

T.C.
YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FENBİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

**PARAMETREYE BAĞLI SİNGULAR PERTÜRBE OLMUŞ
DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN NÜMERİK ÇÖZÜMÜ**

DOKTORA TEZİ

HAZIRLAYAN : Mustafa KUDU

T.C.
YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FENBİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

**PARAMETREYE BAĞLI SINGULAR PERTÜRBE OLMUŞ
DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN NÜMERİK ÇÖZÜMÜ**

DOKTORA TEZİ

HAZIRLAYAN: Mustafa KUDU
DANIŞMAN : Prof. Dr. Gabil AMİRALİ

VAN- 2003

KABUL VE ONAY SAYFASI

Prof. Dr. Gabil AMİRALİ danışmanlığında, Mustafa KUDU tarafından hazırlanan Parametreye Bağlı Singular Perturbe Olmuş Diferansiyel Denklemlerin Nümerik Çözümü isimli bu çalışma 7.02/2003 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda *Doktora Tezi* olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Gabil AMİRALİ.. İmza.....

Üye : Prof. Dr. Coşkun Taşkın.. İmza.....

Üye : Yrd. Doç. Dr. Hakkı DURU... İmza.....

Üye :..... İmza.....

Üye :..... İmza.....

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim kurulu' nun XXVII sayılı kararı ile onaylanmıştır.

19.2.2003 gün ve 2003/4-
Doç. Dr. Nezaket ADIGUZEL
Enstitü Müdürü

Enstitü Müdürü

ÖZET

PARAMETREYE BAĞLI SİNGULER PERTÜRBE OLMUŞ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN NÜMERİK ÇÖZÜMÜ

KUDU, Mustafa

Doktora Tezi , Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof.Dr. Gabil AMİRALİ

Şubat 2003, 44 sayfa

Bu çalışmada parametreye bağlı singuler perturbe özellikli diferensiyel denklemler için sınır-değer problemlerinin sonlu fark metoduyla nümerik çözümleri incelenmiştir. Bu tip problemler uygulamalı matematiğin, matematiksel fiziğin ve akışkanlar mekaniğinin çeşitli alanlarında kullanılmaktadır. Ele alınan problemler için gerekli asimptotik değerlendirmeler yapılmıştır. Sonra ilk problem için exponensiyel baz fonksiyonları kullanılarak ve kalan terimleri integral şeklinde olan ağırlık fonksiyonlu interpolasyon kuadratur formüllerinden yararlanarak fark şeması kurulmuştur. Bu fark şemasının çözümünün hatası değerlendirilmiştir. Daha sonra ikinci problemin fark şeması, parçalı sabit baz fonksiyonları ve kalan terimleri integral şeklinde olan ağırlık fonksiyonlu interpolasyon kuadratur formüllerinden yararlanarak kurulmuştur. Ve ayrıca bu fark şemasının çözümünün hatası adaptif düzgün olmayan şebekede değerlendirilmiştir.

İkinci problem için alınan teorik sonuçlar bir örnek üzerinde denetlenmiştir. Bu denetim, TURBO C++ programında Kuazi-lineerizasyon metodundan yararlanılarak yapılmıştır.

Son olarak, ikinci problemin nümerik sonuçları tartışıldı.

Anahtar Kelimeler : Singuler perturbe özellikli problem, Parametreye bağlı problem, Sınır-değer problemi, Fark şeması, Düzgün yakınsaklık, Kuazi-Linearizasyon.

ABSTRACT

NUMERICAL SOLUTION OF THE DEPENDENT PARAMETER SINGULARLY PERTURBED DIFFERENTIAL EQUATIONS

KUDU, Mustafa
PhD , Mathematics Science
Supervisor : Prof.Dr. Gabil AMİRALI
February 2003, 44 pages

In this study, we investigate the numerical solution of the differential equations of the dependent parameter singularly perturbed. The equations of type arise in many areas of Applied Mathematics, Mathematical Physics and Fluid Mechanics. Firstly, some necessary asymptotic estimation has been taken for solution of linear and non-linear problems. After, for the linear problem, the difference scheme is constructed by the method of integral identities with the use of exponential basis functions and interpolating quadrature rules with the weight and remainder terms in integral form. After then the error of the approximate solution of this difference scheme is estimated and investigated. The difference scheme of non-linear problem is constructed by the method based on using finite elements with piecewise constant and piecewise linear basis functions and interpolating quadrature rules with the weight and remainder terms in integral form. Finally, the error of the approximate solution of this difference scheme is estimated.

Theoretical results obtained for second problem were controlled on one example. This control was computed via Quazi-Linearization method in TURBO C++ Programming Language.

Lastly, the numerical solution of second problem was discussed.

Key Words : Singularly Perturbed Problem, Depending on parameter, Boundary Value Problem, Difference Scheme, Uniform Convergence, Quazi-Linearization.

ÖN SÖZ

Diferansiyel denklem ihtiva eden uygulamalarda verilen bir diferansiyel denklemin genel çözümünden ziyade verilen yardımcı şartları sağlayan çözümün bulunması istenir. Özellikle Uygulamalı Matematik, Fizik ve Mühendislik gibi uygulamalı bilimlerde anlam kazanan bu tip problemler sınır-değer problemi olarak bilinirler.

Bir diferansiyel denklem, bağımsız değişkenin verilen değerleri için bilinmeyen fonksiyon ve onun türevleri üzerinde verilen yardımcı şartlarla birlikte bir sınır-değer problemi teşkil eder. Parametreye bağlı sınır-değer problemlerinin kesin çözümü için teknik zorluklarla karşılaşılır ve her zaman kesin çözüm bulmak mümkün olmayabilir. Bu nedenle, diferansiyel denklemin çözümüne istenen kesinlikte ulaşma imkanı sağlayan, yaklaşık bir çözüm metodu elde etmek, hem Uygulamalı bilimlerde hem de Matematiksel olarak daha pratiktir. Bu, özellikle parametreye bağlı sınır-değer problemlerinde iyi sonuçlar verir. Sonlu farklar metodu ise, yaklaşık çözümlerde sık kullanılan bir metottur. Çalışmamızda parametreye bağlı singular pertürbe olmuş lineer ve lineer olmayan problemlerin sonlu farklar metoduyla yaklaşık çözümü incelenmiştir.

Bu çalışma süresince göstermiş oldukları yakın ilgi ve yardımlarından dolayı saygıdeğer hocam ve danışmanım Prof. Dr. Gabil AMİRALİ' ye, saygıdeğer hocam Yrd.Doç.Dr. Hakkı DURU' ya teşekkür ve saygılarımı sunarım.

Ayrıca doktora süresi boyunca göstermiş oldukları sabır ve tahammülden dolayı eşim ve kızıma teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

	sayfa
ÖZET	i
ABSTRACT	iii
ÖN SÖZ	v
İÇİNDEKİLER	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ	ix
ÇİZELGELER DİZİNİ	xi
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	xiii
1. GİRİŞ VE LİTERATÜR BİLDİRİLİŞLERİ	1
2. ÖN BİLGİLER	4
2.1. Bazı İnterpolasyon Kuadratur Formülleri	4
2.2. Diferansiyel Eşitlikler	5
2.3. Birinci Merteben Fark Denklemi	5
2.4. Kullanılan Bazı Notasyonlar	5
3. ÇÖZÜM FONKSİYONUNA GÖRE LİNEER PROBLEMİN ÇÖZÜMÜ	7
3.1. (1.1) Probleminin Kesin Çözümü İçin Kararlılık Değerlendirmesi	7
3.2. (1.1) Probleminin Kesin Çözümü İçin Asimptotik Değerlendirmeler	12
3.3. (1.1) Problemi için Fark Şemasının Kurulması	16
3.4. Hata Değerlendirmesi	18
4. LİNEER OLMAYAN PROBLEMİN ÇÖZÜMÜ	23
4.1. (1.2) Probleminin Kesin Çözümü İçin Asimptotik Değerlendirmeler	23
4.2. (1.2) Problemi için Fark Şemasının Kurulması	26
4.3. Şebekenin seçimi	27
4.4. Hata Değerlendirmesi	28
5. ÇÖZÜM ALGORİTMASI VE NÜMERİK SONUÇLAR	33
6. TARTIŞMA VE SONUÇ	40
KAYNAKLAR	42
ÖZ GEÇMİŞ	44

ŞEKİLLER DİZİNİ

	sayfa
Şekil 5.1. $\epsilon=1/100$ değerine karşılık bulunan nümerik değerler	38
Şekil 5.2. $\epsilon=1/10000$ değerine karşılık bulunan nümerik değerler	38
Şekil 5.3. $\epsilon=1/1000000$ değerine karşılık bulunan nümerik değerler	39
Şekil 5.4. $\epsilon=1/100000000$ değerine karşılık bulunan nümerik değerler	39

ÇİZELGELER DİZİNİ

	sayfa
Çizelge 5.1. $\hat{\omega}_N$ şebekesinde (1) probleminin yaklaşık nümerik çözümünün $N=8$ için, (2) ve (3) iterasyon süreçlerinden yararlanılarak elde edilen $r_k^{\varepsilon,N}$ ($k=0,1,2$) maksimum hata sonuçları ve $p_k^{\varepsilon,N}$ ($k=1,2$) yakınsama hızı.	36
Çizelge 5.2. $\hat{\omega}_N$ şebekesinde (1) probleminin yaklaşık nümerik çözümünün $N=16$ için, (2) ve (3) iterasyon süreçlerinden yararlanılarak elde edilen $r_k^{\varepsilon,N}$ ($k=0,1,2$) maksimum hata sonuçları ve $p_k^{\varepsilon,N}$ ($k=1,2$) yakınsama hızı.35	37
Çizelge 5.3. $\hat{\omega}_N$ şebekesinde (1) probleminin yaklaşık nümerik çözümünün $N=32$ için, (2) ve (3) iterasyon süreçlerinden yararlanılarak elde edilen $r_k^{\varepsilon,N}$ ($k=0,1,2$) maksimum hata sonuçları ve $p_k^{\varepsilon,N}$ ($k=1,2$) yakınsama hızı.	37
Çizelge 5.4. $\hat{\omega}_N$ şebekesinde (1) probleminin yaklaşık nümerik çözümünün $N=64$ için, (2) ve (3) iterasyon süreçlerinden yararlanılarak elde edilen $r_k^{\varepsilon,N}$ ($k=0,1,2$) maksimum hata sonuçları ve $p_k^{\varepsilon,N}$ ($k=1,2$) yakınsama	37

1. GİRİŞ VE LİTERATÜR BİLDİRİLİŞLERİ

Bu çalışmada parametreye bağlı singular pertürbe olmuş lineer ve lineer olmayan diferansiyel denklemlerin sonlu fark yöntemiyle nümerik çözümü incelenmiştir. Diferansiyel denklemler için singular pertürbe özellikli problemler, uygulamalı matematiğin ve matematiksel fiziğin pek çok değişik alanlarında kullanıldığı iyi bilinmektedir. Bunlar, akışkanlar mekaniği, akışkanlar dinamiği, aerodinamik, plazma dinamik, manyetik dinamik, arıtılmış gaz dinamik, kütlelerin hareketi, plastik, kimyasal-reaktör teori, oşinografi, meteoroloji, yayma teori, reaksiyon-difüzyon süreçleri, ışık yayan dalgalar, plazmadaki elektron plazma dalgaları, iletişim hatları, elektrik akımı, iyon akustik dalgaları, ve diğer fiziksel modelleri hakkında yapılan çalışmalarda kullanılır (İkezi, 1978; Lonngren, 1978; Bullough ve Caudrey, 1980; Kadalbajoo ve Reddy, 1989; O'Malley, 1991; Hu ve ark., 1995). Bu tür problemler matematiksel ifadeyle, yüksek mertebeli türevler içeren terimlerinin katsayılarının pozitif küçük bir ε parametresinin bulunduğu problemler olarak bilinir. Bu tip problemlerin özelliği; ε 'un küçük değerlerinde tanım bölgesinin bazı kısımlarında çözümün çok hızlı değişime sahip olmasıdır. Yani çözümün ince geçiş katlarında hızlı, diğer yerlerde düzenli ve yavaş değişir. Bu alanlarda çözümün türevleri sınırsız olur. Bu nedenle de klasik nümerik yöntemlerin kararsızlıkları nedeniyle uygulanması imkansız olur. Böylece singular pertürbe olmuş problemlerin işleyişinde ciddi zorluklar ortaya çıkar. Bu özellikler nümerik çözümde de kendini gösterir (Doolan ve ark., 1980; O'Riordan ve Stynes, 1987; Roos ve ark., 1996; Farrell ve ark., 2000). Çünkü şema adımlarının küçülmesiyle yaklaşık çözüm, kesin çözümden iraksar. Dolayısıyla "singular pertürbe" olmuş problemler için, bu özellikleri dikkate alabilecek özgü nümerik metotların kurulması büyük önem taşımaktadır.

Kaydedelim ki, "singular pertürbe" olmuş problemler için, nümerik metotların sistematik biçimde incelenmesinin başlangıcı, çok da uzak olmayan geçmişe (1970'li yıllara) dayanır. Bu konuda daha geniş ve açıklayıcı bilgi Kadalbajoo ve Padidar (2002)'de yer almaktadır. Ayrıca şu an için pek çok orijinal araştırma kitapları da bulunmaktadır (Doolan ve ark., 1980; O'Riordan ve Stynes, 1987; Roos ve ark., 1996 ; Farrell ve ark., 2000).

Bellman (1964), Nayfeh (1973), Robert (1982) singüler pertürbe olmuş sınır-değer problemleri için sınır değer tekniklerini geliştirmişler ve bazı özel durumları için problemlerin analitik durumları ve yaklaşık çözümlerini incelemişlerdir. Singular pertürbe özellikli adi ve kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümünün varlığı ve tekliği, asimptotik ve analitik durumları üzerindeki çalışmalar ise Kassoy (1982), Schmisser ve Wiess (1986), Kadalbajoo ve Reddy (1989), O' Malley (1991) tarafından yapılmıştır. Ascher ve ark.(1988) sınır değer problemlerinin nümerik çözümünü incelemişlerdir.

Bu çalışmaya temel teşkil eden parametreye bağlı sınır-değer problemlerin singüler pertürbe olmamış durumları için pek çok araştırma makalesi yayınlanmıştır. Kibenko ve Perov (1963), Pomentale (1976), Jankowski (1993) ve Feckan (1994) parametreye bağlı sınır-değer problemlerinin çözümünün varlığı ve tekliği üzerindeki çalışmalar yapılmıştır. Bu problemlerin özelliklerinden olan kararlılık ve

bifurkasyon analizleri üzerindeki çalışmalar ise, Attili (2001), Yasir ve Tang (2002), Yu (2002) tarafından yapılmıştır. Parametreye bağlı problemlerin analitik-yaklaşık iterasyon çözüm metotları gibi özellikleri, Mamedov (1979), Jankowski ve Lakshmikantham (1997), Güllü ve Duru (1998), Lui ve McRae (2001) ve Abd-Elateef Kamar (1999, 2002) tarafından incelenmiştir.

Bu çalışmada ise, parametreye bağlı sınır-değer problemlerinin singüler pertürbe olmuş biçimi için, sonlu farklar yöntemiyle nümerik çözümleri bulunmuştur.

Çalışmamızda, parametreye bağlı singüler pertürbe özellikli lineer problem için üstel katsayılı fark şeması incelenmiştir. Bu şema üstel katsayılı baz fonksiyonlarından, kalan terimleri integral şeklinde olan ve ağırlık fonksiyonu içeren interpolasyon kuadratur formüllerinden yararlanarak kurulmuştur. Bu fark şemalarının kararlılığı, yaklaşım hatası ve çözüm algoritması incelenmiştir. Bu metod, Surla (1988), Miller ve Carrol (1990), Selvakumar (1994), Amiraliev ve Memedov (1995)'de kullanılan metodun benzeridir.

