3}\right)^s \mathcal{H}^s(F)\end{aligned}$$

yazılabilir.

F kümesinin Hausdorff boyutu $\dim_H F = s$ değeri için $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$ olacak şekilde bir değere sahip olduğundan,

$$\mathcal{H}^s(F) = 2\left(\frac{1}{3}\right)^s \mathcal{H}^s(F) \tag{3.2.8}$$

yazılıp, (4.2.10) eşitliğinin her iki tarafı $\mathcal{H}^s(F)$ değerine bölünürse,

$$\begin{aligned}1 &= 2\left(\frac{1}{3}\right)^s \\ 3^s &= 2\end{aligned}$$

olup, eşitliğin her iki tarafının logaritması alınırsa,

$$\begin{aligned}\log 3^s &= \log 2 \\ s.\log 3 &= \log 2 \\ s &= \frac{\log 2}{\log 3}\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Teorem 3.2.4. *Herhangi bir sayılabilir kümenin Hausdorff boyutu sıfırdır.*

İspat. $F = \{x_n; n \geq 1\}$ sayılabilir kümesini göz önüne alalım. F kümesi, sayılabilir olduğundan herbir elemanı $\delta_n = \frac{\delta}{2}\frac{1}{2^n}$ olacak şekilde açıklar ile örtülebilir. Bundan dolayı, $0 < \delta_n < \delta$ olacak şekilde F kümesinin herbir elemanı için bir δ_n seçilebilir. Buna göre; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$ olduğu göz önünde bulundurulursa,

F kümesinin Hausdorff ölçüsü,

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^s_{\delta\to 0}(F) &= \inf_{\{U_n\}}\left\{\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}|U_n|^s\right\}\\
&= \inf_{\{U_n\}}\left\{\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}|\delta_n|^s\right\}\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\delta}{2}\frac{1}{2^n}\right|^s\\
&= \left(\frac{\delta}{2}\right)^s\\
&< \delta^s
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu ifadeyi s nin bir fonksiyonu olarak ele alıp, s parametresinin değişimini incelersek, $s > 0$ için ifade sıfır değerine eşit olur. Hausdorff boyutunun tanımı gereği $s > \dim_H F$ olduğunda sıfır olduğundan F kümesinin Hausdorff boyutu tanım gereği sıfır olarak bulunur. $\square$

4. BOYUT HESAPLAMA TEKNİKLERİ

Fraktalların boyutlarının hesaplanması, klasik geometrideki geometrik şekillerin boyutlarının hesaplanması kadar kolay değildir. Bundan dolayı, fraktal boyutun hesaplanması veya tahmin edilmesi için bazı teknikler geliştirilmiştir. Bu teknikler ile fraktalların boyutlarının tahmin edilmesi, genellikle boyut için bir alt sınır ve bir üst sınır değeri elde edilmesi ile yapılır.

4.1 Basit Teknikler

Boyut için bir üst sınır değeri, kutu sayma metodu kullanılarak elde edilebilir. Aşağıdaki önerme, Hausdorff boyutu ve kutu sayma boyutu arasındaki ilişki yardımı ile boyuta bir üst değerin nasıl bulunabileceğini ifade etmektedir.

Önerme 4.1.1. *Bir F kümesinin, $k \longrightarrow \infty$ için $\delta_k \longrightarrow 0$ olacak şekildeki en çok δ_k-çaplı n_k tane küme tarafından örtülebildiğini kabul edelim. Bu durumda,*

$$\dim_H F \leq \underline{\dim}_B F \leq \underline{\lim}_{k \longrightarrow \infty} \frac{\log n_k}{-\log \delta_k}$$

dır. Üstelik, $k \longrightarrow \infty$ için $n_k \delta_k^s$ sınırlı ise bu durmda $\mathcal{H}^s(F) < \infty$ dır. Eğer $0 < c < 1$ için $\delta_k \longrightarrow 0$ iken $\delta_{k+1} \geq c\delta_k$ ise, bu durmda da,

$$\overline{\dim}_B F \leq \overline{\lim}_{k \longrightarrow \infty} \frac{\log n_k}{-\log \delta_k}$$

dır[2].

İspat. F kümesi $s-$boyutlu sonlu bir küme olsun. Bu durumda F kümesi önermeye göre en çok δ_k-çapına sahip n_k tane küme ile örtüldüğünden, Hausdorff ölçüsü tanımı gereği

$$\mathcal{H}^s_{\delta \to 0}(F) = \inf_{\{U_i\}} \left\{ \lim_{k \to \infty} \sum_{k=1}^{\infty} |U_i|^s \right\}$$

olup, bu tanımda $|U_i| \leq \delta_k$ yerine $|U_i| = \delta_k$ alınırsa

$$\mathcal{H}^s_{\delta_k}(F) \leq N_{\delta_k}(F)\delta_k^s \tag{4.1.1}$$

ifadesi yazılabilir. F kümesinin hausdorff ölçümü sabit bir sayı olacağından, (4.1.1) ifadesinin logaritması alınırsa

$$\log N_{\delta_k}(F) + s\log\delta_k \geq 0$$

$$-s.\log\delta_k \leq \log N_{\delta_k}(F)$$

olup, $k \to \infty$ iken $\delta \to 0$ olduğundan

$$s \leq \underline{\lim}_{\delta\to 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log\delta} \leq \underline{\lim}_{k\to\infty} \frac{\log N_{\delta_k}(F)}{-\log\delta_k}$$

olarak bulunur. Buradan da

$$\dim_H F \leq \underline{\dim}_B F \leq \underline{\lim}_{k\longrightarrow\infty} \frac{\log n_k}{-\log\delta_k}$$

eşitsizliği elde edilir.

Ayrıca F kümesi, δ_k-çapında n_k tane küme ile örtülebildiğinden,

$$\mathcal{H}^s_{\delta_k}(F) \leq n_k\delta_k^s$$

olup

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} \mathcal{H}^s_{\delta_k}(F) \leq \underline{\lim}_{k\longrightarrow\infty} n_k\delta_k^s$$

$$\mathcal{H}^s(F) \leq \underline{\lim}_{k\longrightarrow\infty} n_k\delta_k^s$$

ifadeleri yazılabilir. Buradan da, $k \to \infty$ için $n_k\delta_k^s$ sınırlı olduğundan $\mathcal{H}^s(F) < \infty$ olduğu elde edilir.