Lineer olmayan problemin fark şeması ise, parçalı sabit lineer baz fonksiyonları ve kalan terimleri integral şeklinde olan interpolasyon kuadratur formüllerinden yararlanarak kurulmuştur. Sınır katı dahilinde, logaritmik fonksiyon biçiminde ifade edilen daha ince bir şebeke, sınır katı haricinde daha kaba adımlı düzgün şebeke uygulanmıştır. Buna benzer teknikler Amiraliev (1988), Boglaev (1984), Boglaev ve Sirotkin (1993)'de kullanılmıştır.

Bu çalışmada önce, kesin çözümün kararlılık değerlendirmesi ve kesin çözüme uygun asimptotik değerlendirmeler yapılmıştır. Daha sonra bu asimptotik değerlendirmelerden yararlanarak üstel katsayılı fark şeması kurulmuştur. Bu şema üstel katsayılı baz fonksiyonlarından, kalan terimleri integral şeklinde olan ve ağırlık fonksiyonu içeren interpolasyon kuadratur formüllerinden yararlanarak kurulmuştur. Bu fark şemalarının kararlılığı, yaklaşım hatası ve çözüm algoritması incelenmiştir. Ayrıca, bu fark problemlerinin gerçekleştirilmesi için uygun birer iterasyon süreci de incelenmiştir.

Çalışmamızda λ parametresine bağlı singüler pertürbe özellikli aşağıdaki problemler incelenmiştir

$$\begin{aligned} Lu &\equiv \varepsilon u'(x) + a(x)u(x) = f(x, \lambda), \quad 0 \leq x \leq \ell, \\ u(0) &= A, \quad u(\ell) = B. \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} Lu &\equiv \varepsilon u'(x) + F(x, u, \lambda) = 0, \quad 0 \leq x \leq \ell, \\ u(0) &= A, \quad u(\ell) = B. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Burada, $\varepsilon \in (0, 1]$ küçük parametre, A, B verilmiş sabitler. $a(x) \geq \alpha > 0$, $a(x) \in C^1[0, \ell]$; $f(x, \lambda)$ ($0 \leq x \leq \ell, -\infty < \lambda < \infty$) ve $F(x, u, \lambda)$ ($0 \leq x \leq \ell, -\infty < \lambda < \infty, -\infty < u < \infty$) sürekli fonksiyonlardır.

Ayrıca, $f(x, \lambda)$ ($0 \leq x \leq \ell, -\infty < \lambda < \infty$) fonksiyonu x 'e ve λ 'ya göre ve $F(x, u, \lambda)$ ($0 \leq x \leq \ell, -\infty < u < \infty, -\infty < \lambda < \infty$) fonksiyonu ise x 'e, u 'ya ve λ 'ya göre sürekli türevlenebilir ve

$$0 < m_1 \leq \frac{\partial f}{\partial \lambda} \leq M_1 < +\infty, \quad (1.3)$$

$$0 < \alpha \leq \frac{\partial F}{\partial u} \leq a^* < \infty, \quad (1.4)$$

$$\left| \frac{\partial^i f}{\partial x^i} \right| \leq N_i \quad (i = 0, 1) \quad (1.5)$$

dir. Burada, m_1, M_1 ve $N_i (i = 0, 1)$ ε 'a bağılı olmayan sabitlerdir.

Biz (1.1) ve (1.2) problemlerinin bir tane $\{u(x), \lambda\}$ çözümüne sahip olduğunu varsayarak, bu çözümün bulunması için sonlu farklar metodunu kullanacağız.

Bu çalışma, altı bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş ve literatür bildirişleri bölümüdür.

İkinci bölümde gerekli ön bilgiler ve notasyonlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde (1.1) problemi dört alt bölümde incelenmiştir. Birinci alt bölümde problemin kesin çözümü için gerekli kararlılık değerlendirmesi, ikinci alt bölümde problemin kesin çözümü için gerekli asimptotik değerlendirmeler alınmış, üçüncü alt bölümde problem için sonlu fark şeması kurulmuş ve dördüncü alt bölümde ise problemin yaklaşım hatası değerlendirilmiş ve yaklaşım hızının $O(h)$ olduğu bulunmuştur.

Dördüncü bölümde (1.2) problemi dört alt bölümde incelenmiştir. Birinci alt bölümde problemin kesin çözümü için gerekli asimptotik değerlendirmeler alınmış, ikinci alt bölümde problem için sonlu fark şeması kurulmuş, üçüncü alt bölümde şebekenin seçimi incelenmiş, dördüncü alt bölümde ise problemin yaklaşım hatası değerlendirilmiş ve yaklaşım hızının $O(N^{-1})$ olduğu bulunmuştur.

Beşinci bölümde (1.2) problemi için alınan teorik sonuçlar örnek üzerinde denetlenmiştir. Bu denetim TURBO C++ programında Kuazi-lineerizasyon yönteminden yararlanılarak yapılmıştır.

Alıncı bölümde (1.2) problemi için tartışma ve sonuç verilmiştir.

2. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde çalışma boyunca ihtiyaç duyulan bazı kuadratur formülleri ve notasyoları sunulmuştur.

2.1. Bazı İnterpolasyon Kuadratur Formülleri

Fark şemalarının kurulması ve incelenmesinde aşağıdaki kuadratur formüllerini kullanacağız (Amiraliyev, Memmedov 1995).

$$\int_a^b p(x)f(x)dx = \left[\int_a^b p(x)dx \right] \{ \sigma f(b) + (1-\sigma)f(a) \} + f(a;b) \int_a^b (x-x^{(\sigma)})p(x)dx + R(f), \quad (2.1)$$

burada σ – reel parametre, $p(x) \in C[a,b]$ ağırlık fonksiyonu,

$$R(f) = \int_a^b dx p(x) \int_a^b f^{(n)}(\xi) K_{n-1}(x,\xi) d\xi, \quad n = 1 \text{ veya } 2$$

$$K_s(x,\xi) = T_s(x-\xi) - (b-a)^{-1}(x-a)(b-\xi)^s, \quad s = 0,1$$

$$x^{(\sigma)} = \sigma b + (1-\sigma)a, \quad f(a;b) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a},$$

$$T_s(\lambda) = \lambda^s / s!, \quad \lambda \geq 0; \quad T_s(\lambda) = 0, \quad \lambda < 0.$$

Bazı durumlarda (2.1)'deki ikinci terim kalan terime dahil olur.

$$\int_a^b p(x)f'(x)dx = f(a;b) \int_a^b p(x)dx + \bar{R}(f), \quad (2.2)$$

$$\bar{R}(f) = - \int_a^b dx p'(x) \int_a^b f^{(n)}(\xi) K_{n-1}(x,\xi) d\xi, \quad n = 1 \text{ veya } 2.$$

(2.1) ve (2.2) formüllerinde aynı $K_{n-1}(x,\xi)$ fonksiyonunun kullanıldığını kaydedelim.

$$\int_a^b p(x)f(x)dx = f\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_a^b p(x)dx + R^*(f), \quad (2.3)$$

$$R^*(f) = \int_a^b dx p(x) \int_a^b f^n(\xi) K_{n-1}^*(x, \xi) d\xi + (n-1) f(a; b) \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) p(x) dx, \quad n=1 \text{ veya } 2,$$

$$K_s^*(x, \xi) = T_s(x - \xi) - T_s\left(\frac{a+b}{2} - \xi\right) + (b-a)^s (b-\xi) \left(\frac{a+b}{2} - \xi\right), \quad s=0,1$$

2.2. Diferansiyel Eşitlikler

Yardımcı Teorem 2.1(Lemma). $a(x)$ ve $f(x, \lambda)$ $[0, \ell]$ aralığında sürekli fonksiyonlar olsun. (1.1) probleminin $u(x)$ çözümü aşağıdaki formüllerle ifade edilir

$$u(x) = u(0) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^x a(\xi) d\xi} + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^x f(\xi, \lambda) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_\xi^x a(\tau) d\tau} d\xi, \quad (2.4)$$

$$u(x) = u(\ell) e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_x^\ell a(\xi) d\xi} - \frac{1}{\varepsilon} \int_x^\ell f(\xi, \lambda) e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_x^\xi a(\tau) d\tau} d\xi. \quad (2.5)$$

2.3 Birinci Mertebeden Fark Denklemini

p_i ve q_i belirli tam argümanlı fonksiyonlar olmak üzere,

$$y_i = p_i y_{i-1} + q_i, \quad i=1,2,\dots \quad (2.6)$$

biçimindeki birinci mertebeden fark denkleminin çözümü,

$$y_i = y_0 \left(\prod_{k=1}^i p_k \right) + \sum_{j=1}^i q_j \left(\prod_{k=j+1}^i p_k \right), \quad i=1,2,\dots \quad (2.7)$$

ile verilir.

2.4. Kullanılan Bazı Notasyonlar

$$\|f\|_C \equiv \|f\|_{C[0,\ell]} = \max_{0 \leq x \leq \ell} |f(x)|.$$

$$\omega_h = \left\{ x_i = ih, \quad i=0,1,\dots,N; \quad h = \frac{\ell}{N} \right\} \quad [0, \ell] \text{ aralığında düzgün şebeke,}$$

$\omega_h = \omega_h \cup \{x=0, \ell\}$ h-şebeke adımı, $y = y(x_i)$, ω_h 'da tanımlanmış şebeke fonksiyonu,

$$y_{x,i} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} \quad y \text{ 'nin } x_i \text{ noktasındaki sağ fark türevi}$$

$$y_{\bar{x},i} = \frac{y_i - y_{i-1}}{h} \quad y \text{ 'nin } x_i \text{ noktasındaki sol fark türevi}$$

$$y_{0_{x,i}} = \frac{y_{x,i} + y_{\bar{x},i}}{2} = \frac{y_{i+1} + y_{i-1}}{2h} \quad y \text{ 'nin } x_i \text{ noktasındaki merkezi fark türevi}$$

$$\|y\|_C \equiv \|y\|_{C(\omega_h)} = \max_{x_i \in \omega_h} |y(x_i)|.$$

$$\hat{\omega} = \{0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{N-1} < x_N = \ell, h_i = x_i - x_{i-1}, i = 1, \dots, N\}$$

$[0, \ell]$ aralığında düzgün olmaya şebeke, h_i -şebeke adımı, $y = y(x_i)$, $\hat{\omega}$ 'da tanımlanmış şebeke fonksiyonu,

$$y_{x,i} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} \quad y \text{ 'nin } x_i \text{ noktasındaki sağ fark türevi}$$

$$y_{\bar{x},i} = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} \quad y \text{ 'nin } x_i \text{ noktasındaki sol fark türevi}$$

3. ÇÖZÜM FONKSİYONUNA GÖRE LİNEER PROBLEMİN ÇÖZÜMÜ

Bu bölüm dört alt bölüme ayrılmıştır. Birinci alt bölümde, (1.1) problemi için kararlılık eşitsizliği Lemma 3.1'de verilmiş ve ispatı yapılmıştır. İkinci alt bölümde, (1.1) problemi için asiptotik değerlendirme Lemma 3.2'de ispatlanmıştır. Üçüncü alt bölümde, (1.1) probleminin fark şeması, (2.1) ve (2.2) formüllerinden yararlanılarak kurulmuştur. Dördüncü alt bölümde, (1.1) problemine uygun kurulan fark şemasının yakınsaklığı ispatlanmış ve yakınsama hızı belirlenmiştir.

3.1. (1.1) Probleminin Kesin Çözümü İçin Kararlılık Değerlendirmesi

(1.1) problemine uygun sağ tarafı ve sınır değerleri pertürbe olmuş aşağıdaki problemi ele alalım

$$\begin{aligned} \varepsilon \tilde{u}'(x) + a(x)\tilde{u}(x) &= f(x, \tilde{\lambda}) + \tilde{f}(x) \\ \tilde{u}(0) &= \tilde{A}, \quad \tilde{u}(\ell) = \tilde{B}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Yardımcı Teorem 3.1(Lemma). Kabul edelim ki, u ve \tilde{u} sırasıyla, (1.1) ve (3.1) problemlerinin çözümleridir. Bu durumda aşağıdaki değerlendirmeler doğrudur.

$$|u - \tilde{u}| \leq (\alpha^{-1} m_1^{-1} c_0 M_1 + 1) |A - \tilde{A}| + \alpha^{-1} m_1^{-1} c_1 M_1 |B - \tilde{B}| + \alpha^{-1} (m_1^{-1} M_1 + 1) \|\tilde{f}\|_{C[0, \ell]} \quad (3.2)$$

$$|\lambda - \tilde{\lambda}| \leq m_1^{-1} c_0 |A - \tilde{A}| + m_1^{-1} c_1 |B - \tilde{B}| + m_1^{-1} \|\tilde{f}\|_{C[0, \ell]} \quad (3.3)$$

Burada, $c_0 = \frac{\alpha}{(e^{\alpha \ell} - 1)}$, $c_1 = \frac{a^*}{(1 - e^{-a^* \ell})}$ ve $a^* = \max_{[0, \ell]} a(x)$ 'dir.

İspat: (1.1) ve (3.1) problemlerinden,

$$\begin{aligned} \varepsilon [u'(x) - \tilde{u}'(x)] + a(x)[u(x) - \tilde{u}(x)] &= [f(x, \lambda) - f(x, \tilde{\lambda})] - \tilde{f}(x) \\ u(0) - \tilde{u}(0) &= A - \tilde{A}, \quad u(\ell) - \tilde{u}(\ell) = B - \tilde{B}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

olarak alınır ve $u(x) - \tilde{u}(x) = v(x)$ olsun. Buradan,

$$\begin{aligned} \varepsilon v'(x) + a(x)v(x) &= \frac{\partial f(x, \bar{\lambda})}{\partial \lambda} (\lambda - \tilde{\lambda}) + \tilde{f}(x) \\ v(0) &= A - \tilde{A}, \quad v(\ell) = B - \tilde{B}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

yazılabilir. Burada, $\bar{\lambda}$ değeri λ ve $\tilde{\lambda}$ arasındaki bir noktadır.

(3.5) problemine (2.4)-(2.5) formülleri uygulanırsa,

$$v(x) = v(0)e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^x a(\eta) d\eta} + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^x \frac{\partial f}{\partial \lambda} (\lambda - \tilde{\lambda}) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_\eta^x a(\tau) d\tau} d\eta - \frac{1}{\varepsilon} \int_0^x \tilde{f}(\eta) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_\eta^x a(\tau) d\tau} d\eta \quad (3.6)$$

$$v(x) = v(\ell)e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_x^\ell a(\eta) d\eta} - \frac{1}{\varepsilon} \int_x^\ell \frac{\partial f}{\partial \lambda} (\lambda - \tilde{\lambda}) e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_x^\eta a(\tau) d\tau} d\eta - \frac{1}{\varepsilon} \int_0^x \tilde{f}(\eta) e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_x^\eta a(\tau) d\tau} d\eta \quad (3.7)$$

elde edilir.

(3.6)'dan aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir.

$$\begin{aligned} |v(x)| &\leq \left| v(0)e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^x a(\eta) d\eta} \right| + \left| \frac{1}{\varepsilon} \int_0^x \frac{\partial f}{\partial \lambda} (\lambda - \tilde{\lambda}) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_\eta^x a(\tau) d\tau} d\eta \right| + \left| \frac{1}{\varepsilon} \int_0^x \tilde{f}(\eta) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_\eta^x a(\tau) d\tau} d\eta \right| \\ &\leq |v(0)| e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^x a(\eta) d\eta} + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^x \left| \frac{\partial f}{\partial \lambda} \right| (\lambda - \tilde{\lambda}) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_\eta^x a(\tau) d\tau} d\eta + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^x |\tilde{f}(\eta)| e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_\eta^x a(\tau) d\tau} d\eta \\ &\leq |A - \tilde{A}| e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}} + \alpha^{-1} M_1 |\lambda - \tilde{\lambda}| \left(1 - e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}} \right) + \alpha^{-1} \|\tilde{f}\|_{C[0, \ell]} \end{aligned}$$

$e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}} \leq 1$, $1 - e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}} \leq 1$ olduğundan,

$$|v(x)| \leq |A - \tilde{A}| + \alpha^{-1} M_1 |\lambda - \tilde{\lambda}| + \alpha^{-1} \|\tilde{f}\|_{C[0, \ell]} \quad (3.8)$$

yazılabilir.

Şimdi $|\lambda - \tilde{\lambda}|$ 'yi değerlendirelim. Bunun için (3.6) ve (3.7)'den;

$$v(0)e^{-\frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^x a(\eta) d\eta} + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^x \frac{\partial f}{\partial \lambda} (\lambda - \tilde{\lambda}) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^\eta a(\tau) d\tau} d\eta - \frac{1}{\varepsilon} \int_0^x \tilde{f}(\eta) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^\eta a(\tau) d\tau} d\eta =$$

$$v(\ell) e^{\frac{1}{\varepsilon_x} \int_x^\ell a(\eta) d\eta} - \frac{1}{\varepsilon_x} \int_x^\ell \frac{\partial f}{\partial \lambda} (\lambda - \tilde{\lambda}) e^{\frac{1}{\varepsilon_x} \int_x^\eta a(\tau) d\tau} d\eta + \frac{1}{\varepsilon_x} \int_x^\ell \tilde{f}(\eta) e^{\frac{1}{\varepsilon_x} \int_x^\eta a(\tau) d\tau} d\eta,$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \left[\int_0^x \frac{\partial f}{\partial \lambda} e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^\eta a(\tau) d\tau} d\eta + \int_x^\ell \frac{\partial f}{\partial \lambda} e^{\frac{1}{\varepsilon_x} \int_x^\eta a(\tau) d\tau} d\eta \right] (\lambda - \tilde{\lambda}) = -v(0) e^{-\frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^x a(\eta) d\eta} + v(\ell) e^{\frac{1}{\varepsilon_x} \int_x^\ell a(\eta) d\eta}$$

$$+ \frac{1}{\varepsilon} \left[\int_0^x \tilde{f}(\eta) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^\eta a(\tau) d\tau} d\eta + \int_x^\ell \tilde{f}(\eta) e^{\frac{1}{\varepsilon_x} \int_x^\eta a(\tau) d\tau} d\eta \right]$$

ve

$$(\lambda - \tilde{\lambda}) = - \frac{v(0) e^{-\frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^x a(\eta) d\eta}}{\frac{1}{\varepsilon} \left[\int_0^x \frac{\partial f}{\partial \lambda} e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^\eta a(\tau) d\tau} d\eta + \int_x^\ell \frac{\partial f}{\partial \lambda} e^{\frac{1}{\varepsilon_x} \int_x^\eta a(\tau) d\tau} d\eta \right]}$$

$$+ \frac{v(\ell) e^{\frac{1}{\varepsilon_x} \int_x^\ell a(\eta) d\eta}}{\frac{1}{\varepsilon} \left[\int_0^x \frac{\partial f}{\partial \lambda} e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^\eta a(\tau) d\tau} d\eta + \int_x^\ell \frac{\partial f}{\partial \lambda} e^{\frac{1}{\varepsilon_x} \int_x^\eta a(\tau) d\tau} d\eta \right]}$$

$$+ \frac{\frac{1}{\varepsilon} \left[\int_0^x \tilde{f}(\eta) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^\eta a(\tau) d\tau} d\eta + \int_x^\ell \tilde{f}(\eta) e^{\frac{1}{\varepsilon_x} \int_x^\eta a(\tau) d\tau} d\eta \right]}{\frac{1}{\varepsilon} \left[\int_0^x \frac{\partial f}{\partial \lambda} e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^\eta a(\tau) d\tau} d\eta + \int_x^\ell \frac{\partial f}{\partial \lambda} e^{\frac{1}{\varepsilon_x} \int_x^\eta a(\tau) d\tau} d\eta \right]} \quad (3.9)$$

olur.

(3.9)'un sağ tarafındaki terimleri ayrı ayrı değerlendirelim. Önce (3.9)'un sağ tarafındaki birinci terimi ele alalım.

$$\begin{aligned}
 & \left| \frac{v(0)e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^x a(\eta) d\eta}}{\frac{1}{\varepsilon} \left[\int_0^x \frac{\partial f}{\partial \lambda} e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^x a(\tau) d\tau} d\eta + \int_x^\ell \frac{\partial f}{\partial \lambda} e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_x^\ell a(\tau) d\tau} d\eta \right]} \right| \leq \frac{|v(0)|}{\frac{m_1}{\varepsilon} \left[\int_0^x e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^x a(\tau) d\tau} d\eta + \int_x^\ell e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_x^\ell a(\tau) d\tau} d\eta \right]} \\
 & \leq \frac{|v(0)|}{\frac{m_1}{\varepsilon} \left[\alpha^{-1} \varepsilon (e^{\frac{\alpha x}{\varepsilon}} - 1) + \alpha^{-1} \varepsilon (e^{\frac{\alpha \ell}{\varepsilon}} - e^{\frac{\alpha x}{\varepsilon}}) \right]} \\
 & \leq \frac{|v(0)|}{\alpha^{-1} m_1 (e^{\frac{\alpha \ell}{\varepsilon}} - 1)} \\
 & \leq \frac{|v(0)|}{\alpha^{-1} m_1 (e^{\alpha \ell} - 1)} \tag{3.10}
 \end{aligned}$$

olur. Bu eşitsizliğin son kısmında $\varepsilon \leq 1$ için $e^{\frac{\alpha \ell}{\varepsilon}} - 1 > e^{\alpha \ell} - 1 > 0$ olduğu dikkate alınmıştır. (3.9)'un sağ tarafındaki ikinci terim için,

$$\begin{aligned}
 & \left| \frac{v(\ell)e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_x^\ell a(\eta) d\eta}}{\frac{1}{\varepsilon} \left[\int_0^x \frac{\partial f}{\partial \lambda} e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^x a(\tau) d\tau} d\eta + \int_x^\ell \frac{\partial f}{\partial \lambda} e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_x^\ell a(\tau) d\tau} d\eta \right]} \right| \leq \frac{|v(\ell)|}{\frac{m_1}{\varepsilon} \left[\int_0^x e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^x a(\tau) d\tau} d\eta + \int_x^\ell e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_x^\ell a(\tau) d\tau} d\eta \right]} \\
 & \leq \frac{|v(\ell)|}{\frac{m_1}{\varepsilon} \left[(a^*)^{-1} \varepsilon (e^{\frac{a^*(x-\ell)}{\varepsilon}} - e^{\frac{a^* \ell}{\varepsilon}}) + (a^*)^{-1} \varepsilon (1 - e^{\frac{a^*(x-\ell)}{\varepsilon}}) \right]}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{|v(\ell)|}{m_1(a^*)^{-1}(1-e^{-\frac{a^*\ell}{\varepsilon}})} \\
&\leq \frac{|v(\ell)|}{m_1(a^*)^{-1}(1-e^{-a^*\ell})} \tag{3.11}
\end{aligned}$$

olur. Bu eşitsizliğin son kısmında $\varepsilon \leq 1$ için $1-e^{-\frac{a^*\ell}{\varepsilon}} \geq 1-e^{-a^*\ell} > 0$ olduğu dikkate alınmıştır.

Son olarak, (3.9)'un sağ tarafındaki üçüncü terim için,

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{1}{\varepsilon} \left[\int_0^x \tilde{f}(\eta) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^x a(\tau) d\tau} d\eta + \int_x^\ell \tilde{f}(\eta) e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_x^\ell a(\tau) d\tau} d\eta \right] \right| \\
&\left| \frac{1}{\varepsilon} \left[\int_0^x \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \lambda} e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^x a(\tau) d\tau} d\eta + \int_x^\ell \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \lambda} e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_x^\ell a(\tau) d\tau} d\eta \right] \right| \\
&\leq \frac{\|\tilde{f}\|_{C[0,\ell]}}{\varepsilon} \left[\int_0^x e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^x a(\tau) d\tau} d\eta + \int_x^\ell e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_x^\ell a(\tau) d\tau} d\eta \right] \\
&\leq \frac{m_1}{\varepsilon} \left[\int_0^x e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^x a(\tau) d\tau} d\eta + \int_x^\ell e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_x^\ell a(\tau) d\tau} d\eta \right] \\
&\leq m_1^{-1} \|\tilde{f}\|_{C[0,\ell]} \tag{3.12}
\end{aligned}$$

elde edilir. (3.10), (3.11) ve (3.12) eşitsizlikleri (3.9)'da yerine yazılırsa,

$$|\lambda - \tilde{\lambda}| \leq m_1^{-1} c_0 |A - \tilde{A}| + m_1^{-1} c_1 |B - \tilde{B}| + m_1^{-1} \|\tilde{f}\|_{C[0,\ell]} \tag{3.13}$$

olur. Böylece (3.3) eşitsizliği ispatlanmış oldu. Bu sonuc (3.8)'de dikkate alınırsa, (3.2)'nin doğruluğu gösterilmiş olur.

3.2. (1.1) Probleminin Kesin Çözümü İçin Asimptotik Değerlendirmeler

Yardımcı Teorem 3.2 (Lemma). (1.1) probleminin çözümü için aşağıdaki değerlendirmeler doğrudur.

$$|u(x)| \leq (\alpha^{-1} m_1^{-1} c_0 M_1 + 1) |A| + \alpha^{-1} m_1^{-1} c_1 M_1 |B| + \alpha^{-1} (m_1^{-1} M_1 + 1) \|F\|_{C[0,\ell]} \quad (3.14)$$

$$|\lambda| \leq m_1^{-1} c_0 |A| + m_1^{-1} c_1 |B| + m_1^{-1} \|F\|_{C[0,\ell]} \quad (3.15)$$

Burada, $c_0 = \frac{\alpha}{(e^{\alpha\ell} - 1)}$, $c_1 = \frac{\alpha^*}{(1 - e^{-\alpha^*\ell})}$, $\alpha^* = \max_{[0,\ell]} a(x)$ ve $F(x) = f(x,0)$ 'dir.

İspat: (1.1) problemine (2.4)-(2.5) formülleri uygulanırsa,

$$u(x) = u(0) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^x a(\eta) d\eta} + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^x \frac{\partial \bar{f}}{\partial \lambda} \lambda e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_\eta^x a(\tau) d\tau} d\eta + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^x f(\eta, 0) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_\eta^x a(\tau) d\tau} d\eta \quad (3.16)$$

$$u(x) = u(\ell) e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_x^\ell a(\eta) d\eta} - \frac{1}{\varepsilon} \int_x^\ell \frac{\partial \bar{f}}{\partial \lambda} \lambda e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_x^\eta a(\tau) d\tau} d\eta - \frac{1}{\varepsilon} \int_0^x f(\eta, 0) e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_x^\eta a(\tau) d\tau} d\eta \quad (3.17)$$

elde edilir. (3.16)'dan aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir.

$$|u(x)| \leq \left| u(0) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^x a(\eta) d\eta} \right| + \left| \frac{1}{\varepsilon} \int_0^x \frac{\partial \bar{f}}{\partial \lambda} \lambda e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_\eta^x a(\tau) d\tau} d\eta \right| + \left| \frac{1}{\varepsilon} \int_0^x f(\eta, 0) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_\eta^x a(\tau) d\tau} d\eta \right|$$

$$\leq |u(0)| e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^x a(\eta) d\eta} + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^x \left| \frac{\partial \bar{f}}{\partial \lambda} \right| \lambda e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_\eta^x a(\tau) d\tau} d\eta + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^x |f(\eta, 0)| e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_\eta^x a(\tau) d\tau} d\eta$$

$$\leq |A| e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}} + \alpha^{-1} M_1 |\lambda| \left(1 - e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}} \right) + \alpha^{-1} \|F\|_{C[0,\ell]}$$

$e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}} \leq 1$, $1 - e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}} \leq 1$ olduğundan,

$$|u(x)| \leq |A| + \alpha^{-1} M_1 |\lambda| + \alpha^{-1} \|F\|_{C[0,\ell]} \quad (3.18)$$

Şimdi $|\lambda|$ 'yi değerlendirelim. Bunun için (3.16) ve (3.17)'den

$$\begin{aligned} u(0)e^{-\frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^x a(\eta) d\eta} + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^x \frac{\partial \bar{f}}{\partial \lambda} \lambda e^{-\frac{1}{\varepsilon_\eta} \int_0^x a(\tau) d\tau} d\eta + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^x f(\eta, 0) e^{-\frac{1}{\varepsilon_\eta} \int_0^x a(\tau) d\tau} d\eta \\ = u(\ell) e^{\frac{1}{\varepsilon_x} \int_x^\ell a(\eta) d\eta} - \frac{1}{\varepsilon} \int_x^\ell \frac{\partial \bar{f}}{\partial \lambda} \lambda e^{\frac{1}{\varepsilon_x} \int_x^\ell a(\tau) d\tau} d\eta - \frac{1}{\varepsilon} \int_x^\ell f(\eta, 0) e^{\frac{1}{\varepsilon_x} \int_x^\ell a(\tau) d\tau} d\eta, \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon} \left[\int_0^x \frac{\partial \bar{f}}{\partial \lambda} e^{-\frac{1}{\varepsilon_\eta} \int_0^x a(\tau) d\tau} d\eta + \int_x^\ell \frac{\partial \bar{f}}{\partial \lambda} e^{\frac{1}{\varepsilon_x} \int_x^\ell a(\tau) d\tau} d\eta \right] \lambda = -u(0) e^{-\frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^x a(\eta) d\eta} + u(\ell) e^{\frac{1}{\varepsilon_x} \int_x^\ell a(\eta) d\eta} \\ - \frac{1}{\varepsilon} \left[\int_0^x f(\eta, 0) e^{-\frac{1}{\varepsilon_\eta} \int_0^x a(\tau) d\tau} d\eta + \int_x^\ell f(\eta, 0) e^{\frac{1}{\varepsilon_x} \int_x^\ell a(\tau) d\tau} d\eta \right] \end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan,

$$\begin{aligned} \lambda = & - \frac{u(0) e^{-\frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^x a(\eta) d\eta}}{\frac{1}{\varepsilon} \left[\int_0^x \frac{\partial \bar{f}}{\partial \lambda} e^{-\frac{1}{\varepsilon_\eta} \int_0^x a(\tau) d\tau} d\eta + \int_x^\ell \frac{\partial \bar{f}}{\partial \lambda} e^{\frac{1}{\varepsilon_x} \int_x^\ell a(\tau) d\tau} d\eta \right]} \\ & + \frac{u(\ell) e^{\frac{1}{\varepsilon_x} \int_x^\ell a(\eta) d\eta}}{\frac{1}{\varepsilon} \left[\int_0^x \frac{\partial \bar{f}}{\partial \lambda} e^{-\frac{1}{\varepsilon_\eta} \int_0^x a(\tau) d\tau} d\eta + \int_x^\ell \frac{\partial \bar{f}}{\partial \lambda} e^{\frac{1}{\varepsilon_x} \int_x^\ell a(\tau) d\tau} d\eta \right]} \end{aligned}$$

$$\frac{\frac{1}{\varepsilon} \left[\int_0^x f(\eta, 0) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^x a(\tau) d\tau} d\eta + \int_x^\ell e f(\eta, 0) e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_x^\ell a(\tau) d\tau} d\eta \right]}{\frac{1}{\varepsilon} \left[\int_0^x \frac{\partial \bar{f}}{\partial \lambda} e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^x a(\tau) d\tau} d\eta + \int_x^\ell \frac{\partial \bar{f}}{\partial \lambda} e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_x^\ell a(\tau) d\tau} d\eta \right]} \quad (3.19)$$

olur.