En son olarak da, F kümesinin k. adımdaki kutu sayma boyutunun üst limitini veren ifadeyi elde etmemiz gereklidir. Bunun için ise, $0 < c < 1$ ve $\delta_{k+1} \geq c\delta_k$ olmak üzere, $\delta_{k+1} \leq \delta < \delta_k$ aralığı seçilirse

$$\frac{\log N_\delta(F)}{-\log\delta} \leq \frac{\log N_{\delta_{k+1}}(F)}{-\log\delta_k} = \frac{\log N_{\delta_{k+1}}(F)}{-\log\delta_{k+1} + \log\left(\frac{\delta_{k+1}}{\delta_k}\right)} \leq \frac{\log N_{\delta_{k+1}}(F)}{-\log\delta_{k+1} + \log c}$$

ifadesi yazılabilir. Buradan da

$$\overline{\lim_{\delta\to 0}}\frac{\log N_\delta(F)}{-\log\delta} \leq \overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{\log N_{\delta_k}(F)}{-\log\delta_k}$$

elde edilir ki, bu da

$$\overline{\dim}_B F \leq \overline{\lim_{k\longrightarrow\infty}}\frac{\log n_k}{-\log\delta_k}$$

olup, bizden istenilen ifadedir. □

Bu teorem, Hausdorff boyutu ile kutu sayma boyutu arasındaki ilişkiyi gösterilerek, Hausdorff boyutu için kolay bir şekilde üst sınır bulmayı sağlamaktadır.

Örnek 4.1.1. *Önerme (4.1.1) ile üçlü Cantor kümesinin Hausdorff boyutu için bir üst sınır değeri bulalım.*

Cantor kümesinin k. adımda 3^{-k} *çapına sahip* 2^k *tane küme ile örtüleceğinden,*

$$\dim_H F \leq \underline{\dim}_B F \leq \overline{\dim}_B F \leq \lim_{k\to\infty}\frac{\log n_k}{-\log\delta_k} \tag{4.1.2}$$

olduğundan, $n_k = 2^k$ *ve* $\delta_k = 3^{-k}$ *ifadeleri (4.1.2) eşitsizliğinde yerine yazılırsa*

$$\dim_H F \leq \frac{\log 2}{\log 3}$$

değeri elde edilir.

Bir fraktalın boyutunun bir alt sınırını bulmak ise, üst sınırı bulmak kadar kolay değildir. Çünkü; alt sınırı bulmak için verilen kümenin tüm $\delta > 0$ olan örtülerinin Hausdorff ölçüsünün, belirli bir pozitif sayıdan büyük olduğunu göstermek gereklidir. Bu göstermek yerine, küme üzerine uygun bir olasılık ölçümü tanımlanarak Hausdorff ölçüsünün belirli bir pozitif sayıdan büyük olduğu gösterilerek boyut için bir alt sınır elde edilmesi daha kolaydır.

Önerme 4.1.2. *F kümesi üzerinde sonlu bir ölçüm* μ *ve* $c > 0$ *ve* $\delta > 0$ *olsun.* $\delta > 0$ *için* $\{U_i\}$ *ailesi F nin* $\delta-$*örtüsü olmak üzere, her* U_i *için*

$$\mu(U_i) \leq c\,|U_i|^s \tag{4.1.3}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa,

$$\mathcal{H}^s(F) \geq \frac{\mu(F)}{c}$$

ve

$$s \leq \dim_H F \ \leq \underline{\dim}_B F \leq \overline{\dim}_B F$$

eşitsizlikleri yazılabilir[2].

İspat. $\{U_i\}$ F kümesinin (4.1.3) şartını sağlayan bir örtüsü olsun. Buna göre,

$$0 < \mu(F) \leq \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(U_i) \leq c\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s$$

ifadesi ölçümün özellikleri yardımı ile yazılabilir. $\delta \longrightarrow 0$ için,

$$\mu(F) \leq c\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s$$

olup, bu ifadeden de

$$\begin{aligned} \mu(F) &\leq c \inf_{\{U_i\}} \left\{ \lim_{\delta \longrightarrow 0} \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s \right\} \\ \mu(F) &\leq c\mathcal{H}^s(F) \\ \mathcal{H}^s(F) &\geq \frac{\mu(F)}{c} \end{aligned}$$

olarak bulunur. $\mu(F) > 0$ olduğundan $\mathcal{H}^s(F) > 0$ olup, $\dim_H F \geq s$ olur. □

Önerme (4.1.2) yardımı ile $\dim_H F \geq s$ ifadesi elde edilerek Hausdorff boyutu için bir alt sınır kolay bir şekilde elde edilebilir.

Örnek 4.1.2. *Teorem (4.1.2) ile üçlü Cantor kümesinin Hausdorff boyutu için bir alt sınır değeri bulalım[2].*

Cantor kümesi k. adımda 3^{-k} uzunluğuna sahip 2^k tane parçaya ayrıldığından, k. adımda fraktalı F_k belirtmek üzere, F_k fraktalının her bir parçasının ölçüsü 2^{-k} olur. Ayrıca, k. adımda fraktalı örtmek için $3^{-(k+1)} \leq \delta < 3^{-k}$ olacak şekilde bir $\delta-$örtüsü seçebiliriz. Buna göre; bu örtünün herhangi bir U kümesi, F_k fraktalının en fazla bir parçası ile kesişeceğinden,

$$\mu(U) \leq 2^{-k} = \left(3^{\log_3^2}\right)^{-k} = \left(3^{\log 2/\log 3}\right)^{-k} = \left(3^{-k}\right)^{\log 2/\log 3} \leq \left(3\,|U|\right)^{\log 2/\log 3}$$

olup, önerme (4.1.2) yardımı ile de

$$\mathcal{H}^{\log 2/\log 3}(F) \geq \frac{1}{3^{\log 2/\log 3}}$$
$$\geq 3^{-\log 2/\log 3}$$
$$\geq \frac{1}{2}$$

olarak bulunur. Bundan dolayı, $\dim_H F \geq \frac{\log 2}{\log 3}$ *olarak bulunur.*

Önerme (4.1.2) ile boyut için bir alt sınır değeri elde edildi. Bu önerme, önermedeki μ ölçümü yerine yerel yoğunluk şartını sağlayan bir ölçüm belirlenebilirse, Hausdorff ölçümü ve Hausdorff boyutu için hem alt sınır hem de üst sınır için değer bulmada kullanılabilir.

Lemma 4.1.1. $\mathbb{R}^n$ *de sınırlı bir bölgenin içerdiği açık yuvarların ailesi* $\mathcal{C}$ *olsun.* $B \in \mathcal{C}$ *kümesinin öyle bir sonlu veya sayılabilir ayrık alt ailesi vardır ki,*

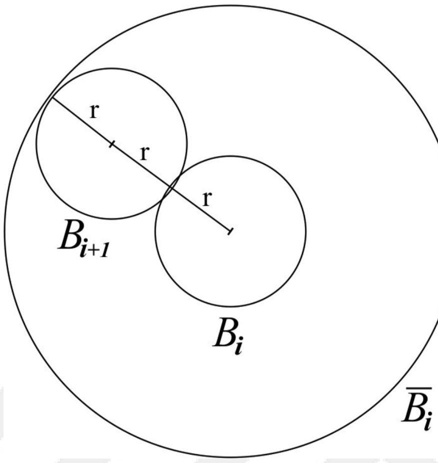
$$\bigcup_{B\in\mathcal{C}} B \subset \bigcup_{i} \widetilde{B}_i \tag{4.1.4}$$

olacak şekilde bir $\left\{\widetilde{B}_i\right\}$ *alt ailesi vardır. Burada* $\widetilde{B}_i$ *kapalı yuvarları,* B_i *yuvarları ile aynı merkeze ve üç kat veya daha büyük yarıçapa sahiptirler[2].*