(3.19)'un sağ tarafındaki terimleri ayrı ayrı değerlendirelim. Önce (3.19)'un sağ tarafındaki birinci terimi ele alalım,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{u(0) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^x a(\eta) d\eta}}{\frac{1}{\varepsilon} \left[\int_0^x \frac{\partial \bar{f}}{\partial \lambda} e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^x a(\tau) d\tau} d\eta + \int_x^\ell \frac{\partial \bar{f}}{\partial \lambda} e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_x^\ell a(\tau) d\tau} d\eta \right]} \right| \leq \frac{|u(0)|}{\frac{m_1}{\varepsilon} \left[\int_0^x e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^x a(\tau) d\tau} d\eta + \int_x^\ell e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_x^\ell a(\tau) d\tau} d\eta \right]} \\ & \leq \frac{|u(0)|}{\frac{m_1}{\varepsilon} \left[\alpha^{-1} \varepsilon (e^{\frac{\alpha x}{\varepsilon}} - 1) + \alpha^{-1} \varepsilon (e^{\frac{\alpha \ell}{\varepsilon}} - e^{\frac{\alpha x}{\varepsilon}}) \right]} \\ & \leq \frac{|u(0)|}{\alpha^{-1} m_1 (e^{\frac{\alpha \ell}{\varepsilon}} - 1)} \\ & \leq \frac{|u(0)|}{\alpha^{-1} m_1 (e^{\alpha \ell} - 1)} \quad (3.20) \end{aligned}$$

olur. Bu eşitsizliğin son kısmında $\varepsilon \leq 1$ için $e^{\frac{\alpha \ell}{\varepsilon}} - 1 > e^{\alpha \ell} - 1 > 0$ olduğu dikkate alınmıştır. (3.19)'un sağ tarafındaki ikinci terim için,

$$\begin{aligned}
& \frac{u(\ell)e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_x^\ell a(\eta) d\eta}}{\frac{1}{\varepsilon} \left[\int_0^x \frac{\partial \bar{f}}{\partial \lambda} e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^\tau a(\tau) d\tau} d\eta + \int_x^\ell \frac{\partial \bar{f}}{\partial \lambda} e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_x^\eta a(\tau) d\tau} d\eta \right]} \leq \frac{|u(\ell)|}{\frac{m_1}{\varepsilon} \left[\int_0^x e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^\tau a(\tau) d\tau} d\eta + \int_x^\ell e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_x^\eta a(\tau) d\tau} d\eta \right]} \\
& \leq \frac{|u(\ell)|}{\frac{m_1}{\varepsilon} \left[(a^*)^{-1} \varepsilon \left(e^{\frac{a^*(x-\ell)}{\varepsilon}} - e^{-\frac{a^* \ell}{\varepsilon}} \right) + (a^*)^{-1} \varepsilon \left(1 - e^{-\frac{a^*(x-\ell)}{\varepsilon}} \right) \right]} \\
& \leq \frac{|u(\ell)|}{m_1 (a^*)^{-1} \left(1 - e^{-\frac{a^* \ell}{\varepsilon}} \right)} \\
& \leq \frac{|u(\ell)|}{m_1 (a^*)^{-1} \left(1 - e^{-a^* \ell} \right)} \tag{3.21}
\end{aligned}$$

olur. Bu eşitsizliğin son kısmında $\varepsilon \leq 1$ için $1 - e^{-\frac{a^* \ell}{\varepsilon}} \geq 1 - e^{-a^* \ell} > 0$ olduğu dikkate alınmıştır.

Son olarak, (3.19)'un sağ tarafındaki üçüncü terim için,

$$\begin{aligned}
& \frac{\left| \frac{1}{\varepsilon} \left[\int_0^x f(\eta, 0) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^\tau a(\tau) d\tau} d\eta + \int_x^\ell f(\eta, 0) e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_x^\eta a(\tau) d\tau} d\eta \right] \right|}{\frac{1}{\varepsilon} \left[\int_0^x \frac{\partial \bar{f}}{\partial \lambda} e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^\tau a(\tau) d\tau} d\eta + \int_x^\ell \frac{\partial \bar{f}}{\partial \lambda} e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_x^\eta a(\tau) d\tau} d\eta \right]} \\
& \leq \frac{\|F\|_{C[0, \ell]} \left[\int_0^x e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^\tau a(\tau) d\tau} d\eta + \int_x^\ell e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_x^\eta a(\tau) d\tau} d\eta \right]}{\frac{m_1}{\varepsilon} \left[\int_0^x e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^\tau a(\tau) d\tau} d\eta + \int_x^\ell e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_x^\eta a(\tau) d\tau} d\eta \right]}
\end{aligned}$$

$$\leq m_1^{-1} \|F\|_{C[0,\ell]} \quad (3.22)$$

elde edilir.

Buradan, (3.20), (3.21) ve (3.22) eşitsizlikleri (3.19)'da yerine yazılırsa,

$$|\lambda| \leq m_1^{-1} c_0 |A| + m_1^{-1} c_1 |B| + m_1^{-1} \|F\|_{C[0,\ell]} \quad (3.23)$$

olur. Böylece (3.15) eşitsizliği ispatlanmış oldu. Buradan, (3.23) eşitsizliğini (3.18)'de dikkate alırsak, (3.14)'ün doğruluğu gösterilmiş olur.

3.3. (1.1) Problemi için Fark Şemasının Kurulması

$$\omega_h = \left\{ x_i = ih, i = 1, 2, \dots, N; h = \frac{\ell}{N} \right\}, \bar{\omega}_h = \omega_h \cup \{x = 0, \ell\}$$

$[0, \ell]$ aralığındaki düzgün şebeke olsun. Fark şemasının kurulması için aşağıdaki özdeşlikten yararlanılacaktır.

$$\chi_i h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} Lu \varphi_i(x) dx = \chi_i h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x, \lambda) \varphi_i(x) dx, i = 1, \dots, N \quad (3.24)$$

Burada,

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} e^{\frac{a_i}{\varepsilon}(x_i-x)}, & x_{i-1} < x < x_i \\ 0 & , x \notin (x_{i-1}, x_i) \end{cases}$$

$$\chi_i = \left(h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i(x) dx \right)^{-1} = \frac{a_i \rho}{1 - e^{-a_i \rho}}, \rho = \frac{h}{\varepsilon}$$

dir. $\varphi_i(x)$ fonksiyonu,

$$\begin{aligned} -\varepsilon \varphi_i'(x) + a_i \varphi_i(x) &= 0, \quad x_{i-1} < x < x_i \\ \varphi_i(x) &= 1 \end{aligned} \quad (3.25)$$

probleminin çözümü olduğunu da ayrıca kaydedelim. (3.24)'ü daha açık bir şekilde yazılırsa,

$$\chi_i h^{-1} \varepsilon \int_{x_{i-1}}^{x_i} u'(x) \varphi_i(x) dx + \chi_i h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} a(x) u(x) \varphi_i(x) dx = \chi_i h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x, \lambda) \varphi_i(x) dx$$

olur. Buradan,

$$\chi_i h^{-1} \varepsilon \int_{x_{i-1}}^{x_i} u'(x) \varphi_i(x) dx + a_i \chi_i h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} u(x) \varphi_i(x) dx = f(x_i, \lambda) - R_i \quad (3.26)$$

yazılır. Burada R_i kalan terimi,

$$R_i = \chi_i h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} [a(x) - a(x_i)] u(x) \varphi_i(x) dx + \chi_i h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} [f(x_i, \lambda) - f(x, \lambda)] \varphi_i(x) dx \quad (3.27)$$

biçimindedir.

Daha sonra, (2.2) ve (2.1) formüllerini (x_{i-1}, x_i) aralığında $p(x) = \varphi_i(x)$, $f(x) = u(x)$ ve $\sigma = 1$ alınarak (3.26)'nın sol tarafındaki birinci ve ikinci terimlere sırayla uygulanır ve (3.25) bağıntısı göz önünde bulundurulursa,

$$\begin{aligned} & \chi_i h^{-1} \varepsilon \int_{x_{i-1}}^{x_i} u'(x) \varphi_i(x) dx + a_i \chi_i h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} u(x) \varphi_i(x) dx \\ & = \varepsilon \left\{ 1 + \chi_i h^{-1} a_i \varepsilon^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_i) \varphi_i(x) dx \right\} u_{\bar{x},i} + a_i u_i \quad (3.28) \end{aligned}$$

elde edilir. (3.26) ve (3.28)'den

$$\begin{aligned} l_h u_i & \equiv \varepsilon \theta_i u_{\bar{x},i} + a_i u_i = f(x_i, \lambda) - R_i, \quad i = 1, \dots, N \\ u_0 & = A, \quad u_N = B \end{aligned} \quad (3.29)$$

olur. Burada θ_i , basit işlemler sonucu

$$\theta_i = 1 + \chi_i h^{-1} a_i \varepsilon^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_i) \varphi(x) dx = \frac{a_i \rho}{1 - e^{-a_i \rho}} e^{-a_i \rho}, \quad \rho = \frac{h}{\varepsilon} \quad (3.30)$$

olarak bulunur.

Böylece, (3.29)'da R_i ihmal edilirse, (1.1) problemi için, aşağıdaki fark şeması yazılabilir.

$$\begin{aligned} l_h y_i &\equiv \varepsilon \theta_i y_{\bar{x},i} + a_i y_i = f(x_i, \mu) \quad , i = 1, \dots, N-1 \\ y_0 &= A \quad , \quad y_N = B . \end{aligned} \quad (3.31)$$

3.4. Hata Değerlendirmesi

Yaklaşık çözümün hatasının değerlendirilmesi için, $z = u - y$ olsun. Bu durumda (3.29) ve (3.31)'den aşağıdaki problem yazılabilir.

$$\begin{aligned} l_h z_i &\equiv \varepsilon \theta_i z_{\bar{x},i} + a_i z_i = f(x_i, \mu) - f(x_i, \lambda) + R_i \quad , i = 1, \dots, N \\ z_0 &= 0 \quad , \quad z_N = 0 \end{aligned}$$

yazılır. Buradan,

$$\begin{aligned} l_h z_i &\equiv \varepsilon \theta_i z_{\bar{x},i} + a_i z_i = \tilde{f}_\lambda(\mu - \lambda) + R_i \quad , i = 1, \dots, N \\ z_0 &= 0 \quad , \quad z_N = 0 \end{aligned} \quad (3.32)$$

olur.

Yardımcı Teorem 3.3(Lemma). (3.27) ifadesi için aşağıdaki değerlendirme doğrudur.

$$|R_i| \leq Ch \quad , i = 1, \dots, N . \quad (3.33)$$

İspat: R_i kalan terimi $R_i = R_i^{(1)} + R_i^{(2)}$ olarak yazılabilir. Burada, $R_i^{(1)}$ ve $R_i^{(2)}$,

$$R_i^{(1)} = \chi_i h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} [a(x) - a(x_i)] u(x) \varphi_i(x) dx \quad (3.34)$$

$$R_i^{(2)} = \chi_i h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} [f(x_i, \lambda) - f(x, \lambda)] \varphi_i(x) dx \quad (3.35)$$

biçimindedir.

İlk önce (3.34)'ün

$$|R_i^{(1)}| \leq C_1 h$$

olduğu gösterilecek. Buradan,

$$|R_i^{(1)}| \leq \chi_i h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |a(x) - a(x_i)| |u(x)| \varphi_i(x) dx$$

yazılır. Ortalama değer teoreminden,

$$\begin{aligned} |a(x) - a(x_i)| &= |a'(\eta_i)| |x - x_i| \\ |a(x) - a(x_i)| &\leq \max_{[0, \ell]} |a'(x_i)| \max_{[x_{i-1}, x_i]} |x - x_i| \end{aligned}$$

olur. $\max_{[x_{i-1}, x_i]} |x - x_i| \leq h$ ve $\max_{[0, \ell]} |a'(x_i)| \leq C_1$ olduğundan,

$$|a(x) - a(x_i)| \leq C_1 h, \quad x_{i-1} < \eta_i < x_i \quad (3.36)$$

elde edilir. Lemma 3.2'ye göre $|u(x)| \leq C_0$ yazılabileceğinden ve

$\chi_i h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i(x) dx = 1$ olduğundan,

$$|R_i^{(1)}| \leq C_0 C_1 h \quad (3.37)$$

yazılır.

Şimdi (3.35)'in

$$|R_i^{(2)}| \leq N_1 h$$

olduğunu gösterelim. Açıktır ki

$$|R_i^{(2)}| \leq \chi_i h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x_i, \lambda) - f(x, \lambda)| \varphi_i(x) dx.$$

Ortalama değer teoreminden,

$$|f(x_i, \lambda) - f(x, \lambda)| = \left| \frac{\partial f}{\partial x}(\eta_i, \lambda) \right| |x_i - x|$$

$$|f(x_i, \lambda) - f(x, \lambda)| \leq \max_{[0, \ell]} \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, \lambda) \right| \max_{[x_{i-1}, x_i]} |x_i - x|$$

yazılır. $\max_{[x_{i-1}, x_i]} |x - x_i| \leq h$ ve $\max_{[0, \ell]} \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x_i, \lambda) \right| \leq N_1$ olduğundan,

$$|f(x_i, \lambda) - f(x, \lambda)| \leq N_1 h, \quad x_{i-1} < \eta < x_i, \quad i = 1, \dots, N \quad (3.38)$$

olur. (3.35) ve (3.38)'den ve ayrıca, $\chi_i h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i(x) dx = 1$ olduğundan,

$$|R_i^{(2)}| \leq N_1 h \quad (3.39)$$

yazılır. Böylece, (3.37) ve (3.39)'dan ise,

$$|R_i| \leq |R_i^{(1)}| + |R_i^{(2)}|$$

$$\leq C_0 C_1 h + N_1 h$$

elde edilir. Buradan, (3.33)'ün doğruluğu açıktır.

Lemma 3.4. (3.32) problemi için aşağıdaki değerlendirmeler doğrudur.