İspat. Basitlik için, ispat $\mathcal{C}$ nin sonlu bir ailesi için verilecektir. Bu ispat aynı zamanda genel durum için de geçerlidir. $\mathcal{C}$ deki yuvarların ayrık olduğunu tümevarım yöntemi ile gösterilim. B_1 yuvarı, $\mathcal{C}$ deki en büyük yarıçaplı yuvar olmak üzere, $B_1, B_2, ..., B_{k-1}$ tane bir birini kesmeyen ayrık kümelerin seçimini yapdığımızı varsayalım. B_k yuvarını, $B_1, B_2, ..., B_{k-1}$ yuvarları ile kesişmeyecek şekildeki en büyük yuvar olarak ya da yuvarlardan biri olarak seçelim. Bu işlemi hiçbir ayrık yuvar kalmayana kadar devam ettirelim. Gerçekten seçtiğimiz tüm B_i yuvarları ayrıktır. Çünkü; $B \in \mathcal{C}$ ise ya $B = B_i$ olacak şekilde bir B_i yuvarı vardır ya da B yuvarı $|B_i| \geq |B|$ olacak şekilde bir B_i yuvarlarından biri ile kesişir. Her iki durumun da olmadığı durumda ise, B yuvarı, $|B_k| < |B|$ olacak şekildeki ilk

B_k yuvarının yerine seçilebilir. Bu da $\mathcal{C}$ ailesinden sayılabilir yada sonlu bir ayrık alt aile seçilebileceğini gösterir.

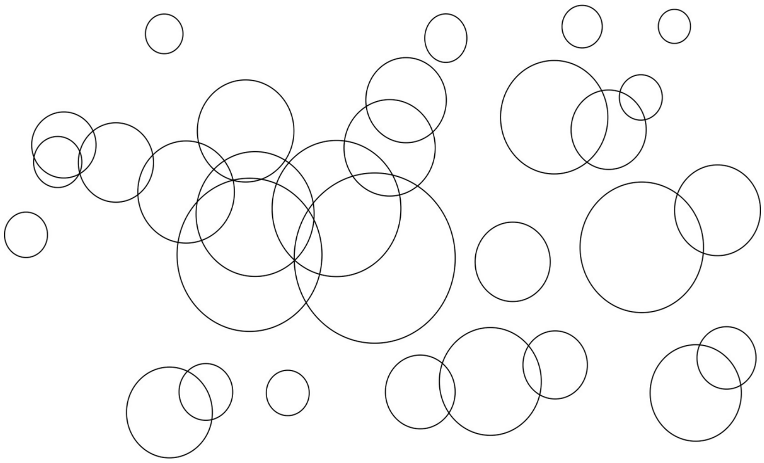
Ayrıca, $B \in \mathcal{C}$ kümesinin bir $|B_i| = r$ ve $|B_{i+1}| \leq r$ olacak şekilde keşisen iki kümesini göz önüne alalım.



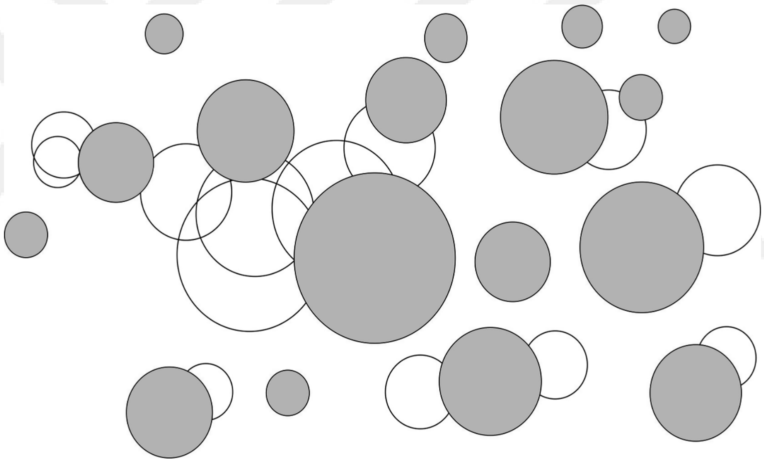
Şekil 4.1: *Aynı merkeze sahip $\widetilde{B_i}$ yuvarlarının, B_i yuvarlarını örtmesi için en az üç kat büyüklüğünde yarıçapa sahip olması*

Buna göre, $x \in B_i$ olmak üzere, $B_i \cup B_{i+1}$ kümesi merkezi x ve yarıçapı en az $3r$ olan bir kapalı yuvar ile örtülebiilir. Buda, $\widetilde{B_i}$ kapalı yuvarlarının, B_i yuvarları ile aynı merkeze ve en az üç kat büyük yarıçapa sahip olduğunu gösterir. $\square$

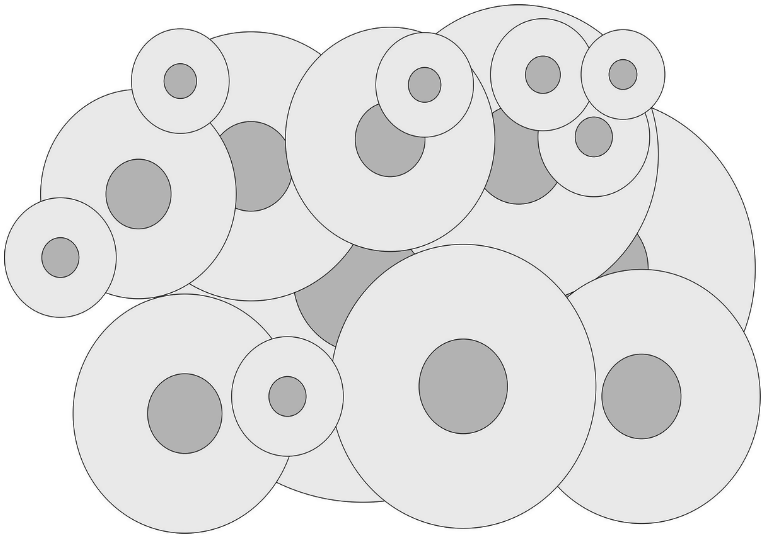
Lemma (4.1.1), verilen bir açık yuvar ailesinden ayrık bir alt aile seçilebileceğini ve bu seçilen ayrık yuvarların üç veya daha fazla katta yarıçapa ve aynı merkeze sahip kapalı yuvarları ile açık yuvar ailesinin örtülebileceğini ifade etmektedir.



Şekil 4.2. *Açık yuvarların ailesi* C



Şekil 4.3. C *ailesinden seçilen sonlu veya sayılabilir ayrık* B_i *kümeleri*



Şekil 4.4: *C ailesinden seçilen ayrık B_i kümeleri ile aynı merkeze ve 3 kat büyük yarıçapa sahip $\widetilde{B_i}$ kümeleri ile C ailesinin örtülmesi*

Böylece ayrık yuvarların ölçümü ile açık yuvar ailesinin ölçümü için sınır değer elde edilebilir. Bundan dolayı, Lemma (4.1.1) yardımı ile Hausdorff ölçüsü için alt ve üst sınır değerleri hesaplanarak verilen bir kümenin Hausdorff boyutu belirlenebilir. Bu boyut hesaplama tekniği önerme (4.1.3) ile verilmektedir.

Önerme 4.1.3. *$F \subset \mathbb{R}^n$ bir Borel kümesi ve μ ölçümü $\mathbb{R}^n$ üzerinde bir Borel ölçümü olsun. $0 < c < \infty$ bir sabit olmak üzere,*

(a) Her $x \in F$ için $\overline{\lim}_{r \longrightarrow 0} \mu(B(x,r))/r^s < c$ olduğunda $\mathcal{H}^s(F) \geq \mu(F)/c$,

(b) Her $x \in F$ için $\overline{\lim}_{r \longrightarrow 0} \mu(B(x,r))/r^s > c$ olduğunda $\mathcal{H}^s(F) \leq 2^s \mu(F)/c$,

olarak elde edilir[2].

İspat. **(a)** Her bir $\delta > 0$ için

$$F_\delta = \{x \in F : \mu(B(x,r)) < cr^s \quad , \quad 0 < r \leq \delta\}$$

olarak tanımlayalım. $\{U_i\}$ ailesi F kümesinin bir $\delta-$örtüsü olsun. Her bir U_i açığı F_δ nin bir x noktasını içerdiğinden ve x merkezli $|U_i|$ yarıçaplı bir B yuvarı da U_i leri içerdiğinden,

$$\mu(U_i) \leq \mu(B) < c\,|U_i|^s$$

ifadesi F_δ nin tanımından yazılabilir. Bundan dolayı,

$$\mu(F_\delta) \leq \sum_i \{\mu(U_i) : U_i \text{ nin } F_\delta \text{ ile kesişimi}\} \leq c\sum_i |U_i|^s$$

olur. $\{U_i\}$ ailesi F nin herhangi bir $\delta-$örtüsü olduğundan $\mu(F_\delta) \leq c\mathcal{H}^s_\delta(F) \leq c\mathcal{H}^s(F)$ yazılabilir. $\delta \longrightarrow 0$ için $F_\delta \longrightarrow F$ olacağından $\mu(F) \leq c\mathcal{H}^s(F)$ elde edilir.

(b) Basitlik için ıspatı yaparken 2^s yerine 8^s alalım. Varsayalım ki F sınırlı olsun. $\delta > 0$ ve $\mathcal{C}$ yuvarlar ailesi olmak üzere

$$\{B(x,r) : x \in F \quad , \quad 0 < r \leq \delta \text{ ve } \mu(B(x,r)) > cr^s\}$$

olsun. Buna göre, (b) deki hipotez gereğince $F \subset \bigcup_{B\in\mathcal{C}} B$ yazılabilir. Lemma (4.1.1) göre $B_i \in \mathcal{C}$ olacak şekilde ayrık B_i altailesi $\bigcup_{B\in\mathcal{C}} B \subset \bigcup_i \widetilde{B}_i$ olacak şekilde vardır ve $\widetilde{B}_i$ kapalı yuvarların yarıçapı, B_i ayrık yuvarlarının yarıçapının dört katıdır. Bundan dolayı, $\left\{\widetilde{B}_i\right\}$ ailesi F kümesinin bir $8\delta-$örtüsü olup

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^s_{8\delta}(F) &\leq \sum_i \left|\widetilde{B}_i\right|^s \leq 4^s\sum_i |B_i|^s \\ &\leq 8^s c^{-1}\sum_i \mu(B_i) \leq 8^s c^{-1}\mu(\mathbb{R}^n)\end{aligned}$$

ifadesi yazılabilir. $\delta \longrightarrow 0$ için

$$\mathcal{H}^s(F) \leq 8^s c^{-1}\mu(\mathbb{R}^n) < \infty$$

olarak elde edilir.

□

4.2 Örtük Method

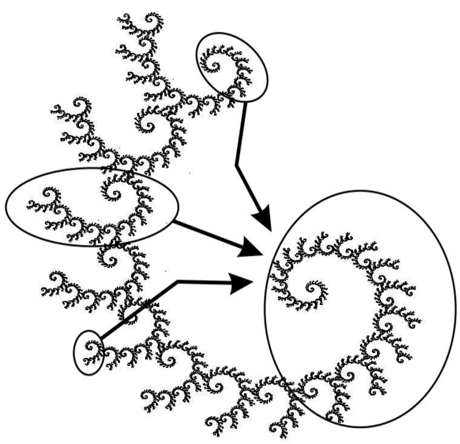
Bir F kümesinin Hausdorff boyutunu bulmak için, kümenin Hausdorff ölçüsü olan $\mathcal{H}^s(F)$ ifadesinin hangi s değeri için sonsuzdan sıfıra sıçradığına bakılır.

Bu şekilde bir hesaplama yerine bu method yardımıyla kendi kendine benzerlik özelliği açıkça belirli olan fraktallarda belirli şartlar sağlandığında s değerini doğrudan hesaplamaya gerek kalmadan bulunabilir. Bundan dolayı bu yönteme örtük method denir. Bu method aşağıda ifade edilen bir birini tamamlayıcı iki teorem ile verilmektedir.

Teorem 4.2.1. *$F \subset \mathbb{R}^n$ boş olmayan kompakt bir küme, $a > 0$ ve $r_0 > 0$ olsun. $|U| < r_0$ olacak şekildeki her U kümesi ile F kümesinin kesişimi, $\forall x, y \in F \cap U$ için*

$$a\,|U|^{-1}\,|x-y| \leq |g(x)-g(y)| \tag{4.2.1}$$

şartını sağlayan $g : F \cap U \longrightarrow F$ bir dönüşüm olarak ifade edilebiliyorsa, $s = \dim_H F$ olmak üzere; $\mathcal{H}^s(F) \geq a^s > 0$ ve $\underline{\dim}_B F = \overline{\dim}_B F = s$ ifadeleri yazılabilir[3].



Şekil 4.5: *Bir F kümesinin Teorem (4.2.1) ile küçük parçalarının kendisine eşitlenmesi[3]*

İspat. Teoremin ısbatı omayana eğri yöntemi ile yapılacaktır. $\forall\ s > 0$ için $\mathcal{H}^s(F) < a^s$ olduğunu kabul edelim. Buna göre F kümesi ile kesişen bir $\{U_i\}$ ailesi bulunabileceğinden $F \subset \bigcup_{i=1}^{m} U_i$ ve $\sum_{i=1}^{m} |U_i|^s < a^s$ ifadeleri yazılabilir. Teoreme göre, $a > 0$ olduğundan $\sum\limits_{i=1}^{m} |U_i|^s$ toplamı pozitif bir sayıya eşit olur. Bundan dolayı, eğer $|U_i| \leq \delta$ ise

$$\sum_{i=1}^{m} |U_i| \leq m.\delta^s$$

ifadesi yazılabileceğinden $\overline{\dim}_B F < s$ olarak bulunur. Ayrıca,

$$\dim_H(F) \leq \underline{\dim}_B(F) \leq \overline{\dim}_B(F)$$

ifadesinden dolayı $\dim_H(F) < s$ olduğu açıktır. Bundan dolayı, teoremi isbatlamak için $t < s$ olacak şekilde s değerine çok yakın bir t değeri seçildiğinde $\overline{\dim}_B F \leq \dim_H F$ eşitsizliğinin elde edilmesi yeterlidir.