$$\|z\|_{C(\omega_h)} \leq \alpha^{-1} |\mu - \lambda| \|\tilde{f}_\lambda\|_{C[0, \ell]} + \alpha^{-1} \|R\|_{C(\omega_h)} \quad (3.40)$$

$$|\mu - \lambda| \leq m^{-1} \|R\|_{C(\omega_h)} \quad (3.41)$$

İspat: (3.40) eşitsizliği (3.41)'e bağlı olduğundan önce (3.41) eşitsizliğinin doğruluğu gösterilmiştir. Bunun için, (3.32) bağıntısından,

$$(\varepsilon \theta_i + h a_i) z_i = \varepsilon \theta_i z_{i-1} + h \tilde{f}_\lambda(\mu - \lambda) + h R_i, \quad i = 1, \dots, N-1$$

eşitliği yazılabilir. Buradan,

$$z_i = \frac{\varepsilon \theta_i}{\varepsilon \theta_i + h a_i} z_{i-1} + \frac{h \tilde{f}_\lambda(\mu - \lambda)}{\varepsilon \theta_i + h a_i} + \frac{h R_i}{\varepsilon \theta_i + h a_i}$$

biçiminde birinci dereceden bir fark denklemi elde edilir. z_i 'ye göre çözümlürse,

$$z_i = z_0 \prod_{k=1}^i \left(\frac{\varepsilon \theta_k}{\varepsilon \theta_k + h a_k} \right) + h \sum_{\ell=1}^i \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial \lambda} \right)_\ell (\mu - \lambda)}{\varepsilon \theta_\ell + h a_\ell} \prod_{j=\ell+1}^i \left(\frac{\varepsilon \theta_j}{\varepsilon \theta_j + h a_j} \right)$$

$$+ h \sum_{\ell=1}^i \frac{R_{\ell}}{\varepsilon \theta_{\ell} + h a_{\ell}} \prod_{j=\ell+1}^i \left(\frac{\varepsilon \theta_j}{\varepsilon \theta_j + h a_j} \right) \quad (3.42)$$

bulunur. (3.42)'de $z_0 = 0$ olduğu dikkate alınır,

$$z_i = h \sum_{\ell=1}^i \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial \lambda} \right)_{\ell} (\mu - \lambda)}{\varepsilon \theta_{\ell} + h a_{\ell}} \prod_{j=\ell+1}^i \left(\frac{\varepsilon \theta_j}{\varepsilon \theta_j + h a_j} \right) + h \sum_{\ell=1}^i \frac{R_{\ell}}{\varepsilon \theta_{\ell} + h a_{\ell}} \prod_{j=\ell+1}^i \left(\frac{\varepsilon \theta_j}{\varepsilon \theta_j + h a_j} \right) \quad (3.43)$$

olur. Burada $i = N$ alınır,

$$z_N = h \sum_{\ell=1}^N \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial \lambda} \right)_{\ell} (\mu - \lambda)}{\varepsilon \theta_{\ell} + h a_{\ell}} \prod_{j=\ell+1}^N \left(\frac{\varepsilon \theta_j}{\varepsilon \theta_j + h a_j} \right) + h \sum_{\ell=1}^N \frac{R_{\ell}}{\varepsilon \theta_{\ell} + h a_{\ell}} \prod_{j=\ell+1}^N \left(\frac{\varepsilon \theta_j}{\varepsilon \theta_j + h a_j} \right)$$

yazılabilir. Burada (3.32)'nin ikinci şartı $z_N = 0$ olduğundan,

$$\begin{aligned} \mu - \lambda &= \frac{h \sum_{\ell=1}^N \frac{R_{\ell}}{\varepsilon \theta_{\ell} + h a_{\ell}} \prod_{j=\ell+1}^N \left(\frac{\varepsilon \theta_j}{\varepsilon \theta_j + h a_j} \right)}{h \sum_{\ell=1}^N \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial \lambda} \right)_{\ell}}{\varepsilon \theta_{\ell} + h a_{\ell}} \prod_{j=\ell+1}^N \left(\frac{\varepsilon \theta_j}{\varepsilon \theta_j + h a_j} \right)} \end{aligned}$$

elde edilir. Kolayca görülebilir ki, keyfi j 'ler için, $\frac{\varepsilon \theta_j}{\varepsilon \theta_j + h a_j} \geq 0$ olduğundan,

$$|\mu - \lambda| \leq \frac{h \|R_{\ell}\|_{C(\omega_h)} \sum_{\ell=1}^N \frac{1}{\varepsilon \theta_{\ell} + h a_{\ell}} \prod_{j=\ell+1}^N \left(\frac{\varepsilon \theta_j}{\varepsilon \theta_j + h a_j} \right)}{h m_1 \sum_{\ell=1}^N \frac{1}{\varepsilon \theta_{\ell} + h a_{\ell}} \prod_{j=\ell+1}^N \left(\frac{\varepsilon \theta_j}{\varepsilon \theta_j + h a_j} \right)}$$

eşitsizliğini yazabilir. Buradan,

$$|\mu - \lambda| \leq m_1^{-1} \|R_{\ell}\|_{C(\omega_h)} \quad (3.44)$$

olur.

Şimdi ise, z_i 'nin değerlendirmesine geçildiğinde, kolayca görülebilir ki, $\ell_h z_i$ fark operatörü için, ayrık maksimum prensibi doğrudur:

Eğer, $\ell_h z_i \geq 0$, $i = 1, \dots, N$ ve $z_0 \geq 0$ ise, bu durumda $z_i \geq 0$, $i = 0, 1, \dots, N$ olduğu görülür. Buradan (3.40) eşitsizliği direkt olarak (3.32)'den çıkar.

Teorem 3.1. (3.31) fark probleminin çözümü $C(\omega_h)$ normunda (1.1) probleminin çözümüne ε 'a göre $O(h)$ hızıyla düzgün yakınsaktır. Bu da,

$$\|u - \mathcal{Y}\|_{C(\bar{\omega}_h)} \leq Ch, \quad (3.45)$$

$$|\lambda - \mu| \leq Ch. \quad (3.46)$$

İspat. Yardımcı Teorem 3.3(Lemma)'ün direkt olarak (3.40) ve (3.41)'de dikkate alınmasıyla (3.45) ve (3.46)'nın $O(h)$ olduğu kolayca görülür.

4. LİNEER OLMAYAN PROBLEMİN ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde λ parametresine bağlı singular pertürbe özellikli non-lineer problem incelenmiştir.

Bu bölüm dört alt bölümden oluşmaktadır. Birinci alt bölümde, (1.2) problemi için, asipmtotik değerlendirme Yardımcı Teorem 4.1(Lemma)'de ispatlanmıştır. İkinci alt bölümde, (1.2) problemi için probleminin fark şeması, (2.1) ve (2.2) formüllerinden yararlanılarak kurulmuştur. Üçüncü alt bölümde, şebekenin seçimi için gerekli ve açıklayıcı bilgiler verilmiştir. Dördüncü alt bölümde, (1.2) problemine uygun kurulan fark şemasının yakınsaklığı ispatlanmış ve yakınsama hızı belirlenmiştir.

$$Lu \equiv \varepsilon u'(x) + F(x, u, \lambda) = 0, \quad 0 < x \leq \ell, \quad (4.1)$$

$$u(0) = A, \quad (4.2)$$

$$u(\ell) = B. \quad (4.3)$$

Burada $\varepsilon \in (0,1]$ küçük parametre, A, B verilmiş sabitler ve $F(x, u, \lambda)$ ($0 \leq x \leq \ell, -\infty < u < \infty, -\infty < \lambda < \infty$) sürekli fonksiyondur. Ayrıca, $F(x, u, \lambda)$ ($0 \leq x \leq \ell, -\infty < u < \infty, -\infty < \lambda < \infty$) fonksiyonu x 'e, u 'ya ve λ 'ya göre sürekli türevlenebilir olup,

$$0 < m_1 \leq \frac{\partial F}{\partial \lambda}(x, u, \lambda) \leq M_1 < \infty, \quad (4.4)$$

$$0 < \alpha \leq \frac{\partial F}{\partial u}(x, u, \lambda) \leq \alpha^* < \infty, \quad (4.5)$$

$$\left| \frac{\partial^i F}{\partial x^i}(x, u, \lambda) \right| \leq N_i < \infty, \quad i = 0, 1 \quad (4.6)$$

şartlarını sağlamaktadır. Burada, m_1 , M_1 , α ve N_i ($i = 0, 1$) sonlu sabitlerdir.

4.1. (4.1)-(4.3) Probleminin Kesin Çözümü İçin Asimptotik Değerlendirmeler

Yardımcı Teorem 4.1(Lemma). (4.1)-(4.3) probleminin çözümü için aşağıdaki değerlendirmeler doğrudur.

$$|u(x)| \leq (\alpha^{-1} m_1^{-1} c_0 M_1 + 1) |A| + \alpha^{-1} m_1^{-1} c_1 M_1 |B| + \alpha^{-1} (m_1^{-1} M_1 + 1) \|\Phi\|_{C[0, \ell]} \quad (4.7)$$

$$|\lambda| \leq m_1^{-1} c_0 |A| + m_1^{-1} c_1 |B| + m_1^{-1} \|\Phi\|_{C[0, \ell]} \quad (4.8)$$

$$|u'(x)| \leq C \left\{ 1 + \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}} \right\} \quad (4.9)$$

Burada, $c_0 = \frac{\alpha}{(e^{\alpha \ell} - 1)}$, $c_1 = \frac{a^*}{(1 - e^{-a^* \ell})}$, $\Phi(x) = F(x, 0, 0)$ 'dir.

İspat: $F(x, u, \lambda)$ fonksiyonu için ortalama değer teoreminden gelen,

$$F(x, u, \lambda) = F(x, 0, \lambda) + \frac{\partial F}{\partial u}(x, \bar{u}, \lambda) u \quad (0 < \bar{u} < u)$$

bağıntısını kullanılırsa, (4.1) denklemini şu şekilde yazılabilir;

$$\varepsilon u'(x) + a(x)u(x) = f(x, \lambda), \quad (4.10)$$

burada, $a(x) = \frac{\partial F}{\partial u}(x, \bar{u}, \lambda)$, $f(x, \lambda) = F(x, 0, \lambda)$ biçimindedir.

Buradan, (4.7) ve (4.8) eşitsizliklerinin doğruluğu, Yardımcı Teorem 3.2 (Lemma)'nin direkt olarak, (4.10), (4.2) ve (4.3)'e uygulamasının sonucu olduğu görülmektedir.

Şimdi (4.9)'un doğruluğunu gösterelim. (4.1) probleminin $u(0) = A$ şartından, (4.4), (4.5) ve (4.8)'i dikkate almak suretiyle,

$$|u'(0)| \leq \frac{1}{\varepsilon} |F(0, A, \lambda)| \leq \frac{C_1}{\varepsilon} \quad (4.11)$$

yazılır. Ayrıca, (4.1) denkleminin türevi alınırsa,

$$\varepsilon u''(x) + \frac{\partial F}{\partial u}(x, u, \lambda) u'(x) + \frac{\partial F}{\partial x}(x, u, \lambda) = 0$$

bulunur. Buradan,

$$\varepsilon v'(x) + a(x)v(x) = \phi(x) \quad (4.12)$$

yazılır.

Burada $v(x) = u'(x)$, $a(x) = \frac{\partial F}{\partial u}(x, u, \lambda)$ ve $\phi(x) = -\frac{\partial F}{\partial x}(x, u, \lambda)$

dir. (4.12)'den,

$$v(x) = v(0)e^{-\frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^x a(\eta) d\eta} - \frac{1}{\varepsilon} \int_0^x \phi(\eta) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_\eta^x a(\tau) d\tau} d\eta$$

olur. Buradan,

$$|v(x)| \leq \left| v(0) e^{-\frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^x a(\eta) d\eta} \right| + \left| \frac{1}{\varepsilon} \int_0^x \phi(\eta) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_\eta^x a(\tau) d\tau} d\eta \right| \quad (4.13)$$

elde edilir.

Şimdi (4.13)'ün sağ tarafındaki birinci terim (4.11) ve (4.5)'e göre değerlendirilirse,

$$\left| v(0) e^{-\frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^x a(\eta) d\eta} \right| \leq \frac{C_1}{\varepsilon} e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}} \quad (4.14)$$

olur. (4.13)'ün sağ tarafındaki ikinci terim (4.6)'ya göre değerlendirilirse,

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\varepsilon} \int_0^x \phi(\eta) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_\eta^x a(\tau) d\tau} d\eta \right| &\leq \frac{1}{\varepsilon} N_1 \int_0^x e^{-\frac{\alpha(x-\eta)}{\varepsilon}} d\eta \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon} N_1 \alpha^{-1} \varepsilon (1 - e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}}) \\ &\leq C_2 \end{aligned} \quad (4.15)$$

bulunur. Buradan, (4.14) ve (4.15) eşitsizlikleri (4.13)'de yerine yazılırsa,

$$|v(x)| \leq \frac{C_1}{\varepsilon} e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}} + C_2$$

bulunur.

Buda (4.9)'un doğruluğunu gösterir.

4.2. (1.2) Problemi için Fark Şemasının Kurulması

$[0, \ell]$ aralığındaki düzgün olmayan şebekeyi ele alalım:

$$\hat{\omega} = \{0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{N-1} < x_N = \ell, h_i = x_i - x_{i-1}\}.$$

Fark şemasının kurulması için aşağıdaki özdeşlikten yararlanılacaktır.

$$h_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} Lu\varphi_i(x) dx = 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (4.16)$$

Burada,

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 1, & x_{i-1} < x < x_i \\ 0, & x \notin (x_{i-1}, x_i), \end{cases}$$

dir. $\varphi_i(x)$ fonksiyonu, (x_{i-1}, x_i) aralığının karakteristik fonksiyonudur. Buradan, (4.16) ifadesi daha açık bir şekilde yazılırsa,

$$h_i^{-1} \varepsilon \int_{x_{i-1}}^{x_i} u'(x) \varphi_i(x) dx + h_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} F(x, u, \lambda) \varphi_i(x) dx = 0 \quad (4.17)$$

olur. Buradan, (4.17)'nin sol tarafındaki birinci terim için,

$$h_i^{-1} \varepsilon \int_{x_{i-1}}^{x_i} u'(x) dx = \varepsilon u_{\bar{x}, i} \quad (4.18)$$

olur.

Şimdi, (4.17)'nin sol tarafındaki ikinci terim için,

$$\begin{aligned} h_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} F(x, u, \lambda) \varphi_i(x) dx &= h_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} [F(x, u, \lambda) - F(x_i, u_i, \lambda) + F(x_i, u_i, \lambda)] \varphi_i(x) dx \\ &= F(x_i, u_i, \lambda) + h_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} [F(x, u, \lambda) - F(x_i, u_i, \lambda)] \varphi_i(x) dx \end{aligned}$$

$$= F(x_i, u_i, \lambda) + R_i \quad (4.19)$$

yazılır.

Burada R_i kalan terimi,

$$\begin{aligned} R_i &= h_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} [F(x, u, \lambda) - F(x_i, u_i, \lambda)] \varphi_i(x) dx = h_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx \left(\int_{x_i}^x \frac{d}{d\eta} F(\eta, u(\eta), \lambda) \right) \\ &= h_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (\eta - x_{i-1}) \frac{d}{d\xi} F(\eta, u(\eta), \lambda) d\eta \end{aligned} \quad (4.20)$$

biçimindedir. (4.18) ve (4.19)'dan

$$\begin{aligned} \ell_h u_i &\equiv \varepsilon u_{\bar{x},i} + F(x_i, u_i, \lambda) + R_i = 0, \\ u_0 &= A, \quad u_N = B, \quad i = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (4.21)$$

olur.

Böylece, (4.21)'de R_i ihmal edilirse, (4.1)-(4.3) problemi için aşağıdaki fark şeması yazılır.

$$\begin{aligned} \ell_h y_i &\equiv \varepsilon y_{\bar{x},i} + F(x_i, y_i, \mu) = 0, \\ y_0 &= A, \quad y_N = B, \quad i = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (4.22)$$

4.3. Şebekenin seçimi

(4.22)'deki fark şemasının, ε - düzgün yakınsaması için uygun bir ϖ şebekesi kullanacağız. Bu, sınır katı civarında yoğunlaşan, özel düzgün olmayan bir şebekedir: (4.9)'a göre $u(x)$, $x = 0$ 'da $\alpha^{-1} \varepsilon |\ln \varepsilon|$ genişliğinde bir sınır katına sahiptir. $[0, \ell]$ aralığındaki uygun ϖ şebekesi

$$\sigma = \min \left\{ \frac{\ell}{2}, \alpha^{-1} \varepsilon |\ln \varepsilon| \right\} \quad (4.23)$$

olmak üzere, $[0, \ell]$ aralığı, $[0, \sigma]$ ve $[\sigma, \ell]$ biçiminde iki alt aralığa bölerek elde edilmiştir.

$[0, \sigma]$ aralığı, sınır katının içerisindedir. Burada daha sık adımlı bir şebeke kullanacağız. $[\sigma, \ell]$ aralığı, çözümün düzgün olan kısmını kapsamaktadır. Bu aralıkta ise, kaba bir şebeke kullanılmıştır. Şebekeye karşılık gelen noktalar;

Eğer $\sigma < \frac{\ell}{2}$ ise,

$$x_i \in [0, \sigma] : x_i = -\alpha^{-1} \varepsilon \ln \left[1 - (1 - \varepsilon) \frac{2i}{N} \right], \quad i = 0, 1, \dots, N/2, \quad (4.24)$$

Eğer $\sigma = \frac{\ell}{2}$ ise,

$$x_i = -\alpha^{-1} \varepsilon \ln \left[1 - (1 - e^{-\frac{\alpha \ell}{2\varepsilon}}) \frac{2i}{N} \right], \quad i = 0, 1, \dots, N/2, \quad (4.25)$$

$$x_i \in (\sigma, \ell] : x_i = \sigma + (i - N/2)h, \quad i = \frac{N}{2} + 1, \dots, N, \quad h = 2(\ell - \sigma)/N \quad (4.26)$$

biçimindedir.

Burada genelliği bozmadan N 'nin çift olduğu kabul edilmiştir. (4.24)-(4.26) ile verilen ω özel şebekesi $\hat{\omega}$ ile tanımlanmıştır.