$\mathcal{H}^s(F) < a^s$ olarak kabul etdiğimizde, $F \subset \bigcup\limits_{i=1}^{m} U_i$ ve $\sum\limits_{i=1}^{m} |U_i|^s < a^s$ olacak şekilde F kümesiyle kesişen $U_1, U_2, ..., U_m$ kümeleri vardır. Bundan dolayı $0 < t < s$ olacak şekilde s değerine yakın bir t değeri aldığımızda

$$a^{-t} \sum_{i=1}^{m} |U_i|^t < 1 \qquad (4.2.2)$$

eşitsizliği elde edilir.

Ayrıca, hipotezden $g_i : F \cap U_i \longrightarrow F \quad (i = 1, 2, ..., m)$ olacak şekilde

$$|x - y| \leq a^{-1} |U_i| \, |g_i(x) - g_i(y)| \qquad (x, y \in F \cap U_i) \qquad (4.2.3)$$

eşitsizliği vardır. $\left\{g_1^{-1}, g_2^{-1}, ..., g_m^{-1}\right\}$ fonksiyonları g_i fonksiyonlarının ters fonksiyonları olmak üzere, $I_k = \{(i_1, i_2, ..., i_k) : 1 \leq i_j \leq m\}$ ile k. iterasyon ifade edilip $I = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} I_k$ ile gösterilsin. Buna göre, her bir $i = (i_1, i_2, ..., i_k) \in I_k$ için

$$U_{i_1, i_2, ..., i_k} = g_{i_1}^{-1} \left(g_{i_2}^{-1} \left(... \left(g_{i_k}^{-1} (F)\right) ...\right)\right)$$

olarak tanımlanır. Bundan dolayı, $x, y \in U_{i_1, i_2, ..., i_k}$ olmak üzere (4.2.3) ifadesine göre

$$|x - y| \leq a^{-k} |U_{i_1}| ... |U_{i_k}| \, |g_{i_1} \circ ... \circ g_{i_k}(x) - g_{i_1} \circ ... \circ g_{i_k}(y)|$$

olarak elde edilir ve özellikle

$$|U_{i_1, i_2, ..., i_k}| \leq a^{-k} |U_{i_1}| ... |U_{i_k}| \, |F|$$

olur.

$b = a^{-1}\min_{1\leq i\leq m}|U_i|$ olarak alalım ve $\forall x \in F$ için $r < |F|$ olarak verildiğinde $x \in U_i$ ve $br \leq a^{-k}|U_{i_1}|...|U_{i_k}||F| < r$ olur. Bundan dolayı, F kümesini örtmek için en az sayıda gerekli olan en çok r çapına sahip kümelerin sayısı $N(r)$ ile gösterilmek üzere;

$$\begin{aligned} N(r) &\leq \#\left\{i \in I : br \leq a^{-k}|U_{i_1}|...|U_{i_k}||F|\right\} \\ &\leq \sum_{i\in I}(br)^{-t}\left(a^{-k}|U_{i_1}|...|U_{i_k}||F|\right)^t \\ &\leq |F|^t b^{-t} r^{-t}\sum_{k=0}^{\infty}a^{-kt}\sum_{i\in I}\left(|U_{i_1}|...|U_{i_k}|\right)^t \\ &= |F|^t b^{-t} r^{-t}\sum_{k=0}^{\infty}\left(a^{-k}\sum_{i=1}^{m}|U_i|^t\right)^k \\ &\leq c_1 r^{-t} \end{aligned}$$

olup (4.2.2) ifadesi ve bazı $c_1 < \infty$ için sonuç sınırlı olur. Buradan da $\overline{\dim}_B F \leq t < s$ ifadesi elde edilir. □

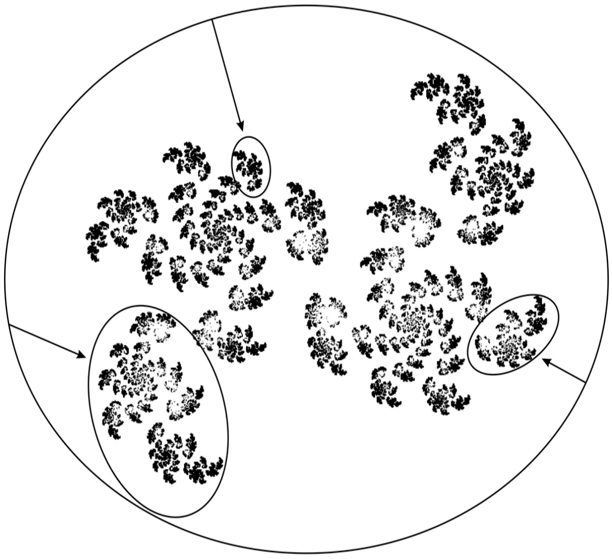
Teorem 4.2.2. *$F \subset \mathbb{R}^n$ boş olmayan kompakt bir küme, $a > 0$ ve $r_0 > 0$ olsun. $|B| < r_0$ ve merkezi F kümesinde olacak şekildeki her kapalı B yuvarı ile F kümesinin kesişimi, $\forall x, y \in F$ için*

$$ar|x-y| \leq |g(x) - g(y)| \tag{4.2.4}$$

şartını sağlayan $g : F \longrightarrow F \cap B$ bir dönüşüm olarak ifade edilebiliyorsa, $s = \dim_H F$ olmak üzere $\mathcal{H}^s(F) \leq 4^s a^{-s} < \infty$ ve $\underline{\dim}_B F = \overline{\dim}_B F = s$ ifadeleri yazılabilir[3].

İspat. Teoremi isbatı, F kümesinin ayrık yuvarlar yardımı ile kutu sayma boyutu hesaplanarak yapılacaktır. Bunun için, bazı $r < \min\{a^{-1}, r_0\}$ değerleri verildiğinde

$$N(r) > a^{-s} r^{-s} \tag{4.2.5}$$



Şekil 4.6: *Bir F kümesinin Teorem (4.2.2) ile kendisinin küçük parçalarına eşitlenmesi[3]*

olduğunun gösterilmesi yeterlidir. Çünkü, $N(r) > a^{-s}r^{-s}$ olduğunda

$$\begin{aligned}\dim_B F &= \frac{\log N(r)}{-\log r} \\ &\geq \frac{\log a^{-s}r^{-s}}{-\log r} \\ &\geq \frac{-s\log a - s\log r}{-\log r}\end{aligned}$$

olup, a sabit bir sayı olduğundan $\log a = 0$ olacağından

$$\begin{aligned}\dim_B F &\geq \frac{-s\log r}{-\log r} \\ &\geq -s \\ &\leq s\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Halbuki teorem gereği $\dim_H F = s$ olduğundan,

$$s = \dim_H F \leq \dim_B F$$

olması gerekir ve bulduğumuz her iki eşitsizlik de doğru olduğu için

$$\underline{\dim}_B F = \overline{\dim}_B F = s$$

olarak bulunur.

Buna göre, (4.2.5) ifadesi verildiğinde

$$m \equiv N(r) > a^{-t}r^{-t} \tag{4.2.6}$$

olacak şekilde $t > s$ değeri alınabilir ve merkezi F kümesinde ve yarıçapı r olan $B_1, B_2, ..., B_m$ ayrık yuvarları vardır.

Hipotezden $g_i : F \longrightarrow F \cap B_i$ $(1 \leq i \leq m)$ olacak şekilde

$$ar\,|x-y| \leq |g_i(x) - g_i(y)| \tag{4.2.7}$$

ifadesi yazılabilir. Burada $\{g_1, g_2, ..., g_m\}$ bir TFS olup, bu TFS nin çekicisinin (yani F kümesinin) boyutunun alt sınırı bulunabilir.

$d = \min_{i \neq j} dist(B_i, B_j) > 0$ olarak alalım. (4.2.7) ifadesini $(q-1)$ kez uygularsak,

$$\begin{aligned} dist\left(g_{i_1} \circ ... \circ g_{i_k}(E), g_{j_1} \circ ... \circ g_{j_k}(E)\right) &\geq (ar)^{q-1}\, dist(B_{i_q}, B_{j_q}) \\ &\geq (ar)^q\, d \end{aligned} \tag{4.2.8}$$

olup, burada q, $i_q \neq j_q$ olacak şekildeki en küçük tamsayıdır ve $r < a^{-1}$ dır. μ ölçümünü, $i_1, i_2, ..., i_k$ tümü için $\mu\left(g_{i_1} \circ ... \circ g_{i_k}(E)\right) = m^{-k}$ olacak şekilde F kümesi üzerinde tanımlayalım. $U \subset \mathbb{R}^n$ ve $|U| < d$ olduğunda, F kümesi ile kesişen herhangi bir U kümesi için;

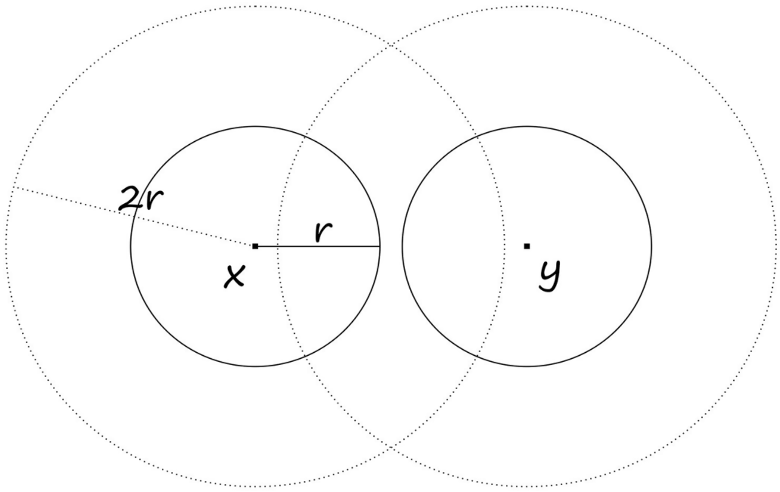
$$(ar)^{k+1}\, d \leq |U| < (ar)^k\, d \tag{4.2.9}$$

olacak şekilde en küçük tamsayı k olsun. (4.2.8) ifadesinden dolayı, U kümesi ile $g_{i_1} \circ ... \circ g_{i_k}(E)$ kümesi kesişir ve (4.2.6) ve (4.2.9) ifadelerinden dolayı

$$\mu(U) \leq m^{-k} < (ar)^{kt} \leq (dar)^{-t}\, |U|^t$$

ifadesi yazılıp, (4.1.2) ifadesine göre $\dim_H F \geq t > s$ olarak elde edilirki, bu da $\dim_H F = s$ olması ile çelişir. Bundan dolayı, $\dim_B F = t > s$ olamaz. Bu çelişki de $\dim_B F = s$ olduğunu gösterir.

İspatı tamamlamak için $H^s(F) \leq 4^s a^{-s}$ olduğunu göstermek yeterlidir. Eğer $\dim_H F = s$ ise yeterince küçük tüm r değerleri için $N(r) \leq a^{-s} r^{-s}$ olur. Çünkü, hipoteze göre $\dim_H F = s$ olduğunda $\underline{\dim}_B F = \overline{\dim}_B F = s$ olup, hipotezin ispatının ilk kısmında ispatı yapılmıştır. Bunula bereber F kümemizi $2r$ yarıçapına sahip yuvarlar ile örtebildiğimizden (r yarıçapına sahip ayrık yuvarlar ile örtülebildiğinden)



Şekil 4.7: *Ayrık (düz çizgili) yuvarlar ile örtülen x ve y noktaların iki kat büyük yarıçapa sahip (kesik çizgili) yuvarlar ile örtülmesi*

$$\mathcal{H}^s_{4r}(F) \leq a^{-s} r^{-s} (4r)^s = 4^s a^{-s}$$

olup, $\mathcal{H}^s(F) \leq 4^s a^{-s}$ olarak bulunur. □

Örnek 4.2.1. *Üçlü Cantor kümesinin Hausdorff boyutunu örtük method ile bulalım[3].*

F kümesi üçlü Cantor kümesi olmak üzere, $k \in \mathbb{Z}^+$ için $3^{-k-1} \leq |U| < 3^{-k}$ olacak şekilde U kümesi ile F kümesi kesiştiğinde $g : F \cap U \longrightarrow F$ dönüşümünün benzerlik oranı 3^k olduğundan, $a = \frac{1}{3}$ olarak seçildiğinde (4.2.1) eşitsizliği ve teorem (4.2.1) sağlanır. Benzer şekilde, $k \in \mathbb{Z}^+$ için $3^{-k} \leq r < 3^{-k+1}$ olacak

şekilde $2r$ *uzunluğunda ve merkezi* F *kümesinde olan kapalı* B *aralığı ile* F *kümesi kesiştiğinde* $g : F \longrightarrow F \cap B$ *dönüşümünün benzerlik oranı* 3^{-k} *olup* $a = \frac{1}{3}$ *için (4.2.4) eşitsizliği ve teorem (4.2.2) sağlanır.* $a = \frac{1}{3}$ *değeri için teorem (4.2.1) ve teorem (4.2.2) sağlandığından,* $\mathcal{H}^s(F) \geq a^s > 0$ *ve* $\mathcal{H}^s(F) \leq 4^s a^{-s} < \infty$ *eşitsizlikleri elde edilerekten* $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$ *olacak çekilde* $s = \dim_H F$ *değerinin varlığı garanti edilir. Böylece,* F *kümesinin Hausdorff boyutu* $\dim_H F = s$ *değeri için* $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$ *olacak şekilde bir değere sahip olduğu anlaşılır. Şimdi ise hausdorff ölçüsünün birim özelliğini kullanarak bu* s *değerini hesaplayalım. Bunun için,* F *üçlü Cantor kümesini* $F_L = F \cap \left[0, \frac{1}{3}\right]$ *ve* $F_R = F \cap \left[\frac{2}{3}, 1\right]$ *olacak şekilde* $\frac{1}{3}$ *oranında küçültülmüş iki parçaya ayıralım. Böylece,* $F = F_L \cap F_R$ *olarak ifade edilebilir. Bundan dolayı, önerme (2.2.1) ile,*