4.4. Hata Değerlendirmesi

Yaklaşık çözümün hatasının değerlendirilmesi için $z = u - y$ olsun. Bu durumda, (4.21) ve (4.22)'den aşağıdaki problem yazılabilir.

$$l_h z_i \equiv \varepsilon z_i + F(x, u, \lambda) - F(x_i, u_i, \lambda) + R_i = 0, \quad i = 1, \dots, N$$

$$z_0 = 0, \quad z_N = 0.$$

Buradan,

$$l_h z_i \equiv \varepsilon z_{\bar{x}_i} + \tilde{F}_\lambda(\lambda - \mu) + R_i = 0, \quad i = 1, \dots, N$$

$$z_0 = 0, \quad z_N = 0. \quad (4.27)$$

olur.

Yardımcı Teorem 4.2(Lemma). (4.20) ifadesi için aşağıdaki değerlendirme doğrudur.

$$|R_i| \leq CN^{-1} \quad (4.28)$$

İspat: (4.20) formülünde, $\frac{d}{dx} F(x, u(x), \lambda) dx = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial u} u'$, $\left| \frac{\partial F}{\partial x} \right| \leq N_1$,

$\left| \frac{\partial F}{\partial u} \right| \leq M$ ve $|\eta - x_{i-1}| \leq h_i$ ($x_{i-1} \leq \eta \leq x_i$) olduğu dikkate alınır,

$$\begin{aligned} |R_i| &\leq h_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |\eta - x_{i-1}| \left| \frac{\partial F}{\partial x} \right| d\eta + h_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |\eta - x_{i-1}| \left| \frac{\partial F}{\partial x} \right| |u'(\eta)| d\eta \\ &\leq h_i^{-1} h_i N_1 \int_{x_{i-1}}^{x_i} d\eta + h_i^{-1} h_i M \int_{x_{i-1}}^{x_i} |u'(\eta)| d\eta \\ &\leq h_i N_1 + M \int_{x_{i-1}}^{x_i} |u'(\eta)| d\eta \end{aligned}$$

olur. Buradan (4.9)'un kullanılmasıyla,

$$|R_i| \leq C \left(h_i + \int_{x_{i-1}}^{x_i} |u'(x)| dx \right), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (4.29)$$

olduğu gösterilecektir.

$\omega = \hat{\omega}$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda R_i , $[0, \sigma]$ ve $[\sigma, \ell]$ aralıkları üzerinde ayrı ayrı değerlendirilmiştir.

İlk önce $\sigma < \frac{\ell}{2}$ durumu dikkate alındığında $\sigma = -\alpha^{-1} \varepsilon \ln \varepsilon$ olur. Sınır

katının dışında $[\sigma, \ell]$ aralığında (4.9)'a göre $|u'(x)| \leq C$ (veya $\alpha^{-1} e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}} \leq 1$) ve ayrıca $h_i = h$ olur.

Diğer taraftan, (4.9) ile $[0, \sigma]$ sınır katlı bölgede (4.29) eşitsizliği,

$$|R_i| \leq C \left(h_i + \alpha^{-1} \left(e^{-\frac{\alpha x_{i-1}}{\varepsilon}} - e^{-\frac{\alpha x_i}{\varepsilon}} \right) \right), \quad i = 1, 2, \dots, N/2 \quad (4.30)$$

eşitsizliğine dönüşür.

$$\begin{aligned} h_i = x_i - x_{i-1} &= -\alpha^{-1} \varepsilon \left\{ \ln \left[1 - (1 - \varepsilon) \frac{2i}{N} \right] + \ln \left[1 - (1 - \varepsilon) \frac{2(i-1)}{N} \right] \right\} \\ &\leq 2\alpha^{-1} (1 - \varepsilon) N^{-1}, \end{aligned}$$

ve

$$e^{-\frac{\alpha x_{i-1}}{\varepsilon}} - e^{-\frac{\alpha x_i}{\varepsilon}} = 2(1-\varepsilon)N^{-1}$$

olduğundan ve (4.28)'den

$$|R_i| \leq 4\alpha CN^{-1}, \quad i=1, \dots, N/2$$

elde edilir.

Şimdi $\sigma = \frac{\ell}{2}$ durumunu göz önüne alalım. Buradan $\frac{\ell}{2} < -\alpha^{-1}\varepsilon \ln \varepsilon$ olur.

Bundan dolayı, $x_i \in [0, \sigma]$ için yukarıdaki sık(küçük) adımlı şebeke bölgesinde ki

durum gibi ele alınacaktır. $x_i \in [\sigma, \ell]$ ve $h = \frac{\ell}{2}$ için

$$\max_{N/2 \leq i \leq N} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}} \leq h \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{\alpha \ell}{2\varepsilon}} \leq \frac{2e^{-1}}{\alpha \ell} h = 2e^{-1} \alpha^{-1} N^{-1},$$

olduğundan ve (4.28)'den

$$|R_i| \leq C \left(\ell + \frac{2}{e\alpha} \right) N^{-1}, \quad i = N/2, \dots, N$$

elde edilir.

Buda istenen sonuçtur.

Yardımcı Teorem 4.3(Lemma). (4.27) problemi için aşağıdaki değerlendirmeler doğrudur.

$$\|z\|_{C(\varpi_h)} \leq \alpha^{-1} |\lambda - \mu| \|\tilde{F}_\lambda\|_{C[0, \ell]} + \alpha^{-1} \|R\|_{C(\varpi_h)} \quad (4.31)$$

$$|\lambda - \mu| \leq m^{-1} \|R\|_{C(\varpi_h)} \quad (4.32)$$

İspat: Önce (4.32) bağıntısının doğruluğunu gösterelim. Bunun için, (4.27) bağıntısından,

$$(\varepsilon + h_i a_i) z_i = \varepsilon z_{i-1} + h_i \tilde{F}_\lambda(\lambda - \mu) - h_i R_i, \quad i = 1, \dots, N-1$$

eşitliği yazılabilir. Buradan,

$$z_i = \frac{\varepsilon}{\varepsilon + h_i a_i} z_{i-1} + \frac{h_i \tilde{F}_\lambda(\lambda - \mu)}{\varepsilon + h_i a_i} - \frac{h_i R_i}{\varepsilon + h_i a_i}$$

biçiminde birinci dereceden bir fark denklemi elde edilir. z_i 'ye göre çözümlerse,

$$z_i = z_0 \prod_{k=1}^i \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon + h_k a_k} \right) + h_i \sum_{\ell=1}^i \frac{\left(\frac{\partial F}{\partial \lambda} \right)_\ell (\lambda - \mu)}{\varepsilon + h_\ell a_\ell} \prod_{j=\ell+1}^i \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon + h_j a_j} \right) - h_i \sum_{\ell=1}^i \frac{R_\ell}{\varepsilon + h_\ell a_\ell} \prod_{j=\ell+1}^i \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon + h_j a_j} \right) \quad (4.33)$$

bulunur. (4.32)'de $z_0 = 0$ olduğu dikkate alınır,

$$z_i = h_i \sum_{\ell=1}^i \frac{\left(\frac{\partial F}{\partial \lambda} \right)_\ell (\lambda - \mu)}{\varepsilon + h_\ell a_\ell} \prod_{j=\ell+1}^i \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon + h_j a_j} \right) - h_i \sum_{\ell=1}^i \frac{R_\ell}{\varepsilon + h_\ell a_\ell} \prod_{j=\ell+1}^i \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon + h_j a_j} \right) \quad (4.34)$$

olur.

Burada $i = N$ alındığında,

$$z_N = h_N \sum_{\ell=1}^N \frac{\left(\frac{\partial F}{\partial \lambda} \right)_\ell (\lambda - \mu)}{\varepsilon + h_\ell a_\ell} \prod_{j=\ell+1}^N \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon + h_j a_j} \right) - h_N \sum_{\ell=1}^N \frac{R_\ell}{\varepsilon + h_\ell a_\ell} \prod_{j=\ell+1}^N \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon + h_j a_j} \right)$$

yazılabilir.

Buradan, $z_N = 0$ olduğu dikkate alınır,

$$\lambda - \mu = \frac{h_N \sum_{\ell=1}^N \frac{R_\ell}{\varepsilon + h_\ell a_\ell} \prod_{j=\ell+1}^N \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon + h_j a_j} \right)}{h_N \sum_{\ell=1}^N \frac{\left(\frac{\partial F}{\partial \lambda} \right)_\ell}{\varepsilon + h_\ell a_\ell} \prod_{j=\ell+1}^N \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon + h_j a_j} \right)}$$

elde edilir. Kolayca görülebilir ki, keyfi j 'ler için, $\frac{\varepsilon}{\varepsilon + h_j a_j} \geq 0$ olduğundan,

$$|\lambda - \mu| \leq \frac{h_N \|R_\ell\|_{C(\omega_h)} \sum_{\ell=1}^N \frac{1}{\varepsilon + h_\ell a_\ell} \prod_{j=\ell+1}^N \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon + h_j a_j}\right)}{h_N m_1 \sum_{\ell=1}^N \frac{1}{\varepsilon + h_\ell a_\ell} \prod_{j=\ell+1}^N \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon + h_j a_j}\right)}$$

eşitsizliği yazabilir. Buradan,

$$|\lambda - \mu| \leq m_1^{-1} \|R_\ell\|_{C(\omega_h)} \quad (4.35)$$

olur.

Şimdi ise, z_i 'nin değerlendirmesine geçildiğinde kolayca görülebilir ki, $\ell_h z_i$ fark operatörü için, ayrık maksimum prensibi doğrudur:

Eğer, $\ell_h z_i \geq 0$, $i = 1, \dots, N$ ve $z_0 \geq 0$ ise, bu durumda $z_i \geq 0$, $i = 0, 1, \dots, N$ olduğu görülür. Şimdi (4.31) eşitsizliği direkt olarak (4.27)'den çıkar.

Teorem 4.1. (4.22) fark probleminin çözümü $C(\hat{\omega})$ normunda (4.1)-(4.3) probleminin çözümüne ε 'a göre $O(N^{-1})$ hızıyla düzgün yakınsaktır:

$$\|u - y\|_{C(\omega_h)} \leq CN^{-1}, \quad (4.36)$$

$$|\lambda - \mu| \leq CN^{-1}. \quad (4.37)$$

eşitsizliği ile ifade edilir.

İspat. Yardımcı Teorem 4.2 (Lemma)'nin direkt olarak (4.31) ve (4.32)'de dikkate alınmasıyla, Teorem 4.1'in doğruluğu hemen çıkar.

5. ÇÖZÜM ALGORİTMASI VE NÜMERİK SONUÇLAR

Bu bölümde (1.2) problem için alınmış bir sayısal örnek üzerinde teorik sonuçlar denetlenmiştir:

Örnekte u 'ya göre lineer olmayan ve λ 'ya göre lineer bir problemin nümerik çözümü bulunmuştur. Uygun şebeke ve fark şeması (4.24)-(4.26) ve (4.22) formüllerine göre belirlenmiştir. Bu probleme y 'ye göre Kuazi-Lineerizasyon metodu uygulanmıştır.

Örnek 1. Aşağıdaki veri fonksiyonlarını içeren (1.2) tipli sınır-değer problemi ele alınmıştır.

$$\begin{aligned} F(x, u, \lambda) &= 2u + e^{-u} - x - \lambda, \quad 0 \leq x \leq 1 \\ A &= 1, \\ B &= 0, \\ \ell &= 1. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Düzgün olmayan şebekede (4.22) fark probleminin çözümü için aşağıdaki Kuazi-lineerizasyon iterasyon süreci kullanılmıştır.

$$\lambda^{(n)} = \sum_{i=1}^N h_i y_i^{(n-1)} + \sum_{i=1}^N h_i e^{-y_i^{(n-1)}} - \sum_{i=1}^N h_i x_i - \varepsilon \tag{5.2}$$

$$y_i^{(n)} = \left[\frac{\varepsilon}{\varepsilon + h_i F_y(y_i^{(n-1)})} \right] y_{i-1}^{(n)} - \left[\frac{h_i}{\varepsilon + h_i F_y(y_i^{(n-1)})} \right] \left[F(x_i, y_i^{(n-1)}, \lambda^{(n)}) + F_y(y_i^{(n-1)}) \right] \tag{5.3}$$

$$y_0^{(n)} = A, \quad y_N^{(n)} = B, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Bu iterasyon da (4.23) ifadesindeki gibi $\alpha = 2$ alınmış ve $n = 1, 2, \dots$ için $y_i^{(0)} = 1 - x_i$ başlangıç değeri olarak seçilmiştir. ω_h şebekesi üzerinde eğer,

$$\sup_{0 < \varepsilon < 1} \max_{\omega} |u_k(x) - y_k(x)| \leq N^{-p_k}, \quad k = 1, 2$$

ise, (p_1, p_2) dereceden ε parametresine göre düzgün bir nümerik metottur.

Burada, C ve p_k , ε ve N 'den bağımsız sabitlerdir. p_k yaklaşıkları ve ε parametresine göre düzgün yakınsama hızı aşağıdaki gibi çift şebeke metodu kullanılarak belirlenmiştir.

$$p_k^{\varepsilon, N} = \ln(r_k^{\varepsilon, N} / r_k^{\varepsilon, 2N}) / \ln 2, \quad k = 1, 2$$

$$r_k^{\varepsilon, N} = \max_{1 \leq i \leq N} |y_{k,i}^{\varepsilon, N} - y_{k,i}^{\varepsilon, 2N}|, \quad k = 0, 1, 2$$

Dört iterasyon'dan sonra, $r_0^{\varepsilon, N}$, $r_1^{\varepsilon, N}$ ve $r_2^{\varepsilon, N}$ maksimum hata sonuçları ve $p_1^{\varepsilon, N}$ ve $p_2^{\varepsilon, N}$ sayılarına karşılık gelen yakınsama hızları, sırayla $n = 8$, $n = 16$, $n = 32$ ve $n = 64$ olmak üzere, ε parametresinin $\varepsilon = 0.01$, $\varepsilon = 0.0001$, $\varepsilon = 0.000001$ ve $\varepsilon = 0.00000001$ değerleri için aşağıdaki Çizelge 1, Çizelge2, Çizelge 3 ve Çizelge 4'de listelenmiştir.

Ayrıca, (5.1) probleminin nümerik çözümünün grafikleri; $n = 16$, $n = 32$ ve $n = 64$ olmak üzere, sırayla ε parametresinin $\varepsilon = 0.01$, $\varepsilon = 0.0001$, $\varepsilon = 0.000001$ ve $\varepsilon = 0.00000001$ değerleri için karşılaştırmalı olarak ayrı ayrı çizilmiştir.