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^s(F) &= \mathcal{H}^s(F_L) + \mathcal{H}^s(F_R) \\
&= \left(\frac{1}{3}\right)^s \mathcal{H}^s(F) + \left(\frac{1}{3}\right)^s \mathcal{H}^s(F) \\
&= 2\left(\frac{1}{3}\right)^s \mathcal{H}^s(F)
\end{aligned}$$

yazılabilir. F *kümesinin Hausdorff boyutu* $\dim_H F = s$ *değeri için* $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$ *olacak şekilde bir değere sahip olduğundan,*

$$\mathcal{H}^s(F) = 2\left(\frac{1}{3}\right)^s \mathcal{H}^s(F) \tag{4.2.10}$$

yazılıp, (4.2.10) eşitliğinin her iki tarafı $\mathcal{H}^s(F)$ *değerine bölünürse,*

$$1 = 2\left(\frac{1}{3}\right)^s$$

$$3^s = 2$$

olup, eşitliğin her iki tarafının logaritması alınırsa,

$$\log 3^s = \log 2$$

$$s . \log 3 = \log 2$$

$$s = \frac{\log 2}{\log 3}$$

olarak bulunur.

4.3 Kesik Kümelerin Kutu Sayma Boyutu

Belirli bir başlangıç kümesinden ayrık kümelerin bir dizisinin çıkarılması ile elde edilen fraktalların kutu sayma boyutunun belirlenmesi, fraktalı oluşturan kümeden ziyade başlangıç kümesinden çıkarılan kümelerden yararlanılarak yapılabilir.

Bu durumu ifade etmek için $A \subset \mathbb{R}$ sınırlı ve kapalı aralığını göz önüne alalım. $A_1, A_2, ...$ kümeler dizisi A kümesinin $|A| = \sum_{i=1}^{\infty} |A_i|$ olacak şekilde ayrık alt açıklarının bir monoton azalan bir dizisi olsun. Burada, A_1 fraktalın inşasının ilk adımında A kümesinden çıkarılan kümedir. A_2 ise ikinci adımda çıkarılan kümelerdir. Ayrıca, $|A_1| = a_1$, $|A_2| = a_2$ ve $|A_n| = a_n$ ile gösterelim. Buna göre fraktalı, $\{A_i\}$ açık kümeleri ile

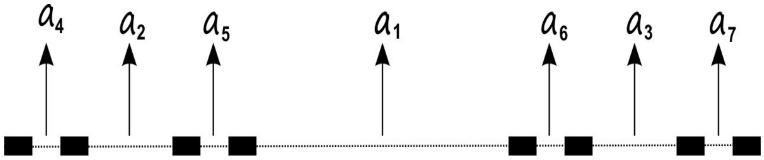
$$F = A \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

şeklinde tanımlayabiliriz. Bu tanımlama sayesinde F kümesinin kutu sayma boyutunu kesik kümelerin uzunlukları yardımı ile hesaplayabiliriz. Bu hesaplama için kutu sayma boyutunun Minkowski boyutu olarak adlandırılan tanımından yararlanırız. Bu tanım;

$$\dim_B F = n - \lim_{\delta \longrightarrow 0} \frac{\log \mathcal{L}^n(F_\delta)}{\log \delta}$$

şeklinde olup burada $\mathcal{L}^n$ n-boyutlu Lebesgue ölçüsüdür. Buna göre, $1-$boyutlu kesik kümeler için $\mathcal{L}^n$ ölçüsü uzunluk ölçüsüne karşılık gelmektedir. Böylece F kümesinin $\delta-$komşulğunun içerdiği kesik kümelerin uzunluğu yardımı ile fraktalın kutu sayma boyutunu bulabiliriz. Burada $\delta-$komşuluğundaki değişmeye karşılık kesik kümelerin uzunluğundaki değişme limit durumda boyutu verecektir.

Yukarıdaki açıklamalar doğrultusunda $\delta \leq \frac{1}{2}a_1$ ve k tamsayısını da $a_{k+1} \leq 2\delta \leq a_k$ olacak şekilde seçtiğimizde, F kümesi k.adımda Şekil 4.8. ve Şekil 4.9. daki gibi ifade edilebilir.

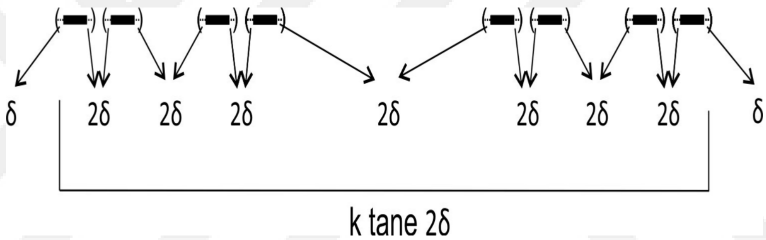


Şekil 4.8. *k. adımda F kümesi (kalın çizgiler) ve kesik kümeleri (kesik çizgiler)*

Ayrıca k. adımda F kümesinin $\delta-$komşuluğu, $i \geq i+1$ için $\sum_{i=k+1}^{\infty} a_i$ kesik kümelerinin tamamını, $1 \leq i \leq k$ için k tane kesik kümelerin her birinden 2δ uzunluğunu ve F kümesinin sonlarında birer δ uzunluğunu içermesinden dolayı

$$\mathcal{L}(F_\delta) = 2(k+1)\delta + \sum_{i=k+1}^{\infty} a_i \quad , \quad a_{k+1} \leq 2\delta \leq a_k \tag{4.3.1}$$

toplam uzunluğa sahip kesik küme içerir.



Şekil 4.9. *k. adımda F kümesinin δ örtüsünün içerdiği toplam kesik küme*

Önerme 4.3.1. *F fraktalı, k. adımda a_k aralığının çıkarılması ile elde edilmek üzere;*

$$a = -\lim_{k\to\infty} \frac{\log a_k}{\log k} \qquad ve \qquad b = -\overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{\log a_k}{\log k}$$

olarak elde edilebiliyor ise, $1 \leq b \leq a$ olduğunda

$$\frac{1}{a} \leq \underline{\dim}_B F \leq \overline{\dim}_B F \leq \frac{1}{b} \tag{4.3.2}$$

olarak bulunur[3].