Burada, n sayısı 8'den başlayarak 64'e kadar artması, şebeke adımlarının sıklığını (küçüklüğünü) ifade etmektedir. Yani, $[0,1]$ aralığının daha küçük alt aralıklara ayrıldığını göstermektedir. Bundan dolayı, Çizelge ve şekillerde n sayısından, 8'den başlayarak küçülen değerler aldığından bahsedilmektedir.

```

/***** /
/*      PROGRAM      */
/*      Bu program, parametreye bağlı singular perturbe olmuş lineer olmayan */
/*      problemin düzgün olmayan şebekede Kuazi-lineerizasyon metoduyla      */
/*      çözümünü yapar      */
/*      */
/***** /

#include <stdio.h>
#include <math.h>
#include <conio.h>
float y1[80][8], y2[80][8], y3[80][8], y4[80][8], L[8];
float h[80], x[80], r[4], p1, p2, h1;
float x0, x1, b, b1, ep;
float sigma, t1, t2, t3, t4;
int i, j, n, m, l;
float f( float x, float y, float l1)
    {return ( 2*y+exp(-y)-x-l1); }
float ft( float y)
    {return ( 2-exp(-y)); }
float min( float x, float y) {return ((x<y) ? x:y); }
float max( float t5, float t6)
    {return (( t5<t6) ? t6:t5); }

main ()
{clrscr ();

```

```

/*          VERİLERİN OKUTULMASI          */
printf( " epsilon                : " ); scanf( " %f " , &ep );
printf( " alt sınır noktası      : " ); scanf( " %f " , &x0 );
printf( " üst sınır noktası     : " ); scanf( " %f " , &x1 );
printf( " y için alt sınır değeri : " ); scanf( " %f " , &b );
printf( " y için üst sınır değeri : " ); scanf( " %f " , &b1 );
printf( " şebekedeki nokta sayısı : " ); scanf( " %d " , &n );
printf( " iterasyon adım sayısı  : " ); scanf( " %d " , &m );

/*DÜZGÜN OLMAYAN ŞEBEKEYE GÖRE DÜĞÜM NOKTALARININ HESAPLANMASI */
sgma=min ( (x1-x0)/2 , ep*fabs(log(ep))/2 );
for ( l=1 ; l<=4 ; l++ )
    { h1=2* ((x1-x0)-sgma)/n ; x[0]=x0 ; x[n]=x1 ;
      for ( i=1 ; i<=n-1 ; i++ )
          { if ((sgma<=(x1-x0)/2) && ( i<=n/2)) x[i]=-ep/2*log(1-(1-ep)*2*i/n)
            if ((sgma==(x1-x0)/2) && ( i<=n/2))
                x[i]=-ep/2*log(1-(1-exp(-x1/ep))*2*i/n) ;
            if ( i>n/2) x[i]=sgma+(i-n/2)*h1 ; }
      for ( i=0 ; i<=n ; i++ ) y4[i][0]=1-x[i] ;
      for ( i=1 ; i<=n ; i++ ) h[i]=x[i]-x[i-1] ;

/*          PARAMETRE DEĞERLERİNİN HESAPLANMASI          */
      t3=0 ;
      for ( i=1 ; i<=n ; i++ ) { t3=t3+x[i]*h[i] ; }
for ( j=1 ; j<=m ; j++ )
    { y4[0][j]=b ; y4[n][j]=b1 ;
      t1=0 ; t2=0 ;
      for ( i=1 ; i<=n ; i++ ) { t1=t1+h[i]*2*y4[i][j-1] ; }
      for ( i=1 ; i<=n ; i++ ) { t2=t2+h[i]*exp(-y4[i][j-1]) ; }
      L[j]=t1+t2-t3-ep ;

/*          KUAZİ-LİNEERİZASYON İTERASYON METODUNUN UYGULANMASI          */
for ( i=1 ; i<=n ; i++ )
    { y4[i][j]= (y4[i-1][j]+h[i]/ep*( ft (y4[i][j-1])* y4[i][j-1]-f( x[i], y4[i][j-1], L[j])))
      /((1+ h[i]/ep*( ft (y4[i][j-1])))) ;
      }
    }
    for ( i=0 ; i<=n ; i++ )
        { switch (1)
          { case 1 : y1[i][m]=y4[i][m] ; break ;
            case 2 : y2[i][m]=y4[i][m] ; break ;
            case 3 : y3[i][m]=y4[i][m] ; break ;
          }
        }
    }
n=2*n ;
}

```

```

/*      YAKINSAMA MERTEBESİNİN BELİRLENMESİ      */
n=n/16 ;
r[0]=fabs ( y1[0][m]- y2[0][m] ) ;
    for ( i=1 ; i<=n ; i++ )
        r[0]=max ( r[0], fabs ( y1[i][m]- y2[2*i][m] ) ) ;
r[1]=fabs ( y2[0][m]- y3[0][m] ) ;
    for ( i=2 ; i<=n*2 ; i=i+2 )
        r[1]=max ( r[1], fabs ( y2[i][m]- y3[2*i][m] ) ) ;
r[2]= fabs ( y3[0][m]- y4[0][m] ) ;
    for ( i=4 ; i<=n*4 ; i=i+4 )
        r[2]=max ( r[2], fabs ( y3[i][m]- y4[2*i][m] ) ) ;
printf ( " epsilon=%10.8f  n=%5d \n " , ep , n ) ;
p1=log ( r[0]/r[1] )/log(2) ; p2= log ( r[1]/r[2] )/log(2) ;
printf ( "r[0]=%10.8f  p1=%10.8f  r1=%10.8f  p2=%10.8f  r2=%10.8f \n " , r[0] ,
p1 , r[1] , p2 , r[2] ) ;
for ( i=0 ; i=n*8 ; i++ ) printf ( "%10.7f " , y4[i][m] ) ;
getch () ;}

```

Çizelge 5.1. $\hat{\omega}_N$ şebekesinde (5.1) probleminin yaklaşık nümerik çözümünün $N=8$ için, (5.2) ve (5.3) iterasyon süreçlerinden yararlanılarak elde edilen $r_k^{\varepsilon, N}$ ($k=0,1,2$) maksimum hata sonuçları ve $p_k^{\varepsilon, N}$ ($k=1,2$) yakınsama hızı.

ε	r_0	p_1	r_1	p_2	r_2
10^{-2}	0.10373652	1.02381194	0.05101919	1.02486813	0.02567365
10^{-4}	0.11681025	1.09669328	0.05461895	1.03935635	0.02657455
10^{-6}	0.11700372	1.09721398	0.05468968	1.03943801	0.02660745
10^{-8}	0.11700644	1.09723723	0.05469006	1.03937876	0.02660874

Çizelge 5.2. $\hat{\omega}_N$ şebekesinde (5.1) probleminin yaklaşık nümerik çözümünün $N=16$ için, (5.2) ve (5.3) iterasyon süreçlerinden yararlanılarak elde edilen $r_k^{\varepsilon, N}$ ($k=0,1,2$) maksimum hata sonuçları ve $p_k^{\varepsilon, N}$ ($k=1,2$) yakınsama hızı.

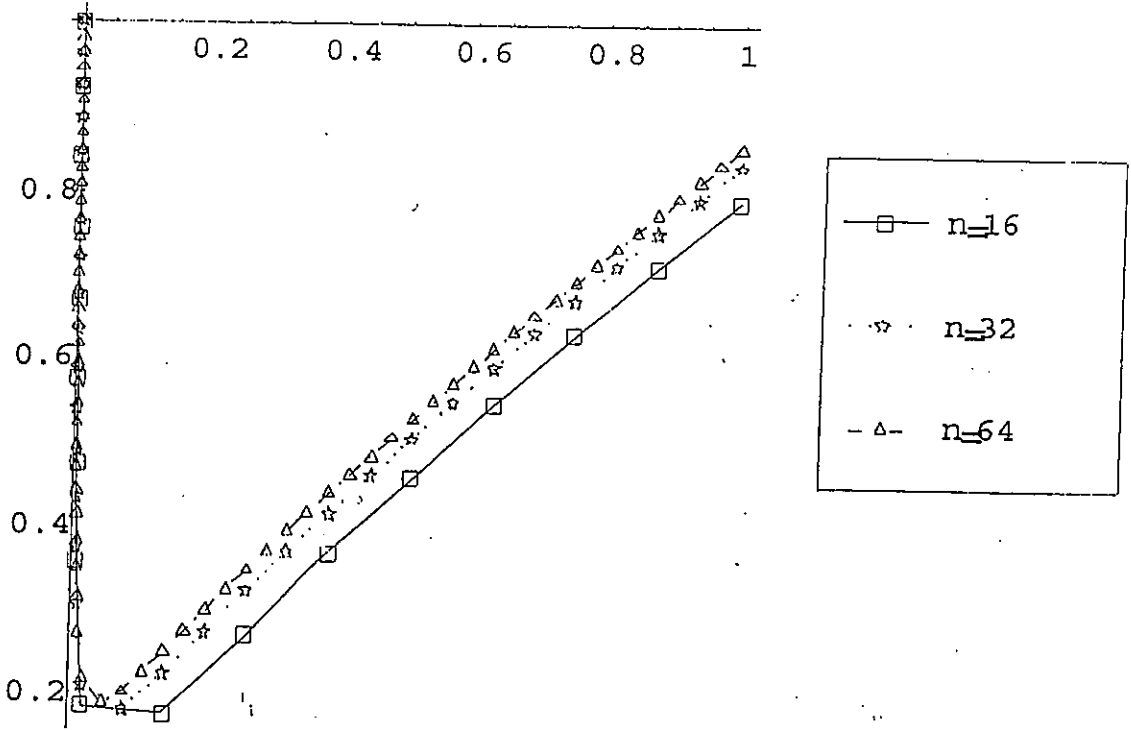
ε	r_0	p_1	r_1	p_2	r_2
10^{-2}	0.05101919	1.00248992	0.02546561	1.09682142	0.01301007
10^{-4}	0.05810221	1.04638052	0.02813201	1.02126479	0.01386020
10^{-6}	0.05821605	1.04742503	0.02816673	1.02116561	0.01387826
10^{-8}	0.05821672	1.04737222	0.02816808	1.02126598	0.01387796

Çizelge 5.3. $\hat{\omega}_N$ şebekesinde (5.1) probleminin yaklaşık nümerik çözümünün $N=32$ için, (5.2) ve (5.3) iterasyon süreçlerinden yararlanılarak elde edilen $r_k^{\varepsilon, N}$ ($k=0,1,2$) maksimum hata sonuçları ve $p_k^{\varepsilon, N}$ ($k=1,2$) yakınsama hızı.

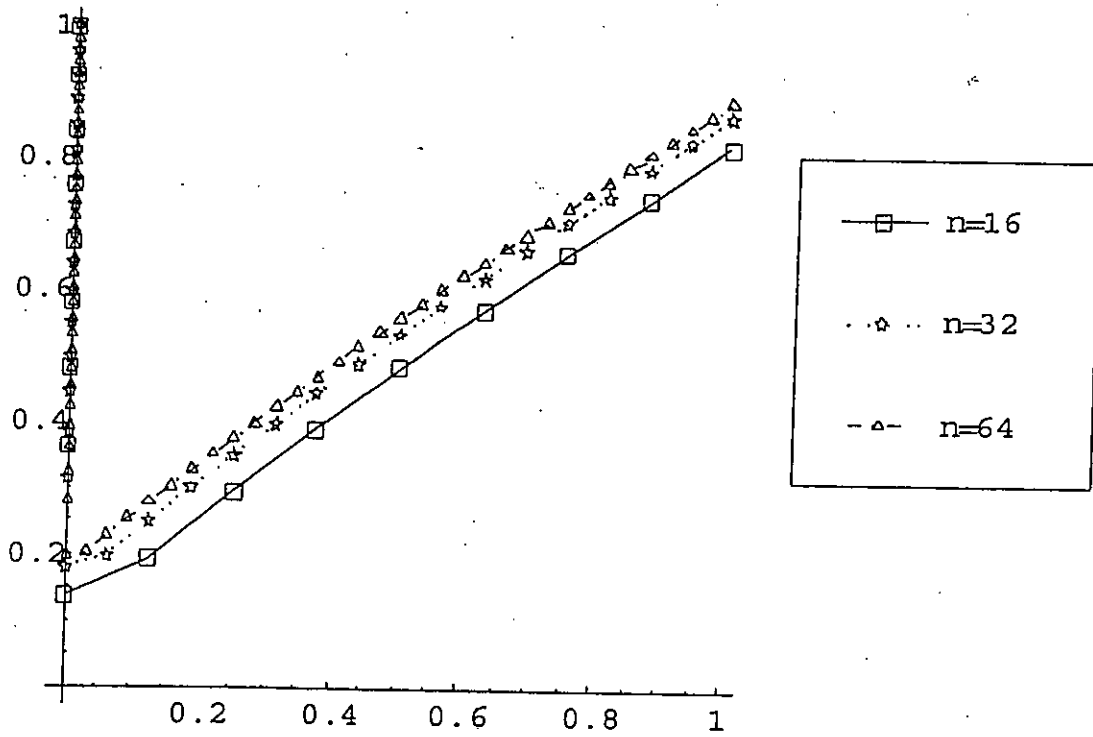
ε	r_0	p_1	r_1	p_2	r_2
10^{-2}	0.02567595	0.98078912	0.01301007	0.99680942	0.00651944
10^{-4}	0.02904521	1.02117562	0.01431100	1.01081872	0.00710204
10^{-6}	0.02912948	1.02346814	0.01432973	1.01110828	0.00710991
10^{-8}	0.02913117	1.02358079	0.01432945	1.01110101	0.00710981

Çizelge 5.4. $\hat{\omega}_N$ şebekesinde (5.1) probleminin yaklaşık nümerik çözümünün $N=64$ için, (5.2) ve (5.3) iterasyon süreçlerinden yararlanılarak elde edilen $r_k^{\varepsilon, N}$ ($k=0,1,2$) maksimum hata sonuçları ve $p_k^{\varepsilon, N}$ ($k=1,2$) yakınsama hızı.

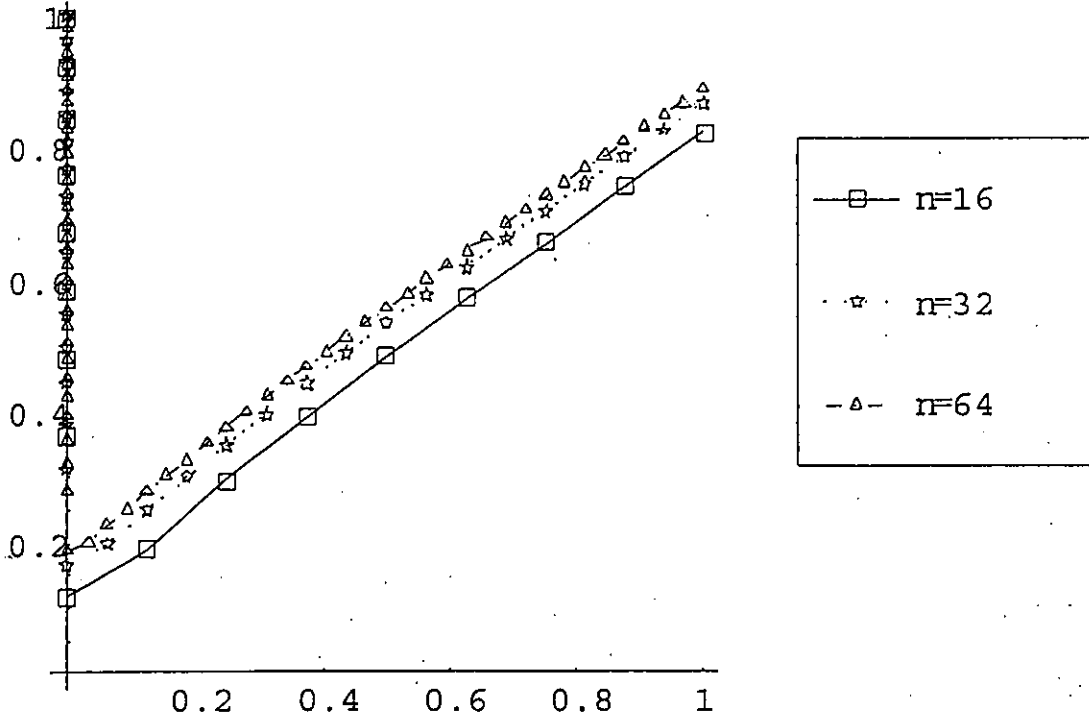
ε	r_0	p_1	r_1	p_2	r_2
10^{-2}	0.10373652	1.02381194	0.05101919	1.02486813	0.02507365
10^{-4}	0.11681025	1.09669328	0.05461895	1.03935635	0.02657455
10^{-6}	0.11700372	1.09721398	0.05468968	1.03943801	0.02660745
10^{-8}	0.11700644	1.09723723	0.05469006	1.03937876	0.02660874