İspat. $k.a_k \leq |F|$ olduğunda, $1 \leq b \leq a$ olacak şekilde a ve b sayıları bulunabileceğinden, yeterince büyük k ve $c_1 > 0$, $c_2 < \infty$ için

$$c_1 k^{-a} \leq a_k \leq c_2 k^{-b} \tag{4.3.3}$$

ifadesi, (4.3.2) ifadesine bir yaklaşım için kullanılabilir. Eğer δ yeterince küçük ve

$$a_{k+1} \leq 2\delta < a_k \tag{4.3.4}$$

olduğunda, (4.3.1) ifadesi ile

$$\mathcal{L}^1(\delta) \geq 2(k+1)\delta \tag{4.3.5}$$

yazılabilir. Ayrıca, (4.3.3) ifadesini $k+1$ için uyguladığımızda

$$c_1(k+1)^{-a} \leq a_{k+1} \leq c_2(k+1)^{-b}$$

olup, eşitsizliğin her iki tarafının $1/a$ kuvvetini alırsak,

$$\begin{aligned} c_1^{1/a}(k+1)^{-1} &\leq a_{k+1}^{1/a} \\ \frac{c_1^{1/a}}{a_{k+1}^{1/a}} &\leq k+1 \\ c_1^{1/a}.a_{k+1}^{-1/a} &\leq k+1 \end{aligned}$$

son ifadeden $k+1 \geq c_1^{1/a}.a_{k+1}^{-1/a}$ olduğu anlaşılır. Bu ifadeyi (4.3.5) eşitsizliğinde yerine yazarsak,

$$\mathcal{L}^1(\delta) \geq 2(k+1)\delta \geq 2c_1^{1/a}.a_{k+1}^{-1/a}\delta \geq 2c_1^{1/a}(2\delta)^{-1/a}\delta \geq 2c_1^{1/a}2^{-1/a}\delta^{1-1/a}$$

olarak bulunur. Buradan, $\underline{\dim}_B F \geq \frac{1}{a}$ olarak bulunur.

Üst limit için (4.3.3) ifadesinde $b > 1$ olduğunu varsayalım. Eğer δ yeterince küçük ve k sayısıda (4.3.4) ifadesini sağlayacak şekilde seçilirse

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^1(\delta) &= 2(k+1)\delta + \sum_{k+1}^{\infty} a_i \\ &= (k+1)(2\delta - a_{k+1}) + \sum_{k+1}^{\infty}(i+1)(a_i - a_{i+1}) \\ &\leq 4k\delta + 2\sum_{k+1}^{\infty} i(a_i - a_{i+1}) \\ &\leq 4c_2^{1/b}.a_k^{-1/b}\delta + 2c_2^{1/b}\sum_{k+1}^{\infty} a_i^{-1/b}(a_i - a_{i+1}) \end{aligned}$$

olup,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_i^{\alpha}(a_i - a_{i+1}) \leq (1-\alpha)^{-1} a_k^{1-k}$$

ifadesi $0 < \alpha < 1$ ve $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ azalan bir dizi olup sıfıra yakınsadığında geçerli olduğundan

$$\begin{aligned} 4c_2^{1/b}.a_k^{-1/b}\delta + 2c_2^{1/b}\sum_{k+1}^{\infty} a_i^{-1/b}(a_i - a_{i+1}) &\leq 4c_2^{1/b}2^{-1/b}\delta^{1-1/b} + 2c_2^{1/b}(1-1/b)^{-1}a_{k+1}^{1-1/b} \\ &\leq c_3\delta^{1-1/b} \end{aligned}$$

olarak bir c_3 sabiti bulunabildiğinden, $\overline{\dim}_B F \leq \frac{1}{b}$ olarak bulunur.

Buna göre, $\underline{\dim}_B F$ ve $\overline{\dim}_B F$ limitleri var ve birbirlerine eşitse

$$\dim_B F = -\frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty}\left(\frac{\log a_k}{\log k}\right)}$$

olarak elde edilir. $\square$

Örnek 4.3.1. *F fraktalı üçlü-Cantor kümesi ise a_k tümleyen kümelerin uzunlukları, m tamsayısı $2^m \leq k \leq 2^{m+1}-1$ koşulunu sağlamak üzere $a_k = 3^{-m-1}$ olsun. Buna göre,*

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty}\left(\frac{\log a_k}{\log k}\right) &= \lim_{m\to\infty}\frac{\log 3^{-m-1}}{\log 2^m} \\ &= \lim_{m\to\infty}\frac{-(m+1)\log 3}{m\log 2} \\ &= -\frac{\log 3}{\log 2} \end{aligned}$$

olup,

$$\dim_B F = \frac{\log 2}{\log 3}$$

olarak bulunur[3].

5. KAYNAKLAR

[1] G. A. Edgar, *Ölçü, Topoloji ve Fraktal Geometri*, Springer, Ohio, 1995.

[2] K. Falconer, *Fractal Geometry Mathematical Foundations and Applications*, Wiley, Chichester, 2003.

[3] K. Falconer, *Techniques in Fractal Geometry*, John Wiley, Chichester, 1997.

[4] Y. Pesin and V. Climenhaga, *Lectures on Fractal Geometry and Dynamical Systems*, AMS, Providence, 2009.

[5] R. Engelking, *Dimension Theory*, North-Holland Publishing Company, Warszawa, 1978.

[6] M. Balcı, *Reel Analiz*, Balcı Yayınları, Ankara, 2000.

[7] N. Yaz, *Fraktal Geometri 1*, Seçkin Yayıncılık, Ankara, 2006.

[8] C. YILDIZ, *Genel Topoloji*, Gazi Kitabevi, Ankara, 2005

[9] Ş. Yüksel, *Genel Topoloji*, Eğitim yayınevi, Konya, 2015.

[10] A. Dönmez, *Reel Analiz*, Seçkin Yayıncılık, Ankara, 2001.

[11] J. Bell, *Hausdorff Measure*, http://individual.utoronto.ca/jordanbell/notes/hausdorffmeasure.pdf (Erişim zamanı 01 Temmuz 2018)

[12] M. Yamaguti, M. Hata and J. Kigami, *Mathemattics of Fractals*, AMS, Providence, 1997.

[13] R. C. Freiwald, *An Introduction to Set Theory and Topology*, Freiwald, Washington, 2014.

[14] D. Walsh , *Dimension Theory*, Master Thesis, Wake Forest University North Carolina, 2014.

[15] R. Delorto, Fractal dimension and Julia sets, Master Thesis, Eastern Washington University Washington, 2013.

[16] M. Balcı, *Analiz 1*, Balcı Yayınları, Ankara, 1999.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı	**:**	Mustafa SAĞDİÇ
Doğum Yeri ve Yılı	**:**	Malatya, 1984
Medeni Hali	**:**	Evli
İletişim	**:**	mustafasagdic-44@hotmail.com

Eğitim

Lisans	**:**	İnönü Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, İlköğğretim Matematik Öğretmenliği Bölümü (2007)
Tezli Yüksek Lisans	**:**	İnönü Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Ana Bilim Dalı (2018)