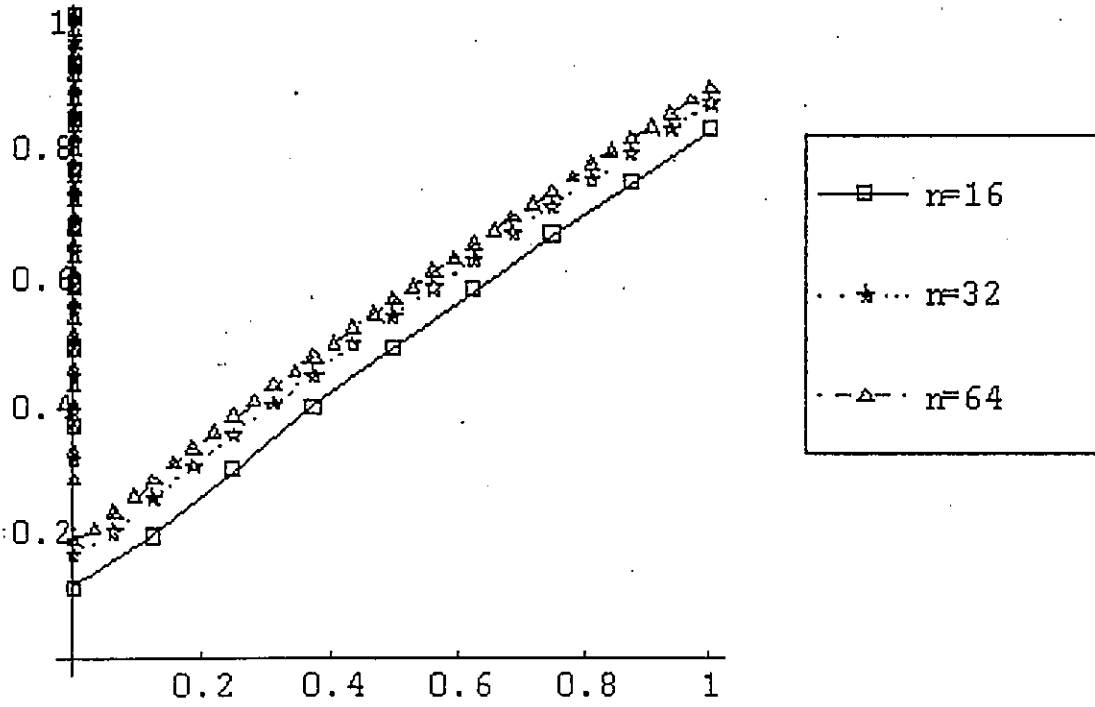
Şekil 5.1. $\epsilon=1/100$ değerine karşılık bulunan nümerik değerler



Şekil 5.2. $\epsilon=1/10000$ değerine karşılık bulunan nümerik değerler



Şekil 5.3. $\epsilon=1/1000000$ değerine karşılık bulunan nümerik değerler



Şekil 5.4. $\epsilon=1/100000000$ değerine karşılık bulunan nümerik değerler

6. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada, parametreye bağlı singular perturbe olmuş birinci mertebeden lineer ve lineer olmayan problemlerin sonlu fark metoduyla yaklaşık nümerik çözümü incelendi. Giriş ve literatür bölümünde belirtildiği gibi, bu problemlerin çözümü için, $O(h)$ kesinliğe sahip fark şemasının kurulması, bu fark şemasının hatasının değerlendirilmesi, ε parametresine göre düzgün yakınsaklığının, $p^{\varepsilon, N}$ ile yakınsaklık hızının belirlenmesi ve kararlılığının incelenmesi temel amaçtır. Singular perturbe olmuş problemler için tek referans, düzgün yakınsak fark şemasının kurulmasıdır. Çünkü bu tür problemler matematiksel olarak, en yüksek mertebeli türevleri içeren terimlerinin katsayılarının pozitif küçük bir ε parametresinin olduğu problemler (bu problemler sınır katlı problemler) olarak tanımlanır. Bu problemin $x=0$ noktası civarında bir sınır katı olduğu tespit edilmiştir.

Bu tip problemlerin özelliği, ε parametresinin küçük değerlerinde tanım bölgesinin bazı yerlerinde çok hızlı ve diğer kısımlarda ise, düzenli ve yavaş değişime sahip olmasıdır. Yani, çözümün ince geçiş katlarında çok hızlı, diğer yerlerde düzenli ve yavaş değişir. Hızlı değişim alanlarında çözüm fonksiyonunun türevleri ε parametresinin küçük değerlerinde sınır katı civarında sınırsız olarak sonsuza ıraksadığından, bilinen klasik nümerik yöntemlerin uygulanması, kararsızlıklarından dolayı imkansız olur. Dolayısıyla, kararlı ve küçük ε parametresine göre düzgün yakınsaklık özelliğine sahip, nümerik metotların kurulması büyük önem taşımaktadır. Bu nedenle bu alanda iki tip yaklaşım ağırlık kazanmaktadır:

- i) Düzgün (eşit aralıklı noktalardan oluşan) şebekede üstel katsayılı fark şemalarının uygulanması,
- ii) Sınır katları dahilinde (civarında) özel kurallarla belirlenen düzgün olmayan şebekenin seçimine dayalı fark metotları,

Bunların her ikisinde de amaç, diferansiyel problemin özelliklerini daha iyi bir şekilde aksettirebilecek nümerik metotların kurulmasıdır.

Bu çalışmaya temel teşkil eden parametreye bağlı singular perturbe olmuş problemler için, giriş ve literatür bilgilerinde de belirtildiği gibi, nümerik çözüm yapılmıştır. Genelde bu problemlerin, singular perturbe olmamış durumları için varlık-teklik, kararlılık ve analitik-yaklaşık iterasyon çözümleri ile ilgili özellikleri incelenmiştir. Bu çalışmada, (1.1)-(1.2) problemlerinin nümerik çözümü yapılmıştır. Bu açıdan, bu alanda yapılan yeni bir çalışma olacaktır.

Bu probleme uygulanan metot, belirtilen özelliklerini yansıtılma açısından etkili bir metottur.

(1.1) problemi için fark şeması, üstel katsayılı baz fonksiyonlarından, kalan terimleri integral şeklinde olan ve ağırlık fonksiyonu içeren interpolasyon kuadratur formüllerinden yararlanarak kurulmuştur. (1.2) probleminin fark şeması ise, parçalı sabit baz fonksiyonları ve kalan terimleri integral şeklinde olan interpolasyon kuadratur formüllerinden yararlanarak kurulmuştur. Sınır katı dahilinde logaritmik

fonksiyon biçiminde ifade edilen daha ince bir şebeke, sınır katı haricinde daha kaba adımlı düzgün şebeke uygulanmıştır.

Böylece (1.2) problemine ait alınan teorik sonuçlar bir örnek üzerinde değerlendirilmiştir. Elde edilen nümerik sonuçlar teorik sonuçlara uygun olarak bulunmuştur. Ve bu nümerik sonuçlar teorik sonuçları ispatlar mahiyettedir.

Şöyle ki;

Çizelge 5.1, Çizelge 5.2, Çizelge 5.3 ve Çizelge 5.4'de görüldüğü gibi, $0 \leq x \leq 1$ aralığında x 'in değişik değerlerinde kurulan fark şemasının dört iterasyon'dan sonra, $n=8$, $n=16$, $n=32$ ve $n=64$ olmak üzere, ε parametresinin $\varepsilon=10^{-2}$, $\varepsilon=10^{-4}$, $\varepsilon=10^{-6}$ ve $\varepsilon=10^{-8}$ değerleri için, $r_0^{\varepsilon,N}$, $r_1^{\varepsilon,N}$ ve $r_2^{\varepsilon,N}$ maksimum hata sonuçları ve $p_1^{\varepsilon,N}$ ve $p_2^{\varepsilon,N}$ ile tanımlanan yakınsama hızları listelenmiştir. Bu sonuçlar teorik sonuçlara uygun olarak elde edilmiştir. ε parametresine göre düzgün yakınsama hızı olan $p^{\varepsilon,N} = (p_1^{\varepsilon,N}, p_2^{\varepsilon,N})$ 'nin yakınsama derecesi birinci derecedendir. Ve $O(N^{-1})$ ile belirlenmiştir. Bu problemin yakınsama derecesi $p^{\varepsilon,N} = 1$ biçiminde gösterilir. Bu ise, verilen Çizelgelerden ε ve N 'nin çeşitli değerleri için kolayca görülmektedir.

Şekil 5.1'de $n=16$, $n=32$ ve $n=64$ değerlerinde $\varepsilon=10^{-2}$ için yaklaşık nümerik çözümün grafiği verilmiştir. Bu grafikte görüldüğü gibi, ε parametresinin $\varepsilon=10^{-2}$ büyük değeri için, n 'nin büyük değerlerinde $x=0$ sınır katı civarında yaklaşık çözümün kesin çözümden uzaklaştığı, n 'nin küçük değerlerinde ise, yaklaşık çözümün kesin çözüme yaklaştığı görülmektedir.

Şekil 5.2, Şekil 5.3, ve Şekil 5.4'de ε parametresinin $\varepsilon=10^{-4}$, $\varepsilon=10^{-6}$ ve $\varepsilon=10^{-8}$ değerleri için, n değerlerinin ve ε değerlerinin küçülerek değerler alması Şekil 5.1'e göre yaklaşık nümerik çözümün, kesin çözüme daha yakınlaştığı görülmektedir. Bu durum ise, ε parametresinin ve n 'nin değerleri küçüldükçe, yaklaşık nümerik çözümün, kesin çözüme ε parametresine göre düzgün yakınsadığını ve kararlılığını gösterir.

Bundan dolayı, elde edilen nümerik sonuçlar, alınan teorik sonuçlara uygun sonuçlardır.

Bu sonuçlar, (4.22) fark şemasından ve Kuazi-lineerizasyon yönteminden yararlanılarak (5.2)-(5.3) çözüm algoritması elde edilmiştir.

KAYNAKLAR

- Abd-Elateef Kamar, A. R., 1999. Monotone iterative technique for degenerate singular perturbation problem. *İCNPAA*, 1, 1-8.
- Abd-Elateef Kamar, A. R., 1999. Monotone iterative technique for singular perturbation problem. *Appl. Math. and Comput.*, 131, 559-571.
- Amiraliyev, G. M., 1988. On the numerical solution of the system of Boussinesque with boundary layers. *USSR Modelling in Mechanics(Russian)*, 3, No. 3, 3-14.
- Amiraliyev, G. M., Mamedov, Y.D., 1995. Difference schemes on the uniform mesh for singular perturbed pseud-parabolic equation. *Turkish J. of Math.*, 9, 207-222.
- Ascher, U. M., Matteij, R. M. M., Russell, R. D., 1988. *Numerical Solution of Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations*. New Jersey. 595s.
- Attili, B. S., 2001. Efficient finite differences for parameter-dependent singularities in two-point boundary value problems. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 190, 5543-5549.
- Bellman, R., 1964. *Perturbation Techniques in Mathematics, Physics and Engineering*. Holt, Rinehart, Winston, New York: 345s.
- Boglaev, I. P., 1984. Approximate solution of a nonlinear boundary value problem with a small parameter for the highest-order derivative. *USSR Comput. Math. and Math. Physics(Russian)*, 25, 30-39.
- Boglaev, I. P., Sirotkin, V. V., 1993. The solution singularly perturbed Huge Problems via domain decomposition. *Computer Math. Appl.*, 25, No. 9, 31-42.
- Doolan, E. P., Miller, J. J., Schilders, W. H. A., 1980. *Uniform Numerical Methods for Problems with Initial and Boundary Layer*. Boole, Press, Dublin, 324s.
- Feckan, M., 1994. Parametrized singularly perturbed boundary value problems. *J. Math. Anal. and Applications*, 188, No. 2, 426-435.
- Gülle, A., Duru, H., 1998. Convergence of the iterative process to the solution of the boundary problem with the parameter. *Transactions of Academy of Sciences of Azerbaijan, series of Physical-Technical and Mathematical Sciences*, 18, No. 3-4, 34-40.
- Hu, X. C., Manteuffel, T. A., McCormick, S, Russel, T. F., 1995. Discretization for singular perturbation: The one-dimensional case. *J. Numer. Anal.*, 32, No. 1, 83-109.
- Jankowski, T., 1993. Existence, uniqueness and approximate solutions of problems with a parameter. *Zesz. Nawk. Politech. Gdansk. Math.*, 16, 3-167
- Jankowski, T., Lakshmikantham, S., 1997. Monotone iterations for differential equations with a parameter. *JAMSA*, 10, No. 3, 273-278.
- Kadalbajoo, M. K., Reddy, Y. N., 1989. Asymptotic and numerical analysis of singular perturbation problems. A survey. *Applied Math. and comput.*, 30, 223-259.

- Kadalbajoo, M., Patidar, K. C., 2002. A survey numerical techniques for solving singularly perturbed ordinary differential equations. *Appl. Math. and Comput.*, 130, 457-510.
- Kassoy, D. R., 1982. A note asymptotic methods for jump phenomena. *SIAM J. Appl. Math.*, 42, 926-932
- Kibenko, A. V., Perov, A. I., 1963. Some existence theorems to the boundary value problem with parameter. *Sci. Notes of Functional Analysis Seminar of Balerus State University*, 7, 52-58.
- Liu, X., McRae, F. A., 2001. Monotone iterative method for boundary value problems of parametric equations. *JAMSAM*, 14, 183-187.
- Mamedov, Y. D., 1979. On the approximate solution of the boundary value problem with parameter. *Sci. Notes of Bacu State University*, Phys. Math., 4, 1-11.
- Miller, J. J., Carrol, J., 1990. Completely exponentially fitted finite difference schemes for some singular perturbation problems. *SIAM J. Numer. Anal.*, 25, 225-230.
- Nayfeh, A. H., 1973. *Perturbation Methods*. John Wiley and Sons. New York. 425s.
- O'Malley, R. E., 1991. Singular perturbation, asymptotic evaluation of integrals and computational challenges. *Asymptotic Analysis and Numerical of Partial Differential Equation*, M. Dekker, New York. 3-26.
- O'Riorden, E., Stynes, M., 1987. A uniform finite element method for conservative singularly perturbed problem. *J. of Comp. Applied Math.*, 18, 163-174.
- Robert, S. M., 1982. A boundary value technique for singular perturbation problems. *J. Math. Anal. and Applications*, 87, 489-508.
- Pomentale, T., 1976. A constructive theorem of existence and uniqueness for problem $y' = f(x, y, \lambda)$, $y(a) = \alpha$, $y(b) = \beta$. *Z. Angew. Math. Mech.*, 56, 387-388.
- Roos, H. G., Stynes, M., Tobiska, L., 1996. *Numerical Methods for Singularly Perturbed Differential Equation: Convection-Diffusion and Flow Problems*. Springer-Verlag, Berlin, 448s.
- Schmisser, C., Weiss, R., 1986. Asymptotic analysis of singularly perturbed boundary value problems. *SIAM J. Math. Anal.*, 17, 560-579.
- Selvakumar, K., 1994. A computational method for solving singular perturbation problems using exponentially fitted finite difference schemes. *Appl. Math. And Comput.*, 66, 277-292
- Surla, K., 1988. A uniformly convergent spline difference scheme for a singularly perturbed self adjoint problem on non-uniform mesh. *ZAMM*, 68, 420-422.
- Yasir, K.H., Tang, Y., 2002. Computation of the singularity induced bifurcation points in DAEs via extended system reduction. *Appl. Numer. Math.* (basilacak)
- Yu, P., 1998. Computation of the simplest normal forms with perturbation parameters based to Lie transform and rescaling. *J. Computational and Appl. Math.*, 144, 359-373.

ÖZ GEÇMİŞ

1965 Torul doğumlu. İlkokulu Giresun-Doğankent Çatalağaç köyünde bitirdi. Orta ve Lise öğrenimini Erzincan'da tamamladı. Yüksek öğrenime,1987 yılında Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünde başladı ve 1992 yılında mezun oldu. Aynı yıl Ardahan-Hanak Lisesine matematik öğretmeni olarak atandı. 1993 yılında Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisansa başladı ve 1995 yılında Yüksek Lisans' bitirdi. Aynı yıl Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nde doktora programına başladı. Evli ve bir çocuk babasıdır.